UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Rozvíjení matematických idejí pomocí origami

Developing mathematical ideas with origami

Bakalářská práce

Vypracoval: Petr Mentlík

Vedoucí práce: Mgr. Jiří Přibyl

Studijní program: B 1101 – Matematika

Studijní obor: Matematika – Geografie

Ústí nad Labem 2014

UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta
Akademický rok: **2012/2013**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Petr MENTLÍK**
Osobní číslo:	**F11163**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Matematika (dvouoborové)**
	Geografie (dvouoborové)
Název tématu:	**Rozvíjení matematických idejí pomocí origami**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky PřF**

Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í :

1. prostudování doporučené literatury
2. stanovení partií základoškolské či středoškolské matematiky, které by bylo možné rozvíjet pomocí origami
3. vypracování osmi pracovních listů, které by korespondovaly s vytipovanými partiemi
4. provést experiment na ZŠ či SŠ, který by ověřil alespoň čtyři z těchto pracovních listů
5. provést analýzu posteriori otestovaných pracovních listů
6. vypracovat metodický pokyn pro zařazení těchto pracovních listů do výuky

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

FUSE, Tomoko. Fabulous origami boxes: geometrical shapes by paper folding. 1st ed. Tokyo, Japan: Japan Publications Trading Co, 1998, xx, 245 p. ISBN 08-704-0978-6.
HAGA, Kazuo, Josefina FONACIER a Masami ISODA. Origamics: mathematical explorations through paper folding. [English ed.]. Hackensack, NJ: World Scientific, c2008, xvii, 134 p. ISBN 981-283-489-3.
HULL, Thomas. Project origami: activities for exploring mathematics. Wellesley, Mass.: A.K. Peters, c2006, xx, 245 p. ISBN 978-156-8812-588.
MITCHELL, David. Exploring Mathematical Ideas with Origami. Kendal, England: Water Trade, 2001. ISBN 0-9534774-4-4.
MITCHELL, David. Mathematical origami: geometrical shapes by paper folding. Revised ed. Norfolk: Tarquin, 1999, xx, 245 p. ISBN 18-996-1818-X.
MONTROLL, John. A plethora of polyhedra in origami. Mineola, N.Y.: Dover Publications, c2002, 120 p. ISBN 04-864-2271-2.
MONTROLL, John. Teach yourself origami. New York: Dover Publicatons, 1998, 120 p. ISBN 04-864-0141-3.
PEARL, Barbara Erica. Math in motion: origami in the classroom : a hands-on creative approach to teaching mathematics. Revised ed. [Newport Beach, CA: Math in Motion], 1997, xx, 245 p. ISBN 09-647-9243-5.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jiří Přibyl**
Katedra matematiky PřF

Datum zadání bakalářské práce: **15. května 2013**
Termín odevzdání bakalářské práce: **24. dubna 2014**

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Pavlík, CSc.
děkan

doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc.
vedoucí katedry

V Ústí nad Labem dne 15. května 2013

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jen pramenů, které cituji a uvádím v seznamu literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., ve znění zákona č. 81/2005 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

V Ústí nad Labem dne 20. dubna 2014 ………..…………………………………

Petr Mentlík

Mé velké poděkování patří Mgr. Jiřímu Přibylovi za vedení bakalářské práce, za věnovaný čas a za cenné připomínky, které vedly ke zvýšení úrovně práce.

Rovněž děkuji učitelům matematiky Mgr. Haně Novotné, Mgr. Ivetě Rozmušové, Mgr. Danielu Remtovi, Mgr. Karlovi Fialovi a Tomáši Císařovi za prostor k otestování pracovních listů, za rady a připomínky.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá origami a jeho využitím ve výuce matematiky. Cílem práce bylo vytvořit osm pracovních listů. Vybrané pracovní listy byly vyzkoušeny v praxi ve školách. Práce je určena učitelům matematiky, kterým předkládá aktivity přímo k využití, včetně metodických pokynů a zkušeností z provedených experimentů. Kromě sady pracovních listů obsahuje práce stručnou historii origami, ukázku jeho využití v různých fázích vyučovacího procesu a propojení skládání z papíru s rámcovými vzdělávací programy. Pro svoji novost a originalitu je skládání z papíru přitažlivé pro žáky a umožňuje propojit matematiku s uměním. Testování na školách prokázalo, že origami je smysluplná aktivita pro výuku matematiky.

Klíčová slova: skládání z papíru, origami, vyučování matematiky, pracovní listy

Abstract

The Bachelor thesis deals with origami and its applications in mathematics education. The goal of the work was to create eight worksheets. Selected worksheets were tested in practice in schools. The thesis is intended for teachers of mathematics, which presents a variety of activities prepared for teaching, including methodological guidelines and experience from testing in schools. In addition to a set of worksheets is there described the history of origami, applications origami in various stages of educational process and links with educational curriculum. Paper-folding is for students attractive for their novelty and originalit and its able to connect mathematics with art. Testing in schools showed that origami is a meaningful activity in teaching mathematics.

Key words: paper-folding, origami, mathematics education, worksheets

Obsah

1 Úvod

Když jsem jako malý skládal papírové čepice a parníky, netušil jsem, že se tyto skládanky dají využít v matematice. Propojení origami a matematiky bylo natolik lákavé, že jsem si jej vybral ke své bakalářské práci.

Nejdříve jsem se musel s tímto japonským uměním seznámit důkladněji a poznat, co všechno umožňuje. Každou prostudovanou knihou, každým složeným modelem se mé podvědomí o využití origami k rozvíjení matematických idejí rozšiřovalo. Tím se začaly pokládat základy jednotlivých pracovních listů. Pro jejich zpracování bylo důležité, naučit se vytvářet kvalitní nákresy a diagramy. K tomu jsem využil grafický program CorelDRAW 12. Velmi významným momentem při tvorbě práce byla návštěva škol a zpětná vazba od žáků a učitelů.

Jádro práce tvoří sada osmi pracovních listů. Strany jim předcházející tvoří teoretické podhoubí. V jeho první části se snažím ve zkrácené podobě definovat origami, popsat jeho historii a využití v matematice. Předpokládanému čtenáři, učiteli matematiky, poskytuje tato část základní informace, které může uplatnit při hodině využívající skládání z papíru nebo k motivaci žáků. Dále se snažím argumentovat významem origami ve vyučovacím procesu z pohledu vyučovacích metod a z pohledu rámcových vzdělávacích programů. Tato část by měla učitelům usnadnit zařazení pracovních listů do výuky. Poté již následuje představení jednotlivých pracovních listů. Ty jsou rovněž přílohou práce pro jejich případné množení. Snažil jsem se, aby skladba pracovních listů byla co nejpestřejší. Všechny obrázky a grafy jsou autorské.

Doufám, že se čtenář po prostudování práce přesvědčí o tom, že matematické ideje jdou pomocí skládání z papíru rozvíjet a že čtenář, učitel, využije nějaký pracovní list při své výuce matematiky, či jej inspiruje k jiné aktivitě.

2 Origami

Definovat origami není snadné. Můžeme říct, že se jedná umění a vědu skládání z papíru [1]. Sestavit konkrétnější definici je obtížný úkol, jelikož mezi samotnými origamisty probíhají spory, zda skládat pouze z papíru či i z jiných materiálů, stříhat či nestříhat, lepit či nelepit.

Samotné slovo origami pochází z japonštiny a je složené ze dvou, původně čínských znaků: slovesa oru (skládat) a kami (papír). Spojení vzniklo již ve středověku, ale s jiným významem než dnes. Používalo se pro označení úředního dokumentu složeného jistým předepsaným způsobem. Skládání z papíru bylo označováno slovy orikata, orisue [2] případně orimono [3]. Od konce 19. století se výraz origami začal užívat v tradičních japonských školách, v 50. letech 20. století se rozšířil do západních zemí a do celého světa. Přestože je dnes označení origami celosvětově uznáváno, některé země používají vlastní názvy. Například anglicky mluvící země užívají pojem paperfolding, německy papierfalten a španělsky mluvící výraz papiroflexia [2].

2.1 Historie origami

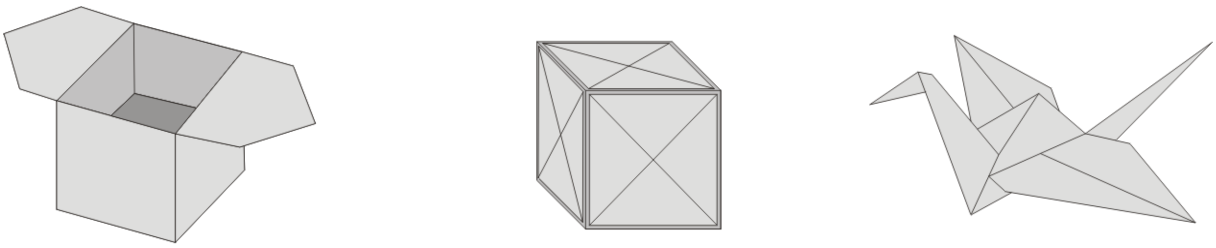
Japonsko

O počátku origami toho víme jen velmi málo. Někteří spojují vznik origami přímo s vynálezem papíru na přelomu prvního století našeho letopočtu. Tento pohled je zřejmě však milný. Čínský znak pro papír, zhi, označuje látku vyrobenou z hedvábí, na kterou je možné psát. Je chápán jako materiál na psaní a ne na skládání [3].

Číňané se snažili techniku výroby papíru před ostatními státy utajit. Přes veškerá opatření se v sedmém století přenesla výroba z Číny přes Koreu do Japonska. Tím se dostal papír do země vycházejícího slunce, kde origami jako umění vzniklo. Někteří origamisté datují vznik již do období Heian (794 – 1185). Odvolávají se přitom na dva příběhy. První vypráví o muži jménem Abe-no-Semei, který vytvořil ptáka a proměnil jej v živého, druhý o chlapci jménem Fujiwara-no Kiyosuke, který daroval své bývalé přítelkyni falešnou žábu. Není zde však důvod věřit, že pták či žába byla složena z papíru. Nejstarším pramenem odkazující na origami je tak krátká báseň od Ihary Saikaku z roku 1680. Ta říká: „*Rosei-ga yume-no cho-wa orisue.*“ *Motýli v Roseině snu se mohou stát orisue (= origami).* Je zde odkazováno na model zvaný Ocho Mecho (ženský a mužský motýl). Tento model se dodnes používá jako dekorační prvek zejména na svatbách [3].

Origami v té době sloužilo především k ceremoniálním a náboženským účelům. Například jako výzdoba šintoistických svatyní. Papírové řetízky poskládané podle přesně daných pravidel označovaly hranice svatyně, do které může vstoupit pouze kněz. Tyto řetízky zde najdeme dodnes a často se používají i u vchodů do japonských domů, kde symbolizují, že dům je očištěn a připraven k novoročním oslavám [2]. V roce 1764 Ise Sadatake sestavil první origami knihu Tsutsumi-no Ki. Ta obsahuje návod na sestavení třinácti ceremoniálních skládanek [4].

Vedle toho se v 17. století začíná rozvíjet rekreační skládání, skládání pro zábavu. Výjevy z roku 1734 ukazují skládanky lodi, krabičky Sanbo a modulárního origami zvané Tamatebako. Roku 1797 Akisato Rito publikuje knihu Sembazuru Orikata (Tisíc jeřábů) s instrukcemi jak sestavit 49 propojených jeřábů [3].



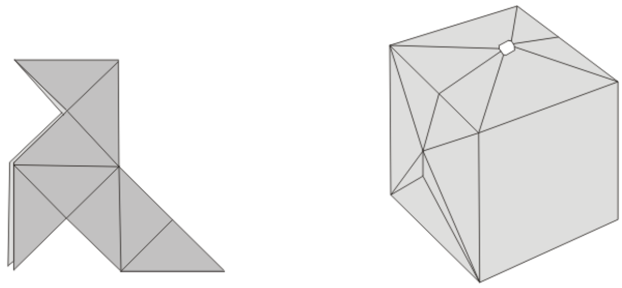
Obr. 1 – Krabička Sanabo, modulární origami Tamatebako, klasický japonský jeřáb.

Papírový jeřáb (Orizuru) je vůbec nejznámější a nejoblíbenější papírová skládanka z Japonska. Jeřáb je tradičním symbolem dlouhého života a lidé si i stovky složených jeřábů zavěšují na dlouhé šňůry pro štěstí. Váže se k němu legenda, že kdo složí tisíc jeřábů, splní se mu jakékoliv přání. Jedná se rovněž o symbol míru, kterým se stal, když svět obletěl životní příběh japonského děvčátka Sadako Sosaki. Sadako měla dva roky, když na Hirošimu dopadla atomová bomba. V jedenácti pak onemocněla leukémií. Pustila se tedy do skládání jeřábů a věřila, že když jich sestaví tisíc, uzdraví se. Bohužel, zemřela dříve, než dosáhla vytouženého cíle. V roce 1958 byl v Hirošimě postaven pomník dětským obětem války. Má podobu dívky držící v ruce nekonečného papírového jeřába [2].

Evropa

Historie skládání papíru v Evropě je kapitolou samo o sobě. Mnoho origamistů-historiků věří, že se vyvíjelo více méně nezávisle na Japonsku. Hlavní důvody, které je k tomu vedou, vidí v rozlišných postupech při skládání [4].

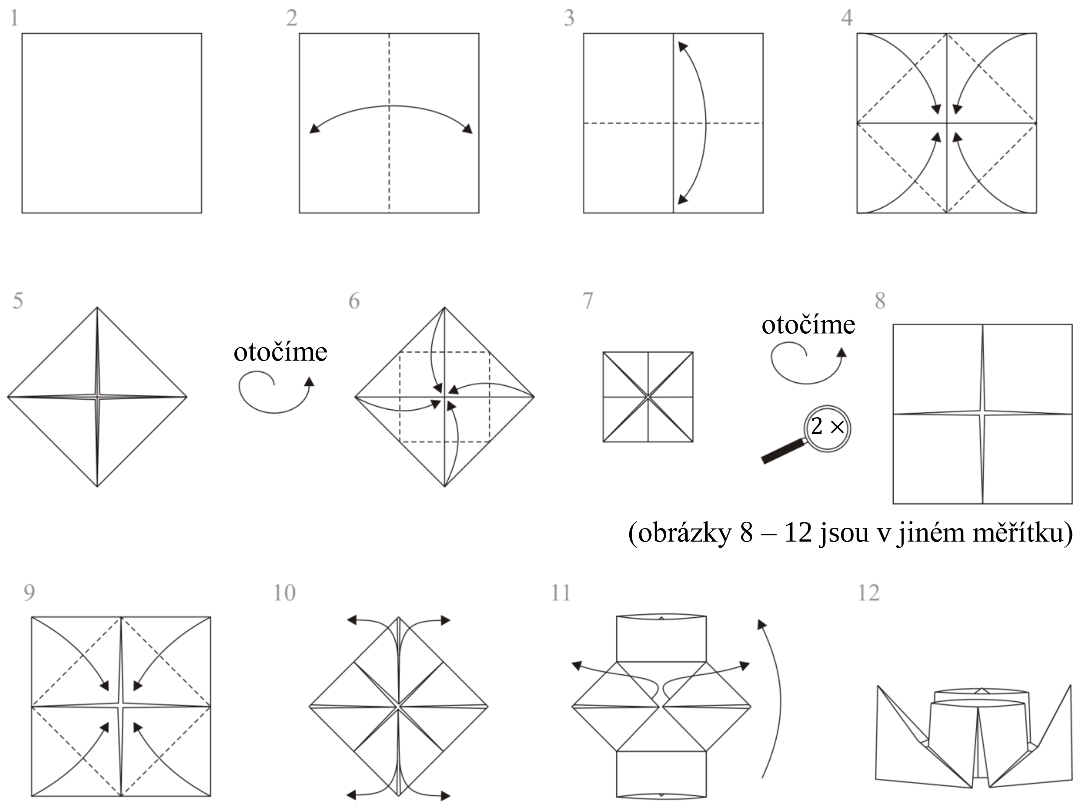
Jisté je, že španělští mauři používali origami při studiu geometrie. Údajně nejstarší evropskou skládankou je španělská pajarita (čteme pacharita, u nás známá jako koník), jejíž vznik je datován již do 13. století. Jedná se o španělské origami – papiroflexia, na které jsou Španělé pyšní a věnovali mu i dvoumetrový pomník [2]. Ve čtvrtém jednání hry The Dutchess of Malfi, Vévodkyně z Amalfi, napsané 1614 Johnem Websterem, je odkazováno na jisté papírové vězení. Origamisté si myslí, že se jedná a o model vodní bomby, klasické origami. Je jisté, že skládáním z papíru se zabýval i Leonardo da Vinci, který nakreslil návod, jak z kusu papíru složit létající vlaštovku [2]. V polovině 19. století zakládá Friedrich Fröbl první školu. Do jejího vzdělávacího systému zahrnuje i origami [3].



Obr. 2 – Vlevo španělská pajarita, vpravo model vodní bomby.

Česko

Ve 20. století se origami rozšířilo do celého světa a vznikají jednotlivé národní spolky. V roce 2003 vzniká Česká origami společnost (ČOS). Symbolem českého skládání papíru je model parníku.

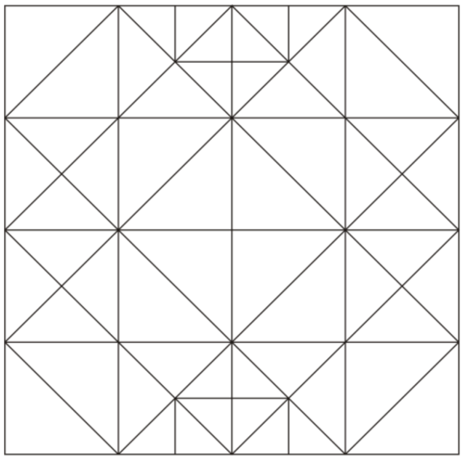


Obr. 3 – Obrázkový návod na sestavení parníku.

2.2 Origami a matematika

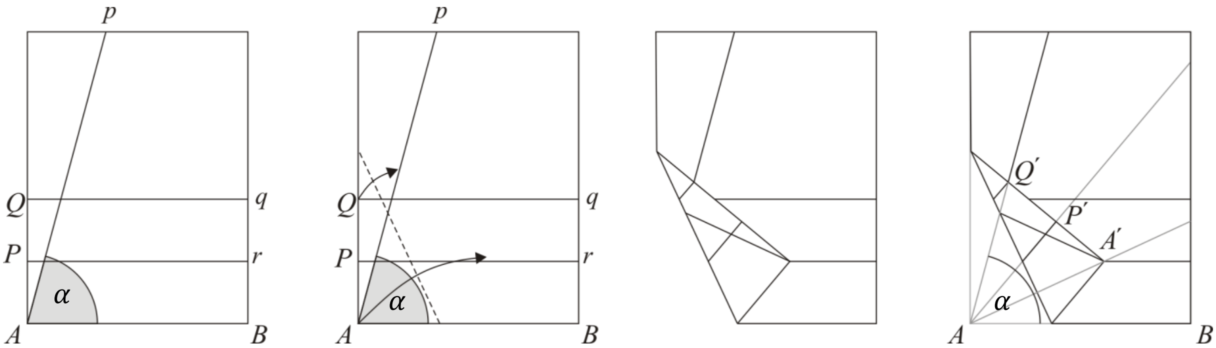
Jak stojí výše, již mauři používali origami při studiu geometrie. Ohyby a hrany reprezentují přímky, jejich protnutí vytváří úhly a body. Studium hran vtlačených do kousku papíru odhaluje bohatství geometrických objektů a vlastností.

Obrázek čtyři ukazuje vytlačené rysy rozloženého parníku. Vzniklé hrany ilustrují matematické objekty – přímky, úhly, rovinné útvary, či osy souměrnosti. Studium vývoje modelu je velmi poučné. Začíná se z kusu papíru (nejčastěji čtverce), dvojdimensionálního objektu a manipulací s ním se formuje těleso, třídimensionální objekt. Když se origamisté zabývají novou skládankou, model rozloží a zkoumají vzniklé rysy [5].



Obr. 4 – Síť rysů v rozloženém parníku.

Pomocí origami jsme schopni vytvářet velké množství geometrických objektů a řešit mnoho matematických problémů. Dokonce takové, které nejsou v Euklidovské geometrii řešitelné jako například duplikaci krychle či trisekci úhlu (viz obrázek 5) [6].



Obr. 5 – Postup trisekce úhlu libovolného úhlu α.

Je dán libovolný úhel α. Vytvoříme přímku q, která je rovnoběžná s přímkou AB a přímku r, která je osou těchto rovnoběžek. Dále provedeme přehyb takový, který bod Q zobrazí na přímku p a bod A na přímku r, $|\text{úhel } A'AB| = |\text{úhel } P'AA'| = |\text{úhel } Q'AP'| = \frac{\alpha}{3}$.

Vidíme, že origami je silný nástroj, který dokáže řešit i některé Euklidovsky neřešitelné úlohy. Origami je však silným nástrojem i ve výuce matematiky. Významná origamistka, Tomoko Fuse, říká: „*All origami begins with putting the hands into motion. Understanding something intellectualy and knowing the same thing tactilely are very diferent*.“[1] [5, str. 14]. Již Jan Ámos Komenský tvrdil, že: „*Vše máme pohlcovati smysly v počtu možná co největším.*“ [7, str. 52]. Origami, jako vyučovací metodě, se věnuje následující kapitola.

1 Překlad: „*Všechny skládanky origami začínají uvedením rukou v pohyb. Mezi pochopením něčeho duševně, abstraktně a poznáním toho samého prakticky, hmatově je velký rozdíl.*“

3 Vyučovací metody

„Methodos, slovo původu řeckého, znamená cestu, postup. V didaktice pod pojmem vyučovací metoda chápeme způsoby záměrného uspořádání činností učitele i žáka, které směřují ke stanoveným cílům.“ [8, str. 166].

Smyslem a posláním vyučovací metody je dosáhnout účinně a pokud možno trvale požadovaných změn ve vzdělání žáka. Jde tedy o dosažení maximální didaktické efektivity metody. Didakticky účinná metoda má mimo jiné následující vlastnosti:

- je informativně nosná, tj. předává nebo zprostředkuje plnohodnotné informace a dovednosti, obsahově nezkreslená
- je formativně účinná, tj. rozvíjí poznávací procesy
- je racionálně i emotivně působivá, tj. strhne, aktivuje žáka k prožitku učení a poznávání
- je výchovná, tj. rozvíjí morální, sociální, pracovní a estetický profil žáka
- je použitelná v praxi, ve skutečném životě, přibližuje školu životu [9].

Podle výše zmíněné definice můžeme skládání papíru chápat jako jednu z možných vyučovacích metod. V provedeném experimentu jsme si ověřili, že je schopna zprostředkovávat plnohodnotné informace, zkoumání reálně existujících (hmatatelných) objektů přibližuje školu životu a rozvíjí poznávací procesy. Origami pro svoji netradičnost aktivuje žáka k prožitku poznávání a učení, a pro svoji uměleckost rozvíjí estetický profil žáka.

3.1 Dělení vyučovacích metod

Vyučovací metody rozdělujeme podle fáze vyučovací procesy na:

1. motivační – stimulační, usměrňující zájem
2. expoziční – podání učiva
3. fixační – opakování a procvičování učiva
4. klasifikační a diagnostické – hodnocení a kontrola [9]

Motivační

Komenský praví: *„Přistupuj k učení jen tehdy, byla-li u žáka silně podnícena chuť k učení.“* [7, str. 31].

Motivace je základním kamenem kvalitní výuky, přestavuje úspěšný start vyučovacího procesu. Usměrňuje zájem o vyučování, vytváří přirozené podmínky pro rozvíjení učení a práce. Cenné je, když je jev poutavý svou novostí, výkonem, technickými parametry, historickou významností apod. Didakticky nejcennější je poté vnitřní motivace, vyplývající zejména ze zájmu o problematiku [9]. Žáci, jejichž motivace k učení matematiky vyplývá ze zájmu, z potřeby poznávat, jsou však v českých školách spíše výjimkou. Nejčastěji bývá hlavním motivem snaha získat dobrou známku [10].

Barbara Pearl užívá origami zejména k motivaci. Tvrdí, že origami není cesta, jak dělat matematiku. Je to způsob, jak učit dětí chtít dělat matematiku [5].

Origami jako nový a netradiční prvek ve výuce je sám o sobě dostatečně motivující. I méně úspěšní žáci se snaží s papírem pracovat a odnáší si z hodiny skládanku a návod na její sestavení. Z pracovních listů motivační roli reprezentuje zejména Kolumbova krychle, neobvyklé těleso doplněné kulturně-historickým přesahem. Dále pracovní listy Šipka a Srdce, kde jednoduché a přitom působivé skládanky motivují ke zkoumání osové souměrnosti a velikostí úhlů.

Expoziční

Expoziční metody jsou jádrem vyučovacího procesu, kdy dochází k podání učiva. V první řadě sem řadíme metody, jimiž se přímo předávají žákům hotové kompletní poznatky. Dále metody pozorování, demonstrační, heuristického charakteru či autodidaktické. Mezi expoziční řadíme rovněž induktivní metodu. Tou rozumíme postup od jednotlivého k obecnému. Začíná se pozorováním, analýzou konkrétních jevů, tedy cestou od faktů přes syntézu k nějakým obecnějším závěrům [9]. *„V didaktice je induktivní metoda taková metoda, při níž žák pracuje s různými materiály, koná pokusy, činí záznamy, dílčí poznatky postupně zobecňuje a nachází společného jmenovatele mnoha jevů. Indukce je pokládána za bohatý zdroj duševního pokroku žáka.*“ [9, str. 172].

Expoziční metodu reprezentují pracovní listy zabývající se pravidelnými mnohoúhelníky a pracovní list Eulerův vztah. Žáci poskládají z papíru objekty, které zkoumají, experimentují a pomocí indukce objeví požadované vztahy.

Fixační

Smysl vyučování není pouze v prvním seznámení s fakty a skutečnostmi. Žák musí poznatky upevnit a zvládnout je reprodukovat a především používat při myšlení. Jde tedy o to, dovést vědomosti do stádia jejich praktické aplikace. Jestliže je obsah opakován a procvičován nezajímavým a málo aktivujícím způsobem může docházet k nezájmu o opakování a vznikat averze k učení jako takovému [9].

Tomu může zabránit i aplikace origami. Upevňovací metody zastupují čtyři aktivity. První z nich je zkoumání konvexních čtyřúhelníků. Žáci jejich vlastnosti již znají, ale práce s modelem a vizuální důkaz naučených tvrzení jejich představy upevňuje. Vizuální důkaz získají i při zkoumání krychle a krychle s dvojnásobnou velikostí hrany. Jako fixační lze chápat i pracovní listy Srdce a Šipka. Zde žáci využívají své znalosti, aplikují je a tím procvičují.

Klasifikační a diagnostické

Smyslem výše zmíněných metod je vzdělávat, to znamená předat nebo zprostředkovat a upevnit vědomosti, dovednosti a rozvinout poznávací procesy žáka. Aby měl učitel představu o stavu znalostí žáka, a to nejen v jeho konečné fázi, ale i v průběhu procesu vyučování, je nutné provádět hodnocení, kontrolu stavu vědomostí [9]. Podstatou pedagogické diagnostiky je nahradit intuitivní představy o pokroku v učení přesnými a objektivními údaji. Cílem je odhalit a korigovat nesprávné pokroky v učení [8].

Těžko si lze představit skládání z papíru jako nástroj klasifikace, ale origami lze využít například jako cenný nástroj pro diagnostiku formalismu geometrických vědomostí.

3.2 Formální a neformální znalosti

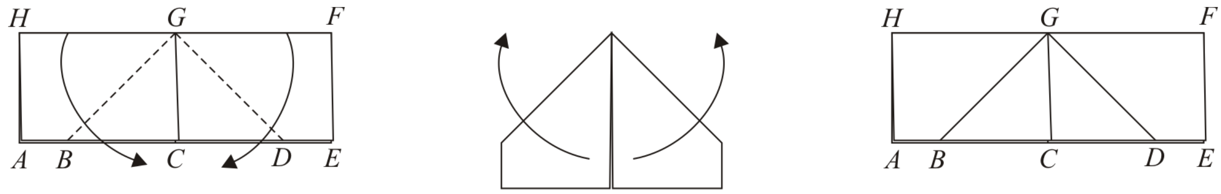
Formálnost poznaní je největší choroba matematických znalostí. Největší nebezpečí jejího výskytu je tam, kde pochopení nahrazují poučky, vzorce a šablonové postupy. Přestože se žákovo znalosti jeví jako úplné a bezchybné, správně formuluje poučky a vzorce, rychle odpovídá, může být jeho poznání formální [11].

Jako formální tedy označujeme znalosti, které postrádají oporu v představě, nejsou opřeny o izolované a univerzální modely a jsou uchovávány pouze pamětí. Choroba formalismu deformuje i osobnostní sféru žáka, snižuje žákovo intelektuální sebevědomí, narušuje schopnost analyzovat a kriticky hodnotit. Je nucen spoléhat na rozhodnutí jiných lidí, vyhýbá se situacím, kde by musel samostatně využít intelektuální schopnosti [10].

Diagnostika formalismu a origami

Protože formalismus ve vyučování znamená nedostatek porozumění, používáme pro jeho diagnostiku nástroje, kde hraje porozumění hlavní roli. Jednou cestou je nastolení nestandardní situace. V geometrii se formalismus projevuje zejména tím, že žáci matematické objekty znají v obvyklé, standardizované podobě a k nim přiřazují naučené vlastnosti [10].

Využitím origami jako nástroje pro diagnostiku formalismu, jsme se začali zabývat po vyzkoušení pracovního listu Srdce na základní škole. Žáci v sedmé třídě měli všechny potřebné znalosti probrané i zažité a skládání z papíru je dostatečně motivovalo. Přesto většina žáků nedokázala své vědomosti uplatnit. Jako příklad uvádíme následující situaci. Většina žáků správně určila úhel *CGF* jako pravý (viz obrázek 6). Ten následně osa souměrnosti rozdělila na půl. Přestože žáci model rozkládali a úhel znova půlili, deset ze 17 žáků nedokázalo určit velikost úhlu *CGD*. Při závěrečné kontrole, kdy učitel kladl klasické otázky, však většina žáků velikosti úhlů určovala správně. Pracovní list nastolením nestandardní situace, skládáním papíru, odhalil formalitu jejich vzdělání.



Obr. 6 – Úryvek z pracovního listu Srdce.

4 Origami a rámcový vzdělávací program

4.1 Klíčové kompetence

Podle rámcového vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále RVP ZV) představují klíčové kompetence *„…souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti.“* [12, str. 10], přičemž jednotlivé klíčové aktivity nejsou izolované, prolínají se a mají nadpředmětovou podobu. RVP ZV vymezuje následující klíčové kompetence: kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské a kompetence pracovní [12]. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (dále RVP G) nahrazuje kompetence pracovní kompetencemi k podnikavosti [13].

Rozvoj klíčových kompetencí pomocí origami

Skládání z papíru je schopno rozvíjet vybrané aspekty následujících klíčových kompetencí.

Kompetence k učení

Podle RVP ZV žák na konci vzdělávacího procesu využívá vhodné způsoby, metody a strategie. Rovněž samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává, kriticky posuzuje a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti [12].

Obě zmíněné kompetence k učení je schopné origami rozvinout. Schopnost vybrat vhodnou strategii postupu ilustruje například pracovní list Šipka či Kolumbova krychle. Pozorování a vyvození závěrů je cílem pracovních listů zabývající se pravidelnými mnohoúhelníky či Eulerovým vztahem. Origami rovněž rozvíjí prostorou představivost.

Kompetence k řešení problémů

Žák samostatně řeší problémy, volí vhodné způsoby řešení, užívá matematické postupy. Nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá řešení [12].

Pomocí skládání z papíru vytváříme modely, které následně zkoumáme. Tím vznikají nové, neobvyklé problémy a zásadní zde je, zvolit vhodný efektivní způsob řešení. Náročnost skládanek rovněž cvičí usilovnost a vytrvalost.

Kompetence sociální a personální

Žák umí účinně spolupracovat ve skupině a vytváří pravidla práce v týmu. Přispívá k diskuzi v malé skupině i k diskuzi celé třídy [12]. Origami lze využít i pro práci ve skupinách. Například pracovní listy Krychle a Kolumbova krychle jsou určeny pro práci ve dvojicích, hledání Eulerova vztahu dokonce pro větší skupiny. Každý pracovní list navíc končí společnou kontrolou, kde žáci musí vysvětlit svůj postup a obhájit své řešení.

Kompetence pracovní

Skládání z papíru jako manuální činnost samozřejmě rozvíjí i pracovní kompetence. Žáci navíc postupují podle obrázkového návodu a rozvíjejí tím schopnost čtení a porozumění diagramům.

4.2 Vzdělávací oblasti

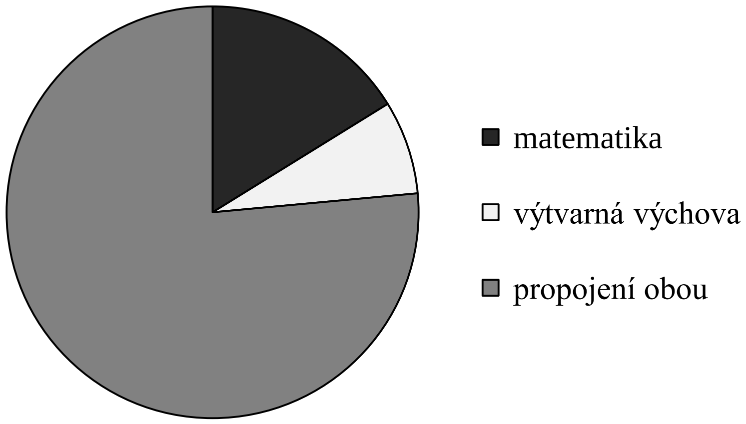
Rámcový vzdělávací program pro základní školy vymezuje devět (RVP pro gymnázia osm) vzdělávacích oblastí. V obou dvou programech se budeme pohybovat ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

V rámci této oblasti můžeme pracovní listy pro základní školu zařadit do skupiny Geometrie v rovině a v prostoru anebo do skupiny Nestandardní aplikační úlohy a problémy [12]. Pracovní listy pro Gymnázia řadíme do skupiny Geometrie [13].

Mezipředmětové vazby

Významným aspektem rámcových vzdělávacích programů je hledání spojení mezi předměty i mezi vzdělávacími oblastmi. *„Záměrem je, aby učitelé při tvorbě ŠVP vzájemně spolupracovali, propojovali vhodná témata společná jednotlivým vzdělávacím oborům a posilovali nepředmětový přístup ke vzdělání.“* [12, str. 15].

Origami nabízí jedinečnou možnost propojení matematiky a výtvarné výchovy. Během testování pracovních listů na školách jsme žákům na konci vyučovací hodiny kladli otázku, zda šlo v uplynulé hodině spíše o matematiku, spíše výtvarnou výchovu či propojení obou. Z 68 žáků ve čtyřech různých třídách 52 cítilo hodinu, kde se využívalo origami k výuce matematiky, jako propojení matematiky a výtvarné výchovy.



Graf č. 1 – Zastoupení odpovědí žáku na otázku, zda se v hodině, kde se využívalo skládání z papíru k výuce matematiky, jednalo o matematiku, výtvarnou výchovu či propojení obou.

5 Pracovní listy

5.1 Společná charakteristika

Následující stránky nabízejí sadu osmi různých, samostatně stojících pracovních listů. Ty byly vytvořeny tak, aby ukázali skládání papíru jako rozmanitý nástroj. Sadu tedy tvoří aktivity odlišné náročnosti, rozvíjející odlišné kompetence, určené pro samostatnou i skupinovou práci, použitelné v různých fázích vyučovacího procesu.

Čtyři z osmi pracovních listů byly vyzkoušeny ve školském prostředí, rozlišné úrovně i rozlišného počtu žáků. Pracovní listy zabývající se pravidelnými mnohoúhelníky byly otestovány na výběrových hodinách Gymnázia. Tedy ve třídách s menším počtem nadaných žáků. Srdce skládali žáci ve třídě s menším počtem žáků a s horšími matematickými znalostmi. Čtyřúhelníky se zabývala standardně obsazená třída, s rozšířenou výukou jazyků (tedy výběrová). Pestrá mozaika úrovně testovaných tříd odhalila mnohé nedostatky a každá návštěva školy posunula práci dopředu.

Při každém experimentu žáci vyplnili dotazník se třemi otázkami, u každé z nich měli zakroužkovat jednu možnost.

1. Máš nějaké zkušenosti se skládáním papíru?

   ano | **ne**

2. Porozuměl jsi dobře návodu z diagramů?

   ano | **s problémy** | **vůbec ne**

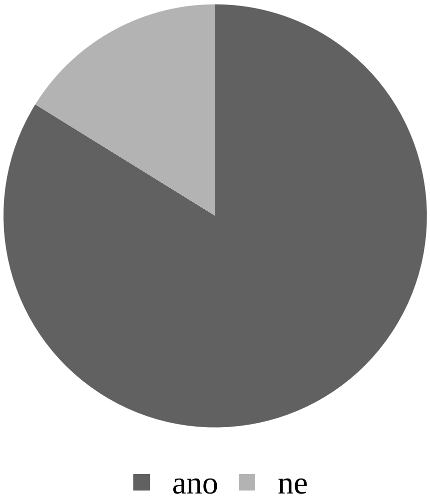
3. Jednalo se v této hodině o matematiku nebo spíše o výtvarnou výchovu?

   spíše matematika | **propojení obou** | **spíše výtvarná výchova**

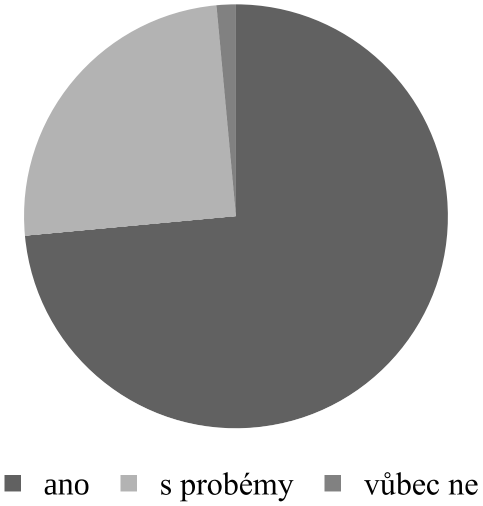
Experimentů se zúčastnilo 68 žáků, z toho 36 dívek a 32 hochů. Výsledek odpovědí na otázku číslo 3 je uveden výše. Na otázku číslo 1 odpovědělo kladně 57 žáků. Je vidět, že skládání z papíru je mezi žáky značně rozšířené.

U druhé otázky většina (50 žáků) odpověděla, že dobře porozuměla návodu z diagramů, pouze jediný žák uvedl, že jim nerozuměl vůbec. Podle mého hodnocení i hodnocení vyučujících je však tento výsledek příliš optimistický a podle subjektivního hodnocení dobře porozuměla diagramům přibližně polovina žáků.

Mezi pohlavím žáků, zkušenostmi se skládáním a chápáním diagramů nebyla zjištěna žádná závislost.



Graf č. 2 – Zastoupení odpovědí žáku na otázku, mají zkušenosti se skládáním z papíru.



Graf č. 3 – Zastoupení odpovědí žáku na otázku, zda dobře porozuměli postupu podle diagramů.

Každá aktivita obsahuje krátký úvod, metodiku pracovního listu, popis práce, samotný pracovní list, případně návod na sestavení skládanek a vzorové řešení. U pracovních listů otestovaných ve škole je uveden záznam z experimentu.

Z důvodu praktického využití nejsou obrázky dále číslovány, jejich autorem je autor práce.

Literatura

V pracovních listech byly využity návody na skládanky z následující literatury. Plné znění citací je uvedeno v kapitole Seznam zdrojů informací na konci práce.

název pracovního listu	čerpaná literatura	číslo úplné citace
Srdce	PEARL, Barbara. *Math in motion*	[5]
Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost	MONTROLL, John. *Origami and math*	[14]
	MITCHELL, David. *Exploring Mathematical Ideas with Origami*	[15]
Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů	MONTROLL, J. *Origami and math*	[14]
	MITCHELL, David. *Exploring Mathematical Ideas with Origami*	[15]
Konvexní čtyřúhelníky	SASTRY, S. Shankar. *Origami – Fun and Mathematics*	[17]
Šipka	SASTRY, S. Shankar. *Origami – Fun and Mathematics*	[17]
Krychle	MITCHELL, David. *Mathematical origami*	[16]
Kolumbova krychle	MITCHELL, David. *Mathematical origami*	[16]
Eulerův vztah	MITCHELL, David. *Mathematical origami*	[16]
	PEARL, Barbara. *Math in motion*	[5]

5.2 Srdce

Tento pracovní list poskytuje žákům návod k vytvoření skládanky srdce. Během jejího sestavování žáci dopisují do pracovního listu požadované informace. Ty jsou zaměřeny na zkoumání vzniklých úhlů a osových souměrností.

Metodika pracovního listu

Učivo	- úhly – určování jejich velikostí a typů - osová souměrnost rovinných útvarů - trojúhelníky – dělení a jejich vlastnosti - konvexní a nekonvexní rovinné útvary
Cíle	1. prověřit znalost osové znalosti 2. prověřit schopnost určování velikostí úhlů v konkrétní situaci
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: model srdce
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- vyplnění pracovního listu – samostatná práce žáků bez zásahů učitele - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- jeden papír formátu A4 pro každého žáka - psací potřeby

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list a papír, ze kterého budou skládat. Pro lepší efekt je možné použít papír červené barvy. Dále žáci postupují zcela samostatně a během skládání zodpovídají otázky v pracovním listu. Prostředkem k řešení problému je práce s modelem.

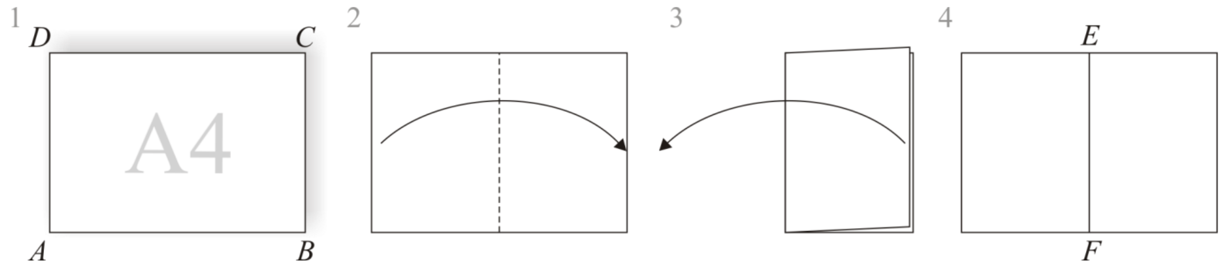
Na závěr učitel zkontroluje, zda žáci vyplnili všechny požadované informace a pak společně se třídou rozebere správnost jejich odpovědí.

jméno a příjmení: ....

třída: ....

Srdce – pracovní list

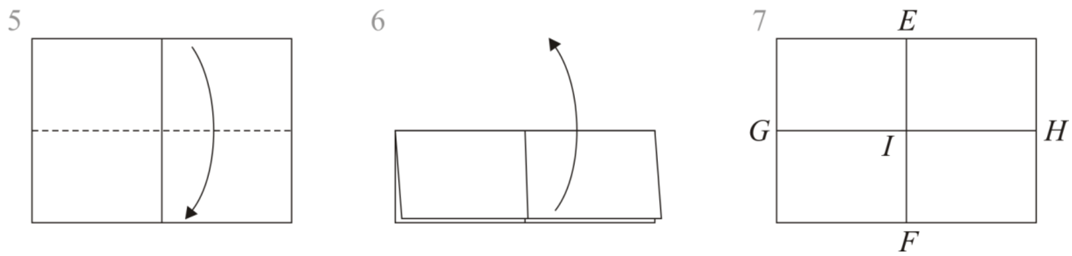
Začínáme skládat z papíru formátu A4, přičemž rohy papíru označíme *ABCD*. Obdélník *ABCD* přeložíme podle obrázků 1 – 3.



Vznikne úsečka *EF* (obr. 4), která dělí obdélník na dvě shodné části. Tuto úsečku nazýváme

obdélníku *ABCD*.

Dále obdélník přeložíme podle obrázků 5 – 7.



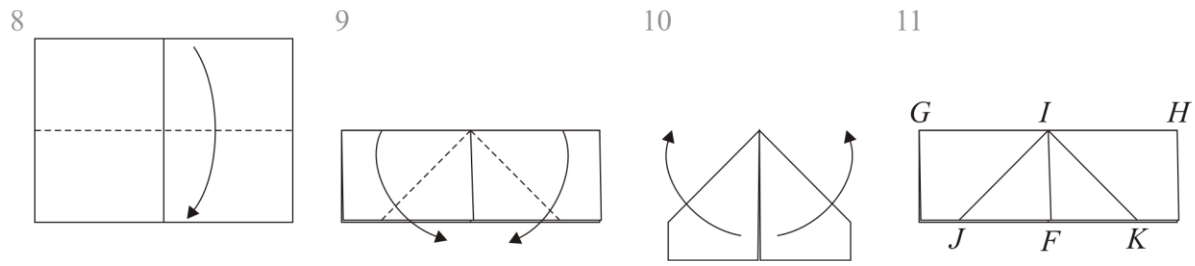
Vzniklou úsečku *GH* (obr. 7) nazýváme

obdélníku *ABCD*.

Velikost úhlu *HIE* je stupňů a říkáme, že tento úhel je .

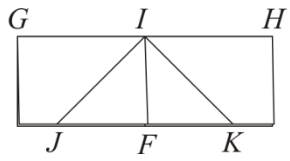
Úsečky *GH* a *EF* jsou na sebe .

Obdélník přeložíme podle obrázků 8 a 9. V desátém kroku se vrátíme o krok zpět.



Doplň velikosti úhlů.

úhel *FIK*		úhel *JIF*	
úhel *KIH*		úhel *JIH*	



Úsečka *IK* půlí úhel *FIH* a je [ ] tohoto úhlu.

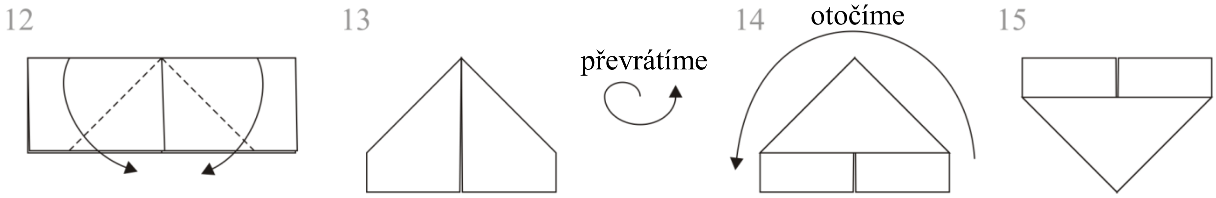
Trojúhelník *JIK* (zakroužkuj správné odpovědi):

je rovnostranný   má právě jednu osu souměrnosti   je ostroúhlý

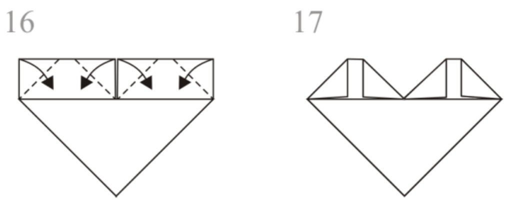
nemá žádnou osu souměrnosti   má právě dvě osy souměrnosti

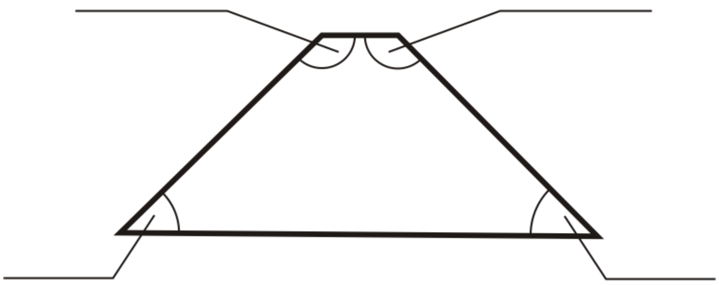
je rovnoramenný   je pravoúhlý   je tupoúhlý

Pokračujeme ve skládání modelu.

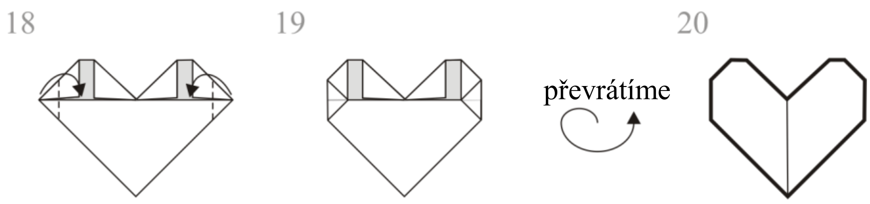


Rohy horních obdélníku přeložíme (obr. 16). Tím se z obdélníků staly lichoběžníky. Bez použití úhloměru urči velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku a zapiš je do obrázku vpravo.





Podle obrázků 18 – 20 dokončíme skládanku a srdce máme hotové.



Hotové srdce má [ ] vnitřních úhlů. Ty můžeme rozdělit na ostré, pravé a tupé.

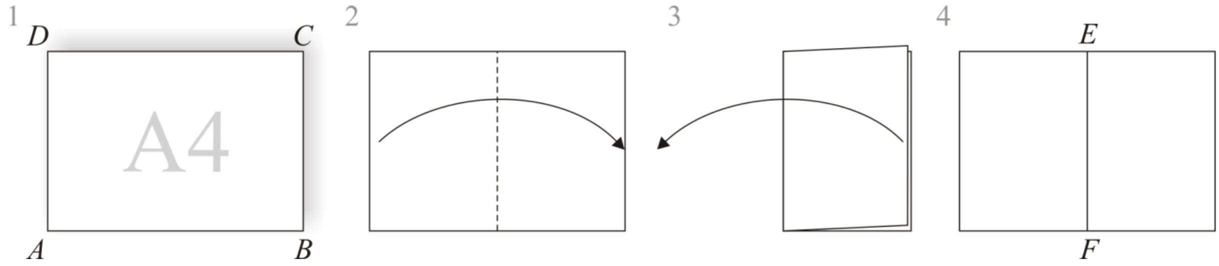
počet ostrých úhlů		počet pravých úhlů		počet tupých úhlů	

Je námi poskládané srdce konvexní obrazec? (zakroužkuj správnou odpověď)

ano   ne

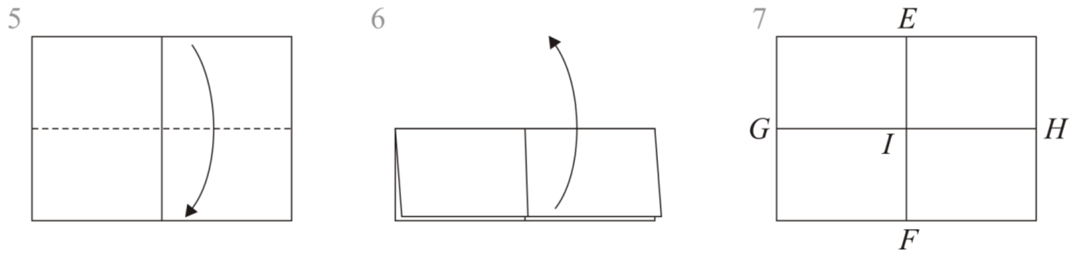
Vzorové řešení

Začínáme skládat z papíru formátu A4, přičemž rohy papíru značíme *ABCD*. Obdélník *ABCD* přeložíme podle obrázku 1 – 3.



Vznikne úsečka *EF* (obr. 4), která dělí obdélník na dvě shodné části. Tuto úsečku nazýváme **OSOU SOUMĚRNOSTI / STŘEDNÍ PŘÍČKOU** obdélníku *ABCD*.

Dále obdélník přeložíme podle obrázků 5 – 7.

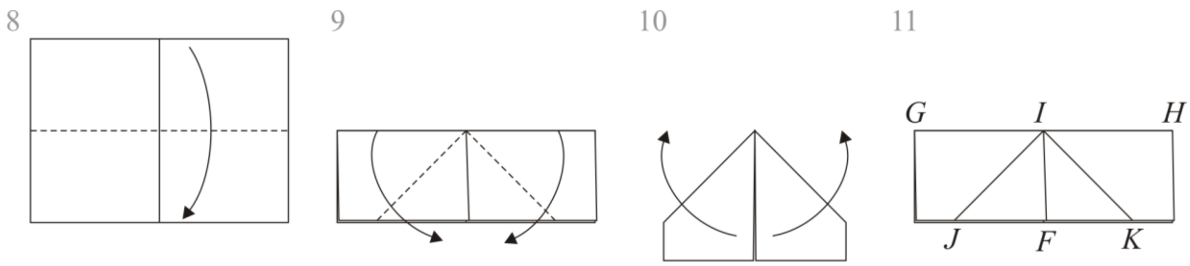


Vzniklou úsečku *GH* (obr. 7) nazýváme **OSOU SOUMĚRNOSTI / STŘEDNÍ PŘÍČKOU** obdélníku *ABCD*.

Velikost úhlu *HIE* je **90** stupňů a říkáme, že tento úhel je **PRAVÝ** .

Úsečky *GH* a *EF* jsou na sebe **KOLMÉ** .

Obdélník přeložíme podle obrázků 8 - 11. Poslední krok rozložíme.



Doplň velikosti úhlů.

úhel *FIK*	**45°**
úhel *KIH*	**45°**

úhel *JIF*	**45°**
úhel *JIH*	**135°**

Úsečka *IK* půlí úhel *FIH* a je **OSOU** tohoto úhlu.

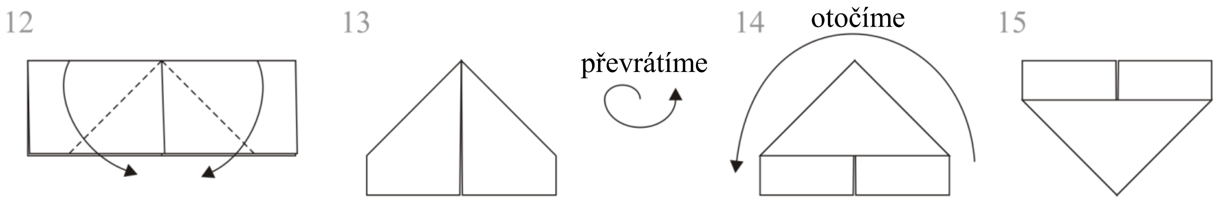
Trojúhelník *JIK* (zakroužkuj správné odpovědi):

je rovnostranný | má právě jednu osu souměrnosti | je ostroúhlý

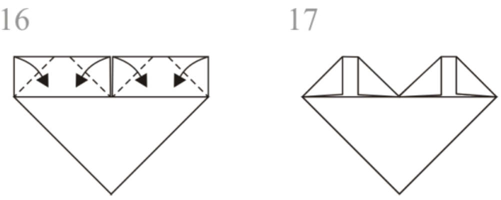
nemá žádnou osu souměrnosti | má právě dvě osy souměrnosti

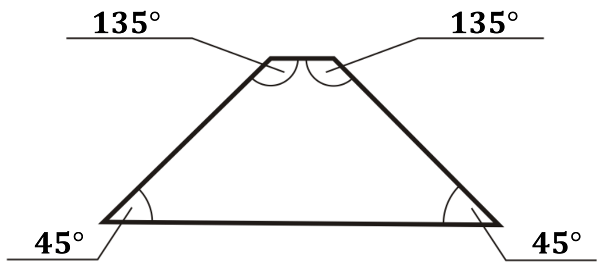
je rovnoramenný | je pravoúhlý | je tupoúhlý

Pokračujeme ve skládání modelu.

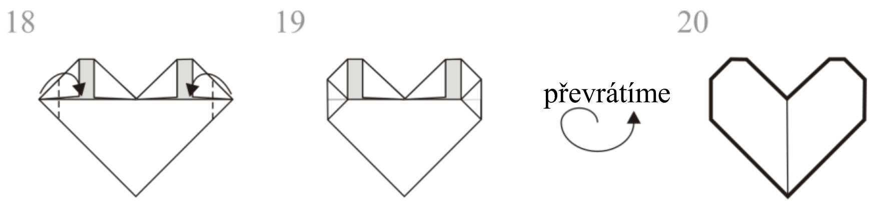


Rohy horních obdélníku přeložíme (obr. 16). Tím se z obdélníků staly lichoběžníky. Bez použití úhloměru urči velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku a zapiš je do obrázku vpravo.





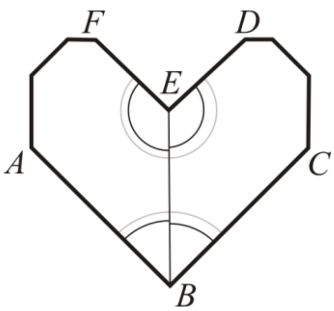
Podle obrázků 18 – 20 dokončíme model a srdce máme hotové.



Hotové srdce má **10** vnitřních úhlů. Ty můžeme rozdělit na ostré, pravé a tupé.

počet ostrých úhlů	**0**	počet pravých úhlů	**1**	počet tupých úhlů	**9**

Je možné, že někteří žáci nebudou vnímat úhel *ABC* jako jeden (šedá varianta), ale jako dva, úhly *ABE* a *EBC* (černá varianta). Stejně tak u úhlu *DEF*. V této variantě je počet vnitřních úhlů 12, z nichž jsou dva ostré, žádný není pravý a deset je jich tupých. V experimentu provedeném na základní škole žádný žák tímto způsobem neuvažoval.



Je námi poskládané srdce konvexní obrazec? (zakroužkuj správnou odpověď)

ano | ne

Experiment ve škole

Otestování pracovního listu srdce proběhlo dne 17. 3. 2014 v sedmé třídě na škole ZŠ a MŠ Děčín XXVII. Hodinu vedl za mé účasti učitel Tomáš Císař.

Charakteristika třídy

Experiment byl proveden ve třídě s nižším počtem žáků (17). Třída dosahuje, podle slov učitele, spíše průměrných matematických výkonů. Experimentu se zúčastnilo 16 žáků z toho 6 hochů. ŠVP této školy z matematiky pro 7. ročník zahrnuje tyto partie: zlomky, celá a racionální čísla, poměr, přímá a nepřímá úměrnost, grafy, procenta, úroky, shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky a hranoly.

Průběh hodiny

Všichni žáci sestavili bez větších problémů model srdce. Během skládání vyplňovali se značnými problémy údaje v pracovním listu. Na konci hodiny učitel prošel s žáky postupně celý pracovní list a žáci popořadě odpovídali na otázky z pracovního listu.

Výsledek

Cílem pracovního listu je prověřit znalost osové souměrnosti a prověřit schopnost určování velikostí úhlů v konkrétní situaci.

Výsledky práce v této třídě nebyly příliš dobré. Pouze dva žáci vyplnili pracovní list zcela bez chyby, další dva s jedou či dvěma chybami. Zbytek třídy však nezvládl správně vyplnit ani 50 % požadovaných úloh. Při společném řešení listu paradoxně dokázali i tito žáci správně odpovídat na kladené otázky.

Hodnocení učitelem (Tomáš Císař)

Pro žáky bylo skládání papíru nové a zajímavé. Při řešení matematického obsahu, ale příliš úspěšní nebyli a spíše se trápili. Při společném řešení však přišli na výsledek i méně nadaní žáci.

Hodnocení autorem

Přestože práce s modelem žáky dostatečně motivovala a měli všechny potřebné znalosti, nedokázali je využít při řešení konkrétních problému. Čtyři žáci měli dokonce problémy rozpoznat v modelu pravý úhel. Při kladení konkrétních otázek již byli žáci úspěšnější.

Závěr

Experiment v této třídě prokázal význam tohoto pracovního listu. Prověřil znalosti a odhalil mezery žáků. Hlavní odhalenou mezerou se zde jeví neschopnost aplikovat znalosti (ty prokázali při řešení na konci hodiny) v konkrétní situaci, v konkrétním modelu. Pracovní list může tedy sloužit jako test míry formálnosti znalostí žáků.

5.3 Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost

Postup v pracovním listu vede ke konstrukci vybraných pravidelných mnohoúhelníků, konkrétně rovnostranného trojúhelníku, čtverce, pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku. Dále vede žáky ke zkoumání osových souměrností těchto mnohoúhelníků.

Metodika pracovního listu

Učivo	- pravidelné mnohoúhelníky - osová souměrnost rovinných útvarů
Cíle	1. prověřit znalost osové souměrnosti 2. odvodit vztah mezi počtem vrcholů, vnitřních úhlů a počtem os souměrnosti v pravidelném *n*-úhelníku
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: modely vybraných pravidelních mnohoúhelníků a návod na jejich složení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina (viz hodnocení experimentu dále)
Organizace hodiny	- sestavení modelů pravidelních mnohoúhelníků – samostatná práce s možnými zásahy učitele - zkoumání osových souměrností – samostatná práce - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- jeden papír formátu A4 pro každého žáka - nůžky - psací potřeby

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list, návod s postupem konstrukce a papír, ze kterého budou skládat. Žáci postupují podle pokynů v pracovním listu.

V prvním bodě žáci sestaví rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník. Při tomto kroku může učitel žákům aktivně pomáhat, dále však postupují samostatně a vyplňují tabulku v pracovním listu. Na konci hodiny provede učitel spolu s žáky kontrolu správnosti.

jméno a příjmení: ....

třída: ....

Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost
Pracovní list

1. Podle obrázků v návodu sestav rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník.

2. V první části tabulky vyplň první tři sloupce – tj. počet vrcholů, počet stran a počet vnitřních úhlů již složených mnohoúhelníků.

3. Najdi všechny osy souměrnosti těchto rovinných útvarů. Pomocí překládání papíru ověř, že se opravdu jedná o osu souměrnosti a pokud ano, zvýrazni ji tužkou (pastelkou). Počet os zapiš do posledního sloupce.

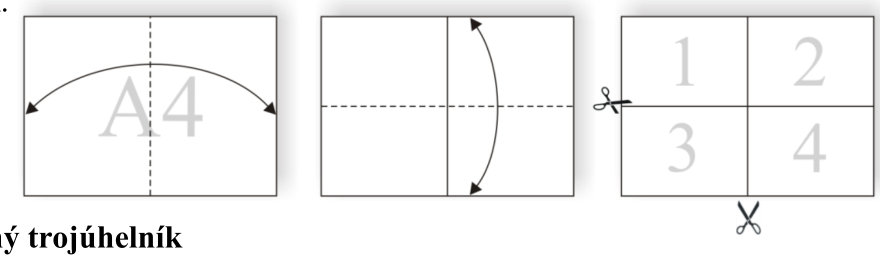
4. Na základě první části tabulky odhadni hodnoty v její druhé a třetí části.

		počet vrcholů	počet stran	počet vnitřních úhlů	počet os souměrnosti
1	**rovnostranný trojúhelník**				
	čtverec				
	pravidelný pětiúhelník				
	pravidelný šestiúhelník				
2	**pravidelný osmiúhelník**				
	pravidelný dvanáctiúhelník				
3	**pravidelný *n*-úhelník**				

Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost
Návod

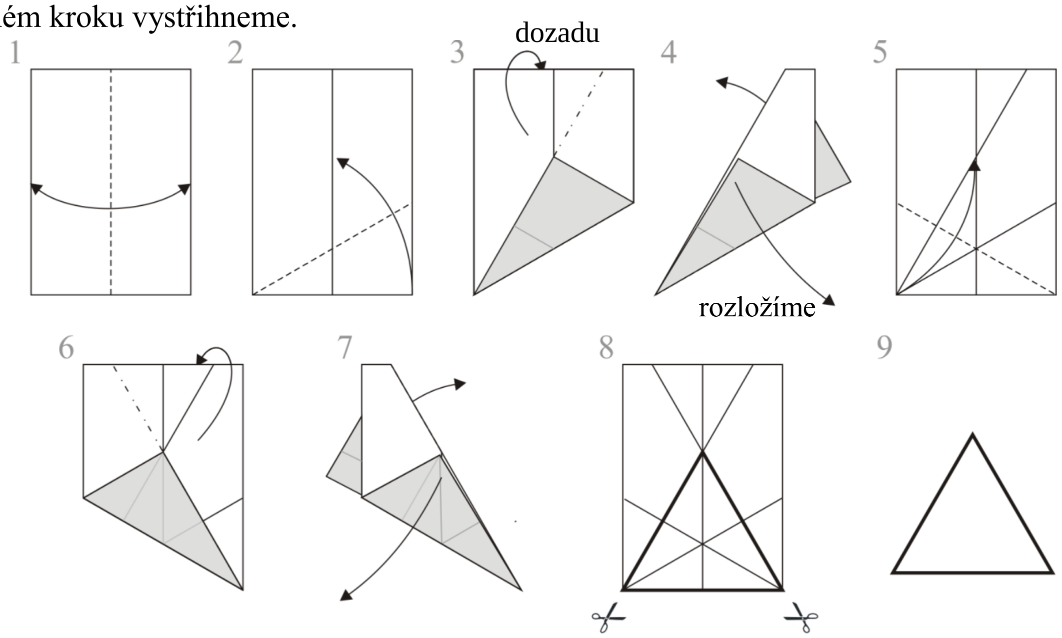
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky. Z nich pak poskládáme pravidelný (neboli rovnostranný) trojúhelník, čtyřúhelník (neboli čtverec), pětiúhelník a šestiúhelník.



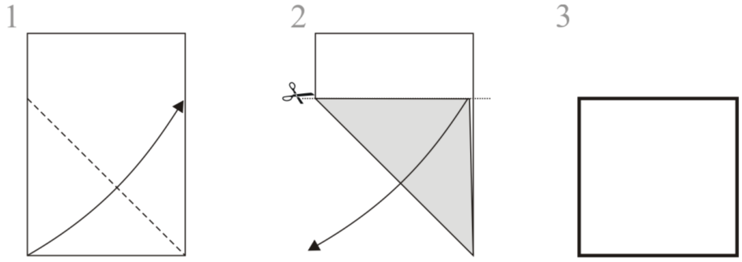
Rovnostranný trojúhelník

Z prvního obdélníku poskládáme podle obrázků 1 – 8 rovnostranný trojúhelník, který v osmém kroku vystřihneme.



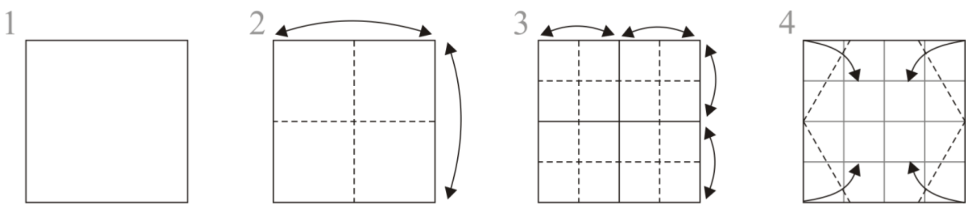
Čtverec

Z druhého obdélníku jednoduchým způsobem vytvoříme čtverec.

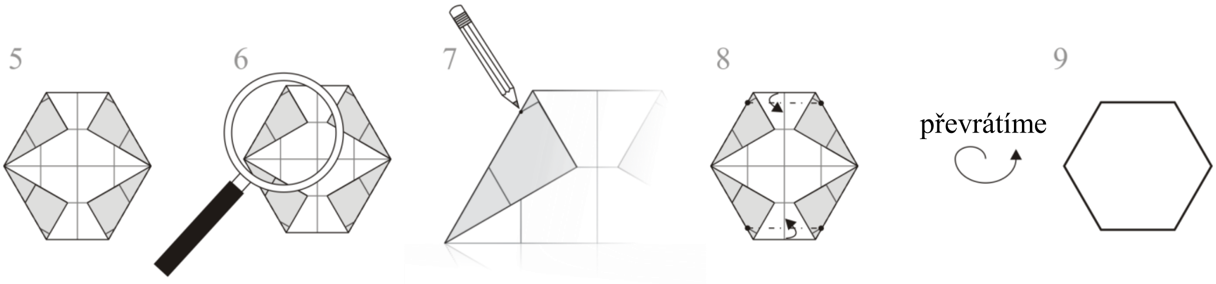


Pravidelný šestiúhelník

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku i pětiúhelníků začíná ze čtverce. Postup jak jej vytvořit však už známe.

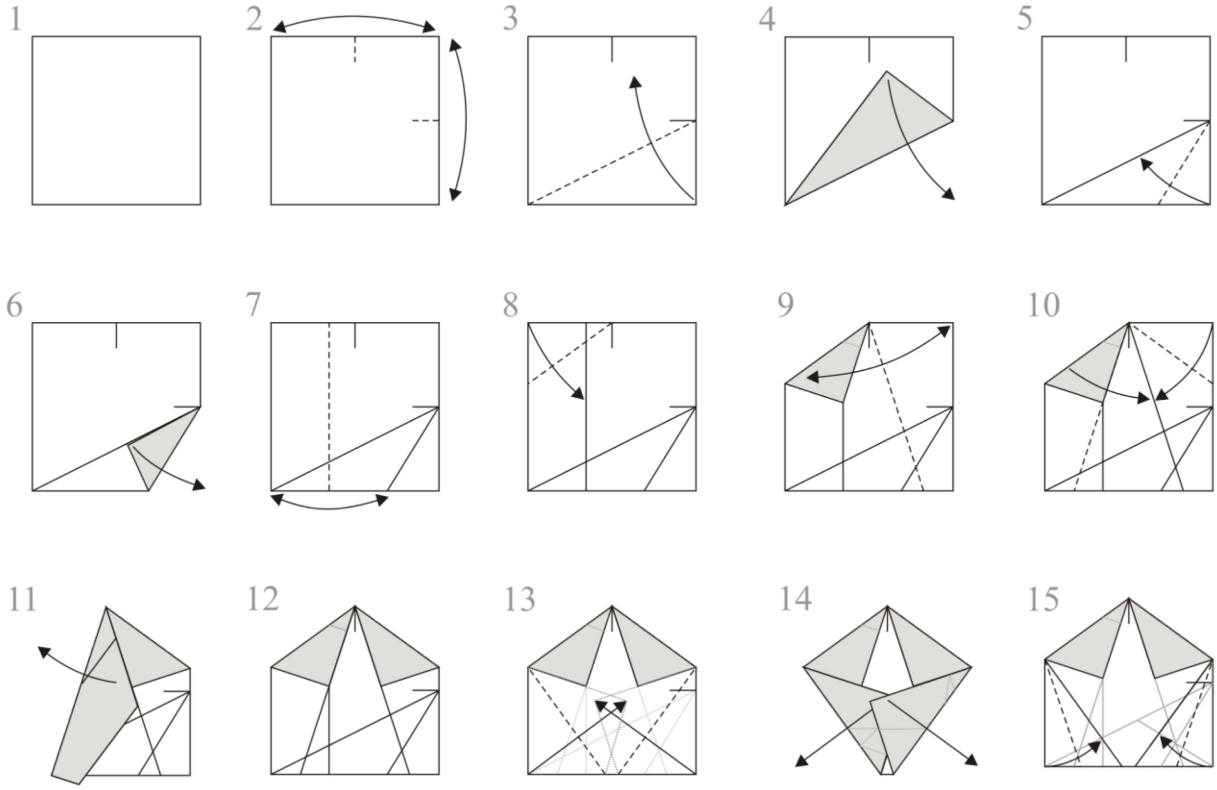


V sedmém kroku zvýrazníme průsečík na obvodu šestiúhelníku (obr. 7). Tyto body zvýrazníme dohromady čtyři a podle nich provedeme poslední přehyb a šestiúhelník je hotový.

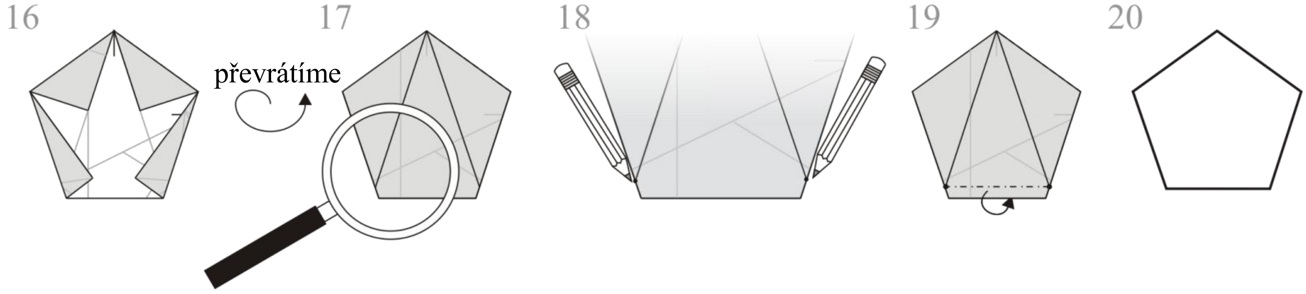


Pravidelný pětiúhelník

Již víme, že stejně jako u šestiúhelníku si nejdříve musíme vytvořit čtverec. Poskládání pravidelného pětiúhelníku je nejsložitější, proto je důležité postupovat pomalu a pečlivě.



V osmnáctém kroku (detailní výřez – obrázek 18) zvýrazníme důležité body. Jedná se o průsečíky obvodu pětiúhelníku a úhlopříček. Podle těchto bodů zahneme hranu dozadu a dostaneme pravidelný pětiúhelník.



Vzorové řešení

		počet vrcholů	počet stran	počet vnitřních úhlů	počet os souměrnosti
1	**rovnostranný trojúhelník**	3	3	3	3
	čtverec	4	4	4	4
	pravidelný pětiúhelník	5	5	5	5
	pravidelný šestiúhelník	6	6	6	6
2	**pravidelný osmiúhelník**	8	8	8	8
	pravidelný dvanáctiúhelník	12	12	12	12
3	**pravidelný *n*-úhelník**	n	n	n	n

Experiment ve škole

Otestování pracovního listu proběhlo dne 4. 3. 2014 v hodině TM 1 (talentovaní matematici) na škole Gymnázium Sokolov a krajské vzdělávací centrum. Hodinu vedla za mé účasti Mgr. Hana Novotná.

Charakteristika třídy

Jedná se o volitelný předmět určený pro nadané žáky tercie a kvarty gymnázia. Výuka zde probíhá v menším počtu žáků, kteří často řeší netradiční matematické úlohy. Experimentu se zúčastnilo 12 žáků z toho 9 hochů.

Průběh hodiny

Žáci sestavili požadované čtyři pravidelné mnohoúhelníky. Většina z nich potřebovala drobnou pomoc vyučujícího. Přestože byla již sedmá vyučovací hodina, jevili žáci o skládání zájem a pracovali přesně. Při dalších úkolech (hledání os souměrnosti a vyplňování tabulky) postupovali již žáci zcela samostatně. Většina z nich dopracovala se zvoněním.

Výsledek

Pracovní list si klade dva cíle:

1. prověřit znalost osové znalosti
2. objevit vztah mezi počtem vrcholů, vnitřních úhlů a počtem os souměrnosti

V obou bodech byla vyučovací hodina úspěšná. Všichni žáci dokázali sestavit vybrané modely a pomocí překládání papíru s úspěchem hledali osy souměrnosti.

Všichni žáci rovněž vyplnili správně tabulku zabývající se složenými mnohoúhelníky a nesloženým pravidelným osmiúhelníkem a dvanáctiúhelníkem. Dva žáci nevyplnili řádek zabývající se pravidelným *n*-úhelníkem, je pravděpodobné, že si jej vzhledem ke končící se hodině nevšimli.

Hodnocení učitelem (Mgr. Hana Novotná)

Hodina žáky zaujala a skládání bylo pro ně spíše zábavou než povinností. Po sestavení modelů pracovali samostatně, případně se radili ve dvojicích. Hezké bylo, že v případě neshody v lavici o určitou osu souměrnosti se dokázaly přesvědčit přehnutím papíru.

Jednalo se však o hodinu s menším počtem talentovaných žáků, kteří i tak práci málem časově nezvládli. Při zařazení pracovního listu do výuky v normální třídě by bylo zapotřebí dvou vyučovacích hodin. Jednu hodinu věnovat pouze skládání modelů a druhou věnovat hledání osových souměrností a vyplnění tabulky v pracovním listu.

Hodnocení autorem

Práci v této třídě byla úspěšná. Žáci skládali velice přesně a hledání os souměrnosti jim šlo velice rychle. Rovněž nalezení analogie pro nesložené objekty jim nečinilo žádné problémy.

Závěr

Experiment v této třídě ukázal, že časová dotace jedné vyučovací hodiny není dostatečná. Pracovní list je vhodné rozdělit do dvou vyučovacích hodin. Přičemž sestavení modelů by mohlo proběhnout například v rámci výtvarné výchovy.

5.4 Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů

V pracovním listu se žáci zabývají konstrukcí vybraných pravidelných mnohoúhelníků, konkrétně rovnostranného trojúhelníku, čtverce, pravidelného pětiúhelníku a šestiúhelníku. Dále vede žáky ke zkoumání velikostí vnitřních úhlů v těchto mnohoúhelnících a k odvození vzorce pro velikost vnitřního úhlu pravidelného *n*-úhelníku.

Metodika pracovního listu

Učivo	- pravidelné mnohoúhelníky
Cíl	- odvodit obecný vzorec pro velikost vnitřního úhlu pravidelného *n*-úhelníku
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: modely vybraných pravidelních mnohoúhelníků a návod na jejich složení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina (viz hodnocení experimentu dále)
Organizace hodiny	- sestavení modelů pravidelních mnohoúhelníků – samostatná práce s možnými zásahy učitele - zkoumání modelů dle pokynů v pracovním listu – samostatná práce - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- jeden papír formátu A4 pro každého žáka - nůžky - psací potřeby, pastelky – různé barvy

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list, návod obsahující pokyny pro sestavení rovnostranného trojúhelníku, čtverce, pravidelného šestiúhelníku a pětiúhelníku a papír, ze kterého budou skládat.

Podle pokynů v návodu žáci vytvoří výše zmíněné mnohoúhelníky. Po sestavení těchto čtyř modelů již žáci postupují samostatně a řídí se pokyny v pracovním listu a vyplňují tabulku.

Důležité je si uvědomit, že vnitřní úhly mnohoúhelníku jsou bezezbytku vyplněny vnitřními úhly vybarvených trojúhelníku. Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku tedy dostaneme tak, že 180° vynásobíme počtem vzniklých trojúhelníků. Tento zápis je dovede k určení velikosti vnitřních úhlů i u nesloženého pravidelného osmiúhelníku, dvanáctiúhelníku a nakonec i *n*-úhelníku.

jméno a příjmení: ....

třída: ....

Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů
Pracovní list

1. Podle obrázků v návodu sestav rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník.

2. Na skládankách obloučkem zvýrazni v jednotlivých mnohoúhelnících vnitřní úhly.

3. V první části tabulky (na druhé straně) vyplň první dva sloupce – tj. počet vrcholů a počet vnitřních úhlů již složených mnohoúhelníků.

4. V každém mnohoúhelníku si vyber libovolný vrchol a z něj veď úsečky do zbývajících vrcholů. Mnohoúhelníky se tím rozdělí na trojúhelníky. Každý trojúhelník pak vybarvi jinou barvou.

5. Počet vybarvených trojúhelníků zapiš v tabulce do třetího sloupce.

6. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Jaký je součet vnitřních úhlů v dalších mnohoúhelnících? Jakou velikost má jeden vnitřní úhel? Výsledky zapiš do tabulky.

7. Na základě zkušenosti z první části tabulky odhadni hodnoty v její druhé části, tedy pro pravidelný osmiúhelník a dvanáctiúhelník.

8. Ve třetí části vyjádři hodnoty pro pravidelný *n*-úhelník.

		počet vrcholů	počet vnitřních úhlů	počet vybarvených trojúhelníků	součet velikostí vnitřních úhlů	velikost jednoho vnitřního úhlu
1	**rovnostranný trojúhelník**					
	čtverec					
	pravidelný pětiúhelník					
	pravidelný šestiúhelník					

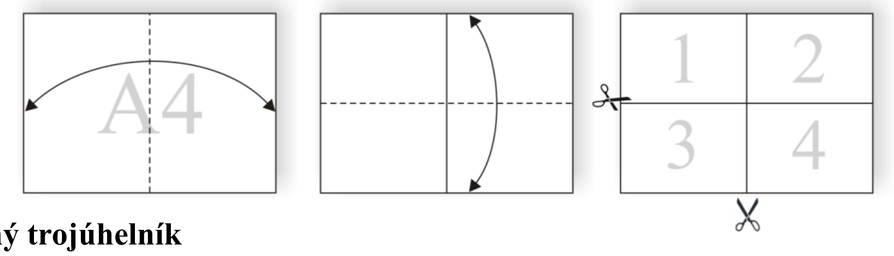
2	**pravidelný osmiúhelník**					
	pravidelný dvanáctiúhelník					

3	**pravidelný *n*-úhelník**					

Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů
Návod

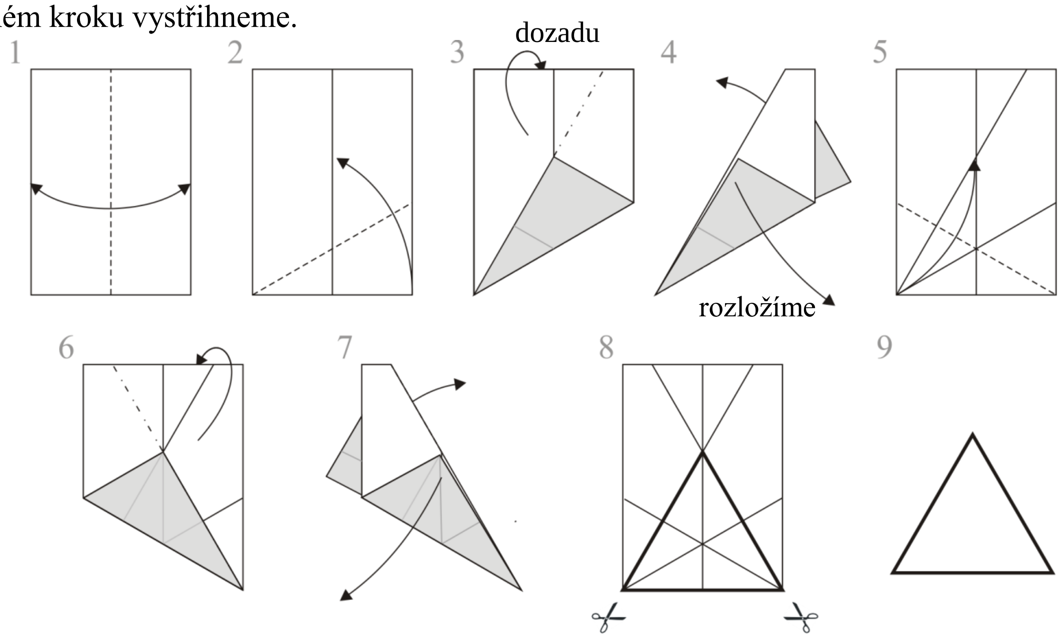
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky. Z nich pak poskládáme pravidelný (neboli rovnostranný) trojúhelník, čtyřúhelník (neboli čtverec), pětiúhelník a šestiúhelník.



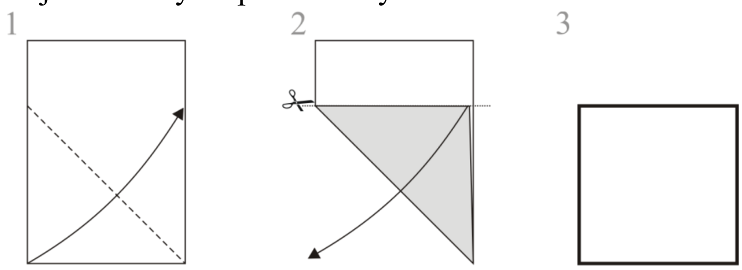
Rovnostranný trojúhelník

Z prvního obdélníku poskládáme podle obrázků 1 – 8 rovnostranný trojúhelník, který v osmém kroku vystřihneme.



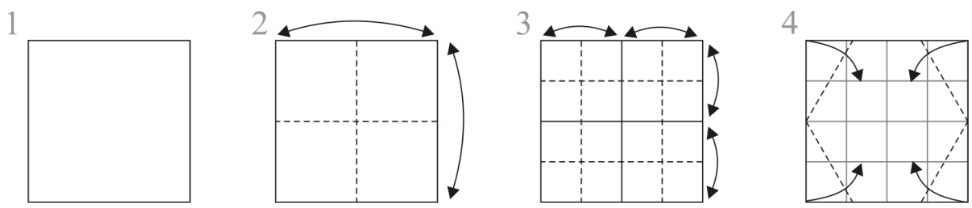
Čtverec

Z druhého obdélníku jednoduchým způsobem vytvoříme čtverec.

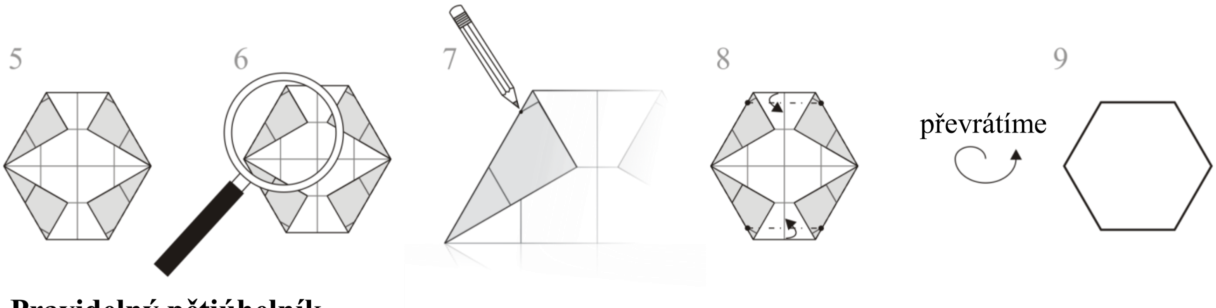


Pravidelný šestiúhelník

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku i pětiúhelníků začíná ze čtverce. Postup jak jej vytvořit však už známe.

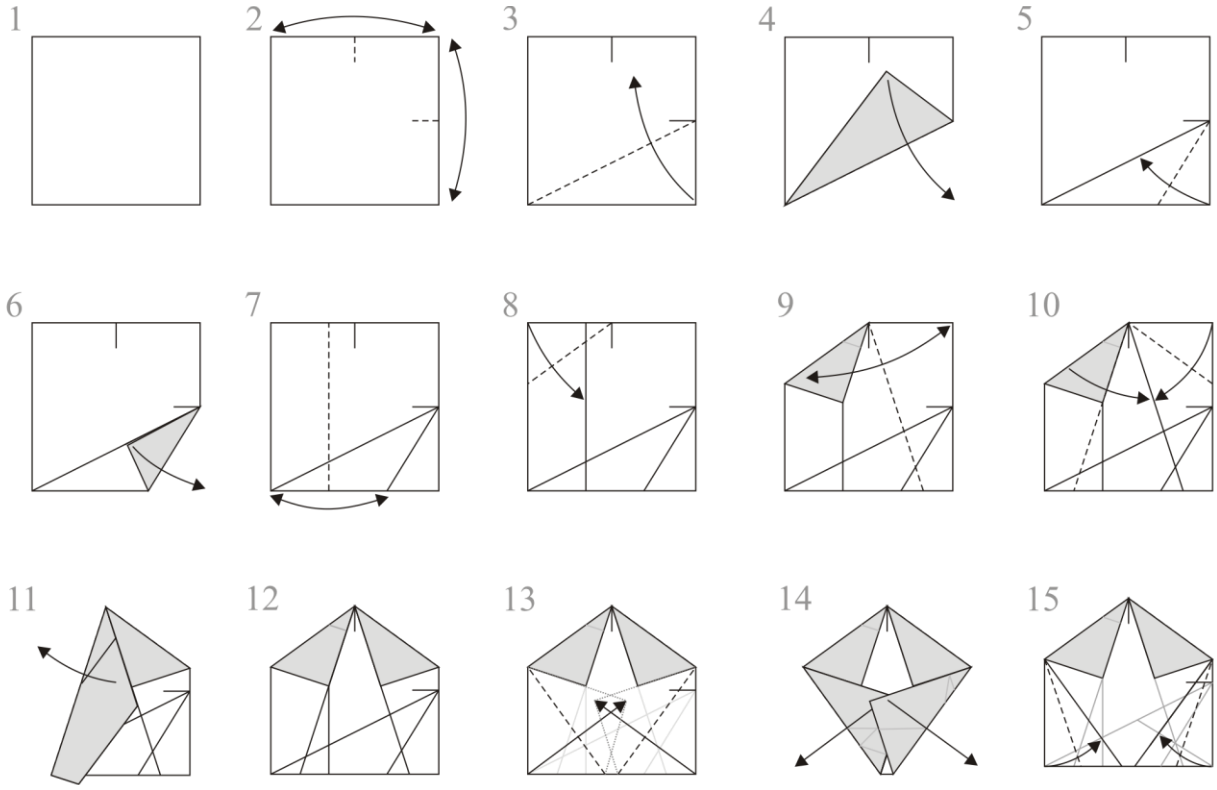


V sedmém kroku zvýrazníme průsečík na obvodu šestiúhelníku (obr. 7). Tyto body zvýrazníme dohromady čtyři a podle nich provedeme poslední přehyb a šestiúhelník je hotový.

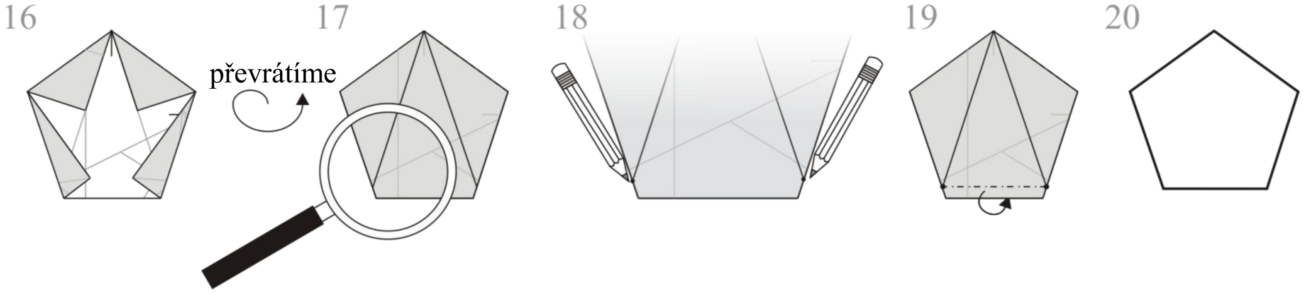


Pravidelný pětiúhelník

Již víme, že stejně jako u šestiúhelníku si nejdříve musíme vytvořit čtverec. Poskládání pravidelného pětiúhelníku je nejsložitější, proto je důležité postupovat pomalu a pečlivě.



V osmnáctém kroku (detailní výřez – obrázek 18) zvýrazníme důležité body. Jedná se o průsečíky obvodu pětiúhelníku a úhlopříček. Podle těchto bodů zahneme hranu dozadu a dostaneme pravidelný pětiúhelník.



Vzorové řešení

		počet vrcholů	počet vnitřních úhlů	počet vybarvených trojúhelníků	součet velikostí vnitřních úhlů	velikost jednoho vnitřního úhlu
1	**rovnostranný trojúhelník**	3	3	1	$1 \times 180°$	$\frac{1 \times 180°}{3} = 60°$
	čtverec	4	4	2	$2 \times 180°$	$\frac{2 \times 180°}{4} = 90°$
	pravidelný pětiúhelník	5	5	3	$3 \times 180°$	$\frac{3 \times 180°}{5} = 108°$
	pravidelný šestiúhelník	6	6	4	$4 \times 180°$	$\frac{4 \times 180°}{6} = 120°$
2	**pravidelný osmiúhelník**	8	8	6	$6 \times 180°$	$\frac{6 \times 180°}{8} = 135°$
	pravidelný dvanáctiúhelník	12	12	10	$10 \times 180°$	$\frac{10 \times 180°}{12} = 150°$
3	**pravidelný *n*-úhelník**	n	n	$n-2$	$(n-2) \times 180°$	$\frac{(n-2) \times 180°}{n}$

Experiment ve škole

Otestování pracovního listu proběhlo dne 7. 3. 2014 v hodině TM 2 (talentovaní matematici) na škole Gymnázium Sokolov a krajské vzdělávací centrum. Hodinu vedla za mé účasti Mgr. Iveta Rozmušová.

Charakteristika třídy

Jedná se o volitelný předmět určený pro nadané žáky prvního a druhého ročníku čtyřletého gymnázia a kvintu a sextu osmiletého gymnázia. Výuka probíhá v menším počtu žáků, kteří často řeší netradiční matematické úlohy. Před Vánocemi žáci skládali pomocí origami velký model pravidelného desetistěnu. Experimentu se zúčastnilo 14 žáků z toho 6 hochů.

Průběh hodiny

Žáci sestavili požadované čtyři pravidelné mnohoúhelníky. Většina z nich postupovala samostatně, pouze při skládání pravidelného pětiúhelníku potřebovali někteří žáci drobnou pomoc vyučující. Skládání jim šlo nad očekávání dobře a za 25 minut měli modely připravené. Dále pracovali žáci samostatně. Žáci zvládli pracovní list vyplnit v rámci jedné vyučovací metody.

Výsledek

Pracovní list si klade za cíl na základě nalezených hodnot odvodit obecný vzorec pro velikost vnitřního úhlu pravidelného *n*-úhelníku.

Všichni žáci sestavili pravidelné mnohoúhelníky a všichni žáci vyplnili správně hodnoty pro trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, osmiúhelník i dvanáctiúhelník. Dva žáci nedokázali určit hodnoty pro obecný *n*-úhelník. Správný vzorec tak objevilo 12 ze 14 žáků ve třídě.

Hodnocení učitelem (Mgr. Iveta Rozmušová)

Pro žáky bylo skládání z papíru jistě příjemnou změnou. Líbilo se mi zejména propojení manuální práce a matematiky a důmyslnost postupu, aby dané tvary byly skutečně pravidelné mnohoúhelníky.

Při zařazení do běžné výuky by však jedna vyučovací hodina nebyla dostatečná. Jednotlivé modely by podle návodu mohli žáci samostatně poskládat doma a ve škole se věnovat pouze jejich zkoumání. Celkově hodnotím stejně jako žáci tuto hodinu kladně.

Hodnocení autorem

Výsledek experimentu v této třídě proběhl dobře, jelikož 12 ze 14 žáků odvodilo správně požadovaný vzorec. Přestože žáci v této třídě práci v rámci jedné vyučovací hodiny stihli dokončit, v klasické třídě by tak úspěšní nemuseli být. Dotaci jedné vyučovací hodiny tedy hodnotím jako nedostačující

Závěr

Experiment ve třídě nám poukázal, stejně jako u předcházejícího pracovního listu, na nedostatečnou časovou dotaci. Lze tedy práci rozdělit, případně modely předskládat například na výtvarné výchově. Jelikož v této třídě byli žáci při sestavování jednotlivých modelů více méně samostatní, nabízí se, zadat vytvoření trojúhelníku, čtverce a šestiúhelníku jako domácí cvičení. Poté by na sestavení pravidelného pětiúhelníku a následné zkoumání zbývalo dostatečné množství času.

5.5 Konvexní čtyřúhelníky

V rámci pracovního listu žáci konstruují konvexní čtyřúhelníky a hledají jejich osy souměrnosti. Využívají přitom možnosti přeložit skládanku a ověřit, že se skutečně jedná o osu.

Metodika pracovního listu

Učivo	- konvexní čtyřúhelníky - osová souměrnost rovinných útvarů
Cíle	1. rozeznat a správně pojmenovat základní typy čtyřúhelníků 2. pomocí překládání papíru upevnit znalosti o osové souměrnosti čtyřúhelníků
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: modely vybraných čtyřúhelníků a návod na jejich sestavení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- vyplnění pracovního listu – samostatná práce žáků bez zásahů učitele - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- jeden papír formátu A4 pro každého žáka - psací potřeby - nůžky

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list, návod obsahující pokyny pro sestavení jednotlivých čtyřúhelníků a papír, ze kterého budou skládat.

Žáci poskládají podle návodu jednotlivé modely, přičemž u každého po dokončení modelu určí a do tabulky v pracovním listě zapíší přesný název čtyřúhelníku a do obrázku vyznačí všechny jeho osy souměrnosti. Prostředkem k hledání os je práce s modelem.

jméno a příjmení: ....

třída: ....

Konvexní čtyřúhelníky
Pracovní list

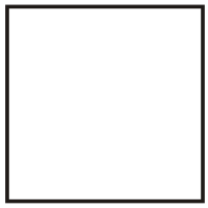
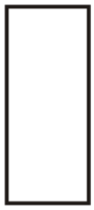
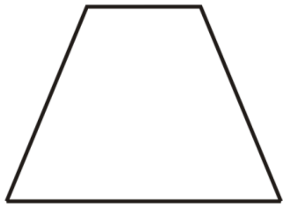
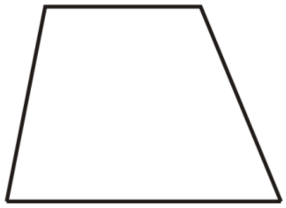
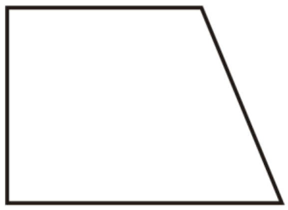
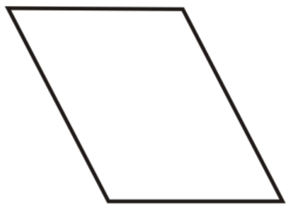
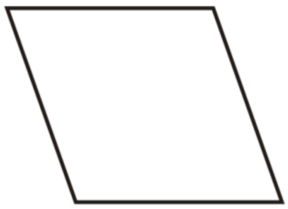
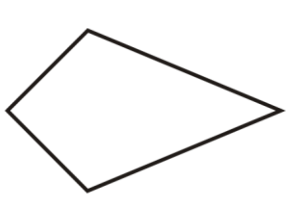
1. Rozděl papír formátu A4 na čtyři shodné menší obdélníky.

2. Z prvního menšího obdélníku podle obrázkového postupu vytvoř první dva čtyřúhelníky. Pomocí přehýbání papíru najdi všechny osy souměrnosti těchto útvarů. Do tabulky na druhé straně zapiš názvy těchto čtyřúhelníků a zakresli všechny jejich osy souměrnosti.

3. Z druhého obdélníku slož podle návodu čtyřúhelník číslo 3 a z něj dále čtyřúhelníky čtyři a pět. U každého modelu najdi osy souměrnosti. Do tabulky zapiš co nejpřesnější název jednotlivých čtyřúhelníků a zakresli jejich osy souměrnosti.

4. Ze třetího obdélníku slož podle návodu čtyřúhelník číslo 6 a z něj čtyřúhelník 7. U obou skládanek najdi osy souměrnosti. Do tabulky zapiš co nejpřesnější názvy obou čtyřúhelníků a zakresli jejich osy souměrnosti.

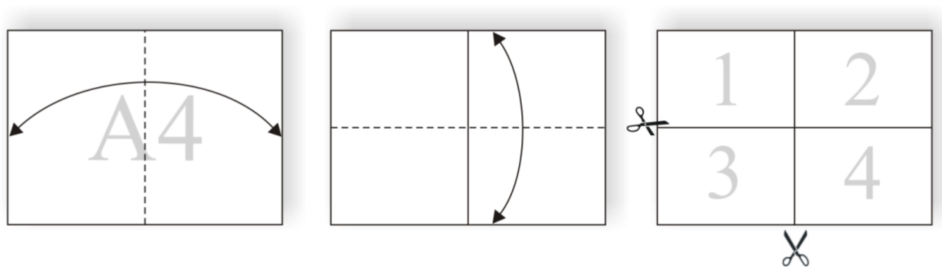
5. Ze čtvrtého, posledního, obdélníku složíme čtyřúhelník číslo 8. Rovněž u něj nalezni osy souměrnosti. Do tabulky zapiš jeho název a zakresli jeho osy souměrnosti.

	přesný název čtyřúhelníku	osy souměrnosti
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

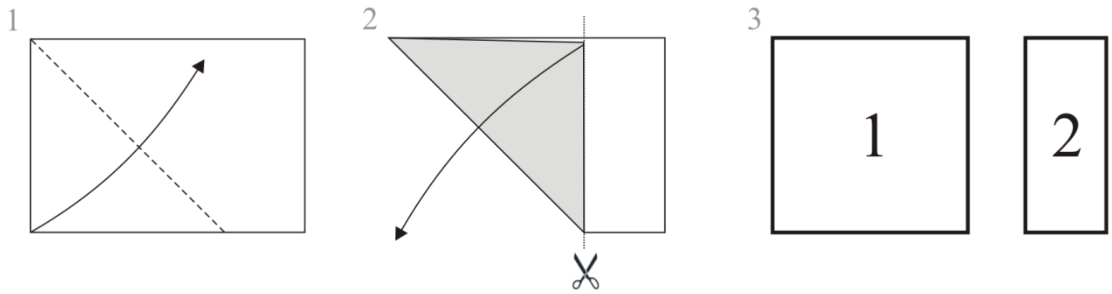
Konvexní čtyřúhelníky
Návod

Rozdělení papíru

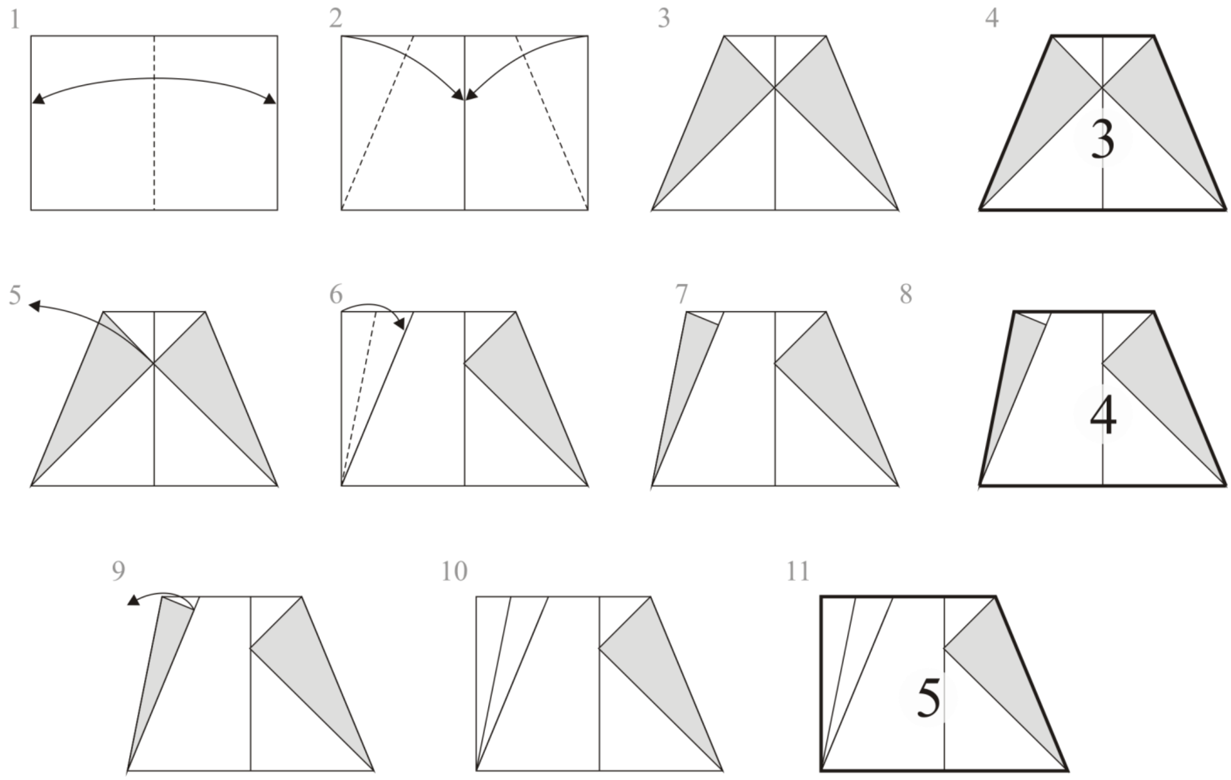
Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky, ze kterých budeme skládat dál.



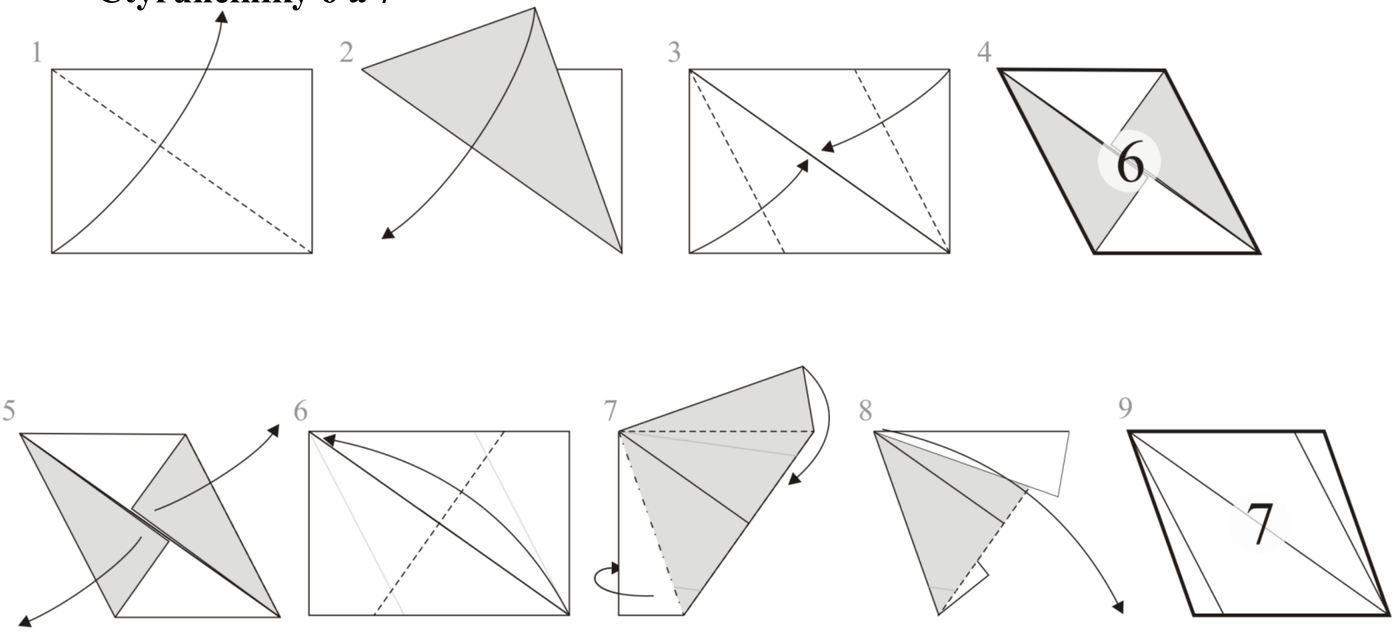
Čtyřúhelníky 1 a 2



Čtyřúhelníky 3, 4 a 5

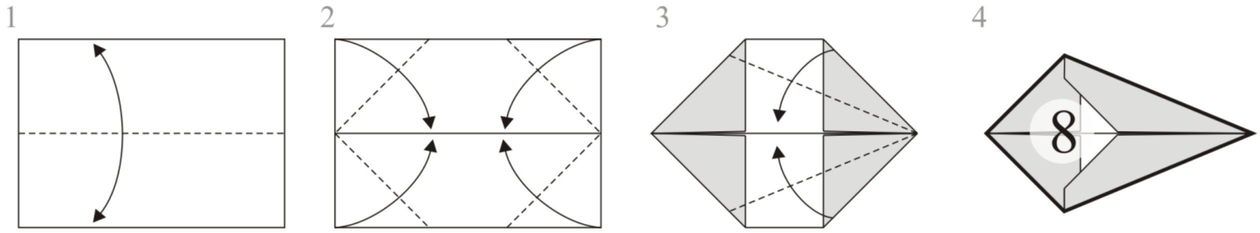


Čtyřúhelníky 6 a 7

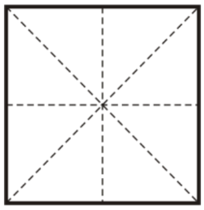
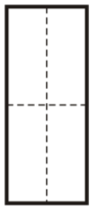
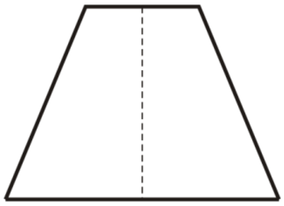
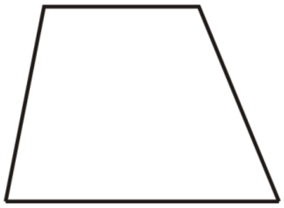
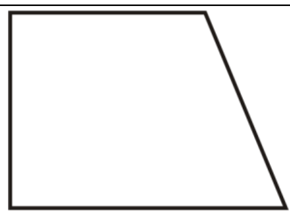
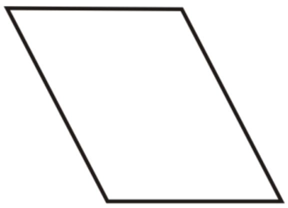
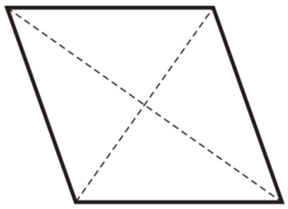
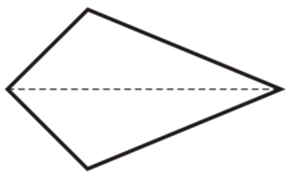


V sedmém kroku zahneme jeden roh horní vrstvy dopředu a jeden dozadu (obr. 7).

Čtyřúhelník 8



Vzorové řešení

	přesný název čtyřúhelníku	osy souměrnosti
1	**ČTVEREC**	
2	**OBDÉLNÍK**	
3	**ROVNORAMENNÝ LICHOBĚŽNÍK**	
4	**OBECNÝ LICHOBĚŽNÍK**	
5	**PRAVOÚHLÝ LICHOBĚŽNÍK**	
6	**KOSODÉLNÍK**	
7	**KOSOČTVEREC**	
8	**DELTOID**	

Experiment ve škole

Otestování pracovního listu proběhlo dne 24. 3. 2014 v 7. B na Základní škole Sokolov, Rokycanova 258. Jedná se o školu s rozšířenou výukou jazyků ve vybraných třídách, do kterých probíhají ve 3. třídě výběrová řízení. Hodinu vedl za mé účasti Mgr. Daniel Remta.

Charakteristika třídy

Jedná se o třídu, která prošla výběrovým řízením a podle hodnocení Mgr. Remty dosahují v matematice nadprůměrných výkonů. Testovací hodiny se zúčastnilo 26 žáků z toho 10 hochů.

ŠVP této školy z matematiky pro 7. ročník zahrnuje tyto partie: zlomky, celá a racionální čísla, poměr, přímá a nepřímá úměrnost, čtyřúhelníky a hranoly, procenta a zlomky.

Průběh hodiny

Žáci sestavili požadované modely – drobné problémy se vyskytli při sestavení kosodélníku, kosočtverce a deltoidu. Dále žáci hledali osy souměrnosti. Některým bylo nutné na modelu ukázat propojení osové souměrnosti a přehýbaní papíru. Na konci hodiny prošel učitel se třídou pracovní list a uvedl správné řešení.

Výsledek

Pracovní list si klade dva cíle. Rozeznat a správně pojmenovat základní typy čtyřúhelníků a pomocí překládání papíru upevnit znalosti o osové souměrnosti čtyřúhelníků.

Žáci byli při plnění cílů převážně úspěšní. Někteří žáci nedokázali odborně pojmenovat deltoid – někteří tento čtyřúhelník nazvali drakem. Při hledání osových souměrností pracovala většina žáků samostatně a úspěšně. Některým žákům vyučující musel ukázat propojení osové souměrnosti a překládání papíru. I ti dále pracovali samostatně a úspěšně.

Hodnocení učitelem (Mgr. Daniel Remta)

Skládání papíru byl pro žáky nový prvek ve výuce matematiky. Cenný byl zejména vizuální vjem osové souměrnosti.

Tím, že se modely různě modifikují, jsou v nich zbytečné rysy a ty mohou žáky při hledání osových souměrností zmást. Problém vidím i v různém tempu žáků při práci. Dobré by bylo doplnit pracovní list o další úlohy, kterými by se mohli rychlejší žáci ve zbylém čase zabývat.

Hodnocení autorem

Výsledek experimentu v této třídě hodnotím kladně, drtivá většina žáků správně pojmenovala a určila osy souměrnosti ve zkoumaných čtyřúhelnících. Jak již bylo poznamenáno výše, problémem je různé tempo práce žáků ve třídě (viz Závěr).

Závěr

Experiment byl úspěšný, ale odhalil rovněž slabá místa pracovního listu. Na základě této hodiny byly provedeny dvě změny.

Žáci budou skládat ze dvou papírů formátu A4, a tak sestaví potřebné čtyřúhelníky jako samostatné modely bez dalších modifikací.

Pracovní list dále obohatila tabulka, zabývající se dalšími vlastnostmi složených čtyřúhelníků. Tabulka je určena zejména rychlejším žákům. Jádro pracovního listu stále zůstává v osové souměrnosti čtyřúhelníků. Pracovní list s provedenými změnami včetně pozměněných metodických pokynů je uveden v příloze (Příloha 1).

5.6 Šipka

Pracovní list poskytuje návod na sestavení skládanky šipky. Dále vede žáky ke zkoumání vybraných vzniklých úhlů bez použití úhloměru. Pro jejich určení je nutné pochopit půlení úhlů během skládání modelu.

Metodika pracovního listu

Učivo	- úhly – určování velikostí - osová souměrnost – půlení úhlů
Cíl	- prověřit schopnost určovat velikost úhlů v netradičních modelech bez použití úhloměru
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: model šipky a návod na jeho sestavení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- vyplnění pracovního listu – samostatná práce žáků bez zásahů učitele - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- jeden papír formátu A4 pro každého žáka - psací potřeby

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list a návod na sestavení šipky. Dále papír, ze kterého budou skládat.

Podle návodu žáci seskládají šipku. Tu následně rozloží a jednoduchý přehýbáním přes již vzniklé hrany vytvářejí nepravidelné pětiúhelníky. V nich se poté zabývají velikostí vnitřních úhlů. Ty zapisují do obrázků v pracovním listu.

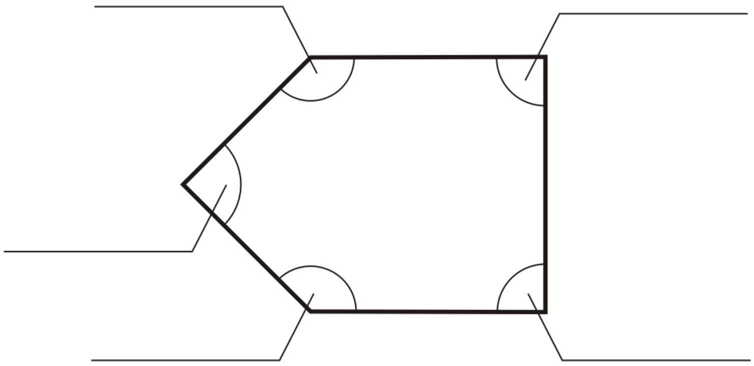
jméno a příjmení: ………………………………………

třída: ……………………

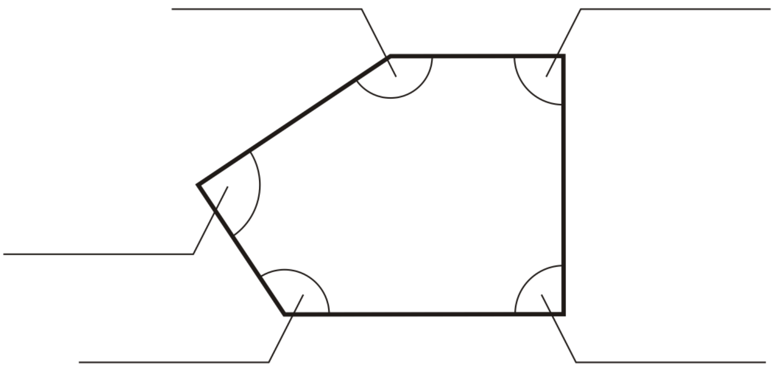
Šipka – pracovní list

1. Podle postupu v návodu slož vlaštovku – šipku.

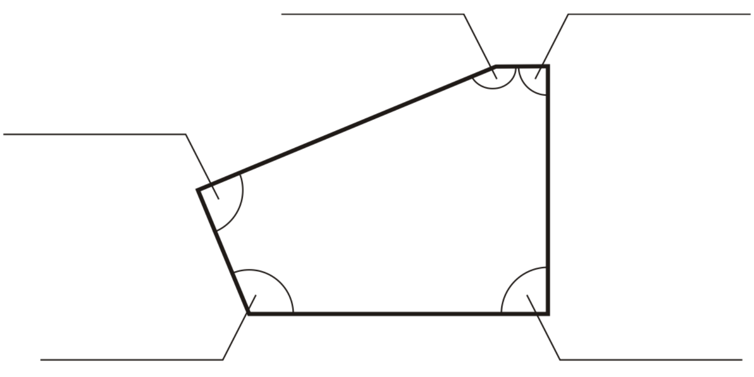
2. Model rozlož a podle dalšího postupu v návodu sestav první pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



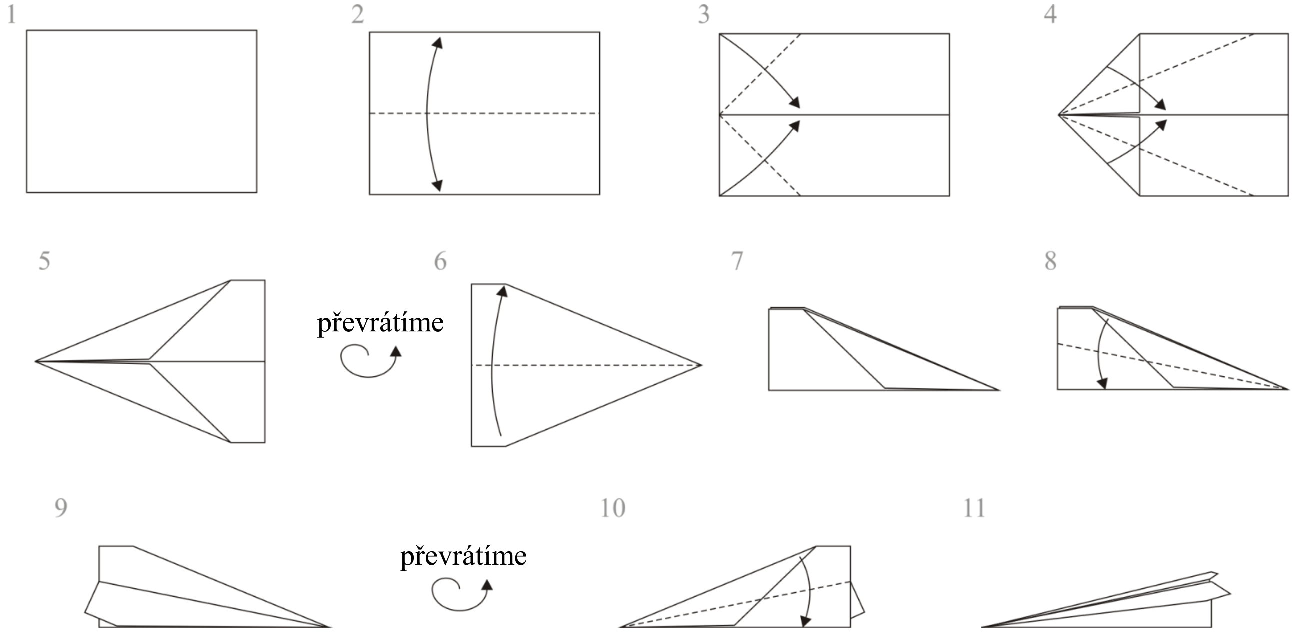
3. Podle postupu číslo 2 slož druhý pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.

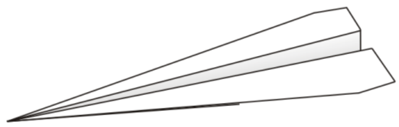


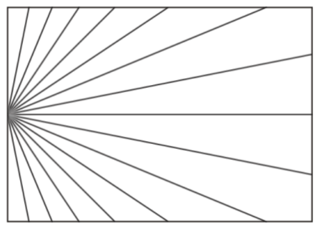
4. Podle postupu číslo 3 slož třetí pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



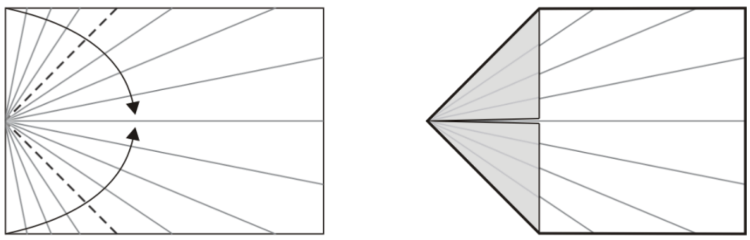
Šipka – návod



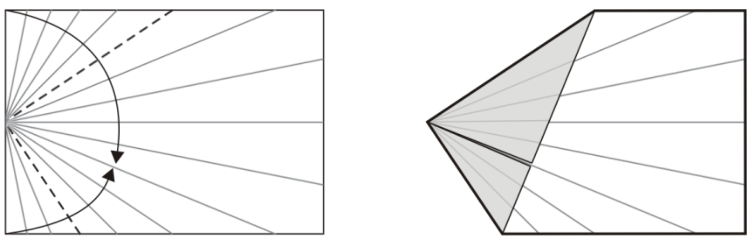




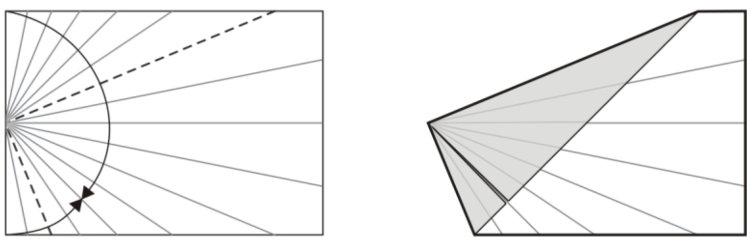
1.



2.



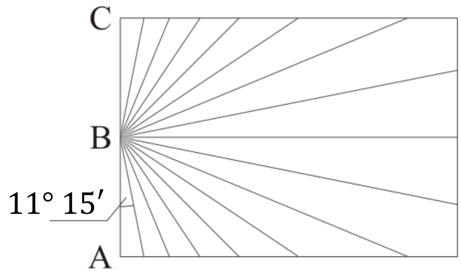
3.

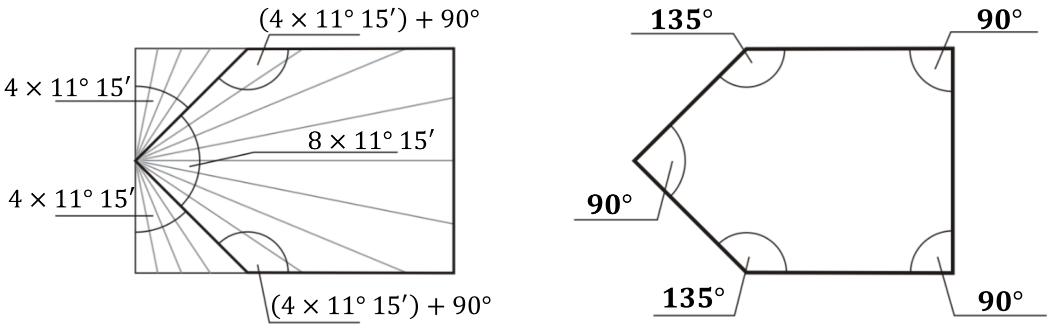


Vzorové řešení

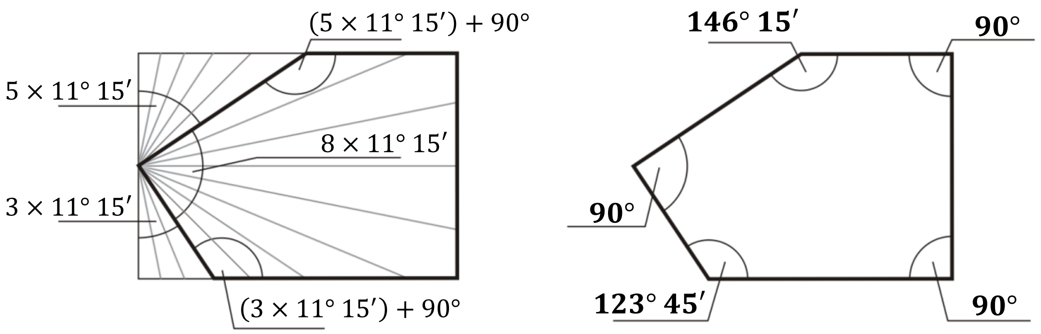
1. Podle postupu v návodu slož vlaštovku – šipku.
2. Model rozlož a podle dalšího postupu v návodu sestav první pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.

Během skládání šipky se přímý úhel *ABC* rozdělil na 16 stejných částí. K určení velikostí vnitřních úhlů v pětiúhelnících využíváme kombinaci těchto částí úhlu a dále střídavé úhly či součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku.

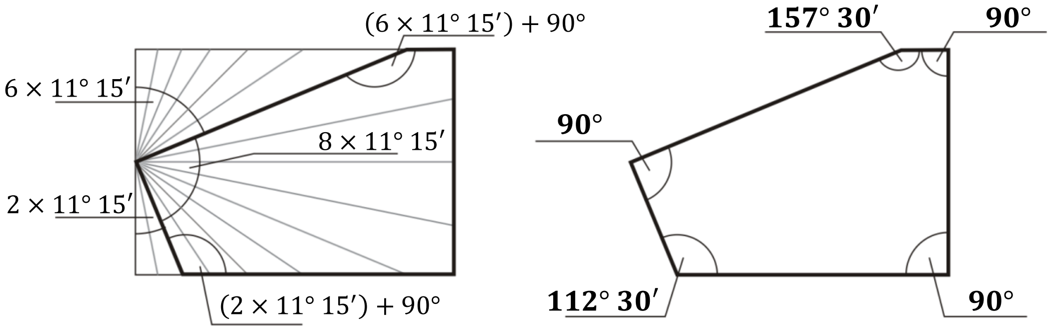




3. Podle postupu 2 slož druhý pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



4. Podle postupu číslo 3 slož třetí pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



5.7 Krychle

Postup v pracovním listu vede žáky k sestavení krychle ze šesti shodných jednotek. Během skládání žáci cvičí převod mezi procenty a zlomky. Sestavením krychle o dvakrát větší hraně se pak na vlastní oči přesvědčí o tom, že s dvakrát větší hranou se objem zvětší osmkrát a povrch čtyřikrát.

Metodika pracovního listu

Učivo	- procenta a zlomky - výpočet objemu a povrchu krychle
Cíle	1. procvičit převod mezi zlomky a procenty 2. upevnit znalost o platnosti vztahů mezi velikostí hrany krychle a jejím objemem a povrchem
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: model krychle a návod na jeho sestavení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- sestavení krychle a vyplnění pracovního listu – práce ve dvojicích bez zásahů učitele - sestavení větší krychle – práce ve skupinách například po 6 žácích - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- stavba malé krychle – jeden papír formátu A4 do dvojice - stavba krychle o dvakrát větší hraně – 3 papíry formátu A4 do skupiny - nůžky - psací potřeby – pastelky

Postup práce

Jak již bylo napsáno, aktivita je doporučena do dvojice. Učitel každé dvojici rozdá pracovní list, návod na sestavení krychle a papír, ze kterého budou skládat.

Ten dle návodu rozdělí a připraví si čtverce. Z nich sestaví jednotky, přičemž v každé z nich vybarví jiný počet malých čtverců. Počet vybarvených čtverců v každé jednotce vyjádří v procentech a pomocí zlomků do pracovního listu. Tam zapíší i podíl vybarvené plochy v postavené krychli. Dále se v pracovním listu žáci zabývají krychlí o dvojnásobné hraně. Své odhady a výpočty poté prakticky ukážou, když tuto velkou krychli ve skupině sestaví.

Poté mohou vedle této velké krychle vyskládat 8 menších. Získají tak vizuální důkaz o pravdivosti jejich výpočtů.

jméno a příjmení: ……………………………………… třída: ……………………

jméno a příjmení: ………………………………………

Krychle – pracovní list

1. Podle postupu v návodu sestav šest modulů. Při skládání každé jednotky vybarvi vždy jiný počet malých čtverců. Do tabulky níže vyjádři zlomkem a pomocí procent jaká část je vybarven.

	modul 1	modul 2	modul 3	modul 4	modul 5	modul 6
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **zlomkem** v základním tvaru						
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **v procentech** (zaokrouhleno na dvě desetinná čísla)						

2. Z šesti modulů sestav podle návodu krychli.
3. U hotové krychle spočítej, kolik procent povrchu krychle je vybarveno. Dané číslo vyjádři i jako zlomek v základním tvaru.

   Je vybarveno ☐ procent, tj. ☐ povrchu krychle.
   (zlomek)

4. Kdybychom stavěli ze čtverce o dvakrát větší velikosti strany, dostali bychom krychli s dvojnásobnou velikosti hrany. Kolikrát by se do ní vešla naše krychle?

   Odhad:

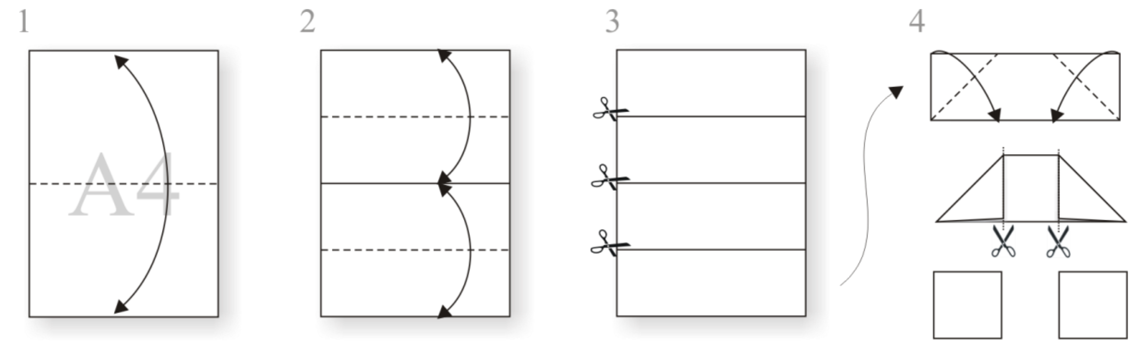
   Výpočet:

5. Postavte ve skupině tuto větší krychli (podle postupu v návodu). Byl tvůj odhad a výpočet správný?
6. Kolikrát více papíru jsme na stavbu větší krychle oproti menší krychli použili?

Krychle – návod

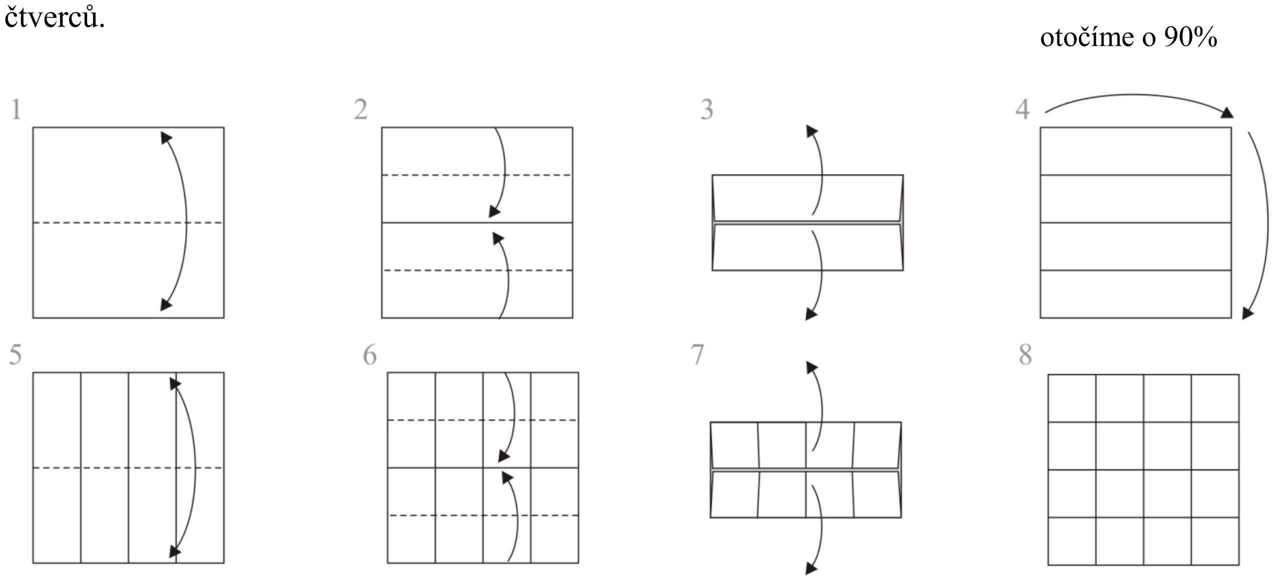
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky (obr. 1 – 4). Na obrázku 4 je postup jak získat dva čtverce z jednoho obdélníku. Na stavbu krychle potřebujeme 6 čtverců.

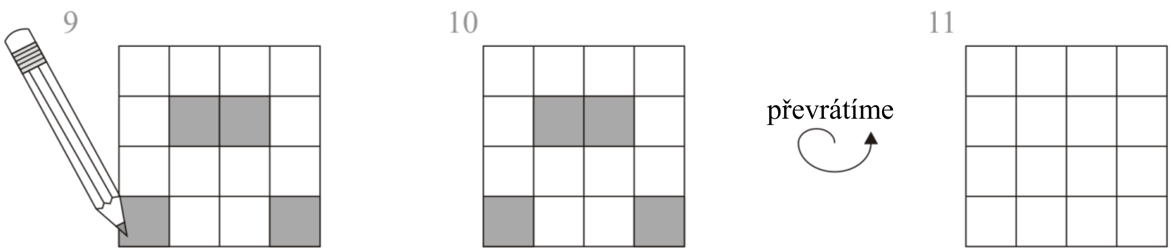


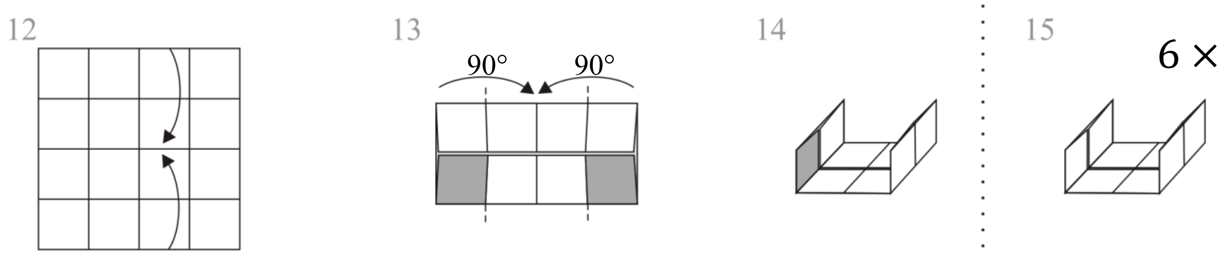
Vytvoření modulu

Ze všech čtverců sestavíme stejné moduly. Čtverec nejdříve rozdělíme na 16 shodných čtverců.



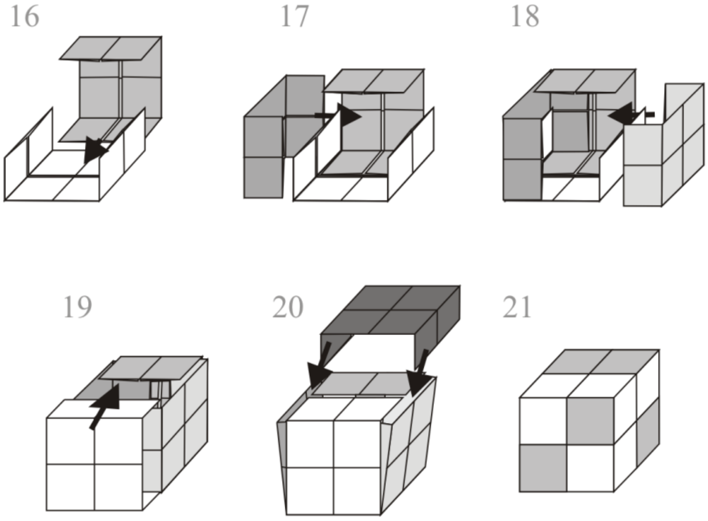
Nyní vybarvíme libovolný počet menších čtverců. U každého modulu vybarvíme jiný počet čtverců na jedné straně. Do tabulky v pracovním listu zapíšeme podíl vybarvené části pomocí procent a zlomků a pokračujeme dál.





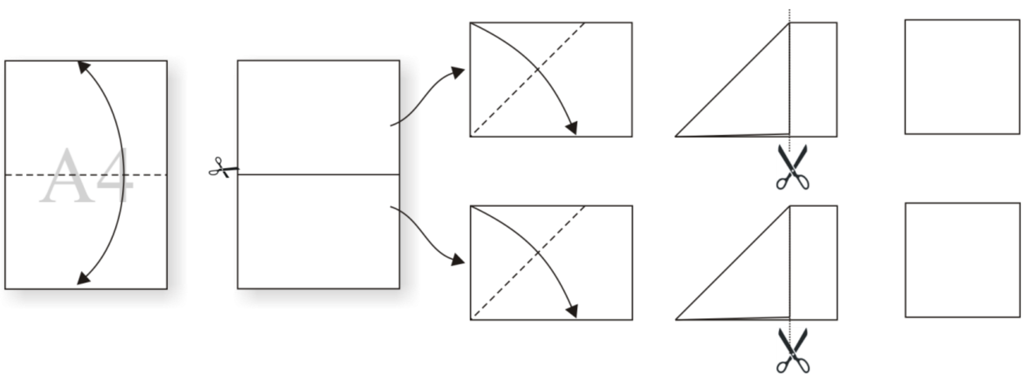
Sestavení krychle

Jeden modul máme hotový. Na sestavení krychle jich potřebujeme 6. Nezapomeň v kroku 9 vybarvit vždy jiný počet čtverců a vyplnit tabulku.



Velká krychle

Velkou krychli skládáme ze čtverce o dvakrát větší straně. Z papíru formátu A4 dostaneme takové čtverce dva. Potřebujeme tedy 3 papíry formátu A4.



Dále postupujeme stejně jako při sestavení malé krychle, jen nemusíme nic vybarvovat.

Vzorové řešení

Je jasné, že každá dvojice vybarví jiný počet malých čtverců a pro úlohy 1 – 3 tedy nelze napsat obecné řešení. Níže je tedy uveden příklad možného řešení.

1. Podle postupu v návodu sestav šest modulů. Při skládání každé jednotky vybarvi vždy jiný počet malých čtverců. Do tabulky níže vyjádři zlomkem a pomocí procent jaká část je vybarven.

	modul 1	modul 2	modul 3	modul 4	modul 5	modul 6
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **zlomkem** v základním tvaru	$\mathbf{\frac{3}{16}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{9}{16}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{5}{16}}$
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **v procentech** (zaokrouhleno na dvě desetinná čísla)	**18,75 %**	**50 %**	**56,2 %**	**100 %**	**25 %**	**31,25 %**

2. Z šesti modulů sestav podle návodu krychli.
3. U hotové krychle spočítej, kolik procent povrchu krychle je vybarveno (zaokrouhli na dvě desetinná místa). Dané číslo vyjádři i jako zlomek v základním tvaru.

   Je vybarveno **54, 17 %** procent, tj. $\mathbf{\frac{13}{24}}$ povrchu krychle.
   (zlomek)

4. Kdybychom stavěli ze čtverce o dvakrát větší velikosti strany, dostali bychom krychli s dvojnásobnou velikosti hrany. Kolikrát by se do ní vešla naše krychle?

   Odhad: **OSMKRÁT**

   Výpočet:

   malá krychle – velikost hrany – *a*

   $$V_{\text{malá krychle}} = a^3$$

   velká krychle 2*a*

   $$V_{\text{velká krychle}} = (2a)^3 = 8a^3$$

   Krychle o dvakrát větší velikosti hrany má OSMKRÁT větší objem.

5. Postavte ve skupině tuto vět2ší krychli (podle postupu v návodu). Byl tvůj odhad a výpočet správný? **ANO**

6. Kolikrát více papíru jsme na stavbu větší krychle oproti menší krychli použili?
   ČTYŘIKRÁT

5.8 Kolumbova krychle

Při řešení pracovního listu žáci sestaví Kolumbovu krychli, to jest „krychli, která se dá postavit na svůj vrchol“. Po jejím sestavení se zabývají tímto tělesem jako takovým. Řeší, zda se jedná o konvexní těleso a určují jeho objem a povrch.

Metodika pracovního listu

Učivo	- konvexní tělesa - výpočet objemu a povrchu těles
Cíl	na reálném tělese použít znalosti o výpočtu objemu a povrchu tělesa
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: návod na sestavení a model Kolumbovy krychle
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- sestavení Kolumbovy krychle a řešení pracovního listu – práce ve dvojicích - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- tři papíry formátu A4 do dvojice - nůžky - psací potřeby

Postup práce

Pojem Kolumbovo vejce je všeobecně známý. Jedná se o vajíčko postavené na svém vrcholu. Učitel nejdříve seznámí žáky s příběhem Kolumbova vejce:

Po objevení Ameriky byl Kryštof Kolumbus zván k významným lidem. Na jedné z oslav se našli závistivci, kteří tvrdili, že doplout do Ameriky není obtížné a význam jeho cesty zlehčovali. Kolumbus jim dal za pravdu, že skutečně není těžké doplout do Ameriky, ale on byl první, kdo na to přišel. Na to vzal vejce a vyzval závistivce, aby jej postavili na špičku. Těm se samozřejmě nedařilo úkol splnit, až slavný mořeplavec vejce vzal, lehce mu naťukl špičku a postavil jej na stůl. Ozvaly se hlasy, že je podvodník, a že to přeci nic není. Kolumbus odvětil, že je to skutečně hračka, ale že on byl první, kdo na to přišel. Stejně jako on mohl vejce naťuknout kdokoliv před ním [18]. A tento pracovní list poskytuje návod na sestavení krychle, jenž se dá postavit na svůj vrchol. Proto jí nazýváme Kolumbovou krychlí.

Po tomto úvodu učitel rozdá každé dvojici pracovní list, návod na sestavení Kolumbovy krychle a tři papíry, ze kterých budou skládat. Podle návodu poskládají dva druhy modulů po třech kusech, ze kterých sestaví těleso. Po jejich poskládání sestaví těleso. V pracovním listu se zabývají konvexností, objemem a povrchem složené Kolumbovy krychle.

jméno a příjmení: ………………………………………… třída: ……………………

jméno a příjmení: …………………………………………

Kolumbova krychle – pracovní list

1. Podle obrázků v návodu sestav Kolumbovo krychli.

2. Jedná se o konvexní těleso?

   ano | **ne**

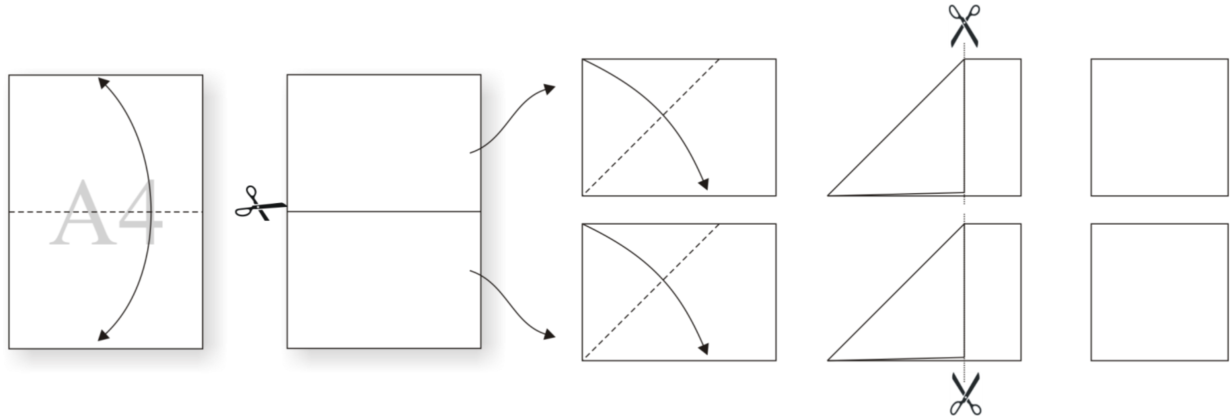
3. Urči povrch Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

4. Vypočítej objem Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

Kolumbova krychle – návod

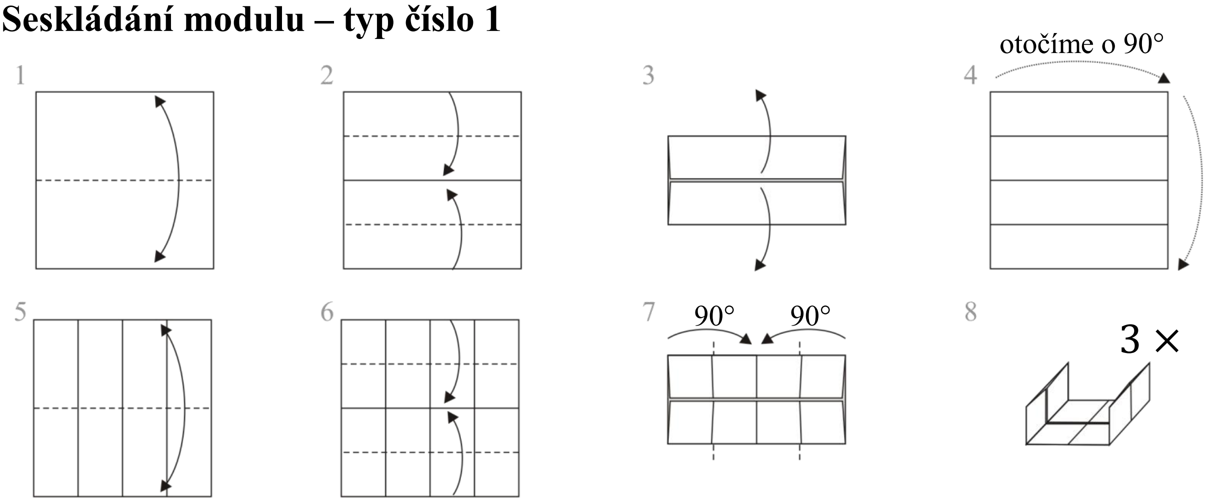
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na půl. Ze dvou vzniklých obdélníků vytvoříme čtverce. Celkem potřebujeme šest čtverců, potřebujeme tedy 3 papíry formátu A4.



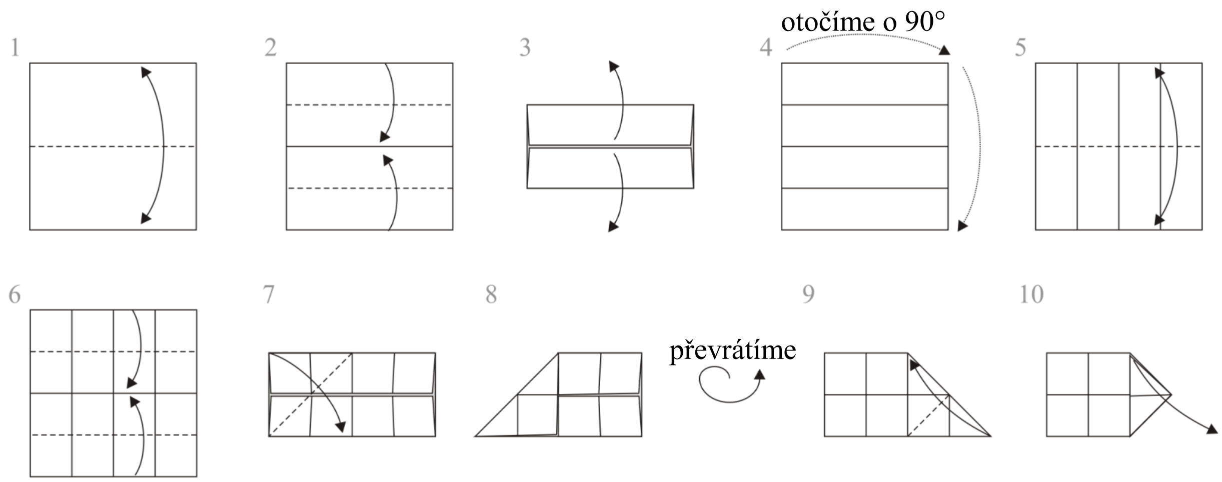
Z těchto čtverců budeme skládat dva typy modulů. Tři kusy od každého typu.

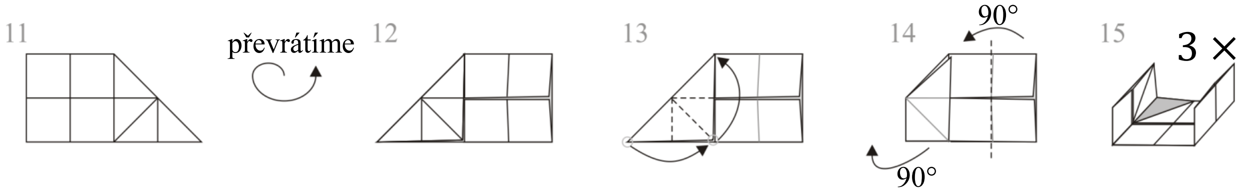
Seskládání modulu – typ číslo 1



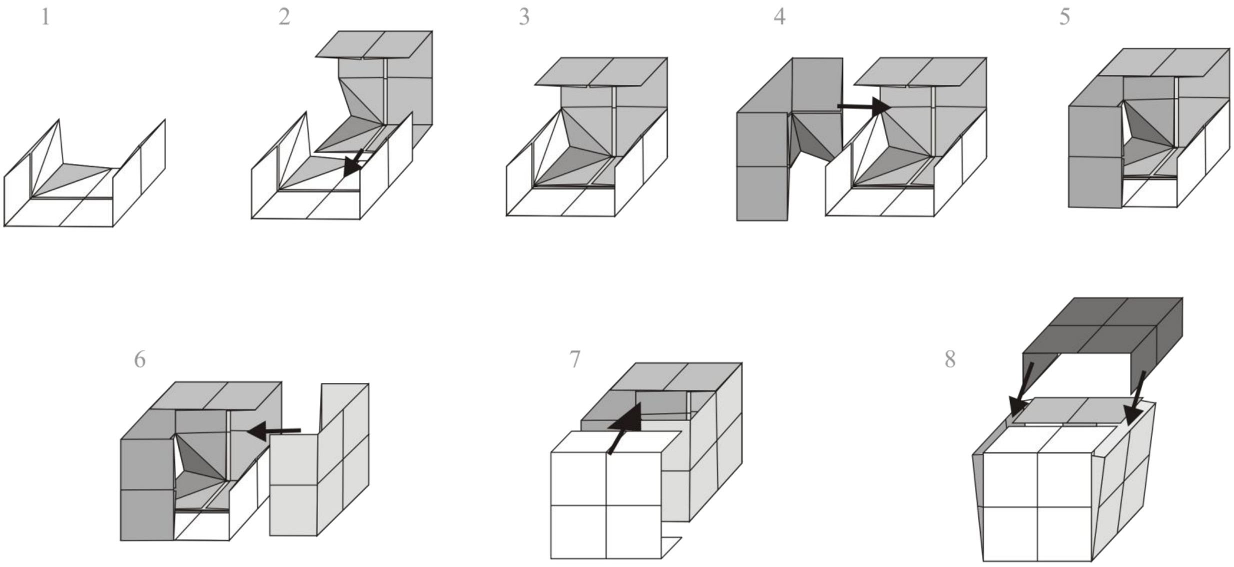
Seskládání modulu – typ číslo 2

Sestavení druhého typu je do sedmého kroku totožný s předchozím typem.

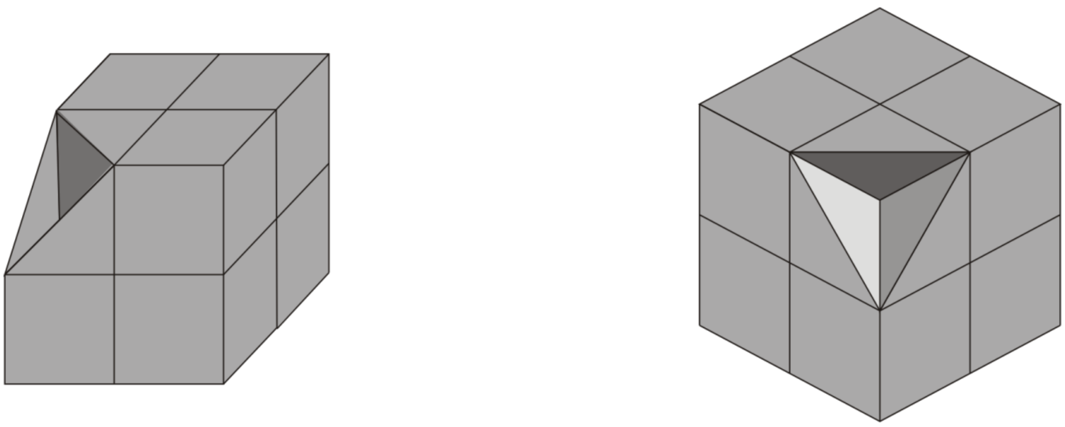




Sestavení Kolumbovy krychle



Nejdříve sestavíme jeden roh krychle pomocí modulů typu 2. Zasouváme je do sebe tak, aby se na tvorbě rohu podílely všechny tři moduly. Dále použijeme moduly prvního typu a krychli dostavíme. Po zasunutí posledního modulu zpevníme celý model.



Vzorové řešení

1. Podle obrázků v návodu sestav Kolumbovo krychli.
2. Jedná se o konvexní těleso?

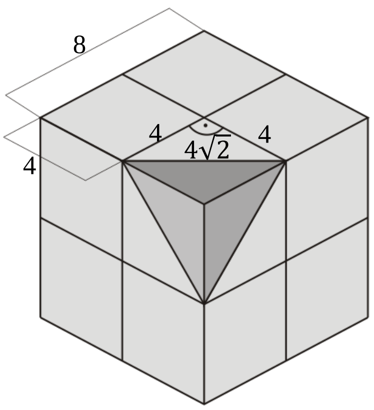
ano | **ne**

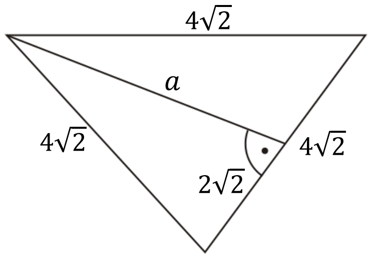
3. Urči povrch Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

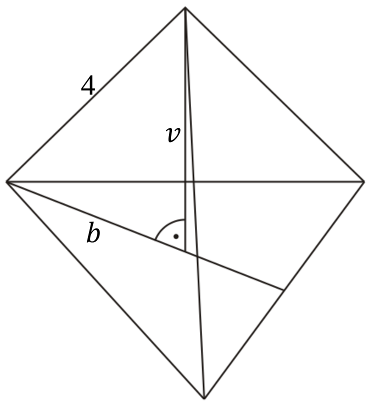
Stavíme-li ze čtverce o velikosti hrany 16, mají dlouhé hrany Kolumbovy krychle velikost 8. Při zkoumání tělesa zjistíme, že jeho povrch je shodný s povrchem klasické krychle o velikosti hrany 8. Povrch zkoumaného tělesa je tedy 384 cm^2.

4. Vypočítej objem Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

Objem Kolumbovy krychle získáme tak, že od objemu klasické krychle odečteme dvakrát objem tříbokého jehlanu.







$$a = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} \qquad b = \frac{2}{3}\,a \qquad v = \sqrt{4^2 - b^2}$$

$$a = 2\sqrt{6} \qquad b = \frac{4\sqrt{6}}{3} \qquad v = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{podstava} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}}{2} = 8\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

$$V_{jehlan} = \frac{S_{podstava}\cdot v}{3} = \frac{8\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{32}{3}\,\mathrm{cm}^3$$

$$\boxed{V_{Kolumbova\ krychle} = V_{krychle} - 2\cdot V_{jehlan} = 8^3 - 2\cdot\frac{32}{3} = \frac{1472}{3} = 490\ \frac{2}{3}\ \mathrm{cm}^3}$$

5.9 Eulerův vztah

Tento pracovní list vede žáky k vytvoření čtyř konvexních těles. U nich následně zkoumají počet vrcholů, stěn a hran s cílem odvodit Eulerův vztah. Učitel pak žáky vede k přidání podmínky, že Eulerův vztah obecně neplatí pro nekonvexní tělesa.

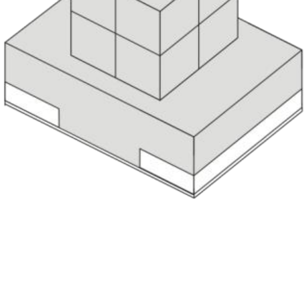
Metodika pracovního listu

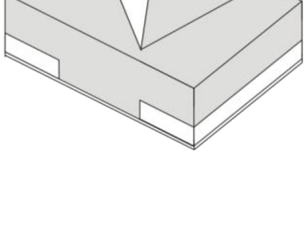
Učivo	- konvexní tělesa
Cíl	odvodit Eulerův vztah pro konvexní tělesa
Výstup	pro učitele: pracovní list pro žáky: návody na sestavení a modely krychle, kvádru, čtyřstěnu a osmistěnu
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- sestavení krychle, kvádru, čtyřstěnu a osmistěnu a řešení pracovního listu – práce ve skupinách (například po čtyřech) - kontrola výsledku a platnost Eulerova vztahu pro nekonvexní tělesa – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- sedm papírů formátu A4 do skupiny - nůžky - psací potřeby

Postup práce

Učitel žáky rozdělí do skupin, rozdá pracovní listy, návody a papíry, ze kterých budou skládat. Dále žáci sestaví požadovaná tělesa. Ty následně ve skupině zkoumají. Do tabulky v pracovním listu zapíší počet vrcholů, stěn a hran jednotlivých těles. Na základě těchto informací se snaží odvodit Eulerův vztah. Učitel může žáky motivovat soutěží, která skupina objeví vztah nejdříve.

Po odvození vztahu učitel navede žáky na nekonvexní těleso sestavené ze složených těles, viz obrázek. Na takto vzniklé těleso nahlížíme jako na jednolité a žáci u něj určí počet vrcholů, stěn a hran. Zjistí, že zde Eulerův vztah neplatí. Učitel žáky navede k tomu, že Eulerův vztah obecně platí jen pro konvexní tělesa.





příjmení členů skupiny: ....

třída: ....

Eulerův vztah – pracovní list

1. Rozdělte si práci ve skupině a podle postupu v návodu sestavte krychli, kvádr, čtyřstěn a osmistěn.

2. Zapište do tabulky počet vrcholů, stěn a hran složených těles.

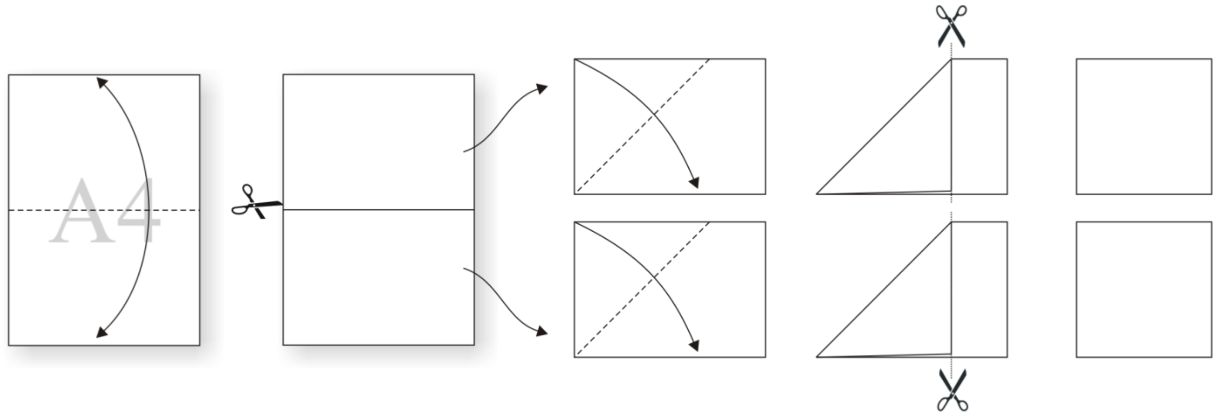
	počet vrcholů – V	počet stěn – S	počet hran – H
krychle			
kvádr			
čtyřstěn			
osmistěn			

3. Na základě hodnot v tabulce se pokus vypozorovat vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran.

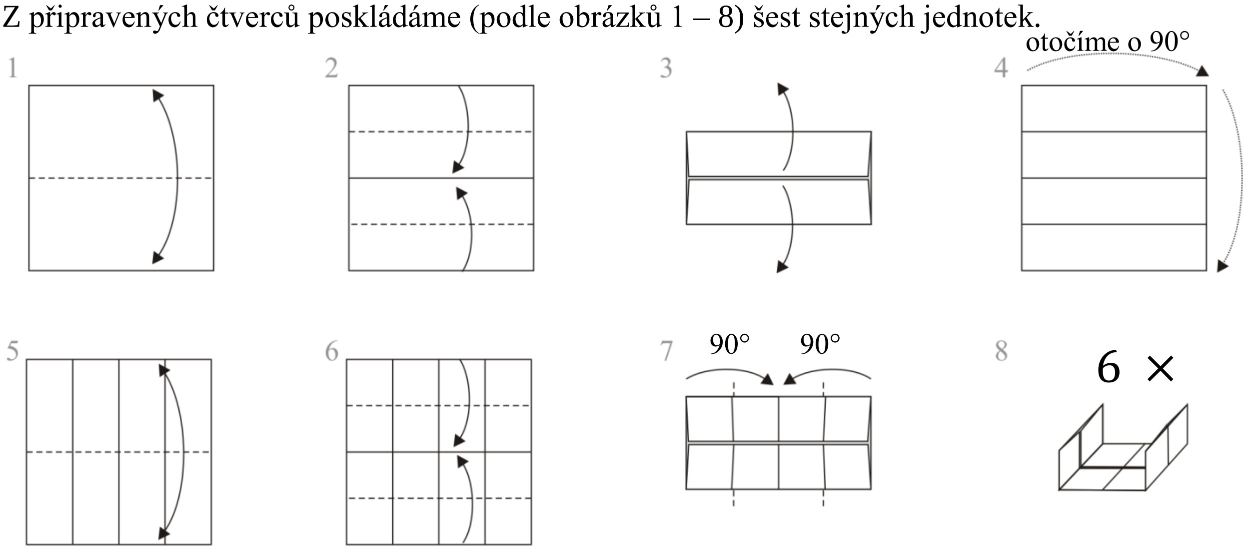
Eulerův vztah – návod

I. krychle

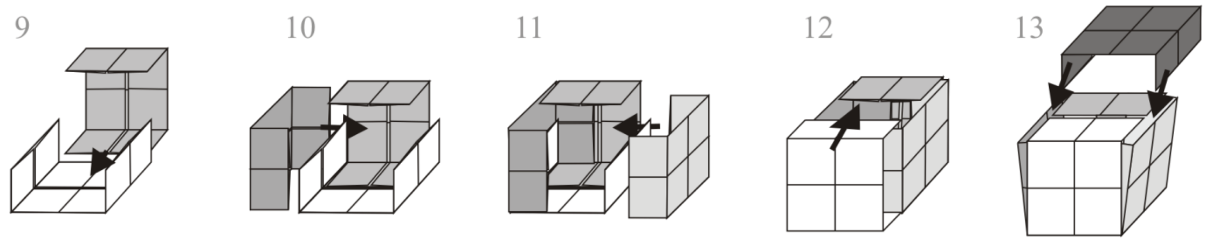
Z papíru formátu A4 podle postupu níže připravíme 2 čtverce. Na sestavení krychle potřebujeme těchto shodných čtverců 6, musíme si tedy připravit 3 papíry formátu A4.

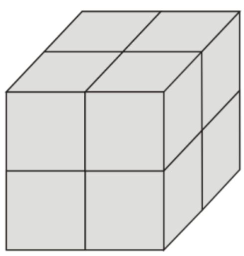


Z připravených čtverců poskládáme (podle obrázků 1 – 8) šest stejných jednotek.



Z šesti poskládaných jednotek sestavíme krychli (obr. 9 – 13).

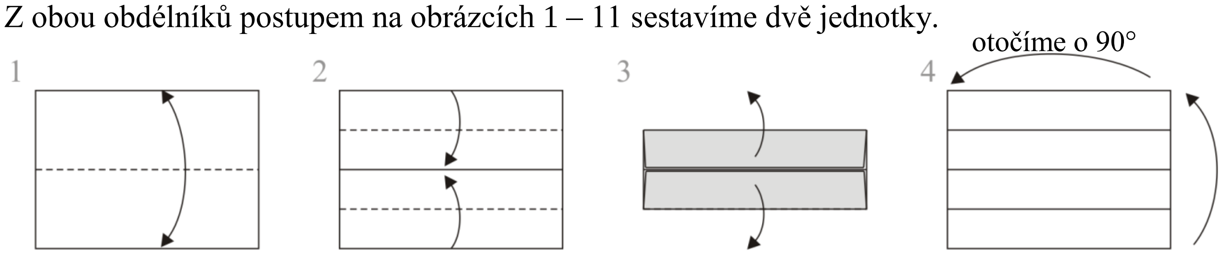


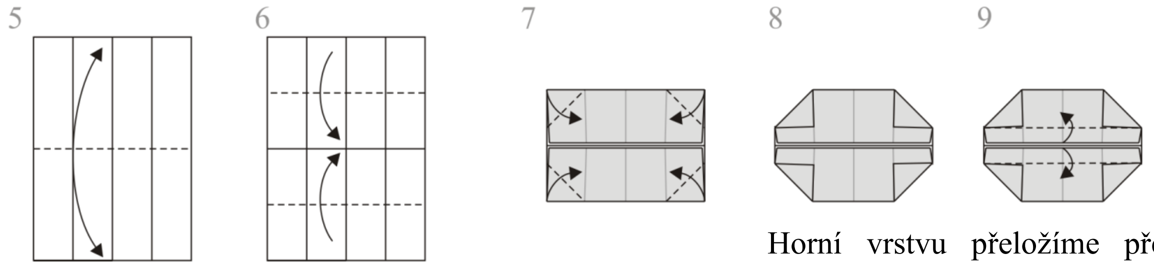


II. kvádr

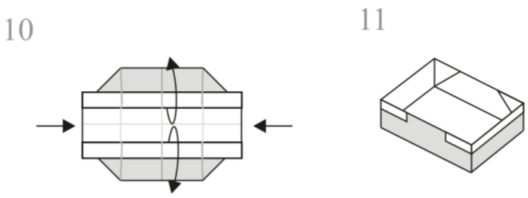
Na stavbu kvádru potřebujeme dva obdélníky formátu A4.

Z obou obdélníků postupem na obrázcích 1 – 11 sestavíme dvě jednotky.

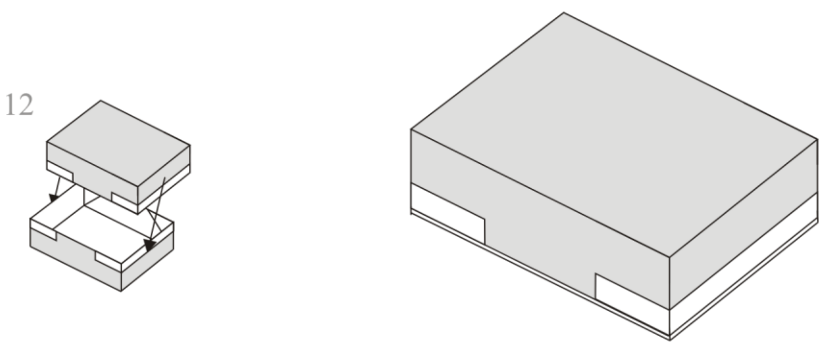




Horní vrstvu přeložíme přes přehnuté rohy.

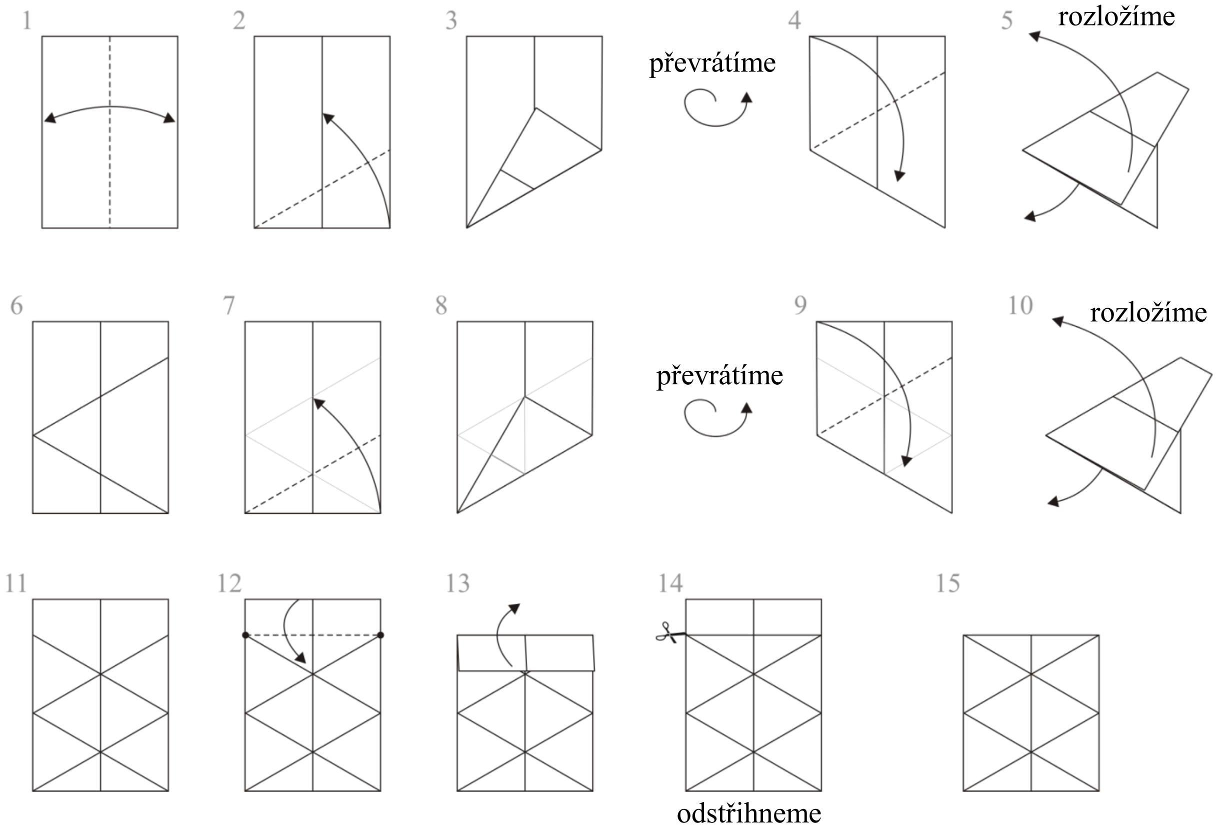


Model roztáhneme (obr. 10) a upravíme tak, aby vzniklé úhly byly pravé. U vzniklé krabičky zostříme hrany. Jednu jednotku máme hotovou. Stejným způsobem seskládáme i druhou jednotku. Poté je nasuneme na sebe (obr. 12) a kvádr je hotový.



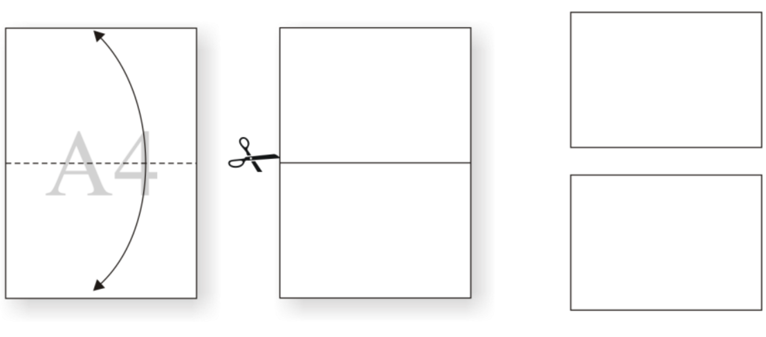
Příprava na čtyřstěn a osmistěn

Sestavení čtyřstěnu i osmistěnu má zpočátku stejný průběh. Obdélník formátu A5 podle postupu na obrázcích 1 – 14 upravíme na obdélník na obrázku 15. K tomuto návodu se za chvíli vrátíme.

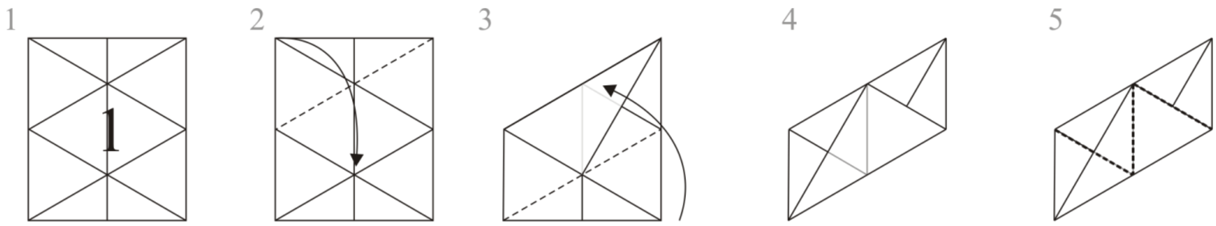


III. čtyřstěn

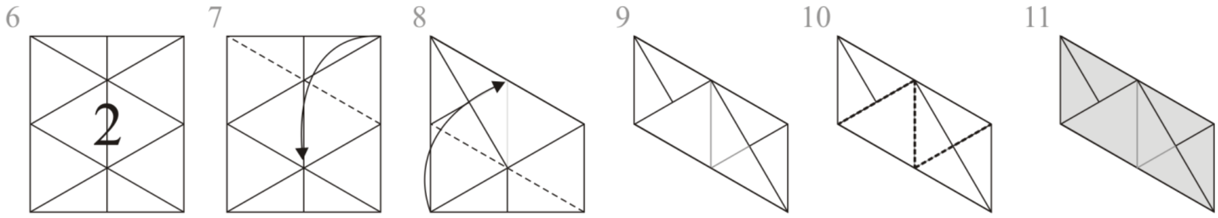
Z papíru formátu A4 si nejdříve připravíme dva menší obdélníky formátu A5.



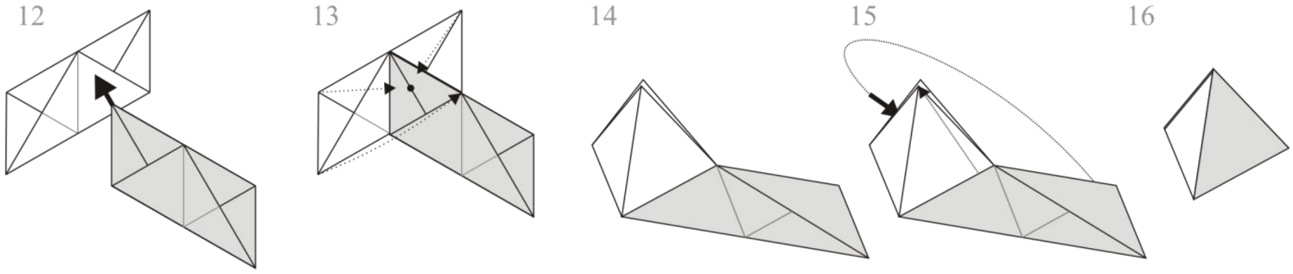
Oba tyto obdélníky upravíme podle postupu 1 – 14 výše (v části Příprava na čtyřstěn a osmistěn). Z prvního obdélníku podle obrázků 1 – 4 níže vytvoříme první modul. Zejména rysy, vyznačené v obrázku 5 přerušovanou čarou, musí být ostré.



Z druhého obdélníku obdobně, ale zrcadlově, vytvoříme modul číslo 2. Rovněž zde zkontrolujeme ostrost vyznačených rysů (obr. 10). Pro další práci bude tento modul označen šedou barvou (obr. 11).



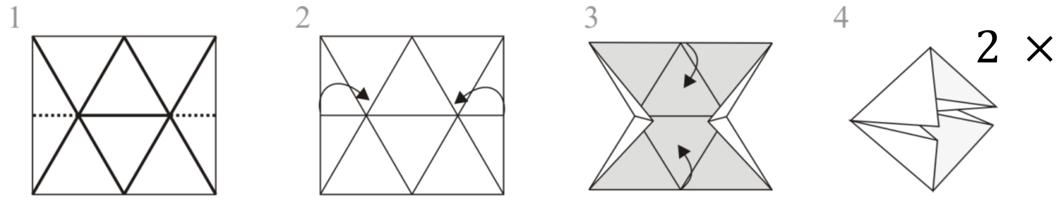
Šedý modul přiložíme na bílý (obr. 12), z bílého modulu vytvoříme čtyřstěn (obr. 13 – 14) a šedým modulem překryjeme dvě stěny bílého a zasuneme (obr. 15). Čtyřstěn máme hotový.



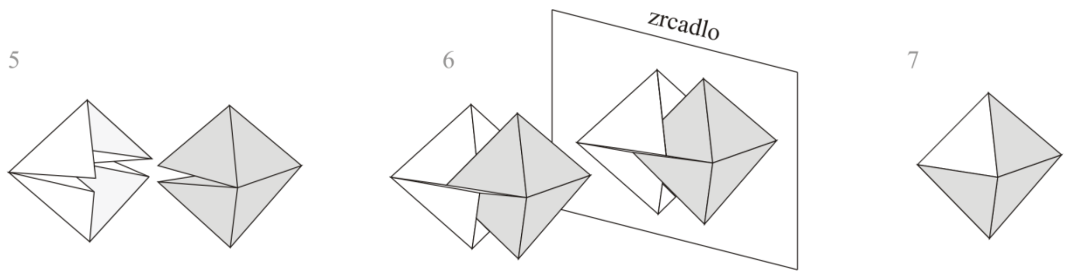
IV. osmistěn

Z papíru formátu A4 si nejdříve připravíme dva menší obdélníky formátu A5 (podle postupu u čtyřstěnu) a oba tyto obdélníky upravíme podle postupu 1 – 14 na předchozí straně (v části Příprava na čtyřstěn a osmistěn).

V připravených obdélnících hrany na obrázku 1 vyznačeny plnou čarou přehneme dopředu, hrany vyznačeny přerušovaně dozadu. Podle postupu na obrázku 2 a 3 níže vytvoříme dvě shodné jednotky.



Dvě jednotky pak zasuneme do sebe (pro názornost rozlišujeme bílou a šedou jednotku). Jednotky do sebe zasuneme tak, aby šedá šla vepředu nahoře přes bílou a dole pod bílou a vzadu obráceně, tj. nahoře pod bod bílou a dole přes bílou (znázorněno pomocí zrcadla na obr. 6). A tím je osmistěn hotový.



Vzorové řešení

1. Rozdělte si práci ve skupině a podle postupu v návodu sestavte krychli, kvádr, čtyřstěn a osmistěn.

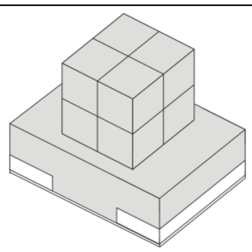
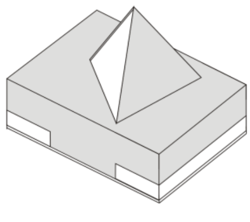
2. Zapište do tabulky počet vrcholů, stěn a hran složených těles.

	počet vrcholů – V	počet stěn – S	počet hran – H
krychle	**8**	**6**	**12**
kvádr	**8**	**6**	**12**
čtyřstěn	**4**	**4**	**6**
osmistěn	**6**	**8**	**12**

3. Na základě hodnot v tabulce se pokus vypozorovat vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran.

$$\boxed{\boldsymbol{V+S=H+2}}$$

Výsledek zkoumání učitelem sestavených nekonvexních těles.

	počet vrcholů – V	počet stěn – S	počet hran – H	$\boldsymbol{V+S=H+2}$
	**16**	**11**	**24**	$\mathbf{27 \neq 26}$
	**12**	**9**	**18**	$\mathbf{21 \neq 20}$

6 Závěr

Po seznamení se s doporučenou i jinou literautou, s možnostmi origami, s jeho využitím při výuce a díky zkušenostem nabytých při testování pracovních listů ve školách, musím prohlásit, že skládání papíru lze využít k rozvoji matematických idejí a k vyučování matematiky.

V průběhu práce jsem obhajoval origami jako vyučovací metodu. Je jasné, že origami není novým, všespásným, způsobem, jak učit matematiku. Skládání papíru nemůže nahradit tradiční rýsovací pomůcky ani konkurovat virtuálním geometrím. Jedná se o kamínek v pestré mozaice vyučovacích metod, který dokáže bojovat proti stereotypnímu a formálnímu vzdělávání.

O využití origami a matematiky bylo ve světě napsáno již několik odborných prací i článku. Tato práce však přináší konkrétní pracovní listy, které může učitel bez většího úsilí využít ve své výuce. V tom je, podle mého názoru, práce v českém prostředí unikátní.

Nejdůležitějším momentem při tvorbě práce byla návštěva škol a zpětná vazba od žáků a učitelů. Většinu žáků propojení origami a matematiky velice zaujalo, při práci byli klidní a soustředění. Pozitivního ohlasu jsem se dočkal i od vyučujících. Většina se ptala na další možné aktivity, které by mohly při výuce využít.

Testování jednotlivých pracovních listů však odhalilo i problémy a nedostatky. Ty můžeme rozdlit na problémy konkrétních pracovních listů a na problémy systémové. Nedostatky u jednotlivých aktivit jsou uvedeny v hodnocení experimetů i se snahou o jejich řešení. Pracovní list Konvexní čyřúhelníky byl na základě zkušenosti ze školy upraven a jeho upravená verze je uvedena v příloze.

Za problémy systémové označuji chyby při čtení obrázkového postupu, pečlivost a vytrvalost hledání řešení. Jednotlivé pracovní listy budou využívány efektivněji, budou-li žáci se skládáním z papíru seznámeni dříve, například na výtvarné výchově. Origami se jim dostane pod kůži a při řešení problémů se budou více soustředit na jeho matematický obsah.

Daným tématem se budu jistě nadále zabývat. Mojí představou je vytvoření určité sbírky aktivit, využívajících origami ve výuce. Ta by řešila i problém průběžného a systamatického zařazování skládání papíru do vyučovacího procesu.

Seznam zdrojů informací

[1] LISTER, David. *On the word "Origami"* [online]. British Origami Society, 2013. [cit. 2014-04-03]. Dostupné z: http://www.britishorigami.info/academic/lister/theword.php.

[2] ČESKÁ ORIGAMI SPOLEČNOST. *Historie origami* [online]. 2010. [cit. 2014-04-03]. Dostupné z: http://www.origami-cos.cz/historie-origami.

[3] HATORI, Koshiro. *History of Origami* [online]. 2010. [cit. 2014-04-03]. Dostupné z: http://origami.ousaan.com/library/historye.html.

[4] ORIGAMI RESOURCE CENTER. *History of origami* [online]. 2013. [cit. 2014-04-03]. Dostupné z: http://www.origami-resource-center.com/history-of-origami.html.

[5] PEARL, Barbara Erica. *Math in motion: origami in the classroom: a hands-on creative approach to teaching mathematics*. Newport Beach, CA: Math in Motion, 1994. ISBN 978-096-4792-432.

[6] GAWLICK, Thomas a WASCHBUSCH, Julia. Grundfaltungen des Origamis. *Der Mathematikunterricht: Matematik und Origami*. Seelze: Friedrich Verlag, roč. 55, č. 6, str. 49 – 61, 2009. ISSN 0025-5807.

[7] KOMENSKÝ, Jan Ámos. *Didaktika analytická*. Praha: Samcovo knihkupectví, 1946.

[8] SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika*. Praha: ISV nakladatelství, 1999. ISBN 80-858-6633-1.

[9] MOJŽÍŠEK, Lubomír. *Vyučovací metody*. Praha: SPN, 1988.

[10] HEJNÝ, Milan a KUŘINA František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-807-3673-970.

[11] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1989. ISBN 80-080-1344-3.

[12] MŠMT ČR. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání platný od 1 9. 2013* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2013. [cit. 2014-04-06].
Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433_1_1/

[13] MŠMT ČR. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. [cit. 2014-04-06]. ISBN 978-808-7000-113.
Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159_1_1/

[14] MONTROLL, John. *Origami and math: simple to complex*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2012. ISBN 04-864-8886-1.

[15] MITCHELL, David. *Exploring Mathematical Ideas with Origami*. Kendal, England: Water Trade, 2001. ISBN 0-9534774-4-4.

[16] MITCHELL, David. *Mathematical origami: geometrical shapes by paper folding.* Norfolk: Tarquin, 1999. ISBN 978-1899618187.

[17] SASTRY, V. S. Shankar. *Origami – Fun and Mathematics.* New Delhi, Vigyan Prasar, 2007. ISBN 9788174801258.

[18] PŘISPĚVATELÉ WIKIPEDIE. *Kolumbovo vejce* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie, 2013. [cit. 2014-04-07].
Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Kolumbovo_vejce&oldid=11010142.

Seznam příloh

Příloha 1 – Pracovní list Konvexní čtyřúhelníky včetně upravených metodických pokynů

Příloha 2 – Pracovní list Srdce

Příloha 3 – Pracovní list Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost

Příloha 4 – Pracovní list Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů

Příloha 5 – Pracovní list Šipka

Příloha 6 – Pracovní list Krychle

Příloha 7 – Pracovní list Kolumbova krychle

Příloha 8 – Pracovní list Eulerův vztah

Konvexní čtyřúhelníky

V rámci pracovního listu žáci konstruují konvexní čtyřúhelníky a hledají jejich osy souměrnosti. Využívají přitom možnosti model přeložit a ověřit, že se skutečně jedná o osu. Jelikož tempo práce při hledání os může být značně rozdílné, je pro rychlejší žáky připraveno cvičení na měření úhloměrem.

Metodika pracovního listu

Učivo	- konvexní čtyřúhelníky - osová souměrnost rovinných útvarů - měření
Cíle	3. rozeznat a správně pojmenovat základní typy čtyřúhelníků 4. pomocí překládání papíru upevnit znalosti o osové souměrnosti čtyřúhelníků 5. procvičit práci s úhloměrem na reálném objektu
Výstup	pro učitele: pracovní list + čtyřúhelníky z bonusového úkolu pro žáky: modely vybraných čtyřúhelníků a návod na jejich sestavení
Časová náročnost	jedna vyučovací hodina
Organizace hodiny	- vyplnění pracovního listu – samostatná práce žáků bez zásahů učitele - kontrola správnosti – kolektivní práce celé třídy
Potřeby	- dva papíry formátu A4 pro každého žáka - psací potřeby - nůžky - úhloměr

Postup práce

Učitel žákům rozdá pracovní list, návod obsahující pokyny pro sestavení jednotlivých čtyřúhelníků a dva papíry formátu A4, ze kterého budou skládat.

Žáci poskládají podle návodu jednotlivé skládanky. Ty dále zkoumají a do tabulky v pracovním listě zapíší přesný název čtyřúhelníku. Do obrázku pak vyznačí všechny jeho osy souměrnosti. Prostředkem k hledání os je práce s modelem.

Pro rychlejší žáky je připraven bonusový úkol, který prověří znalost vlastností čtyřúhelníků a práci s úhloměrem.

jméno a příjmení: ....

třída: ....

Konvexní čtyřúhelníky
Pracovní list

6. Rozděl dva papíry formátu A4 na osm shodných menších obdélníků.

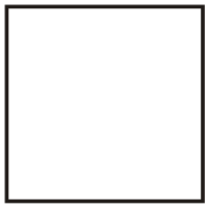
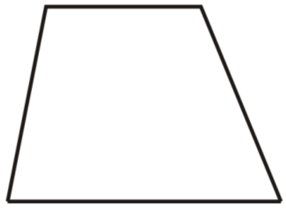
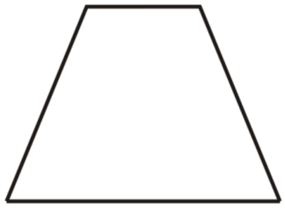
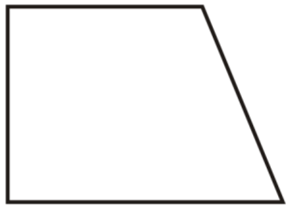
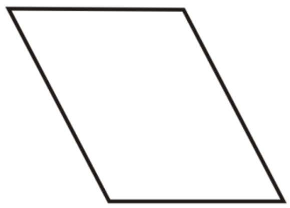
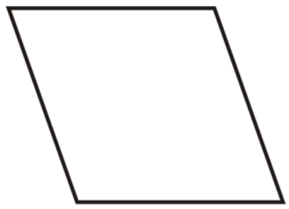
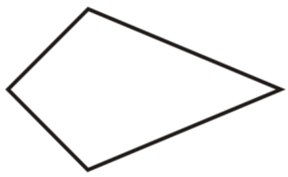
7. Z těchto osmi obdélníků poskládej podle návodu požadované čtyřúhelníky.

8. Do tabulky na druhé straně zapiš co nejpřesnější název čtyřúhelníku a do obrázku vyznač všechny osy souměrnosti. K hledání osových souměrností využij překládání modelu.

Bonusový úkol

Z poskládaných čtyřúhelníků vyber ty, jejichž **úhlopříčky se navzájem půlí** a jejich vnitřní **úhly nejsou pravé**. U čtyřúhelníků, které splňují obě uvedené vlastnosti zároveň, urči pomocí úhloměru velikosti vnitřních úhlů a zapiš je přímo do skládaček. Odevzdej je spolu s pracovním listem.

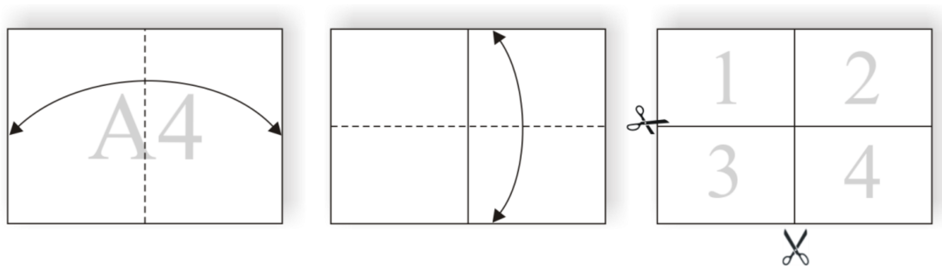
-

	přesný název čtyřúhelníku	osy souměrnosti
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Konvexní čtyřúhelníky
Návod

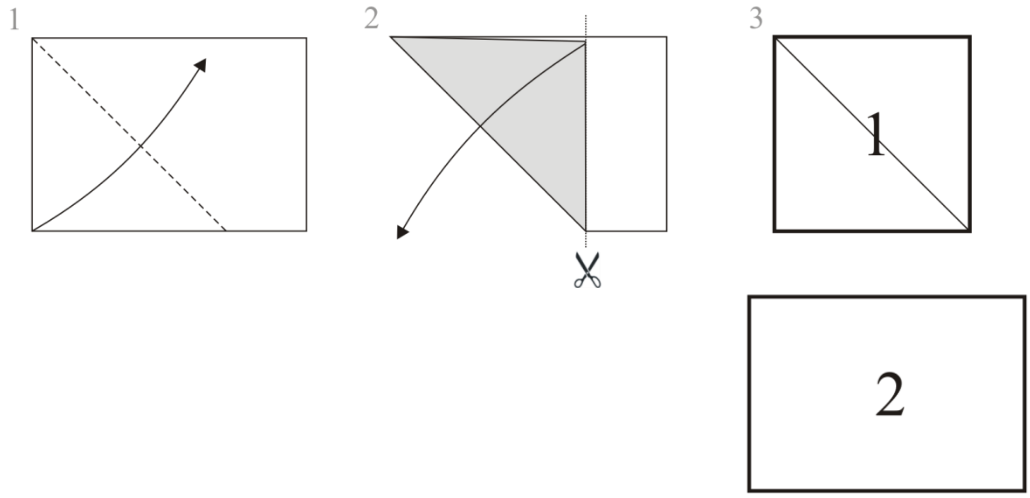
Rozdělení papíru

Oba papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky, získáme tak osm menších obdélníků. Z nich podle dalších instrukcí vytvoříme 8 čtyřúhelníků.



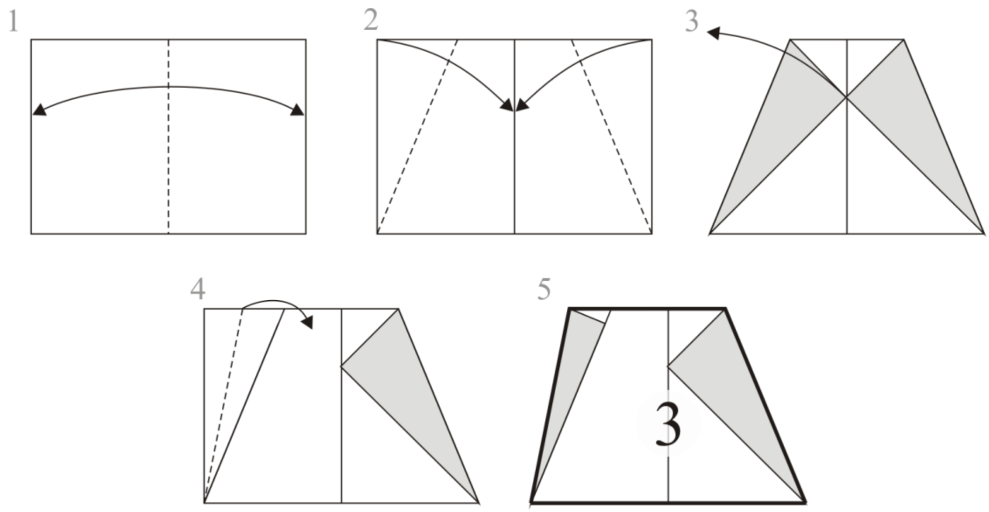
Čtyřúhelníky 1 a 2

První čtyřúhelník vznikne jednoduše podle obrázků 1 – 3. Druhý čtyřúhelník nemusíme vůbec skládat, protože použijeme samotný menší obdélník.



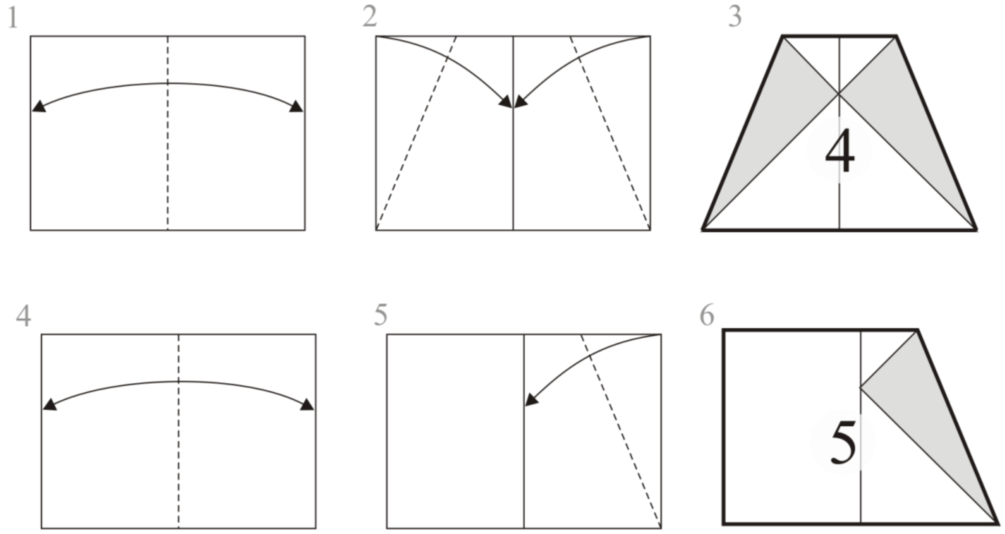
Čtyřúhelník 3

Podle obrázku 1 – 5 vytvoříme třetí čtyřúhelník.



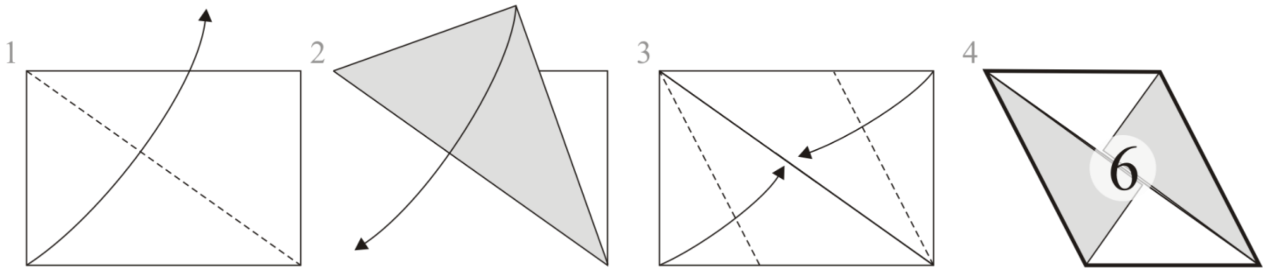
Čtyřúhelníky 4 a 5

Postup konstrukce čtvrtého čtyřúhelníků (obr. 1 – 3) obsahuje první tři kroky předchozího postupu, sestavení pátého (obr. 4 – 6) je rovněž podobné.



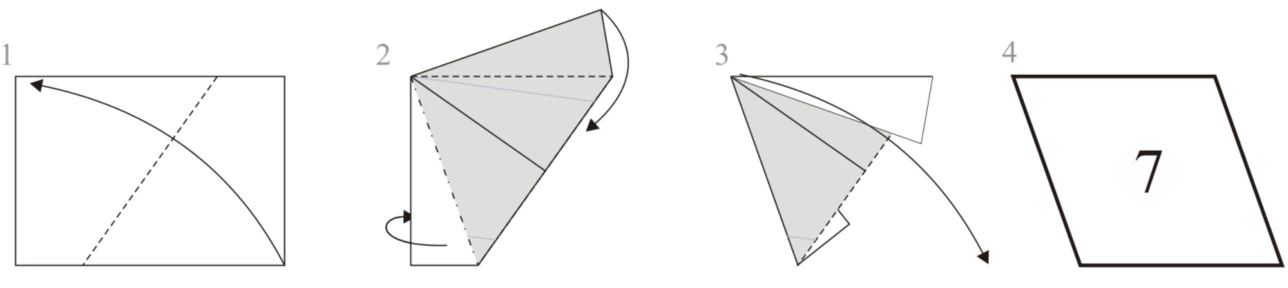
Čtyřúhelník 6

V šestém obdélníku vytvoříme úhlopříčku, ke které přiložíme kratší strany obdélníku (obr. 3).



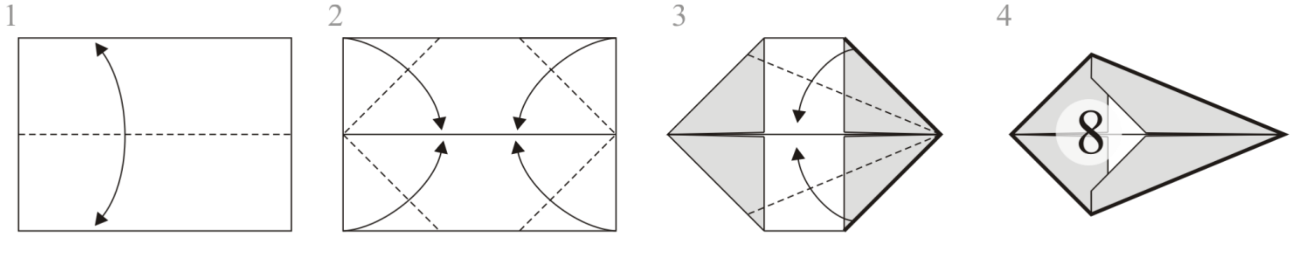
Čtyřúhelník 6

Protilehlé vrcholy přeložíme na sebe (obr. 1). V druhém kroku zahneme přední (šedou) vrstvu dopředu a zadní (bílou) do zadu.

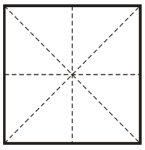
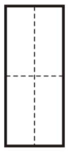
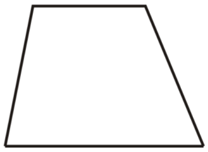
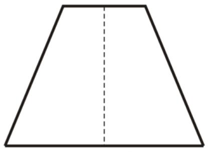
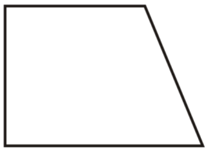
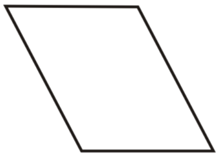
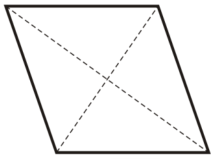
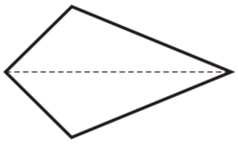


Čtyřúhelník 8

Třetí krok provedeme tak, že silně vyznačené hrany se zobrazí na středovou linii.

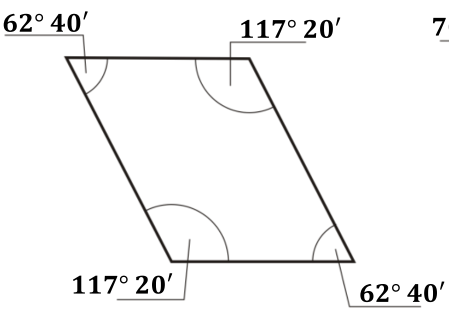


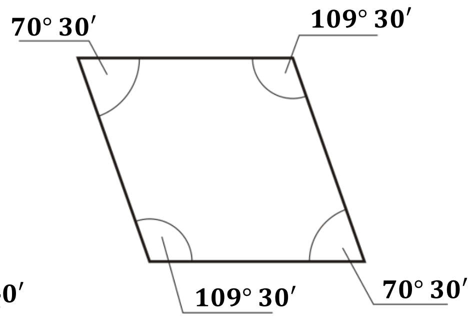
Vzorové řešení

	přesný název čtyřúhelníku	osy souměrnosti
1	**ČTVEREC**	
2	**OBDÉLNÍK**	
3	**OBECNÝ LICHOBĚŽNÍK**	
4	**ROVNORAMENNÝ LICHOBĚŽNÍK**	
5	**PRAVOÚHLÝ LICHOBĚŽNÍK**	
6	**KOSODÉLNÍK**	
7	**KOSOČTVEREC**	
8	**DELTOID**	

Bonusový příklad

Podmínku půlících se úhlopříček splňují pouze rovnoběžníky. Pokud z nich vynecháme obdélník a čtverec, jejichž úhly jsou pravé (podmínka 2), zbude nám ke zkoumání kosočtverec a kosodélník. Pomocí úhloměru získáme přibližně tyto velikosti úhlů.



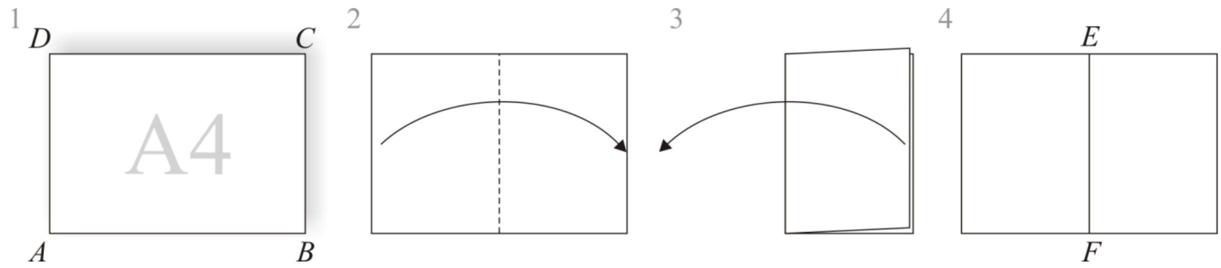


jméno a příjmení: ....

třída: ....

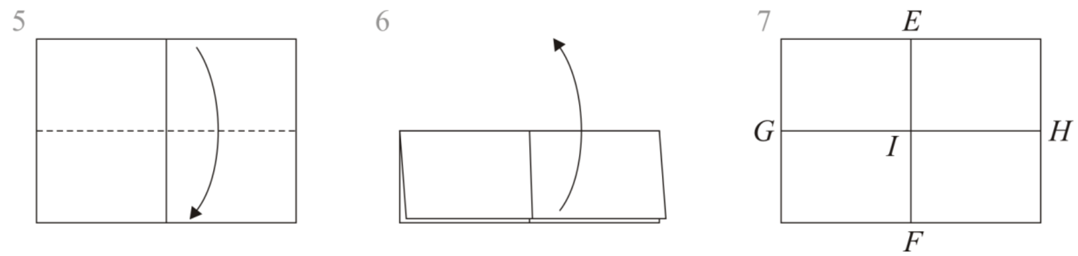
Srdce – pracovní list

Začínáme skládat z papíru formátu A4, přičemž rohy papíru označíme *ABCD*. Obdélník *ABCD* přeložíme podle obrázků 1 – 3.



Vznikne úsečka *EF* (obr. 4), která dělí obdélník na dvě shodné části. Tuto úsečku nazýváme ______ obdélníku *ABCD*.

Dále obdélník přeložíme podle obrázků 5 – 7.

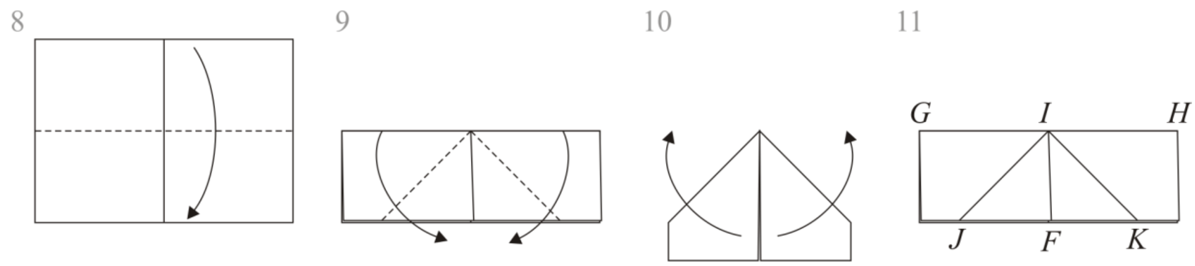


Vzniklou úsečku *GH* (obr. 7) nazýváme ______ obdélníku *ABCD*.

Velikost úhlu *HIE* je ______ stupňů a říkáme, že tento úhel je ______ .

Úsečky *GH* a *EF* jsou na sebe ______ .

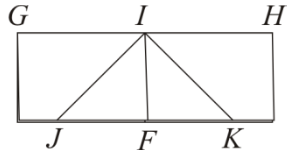
Obdélník přeložíme podle obrázků 8 a 9. V desátém kroku se vrátíme o krok zpět.



Doplň velikosti úhlů.

úhel *FIK*	
úhel *KIH*	

úhel *JIF*	
úhel *JIH*	



Úsečka *IK* půlí úhel *FIH* a je ☐ tohoto úhlu.

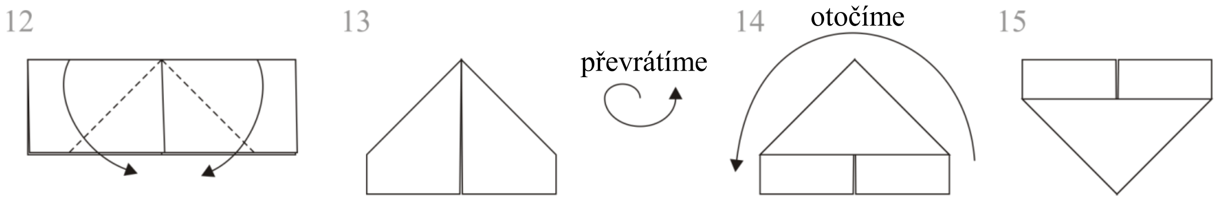
Trojúhelník *JIK* (zakroužkuj správné odpovědi):

je rovnostranný   má právě jednu osu souměrnosti   je ostroúhlý

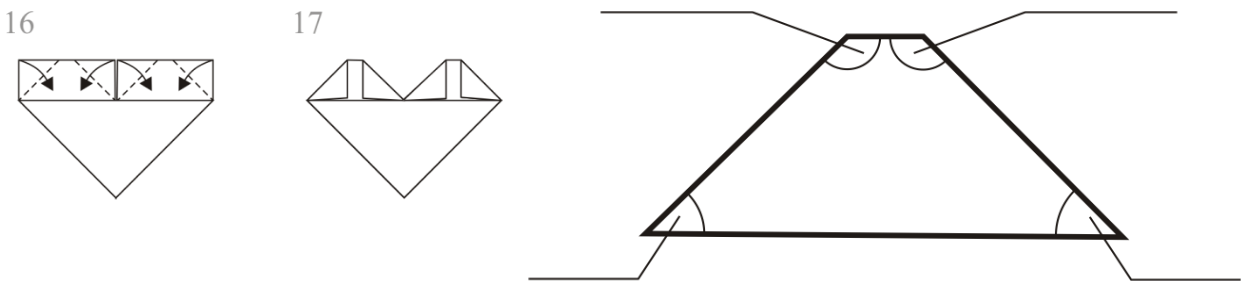
nemá žádnou osu souměrnosti   má právě dvě osy souměrnosti

je rovnoramenný   je pravoúhlý   je tupoúhlý

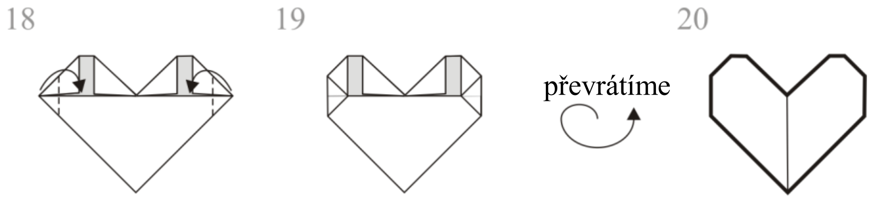
Pokračujeme ve skládání modelu.



Rohy horních obdélníku přeložíme (obr. 16). Tím se z obdélníků staly lichoběžníky. Bez použití úhloměru urči velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku a zapiš je do obrázku vpravo.



Podle obrázků 18 – 20 dokončíme skládačku a srdce máme hotové.



Hotové srdce má ☐ vnitřních úhlů. Ty můžeme rozdělit na ostré, pravé a tupé.

počet ostrých úhlů		počet pravých úhlů		počet tupých úhlů	

Je námi poskládané srdce konvexní obrazec? (zakroužkuj správnou odpověď)

ano   ne

jméno a příjmení: …………………………………………

třída: ……………………

Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost
Pracovní list

5. Podle obrázků v návodu sestav rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník.

6. V první části tabulky vyplň první tři sloupce – tj. počet vrcholů, počet stran a počet vnitřních úhlů již složených mnohoúhelníků.

7. Najdi všechny osy souměrnosti těchto rovinných útvarů. Pomocí překládání papíru ověř, že se opravdu jedná o osu souměrnosti a pokud ano, zvýrazni ji tužkou (pastelkou). Počet os zapiš do posledního sloupce.

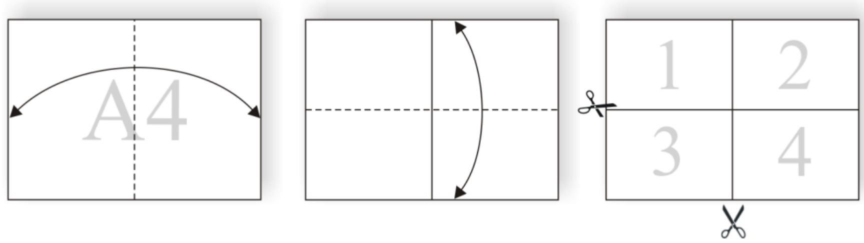
8. Na základě první části tabulky odhadni hodnoty v její druhé a třetí části.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>počet vrcholů</th><th>počet stran</th><th>počet vnitřních úhlů</th><th>počet os souměrnosti</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>rovnostranný trojúhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>čtverec</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>pravidelný pětiúhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>pravidelný šestiúhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>pravidelný osmiúhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>pravidelný dvanáctiúhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>pravidelný n-úhelník</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Pravidelné mnohoúhelníky – osová souměrnost
Návod

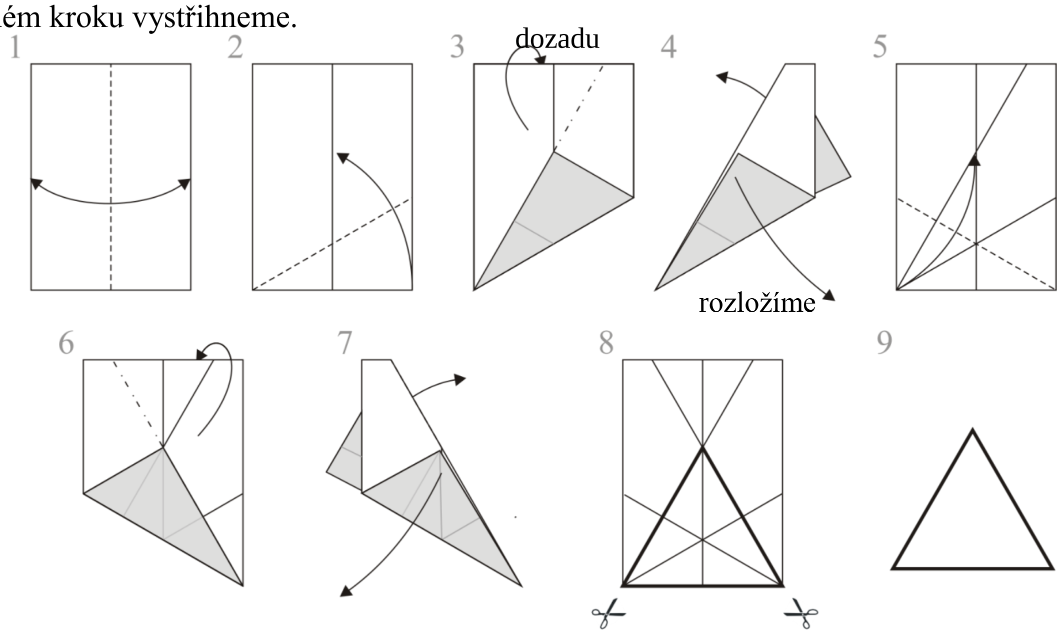
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky. Z nich pak poskládáme pravidelný (neboli rovnostranný) trojúhelník, čtyřúhelník (neboli čtverec), pětiúhelník a šestiúhelník.



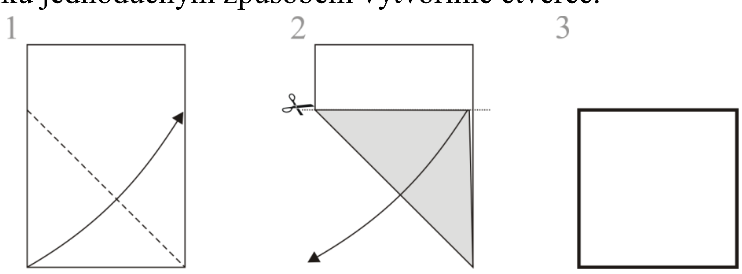
Rovnostranný trojúhelník

Z prvního obdélníku poskládáme podle obrázků 1 – 8 rovnostranný trojúhelník, který v osmém kroku vystřihneme.



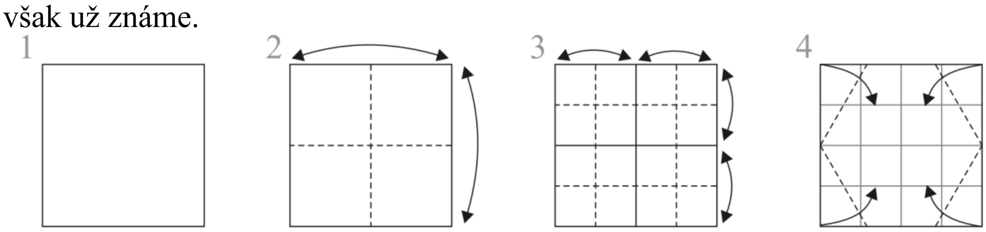
Čtverec

Z druhého obdélníku jednoduchým způsobem vytvoříme čtverec.

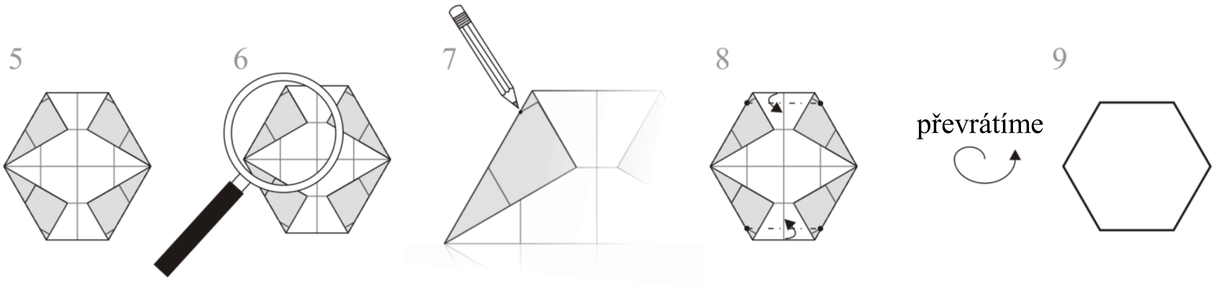


Pravidelný šestiúhelník

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku i pětiúhelníků začíná ze čtverce. Postup jak jej vytvořit však už známe.

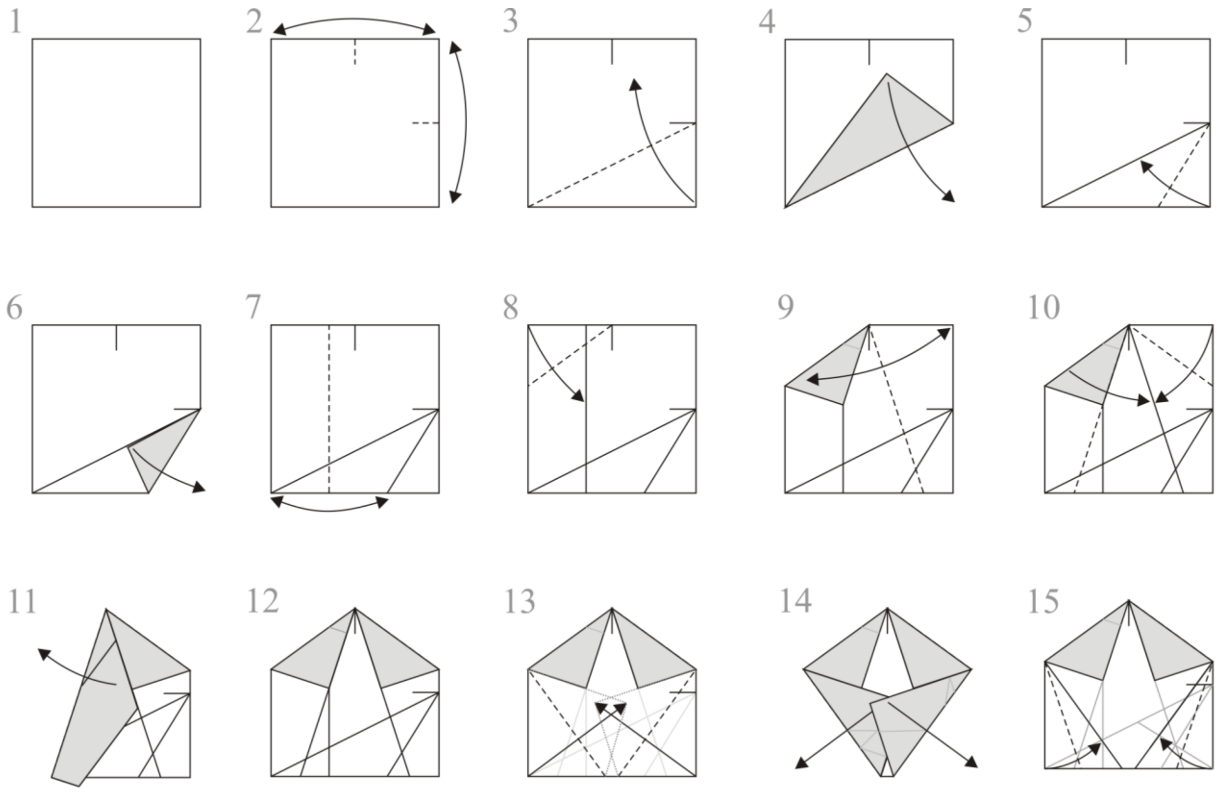


V sedmém kroku zvýrazníme průsečík na obvodu šestiúhelníku (obr. 7). Tyto body zvýrazníme dohromady čtyři a podle nich provedeme poslední přehyb a šestiúhelník je hotový.

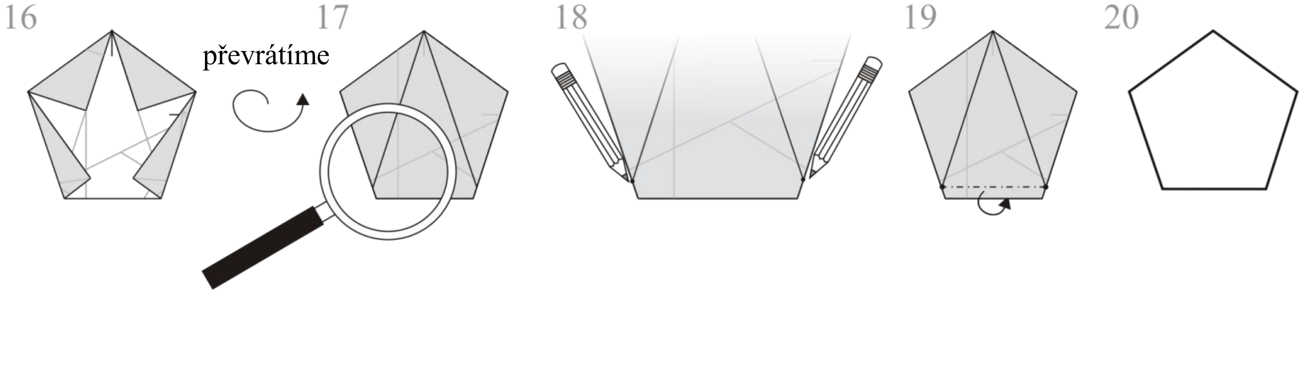


Pravidelný pětiúhelník

Již víme, že stejně jako u šestiúhelníku si nejdříve musíme vytvořit čtverec. Poskládání pravidelného pětiúhelníku je nejsložitější, proto je důležité postupovat pomalu a pečlivě.



V osmnáctém kroku (detailní výřez – obrázek 18) zvýrazníme důležité body. Jedná se o průsečíky obvodu pětiúhelníku a úhlopříček. Podle těchto bodů zahneme hranu dozadu a dostaneme pravidelný pětiúhelník.



jméno a příjmení: ....

třída: ....

Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů
Pracovní list

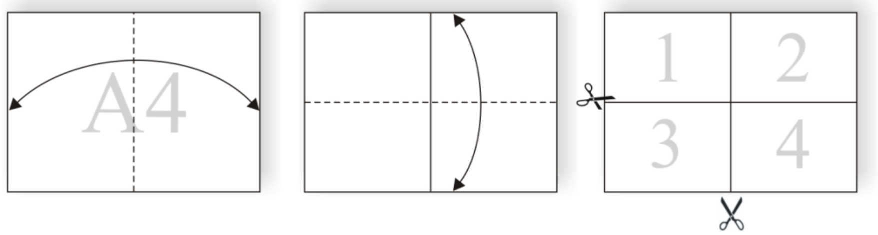
1. Podle obrázků v návodu sestav rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník.
2. Na skládankách obloučkem zvýrazni v jednotlivých mnohoúhelnících vnitřní úhly.
3. V první části tabulky (na druhé straně) vyplň první dva sloupce – tj. počet vrcholů a počet vnitřních úhlů již složených mnohoúhelníků.
4. V každém mnohoúhelníku si vyber libovolný vrchol a z něj veď úsečky do zbývajících vrcholů. Mnohoúhelníky se tím rozdělí na trojúhelníky. Každý trojúhelník pak vybarvi jinou barvou.
5. Počet vybarvených trojúhelníků zapiš v tabulce do třetího sloupce.
6. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Jaký je součet vnitřních úhlů v dalších mnohoúhelnících? Jakou velikost má jeden vnitřní úhel? Výsledky zapiš do tabulky.
7. Na základě zkušenosti z první části tabulky odhadni hodnoty v její druhé části, tedy pro pravidelný osmiúhelník a dvanáctiúhelník.
8. Ve třetí části vyjádři hodnoty pro pravidelný *n*-úhelník.

		počet vrcholů	počet vnitřních úhlů	počet vybarvených trojúhelníků	součet velikostí vnitřních úhlů	velikost jednoho vnitřního úhlu
1	**rovnostranný trojúhelník**					
	čtverec					
	pravidelný pětiúhelník					
	pravidelný šestiúhelník					
2	**pravidelný osmiúhelník**					
	pravidelný dvanáctiúhelník					
3	**pravidelný *n*-úhelník**					

Pravidelné mnohoúhelníky – velikost vnitřních úhlů
Návod

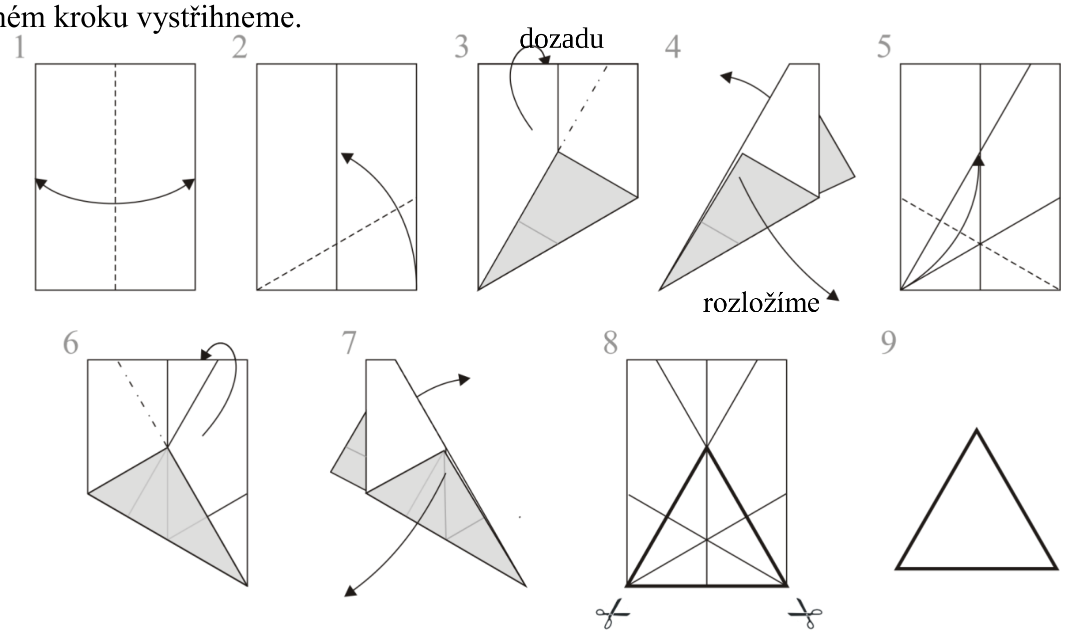
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky. Z nich pak poskládáme pravidelný (neboli rovnostranný) trojúhelník, čtyřúhelník (neboli čtverec), pětiúhelník a šestiúhelník.



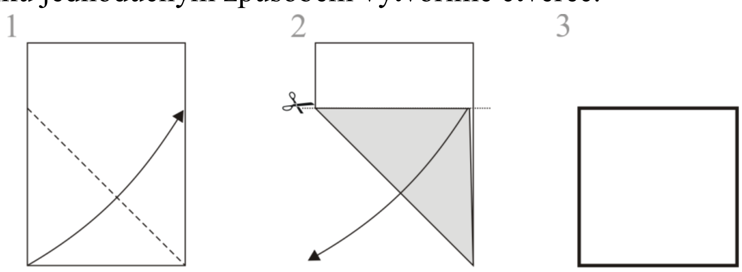
Rovnostranný trojúhelník

Z prvního obdélníku poskládáme podle obrázků 1 – 8 rovnostranný trojúhelník, který v osmém kroku vystřihneme.



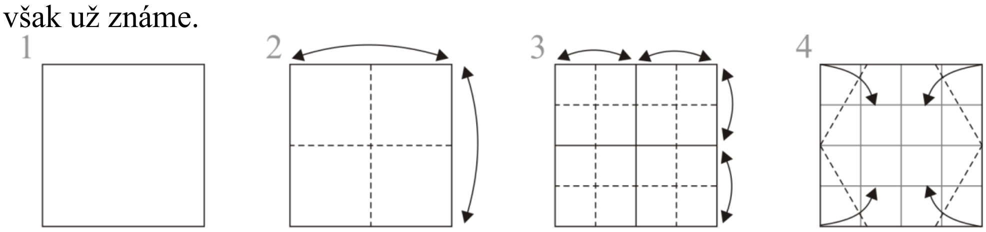
Čtverec

Z druhého obdélníku jednoduchým způsobem vytvoříme čtverec.

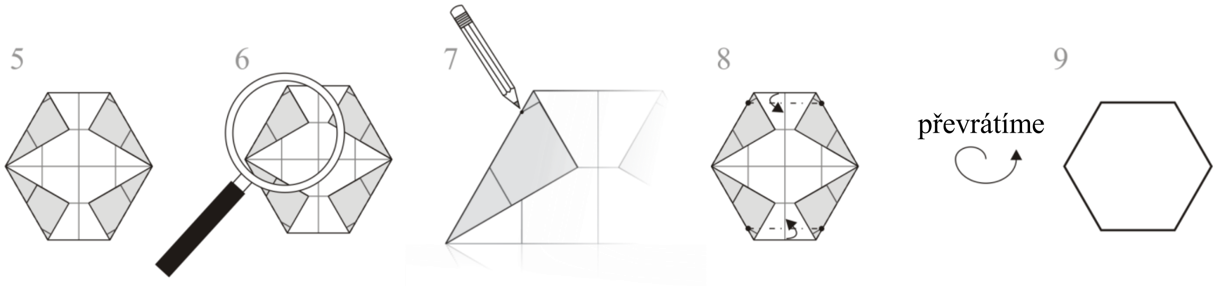


Pravidelný šestiúhelník

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku i pětiúhelníků začíná ze čtverce. Postup jak jej vytvořit však už známe.

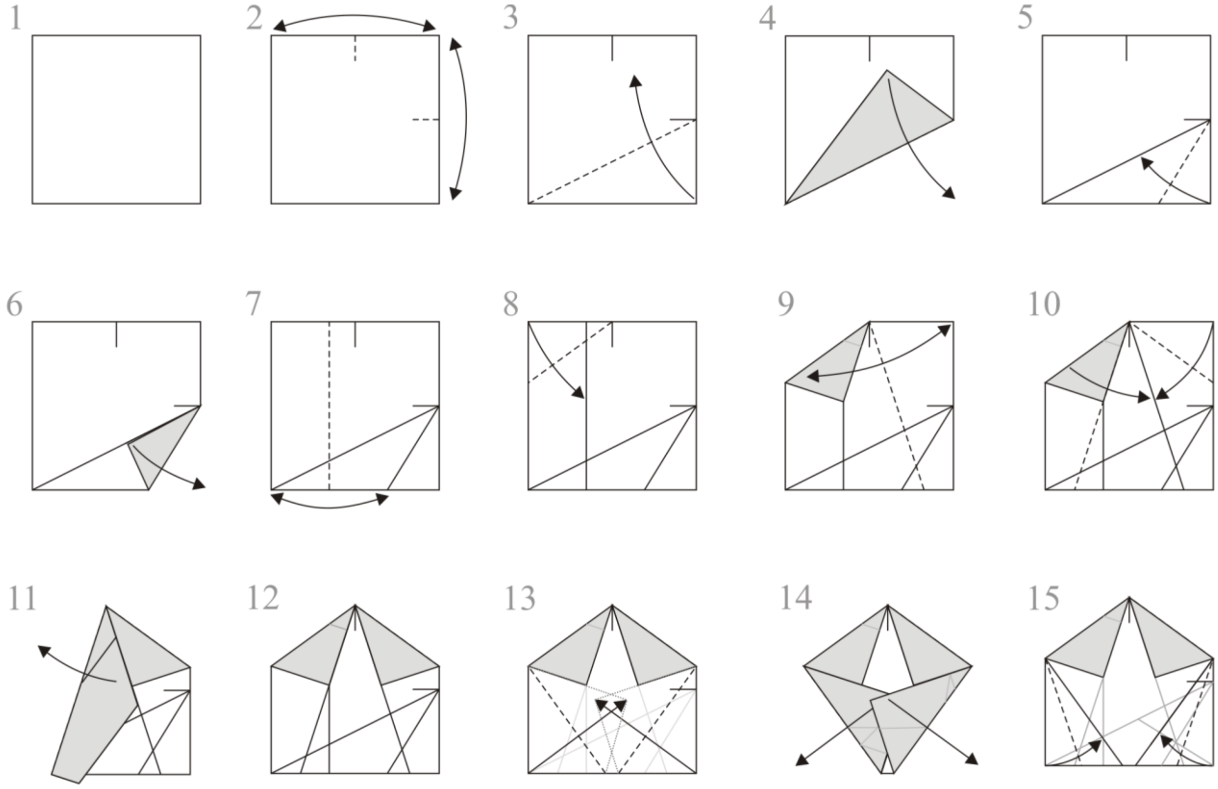


V sedmém kroku zvýrazníme průsečík na obvodu šestiúhelníku (obr. 7). Tyto body zvýrazníme dohromady čtyři a podle nich provedeme poslední přehyb a šestiúhelník je hotový.

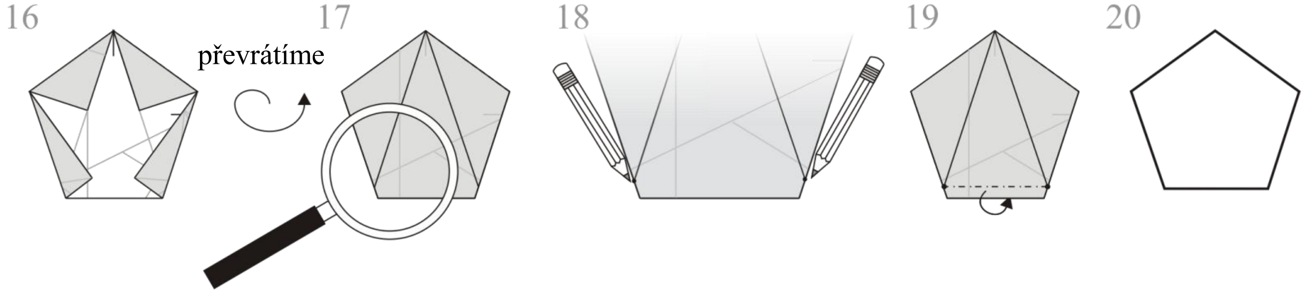


Pravidelný pětiúhelník

Již víme, že stejně jako u šestiúhelníku si nejdříve musíme vytvořit čtverec. Poskládání pravidelného pětiúhelníku je nejsložitější, proto je důležité postupovat pomalu a pečlivě.



V osmnáctém kroku (detailní výřez – obrázek 18) zvýrazníme důležité body. Jedná se o průsečíky obvodu pětiúhelníku a úhlopříček. Podle těchto bodů zahneme hranu dozadu a dostaneme pravidelný pětiúhelník.



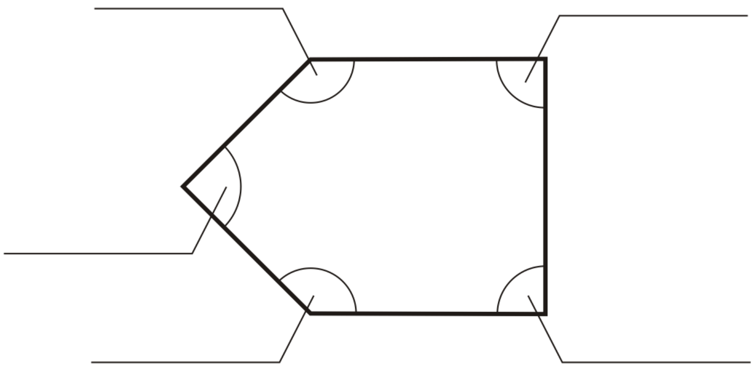
jméno a příjmení: ……………………………………………

třída: ……………………

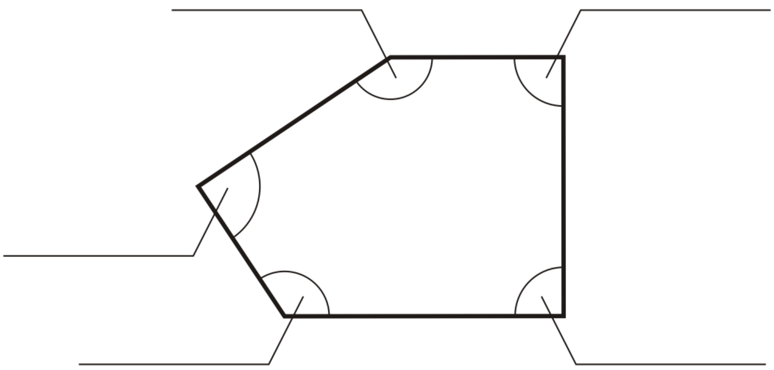
Šipka – pracovní list

5. Podle postupu v návodu slož vlaštovku – šipku.

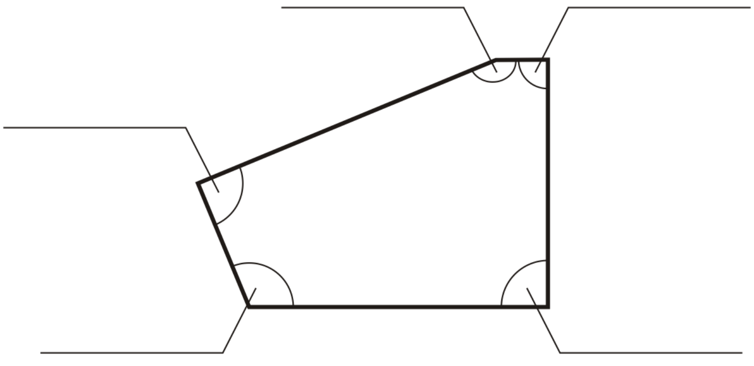
6. Model rozlož a podle dalšího postupu v návodu sestav první pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



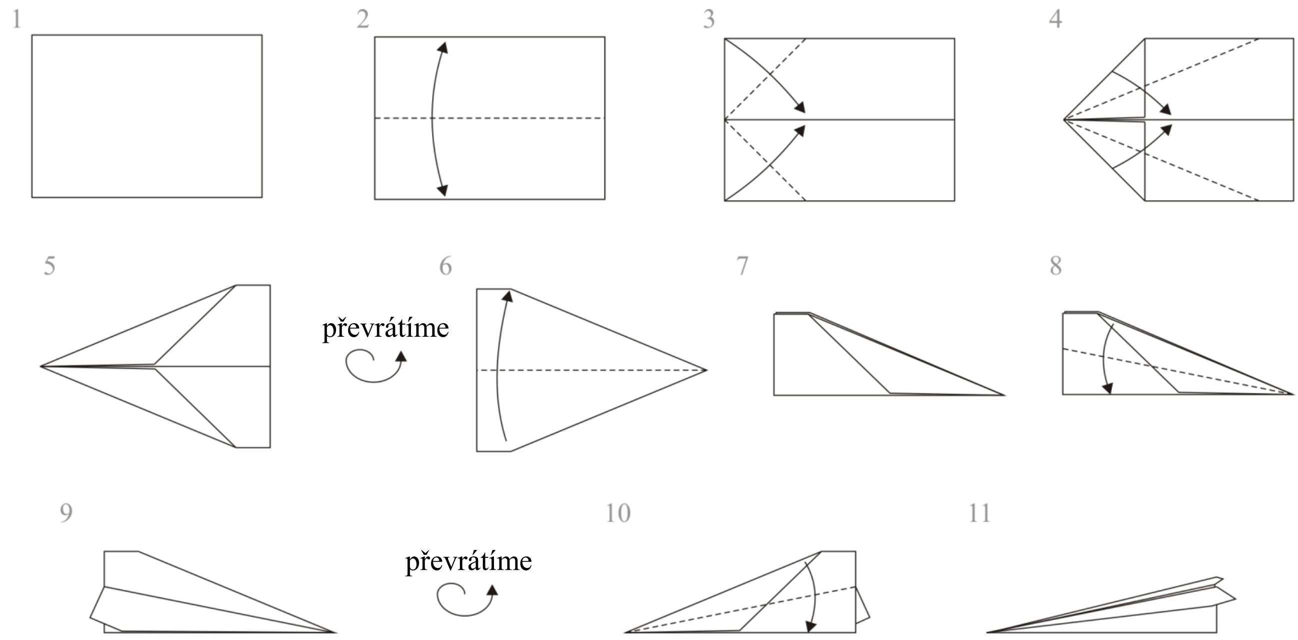
7. Podle postupu číslo 2 slož druhý pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.

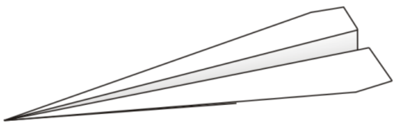


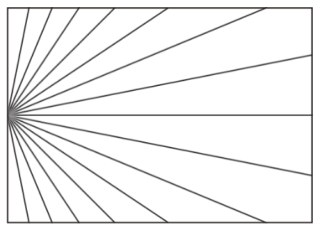
8. Podle postupu číslo 3 slož třetí pětiúhelník. Bez použití úhloměru urči jeho vnitřní úhly a zapiš je do obrázku.



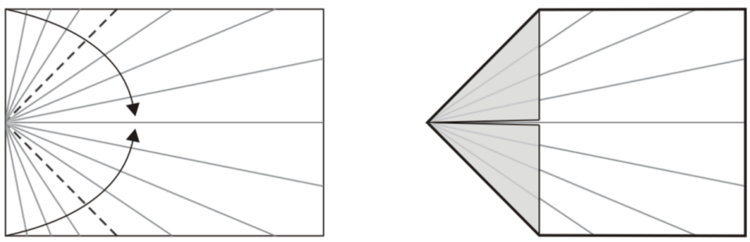
Šipka – návod



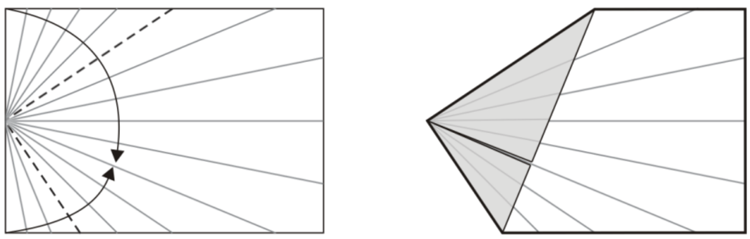




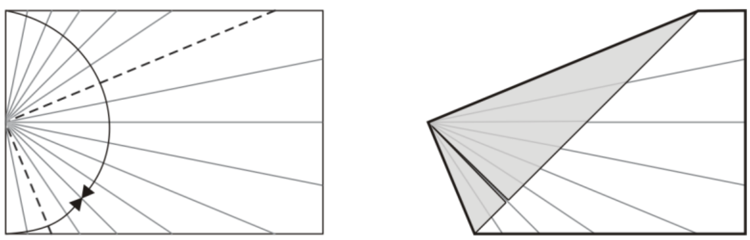
1.



2.



3.



jméno a příjmení: ………………………………………… třída: ……………………

jméno a příjmení: …………………………………………

Krychle – pracovní list

1. Podle postupu v návodu sestav šest modulů. Při skládání každé jednotky vybarvi vždy jiný počet malých čtverců. Do tabulky níže vyjádři zlomkem a pomocí procent jaká část je vybarven.

	modul 1	modul 2	modul 3	modul 4	modul 5	modul 6
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **zlomkem** v základním tvaru						
vybarvená část plochy čtverce vyjádřena **v procentech** (zaokrouhleno na dvě desetinná čísla)						

2. Z šesti modulů sestav podle návodu krychli.

3. U hotové krychle spočítej, kolik procent povrchu krychle je vybarveno. Dané číslo vyjádři i jako zlomek v základním tvaru.

   Je vybarveno ☐ procent, tj. ☐ povrchu krychle.
   (zlomek)

4. Kdybychom stavěli ze čtverce o dvakrát větší velikosti strany, dostali bychom krychli s dvojnásobnou velikosti hrany. Kolikrát by se do ní vešla naše krychle?

   Odhad:

   Výpočet:

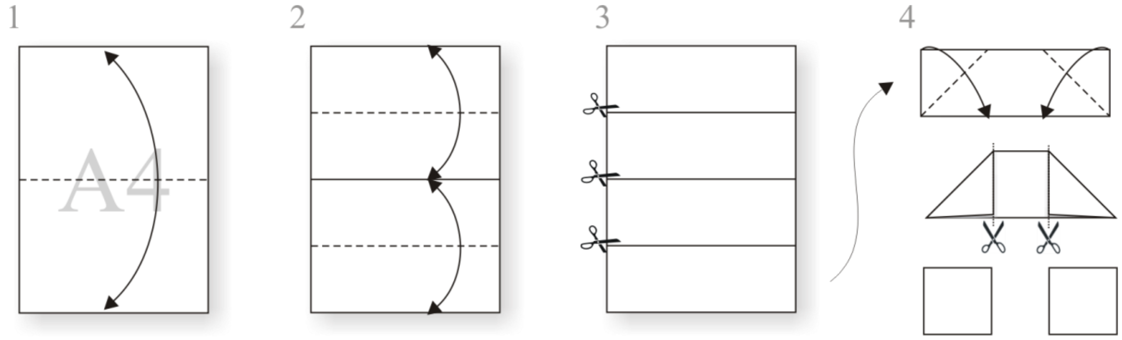
5. Postavte ve skupině tuto větší krychli (podle postupu v návodu). Byl tvůj odhad a výpočet správný?

6. Kolikrát více papíru jsme na stavbu větší krychle oproti menší krychli použili?

Krychle – návod

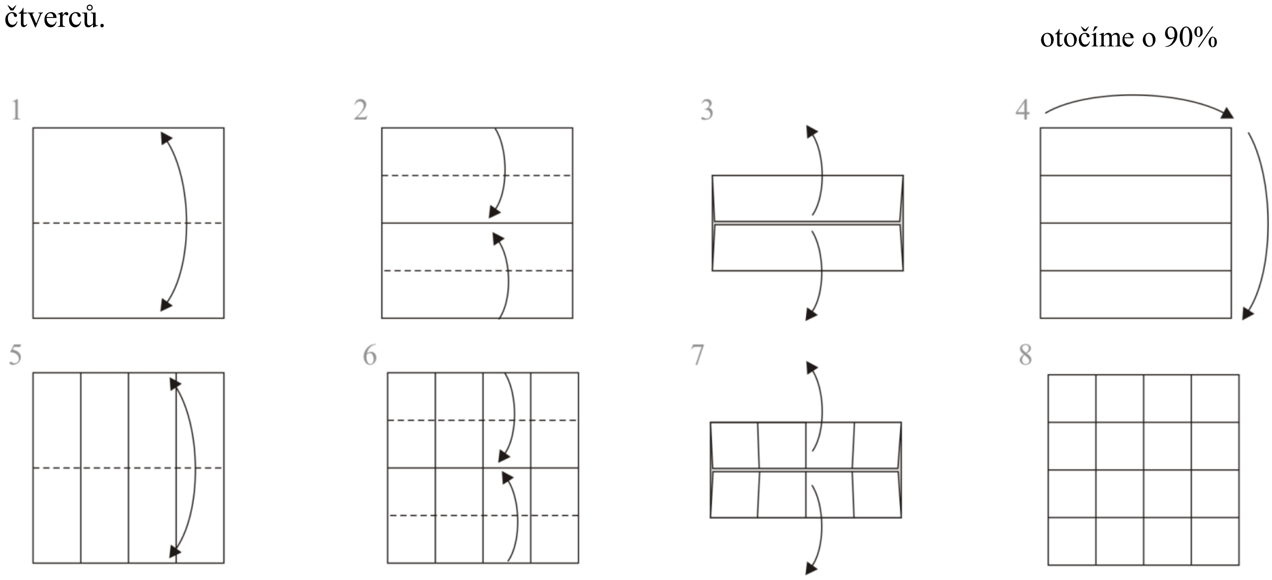
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na čtyři menší obdélníky (obr. 1 – 4). Na obrázku 4 je postup jak získat dva čtverce z jednoho obdélníku. Na stavbu krychle potřebujeme 6 čtverců.

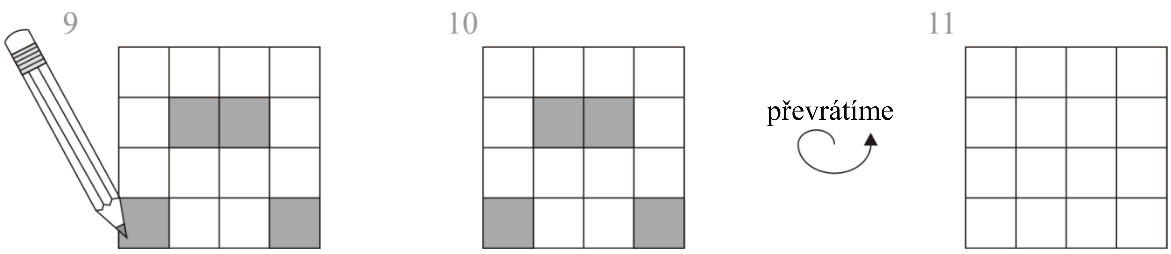


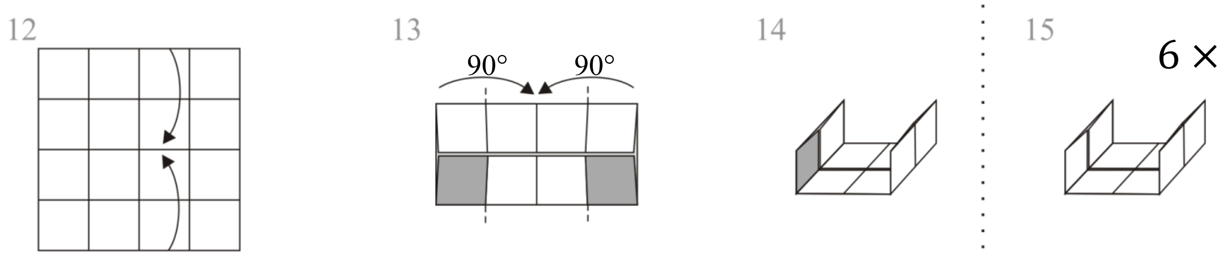
Vytvoření modulu

Ze všech čtverců sestavíme stejné moduly. Čtverec nejdříve rozdělíme na 16 shodných čtverců.



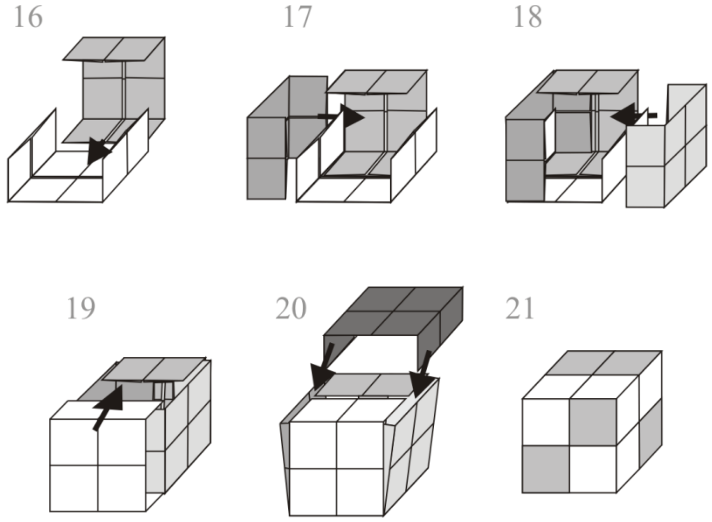
Nyní vybarvíme libovolný počet menších čtverců. U každého modulu vybarvíme jiný počet čtverců na jedné straně. Do tabulky v pracovním listu zapíšeme podíl vybarvené části pomocí procent a zlomků a pokračujeme dál.





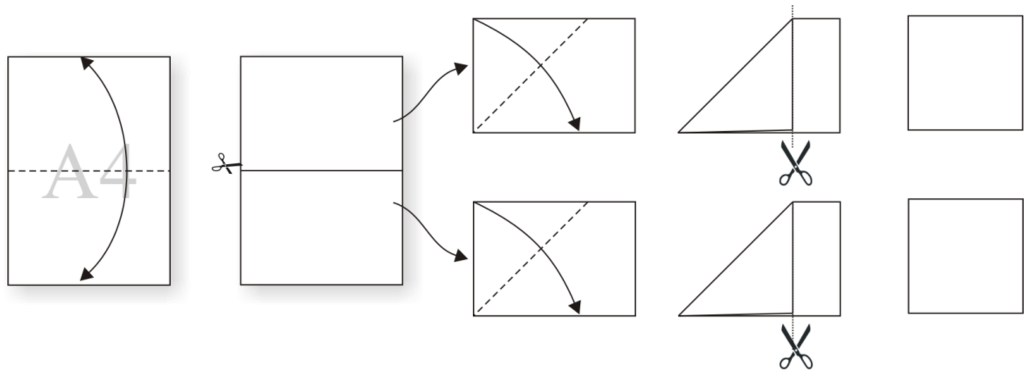
Sestavení krychle

Jeden modul máme hotový. Na sestavení krychle jich potřebujeme 6. Nezapomeň v kroku 9 vybarvit vždy jiný počet čtverců a vyplnit tabulku.



Velká krychle

Velkou krychli skládáme ze čtverce o dvakrát větší straně. Z papíru formátu A4 dostaneme takové čtverce dva. Potřebujeme tedy 3 papíry formátu A4.



Dále postupujeme stejně jako při sestavení malé krychle, jen nemusíme nic vybarvovat.

jméno a příjmení: .... třída: ....

jméno a příjmení: ....

Kolumbova krychle – pracovní list

5. Podle obrázků v návodu sestav Kolumbovo krychli.

6. Jedná se o konvexní těleso?

   ano | **ne**

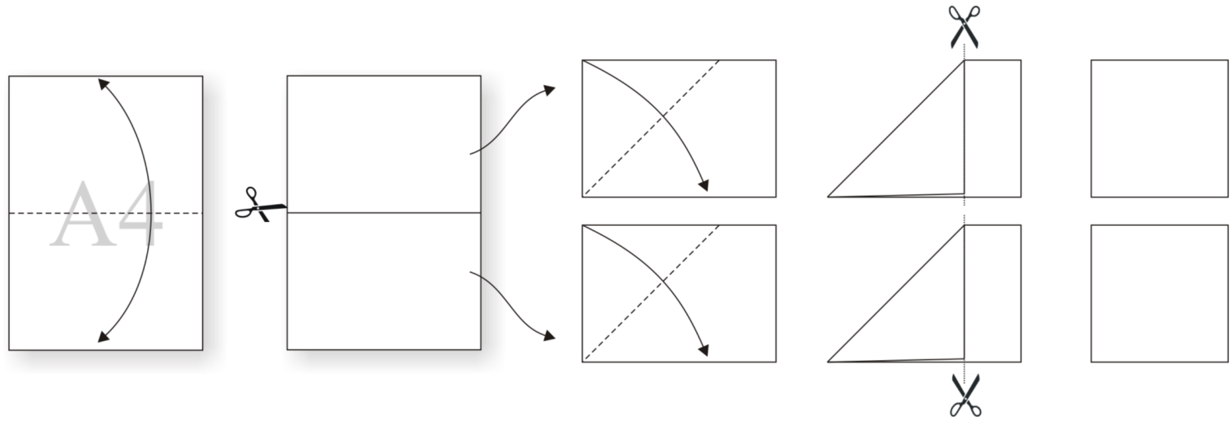
7. Urči povrch Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

8. Vypočítej objem Kolumbovy krychle, pokud skládáme ze čtverce o velikosti hrany 16 (například centimetrů).

Kolumbova krychle – návod

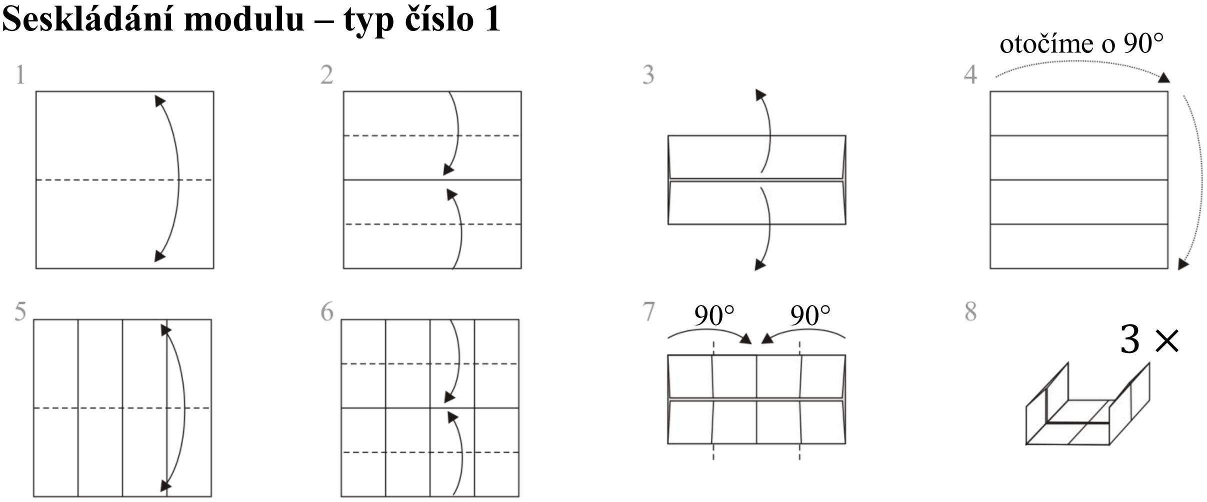
Rozdělení papíru

Papír formátu A4 nejdříve rozdělíme na půl. Ze dvou vzniklých obdélníků vytvoříme čtverce. Celkem potřebujeme šest čtverců, potřebujeme tedy 3 papíry formátu A4.



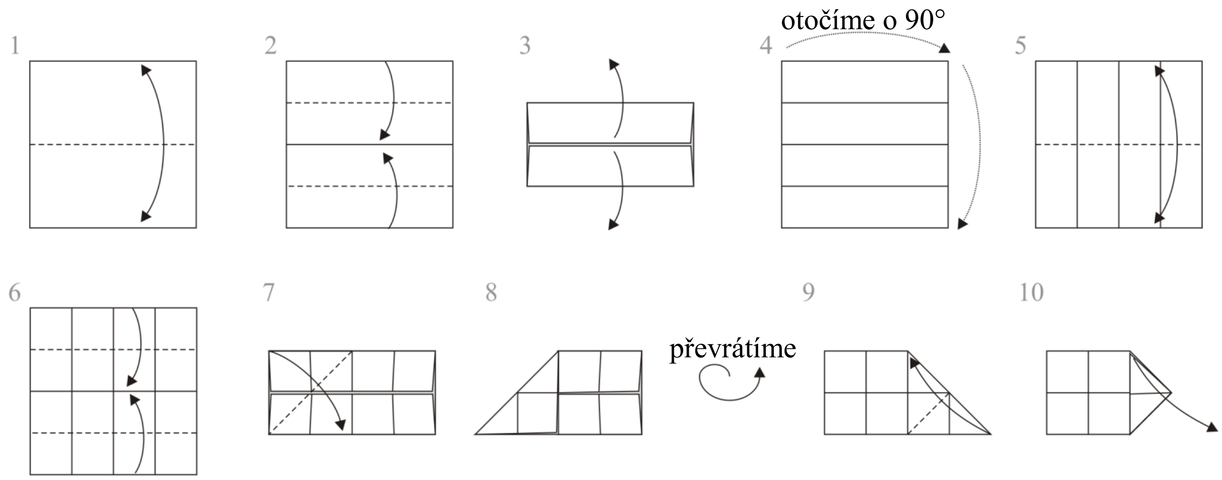
Z těchto čtverců budeme skládat dva typy modulů. Tři kusy od každého typu.

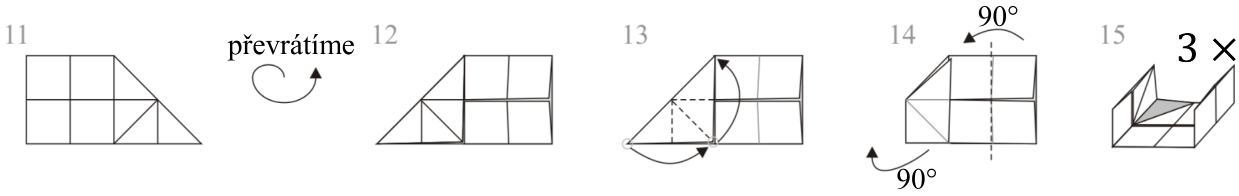
Seskládání modulu – typ číslo 1



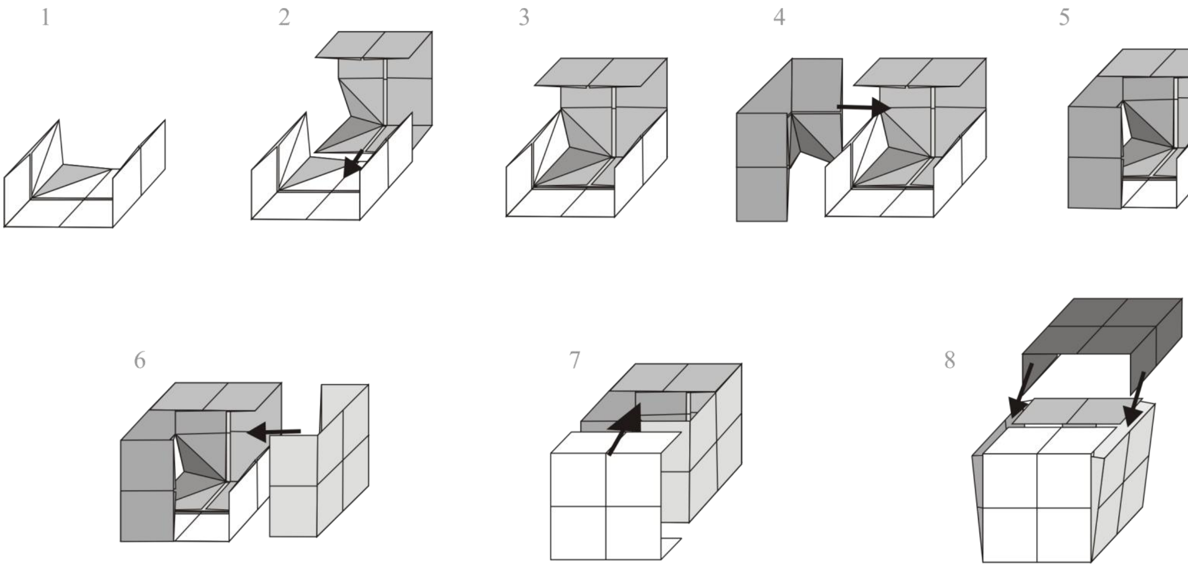
Seskládání modulu – typ číslo 2

Sestavení druhého typu je do sedmého kroku totožný s předchozím typem.

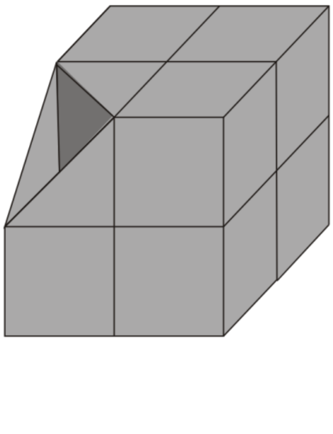


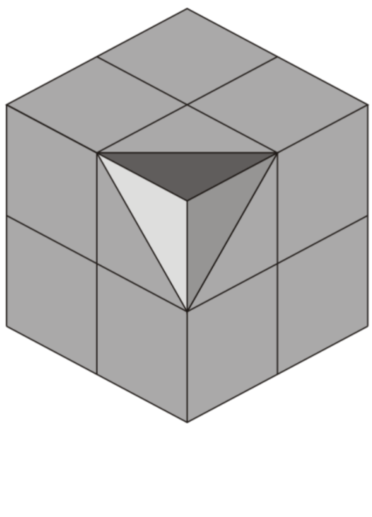


Sestavení Kolumbovy krychle



Nejdříve sestavíme jeden roh krychle pomocí modulů typu číslo 2. Zasouváme je do sebe tak, aby se na tvorbě rohu podílely všechny tři moduly. Dále použijeme moduly prvního typu a krychli dostavíme. Po zasunutí posledního modulu zpevníme celý model.





příjmení členů skupiny: ……………………………………………………………

třída: ……………………

Eulerův vztah – pracovní list

4. Rozdělte si práci ve skupině a podle postupu v návodu sestavte krychli, kvádr, čtyřstěn a osmistěn.

5. Zapište do tabulky počet vrcholů, stěn a hran složených těles.

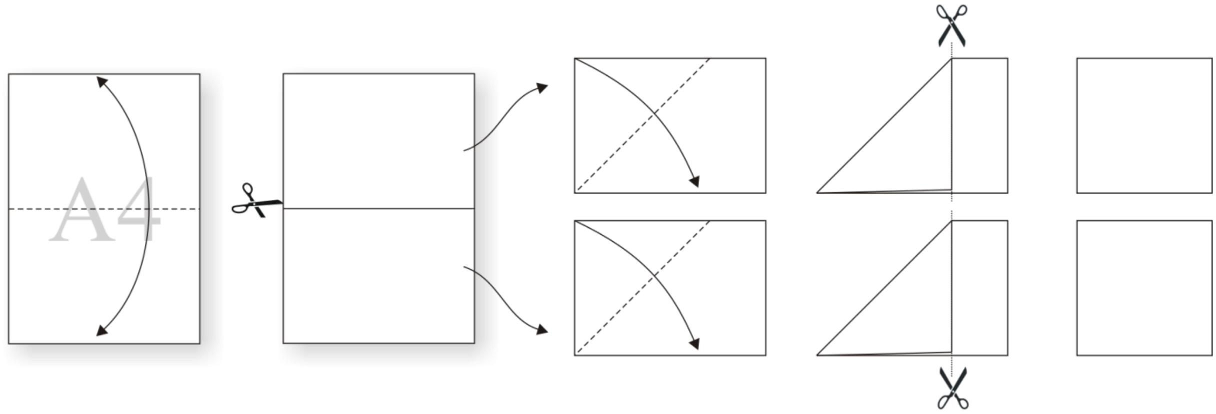
	počet vrcholů – V	počet stěn – S	počet hran – H
krychle			
kvádr			
čtyřstěn			
osmistěn			

6. Na základě hodnot v tabulce se pokus vypozorovat vztah mezi počtem vrcholů, stěn a hran.

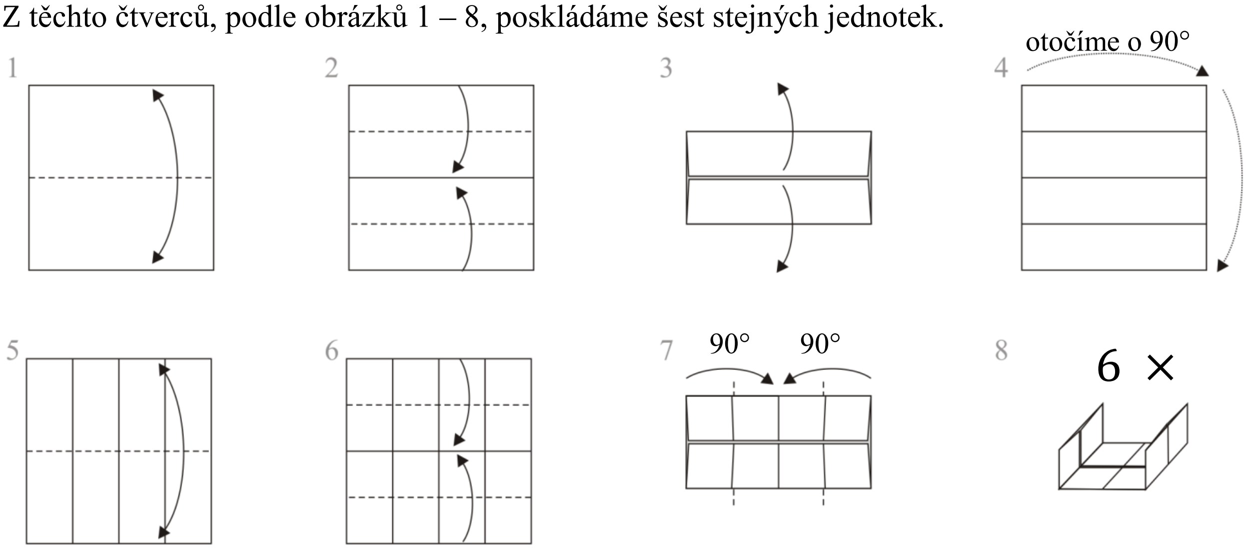
Eulerův vztah – návod

I. krychle

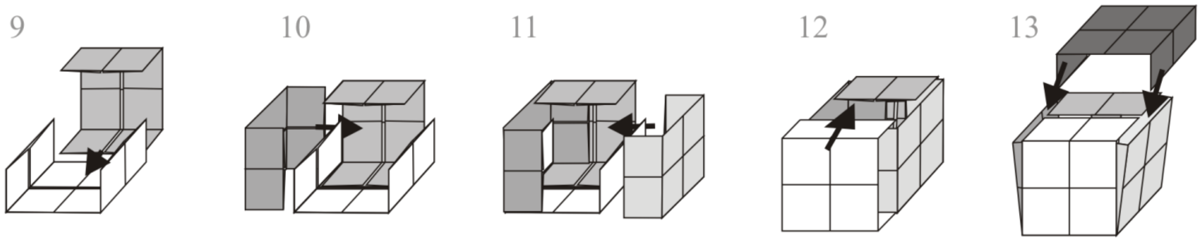
Z papíru formátu A4 podle postupu níže připravíme 2 čtverce. Na sestavení krychle potřebujeme 6 těchto shodných čtverců, tedy Na 3 papíry formátu A4.

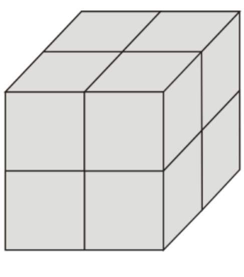


Z těchto čtverců, podle obrázků 1 – 8, poskládáme šest stejných jednotek.



Z šesti připravených jednotek sestavíme krychli (obr. 9 – 13).

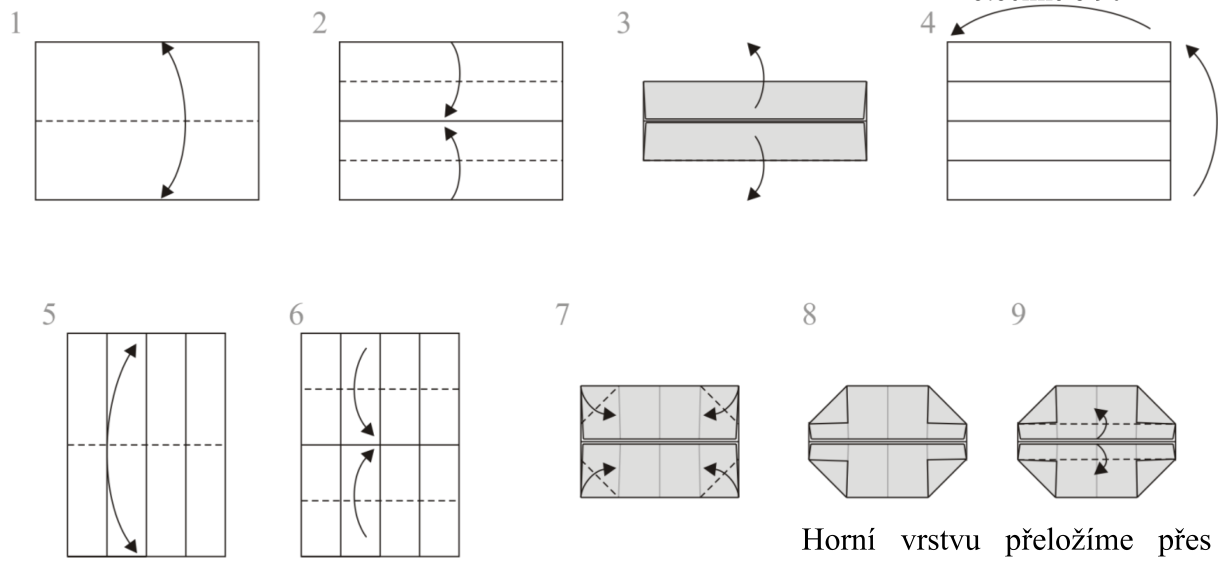




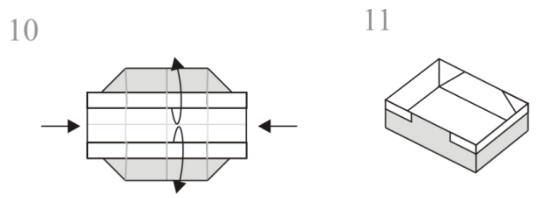
II. kvádr

Na stavbu kvádru potřebujeme dva obdélníky formátu A4.

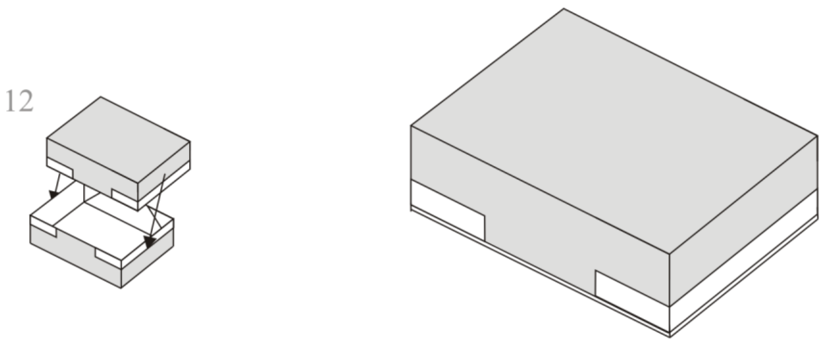
Z obou obdélníků postupem na obrázcích 1 – 11 sestavíme dvě jednotky.



Horní vrstvu přeložíme přes přehnuté rohy.

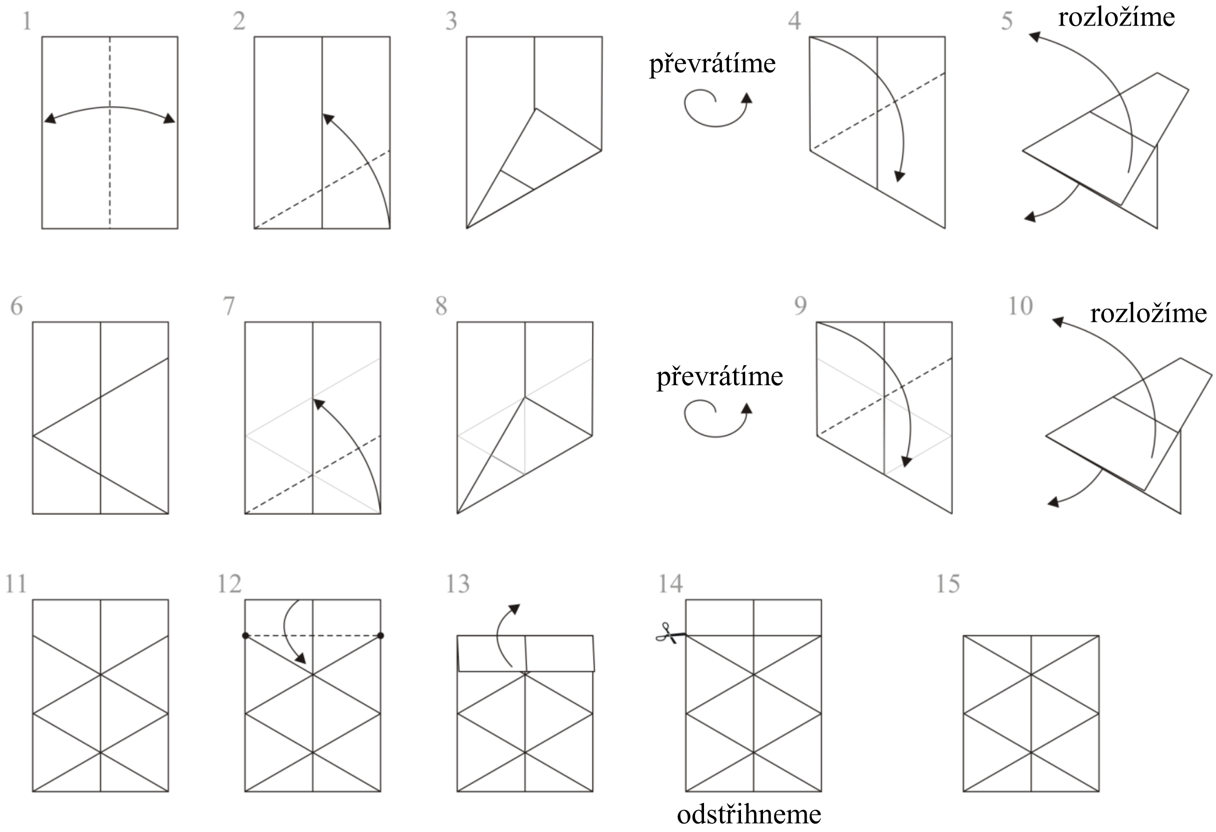


Model roztáhneme (obr. 10) a upravíme tak, aby vzniklé úhly byly pravé. U vzniklé krabičky zostříme hrany. Jednu jednotku máme hotovou. Stejným způsobem seskládáme i druhou jednotku. Poté je nasuneme na sebe (obr. 12) a kvádr je hotový.



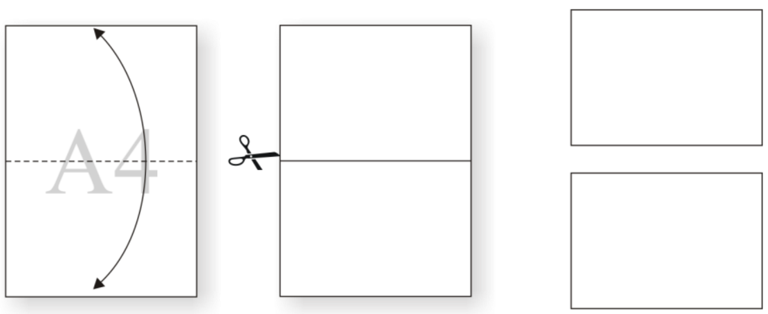
Příprava na čtyřstěn a osmistěn

Sestavení čtyřstěnu i osmistěnu má zpočátku stejný průběh. Obdélník formátu A5 podle postupu na obrázcích 1 – 14 upravíme na obdélník na obrázku 15. K tomuto návodu se za chvíli vrátíme.



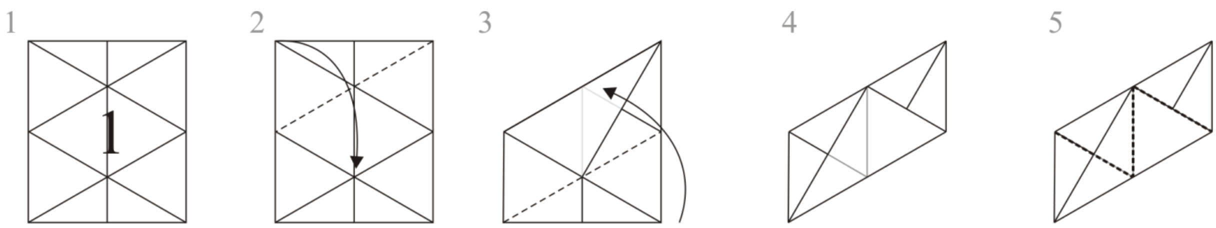
III. čtyřstěn

Z papíru formátu A4 si nejdříve připravíme dva menší obdélníky formátu A5.

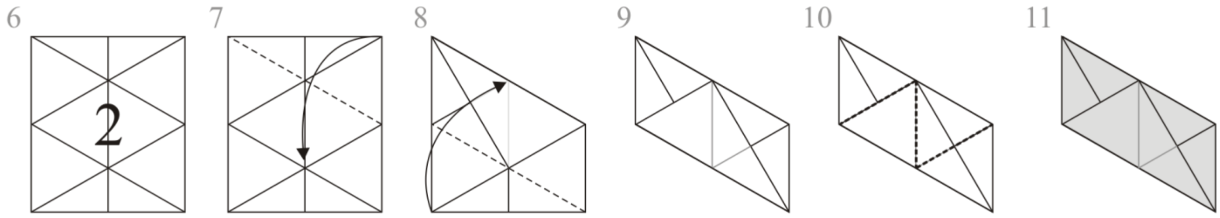


Oba tyto obdélníky uprav podle postupu 1 – 14 výše (v části Příprava na čtyřstěn a osmistěn).

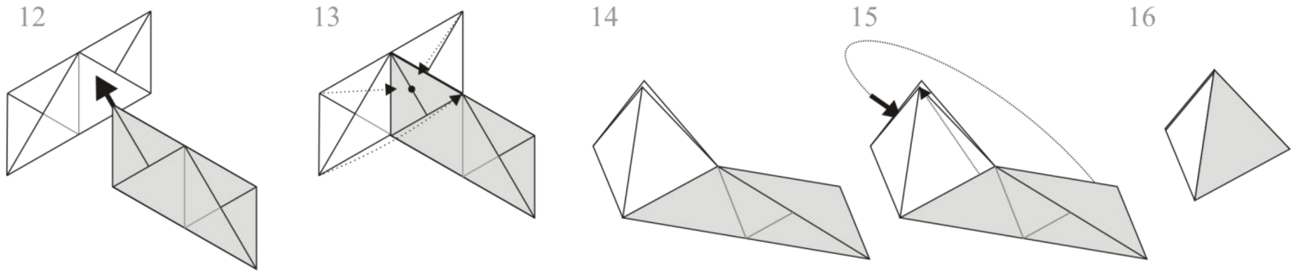
Z prvního obdélníku podle obrázků 1 – 4 vytvoříme první modul. Zejména rysy, vyznačené v obrázku 5 přerušovanou čarou, musí být ostré.



Z druhého obdélníku obdobně, ale zrcadlově, vytvoříme modul číslo 2. Rovněž zde zkontrolujeme ostrost vyznačených rysů (obr. 10). Pro další práci bude tento modul označen šedou barvou (obr. 11).



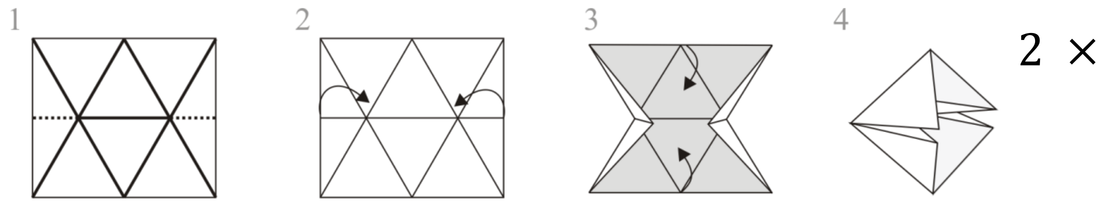
Šedý modul přiložíme na bílý (obr. 12), z bílého modulu vytvoříme čtyřstěn (obr. 13 – 14) a šedým modulem překryjeme dvě stěny bílého a zasuneme (obr. 15). Čtyřstěn máme hotový.



IV. osmistěn

Z papíru formátu A4 si nejdříve připravíme dva menší obdélníky formátu A5 (podle postupu u čtyřstěnu) a oba tyto obdélníky uprav podle postupu 1 – 14 na předchozí straně (v části Příprava na čtyřstěn a osmistěn).

V připravených obdélnících hrany na obrázku 1 vyznačeny plnou čarou přehneme dopředu, hrany vyznačeny přerušovaně dozadu. Podle postupu na obrázku 2 a 3 vytvoříme shodné jednotky.



Dvě jednotky pak zasuneme do sebe (pro názornost rozlišujeme bílou a šedou jednotku). Jednotky do sebe zasuneme tak, aby šedá šla vepředu nahoře přes bílou a dole pod bílou a vzadu obráceně. Nahoře pod bod bílou a dole přes bílou (znázorněno pomocí zrcadla na obr. 6). A tím je osmistěn hotový.