

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE



ALENA SKÁLOVÁ

Teorie her pro nadané žáky středních škol

KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy
v kombinaci s odbornou matematikou

Praha 2014

Ráda bych na tomto místě poděkovala své vedoucí RNDr. Magdaleně Hykšové nejen za vedení a opakované pečlivé pročtení práce, ale i za poutavou přednášku, která mě před pár lety k teorii her přivedla, Alexanderu Slávikovi za pomoc s vysázením v \TeX , Josefu Tkadlecovi za pomoc s tvorbou obrázků, Martině Vaváčkové a Jakubu Krásenskému za jazykové korektury a v neposlední řadě celému Matematickému korespondenčnímu semináři MFF UK.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17. března 2014

Alena Skálová

Název práce: Teorie her pro nadané žáky středních kol

Autor: Alena Skálová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D., Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Práce obsahuje učební text určený pro nadané středoškoláky. Jejím cílem je dát středoškolským žákům (či jejich učitelům) do ruky česky psaný text pokrývající základní principy v oblasti teorie her.

V první části se čtenář seznámí s kombinatorickými hrami a základními metodami jejich řešení. Druhá část se věnuje hře Nim, Sprague–Grundyho funkci a sčítání kombinatorických her. Obsahuje rovněž nezbytný úvod do dvojkové soustavy. Ve třetí části se zabýváme maticovými a dvojmaticovými hrami.

Součástí textu je i řada příkladů a cvičení pro samostatné řešení. Většina z nich je na konci práce vyřešena, aby si aktivní čtenář mohl své postupy zkontrolovat.

Klíčová slova: teorie her, kombinatorické hry, Nim, Sprague–Grundyho funkce, maticové hry, dvojmaticové hry

Title: Game Theory for Gifted Secondary School Students

Author: Alena Skálová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D., Department of Applied Mathematics, Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University in Prague

Abstract: The thesis contains a textbook for gifted secondary school students. Its aim is to give to these students (or to their teachers) a Czech-written text covering fundamental principles in the field of game theory.

In the first part we introduce the combinatorial games and some elementary methods of their solution. The second part is devoted to the game of Nim, to the Sprague–Grundy function and to the sums of the combinatorial games. It also contains a necessary introduction to the binary numeral system. In the third part we present the concept of matrix and bimatrix games.

There is a lot of exercises and examples in the textbook. At the end we bring solutions to the most of them, providing the active reader with the opportunity of checking their own solutions.

Keywords: Game Theory, Combinatorial Games, Game of Nim, Sprague–Grundy function, Matrix Games, Bimatrix Games

Obsah

Předmluva	8
Členění práce	8
Jak to celé vzniklo	9
Poznámky k literatuře	9
Teorie her – 1. díl	11
Úvod	11
Základní pojmy	12
Kombinatorická hra	12
Strategie	13
Vyhrávající a prohrávající pozice	13
Metody řešení	15
Zpětný rozbor	16
Kradení strategií	18
Symetrie	20
Párování a obarvování	21
Zkuste si sami!	23
Zadání 1. seriálové série	26
Řešení 1. seriálové série	27
Teorie her – 2. díl	30
Hra Nim	30
Binární vsuvka	31
Jak vyhrát Nim	33
Nim v převleku	35
Sprague–Grundyho funkce	37
Sčítání her	40
Zadání 2. seriálové série	44
Řešení 2. seriálové série	45
Teorie her – 3. díl	48
Matematizace reálného světa	48
Hry v normálním tvaru	49
Hry s nulovým součtem	51
Sedlové body a dominující strategie	54
Dvojmaticové hry	57
Vzájemně nejlepší odpovědi	59
Věžňovo dilema	64
Zadání 3. seriálové série	66
Řešení 3. seriálové série	67
Dodatky	71
Řešení her z 1. dílu	71
Řešení her z 2. dílu	75
Řešení her z 3. dílu	76

Závěr	78
Výsledková listina seriálu 32. ročníku	78
Literatura a zdroje	81

Předmluva

Většinu diplomové práce tvoří studijní text o teorii her. Je určen především žákům středních škol se zájmem o matematiku a jejich učitelům.

Hlavním cílem bylo přehledně zpracovat téma kombinatorických her a poskytnout tak vhodný materiál s bohatou zásobou úloh a cvičení jednak pro samostudium, jednak pro možné rozšíření výuky. Pokud je mi známo, v českém jazyce podobný text chybí. Kromě kombinatorických her je třetina práce věnována i základům her maticových.

Jednou z mých priorit bylo podat téma přístupně, tedy nepředpokládat žádné hlubší znalosti čtenáře. Měla jsem na paměti, že čtenáři budou především žáci prvního až čtvrtého ročníku středních škol.¹ Dle mého názoru je většina úloh a myšlenek z první kapitoly vhodná i pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků škol základních, první stupeň nevyjímaje – zde už ovšem nepředpokládám samostudium žáků, nýbrž zprostředkování pedagogem.

Při psaní jsem kladla důraz na aktivní zapojení čtenáře, výkladová část je tudíž prokládána velkým množstvím úloh, a to jednak úloh ilustračních – řešených přímo v textu, jednak úloh pro samostatné procvičení právě vysvětlené látky. Řešení (většiny) úloh k procvičení lze nalézt v kapitole *Dodatky*. Čtenáři nicméně (a zároveň zcela očekávaně) doporučuji prvně vyřešit úlohy samostatně a až poté nahlédnout do vzorových řešení.

Bude mi potěšením, pokud text nalezne další² čtenáře, kteří jej uplatní při vzdělávání druhých nebo sebe sama.

Členění práce

Práce je rozdělena do tří větších celků (kapitoly *Teorie her – 1., 2. a 3. díl*), přičemž první dva se věnují teorii kombinatorických her, zatímco třetí teorii maticových her.

Kapitola *Teorie her – 1. díl* obsahuje úvodní pojmy z kombinatorické teorie her, velké množství různorodých příkladů, jakož i metody pro jejich řešení. To vše s výjimkou hry Nim.

Hře Nim, sčítání her a Sprague–Grundyho funkci je věnována kapitola *Teorie her – 2. díl*. Je možné pustit se do jejího studia i bez podrobnější znalosti prvního

¹ Neboť pro ně byl text původně určen – viz následující odstavec *Jak to celé vzniklo*.

² Čtenářský „křest“ již text prodělal prostřednictvím devadesáti čtyř řešitelů Matematického korespondenčního semináře – viz následující odstavec *Jak to celé vzniklo*.

dílu, jediné, co čtenář potřebuje znát, jsou základními pojmy (hráč, strategie, vyhrávající a prohrávající pozice).

Kapitola *Teorie her – 3. díl* je zcela nezávislá na předchozích dvou, a je tedy možno číst ji samostatně. Jak již bylo řečeno, obsahuje úvod do problematiky maticových her, a to včetně známého věžňova dilematu. Při studiu této kapitoly je žádoucí, aby měl čtenář již alespoň intuitivní ponětí o pravděpodobnosti.

Jak to celé vzniklo

Podstatná část textu diplomové práce byla ve školním roce 2012/2013 uveřejněna v Matematickém korespondenčním semináři MFF UK³ (dále jen MKS) jako takzvaný „seriál“ na pokračování. Jedná se o kapitoly *Teorie her – 1. díl až Řešení 3. seriálové série*.

Cílem každoročního seriálu je ve třech částech seznámit řešitele s nějakým středoškolsky uchopitelným matematickým odvětvím, které se ovšem na většině středních škol nevyučuje. Žáci mají na prostudování každého dílu čtyři až pět týdnů a poté řeší tzv. „seriálovou sérii“, v níž si prověří, nakolik probrané teorii porozuměli. V každé seriálové sérii jsou tři úlohy, které organizátoři řešitelům opraví, ohodnotí a zašlou jim je zpět spolu se vzorovým řešením a poznámkami. S opravováním úloh a sepsáním vzorových řešení mi v každé sérii pomohli dva další organizátoři MKS, jmenovitě je uvádím vždy u příslušného řešení.

Skutečnost, že text vznikl jako trojdílný seriál, se promítla i do struktury diplomové práce. Ponechala jsem rozdělení výkladové části textu na tři díly, za každým z nich následuje zadání soutěžních úloh, jejich vzorové řešení a případné poznámky od opravovatelů úlohy. Nově přibyly kapitoly *Předmluva*, *Dodatky*, *Závěr* a *Literatura*. V kapitole *Závěr* je mimo jiné přiložena výsledková listina seriálu 32. ročníku MKS – pro přehled, jak si řešitelé s kterou úlohou poradili.

S původním určením textu souvisí i poněkud uvolněnější jazykový styl, kterým je práce napsána. Jelikož jedním z mých hlavních cílů je aktivní zapojení čtenáře, obracím se často přímo na něj a míra výskytu vykřičníků je tudíž na diplomovou práci nemalá. Občasné hovorové výrazy jdou rovněž na vrub snaze učinit text – při zachování matematické přesnosti – lehce čitelný pro středoškolského žáka. Ponechala jsem rovněž v semináři obvyklé používání jmen či přezdívky organizátorů v zadání úloh.

Doufám, že celkový styl práce nebude případnému čtenáři přílišnou překážkou.

Poznámky k literatuře

Při psaní diplomové práce jsem čerpala především z elektronických skript Alexandra Šeňa [1] a Thomase S. Fergusona [2]. Obé mohu vřele doporučit případným zájemcům (ovládajícím příslušné jazyky) o prostudování témat, která jsem do své práce pro její konečný rozsah nezahrnula.

Kniha [1] obsahuje velké množství kombinatorických her – byla mi hlavním zdrojem pro kapitolu *Teorie her – 1. díl*. Menší množství her pro tutéž kapitolu jsem převzala z knihy [6], ze soutěže [3] a z archivu MKS [4].

³ Více informací o semináři lze nalézt na <http://mks.mff.cuni.cz>.

Úlohy i teorii pro kapitolu *Teorie her – 2. díl* jsem čerpala výhradně z prvního dílu skript [2], s výjimkou jedné úlohy, kterou jsem objevila rovněž v [7].

Kapitola *Teorie her – 3. díl* je založena jednak rovněž na skriptech [2], tentokrát druhém a třetím dílu, jednak na přednášce [5] a knize [8].

Některé úlohy jsem našla ve více zdrojích, v takovém případě jsem uvedla všechny. Úlohy bez zdroje jsou z části mnou vymyšlené, zčásti jde o známé úlohy, které se mi ovšem nepodařilo v literatuře dohledat. Myšlenky řešení jsou většinou převzaty z odkazovaného zdroje, doplněné o vlastní komentáře propojující úlohy a výklad.

Teorie her – 1. díl

Úvod

Teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. To jsou takové situace, ve kterých výsledek nezávisí jenom na tom, jak se zachováme my, ale i na tom, jak se zachovají ostatní účastníci (hráči). Dobrým příkladem je hra kámen–nůžky–papír. Teorie her se ovšem umí vypořádat i se složitějšími situacemi, například:

- (i) Kolik mám jakožto investor nabídnout, abych zakázku získal a přitom vydělal co nejvíce?
- (ii) Kterou cestou jet do práce, abych se vyhnul dopravní zácpě (zde jsou hráči všichni řidiči, kteří ráno potřebují jet stejnou cestou)?
- (iii) Pojistit si dům proti živelným katastrofám, či nepojistit („proti“ hráčem je příroda)?

Znalost teorie her zkrátka najde uplatnění v mnoha oblastech – od abstraktní matematiky přes biologii, dopravní situace, sport, politiku až po ekonomii.⁴ Samozřejmě čím složitější situace, tím složitější model a většinou ruku v ruce s tím i pokročilejší matematika potřebná k jeho vyřešení.

My začneme zlehka – hraním kombinatorických her – a uvidíme, kam až se v průběhu roku stihneme dostat.

⁴ Jedni z mála matematiků, kteří získali Nobelovu cenu, ji dostali právě za ekonomii. Byli jimi v roce 1994 John Forbes Nash, Reinhard Selten a John Charles Harsanyi (za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her) a v roce 2005 Robert John Aumann a Thomas Crombie Schelling (za zvýšení porozumění konfliktům a spolupráci prostřednictvím analýzy teorie her).

Základní pojmy

Kombinatorická hra

V tomto dílu se budeme zabývat pouze *kombinatorickými hrami*, což jsou hry splňující následující podmínky:

- (1) Hrají dva *hráči* proti sobě.
- (2) Hráči se pravidelně střídají. Není-li uvedeno jinak, hráč nesmí vynechat tah.
- (3) Je dáno (zpravidla konečně mnoho) *pozic*, ve kterých se hra může nacházet. Jedna z pozic je označena jako *startovní*. Pozicím, ve kterých hra končí, a to buď *výhrou* jednoho z hráčů a *prohrou* druhého, nebo *remízou*, se říká *koncové*.
- (4) Pravidla hry určují pro každého hráče všechny přípustné *tahy* z každé pozice.
- (5) Ve hře nejsou žádné náhodné prvky.
- (6) Oba hráči mají *úplnou informaci*.
- (7) Oba hráči jsou *racionální*.

Předně se podívejme, co znamenají poslední tři podmínky. Podmínka (5) vylučuje jakýkoliv zásah náhody; žádné házení kostkou nebo tahání sirek. Jak se hráč ve svém tahu zachová, záleží čistě na jeho vůli, a tedy výsledek hry je ovlivněn pouze schopnostmi obou hráčů. Podmínka (6) říká, že veškeré informace ve hře jsou dostupné oběma hráčům. Tedy například kanasta není hra s úplnou informací, neboť neznáme karty svého soupeře, zatímco on je zná. Dále nejsou povoleny žádné skryté tahy, stejně jako současné tahy obou hráčů (to je ostatně vyloučeno i podmínkou (2)). Předpoklad (7) jinými slovy říká, že hráči hrají tak, jak nejlépe je to možné, nedělají zbytečné chyby, vždy vědí, jaký tah je pro ně nejlepší, a tak dále.

Často se ještě přidává podmínka, že hra má být *konečná*, čili má skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají. Občas se v kombinatorických hrách nepřipouští možnost remízy – spolu s podmínkou konečnosti to pak znamená, že hra nutně skončí vítězstvím jednoho z hráčů. My tyto podmínky nebudeme vyžadovat, ačkoliv většina her, kterými se budeme zabývat, je splňuje.

Kombinatorickou hrou jsou například piškvorky na hracím plánu 10×10 . Hráči jsou dva, pravidelně se střídají. Je-li hráč na řadě, pak jeho tahem je nakreslení svého symbolu na libovolné prázdné pole uvnitř plánu. Pozicemi jsou všechna možná „pokreslení“ plánu, kterých bylo dosaženo v souladu s pravidly. Startovní pozice je prázdný plán. Vyhrává hráč, který jako první vytvoří souvislou řadu alespoň pěti svých symbolů, jeho soupeř v takovém případě prohrává. Remíza nastává tehdy, když není možný žádný další tah, neboť hrací plán je zcela zaplněn. V obou předchozích případech se tedy hra dostala do koncové pozice.

Které další známé hry jsou kombinatorické? Ruleta a vrhcáby nikoliv (prvky náhody), poker nebo loď rovněž ne (zatajování informace). Kámen–nůžky–papír neprojdou přes druhou podmínku (pravidelné střídání hráčů). Solitaire je jen pro jednoho hráče, a tudíž také nepřípadá v úvahu. Volejbal, softbal, badminton

a další míčové hry sice jsou pro „dva hráče“, ale kvůli značným obtížím s definováním pozice a tahu je také nepovažujeme za kombinatorické hry.

Existují tedy vůbec nějaké další kombinatorické hry kromě piškvorek? Co třeba šachy? Ano, šachy všechny podmínky splňují. No a dál . . . dál je jich ještě spousta! Za chvíli si některé z nich předvedeme, nejprve ale pár obecných slov o tom, co je strategie a co jsou vyhrávající a prohrávající pozice.

Strategie

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry.⁵ *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak chytře hraje jeho protihráč (tedy bez ohledu na protihráčovu strategii). Obdobně, má-li jeden z hráčů *neprohrávající strategii*, znamená to, že pokud se jí bude držet, hru neprohraje, ať jeho soupeř hraje sebelépe.

Poslední dva pojmy se mohou lišit ve hrách připouštějících remízu nebo v nekonečných hrách. Ujasněme si nejprve, jak vlastně může hra dopadnout (všimněte si, že jsme schválně nenapsali „skončit“):

- (A) Vítězstvím prvního hráče a prohrou druhého.
- (B) Prohrou prvního hráče a vítězstvím druhého.
- (C) Remízou – hra skončila, ale ani jeden z hráčů nevyhrál ani neprohrál.
- (D) Hra neskončí v konečném počtu tahů, neboli nikdy se nedostane do koncové pozice.⁶

Má-li první hráč vyhrávající strategii, pak umí hrát tak, aby nastal případ (A). Naproti tomu, má-li neprohrávající strategii, je v jeho možnostech „pouze“ zabránit případu (B). Analogicky pro druhého hráče.

Případy (C) a (D) nebudeme pro jednodušší vyjadřování rozlišovat a oba budeme shodně nazývat remízou.

Vyhrávající a prohrávající pozice

V této kapitole budeme uvažovat pouze konečné hry nepřipouštějící remízu. V takových hrách můžeme každou pozici označit buď jako vyhrávající, nebo jako prohrávající. Jak už název napovídá, nachází-li se hráč ve *vyhrávající pozici*, pak (bude-li hrát, jak nejlépe lze) hru vyhraje. Naopak, nachází-li se v *prohrávající pozici*, hru nutně prohraje (pokud jeho soupeř neudělá chybu, což neudělá, neb jsme se již výše dohodli, že oba hráči jsou racionální).

Vyhrávající a prohrávající pozice budeme značit symboly V a P.

Jak u konkrétní pozice v dané hře poznáme, zda je vyhrávající, nebo prohrávající? Pomohou nám k tomu následující pozorování:

- (i) Jedná-li se o koncovou pozici, pak pravidla určují, zda je V, nebo P.
- (ii) Vede-li z nějaké pozice alespoň jeden tah do P pozice, pak je tato V. Pokud se totiž právě v takové pozici nacházíme, můžeme svým tahem do oné prohrávající pozice svého soupeře postavit a tím mu zaručit prohru a sobě výhru.

⁵ Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.

⁶ To se může stát například u piškvorek hraných na nekonečně velkém hracím plánu.

- (iii) Vedou-li z nějaké pozice všechny tahy pouze do V pozic, pak je tato P. Ať totiž z takové pozice hrajeme jakkoliv, vždy „předáme“ soupeři hru ve vyhrávající pozici, tedy my se musíme nacházet v prohrávající pozici.

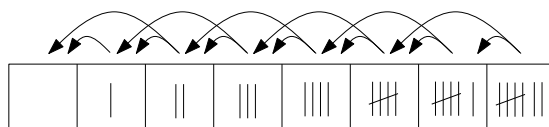
Teď už je snadné postupně u všech pozic rozhodnout, jaké jsou. Začneme od konce (podle pravidla (i)). Dále, vedou-li z nějaké pozice všechny tahy do již označených pozic, můžeme podle pravidel (ii) a (iii) rozhodnout, o jakou pozici se jedná. A protože je pozic konečně mnoho, skutečně se nám postupně podaří označit všechny.

Všimněme si ještě, že bylo důležité předpokládat konečnost hry. U nekonečné hry bychom totiž nemuseli „mít kde začít“, ani by se nám nemuselo podařit v konečném čase označit všechny pozice.

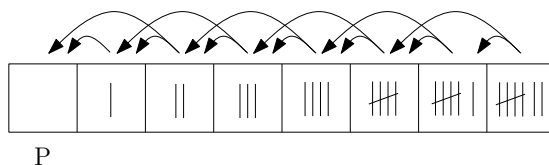
Nejlepší bude osvětlit si právě zavedené pojmy na příkladu.

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

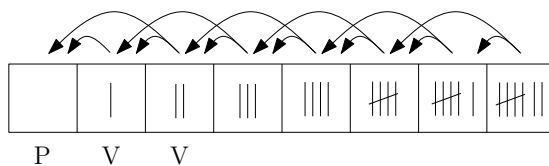
Řešení. Nakresleme si možné počty sirek včetně možných tahů z jednotlivých pozic – viz následující obrázek.



Koncová pozice je v této hře jediná (na stole nezbyla žádná sirka) a podle pravidel je prohrávající. Můžeme si to poznačit do nákresu.

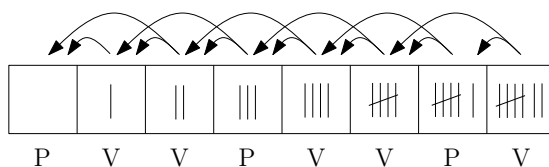


Pokud na stole zbývá jedna nebo dvě sirky, může je hráč ve svém tahu všechny odebrat a tím vyhrát (jeho soupeř se dostane do pozice, o které už víme, že je prohrávající).



Zbývají-li na stole tři sirky, pak hráč nemá jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice (což jistě potěší jeho protihráče), a tedy tři sirky jsou prohrávající pozice.

Z hromádky čtyř, resp. pěti sirek lze odebrat jednu, resp. dvě a tím se dostat do prohrávající pozice – proto jsou obě tyto pozice vyhrávající. Podobně si můžeme rozmyslet, že šest sirek je prohrávající pozice a sedm vyhrávající.



Po označení V a P pozic v této hře je ihned patrná vyhrávající strategie prvního hráče – hraj tak, aby protihráči zbyly na stole sirky v počtu násobků tří. ♠

Vyslovme si důležitou větu o kombinatorických hrách. Myšlenka důkazu není nijak obtížná – už jsme si ji v podstatě rozmysleli spolu se zavedením V a P pozic.

Věta 1 (O vyhrávající strategii). *V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice V a P pozic plyne, že pokud je startovní pozice V, může první hráč zahrát takový tah, aby se soupeř během svého tahu ocitl v pozici P a musel prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, dosáhne první hráč opakovaním tohoto postupu vítězství, a má tedy vyhrávající strategii. Pokud je ovšem startovní pozice P, pak všechny tahy prvního hráče vedou do V pozic a druhý hráč se ocitá v roli prvního hráče v předchozích úvahách. Vyhrávající strategii má tedy druhý hráč. ♣

Poznámka. Obdobně jako V a P pozice by se daly v konečných hrách s možností remízy zavést *neprohrávající* a *nevyhrávající* pozice. Rovněž platí, že jeden z hráčů má vždy neprohrávající strategii, a to dokonce i v nekonečných hrách. Stačí si rozmyslet, co znamená nemít vyhrávající strategii – pokud ji totiž nemám, pak mi protivník vždy umí zabránit ve výhře, a tedy sám má neprohrávající strategii.

Poznámka. Všimněme si ještě, že důkaz věty nám nejen dává jistotu, že vyhrávající strategie existuje, ale dokonce nám dává i přesný návod, jak ji najít. Pokud jsme schopni u nějaké hry rozdělit všechny její pozice na vyhrávající a prohrávající, pak hráči s vyhrávající strategií rovněž dáváme do ruky návod, jak hrát a vyhrát.

Problém může nastat – a často také nastává – v tom, že teoreticky jsme sice schopni všechny pozice označit jako V, či P, ale ve skutečnosti může mít hra tolik různých pozic, že není v lidských (ani počítačových) silách se všemi možnostmi probrat. Taková situace je například u šachu – ačkoliv se jedná o konečnou kombinatorickou hru, a tedy jeden z hráčů má neprohrávající strategii, již po pár tazích se počet pozic rozrůstá natolik, že si s tím množstvím zatím nikdo neporadil.

Metody řešení

Když už známe všechny podstatné pojmy, můžeme se vesele pustit do hraní rozličných kombinatorických her. V následujících podkapitolách si postupně představíme různé metody hledání vyhrávajících a neprohrávajících strategií. Na konci každé podkapitoly naleznete pár příkladů na samostatné procvičení.

Podstatnou částí řešení rovněž bývá přijít na to, kterou metodu použít. Proto v poslední podkapitole najdete směs úloh, u kterých vám nikdo předem neprozradí, jakou metodou se mají řešit. Občas to bude metoda uvedená v tomto textu, jindy bude nutné vymyslet nový způsob, jak se s danou hrou vypořádat.

Zpětný rozbor

V podkapitole o vyhrávajících a prohrávajících pozicích jsme se naučili, jak v libovolné konečné kombinatorické hře nalézt vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů (máme-li dostatečnou výpočetní kapacitu). Tuto metodu budeme nazývat *zpětný rozbor*, cizím slovem *backtracking*, neboť hru vlastně (vy)řešíme od konce.

Zkusme s její pomocí vyřešit následující hry. Není-li řečeno jinak, pak „vyřešením“ hry se míní nejen nalezení vyhrávající strategie pro jednoho z hráčů, ale i její popsání.

Hra 2. Na stole leží 15 sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat 1 až 4 sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([1], úloha 1)

Řešení. Hra je velmi podobná té, kterou jsme si podrobně rozebrali v předchozí podkapitole. Nakreslíme si tedy, jak to vypadá s V a P pozicemi.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P

Vidíme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. První hráč nemá na začátku jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice, a tím pádem druhý hráč ho svým tahem umí znovu dostat do prohrávající pozice.

Vyhrávající strategii druhého hráče můžeme popsat slovy „vždy seber takový počet sirek, aby na stole zůstal ležet násobek pěti.“ První hráč je tak nucen nechat na stole „nenásobek“ pěti, což dává druhému hráči možnost dorovnat opět na násobek, až na stole zbude 5×0 sirek, a tedy první hráč prohraje.

Stejná strategie funguje pro libovolný startovní počet sirek n . Pro násobky pěti má vyhrávající strategii druhý hráč, kdežto pro všechny možné počty sirek, které nejsou násobky pěti, má vyhrávající strategii první hráč. Popis vyhrávající strategie se nijak nemění, mění se pouze to, zda startovní pozice je V, nebo P. ♠

Hra 3. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranná věž – může se pohybovat jen doleva nebo dolů. Hráči se střídají v tazích, přičemž si mohou vybrat, o kolik polí (minimálně však o jedno) pohnou věží v jednom z povolených směrů. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([1], úloha 12)

Řešení. Rozeberme od konce, které pozice jsou V a které P. Můžeme je ihned zakreslovat na šachovnici. Koncová pozice je opět jediná a je prohrávající. Dále můžeme rozhodnout o všech zbývajících pozicích v levém sloupci a v dolním řádku, z těch je totiž možné se jedním tahem dostat do levého dolního rohu a donutit soupeře prohrát (viz následující obrázek – vlevo).

8	V							
7	V							
6	V							
5	V							
4	V							
3	V							
2	V							
1	P	V	V	V	V	V	V	
	1	2	3	4	5	6	7	8

8	V	V	V	V	V	V	P	
7	V	V	V	V	V	P	V	
6	V	V	V	V	P	V	V	
5	V	V	V	P	V	V	V	
4	V	V	P	V	V	V	V	
3	V	V	P	V	V	V	V	
2	V	P	V	V	V	V	V	
1	P	V	V	V	V	V	V	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Všechny přípustné tahy z políčka $(2, 2)$ vedou do již označených pozic. Ty jsou všechny vyhrávající, tudíž $(2, 2)$ je prohrávající. Díky tomu jsou neoznačená pole ve druhém sloupci i řádku vyhrávající. Opakováním těchto úvah dospějeme k závěru, že naše startovní pozice – pravý horní roh – je prohrávající (viz předchozí obrázek – vpravo).

Vyhrávající strategii má druhý hráč a můžeme ji popsat slovy „udržuj věž na šikmé⁷ diagonále“.



Cvičení. V následujících hrách určete, které pozice jsou vyhrávající a které prohrávající. Nalezněte vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 4. Na stole leží hromádka n sirek, kde n je libovolné přirozené číslo. Hráči z ní sirky střídavě odebírají, a kdo nemůže hrát, prohrál. Tentokrát ale může hráč v jednom tahu odebrat 1, 2, nebo 4 sirky. Který hráč má (v závislosti na n) vyhrávající strategii? A co kdyby se směly odebírat všechny mocniny dvojky? ([1], úloha 11)

Hra 5. Pravidla jsou stejná jako v předchozí hře, ale kdo nemůže hrát, vyhrál.

Hra 6. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranný král (smí se pohybovat právě o jedno pole dolů, doleva nebo doleva dolů). Hráči jím střídavě táhnou, a kdo nemůže hrát, prohrál. ([1], úloha 13)

Poznámka. V následujících hrách nejde ani tolik o to, kdo vyhraje, jako (o) kolik vyhraje. Mohlo by se tedy zdát, že se jedná o zcela jiný typ her (a v jistém smyslu tomu tak skutečně je), nicméně metoda zpětného rozboru velmi dobře funguje i na ně. Jen si to zkuste!

Hra 7. Max a Mína si z šachovnice vyřezali zubatou desku a na kosmou diagonálu napsali čísla – viz následující obrázek.

3									
	1								
		4							
			1						
				5					
					9				
						2			
•								6	

Do levého dolního rohu postavili vymyšlenou figurku prince a střídají se v tazích – vždy smí s princem táhnout o jedno pole doprava nebo nahoru. Když se dostanou na očíslované pole, hra končí. Max se snaží, aby princ skončil na poli s co největším číslem, kdežto Mína se snaží výsledné číslo minimalizovat. S jakým číslem hra skončí, začíná-li Mína? A s jakým, začíná-li Max? ([1], úloha 34)

⁷ Šikmým směrem nazýváme směr z levého dolního do pravého horního rohu (či naopak). Směr z levého horního do pravého dolního rohu se nazývá kosmý.

Hra 8. Max a Mína tentokrát žádnou šachovnici neničili, jen si její pole v horním řádku a pravém sloupci popsali čísly – viz následující obrázek.

9	8	7	6	5	4	3	2
							8
							7
							6
							5
							4
							3
•							2

Do levého dolního rohu postavili postupně

- (i) prince (smí o jedno pole doprava nebo nahoru),
- (ii) věž (smí o libovolný počet polí doprava nebo nahoru),
- (iii) krále (smí o jedno pole doprava, nahoru nebo doprava nahoru)

a s každou figurou si zahráli stejnou hru jako před chvílí – střídají se v tazích, hra končí spočínutím figury na očíslovaném poli. Max se snaží výsledek maximalizovat, Mína minimalizovat. Jak všechny hry dopadnou, je-li Max galantní a nechává Mínu začínat?

Návod. V případě (iii) pomůže nakreslit si dvě šachovnice místo jedné.

Kradení strategií

Metoda *kradení strategií* je založena na následující úvaze: „kdyby měl vyhrávající strategii můj soupeř, mohl bych ji okopírovat (ukrást), a tím pádem bychom měli vyhrávající strategii oba, takže on ji mít nemohl“.

Na rozdíl od ostatních metod se jedná o *nekonstruktivní* metodu – umožňuje nám sice zjistit, kdo z hráčů má vyhrávající nebo neprohrávající strategii, ale vůbec nám neřekne, jak taková strategie vypadá a jak má onen hráč hrát, aby vyhrál, respektive neprohrál.

Ukažme si celou myšlenku kradení strategií na piškvorkách. Ještě poznamenejme, že jelikož se nejedná o konečnou hru, nemusí existovat vyhrávající strategie, určitě však existuje strategie neprohrávající.

Hra 9 (Piškvorky). Na nekonečně velký čtverečkovaný papír kreslí do prázdných polí dva hráči střídavě křížky (první hráč) a kolečka (druhý hráč). Vyhrává ten, který jako první vytvoří nepřerušenu řadu – svisle, vodorovně nebo diagonálně – alespoň pěti svých symbolů.

Tvrzení 2. *V piškvorkách má první hráč neprohrávající strategii.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že druhý hráč má vyhrávající strategii. V tu chvíli může první hráč svůj první tah „zahodit“ – táhnout na libovolné pole ve hře, nadále si tohoto křížku nevšímát a tím se dostat do role druhého hráče, který má dle předpokladu vyhrávající strategii. Pokud by v průběhu hry součástí vyhrávající strategie bylo hrát na pole, na které první hráč „zahodil“ svůj první tah, tak hráč svůj „přebytečný“ křížek „zahodí“ na nějaké jiné volné pole. Tohoto

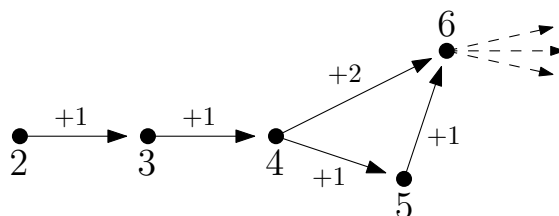
nově „zahozeného“ křížku si nevšímá a tváří se, jako že právě zahrál na místo, kam mu vyhrávající strategie radila (funguje to tak dobře proto, že nezáleží na tom, kdy se křížek na nějakém poli objevil – důležité je pouze to, zda tam leží).

Pokud by v průběhu hry první hráč zase potřeboval hrát na pole, kde má svůj „zahozený“ křížek, jednoduše současný tah opět „zahodí“ někam jinam. Tímto způsobem první hráč úspěšně okopíroval vyhrávající strategii druhého hráče – ale to je spor, neboť oba hráči nemohou mít vyhrávající strategii najednou.

Dokázali jsme tedy, že druhý hráč nemůže mít vyhrávající strategii, a proto má první hráč strategii neprohrávající. ♣

Hra 10 (Přičítání dělitelů). Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele.⁸ Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál? ([6], problém 3)

Řešení. Nakresleme si, jak vypadá prvních pár pozic – viz následující obrázek.



Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízy, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Pokud je prohrávající, pak začínající hráč, který je na řadě rovněž v pozici 4, bude volit přičtení dvojky, čímž se druhý hráč dostane do prohrávající pozice 6.

Na druhou stranu, je-li pozice 6 vyhrávající, pak začínající hráč může z pozice 4 táhnout do pozice 5, odkud jeho protivník musí nutně táhnout do pozice 6, čímž se první hráč ocitl ve vyhrávající pozici.

Tím jsme dokázali, že první hráč má vyhrávající strategii – vždy si ji může pro sebe ukrást. ♠

Poznámka. Mohlo by se zdát, že strategii krade vždy první hráč druhému, ale není tomu tak. Co když předchozí hru nezačneme s číslem 2, ale s číslem 3?

Cvičení. A teď už si zkuste krást strategie samostatně. Který hráč má vyhrávající/neprohrávající strategii?

Hra 11 (Dvojitě šachy). Pravidla jsou stejná jako v klasickém šachu s jediným rozdílem – hráč, který je na řadě, dělá tahy dva. ([6], problém 18)

Hra 12 (Mazání dělitelů). Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, smaže nějaké číslo a spolu s ním všechny jeho dělitele, kteří na tabuli ještě zbyli. Prohrává hráč, který nemůže táhnout – tedy ten, na kterého zbyla čistá tabule.

⁸ Vlastní dělitelé jsou dělitelé ostře menší než číslo samotné. Např. vlastní dělitelé čísla 12 jsou čísla 6, 4, 3, 2, 1.

Symetrie

Následující technika se dá použít ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické – umožňují hráči kopírovat soupeřovy tahy. Základní myšlenka by se dala popsat slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já“.

Hra 13 (Mince na stole). Loupežníci Kenny a Jarda ukořistili truhlu plnou zlatých kulatých mincí a rozhodli se zahrát si o ně hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na řadě, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu.⁹ Začíná Kenny. Prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii? ([1], úloha 20; [4], 27. ročník, 2. série, úloha 5)

Řešení. Vyhrávající strategii má Kenny. Stačí, když ve svém prvním tahu položí minci doprostřed stolu. Pokud se na stůl už žádná další mince nevejde, Kenny hned vyhrává. Pokud se na stůl ještě alespoň jedna mince vejde, je na tahu Jarda. Ten ať položí svou minci kamkoliv, ze středové souměrnosti stolu a prostřední mince vyplývá, že na stole existuje alespoň jedno volné místo – obraz Jardovy mince ve středové souměrnosti podle středu stolu. Přesně na toto místo Kenny položí svoji minci. Dále opět pokládá Jarda a Kenny reaguje položením mince na středově souměrné místo, a tak dále.

Jelikož je stůl konečný, nastane po určité době situace, kdy už nebude možné mince nikam pokládat. Nemůže-li nakonec položit minci Jarda, Kenny zvítězil. Nemůže-li Kenny, znamená to, že o tah dříve ani Jarda nemohl položit svoji minci, neboť Kenny vždy reaguje na Jardův tah a celou dobu udržuje pokrytí stolu středově symetrické. Máme tedy jasnou vyhrávající strategii pro Kennyho (remíza nastat nemůže). ♠

Hra 14 (Lámání čokolády). Riikka a Jussi dostali velkou (200 gramů, 4×8 kostiček) finskou hruškovou čokoládu a rozhodli se zahrát si s ní následující hru. Ve svém tahu může hráč rozlomit (láme se rovně po vyznačených čárách) libovolný kus čokolády, který ještě rozlomit lze. Kdo rozlomí poslední kousek, vyhrál a může celou čokoládu sníst. Kdo vyhraje, začíná-li lámat Riikka a pravidelně se s Jussim střídají? ([1], úloha 5)

Řešení. Představme si, že se nacházíme někde uprostřed hry a čokoláda je rozlámána na n kusů. Dalším tahem dojde k rozlomení jednoho z kusů na dva nové, celkový počet kusů tím vzroste na $n + 1$. Z toho je patrné, že ať oba hráči hrají jakkoliv, hra skončí po 31 kolech – začínáme s čokoládou v jednom kuse a končíme, když je všech 32 dílků samostatných. Hru-nehru¹⁰ tudíž vyhrává Riikka a ani jí to nedá moc práce. ♠

Hra 15 (Lámání čokolády bez 1×1). Na Vánoce Riikka s Jussim dostali jinou velkou (4×8 kostiček) finskou čokoládu, tentokrát peprmintovou. Protože minule se jim hra moc nelíbila, přidali pravidlo, že se nesmí ulamovat dílky velikosti 1×1 . Kdo nemůže v souladu s pravidly táhnout, prohrál. Má začínající

⁹ Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde alespoň jedna mince.

¹⁰ Pokud se vám zdá, že takováto hra přece není „pořádná“ hra, neboť hráči nijak nemohou ovlivnit její výsledek (dokonce ani kdyby chtěli hrát ve svůj neprospěch), nenechte se zmást – definici kombinatorické hry splňuje.

Riikka vyhrávající strategii, nebo si na čokoládě pochutná pro změnu Jussi?
([4], 21. ročník, 7. série, úloha 3)

Řešení. I tentokrát má vyhrávající strategii Riikka. V prvním tahu rozlomí čokoládu napůl podél jedné z os souměrnosti a podle tohoto lomu se bude celou hru osově symetricky řídit. Pokud Jussi ve svém tahu rozlomí kus nalevo/napravo od osy, rozlomí Riikka osově symetricky odpovídající kus napravo/nalevo od osy. Dokud může Jussi hrát, může Riikka hrát minimálně ještě jednou – díky tomu, že hru celou dobu udržuje osově symetrickou. Čokoláda je konečná, a tím pádem jednomu z hráčů jednou dojdou tahy jako prvnímu. Podle pozorování výše to musí být Jussi.

Poznámka na závěr – Riikka mohla místo osové symetrie stejně dobře využít středovou symetrii. ♠

Cvičení. V následujících hrách nalezněte vyhrávající/neprohrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 16. Dva hráči střídavě kreslí křížky do tabulky 3×3 . Vyhraje ten, kdo první vytvoří souvislou trojici křížků (vodorovně nebo svisle).

Hra 17. Dvě šachu znalá PraSátka – Kuba a Anička – střídavě pokládají jezdce své barvy na šachovnici tak, aby se žádná dvojice znepřátelených jezdců neohrožovala. Kdo nemůže položit dalšího jezdce, prohrál. Kuba je galantní a nechá Aničku začínat.
([1], úloha 21; [6], problém 5)

Hra 18. Je dána tabulka o rozměrech 17×68 políček. Hráč si ve svém tahu vybere nějaký podčtverec tabulky, ve kterém ještě není vybarveno žádné políčko, a celý ho vybarví. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout, prohrál.
([6], problém 29)

Párování a obarvování

Není-li možné nalézt ve hře takovou symetrii, která by nám dovolila použít předchozí metodu, můžeme zkusit metodu *párování*. Myšlenka je stále stejná – „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah“. Často se tak děje rozdělením pozic do párů, odtud také název metody. Zahraje-li soupeř na jednu z pozic v páru, já zahraji na druhou. Další možností je rozdělení pozic/tahů do obecnějších skupin – viz následující příklad.

Hra 19 (Proužek čísel). Na proužku papíru je za sebou napsáno $2n$ čísel, kde n je libovolné přirozené číslo. Mišo s Háňou čísla postupně odstřihávají – ten, který je na řadě, si vybere jeden ze dvou konců a číslo na něm si ustříhne. Na konci oba sečtou všechna čísla, která si pro sebe ustříhli, a kdo má větší součet, vyhrál. Je-li součet stejný, nastává remíza. Který z nich má neprohrávající strategii, když Háňa začíná a pravidelně se v tazích střídají?

Řešení. Neprohrávající strategii má Háňa bez ohledu na to, jaká čísla jsou na proužku napsaná a kolik jich je (důležité je pouze to, aby jich byl sudý počet).

Obarvěme čísla na lichých pozicích šedě, na sudých bíle (viz obrázek pro $n = 6$) a spočítejme, je-li větší součet čísel na šedých místech, nebo na bílých.

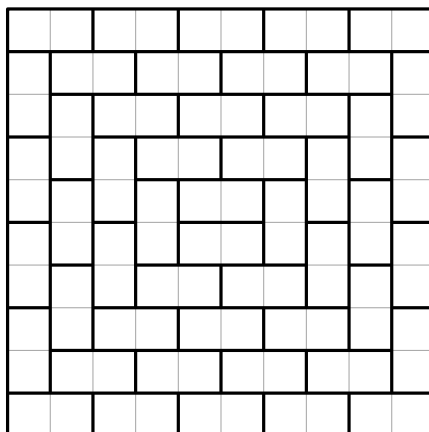


Předpokládejme, že větší součet je na šedých polích. Háně k vítězství stačí ustříhnout si v každém svém tahu číslo na šedém poli. Mišovi tím pádem vždycky předá proužek, jehož oba kraje jsou bílé. Mišo jeden z nich ustříhne, čímž se Háně zpřístupní další šedé pole, a tak dále. Na konci má Háňa všechna čísla, která byla na šedých polích, a Mišo všechna, která byla na bílých, a jak jsme předpokládali, součet na šedých je vyšší, tedy Háňa vyhrála.

Pokud by součty na šedých i bílých polích byly shodné, umí si výše popsaným postupem Háňa zaručit remízu, a tedy má vskutku neprohrávající strategii. ♠

Hra 20 (Piškvorky do čtverce). Lukáše s Viktorem už přestalo bavit hrát při hodinách obyčejné piškvorky, a tak vymysleli obměnu – hrají na čtverečkovaném papíře 10×10 . V každém tahu hráč nakreslí svůj symbol do volného pole. Lukáš vyhraje, pokud vytvoří ze svých symbolů čtverec 2×2 , a Viktor vyhraje, když se mu v tom podaří zabránit. V tazích se pravidelně střídají, Lukáš začíná. Který z nich má vyhrávající strategii?

Řešení. Vyhrávající strategii má druhý hráč – Viktor. Vzhledem k pravidlům mu stačí, když v každém možném čtverci 2×2 , který se na hracím plánu vyskytuje, bude mít alespoň jeden svůj symbol dřív než Lukáš všechny čtyři. Aby toho dosáhl, stačí si chytře rozdělit hrací plán na pomyslná domina – viz následující obrázek.

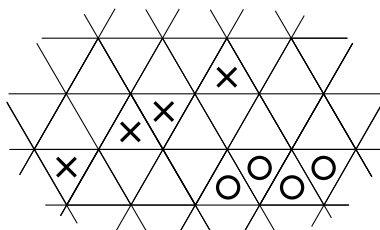


Teď už je Viktorova strategie jasná – ať Lukáš umístí svůj znak kamkoliv, Viktor nakreslí svůj do odpovídajícího domina. Jelikož každý čtvereček 2×2 obsahuje alespoň jedno celé domino a v každém dominu je nejvýše jeden Lukášův znak, nemůže Lukáš vyhrát. Hra je konečná a remízu pravidla nepřipouštějí, z čehož plyne, že vyhrávající strategii má opravdu Viktor. ♠

Cvičení. V následujících hrách nalezněte vyhrávající/neprohrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 21 (Razítka). Vejtek se z dlouhé chvíle pustil do následující hry. Postupně dává na prázdná šachovnicová pole razítka, střídavě červené a zelené, a to tak, že nově orazítkované pole musí hranou sousedit s polem, které bylo orazítkováno těsně před ním. První – zelené – razítko může dát Vejtek kamkoliv. Prohrává ta barva, jejíž razítko už Vejtek nikam dát nemůže. Během celé hry Vejtek samozřejmě hraje co nejlépe podle toho, kterou barvu zrovna zastupuje – je-li na tahu zelené razítko, hraje Vejtek v jeho prospěch, a je-li na tahu razítko červené, pak hraje ve prospěch červeného. ([6], problém 21a)

Hra 22 (Trojúhelníkové piškvorky). Dva hráči hrají piškvorky na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře a střídají se v tazích. Ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušovanou rovnou řadu (směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě) alespoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.



Pro upřesnění ještě dodejme, že vyobrazená posloupnost křížků **není** řadou, zatímco posloupnost koleček **je** řadou. ([4], 27. ročník, 2. série, úloha 8)

Zkuste si sami!

Teď už si můžete sami vyzkoušet, co jste se naučili v předchozích podkapitolách. Úkolem je vždy popsat vyhrávající či neprohrávající strategii jednoho z hráčů. A pokud ji náhodou popsat neumíte, tak alespoň zjistěte, kdo ji má. Nezapomeňte, že zpětným rozborem se sice teoreticky dají vyřešit všechny konečné hry, mnohdy je ale lepší zkusit přijít na nějaký elegantnější způsob řešení – vždyť kdo by se chtěl rozepisovat se všemi pozicemi např. v Piškvorkách do čtverce (Hra 20) nebo v Mincích na stole (Hra 13). A když už se do rozebírání případů pustíte (někdy to ani jinak nejde), zkuste to šikovně – pokuste se objevit v úloze nějaký skrytý princip a ušetřit si zbytečnou práci. Nestačí se třeba jen podívat ze správného konce (viz následující příklad)?

Úlohy jsou přibližně seřazené podle obtížnosti.

Dobře si zahrajte!

Hra 23 (Dělitelnost sedmi). Dva hráči píší dvaceticiferné číslo tak, že zleva doprava střídavě připisují jednu cifru. První hráč vyhraje, pokud výsledné číslo nebude dělitelné sedmi. Druhý vyhraje, pokud dělitelné sedmi bude.

([1], úloha 6)

Řešení. Poslední cifru (na místě jednotek) píše druhý hráč, a ten má také vyhrávající strategii. Prvních devět tahů může zahrát libovolně, k vítězství mu stačí zvolit správnou cifru ve svém posledním tahu, což se mu podaří, jelikož v každé desetici po sobě jdoucích čísel alespoň jedno dělitelné sedmi je. ♠

Hra 24 (Dělitelnost třinácti). Stejná hra jako předchozí, pouze vyměníme číslo 7 za 13. ([1], úloha 7)

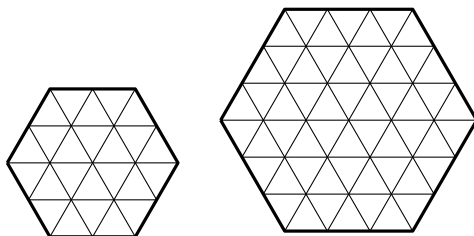
Hra 25 (Mocnění). Dva hráči hrají takovouto hru: První si vybere libovolné přirozené číslo od 2 do 9 a předá ho druhému. Druhý si rovněž vybere přirozené číslo od 2 do 9 a to číslo, které dostal, na něj umocní. Výsledek vrátí prvnímu. Ten si zase vybere jedno z čísel mezi 2 a 9, umocní na něj to obdržené, atd. Vyhraje ten, kdo jako první vytvoří číslo větší než 1000.

Hra 26 (Plus minus). V řadě za sebou je napsáno několik minusů. Matěj s Jonášem střídavě překreslují jeden až dva sousední minusy na plus. Vyhraje ten, který překreslí poslední minus. ([1], úloha 22)

Hra 27 (Plus minus podruhé). Ema se rozhodla předchozí hru mírně pozměnit – minusy napsala do kruhu (tedy každé znaménko mělo na začátku dva sousedy), zbylá pravidla ponechala stejná. ([1], úloha 23)

Hra 28 (Kocouři). Dva kocouři dostali řetěz z n buřtů a střídavě přehryzávají spojnice mezi nimi. Buřty, které ve svém tahu osamostatní (tedy ty, které už nebudou spojeny s žádným jiným buřtem), snědí. Vyhraje ten kocour, který sní více buřtů. Řešte postupně pro $n = 6$, $n = 7$, libovolné $n \in \mathbb{N}$. ([1], úloha 36)

Hra 29 (Šestiúhelníky). Helča s Alčou se neznámo kde dostaly k čokoládám ve tvaru pravidelného šestiúhelníku. Každá čokoláda je rozdělena na trojúhelníkové dílky. Na obrázku jsou čokolády o hraně délky 2 a 3.



Hráčky si vybraly jednu čokoládu o hraně délky n a hrají s ní následující hru. Ta, která je na tahu, rozlomí (láme se rovně po vyznačených čárách) čokoládu na dvě části, z nichž jednu sní a druhou předá zpátky soupeři. V tazích se pravidelně střídají, začíná Helča. Kdo nemůže táhnout, prohrává. Řešte postupně pro $n = 2$, $n = 3$, libovolné $n \in \mathbb{N}$. ([3], úloha 1)

Hra 30 (Dvě hromádky). Šavlík s Mončou mají dvě (ne nutně stejně početné) hromádky kávových bonbónů. Hráč, který je na tahu, sní všechny bonbóny z jedné hromádky a druhou hromádku rozdělí na dvě – dle vlastního uvážení, ale v obou nových hromádkách musí být alespoň jeden bonbón. Pravidelně se střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout (což nastane právě tehdy, bude-li na obou hromádkách po jednom bonbónu) prohrál. ([1], úloha 18; [2], strana I – 6)

Hra 31 (Chomp). Tabulka čokolády je rozlámána na kostičky. Kostička v levém dolním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku, sní ji a spolu s ní sní rovněž všechny kostičky v pomyslném obdélníku, jehož levým dolním rohem je právě vybraná kostička.¹¹ Hráči se pravidelně střídají v tazích. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, je-li čokoláda

- (i) čtvercová,
- (ii) obdélníková. ([2], strana I – 6)

Hra 32 (Barvení bodů). Pepa a Mirek obarvují body v rovině. Začíná Pepa obarvením jednoho bodu oranžově, poté Mirek obarví 100 bodů žlutě, Pepa jeden oranžově, Mirek 100 žlutě, ... Přebarvovat již jednou obarvené body není možné. Dokažte, že Pepovi se podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy. ([1], úloha 26)

¹¹ Tedy včetně kostičky samotné a kostiček přímo napravo a nahoru od ní.

Hra 33 (Piškvorky 2 : 1). Majkl s Ančou hrají piškvorky na nekonečně velkém papíře s následující úpravou pravidel. Začínající Anča v každém svém tahu nakreslí jeden křížek, zatímco Majkl nakreslí v každém tahu dvě kolečka. Majkl vyhraje, když vytvoří nepřerušenu řadu sta koleček – buď svisle, nebo vodorovně. Anča se mu v tom samozřejmě snaží zabránit. Dokažte, že Majkl má vyhrávající strategii.¹² ([1], úloha 25)

¹² Jak víme, obecně má u nekonečných her jeden z hráčů pouze neprohrávající strategii. V této hře si ale Majkl umí zajistit výhru.

Zadání 1. seriálové série


Úloha 1. V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu¹³ všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

Úloha 2. V řadě za sebou je napsáno n jedniček ($n > 1$) a mezi každými dvěma sousedními jedničkami je otazník. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích – hráč, který je na tahu, přepíše libovolný z otazníků na znaménko $+$ nebo \times . Na konci hry, kdy už je všech $n - 1$ otazníků změněno na jedno ze znamének, se celý výraz vyhodnotí (klasicky – násobení má přednost před sčítáním). Je-li výsledné číslo sudé, vyhrává první hráč, je-li liché, tak druhý hráč.

V závislosti na n určete, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Úloha 3. Martina a Olin střídavě (Olin začíná) vybarvují políčka tabulky 5×5 . Olin ve svém tahu vždy vybarví jeden čtvereček, Martina libovolně natočené triomino. Jednou vybarvené políčko již nelze vybarvit znovu. Pokud Martina už nemůže táhnout, dovybarví Olin zbytek. Vyhrává ten, kdo vybarvil více políček. Který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud Martina smí vybarvovat

(i) pouze triomina typu I: ?

(ii) pouze triomina typu L: ?

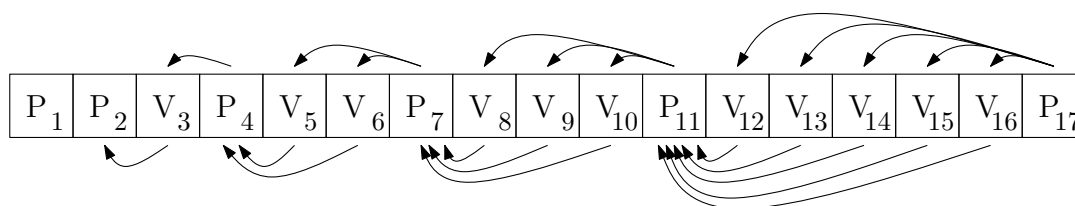
([3], úloha 3)

¹³ Ořechy nelze jíst po částech. Např. zbývá-li 11 ořechů, sní hráč 1, 2 nebo 3 kusy.

Řešení 1. seriálové série

Řešení jsou doplněna o poznámky opravovatele, které vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS. První úlohu opravil a vzorové řešení sepsal Lukáš Zavřel, druhou úlohu opravila a vzorové řešení sepsala Michaela Hubatová.

Úloha 1. Úlohu budeme řešit podobně jako v seriálu. Nakresleme si možné pozice (počty ořechů) – viz následující obrázek. Postupně určíme, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající.



Již ze zadání víme, že pozice s jedním a dvěma ořechy jsou prohrávající, neboť pokud bychom z nich chtěli táhnout, mohli bychom sníst maximálně $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{2}{3}$ ořechu, ale protože můžeme jíst pouze celé ořechy, nemůžeme nic sníst, tedy nemáme tah a prohráli jsme. Pozice 3 je vyhrávající, protože se z ní umíme dostat do pozice 2, která je prohrávající. Pozice 4 je prohrávající, protože se z ní umíme dostat jen do vyhrávající pozice 3, a ze stejného důvodu jsou prohrávající i pozice 7, 11 a 17 – viz odpovídající tahy na obrázku. Vyhrávající strategii má druhý hráč, tedy Filip, a to držet Míšu vždy na prohrávajících pozicích.¹⁴

Poznámka. Řešitele s pěti body lze rozdělit do dvou skupin. Mírně dominující byla skupina řešitelů, kteří předpokládali, že pokud na stole je jeden ořech, hráč na tahu ho může sníst. Toto ale zadání výslovně zakazovalo, neboť stanovovalo, že žádný hráč nemůže sníst více než $\frac{1}{3}$ celkového počtu ořechů. Za tuto chybu jsem nakonec body nestrhával, neboť se kromě situace u jednoho ořechu tabulka vůbec nezměnila, ale doufám, že to bude pro všechny poučení, že je potřeba číst zadání pořádně.

Úloha 2. Uvažme koncový stav hry, kdy jsou všechny otazníky nahrazeny znaménky plus či krát. Protože násobení má při vyhodnocování výrazu vyšší prioritu než sčítání a vždy násobíme mezi sebou pouze jedničky, je výsledek každého součinu obsaženého ve výrazu roven jedné. Proto označíme-li k počet znamének plus,

¹⁴ Jak ale někteří řešitelé správně poznamenali, pokud bude chtít Filip vyhrát, tak Míša bude alespoň moci sníst 11 ořechů, a tak ji prohra nebude tolik mrzet.

je hodnota výrazu na konci hry $k + 1$. O paritě¹⁵ znamének plus vždy může rozhodnout hráč, který provádí poslední tah.

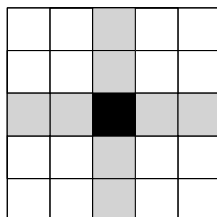
Je-li n sudé, poslední znaménko volí první hráč. Vybere ho tak, aby počet znamének plus byl lichý, tedy aby výsledek výrazu byl sudý. Naopak, je-li n liché, poslední znaménko vybírá druhý hráč. Volí ho tak, aby počet znamének plus byl sudý, tedy aby výsledek výrazu byl lichý.

Proto pro sudé n má vyhrávající strategii první hráč, kdežto pro liché n druhý hráč.

Poznámka. Někteří řešitelé se snažili určovat průběžnou hodnotu výrazu a diskutovat, jak ji ovlivní doplnění dalšího znaménka některým z hráčů. Bohužel ale nevysvětlili, čemu se rovná výsledek výrazu, který obsahuje otazníky! Úlohu samozřejmě lze řešit tak, že nejprve všechny otazníky nahradíme například znaménkem plus a pak se zabýváme tím, jak se výsledek výrazu změní při přepsání některého z plusů na krát, ale je třeba prvotní nahrazení otazníků některým ze znamének v řešení zmínit!

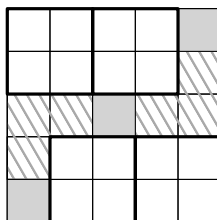
Úloha 3. Aby Martina vyhrála, musí obarvit alespoň 5 triomin. Naopak dostane-li se na tah jen čtyřikrát, vyhraje Olin.

Část (i). Vyhrávající strategii má Olin – v prvním tahu zahraje doprostřed čtverce (viz následující obrázek) a v dalších čtyřech tazích bude hrát na libovolné volné šedé pole.



Jelikož po Olinově prvním tahu každé triomino typu I pokryje právě jedno šedé pole, budou po pěti tazích Olina a čtyřech tazích Martiny všechna šedá pole zabraná – Martina v každém svém tahu jedno z nich zabere, ať chce nebo nechce, a Olin je zabírá záměrně. Tím pádem po Olinově pátém tahu již nikde není místo na položení dalšího triomina, tedy Olin vyhrál.

Část (ii). Tentokrát má vyhrávající strategii Martina. Rozdělí si celý hrací plán na čtyři pomyslné čtverce o velikosti 2×2 , dvě vyšrafované oblasti a 3 „zbylá“ šedá pole – viz následující obrázek.

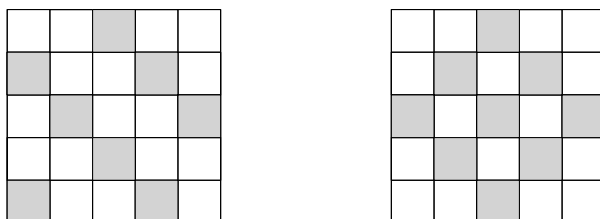


Pokud Olin zahraje do jednoho z menších čtverců, zahraje Martina do téhož čtverce (triomino typu L přesně doplní Olinův tah). Pokud Olin zahraje do jedné

¹⁵ Parita je vlastnost čísla být sudým či lichým.

z vyšrafovaných oblastí, Martina obarví tu druhou. A pokud Olin zahraje na šedé pole (či v pozdější fázi hry podruhé do vyšrafované oblasti), zahraje Martina do libovolného prázdného čtverce nebo vyšrafované oblasti. Každopádně se Martině podaří obarvit vždy nejméně pět triomin, tedy vyhrála.

Poznámka. Popsané vyhrávající strategie nejsou jediné možné. V části (i) Olinovi stejně dobře poslouží jedno z následujících obarvení.



Obarvení použité ve vzorovém řešení se ovšem vyskytovalo nejčastěji. Asi nejlépe je z něj patrná klíčová myšlenka, že do každého řádku a do každého sloupce se vejde nejvýše jedno triomino typu I.

Teorie her – 2. díl

Představte si, že hrajete se svým kamarádem turnaj zároveň v Odebírání sirek, Mincích na stole a Piškvorkách do čtverce (viz hry číslo 1, 13 a 20 z předchozího dílu). Ten, kdo je na tahu, si jednu z her vybere a udělá v ní tah podle jejích pravidel, zatímco zbylé dvě hry nechá beze změny. Poté hraje soupeř – opět v jedné z her dle svého výběru. Celý turnaj končí ve chvíli, kdy není možné v žádné z her udělat další tah. Hráč, který se do takovéto nepříjemné situace dostane jako první, prohraje.

Z minulého dílu známe a umíme popsat vyhrávající strategii pro začínajícího hráče v každé z jednotlivých her. Znamená to, že má začínající hráč vyhrávající strategii i v celém turnaji? A uměli bychom to nějak dokázat? Či onu strategii dokonce popsat?

Dokud budeme pozice ve hře označovat pouze jako vyhrávající (V) nebo prohrávající (P), nejspíš se nám to nepodaří. Není totiž jasné, je-li výhodnější předat spoluhráči např. P pozici v Mincích na stole a V pozici v Odebírání sirek, nebo naopak. Zkrátka V a P pozice v sobě sice nesou dostatek informací, jak vyhrát jednu hru, ale chceme-li hry kombinovat, nemusí nám to stačit.

Co kdybychom však uměli každé herní pozici přiřadit nezáporné celé číslo – jakousi její „hodnotu“ – a táhli vždy ve hře, jejíž číslo je „nejvýhodnější“ (ať už to znamená cokoliv)?

Předchozí úvaha zjednodušeně popisuje myšlenku takzvaného *sčítání her*, což je metoda hledání vítězné strategie, kterou se naučíme v tomto dílu seriálu. Porozumění celému postupu nám ale chvíli zabere, tak už směle do toho!

Hra Nim

Hra Nim je jednou z nejznámějších kombinatorických her. Nejde o nic jiného, než o odebírání¹⁶ sirek, jehož obměny jsme potkali v minulém dílu. Základní varianta hry je následující:

Hra 34 (Nim). Na stole je n hromádek ($n \in \mathbb{N}$) obsahujících postupně x_1 až x_n sirek. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek, minimálně však jednu. Hráč, který nemůže

¹⁶ Však také samotný název hry nejspíš pochází z německého „Nimm!“, tedy „Ber!“.

táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Pro hru s n hromádkami a počty sirek x_1, \dots, x_n budeme pozice zapisovat ve tvaru (x_1, \dots, x_n) .

Cvičení. Zkuste si zahrát Nim s hromádkami $(2, 3, 1)$ či těžší variantu $(5, 7, 9)$.

První zamyšlení. Koncová pozice je pro každé n jediná: $(0, 0, \dots, 0)$. Podle pravidel se jedná o P pozici.

Pokud je hromádka pouze jedna, hra je triviální – první hráč odebere všechny sirky z oné jediné hromádky, čímž zvítězí.

Jsou-li hromádky dvě, není těžké si rozmyslet, že pozice je prohrávající právě tehdy, je-li na obou hromádkách stejný počet sirek. V takovém případě totiž hráč A, který je na řadě, musí z jedné hromádky nějaké sirky odebrat, na což jeho soupeř B zareaguje odebráním stejného počtu sirek z druhé hromádky, čímž počty v obou hromádkách opět vyrovná. A tak pořád dokola, dokud hráč B svojí reakcí nedorovná obě hromádky na nulu, a A tedy prohraje.

Pro tři hromádky už je situace obtížnější. Samozřejmě se můžeme uchýlit k rozboru vyhrávajících a prohrávajících pozic (pro zadanou počáteční trojici je vždycky zvládneme určit v konečném čase), ale se vzrůstajícím počtem sirek to bude stále náročnější (a trochu nudné).

Naštěstí existuje metoda, jak i pro hromádky s větším počtem sirek rychle určit, zda se jedná o V, nebo P pozici. A co víc! Stejná metoda funguje nejen pro tři hromádky, ale i pro čtyři, pět, ... Pro její pochopení se nejprve seznámíme s dvojkovou soustavou.

Binární vsuvka

Pokud již dvojkovou soustavu znáte, jedinou novinkou v této podkapitole pro vás bude nejspíš definice Nim-součtu a možná Pravidlo krácení (Tvrzení 4). Klidně tedy zbytek podkapitoly přeskočte a případně se k němu vraťte, pokud přece jen v dalším textu narazíte na něco, co vám ohledně dvojkové soustavy nebude jasné.

V naší civilizaci jsme zvyklí zapisovat čísla v desítkové soustavě. Zápis 5702 je ve skutečnosti zkrácením rozpisu $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, z čehož je hned patrné, proč mu říkáme desítkový – využívá rozložení čísla na součet mocnin desítky. Není to ovšem jediný možný zápis. Nám se bude hodit *binární zápis*, neboli zápis čísla ve *dvojkové soustavě*, či chcete-li v *bázi o základu dva*.

Platí, že každé přirozené číslo x lze jednoznačně rozepsat pomocí mocnin dvojky s koeficienty 0 nebo 1. Jinými slovy, ke každému x existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}_0$ a jednoznačně určená $x_m, x_{m-1}, \dots, x_0 \in \{0, 1\}$, kde $x_m = 1$, taková, že

$$x = x_m \cdot 2^m + x_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0.$$

Binárním zápisem čísla x pak rozumíme výraz $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$. Nulu zapisujeme jako $(0)_2$. Závorku budeme občas vynechávat, bude-li bez ní zápis přehlednější. Tedy například

$$26 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = (11010)_2 = 11010_2.$$

Vypustíme-li podmínku $x_m = 1$, pak je binárním zápisem čísla 26 nejen $(11010)_2$, ale i $(011010)_2$ nebo třeba $(00000011010)_2$. V jistém smyslu jsme ztratili

jednoznačnost binárního zápisu,¹⁷ ale zase nám to umožní snazší zápis v definici Nim-součtu. Můžeme totiž předpokládat, že každá dvě čísla mají stejně dlouhý binární zápis – stačí to „kratší“ doplnit nulami „na začátku“.

Jak převádět čísla do binárního zápisu. Pro malá čísla není převod mezi desítkovou a dvojkovou soustavou nic těžkého. Prostě se člověk „koukne“, jaká největší mocnina dvojky se v jeho čísle nachází, poznamená si ji, odečte a pokračuje dál. Převod druhým směrem – z dvojkové soustavy do desítkové – není nic jiného než sečtení správných mocnin dvojek.

Nicméně čísla z desítkové soustavy se do dvojkové dají převádět i následujícím algoritmem. Vznikající binární zápis píšeme zprava doleva!

- (i) Je-li číslo sudé, zapiš si nulu. Je-li liché, zapiš si jedničku a odečti ji od svého čísla.
- (ii) Vyděl číslo dvěma a dále pracuj s novým číslem.
- (iii) Opakuj kroky (i) a (ii), dokud ti nezbude nula.

Cvičení. Převeďte čísla 7, 11, 38 a 325 do dvojkové soustavy.

Cvičení. Převeďte čísla $(1010)_2$, $(10111)_2$ a $(100101)_2$ do desítkové soustavy.

Nyní už známe vše potřebné k definici Nim-součtu. Abychom jej odlišili od klasického součtu, budeme místo symbolu $+$ používat symbol \oplus .

Definice (Nim-součet). *Nim-součtem* čísel $(x_m \dots x_0)_2$ a $(y_m \dots y_0)_2$ je takové číslo $(z_m \dots z_0)_2$, že pro každé $k = 0, 1, \dots, m$ platí $z_k = x_k + y_k \pmod{2}$, neboli $z_k = 1$, pokud $x_k + y_k = 1$, a $z_k = 0$ jinak. Píšeme

$$(x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2.$$

Poznámka. „Nim-sečíst“ dvě čísla je vlastně velmi jednoduché – stejně jako v případě desítkového zápisu sčítáme číslice na odpovídajících si pozicích,¹⁸ ovšem pokud nám dílčí součet vyjde roven 2, nestaráme se na rozdíl od klasického sčítání o „přenos jednotky o řád výše“.

Příklad. Nim-součtem $(11010)_2 \oplus (1010011)_2$ je číslo $(1001001)_2$. Platí tedy $26 \oplus 83 = 73$, neboť $(11010)_2 = 26$, $(1010011)_2 = 83$ a $(1001001)_2 = 73$.

Pro názornost si můžeme sčítance zapisovat pod sebe:

$$\begin{array}{r} 11010_2 \\ \oplus 1010011_2 \\ \hline 1001001_2 \end{array}$$

Tvrzení 3. *Pro Nim-součet libovolných tří nezáporných celých čísel x, y, z platí*

- (i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (*asociativita*),
- (ii) $x \oplus y = y \oplus x$ (*komutativita*),
- (iii) $0 \oplus x = x$ (*neutrální prvek*),
- (iv) $x \oplus x = 0$ (*opačný prvek*),
- (v) $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*jednoznačnost opačného prvku*).

¹⁷ Podstatné vlastnosti ale zůstaly zachovány – nemůže se stát, že by jedno číslo mělo dva binární zápisy lišící se v cifře 1 na kterékoliv pozici.

¹⁸ V případě desítkového zápisu hovoříme o cifrách na místě jednotek, desítek, stovek atd. Analogicky by se v případě dvojkového zápisu dalo hovořit o cifrách na místě jednotek, dvojek, čtyřek, osmiček, ...

Důkaz Tvrzení 3 jistě zvládnete sami – vše plyne přímo z definice Nim-součtu, pátý bod navíc z Tvrzení 4.

Díky vlastnosti (i) nezáleží na pořadí sčítání, a tedy přebytečné závorky budeme vynechávat. Bod (iv) znamená, že v Nim-sčítání je každý prvek opačný sám k sobě. Bod (v) budeme často mlčky využívat při hledání „vítězných“ tahů (tahů vedoucích do P pozic).

Tvrzení 4 (Pravidlo krácení). *Pokud pro nezáporná celá čísla x, y, z platí rovnost $x \oplus y = x \oplus z$, potom nutně $y = z$.*

Důkaz. Přičtením x k oběma stranám rovnice $x \oplus y = x \oplus z$ dostaneme rovnici $x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z$. Potom ze vztahů $x \oplus x = 0$, $0 \oplus y = y$ a $0 \oplus z = z$ (viz Tvrzení 3) už vyplývá $y = z$. ♣

Nyní již vše potřebné o dvojkové soustavě a Nim-sčítání známe, proto si to pojďme procvičit na pár příkladech a pak zpátky k teorii her.

Cvičení. Kolik je $41 \oplus 13$?

Cvičení. Kolik je $5 \oplus 14 \oplus 24$?

Cvičení. Nalezněte x , pro které platí, že $57 \oplus x = 42$.

Cvičení. Nalezněte x , pro které platí, že $x \oplus 7 \oplus 20 \oplus 25 = 10$.

Cvičení. Pro jaká x, y platí, že $x \oplus y = x + y$?

Jak vyhrát Nim

Následující větu dokázal v roce 1902 Charles L. Bouton. Na první pohled není jasné, jak spolu souvisí Nim (Hra 34) a binární zápis čísel, ale nenechte se tím zmást. Funguje to!

Věta 5 (Bouton). *Ve hře Nim s n hromádkami je pozice (x_1, x_2, \dots, x_n) prohrávající právě tehdy, když je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek roven nule, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.*

Důkaz. Označme symbolem \mathcal{P} množinu všech pozic, pro něž je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek nulový, a symbolem \mathcal{V} množinu všech pozic, pro něž je Nim-součet velikostí hromádek nenulový.

Podle pravidel Nimu je jediná koncová pozice – $(0, 0, \dots, 0)$ – prohrávající. To je zcela v souladu s tím, že $0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$, tedy pro koncové pozice tvrzení platí. Dále se budeme zabývat pouze nekoncovými pozicemi.

Potřebujeme tedy dokázat jednak to, že

(A) z každé pozice z množiny \mathcal{P} vedou přípustné tahy pouze do pozic z množiny \mathcal{V} (což je charakteristika prohrávajících pozic – viz první díl seriálu),

a jednak to, že

(B) z každé pozice z množiny \mathcal{V} existuje alespoň jeden tah do nějaké pozice z množiny \mathcal{P} (což je pro změnu charakteristika vyhrávajících pozic).

Část (A): Uvažujme pozici (x_1, x_2, \dots, x_n) z množiny \mathcal{P} . Ve svém tahu si hráč vybere jednu z hromádek a sníží v ní počet sirek na x' . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se rozhodl pro první hromádku, v opačném případě

stačí hromádky přeznačit. Vzhledem k pravidlům musí odebrat alespoň jednu sirku, a tedy $x' < x_1$.

Kdyby výsledná pozice (x', x_2, \dots, x_n) patřila rovněž do množiny \mathcal{P} , platilo by

$$x' \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0 = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$

a podle Pravidla krácení (Tvrzení 4) by bylo $x' = x_1$. To je ovšem spor, protože musí platit $x' \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \neq 0$. Libovolný tah z pozice z množiny \mathcal{P} tedy vede vždy do pozice z množiny \mathcal{V} .

Část (B): Mějme pozici (x_1, x_2, \dots, x_n) z množiny \mathcal{V} . Zapišme si čísla x_1 až x_n ve dvojkové soustavě pod sebe tak, aby ve stejném sloupci byly odpovídající si řády. Jelikož je Nim-součet všech čísel nenulový, musí existovat sloupec, ve kterém je lichý počet jedniček. Z takových sloupců si vezměme ten, který je nejvíc vlevo (což je sloupec odpovídající nejvyšší mocnině dvojky) a jedno z čísel, které má v tomto sloupci jedničku, změňme tak, aby byl počet jedniček v každém sloupci sudý. Tím jsme dané číslo určitě zmenšili, neboť změna na nejvýznamnější pozici (tedy na pozici odpovídající největší mocnině dvojky) byla z 1 na 0. Tudíž takový tah je podle pravidel a jedná se o tah do pozice z \mathcal{P} .

Tím jsme dokázali, že prohrávající pozice jsou právě ty, pro něž je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek nulový. ♣

Myšlenka důkazu. V zápisu velikostí hromádek ve dvojkové soustavě a hledání sloupců co nejvíc nalevo se správným počtem jedniček se může ztratit hlavní myšlenka důkazu. Zkusme se na ni podívat z trochu jiného úhlu.

Pokud hrajeme se dvěma hromádkami, rozmysleli jsme si už, že prohrávající pozice jsou ty se stejně velkými hromádkami. Opět je za tím skryta myšlenka párování a obarvování, se kterou jsme se seznámili v předchozím dílu – totiž mít protitah na každý protivníkův tah. Důležité v této části bylo to, že hromádky jsou dvě, což je sudé číslo.

Pokud hrajeme s více hromádkami, pak si každou z nich můžeme rozdělit na „podhromádky“ podle binárního zápisu (takže například z hromádky o velikosti 11 uděláme tři menší o 1, 2 a 8 sirkách). V tuto chvíli odpovídají prohrávajícím pozicím opět právě ty, ve kterých se každý typ podhromádky vyskytuje „sudekrát“. Z vlastností zápisu čísla ve dvojkové soustavě plyne, že v každé hromádce je každý typ podhromádky zastoupen maximálně jednou – nemůže se tedy stát, že by hráč ve svém tahu odebral nenulový počet serek z jedné hromádky a přitom nepozměnil „súdo-lichou bilanci“.

Neméně důležité je to, že podhromádku o velikosti 2^n umíme rozdělit na podhromádky o velikostech 1, 2 až 2^{n-1} a ještě nám zbude jedna sirka, kterou beztak musíme ve svém tahu odebrat. Vybereme-li si tedy podhromádku s 2^n sirkami, můžeme jejím přeskupením změnit „súdo-lichou bilanci“ ve všech menších podhromádkách. ♡

Poznámka. Všimněme si jedné zajímavosti – počet možných tahů z V pozice do nějaké P pozice odpovídá počtu jedniček ve sloupci nejvíc nalevo s lichým počtem jedniček. To jinými slovy znamená, že z V pozice vede vždy lichý počet vítězných tahů.

Poznámka. Díky právě dokázané větě můžeme nejen rychle určit, je-li daná pozice V, či P, ale také kýžený tah z V pozice do P pozice najít. Zkusme si to na příkladu.

Příklad. Je pozice (12, 9, 8, 3) prohrávající? Pokud není, nalezněte tah vedoucí do P pozice.

Řešení. Spočtěme Nim-součet jednotlivých hromádek:

$$\begin{array}{r} 12 = 1100_2 \\ 9 = 1001_2 \\ 8 = 1000_2 \\ 3 = 0011_2 \\ \hline 12 \oplus 9 \oplus 8 \oplus 3 = 1110_2 \end{array}$$

Výsledek je nenulový, jedná se tudíž o vyhrávající pozici. Teď potřebujeme najít nějaký vítězný tah, tedy změnit (zmenšit) jednu z hromádek tak, aby v binárním zápise byl v každém sloupci sudý počet jedniček. Jedním možným tahem je odebrání deseti serek z první hromádky. Potom na ní totiž zbudou dvě sirky a Nim-součet pozice (2,9,8,3) je nulový:

$$\begin{array}{r} 2 = 0010_2 \\ 9 = 1001_2 \\ 8 = 1000_2 \\ 3 = 0011_2 \\ \hline 2 \oplus 9 \oplus 8 \oplus 3 = 0000_2 \end{array}$$

Podle předchozí věty existují ještě dva jiné tahy z pozice (12, 9, 8, 3) do nějaké P pozice, v prvním sloupci zleva jsou totiž tři jedničky. Ověřte, že odebráním dvou serek ze třetí hromádky získáte P pozici. Jaký je třetí možný vítězný tah?



Cvičení. Je pozice (12, 19, 27) prohrávající? Pokud není, nalezněte všechny vítězné tahy čili tahy vedoucí do P pozice.

Cvičení. Jak spolu souvisejí hry (a, b, c) a $(a, b, c, 10, 10)$ pro libovolná přirozená čísla a, b, c ?

Cvičení. Znáte-li pozice ve hře (3, 5, 6) a nyní hraje hru (3, 5, 6, 9, 13, 21), je nutné rozebírat celou hru, nebo by stačilo zjistit, jak se hraje (9, 13, 21) a „hrát každou hru zvlášť“? Fungovalo by to i v případě, že by pozice (3, 5, 6) nebyla prohrávající?

Cvičení. Zahrajte si s někým Nim a trénujte hledání vítězných tahů.

Nim v převleku

Ve chvíli, kdy umíme hrát (a z každé vyhrávající pozice také skutečně vyhrát) Nim, umíme rázem hrát širokou škálu dalších her (alespoň teoreticky), neboť velká část konečných kombinatorických her se dá na Nim převést. Co to přesně znamená a jak se něco takového dokáže, si povíme v dalších podkapitolách. Teď zkusme najít vyhrávající strategie v následujících hrách. Nápověda je jasná – alespoň zčásti je v nich ukrytý Nim.

Hra 35 (Želvy). V řadě za sebou stojí/leží n želv. Každá želva buď stojí, tedy je nahoru krunýřem (značíme písmenem K), nebo je vzhůru nohama (značíme písmenem N). Jedna z možných pozic pro deset želv je znázorněna v následující tabulce.

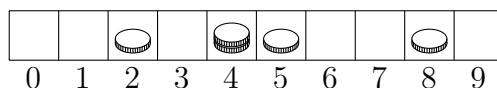
K	K	N	K	N	N	N	K	N	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dva hráči střídavě želvy obracejí. V jednom tahu si hráč vybere želvu, která je vzhůru nohama, obrátí ji nahoru krunýřem, a pokud chce, může ještě převrátit jednu libovolnou želvu nalevo od ní – ať už je nahoru krunýřem, nebo nohama. Hráč, který už nemůže převrátit žádnou želvu (všechny stojí na nohou), prohrál. ([2], strana I – 12)

Řešení. Místo želvy ležící na n -tém místě nohama nahoru si můžeme představit hromádku o n mincích. Pozice v předchozí tabulce v tu chvíli odpovídá nimové pozici $(3, 5, 6, 7, 9)$, a tedy by měla být vyhrávající. Z této nimové pozice vede pouze jeden tah do prohrávající pozice – vzít dvě mince z poslední hromádky. Je v tom ale jeden háček. V Želvách je na každém políčku vždy právě jedna želva – nemůžeme mít dvě želvy vzhůru nohama, které by značily dvě hromádky o velikosti 7.

Naštěstí v Nimu platí, že jsou-li ve hře dvě hromádky stejné velikosti, hra se nezmění, pokud obě hromádky odstraníme. To nahlédneme snadno díky tomu, že Nim-součet dvou stejných čísel je roven nule, a tedy neovlivní, zda se jedná o V či P pozici. Případně si stačí uvědomit, že pokud soupeř sebere sirky z jedné ze stejných hromádek, můžeme sebrat stejný počet z druhé hromádky, čímž obě zmenšíme, ale zbytek hry tím neovlivníme. Tím pádem pokud nám taktika v klasickém Nimu radí „hromádku o velikosti m zmenši na hromádku o velikosti p “, bude naším tahem v Želvách „otoč želvu na m -té pozici krunýřem nahoru a dále otoč želvu na p -té pozici – bez ohledu na to, zda byla vzhůru krunýřem nebo nohama“. To jsou přesně tahy, které máme v Želvách povolené, tedy z výše uvedených důvodů hra dopadne stejně jako odpovídající Nim. ♠

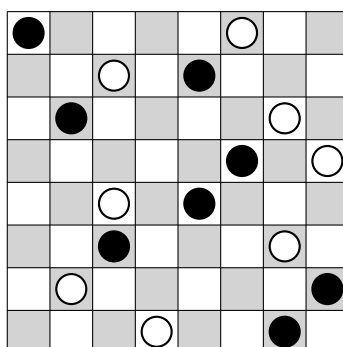
Hra 36. Mějme pásek polí očíslovaných $0, 1, 2, 3, \dots$ a na pásku konečný počet mincí. Každá mince je na nějakém políčku, přičemž na jednom políčku jich může být i více – třeba jako na následujícím obrázku.



Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere nějakou minci a posune ji na libovolné pole nalevo od původního. S mincemi, které leží na nultém poli, už nejde hrát. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([2], strana I – 12)

Hra 37 (Northcott). Northcottova hra se hraje na šachovnici, na jejímž každém řádku je umístěný právě jeden bílý kámen a právě jeden černý kámen. Dva

kameny nikdy nesmějí ležet na stejném poli. Jedna z možných pozic je znázorněna na následujícím obrázku.



Dva hráči – Bílý a Černý – se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, pohne jedním svým kamenem o libovolný počet polí doprava nebo doleva, přičemž nesmí opustit šachovnici ani přeskočit soupeřův kámen. Kdo nemůže hrát, prohrál. ([2], strana I – 12; [7], strana 54)

Poznámka. Northcottova hra sice není konečná, ale přesto má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

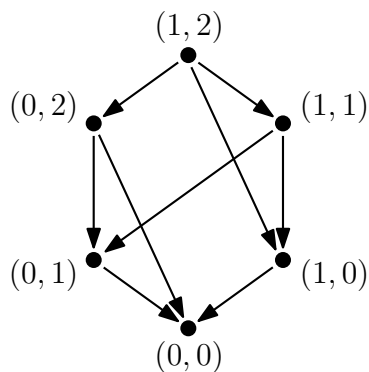
Hra 38 (Bídný Nim). Hraje se stejně jako klasický Nim s jedinou změnou – hráč, který nemůže táhnout, vyhrál. ([2], strana I – 11)

Hra 39 (Nim_k). Mějme pevně dané číslo k . Hra je podobná jako Nim – na stole je n hromádek sirek, dva hráči z nich střídavě odebírají. Tentokrát smí ale hráč ve svém tahu odebrat sirky až z k různých hromádek. Z každé hromádky může vzít libovolné množství, celkem však musí odebrat alespoň jednu sirku. ([2], strana I – 13)

Poznámka. Tuto variantu Nimu vymyslel v roce 1910 Eliakim Hastings Moore. Pro $k = 1$ se jedná o klasický Nim. Podobně jako v případě klasického Nimu se pro Nim_k dá dokázat, že pozice (x_1, x_2, \dots, x_n) je prohrávající právě tehdy, když v binárním zápise čísel x_1, x_2, \dots, x_n pod sebe je počet jedniček v každém sloupci dělitelný $k + 1$. Zkuste to dokázat!

Sprague–Grundyho funkce

Pozice a tahy v konečné kombinatorické hře si můžeme nakreslit jako „puntíky“ a odpovídající „šipky“ mezi nimi. Například pro Nim (1, 2) dostaneme následující schéma.



Takovému rozkreslení říkáme *graf hry*,¹⁹ ony „puntíky“ nazýváme *vrcholy*, „šipky“ určující možné tahy nazýváme *orientované hrany*. *Následníky* vrcholu p rozumíme všechny vrcholy, do kterých vede z p hrana (čili všechny pozice, do kterých se lze z pozice p dostat jedním tahem). Množinu následníků vrcholu (pozice) p budeme značit $N(p)$. Pro koncové pozice je $N(\cdot)$ prázdná množina.

Na konečnou kombinatorickou hru se tedy můžeme dívat i jako na dvojici (X, N) , kde X je množina všech pozic a N je funkce přiřazující pozici její následníky (přesně podle pravidel hry).

Nyní už nám nic nebrání v definování Sprague–Grundyho funkce.

Definice. *Sprague–Grundyho funkce* hry (X, N) je funkce g přiřazující pozici $p \in X$ nejmenší celé nezáporné číslo, které není Sprague–Grundyho hodnotou žádného z jejích následníků, neboli

$$g(p) = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(p)\}.$$

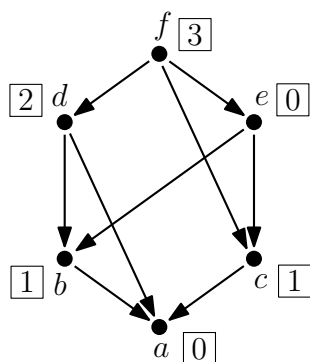
Namísto celého názvu Sprague–Grundy budeme pro zkrácení psát často jen *SG*.

Stejně jako v případě V a P pozic definujeme hodnoty *SG* funkce „od konce“. Pokud už pro nějakou pozici známe hodnotu *SG* funkce všech jejích následníků, můžeme určit i její *SG* hodnotu. *SG* hodnota koncových pozic je z definice nulová.

Ještě poznamenejme, že v grafu konečné hry se zjevně nemohou vyskytovat žádné „cykly“ – jakmile jednou pozici opustíme, už se do ní nikdy nemůžeme vrátit.

Příklad. Nalezněte *SG* funkci pro Nim s počáteční pozicí $(1, 2)$.

Řešení. Máme-li hledat *SG* funkci a graf hry není příliš rozsáhlý, je nejjednodušší si ho nakreslit a přesně podle definice postupovat od koncových vrcholů dál. Graf je shodný s grafem v úvodu podkapitoly, pouze vynecháme popisky a budeme k vrcholům připisovat hodnoty *SG* funkce. Koneckonců, máme-li graf hry, nepotřebujeme vlastně vědět, ze které hry vznikl – všechny podstatné informace jsou v něm zanesené.



Koncový vrchol je jediný (na obrázku je označen písmenem a) a má *SG* hodnotu 0. Pro vrcholy b a c platí, že a je jejich jediný následník, tedy můžeme určit i jejich *SG* hodnotu: $g(b) = g(c) = 1$. Vrchol d má za následníky vrchol a s *SG* hodnotou 0 a vrchol b s *SG* hodnotou 1, tedy $g(d) = 2$. Vrchol e má rovněž dva následníky – vrcholy b a c , tentokrát je ale $g(b) = g(c) = 1$, a tudíž $g(e) = 0$.

¹⁹ Nepleťte si graf hry s grafem funkce, jedná se o zcela odlišný pojem. Grafy (těmi, co nejsou grafy funkce) se dokonce zabývá celé odvětví matematiky – teorie grafů.

Nakonec vrchol f má za následníky vrcholy c , d a e , přičemž $g(c) = 1$, $g(d) = 2$ a $g(e) = 0$, a tím pádem $g(f) = 3$. ♠

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim o jedné hromádce velikosti n .

Definice. O kombinatorické hře řekneme, že je *progresivně omezená*, pokud existuje takové přirozené číslo m , že každá hra skončí nejvýše po m tazích bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Je zřejmé, že nekonečné hry progresivně omezené nejsou. Existují ale i konečné hry, které nejsou progresivně omezené – například ta následující. Nedejte se zmást tím, že pokud bude chtít druhý hráč vyhrát, může hru ukončit ve chvíli, kdy se poprvé dostane na tah. V definici progresivní omezenosti nezohledňujeme to, jak „může být hra rychlá“, nýbrž „jak může být pomalá“.

Hra 40 (Nim[∞]). První hráč ve svém prvním tahu zvolí přirozené číslo n . Poté se hraje klasický Nim s jednou hromádkou o n sirkách. ([2], strana I – 17)

V tomto dílu seriálu se budeme dále zabývat jen hrami, které progresivně omezené jsou. Nim mezi ně zjevně patří – pro počáteční pozici (x_1, x_2, \dots, x_n) skončí každá partie nejpozději po $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ tazích, jelikož každým tahem ubude minimálně jedna sirka.

A proč nás zajímají pouze progresivně omezené hry? Protože **pro každou progresivně omezenou hru existuje SG funkce, která je navíc jednoznačně určena!** Dokázat to není těžké – hodnoty SG funkce definujeme od koncových pozic a díky progresivní omezenosti budou mít všechny pozice konečnou hodnotu.

Pokud hra není progresivně omezená, SG funkce pro ni existovat může, nicméně teorie kolem jejího zavedení je o něco složitější a my se jí v seriálu věnovat nebudeme.

Definice. Hram, ve kterých prohrává hráč nemající tah (neboli všechny koncové pozice jsou prohrávající) říkáme *normální* (anglicky *under the normal play rule*). Pokud naopak hráč nemající tah vyhrává (koncové pozice jsou vyhrávající) nazýváme hru *bídnou* (anglicky *under the misère play rule*).

Pozorování. Pro normální hru platí, že prohrávající pozice přesně odpovídají pozicím, ve kterých je SG funkce nulová.

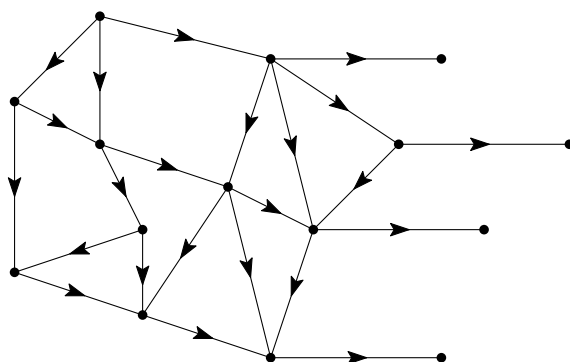
Důkaz. Stačí ověřit, že z každé pozice s nulovou SG hodnotou vedou tahy pouze do pozic s kladnou SG hodnotou a že z každé pozice s kladnou SG hodnotou vede alespoň jeden tah do pozice s nulovou SG hodnotou. To ovšem plyne přímo z definice SG funkce! ♣

Pro progresivně omezené normální hry se nám tedy pomocí SG funkce podařilo přiřadit každé pozici nezáporné celé číslo, přičemž kladným hodnotám odpovídají V pozice a nulovým P pozice.

Může se zdát, že jsme odvedli nezanedbatelný kus práce a přitom jsme zavedením SG funkce nezískali nic nového. Nenechte se mýlit – právě SG funkce nám v následující podkapitole umožní hry sčítat.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Hru 2 z minulého dílu seriálu (na stole je 15 serek, hráči střídající se v tazích mohou odebrat 1 až 4 sirky, kdo nemůže táhnout, prohrál).

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro hru s následujícím grafem.



([2], strana I – 18)

Sčítání her

Součet her zavedeme pouze pro progresivně omezené normální kombinatorické hry. Pro takové hry totiž existuje jednoznačná SG funkce taková, že prohrávajícím pozicím odpovídají právě pozice s nulovou SG hodnotou – viz výše.

Vybudovat teorii pro bídné hry je mnohem obtížnější. Občas je sice možné řešení bídné varianty převést jen s malými změnami na řešení normální varianty (to platí například pro příznačně pojmenovaný Bídný Nim (viz Hra 38)), mnohdy je ale převedení obtížné, či dokonce dosud není známé.

Až do konce tohoto dílu tedy budeme hrou vždy rozumět progresivně omezenou normální kombinatorickou hru, aniž bychom to explicitně vypisovali. Nejdřív jedna formální definice:

Definice. Mějme n her H_1 až H_n ve formě grafu, tedy $H_1 = (X_1, N_1)$, $H_2 = (X_2, N_2)$, \dots , $H_n = (X_n, N_n)$. Součtem her H_1 až H_n je taková hra $H = (X, N)$, pro kterou

- (A) množina všech jejích vrcholů je kartézský součin $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ čili množina všech uspořádaných n -tic $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, \dots , $x_n \in X_n$,
- (B) následníci vrcholu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ jsou prvky množiny

$$\begin{aligned}
 N(x) = N(x_1, x_2, \dots, x_n) = & N_1(x_1) \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\} \\
 & \cup \{x_1\} \times N_2(x_2) \times \dots \times \{x_n\} \\
 & \cup \dots \\
 & \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times N_n(x_n).
 \end{aligned}$$

Součet her značíme také $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$.

Jak si předchozí definici vyložit? Součtem n her je jedna nová hra – její pozice jsou všechny možné n -tice pozic z původních her (vždy takové, že v první složce je nějaká pozice z první hry, ve druhé z druhé, \dots a v poslední složce je nějaká pozice z n -té hry). Tah v součtu her sestává z výběru jedné hry, ve které chceme zrovna hrát, a v zahrání tahu podle jejích pravidel. Následníky pozice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

jsou tedy všechny pozice, které se od x liší pouze v jedné (i -té) složce, a to tak, že pokud se hráč rozhodl hrát ve hře $H_i = (X_i, N_i)$, je \bar{x}_i následníkem pozice x_i .

Součet pěti her si můžeme představit také tak, že mezi námi a protihráčem je pět stolů a na každém jedna hra, přičemž se v každém tahu rozhodneme, na kterém stole zrovna chceme hrát (stejně svobodně se rozhoduje i soupeř – obecně ho nic nenutí „odpovídat“ na náš tah tahem na stejném stole).

Poznámka. Jsou-li všechny hry H_1 až H_n normální a progresivně omezené, je jejich součet rovněž normální a progresivně omezený. Normálnost nahlédneme snadno – prohrává právě ten, kdo nemůže udělat tah, čili nemůže udělat tah ani v jedné hře.

Pokud hra H_1 skončí nejvýše po m_1 tazích, hra H_2 nejvýše po m_2 tazích, \dots , pak hra $H_1 + H_2 + \dots + H_n$ skončí nejvýše po $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ tazích, tudíž je progresivně omezená.

Příklad. Na Nim s n hromádkami (x_1, x_2, \dots, x_n) můžeme nahlížet jako na součet n Nimů s jednou hromádkou postupně o velikosti x_1 až x_n . Z toho je patrné, že ačkoliv jednotlivé hry mohou být triviální (nad tím, jak vyhrát jednohromádkový Nim, není třeba se nějak zvlášť zamýšlet), jejich součet může být výrazně komplikovanější.

Následující věta nám umožní zjišťovat SG funkci součtu her. Myšlenka je jednoduchá – SG funkce součtu her je Nim-součet SG funkcí jednotlivých částí. Připomeňme, že Nim-součet značíme symbolem \oplus .

Důkaz je podobný důkazu Věty 5. Pro zdárné řešení seriálových úloh není nutné mu porozumět, nicméně samozřejmě pomáhá hlubšímu pochopení toho, „o co vlastně v teorii her kráčí“.

Věta 6 (Sprague–Grundy). *Bud' g_i SG funkce hry H_i pro $i = 1, \dots, n$. Pak součet her $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ má SG funkci*

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n).$$

Důkaz. Bud' $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ libovolná pozice ve hře H . Označme

$$b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n).$$

Potřebujeme ověřit následující dvě vlastnosti funkce $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

- (A) Pro každé nezáporné celé číslo $a < b$ existuje následník y pozice x , pro nějž $g(y) = a$.
- (B) Neexistuje následník pozice x , v němž by funkce g nabývala hodnoty b .

Potom totiž SG hodnota pozice x musí být z definice SG funkce rovna b .

Část (A): Označme $d = a \oplus b$. Jelikož $a < b$, je d nenulové. Označme k počet cifer v binárním zápisu čísla d (tedy d má první cifru 1 na k -té pozici zprava). Protože $a < b$, má b v binárním zápisu na k -té pozici zprava cifru 1 a a cifru 0.

Jelikož $b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n)$, tak přinejmenším pro jedno x_i platí, že $g_i(x_i)$ má v binárním zápisu na k -té pozici zprava cifru 1. Pro jednoduchost předpokládejme, že to platí pro $i = 1$. Tím pádem $d \oplus g_1(x_1) < g_1(x_1)$, a jelikož g_1 je SG funkce, musí existovat tah ve hře H_1 z pozice x_1 do nějaké pozice \bar{x}_1 , pro kterou je $g_1(\bar{x}_1) = d \oplus g_1(x_1)$.

V takovém případě je tah z pozice (x_1, x_2, \dots, x_n) do pozice $(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n)$ legálním tahem ve hře H a platí

$$g_1(\bar{x}_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) = d \oplus g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a.$$

Část (B): Pro spor předpokládejme, že ve hře H existuje následník pozice (x_1, x_2, \dots, x_n) , v němž má funkce g stejnou hodnotu. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tah proběhl v první hře, tedy že $(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_n)$ je následníkem pozice (x_1, x_2, \dots, x_n) a přitom

$$g_1(\bar{x}_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \dots \oplus g_n(x_n).$$

Z Pravidla krácení (Tvrzení 4) ovšem plyne $g_1(\bar{x}_1) = g_1(x_1)$, což je spor, neboť g_1 je SG funkce hry H_1 a jako taková nemůže nabývat stejné hodnoty zároveň v některé pozici a v jejím následníkovi. ♣

Uvědomme si, co z právě dokázané věty plyne – každá progresivně omezená normální hra, pokud ji uvažujeme jako součást součtu her, se chová jako nějaká „nimová hromádka“. Jinými slovy, každou takovou hru můžeme nahradit nimovou hromádkou se stejným počtem sirek, jako byla hodnota SG funkce, aniž bychom změnil výsledek. Díky tomu můžeme zformulovat následující zajímavý závěr.

Důsledek. Každá progresivně omezená normální hra je ekvivalentní nějaké nimové hromádce.

Cvičení. Pokud jste ne(vy)řešili druhé a třetí cvičení v podkapitole *Jak vyhrát Nim*, zkuste je teď.

Hra 41. Na stole je hromádka n sirek, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu lze z hromádky odebrat buď libovolný sudý počet sirek, ne však celou hromádku, nebo všechny sirky, pokud jich je lichý počet. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([2], strana I – 23)

Řešení. Ve hře jsou dvě koncové pozice, a to 0 a 2. Spočítejme nejprve SG funkci pro malá n .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(x)$	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5

Zdá se, že $g(2k) = k - 1$ a $g(2k - 1) = k$ pro všechna celá $k \geq 1$. Dokažme to pořádně.

Pozice 0 a 2 jsou koncové pozice v normální hře, tudíž $g(0) = g(2) = 0$. Hodnoty SG funkce odvodíme pomocí matematické indukce, zvláště pro liché a sudé pozice.

Předpokládejme tedy, že hodnoty funkce g odpovídají našemu pozorování až do pozice $2k - 2$ včetně.

Z pozice $2k$ vedou tahy do všech sudých pozic s menším počtem sirek (s výjimkou pozice 0) a dle definice platí

$$\begin{aligned} g(2k) &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(2k)\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in \{2, 4, 6, \dots, 2k - 2\}\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(2m) \text{ pro } m = 1, 2, \dots, k - 1\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq m - 1 \text{ pro } m = 1, 2, \dots, k - 1\} \\ &= k - 1, \end{aligned}$$

kde jsme při přechodu mezi třetím a čtvrtým řádkem využili indukčního předpokladu.

Z pozice $2k - 1$ vedou tahy jednak do všech lichých pozic s menším počtem sirek a jednak do pozice 0. Podle definice tedy

$$\begin{aligned} g(2k - 1) &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(2k - 1)\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in \{0, 1, 3, 5, \dots, 2k - 3\}\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq 0, n \neq g(2m - 1) \text{ pro } m = 1, 2, \dots, k - 1\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n > 0, n \neq m \text{ pro } m = 1, 2, \dots, k - 1\} \\ &= k, \end{aligned}$$

kde jsme při přechodu mezi třetím a čtvrtým řádkem opět využili indukčního předpokladu.

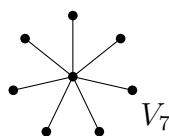
Náš předpoklad byl tedy správný a skutečně pro SG funkci této hry platí $g(2k) = k - 1$, $g(2k - 1) = k$ pro všechna celá $k \geq 1$ a $g(0) = 0$. ♠

Cvičení. Nalezněte SG funkce (a tím pádem i vyhrávající strategie) v následujících hrách – pokud ne pro obecný případ, tak alespoň pro malá n . Všechny hry jsou normální, neboli kdo nemůže táhnout, prohrál. Nezapomeňte rovněž, že nestačí „myslet si“, jak SG funkce vypadá – je třeba to i správně odůvodnit (dokázat).

Hra 42. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze odebrat libovolný sudý počet sirek z jedné hromádky, nebo libovolnou hromádku, na které už je jen jedna sirka. ([2], strana I – 26)

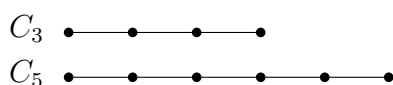
Hra 43. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze buď odebrat libovolné množství sirek z jedné hromádky, nebo jednu hromádku rozdělit na dvě neprázdné hromádky (v takovém případě hráč žádné sirky nebere). ([2], strana I – 23)

Hra 44 (Vločka). Hra začíná s vločkou V_n o n ramenech – na následujícím obrázku je znázorněna vločka se sedmi rameny.



Jedná se vlastně o graf s $n + 1$ vrcholy. V jednom tahu hráč smaže jeden vrchol a všechny hrany s ním spojené. V každém tahu musí být smazána alespoň jedna hrana, čili nelze smazat vrchol, který již není „spojený“ s žádným jiným. ([2], strana I – 27)

Hra 45 (Cesta). Hra je stejná jako ta předchozí, ale počátečním grafem není vločka, nýbrž cesta C_n , což je $n + 1$ vrcholů pospojovaných „za sebou“ n hranami. Na obrázku je příklad cest C_3 a C_5 .



([2], strana I – 27)

Obdobně lze hrát další hry – vymýšlení nových a kombinování starých se meze nekladou!

Zadání 2. seriálové série

Úloha 4. Anča s Lukášem hrají hru na schodišti s 2013 schody. Na začátku je na stupních schodiště rozmístěno konečně mnoho mincí (nemusí být na každém schodu, na jednom schodu jich může být více). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolný počet mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Anča začíná, oba se pravidelně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Rozhodněte (a dokažte), které pozice v této hře jsou vyhrávající a které prohrávající. ([2], strana I – 13)

Úloha 5. Na stole je hromádka sirek, dva hráči se postupně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál. Ve svém tahu musí hráč odebrat alespoň jednu sirku a zároveň smí z hromádky o n sirkách odebrat c sirek pouze tehdy, je-li číslo c dělitelem n (včetně 1 a n).

Nalezněte SG funkci této hry a dokažte, že vámi nalezená SG funkce je správná. ([2], strana I – 19)

Úloha 6. Za dlouhých zimních večerů vymyslel Viktor následující hru: Na začátku hry je v rovině rozmístěno konečně mnoho teček, některé z nich mohou být pospojovány neprotínajícími se uzavřenými křivkami. Tah sestává z nakreslení uzavřené křivky procházející minimálně jednou tečkou a neprotínající²⁰ jiné křivky ani sama sebe. Jednou tečkou může procházet nejvýše jedna křivka. Hráči se střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Pomozte Viktorovi a určete, které pozice jsou vyhrávající a které prohrávající. ([2], strana I – 27)

²⁰ Dotyk křivek taktéž není povolen.

Řešení 2. seriálové série

Řešení jsou doplněna o poznámky opravovatele, které vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS. První úlohu opravil a vzorové řešení sepsal Josef Tkadlec, druhou úlohu opravil a vzorové řešení sepsal Miroslav Olšák.

Úloha 4. Očíslujme schody zdola čísly $1, 2, \dots, 2013$. Ukážeme, že na počtech mincí na sudých schodech nezáleží a prohrávající pozice jsou právě ty, v nichž je Nim-součet počtů mincí na lichých schodech nulový. Takovým pozicím říkáme *špatné*, ostatním *dobré*.

Hra je zřejmě konečná a jediná koncová pozice je současně prohrávající a špatná. Stačí tedy dokázat, že z každé špatné pozice vedou tahy jen do dobrých pozic a naopak že z každé dobré pozice vede alespoň jeden tah do nějaké špatné pozice. To bude znamenat, že špatné pozice splývají s prohrávajícími a dobré s vyhrávajícími.

Uvažme nějakou špatnou pozici. Jelikož libovolným tahem se změní počet mincí na právě jednom lichém schodu, změní se přesně jeden sčítanec námi zkoumaného Nim-součtu, a tedy i jeho hodnota. Byla-li předtím nulová, rozhodně nulová nezůstane a výsledná pozice bude dobrá.

Teď naopak uvažme nějakou dobrou pozici. Předpokládejme tedy, že na lichých schodech leží postupně $p_1, p_3, \dots, p_{2013}$ mincí a platí $p_1 \oplus p_3 \oplus \dots \oplus p_{2013} \neq 0$. To znamená, že v klasickém Nimu je pozice s 1007 hromádkami sirek o velikostech $p_1, p_3, \dots, p_{2013}$ vyhrávající a podle seriálu existuje tah, jímž se Nim-součet vynuluje. Pokud je tímto tahem odebrání s sirek z hromádky o velikosti p_{2k-1} ($k \in \mathbb{N}$), stačí v naší původní hře přesunout s mincí ze schodu číslo $2k-1$ na schod s číslem $2k-2$. Jsme hotovi.

Poznámka. Většina z vás si uvědomila, že pozice, v nichž jsou všechny mince jen na sudých schodech, jsou prohrávající, neboť shodí-li první hráč m mincí z některého sudého schodu na lichý, může druhý hráč shodit tytéž mince ještě o schod níž, a prvního hráče tak po konečně mnoha (!) „dvojtazích“ dovede až k nevyhnutelné záhubě. K prozření, že stačí hrát běžný Nim na lichých schodech (a na případné tahy ze sudých schodů na liché reagovat jako výše) už pak nebylo tak daleko.

Úloha 5. Definujeme funkci g následujícím způsobem: pro $g(0) = 0$ a dále pro přirozené číslo n je hodnota $g(n)$ o 1 vyšší než počet dvojek v prvočíselném rozkladu čísla n . Ukážeme, že tato funkce odpovídá definici SG funkce (číslem n myslíme pozici ve hře s n sirkami).

V nule je hodnota SG funkce rovna nule, protože jde o koncovou pozici. Dále uvažujme $n \geq 1$. Je třeba ověřit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$g(n) = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0, k \neq g(n - n') \text{ pro žádné}^{21} n' \mid n\}.$$

Číslo n zapíšeme ve tvaru $2^{k-1} \cdot l$, kde l je liché a $k = g(n)$. Zbývá si rozmyslet:

- (i) Pro libovolné celé k' , kde $0 \leq k' < k$, existuje dělitel n' čísla n , pro který platí $g(n - n') = k'$. Skutečně, je-li $k' = 0$, volíme $n' = n$. V opačném případě volíme $n' = 2^{k'-1}$, pak totiž $n - n' = 2^{k'-1}(2^{k-k'}l - 1)$, kde výraz v závorce je lichý.
- (ii) Neexistuje n' , pro které $g(n - n') = k$. To dokážeme sporem, předpokládejme, že platí $n - n' = 2^{k-1} \cdot l'$, kde l' je liché a n' je dělitel čísla n . Pak by ale číslo $n' = 2^{k-1}(l - l')$ obsahovalo v prvočíselném rozkladu alespoň k dvojek, protože výraz v závorce je sudý. To je ve sporu s předpokladem, že $n' \mid n$.

Poznámka. Šlo o vcelku jednoduchou úlohu na pochopení definice SG funkce. Rád bych k řešení podotknul, že opravdu není potřeba zvlášť důkaz pro $k = 1$ a $k = 2$, zato by měl v řešení být důkaz pro obecné k .

Dále dělalo některým řešitelům problémy ujasnit, co definují a co dokazují. Je možné definovat g jako ve vzorovém řešení a pak o této funkci dokázat, že je SG funkcí. V takovém případě ale nedokazujeme $g(2^k l) = k + 1$, jelikož jsme to tak už definovali. Druhá možnost je definovat g přímo jako SG funkci, jejíž hodnoty ale zpočátku neznáme. Pro důkaz $g(2^k l) = k + 1$ pak potřebujeme vědět, že na nižších hodnotách už má g tuto vlastnost, neboli ve skutečnosti dokazujeme indukci.

Úloha 6. Hru si můžeme přeformulovat do následující podoby: Je dáno několik hromádek serek (počtu serek v jedné hromádce odpovídá počet teček v jedné souvislé oblasti), ve svém tahu hráč musí odebrat z jedné hromádky alespoň jednu sirku (vytvořená křivka prochází alespoň jednou tečkou) a pokud chce, může zbylé sirky rozdělit na dvě nové hromádky (část teček novou křivkou oddělí od zbývajících). Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Prvně si uvědomme, že Nim-součet dvou čísel je vždycky menší nebo roven jejich klasickému součtu (v klasickém součtu se totiž nic „neztrácí“ – v případě součtu dvou jedniček jejich hodnotu přeneseme do dalšího řádu).

Dokažme, že prohrávající pozice jsou ty, pro které je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek nulový, a vyhrávající ty, pro které je nenulový. K tomu potřebujeme ověřit:

- (i) Je-li Nim-součet nulový, nelze táhnout do pozice s nulovým Nim-součtem. Vskutku, mějme pozici (x_1, x_2, \dots, x_n) s $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$. Rozdělíme-li BÚNO²² první hromádku na dvě nezáporné o velikostech y, z , je $y + z < x_1$ a z výše zmíněného pozorování plyne $y \oplus z < x_1$. Aby měla nová pozice nulový Nim-součet, muselo by platit $y \oplus z \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$. Pak by ovšem z Pravidla krácení plynulo $y \oplus z = x_1$, což je spor.
- (ii) Je-li Nim součet nenulový, lze táhnout do pozice s nulovým Nim-součtem. To už je jednoduché. Nevyužijeme možnosti rozdělit hromádku na dvě

²¹ Symbolem $a \mid b$ rozumíme „ a dělí b “.

²² Bez újmy na obecnosti.

a provedeme tah jako v klasickém Nimu – ze seriálu víme, že požadovaný tah existuje.

Vyhrávající pozice jsou tedy právě ty, pro něž je Nim-součet počtu teček v jednotlivých oblastech roviny nenulový.

Poznámka. Kromě postupů podobných vzorovému se v řešeních objevila ještě varianta využívající SG funkci – klíčovými kroky bylo opět rozpoznat v úloze Nim s pozměněnými pravidly, uvědomit si nerovnost mezi klasickým součtem a Nim-součtem a ověřit, že tipnutá funkce skutečně splňuje vlastnosti, které činí SG funkci SG funkcí.

Teorie her – 3. díl

V tomto dílu opustíme oblast kombinatorických her, které jsme zkoumali dosud, a pustíme se do další velké skupiny – říkejme jí pracovně „maticové hry“. Hlavní rozdíl bude v tom, že zatímco v kombinatorických hrách se hráči pravidelně střídali v tazích, v maticových hrách táhnou oba/všichni hráči současně. Musíme tedy nějak odhadnout, jak bude hrát náš protihráč, přičemž v úvahu samozřejmě bereme i to, že protihráč zároveň uvažuje, jaký je nejvýhodnější tah pro nás v reakci na jeho námi očekávaný tah, a tak pořád dokola. Nebojte, z tohoto bludného kruhu se dá dostat.

Podotkněme ještě, že dělení na kombinatorické, maticové a další typy her není nijak striktní.

Matematizace reálného světa

Jak jsme si krátce nastínili v úvodu prvního dílu, teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. Pro každého hráče se snaží najít tu nejlepší strategii – postup, kterým dosáhne co nejlepšího výsledku. V předchozích dílech bylo jasné, co je oním kýženým výsledkem: vyhrát.

Pokud se chceme přiblížit popisu reálného světa a konfliktních situací v něm, musíme se nějak vypořádat s tím, co pro jednotlivé hráče znamená *dobrý*, *potazmo nejlepší* výsledek. Jelikož v matematice se špatně pracuje s výroky „vyhrát dvě hrušky je o trochu lepší, než vyhrát jedno jablko, a o hodně lepší, než vyhrát kokos“, ohodnotíme si všechny možné výsledky herní situace reálnými čísly tak, aby preferovanější výsledek měl větší číslo (hodnotu) než méně preferovaný. Pokud je pro hráče výsledek negativní, ohodnotíme ho záporným číslem. Vždyť ztráta je vlastně záporná výhra. Pokud by se jednalo například o sázky, mohli bychom za ohodnocení vzít přímo počet vyhraných nebo prohraných korun.

Stejný výsledek ale může mít pro různé hráče různou hodnotu. Uvažme hru, ve které lze vyhrát jednu ze tří cen

- (i) víkend v Paříži,
- (ii) víkend na Havaji,
- (iii) osm hodin v zubařském křesle.

Osoba zájímající se o francouzskou kulturu by mohla možné výhry ohodnotit postupně 100, 25 a -100 „body“. Naopak pro vášnivého surfaře mohou mít výhry cenu postupně 10, 100 a -100 .

Důležité je, že ve všech hrách (alespoň v těch, kterými se budeme zabývat) předpokládáme, že pro každého hráče známe jeho numerické ohodnocení všech možných výsledků.

Další úskalí, které nás v matematizaci reálné situace čeká, je ujasnit si, co znamená, že je jeden tah lepší než druhý. Chtělo by se říci, že „to je přece jasné, lepší je ten tah, který povede k hodnotnějšimu výsledku“, ale tak jednoduché jako v kombinatorických hrách to není. Velikou výhodou kombinatorických her je totiž pravidlo, že hráči táhnou postupně, a pokud mají dostatečnou výpočetní kapacitu na to, aby hru zanalyzovali až do konce, nic jim nebrání ve volbě toho tahu, který k nejhodnotnějšimu výsledku skutečně povede. V maticových hrách je situace odlišná – o svém tahu se rozhodujeme ve chvíli, kdy neznáme tahy ostatních hráčů a naopak oni neznají náš. Může se potom stát, že strategie, která je v jistém smyslu nejrozumnější, vede k výsledku, který není nejlepší (a dokonce existuje výsledek, který je ostře lepší pro všechny hráče zároveň). Příkladem budiž vězňovo dilema, ke kterému se dostaneme na závěr.

Hry v normálním tvaru

Až do konce seriálu se budeme zabývat *hrami v normálním tvaru*. Formální definici uvedeme na konci této podkapitoly, nyní se seznámme s potřebnými pojmy.

Mějme nějakou konfliktní situaci pro n hráčů, tedy hru. *Strategií* hráče budeme rozumět jednu konkrétní volbu, jak se v dané situaci zachovat.²³ Množinu všech strategií n -tého hráče budeme obecně značit S_n . V případě her dvou hráčů budeme množiny strategií značit S a T . V celém seriálu budeme uvažovat pouze konečné množiny strategií.

Pro každého hráče rovněž potřebujeme znát *výplatní funkci* u_k , tedy funkci, která k -tému hráči přiřadí jeho *výplatu* (ono subjektivní ohodnocení výsledku z povídání o matematizaci reálného světa) v závislosti na tom, jaké strategie jednotliví hráči zvolili. Pokud první hráč zvolil strategii $s_1 \in S_1$, druhý $s_2 \in S_2$, ..., n -tý $s_n \in S_n$, zapisujeme hodnotu výplatní funkce jako $u_k(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

V případě hry dvou hráčů s konečnými množinami strategií můžeme výplatní funkci pro každého z nich přehledně zaznamenat do *výplatní matice*. Hru zapisujeme vždy tak, že první hráč svojí volbou určuje řádky, druhý hráč sloupce. Výslednou výplatní funkci pak vyčteme z příslušné kolonky.

Pro kratší zápis se na chvíli omezme na případ, kdy první hráč má pouze dvě možné strategie ($S = \{s_1, s_2\}$) a druhý hráč tři ($T = \{t_1, t_2, t_3\}$). Výplatní matici prvního hráče budeme značit symbolem A_1 , výplatní matici druhého symbolem A_2 . Píšeme tedy

$$A_1 \quad \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ s_1 & \left(\begin{matrix} u_1(s_1, t_1) & u_1(s_1, t_2) & u_1(s_1, t_3) \\ u_1(s_2, t_1) & u_1(s_2, t_2) & u_1(s_2, t_3) \end{matrix} \right) \\ s_2 & \end{matrix}$$

²³ Pozor, nepleťte si tento pojem s pojmem vyhrávající/prohrávající strategie v kombinatorických hrách. V kombinatorických hrách byla strategií míněna celá **posloupnost** na sebe navazujících tahů.

$$\begin{array}{c}
A_2 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \\
s_1 \left(\begin{array}{ccc} u_2(s_1, t_1) & u_2(s_1, t_2) & u_2(s_1, t_3) \end{array} \right) \\
s_2 \left(\begin{array}{ccc} u_2(s_2, t_1) & u_2(s_2, t_2) & u_2(s_2, t_3) \end{array} \right),
\end{array}$$

popřípadě

$$\begin{array}{l}
A_1 = \left(\begin{array}{ccc} u_1(s_1, t_1) & u_1(s_1, t_2) & u_1(s_1, t_3) \\ u_1(s_2, t_1) & u_1(s_2, t_2) & u_1(s_2, t_3) \end{array} \right), \\
A_2 = \left(\begin{array}{ccc} u_2(s_1, t_1) & u_2(s_1, t_2) & u_2(s_1, t_3) \\ u_2(s_2, t_1) & u_2(s_2, t_2) & u_2(s_2, t_3) \end{array} \right).
\end{array}$$

Chceme-li ušetřit ještě více místa, můžeme použít výplatní dvojmatici A :

$$\begin{array}{c}
A \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \\
s_1 \left(\begin{array}{ccc} (u_1(s_1, t_1), u_2(s_1, t_1)) & (u_1(s_1, t_2), u_2(s_1, t_2)) & (u_1(s_1, t_3), u_2(s_1, t_3)) \end{array} \right) \\
s_2 \left(\begin{array}{ccc} (u_1(s_2, t_1), u_2(s_2, t_1)) & (u_1(s_2, t_2), u_2(s_2, t_2)) & (u_1(s_2, t_3), u_2(s_2, t_3)) \end{array} \right)
\end{array}$$

Známe-li konkrétní hodnoty výplatních funkcí, je dvojmaticí A , resp. dvojicí matic A_1, A_2 , určena celá hra.

Osvětleme si právě zavedené pojmy na konkrétním příkladu.

Příklad A. Ve hře kámen–nůžky–papír (zkracujme nadále jako KNP) je strategií prvního hráče například volba hrát kámen. Množinou strategií prvního hráče je množina $S_1 = \{\text{kámen, nůžky, papír}\}$. Množina strategií každého dalšího hráče je v KNP stejná jako pro prvního hráče, neboli $S_n = \{\text{kámen, nůžky, papír}\}$.

Pokud KNP hrají dva hráči a dohodli se, že v případě vítězství dostane výherce od poraženého pětikorunu, je výplatní funkce prvního hráče

$$u_1(\text{kámen, nůžky}) = 5, \quad u_1(\text{kámen, papír}) = -5, \quad u_1(\text{kámen, kámen}) = 0, \quad \text{atd.}$$

Výplatní matice A_1, A_2 , resp. výplatní dvojmatice A , jsou o pár řádků níže. Připomeňme ještě, že strategie prvního hráče jsou uvedeny v levém sloupci a strategie druhého hráče v prvním řádku. Ve dvojmatici je výplata prvního hráče na prvním místě a výplata druhého na druhém.

$$\begin{array}{c}
A_1 \quad K \quad N \quad P \\
K \left(\begin{array}{ccc} 0 & 5 & -5 \end{array} \right) \\
N \left(\begin{array}{ccc} -5 & 0 & 5 \end{array} \right) \\
P \left(\begin{array}{ccc} 5 & -5 & 0 \end{array} \right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
A_2 \quad K \quad N \quad P \\
K \left(\begin{array}{ccc} 0 & -5 & 5 \end{array} \right) \\
N \left(\begin{array}{ccc} 5 & 0 & -5 \end{array} \right) \\
P \left(\begin{array}{ccc} -5 & 5 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
A \quad K \quad N \quad P \\
K \left(\begin{array}{ccc} (0, 0) & (5, -5) & (-5, 5) \end{array} \right) \\
N \left(\begin{array}{ccc} (-5, 5) & (0, 0) & (5, -5) \end{array} \right) \\
P \left(\begin{array}{ccc} (5, -5) & (-5, 5) & (0, 0) \end{array} \right)
\end{array}$$

Nyní už můžeme přistoupit k formální definici hry v normálním tvaru.

Definice. Mějme množinu hráčů $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, množiny strategií jednotlivých hráčů S_1, S_2, \dots, S_n a jejich výplatní funkce u_1, u_2, \dots, u_n , což jsou

reálné funkce definované na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Hrou n hráčů v normálním tvaru rozumíme uspořádanou $(2n + 1)$ -tici

$$(Q, S_1, S_2, \dots, S_n, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Jak si jistě umíte představit, pod takto obecnou definici lze pojmut velmi širokou škálu rozhodovacích situací. Tak se pojďme alespoň s částí z nich vypořádat!

Hry s nulovým součtem

Připomeňme, že ve hře dvou hráčů v normálním tvaru značíme množiny strategií postupně S , T a výplatní funkce u_1 , u_2 . Hráče pojmenujme I a II a předpokládejme, že množiny jejich strategií jsou konečné.

Definice. Hra s nulovým součtem je hra dvou hráčů v normálním tvaru, pro kterou navíc platí, že pro každou strategii $s \in S$ a každou strategii $t \in T$ je $u_1(s, t) = -u_2(s, t)$, neboli ve všech případech je výhra jednoho hráče ztrátou druhého.

Výplatní matice A_1 , A_2 se v takovém případě liší pouze „přenasobením číslem -1 “, stačí nám tedy znát například pouze výplatní matici A_1 . Musíme si však dát pozor a nezapomenout, že „zisky“ druhého hráče mají opačné znaménko.

Dohodněme se, že pokud budeme mít hru zadanou maticí, nikoliv dvojmaticí, bude to automaticky znamenat, že se jedná o hru s nulovým součtem a že zadaná matice je výplatní maticí pro hráče I.

Mezi hry s nulovým součtem patří například kámen–nůžky–papír z Příkladu A, stejně jako hra následující.

Hra 46 (Lichý a Sudý). Hráči Lichý a Sudý ve stejný okamžik ukáží na prstech buď číslo jedna, nebo číslo dva. Lichý zvítězí, pokud součet prstů bude lichý, Sudý zvítězí, pokud bude sudý. Poražený vyplatí vítězi součet obou čísel v korunách. ([2], strana II – 4)

Jeden z hráčů je v této hře ve výhodnější pozici. Uhodnete, který?

Řešení. Zjevně se jedná o hru s nulovým součtem. Matice hry A (tedy výplatní matice prvního hráče) je

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Analyzujme hru z pohledu Lichého. Představme si, že se hra bude hrát opakovaně a že Lichý hraje náhodně „1“ ve $3/5$ případech a „2“ ve $2/5$ případech. Tím pádem:

- (A) V případě, že Sudý hraje „1“, Lichý prohraje 2 koruny ve $3/5$ případech a naopak vyhraje 3 koruny ve $2/5$ případech. Jeho průměrný zisk je tudíž $-2 \cdot (3/5) + 3 \cdot (2/5) = 0$ a bude-li se hra opakovat dostatečně mnohokrát (a Sudý hrát stále „1“), Lichý v průměru nic nezíská ani neztratí.
- (B) Pokud Sudý hraje „2“, Lichý s pravděpodobností $3/5$ vyhraje 3 koruny a s pravděpodobností $2/5$ vyhraje -4 koruny. Jeho průměrný neboli očekávaný zisk je tedy $3 \cdot (3/5) - 4 \cdot (2/5) = 1/5$.

Vidíme, že pokud Lichý bude náhodně volit mezi strategiemi „1“ a „2“ v poměru 3 : 2, zajistí si tím, že v průměru nebude ve ztrátě (dokonce může být v plusu, bude-li Sudý hrát často „2“). Může si Lichý zajistit ještě lepší očekávaný výsledek?

Zkusme najít takovou pravděpodobnost $p \in [0, 1]$, že pokud Lichý bude hrát „1“ s pravděpodobností p a „2“ s pravděpodobností $1 - p$, bude jeho očekávaná výhra stejná bez ohledu na to, zahraje-li Sudý „1“ nebo „2“. Pro takové p by tedy mělo platit

$$\begin{aligned} -2p + 3(1 - p) &= 3p - 4(1 - p), \\ 12p &= 7. \end{aligned}$$

Tudíž bude-li Lichý náhodně hrát „1“ s pravděpodobností $7/12$ a „2“ s pravděpodobností $5/12$, vyhraje v průměru $-2 \cdot (7/12) + 3 \cdot (5/12) = 1/12$ koruny bez ohledu na to, jak se zachová Sudý. Vidíme, že hra je výhodná pro Lichého.

Může si Lichý zaručit ještě lepší průměrný zisk než $1/12$ koruny na hru? Nikoliv, pokud druhý hráč hraje racionálně.²⁴ Zopakujme pro Sudého stejný postup, jaký jsme použili pro Lichého: Hledáme pravděpodobnost $q \in [0, 1]$ tak, aby průměrný zisk Sudého nezávisel na volbě Lichého. Buď si uvědomíme, že ze symetrie hry musí q vyjít rovněž $7/12$, nebo stejně jako předtím můžeme vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} 2q - 3(1 - q) &= -3q + 4(1 - q), \\ 12q &= 7. \end{aligned}$$

Bude-li Sudý náhodně volit mezi „1“ a „2“ v poměru 7 : 5, jeho průměrný zisk bude $2 \cdot (7/12) - 3 \cdot (5/12) = -1/12$ koruny.

Lichý si uvedeným postupem umí zaručit průměrný zisk alespoň $1/12$ a Sudý průměrný zisk alespoň $-1/12$ (což odpovídá minus zisku Lichého). Ani jeden z nich si tedy nemůže očekávaný zisk vylepšit.



Motivováni předchozím příkladem zavedeme několik nových pojmů.

Definice. Ve hře s nulovým součtem mějme množinu strategií prvního hráče $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. Prvky množiny S nazýváme *ryzí strategie*, zatímco uspořádaná m -tice (p_1, p_2, \dots, p_m) , kde $p_i \in [0, 1]$, $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, neboli strategie, která náhodně volí strategii s_1 s pravděpodobností p_1 , strategii s_2 s pravděpodobností p_2 , \dots , strategii s_m s pravděpodobností p_m , se nazývá *smíšená strategie*. Množinu všech smíšených strategií prvního hráče budeme značit symbolem S' .

Analogicky pro druhého hráče.

Poznámka. Na ryzí strategie lze nahlížet jako na speciální případ smíšených strategií – pro ryzí strategii s_1 volíme pravděpodobnosti $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \dots = p_m = 0$; podobně pro další.

Poznámka. Číslo $1/12$ z předchozího příkladu se nazývá *hodnota hry* (hodnotu hry vždy uvádíme se znaménkem platným pro prvního hráče). Smíšená strategie zajišťující hráči zisk rovný hodnotě hry se nazývá *optimální strategie*. V předchozí hře je optimální strategie prvního hráče $(7/12, 5/12)$, optimální strategie druhého hráče je stejná.

²⁴ Což ostatně ve všech uváděných hrách mlčky předpokládáme.

Můžeme se ptát, zda pro každou hru s nulovým součtem existuje její hodnota (tedy zisk, který si umí zaručit každý z hráčů). Připomeňme, že v seriálu uvažujeme pouze *konečné hry*, což jsou takové hry, ve kterých má každý hráč konečný počet ryzích strategií. V takovém případě je odpověď kladná – viz následující věta. Název minimax je odvozen od způsobu, kterým se hodnota hry hledá: První hráč se snaží maximalizovat svůj zisk, druhý minimalizovat (uvažujeme-li v hodnotách daných výplatní maticí prvního hráče).

Větu si nedokážeme, ale při řešení úloh ji budeme využívat.

Věta 7 (Minimax). *Pro každou konečnou hru s nulovým součtem*

- (i) *existuje číslo H , nazývané hodnota hry,*
- (ii) *existuje smíšená strategie pro prvního hráče taková, že jeho průměrný zisk je alespoň H nezávisle na tazích druhého hráče,*
- (iii) *existuje smíšená strategie pro druhého hráče taková, že jeho průměrný zisk je nejvýše H nezávisle na tazích prvního hráče.*

Ujasněme si následující pojmy.

Definice. *Optimální strategie* je taková (smíšená) strategie, která hráči zajistí zisk rovný hodnotě hry.

Definice. Smíšenou strategii, která hráči zaručuje stejný průměrný zisk bez ohledu na rozhodnutí protihráče, nazveme *vyvažující*.

Poznámka. Ve Hře 46 jsme hledali vyvažující strategie a ukázalo se, že jsou rovněž optimální. To ovšem nemusí platit vždy. Například ve hře dané maticí

$$\begin{array}{cc} & t_1 & t_2 \\ s_1 & \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right) \\ s_2 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

je strategie s_1 prvního hráče vyvažující, ale není optimální (hodnota hry je 2).

Poznámka. *Vyřešením* hry s nulovým součtem budeme rozumět nalezení hodnoty hry a alespoň jedné dvojice optimálních strategií.

Cvičení. V následujících hrách nalezněte výplatní matici, hru analyzujte, určete její hodnotu a optimální strategie pro oba hráče. Jsou tyto hry *spravedlivé*?²⁵

Hra 47. Uvažujme hru Sudý a Lichý (viz Hra 46) s tím rozdílem, že poražený zaplatí vítězi součin zvolených čísel namísto součtu (ovšem to, kdo vyhraje, stále závisí na součtu). ([2], strana II – 7)

Hra 48 (Karty). Aďa má v ruce černé eso a červenou osmičku. Hela má červenou dvojku a černou osmičku. Ve stejné chvíli obě zvolí jednu ze svých karet a vyloží ji na stůl. Jsou-li barvy stejné, vyhrává Aďa, jsou-li různé, vyhrává Hela. Poražená zaplatí vítězce součet na kartách (eso počítáme jako 1). ([2], strana II – 4)

²⁵ Hra je spravedlivá, je-li její hodnota nula.

Sedlové body a dominující strategie

V případě, že výplatní matice je větší než typu 2×2 , nemusí být snadné ji vyřešit. V některých případech si můžeme pomoci nalezením sedlových bodů nebo vyškrtnutím dominovaných strategií. Jak na to, si vysvětlíme v této podkapitole.

Mějme konečnou hru s nulovým součtem a označme si (a_{ij}) prvky výplatní matice A (už bez označení strategií), tedy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Každou smíšenou strategii hráče I si můžeme zapsat jako m -tici pravděpodobností (jejichž součet je jedna) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, stejně tak smíšenou strategii hráče II jako k -tici $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)$. Pokud hráč I použije smíšenou strategii \mathbf{p} a hráč II použije ryzí strategii t_j , je průměrná výplata hráče I rovna²⁶

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij}.$$

Naopak použije-li hráč II smíšenou strategii \mathbf{q} a hráč I se drží ryzí strategie s_i , je průměrná výplata hráče II rovna

$$- \sum_{j=1}^k q_j a_{ij}.$$

Obecně, použije-li hráč I smíšenou strategii \mathbf{p} a hráč II smíšenou strategii \mathbf{q} , je průměrná výplata hráče I rovna

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_i q_j a_{ij}.$$

Definice. Pokud pro prvek a_{ij} matice A platí

- (i) a_{ij} je minimum i -tého řádku, a zároveň
- (ii) a_{ij} je maximum j -tého sloupce,

nazýváme prvek a_{ij} *sedlovým bodem*.

Je-li a_{ij} sedlový bod, pak hráč I může vyhrát přinejmenším a_{ij} volbou i -tého řádku (ryzí i -té strategie) a hráč II může ztratit nejvýše a_{ij} volbou j -tého sloupce. Tudíž a_{ij} je hodnota hry a příslušné ryzí strategie jsou optimální.

²⁶ Pokud zápis pomocí sumy neznáte, vězte, že to není nic těžkého. Jsou-li dána čísla $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$, můžeme jejich součet zkráceně zapsat jako $\sum_{k=1}^n z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Tedy první součet z následujícího řádku je v plném rozpisu

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_m a_{mj}.$$

Všimněte si, že index j se nemění, neboť daná suma „sčítá přes i “.

Příklad B. Vyřešte hru danou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Prvek na pozici a_{22} je sedlový bod, jelikož je to nejmenší hodnota ve svém řádku a největší ve svém sloupci. Optimální pro hráče I je tedy druhý řádek a pro hráče II druhý sloupec. Hodnota hry je 2 a optimální strategie pro oba hráče je $(0, 1, 0)$. ♠

Poznámka. Pro větší matice bývá výhodné napsat si ke každému řádku minimum a ke každému sloupci maximum. Pokud se nějaké dvě hodnoty rovnají, je na jejich „křížení“ sedlový bod.

Příklad.

	min. v řádku		min.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	0 0 0 1	$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	0 0 0 1
max. ve sloupci	3 2 2 2	max.	3 1 2 2

Řešení. V matici A žádný sedlový bod neexistuje. Změníme-li ale prvek a_{12} na 1, dostaneme matici B , která už sedlový bod má. Je jím prvek b_{42} , neboť minimum čtvrtého řádku je rovno maximu druhého sloupce. ♠

Uvědomme si, že každé z vypsaných řádkových minim je (ne nutně ostře) menší než libovolné sloupcové maximum. Má-li tedy být některá hodnota společná, musí to být současně největší z minim jednotlivých řádků a nejmenší z maxim jednotlivých sloupců. Jinými slovy, sedlový bod matice A existuje právě tehdy, když platí

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Cvičení. Dokažte, že existují-li ve hře s nulovým součtem dva sedlové body, pak jsou jejich hodnoty stejné. ([2], strana II – 14)

Poznámka. Je-li výplatní matice typu 2×2 , není těžké hru vyřešit. Buď existuje sedlový bod, nebo můžeme najít vyvažující strategie podobně jako ve Hře 46, a ty jsou optimální. Takto lze dokázat Větu 2 pro „malé“ matice – což je ostatně úkolem v seriálové sérii.

Jak si ale poradit v případě větších matic bez sedlových bodů? Občas můžeme vyškrtnout řádky či sloupce, které jsou pro daného hráče zjevně nevýhodné (a při troše štěstí takto celou hru zredukujeme na matici typu 2×2).

Definice. Řekneme, že řádek i matice $A = (a_{ij})$ *dominuje* řádku k , pokud pro všechna j platí $a_{ij} \geq a_{kj}$. Tato situace se dá rovněž vyjádřit slovy, že řádek k je *dominován* řádkem i .

Podobně, sloupec j *dominuje* sloupci k (resp. k je *dominován* sloupcem j), pokud $a_{ij} \leq a_{ik}$ pro každé i .

Nechť je v nějaké hře řádek k *dominován* řádkem i . Jelikož hráč I získá volbou ryzí strategie i vždy alespoň tolik, co volbou ryzí strategie k , je rovněž ve

smíšených strategiích výhodnější „přenést“ pravděpodobnost příslušnou strategii k na strategii i . Tudíž můžeme k -tý řádek z matice vymazat, aniž bychom ovlivnili hodnotu hry. Poznamenejme ještě, že odstraněním dominovaného řádku můžeme přijít o některé optimální strategie, které ho využívají. Nicméně vždy zbyde alespoň jedna optimální strategie, která jej nevyužívá.

Zkusme si redukci pomocí dominujících řádků/sloupců na příkladu.

Příklad. Vyřešte hru danou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vidíme, že poslední sloupec je dominován prostředním. Můžeme tedy matici zredukovat na A' . Dále je první řádek v matici A' dominován třetím (všimněme si, že v matici A toto neplatilo). Smazáním prvního řádku obdržíme matici A'' typu 2×2 :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A'' nemá sedlový bod, ale hledáním vyvažujících strategií jako ve Hře 46 můžeme dospět k výsledku $p = 3/4$, $q = 1/4$, hodnota hry je $7/4$. Optimální strategie hráče I v původní hře je $(0, 3/4, 1/4)$ a pro hráče II je to $(1/4, 3/4, 0)$. ♠

Pozorování. Řádek/sloupec matice může být odstraněn i v případě, je-li dominován pravděpodobnostní kombinací jiných řádků/sloupců. I v takovém případě je totiž pro hráče výhodnější (přínejhorším stejně výhodné) hrát místo tohoto řádku/sloupce příslušnou smíšenou strategii.

Příklad. Uvažujme hru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Prostřední sloupec je dominován například kombinací okolních dvou s pravděpodobnostmi $1/2$ pro každý z nich. Po zredukování matice A na matici A' vidíme, že nyní je prostřední řádek dominovaný například kombinací prvního s vahou $1/3$ a třetího s vahou $2/3$. Redukovaná matice A'' už je typu 2×2 :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Hodnotu hry a optimální strategie zkuste nalézt sami. ♠

Poznámka. Ne všechny matice mohou být zredukovány pomocí dominujících řádků/sloupců. Dokonce ani když má matice sedlový bod, nemusí existovat dominovaný řádek/sloupec. Zkuste si to ověřit na matici 3×3 z Příkladu B.

Cvičení. Vyřešte hru s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Vyřešte hru s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

závisející na reálném parametru t . Načrtněte si graf hodnoty hry jakožto funkce parametru $t \in \mathbb{R}$. ([2], strana II – 14)

Cvičení. Vyřešte hry dané výplatními maticemi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hra 49. Předpokládejme, že o dva trhy, A a B , se zajímají dvě firmy, I a II. Na trhu A se očekávají zakázky představující zisk 150 milionů, na trhu B zakázky představující zisk 90 milionů. Každá z firem má finance buď na velkou propagační akci na jednom z trhů, nebo na menší kampaň na obou trzích. Účinnost propagace obou firem je stejná a zakázky se rozdělují podle těchto pravidel:

- (i) Vede-li na trhu reklamní kampaň pouze jedna firma, získá z tohoto trhu všechny zakázky.
- (ii) Vedou-li obě firmy na trhu kampaň téhož „typu“ (včetně žádné kampaně), získají obě polovinu zakázek.
- (iii) Vede-li jedna firma na trhu malou kampaň a druhá velkou, získá firma s malou kampaní $1/3$ zakázek a firma s velkou kampaní $2/3$ zakázek.

Obě firmy se musí rozhodnout ve stejnou dobu nezávisle na sobě (například musejí objednat billboardy, reklamní tiskoviny, ...). Jaké jsou jejich optimální strategie? Jelikož z principu nejde o opakovanou hru, zajímají nás hlavně ryzí strategie.

([5], strana 95)

Návod. Nejedná se o hru s nulovým součtem, ale se součtem konstantním – trh, který si mezi sebou chtějí firmy rozdělit, je stále stejně velký. Rozmyslete si, že na způsobu řešení to nic nemění, neboli každá hra s konstantním součtem je ekvivalentní s nějakou hrou s nulovým součtem.

Dvojmaticové hry

Nadále již nebudeme požadovat konstantní součet výplatních funkcí. Obecně se hrám dvou hráčů v normálním tvaru s konečnými množinami strategií říká *dvojmaticové*. Jelikož nelze odvodit jednu výplatní funkci z druhé, nestačí nám k jejich zadání matice, ale potřebujeme buď obě matice výplatních funkcí, nebo příslušnou dvojmatici.

Analýza obecných dvojmaticových her je nutně složitější než analýza her s nulovým či konstantním součtem. Není-li součet výplatních funkcí konstantní, nemůžeme čekat, že maximalizace výnosů jednoho hráče bude ekvivalentní s minimalizací ztrát druhého.

Základní dělení dvojmaticových her je na hry *nekooperativní* a hry *kooperativní*. V případě nekooperativních her není hráčům umožněno se předem domluvat, případně neexistuje způsob, jak mezi sebou uzavřít závaznou dohodu. Rovněž

není možné dělit se po skončení hry o výnosy. Hry s nulovým součtem jsou ze své podstaty („ztráta jednoho je zisk druhého“) nekooperativní. Teorie kooperativních her zahrnuje možnost domluvit se dopředu se spoluhráči na (ne)spolupráci, případně se podělit o zisk. My se budeme věnovat pouze nekooperativním hrám.

Ve hrách s nulovým součtem byla nejlepší strategie ta, která hráči umožnila zisk rovný hodnotě hry. Avšak jak již bylo řečeno, v dvojmaticových hrách nemáme naději na platnost Věty 7 (Minimax), a tím pádem ani na zavedení hodnoty hry. Potřebujeme tedy najít jiný způsob, jak posuzovat „optimálnost“ strategií.

Následující teorii lze rozvinout pro hru n hráčů v normálním tvaru, my ji však budeme využívat jen pro hry dvou hráčů, a tak si potřebné pojmy zavedeme pouze pro $n = 2$.

Definice. Mějme hru dvou hráčů v normálním tvaru s množinami strategií S , T a výplatními funkcemi u_1 , u_2 . Dvojice ryzích strategií (s^*, t^*) , kde $s^* \in S$, $t^* \in T$, se nazývá *rovnovážný bod*, platí-li

- (i) $u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*)$ pro každé $s \in S$, a zároveň
- (ii) $u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*)$ pro každé $t \in T$.

Strategie s^* a t^* nazýváme *rovnovážné*.

Klíčová vlastnost rovnovážného bodu je, že se žádnému z hráčů nevyplatí *jednostranné odchýlení od strategie*. Jinými slovy, bude-li se protihráč držet rovnovážné strategie, tak si hráč nepolepší, vymění-li strategii z příslušného rovnovážného bodu za libovolnou jinou.

Příklad. Nalezněte rovnovážné body pro následující dvě hry dané dvojmaticemi

$$M = \begin{pmatrix} (3, 3) & (0, 0) \\ (0, 0) & (5, 5) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} (3, 3) & (4, 5) \\ (5, 4) & (0, 0) \end{pmatrix}.$$

Řešení. Označme pro jednoduchost prvky dvojmatice stejně, jako jsme prve značili prvky matice, tedy například dvojici v prvním řádku a druhém sloupci matice M budeme značit (a_{12}, b_{12}) .

Prvek (a_{11}, b_{11}) je rovnovážný bod s výplatní „dvojfunkcí“ $(3, 3)$. Pokud oba hráči věří, že protihráč zvolí svoji první strategii, ani jeden nebude chtít hrát druhou strategii. Prvek (a_{22}, b_{22}) je také rovnovážný bod, jeho výplatní funkce je $(5, 5)$, což je pro oba hráče výhodnější. Takový rovnovážný bod se nazývá *dominující* a jedinou rozumnou volbou obou hráčů je hrát svoji druhou strategii.

V matici \widetilde{M} jsou opět dva rovnovážné body, totiž $(\tilde{a}_{12}, \tilde{b}_{12})$ a $(\tilde{a}_{21}, \tilde{b}_{21})$, tentokrát ale není ani jeden z nich *dominující*, a tedy na rozdíl od předchozí hry není jasné, jak by hráči měli hrát. Podrobněji je podobná situace rozebrána ve Hře 50. ♠

Příklad C. Nalezněte rovnovážné body hry

$$\begin{matrix} & t_1 & t_2 \\ s_1 & \begin{pmatrix} (1, -1) & (-1, 1) \end{pmatrix} \\ s_2 & \begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, -1) \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

([5], strana 130)

Řešení. Začněme například s dvojicí strategií (s_1, t_1) . V tuto chvíli se druhému hráči vyplatí změnit strategii na t_2 a polepšit si tím z -1 na 1 . Ovšem použije-li

hráč II (třeba při opakované hře) strategii t_2 , vyplatí se hráči I změnit s_1 na s_2 . Tím si ovšem hráč II pohorší na -1 , což může jednostrannou změnou strategie zlepšit – začne hrát t_1 . Teď si ovšem pohoršil hráč I. Změní tedy strategii zpátky na s_1 , čímž se dostáváme opět na začátek. Dokud se budeme držet jen ryzích strategií, z kruhu se nevymotáme. ♠

Vidíme, že ne všechny hry mají rovnovážný bod v ryzích strategiích. Pomůžeme si, když podobně jako u her s nulovým součtem zavedeme *smíšené* strategie? Zkusme to. Navíc si zadefinujeme ještě takzvané *očekávané hodnoty* výhry.

Definice. Buď dána hra dvou hráčů v normálním tvaru s množinami (ryzích) strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ a výplatními maticemi A, B . Pro každou dvojici smíšených strategií $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in S'$ a $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k) \in T'$ definujeme *očekávanou hodnotu výhry hráče I* vztahem

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_i q_j a_{ij}$$

a *očekávanou hodnotu výhry hráče II* vztahem

$$\pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_i q_j b_{ij}.$$

Definice. Dvojice smíšených strategií $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ se nazývá *rovnovážný bod*, pokud pro všechny smíšené strategie \mathbf{p}, \mathbf{q} platí nerovnosti

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \leq \pi_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \quad \text{a} \quad \pi_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) \leq \pi_2(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*).$$

A teď už konečně můžeme vyslovit slavnou a důležitou větu, díky níž matematik John Forbes Nash dostal v roce 1994 Nobelovu cenu za ekonomii. Na Nashovu počest se rovnovážným bodům říká mimo jiné *Nashova ekvilibria*.

Věta 8 (Nash, 1951). *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra v normálním tvaru alespoň jeden rovnovážný bod.*

Důkaz Nashovy věty využívá hlubší matematickou teorii (mimo jiné Brouwerovu větu o pevném bodě), a v seriálu ho tudíž vynecháme.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Když už víme, že rovnovážný bod musí existovat v úplně každé konečné hře v normálním tvaru, bylo by dobré ho i umět najít. Pusťme se do toho!

Rovnovážné strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědi jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^* , pak si druhý hráč odchýlením od t^* nemůže polepšit. Podobně hráč I si nemůže polepšit odchýlením od s^* , zvolí-li druhý hráč strategii t^* . Přesněji řečeno:

Definice. *Nejlepší odpovědi* hráče I na strategii t hráče II se rozumí množina

$$R_1(t) = \{\hat{s} \in S' : u_1(\hat{s}, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S'\}.$$

Podobně nejlepší odpovědi hráče II na strategii s hráče I se rozumí množina

$$R_2(s) = \{\hat{t} \in T' : u_2(s, \hat{t}) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T'\}.$$

Má-li každý z hráčů na výběr pouze dvě ryzí strategie, představují množiny R_1 , R_2 (sestrojené pro smíšené strategie) křivky v rovině – tzv. *reakční křivky*.

Cvičení. Dokažte, že (s^*, t^*) je rovnovážný bod právě tehdy, když platí

$$s^* \in R_1(t^*) \quad \text{a zároveň} \quad t^* \in R_2(s^*).$$

Poznámka. Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme reakční křivky pro smíšené strategie a nalezneme jejich průsečík.

Poznámka. V případě dvouprvkových množin S a T budeme v dalším textu občas zkracovat zápis smíšených strategií $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$, resp. $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$, na pouhé p , resp. q , neboť v takovém případě je smíšená strategie hodnotou p , resp. q , již jednoznačně určena.

Příklad. Vzpomeňme si na hru z Příkladu C, danou následující dvojmaticí, a nalezněme všechny její rovnovážné body:

$$\begin{array}{cc} & t_1 & t_2 \\ s_1 & (1, -1) & (-1, 1) \\ s_2 & (-1, 1) & (1, -1) \end{array}$$

Řešení. Jak jsme si již rozmysleli, rovnovážný bod v ryzích strategiích tato hra nemá. Odpovídají tomu i nejlepší odpovědi na ryzí strategie, které jsou

$$\begin{aligned} R_1(t_1) &= \{s_1\}, & R_1(t_2) &= \{s_2\}, \\ R_2(s_1) &= \{t_2\}, & R_2(s_2) &= \{t_1\}. \end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto případě neexistuje dvojice strategií, které by byly nejlepší odpovědi jedna na druhou.

Rovnovážný bod musíme hledat ve smíšených strategiích. Pro hráče I mějme smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ a pro hráče II smíšenou strategii $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$. Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 1 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1 - q) - 1 \cdot (1 - p) \cdot q + 1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) = \\ &= p(4q - 2) - 2q + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -1 \cdot p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1 - q) + 1 \cdot (1 - p) \cdot q - 1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) = \\ &= q(-4p + 2) + 2p - 1. \end{aligned}$$

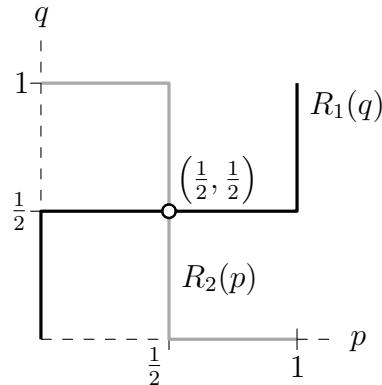
Hledejme nejlepší odpovědi hráče I v závislosti na q .

- (i) Je-li $0 \leq q < \frac{1}{2}$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q lineární funkce, která je klesající. Největší hodnoty tedy bude nabývat pro nejmenší možné p , kterým je $p = 0$. V tomto případě platí $R_1(q) = \{0\}$.
- (ii) Pro $q = \frac{1}{2}$ je $\pi_1(\mathbf{p}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ konstantní (nulová) funkce. Výsledek tedy nezáleží na volbě p , a proto $R_1(\frac{1}{2}) = [0, 1]$.
- (iii) Je-li $\frac{1}{2} < q \leq 1$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q rostoucí funkce. Největší hodnoty nabývá pro největší možné p , kterým je $p = 1$. V tomto případě platí $R_1(q) = \{1\}$.

Podobně pro hráče II odvodíme nejlepší odpověď v závislosti na p :

$$R_2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } 0 \leq p < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{pro } p = \frac{1}{2} \\ \{0\} & \text{pro } \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases}$$

Reakční křivky si můžeme zakreslit do roviny, viz následující obrázek.



Jediný rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, výhra každého z nich bude rovna nule. ♠

Výše uvedeným postupem umíme najít všechny rovnovážné body v normálních hrách dvou hráčů, má-li každý z nich jen dvě strategie. Ovšem ani nalezení všech rovnovážných bodů nemusí znamenat, že s výsledkem budeme spokojeni. Následující hra je toho dobrým příkladem – ačkoliv nalezneme všechny rovnovážné body, neumíme hráčům poradit, kterou strategii zvolit (pohybujeme-li se stále na poli nekooperativních her). Co s tím dál? Nic. Smiřme se s tím, že ani teorie her není všemocná a někdy to zkrátka lépe nejde. Na druhou stranu nekonečné množství možností, které měli hráči díky volbě smíšených strategií na výběr, alespoň zredukujeme na tři relativně smysluplné.

Hra 50 (Manželské dilema). Manželé se rozhodují, kam večer půjdou. Žena by ráda na box, kdežto muž do opery. Oba přitom budou spokojenější, když půjdou spolu, než když bude každý jinde – viz následující výplatní dvojmatice (muž volí řádky, žena sloupce):

$$\begin{array}{cc} & \text{O} & \text{B} \\ \text{O} & (2, 1) & (0, 0) \\ \text{B} & (0, 0) & (1, 2) \end{array}$$

([2], strana III – 10; [5], strana 164)

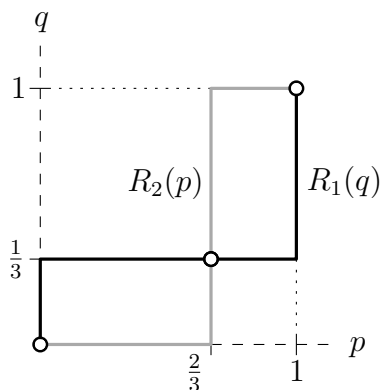
Řešení. Pokud bychom si dovolili hru řešit jako kooperativní, řešení by bylo nasnadě – v polovině večerů půjdou na box, v druhé polovině na operu. Průměrná výplata každého z nich by byla $3/2$.

My se ovšem zabýváme nekooperativními hrami. Rovnovážné body v ryzích strategiích jsou (O, O) a (B, B), přičemž muž preferuje první z nich, zatímco žena druhý. Zkusme ještě zjistit, zda ve smíšených strategiích neexistuje další rovnovážný bod. Očekávané hodnoty výhry jsou

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2pq + 1(1-p)(1-q) = p(3q-1) - q + 1, \\ \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 1pq + 2(1-p)(1-q) = q(3p-2) - 2p + 1\end{aligned}$$

a příslušné reakční křivky jsou dány následujícím předpisem:

$$R_1(q) = \begin{cases} \{0\} & \text{pro } q \in [0, \frac{1}{3}) \\ [0, 1] & \text{pro } q = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{pro } q \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad R_2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{pro } p \in [0, \frac{2}{3}) \\ [0, 1] & \text{pro } p = \frac{2}{3} \\ \{1\} & \text{pro } p \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



Manželské dilema má tedy celkem tři rovnovážné body (již dříve nalezené rovnovážné body v ryzích strategiích se samozřejmě objeví i při analýze reakčních křivek – viz předchozí náčrtek), a jak jsme předdeslali, v rámci teorie nekooperativních her neumíme manželům poradit nic jednoznačného.

Rovnovážný bod	Očekávaná výhra
$((1, 0), (1, 0))$	$(2, 1)$
$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
$((0, 1), (0, 1))$	$(1, 2)$



Poznámka. Všimněme si, co platí pro rovnovážný bod $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$ z předchozího příkladu. Z reakčních křivek je zřejmé, že je-li $q = \frac{1}{3}$, nezávisí očekávaná hodnota výhry hráče I na volbě p . Podobně, je-li $p = \frac{2}{3}$, je očekávaná hodnota výhry hráče II nezávislá na volbě q .

Představme si, že úlohu ještě nemáme vyřešenou, a zkusme nalézt takové q , aby očekávaná hodnota výhry hráče I nezávisela na volbě p . Jinými slovy, má platit rovnost

$$\pi_1((1, 0), \mathbf{q}) = 2q + 0(1-q) = 0q + 1(1-q) = \pi_1((0, 1), \mathbf{q}),$$

jejímž řešením je právě $q = \frac{1}{3}$.

Podobně, sestavíme-li rovnici

$$\pi_2(\mathbf{p}, (1, 0)) = \pi_2(\mathbf{p}, (0, 1)),$$

nalezneme p , pro něž hodnota výhry hráče II nezávisí na jeho volbě strategie. V předchozí hře to bude $p = \frac{2}{3}$, což je přesně to p , které odpovídá rovnovážnému bodu. Podařilo se nám tedy najít rovnovážný bod, aniž bychom museli konstruovat reakční křivky.

Rozmyslete si, že tímto postupem nalezneme rovnovážný bod v každé hře dané dvojmaticí typu 2×2 .

Poznamenejme ještě, že uvedený postup nemusí odhalit rovnovážné body v rychlých strategiích – ty je třeba vyšetřit zvlášť.

Poznámka. Všimněme si, že v předchozí poznámce jsme pro výpočet q – tedy strategie volené druhým hráčem – použili hodnoty výplatní funkce prvního hráče, a naopak.

Tento přístup se na první pohled liší od postupu, kterým jsme hledali vyvažující strategie ve hrách s nulovým součtem (kde jsme volbu strategie odvozovali z výplatní funkce téhož hráče). Ovšem již na druhý pohled je jasné, že ve hrách s nulovým součtem můžeme rovnovážnou strategii jednoho hráče odvozovat rovněž z výplatní funkce protihráče, a to právě díky tomu, že výplatní funkce obou hráčů se liší pouze znaménkem.

Nicméně v dvojmaticových hrách je třeba mít se na pozoru a používat pouze postup z předchozí poznámky – opačný přístup by nefungoval. Zkuste si to jednak spočítat pro předchozí hru, jednak rozmyslet v obecném případě.

Cvičení. Nalezněte všechny rovnovážné body v následujících hrách.

Hra 51 (Samaritánovo dilema). Představme si, že Ministerstvo práce a sociálních věcí řeší problém, do jaké míry podporovat nezaměstnané. Jestliže se dotyčný snaží najít práci, pak je výhodnější jej podpořit, aby se mohl například rekvalifikovat a získal lépe placené místo – státu pak odvede vyšší daně. Jestliže se však nikterak nesnaží, je výhodnější jej nepodpořit (nepočítáme-li případný nárůst kriminality). Z hlediska nezaměstnaného je výhodné hledat práci jen tehdy, když nemůže být na státní podpoře.

Uvažujme například následující hodnoty odpovídající jednotlivým situacím:

	Snažit se	Flákat se
Podpořit	$(3, 2)$	$(-1, 3)$
Nepodpořit	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

([5], strana 168)

Hra 52. Sněhurka hodí spravedlivou kostkou tak, aby Trpaslík neviděl výsledek, a poté mu poví, kolik ok padlo, přičemž nemusí mluvit pravdu. Trpaslík se rozhodne, zda jí věří, nebo nevěří. Pravda se poté ověří pohledem na kostku. Pokud je Sněhurka přistižena při lži, velmi ztrácí, pokud je Trpaslík nespravedlivě nedůvěřivý, ztrácí též, ale méně. Pokud Sněhurce věří a ona jej podvádí, pak Sněhurka získává a Trpaslík trochu ztrácí. V případě, že jí Trpaslík oprávněně věří, nic se neděje. Výplatní dvojmatice by mohla být třeba následující:

	Nevěřit	Věřit
Lhát	$(-6, 0)$	$(2, -1)$
Mluvit pravdu	$(0, -2)$	$(0, 0)$

Poznámka. Ačkoliv se zdá, že v poslední hře hrají hráči postupně, nikoliv najednou, jedná se stále o hru v normálním tvaru. Celá rozhodovací situace je postavena tak, že nezáleží na tom, rozhodnou-li se hráči ve stejnou chvíli, nebo jeden po druhém.

Vězňovo dilema

Hra 53 (Vězňovo dilema). Policie zatkla Boba a Bobka. Ihned po zatčení je od sebe oddělila, aby se nemohli domlouvat, a sdělila jim, jaké mají vyhlídky.

- (i) Pokud budou oba dva zapírat, stráví každý z nich ve vězení 3 roky.
- (ii) Pokud se ale jeden z nich přizná a druhý bude zapírat, „vyfasuje“ první 1 rok a druhý 25 let.
- (iii) Přiznají-li se oba, „odsedí“ si každý 10 let.

Příslušná dvojmatice je následující:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Zapírat} & \text{Přiznat se} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Zapírat} \\ \text{Přiznat se} \end{array} & \begin{pmatrix} (-3, -3) & (-25, -1) \\ (-1, -25) & (-10, -10) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dilema se této hře říká proto, že pro oba hráče by bylo výhodnější zapírat a „odsedět“ si pouze tři roky. Zádrhel je v tom, že se nemohou domlouvat a stále je tu pokušení zkrátit tři roky na jeden, spojené navíc s mnohonásobně horším trestem pro toho, kdo vydrží a bude zapírat. Jedinou racionální volbou tudíž je se přiznat, ačkoliv ve výsledku to má horší dopad na oba dva hráče.

Zdá se, že není co víc v této hře řešit – jediným rovnovážným bodem je dvojice (Přiznat se, Přiznat se), a tak to také dopadne.

Poznámka. Pojmem *Vězňovo dilema* se obecně myslí každá dvojmaticová hra tvaru

$$\begin{pmatrix} (a, a) & (b, c) \\ (c, b) & (d, d) \end{pmatrix},$$

kde

$$c > a > d > b \quad \text{a} \quad a > (b + c)/2.$$

Z uvedených nerovností plyne, že vzájemná *spolupráce* (řádek 1, sloupec 1) je lepší než vzájemná *zrada* (řádek 2, sloupec 2) a pokud se bojíte protihráčovy zrady, je nejlepší zradit též. Poslední nerovnost říká, že pokud si hráči mohou věřit a hodnoty výplatní funkce představují například zisk, který si mohou přerozdělit, je nejlepší volbou spolupráce. ([8], kapitola 5.2.4)

Některé konflikty typu Vězňova dilematu jsou takové, že je lze hrát pouze jednou, jiné jdou hrát opakovaně (stačí například ve Hře 53 interpretovat výplatní funkci jako peněžní obnos, nikoliv roky v žaláři, a rázem se dá hrát mnohem častěji).

Uvažujme místo jedné hry *superhru* sestávající z velkého množství opakování základní hry (pro nás Vězňova dilematu). Hráči sice stále nemají možnost uzavírat závazné smlouvy o tom, jak se zachovají v příští hře, mohou ale využívat informaci, jak hrál protihráč v předchozích kolech. *Strategie v superhře* je kompletní plán, jak se hráč zachová v průběhu celé hry ve všech možných situacích, v nichž se může ocitnout.

Strategie v superhře mohou být například:

- (i) **Zlaté pravidlo:** Vždy spolupracuj.
- (ii) **Železné pravidlo:** Vždy zraď.
- (iii) **Náhodná:** Spolupracuj s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a zraď rovněž s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.
- (iv) **Nevraživec:** Spolupracuj, dokud tě protihráč nezradí. Pak vždy zraď.
- (v) **Půjčka za oplátku:** V prvním tahu spolupracuj, v dalším opakuj tah protihráče z předchozího kola.
- (vi) **Postupná:** Spolupracuj, dokud protivník nezradí. Po jeho první zradě jednou zraď a dvakrát spolupracuj, a tak stále dokola. Po druhé zradě dvakrát po sobě zraď a dvakrát spolupracuj, . . . , po n -té zradě n -krát po sobě zraď a dvakrát spolupracuj.
- (vii) **Vlídlná většinová:** Poprvé spolupracuj, pak použij strategii, kterou do té doby použil protivník nejvíckrát. Jsou-li četnosti obou strategií stejné, spolupracuj.
- (viii) **Nelítostná většinová:** Poprvé zraď, pak použij strategii, kterou do té doby použil protivník nejvíckrát. Jsou-li četnosti obou strategií stejné, zraď.
- (ix) A mnohé další.

Od začátku osmdesátých let byly pořádány počítačové turnaje, do nichž odborníci na teorii her zasílali jednotlivé strategie, aby se utkaly každá s každou v superhře založené na Věžňově dilematu. Každé strategii byl přiřazen součet přes všechny odehrané superhry.

Setrvalým vítězem turnajů byla Půjčka za oplátku. To je zajímavé jednak proto, že se jedná o poměrně jednoduchou strategii, a jednak proto, že lidé ji mnohdy instinktivně používají v mnoha konfliktních situacích. Ačkoliv Půjčka za oplátku vyhrála turnaj nasbíráním největšího součtu přes všechny superhry, v žádné jednotlivé superhře nezískala oproti jiné strategii převahu.

Cvičení. Dokažte, že Půjčka za oplátku skutečně nikdy nezíská v jedné superhře víc než strategie protihráče, ať je tato jakákoliv. ([8], strana 131)

Poznámka. Pokud vám vrtá hlavou, jak lze vlastně superhru uskutečnit (vždyť vyžaduje nekonečně mnoho opakování), vězte, že na tom není nic těžkého. Hrajme Věžňovo dilema, přičemž pravděpodobnost, že budeme hrát i další kolo, je například $\frac{2}{3}$. Toto opatření vede k tomu, že se *skoro jistě* odehraje pouze konečný počet kol. Přesto se hráči chovají tak, jako kdyby se jednalo o superhru – důležité je, že v žádném z kol nevědí, zda je poslední.

Jak vidno, opakované hry představují možnost, která si poradit s Věžňovým dilematem a ukazují, že vzájemná spolupráce může být racionální strategií i při sledování vlastních sobeckých zájmů (v případě, že pravděpodobnost opakování hry je v každém kole dostatečně vysoká).

Letošní seriál je u konce. V širém světě teorie her jsme se stihli jen letmo projít, přesto doufám, že se vám procházka líbila a při čtení seriálu jste se dozvěděli něco nového. Loučí se s vámi a hodně dobrých nápadů nejen při řešení PraSátka přeje

Alča Skálová

Zadání 3. seriálové série

Úloha 7. Hráč I si tajně napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n ; označme jej písmenem i . Ve stejnou chvíli si rovněž hráč II napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n ; označme jej písmenem j . Poté si hráči čísla navzájem ukážou.

Pokud je $|i - j| = 1$, vyhrává hráč I bod a hráč II naopak bod ztrácí. Pokud $|i - j| \neq 1$, nestane se nic. Vyřešte hru pro libovolné pevné $n \geq 2$ (jmenovitě: nalezněte její hodnotu a alespoň jednu optimální strategii pro každého hráče).

([2], strana II – 14)

Úloha 8. Dokažte Větu 7 (Minimax) ze třetího dílu seriálu pro libovolnou hru s nulovým součtem, ve které má každý hráč na výběr právě ze dvou strategií.

Úloha 9. Nalezněte všechny rovnovážné body a jejich příslušné očekávané hodnoty výhry pro oba hráče ve hře dané dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (4, -4) & (-1, -1) \\ (0, 1) & (1, 0) \end{pmatrix}.$$

([8], strana 122)

Řešení 3. seriálové série

Řešení jsou většinou doplněna o poznámky opravovatele, které vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS. Druhou úlohu opravila a vzorové řešení sepsala Anna Chejnovská, třetí úlohu opravil a vzorové řešení sepsal Lukáš Zavřel.

Úloha 7. Zvolme si pevné $n \geq 2$. Výplatní matice prvního hráče je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Podaří-li se hráči I najít m -prvkovou podmnožinu řádků $M \subset \{1, 2, \dots, n\}$ takovou, že v každém sloupci (tedy pro libovolný tah hráče II) bude alespoň jedna jednička v řádku z množiny M , pak přiřadí-li hráč I každému řádku z M pravděpodobnost $\frac{1}{m}$, zajistí si tím očekávanou výhru $\frac{1}{m}$ (neboť hráč II se nemůže „netrefit“).

Naopak, podaří-li se hráči II nalézt takovou s -prvkovou podmnožinu sloupců $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$, že v každém řádku (tedy pro libovolný tah hráče I) bude nejvýše jedna jednička ve všech sloupcích z množiny S dohromady, a přiřadí-li hráč II každému sloupci z S pravděpodobnost $\frac{1}{s}$, bude jeho očekávaná výhra $-\frac{1}{s}$ (hráč I se nemůže „trefit“ vícekrát).

Podaří-li se nám nalézt výše popsané množiny M a S o stejné mohutnosti,²⁷ bude zjevně hodnota hry $\frac{1}{m} = \frac{1}{s}$ a optimální strategie budou odpovídat rovnoměrné volbě řádků/sloupců z M/S .

Označme písmenem \mathbf{p} smíšenou strategii hráče I a písmenem \mathbf{q} smíšenou strategii hráče II. Není těžké ověřit, že požadavkům na množiny M a S vyhovují v závislosti na n například následující smíšené strategie (začátky se vždy opakují s periodou 4, pouze v (před)poslední periodě mohou být změny):

- $n = 4k$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots, 0, p, p, 0)$,
 $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots, q, q, 0, 0)$,
 kde $p = q = \frac{1}{2k}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k}$.

²⁷ Mohutnost množiny je (pro konečnou množinu) počet jejích prvků.

- $n = 4k + 1$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots, 0, p, p, p, 0)$,
 $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots, q, q, 0, 0, q)$,
kde $p = q = \frac{1}{2k+1}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+1}$.
- $n = 4k + 2$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots, 0, p, p, 0, p, p)$,
 $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots, q, q, 0, 0, q, q)$,
kde $p = q = \frac{1}{2k+2}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+2}$.
- $n = 4k + 3$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots, 0, p, p, 0, p, p, 0)$,
 $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots, q, q, 0, 0, q, q, 0)$,
kde $p = q = \frac{1}{2k+2}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+2}$.

Poznámka. Alternativou ke vzorovému řešení bylo nalezení optimálních strategií pomocí „vyškrtání“ všech dominovaných. To je ostatně dobrý způsob, jak na „předpis“ pro optimální strategie přijít.

Část řešitelů se nezvládla vypořádat se zobecněním z malých n na všechna. Opakovaně se také vyskytlo nesprávné tvrzení, že ze symetričnosti matice plyne symetričnost optimálních strategií obou hráčů. Tady pozor – celou dobu pracujeme s výplatní maticí prvního hráče, která sice je symetrická, ale hra rozhodně symetrická není.

Úloha 8. Pokud má výplatní matice sedlový bod, tak hodnota hry je hodnota právě tohoto sedlového bodu a hráči hrají podle odpovídajících ryzič strategií. Proto dále předpokládejme, že naše matice sedlový bod nemá a označme si ji

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Hledáme optimální strategii pro prvního hráče (p je pravděpodobnost, s jakou volí první strategii, a q pravděpodobnost, že druhý hráč hraje dle své první strategie). Zkusme tedy podle návodu v seriálu najít takové p , že očekávaná výhra prvního hráče nebude záviset na tahu druhého hráče. Dospějeme k rovnici

$$ap + c(1 - p) = bp + d(1 - p).$$

Za předpokladu, že $a + d - b - c \neq 0$, dostáváme

$$p = \frac{d - c}{a + d - b - c}.$$

Vezměme si BÚNO $a < b$.²⁸ Společně s předpokladem, že matice nemá sedlový bod, máme už jednoznačně určené nerovnosti $b > d$, $c > d$, $c > a$. Odtud plyne, že $a + d - b - c$ nemůže být nulové. Dále z těchto nerovností vyplývá, že $p \in (0, 1)$.

Stejným způsobem sestavíme rovnici

$$-aq - b(1 - q) = -cq - d(1 - q)$$

pro výpočet q a odvodíme z ní, že

$$q = \frac{d - b}{a + d - b - c} \in (0, 1).$$

²⁸ Kdybychom připustili rovnost $a = b$, dostali bychom sedlový bod.

Zbývá ověřit, zda jsou nalezené strategie skutečně optimální. Očekávaná hodnota výhry prvního hráče pro

$$p = \frac{d - c}{a + d - b - c}$$

je

$$ap + c(1 - p) = \frac{ad - bc}{a + d - b - c},$$

což je stejné číslo jako očekávaná hodnota výhry druhého hráče pro

$$q = \frac{d - b}{a + d - b - c}.$$

Popsané strategie jsou tedy optimální a hodnota hry je

$$\frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

Poznámka. Většina řešitelů si poctivě přečetla seriál, takže jim úloha nedělala nejmenší potíže.

Úloha 9. Hledejme rovnou rovnovážné body ve smíšených strategiích, neboť ryzí strategie jsou pouze speciálním případem strategií smíšených. Pro hráče I uvažujme smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ a pro hráče II smíšenou strategii $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$. Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 4 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1 - q) + 0 \cdot (1 - p) \cdot q + 1 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) = \\ &= 2p(3q - 1) - q + 1, \\ \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 4 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1 - q) + 1 \cdot (1 - p) \cdot q + 0 \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) = \\ &= q(1 - 4p) - p. \end{aligned}$$

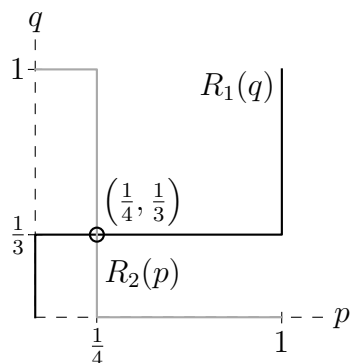
Hledejme nejlepší odpovědi $R_1(q)$ hráče I v závislosti na q :

- (i) Je-li $0 \leq q < \frac{1}{3}$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q klesající lineární funkce. Největší hodnoty nabývá pro $p = 0$. V tomto případě platí $R_1(q) = \{0\}$.
- (ii) Pro $q = \frac{1}{3}$ je $\pi_1(\mathbf{p}, (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ konstantní funkce. Výsledek tedy nezáleží na volbě p , a proto $R_1(\frac{1}{3}) = [0, 1]$.
- (iii) Je-li $\frac{1}{3} < q \leq 1$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q lineární rostoucí funkce. Největší hodnoty nabývá pro $p = 1$. V tomto případě platí $R_1(q) = \{1\}$.

Podobně pro hráče II odvodíme nejlepší odpověď v závislosti na p :

$$R_2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } 0 \leq p < \frac{1}{4} \\ [0, 1] & \text{pro } p = \frac{1}{4} \\ \{0\} & \text{pro } \frac{1}{4} < p \leq 1 \end{cases}$$

Zakresleme si reakční křivky do roviny.



Jediný rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right).$$

Nyní musíme ještě dopočítat příslušné očekávané hodnoty výhry pro oba hráče, jimiž jsou

$$\pi_1 \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) = \frac{2}{3},$$

$$\pi_2 \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) = -\frac{1}{4}.$$

Dodatky

Řešení her z 1. dílu

Hra 4. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých je počet sirek násobkem tří.

Hra 5. Oba případy vyjdou stejně, stačí provést zpětný rozbor. Prohrávající pozice jsou právě ty, ve kterých počet sirek dává po dělení třemi zbytek jedna.

Hra 6. Vyhrávající strategii má první hráč. V a P pozice jsou zaznamenány na následujícím obrázku.

V	V	V	V	V	V	V	V
P	V	P	V	P	V	P	V
V	V	V	V	V	V	V	V
P	V	P	V	P	V	P	V
V	V	V	V	V	V	V	V
P	V	P	V	P	V	P	V
V	V	V	V	V	V	V	V
P	V	P	V	P	V	P	V

Hra 7. Začíná-li Mína, výsledek bude 1. Začíná-li Max, výsledek bude 5. Obojí lze zjistit zpětným rozbořem.

Hra 8. Zpětným rozbořem lze zjistit (v případech (i) a (iii) je výhodné rozkreslit si hru na dvě šachovnice – jednu pro Mínu a jednu pro Maxe), že v případě

- (i) je výsledek 4,
- (ii) je výsledek 2 (zde ani není třeba hru moc rozebírat),
- (iii) je výsledek 4.

Hra 11 (Dvojité šachy). Neprohrávající strategii má první hráč. Kdyby ji měl druhý hráč, může první hráč ve svých dvou počátečních tazích táhnout jedním z koňů „tam a zpět“, čímž by se dostal do role druhého hráče.

Hra 12 (Mazání dělitelů). Vyhrávající strategii má první hráč. Podívejme se, jakého typu je pozice, ve které jsou na tabuli všechna čísla kromě jedničky.

- (i) Je-li tato pozice prohrávající, má první hráč jistě vyhrávající strategii – stačí v počátečním tahu smazat jedničku a tím dostat protihráče do prohrávající pozice.
- (ii) Je-li tato pozice vyhrávající, vede z ní tah do prohrávající pozice. Jelikož je ovšem jednička dělitelem každého přirozeného čísla, bude z tabule smazána libovolným prvním tahem, a tedy může první hráč rovnou táhnout do oné prohrávající pozice.

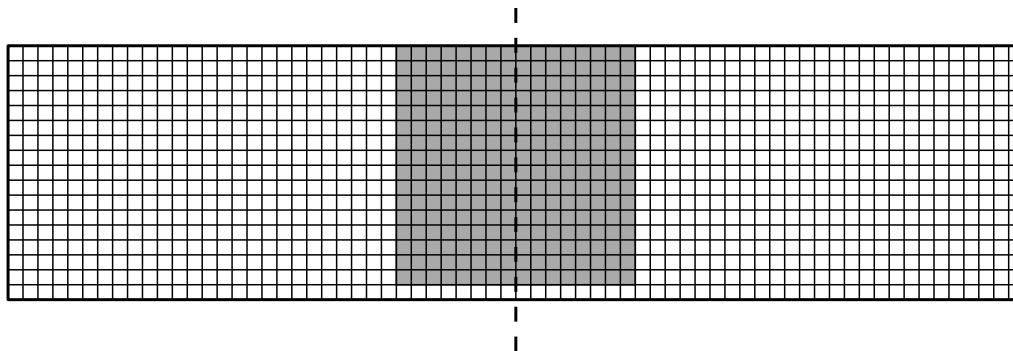
Hra 16. Kombinací symetrie a rozebírání zjistíme, že vyhrávající strategii má první hráč (výhodné je zahrát v prvním tahu doprostřed).

Hra 17. Vyhrávající strategii má Kuba (druhý hráč). Stačí, když bude hrát středově symetricky s Aničkou. Mohla-li Anička položit jezdce na nějaké pole (tedy toto bylo volné a nebylo ohroženo žádným Kubovým jezdcem), je středově symetrické pole rovněž volné, neohrožené žádným Aniččíným jezdcem (včetně naposledy položeného – středově symetrická pole totiž mají stejnou barvu a jezdec ohrožuje jen pole jiné barvy) a Kuba na něj může položit svého jezdce.

Z konečnosti hry pak vyplývá, že Kubova strategie je nejen neprohrávající, ale dokonce vyhrávající.

Místo středové symetrie lze využít i symetrii osovou.

Hra 18. Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním tahu vybarví čtverec 16×16 tak, aby tabulka byla osově symetrická – viz následující obrázek.

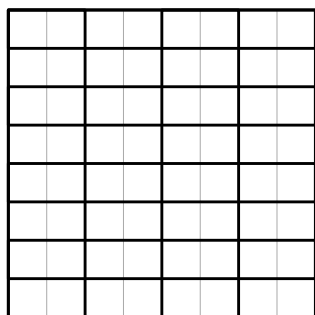


Dále bude hrát osově symetricky podle druhého hráče. Jelikož jedním tahem nelze obarvit políčka na obou stranách osy, bude moci po každém tahu druhého hráče hrát první hráč minimálně ještě jednou.

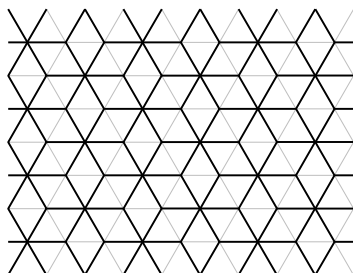
Analogická strategie funguje pro každou tabulku o rozměrech „lichó × sudo“. Rozměry „sudo × sudo“ a „lichó × lichó“ lze vyřešit nejen pomocí osově symetrie, ale dá se využít i symetrie středová (v obou případech má vyhrávající strategii první hráč).

Hra 21 (Razítka). Vyhrávající strategii mají červená razítka čili druhý hráč. Klíčem k úspěchu je pomyslně si rozdělit šachovnici na domina (jedno z možných rozdělení je znázorněno na následujícím obrázku) a vždy zahrát do stejného

domina, do kterého v předešlém tahu zahrál soupeř.



Hra 22 (Trojúhelníkové piškvorky). Zkušenost z klasických piškvorek nám říká, že pro malé délky vyhrávající sekvence bude vyhrávat první hráč, a když už bude vyhrávající sekvence „dost dlouhá“, zvládnou se oba hráči navzájem ubránit. A opravdu je tomu tak. Pro $n \leq 3$ triviálně vítězí začínající hráč a už pro $n = 4$ existuje pro oba neprohrávající strategie. K jejímu pochopení potřebujeme nejprve porozumět následujícímu obrázku.



Až nám z tohoto obrázku přestanou přecházet oči, všimneme si, že znázorňuje rozdělení trojúhelníkové sítě na „kosočtverečky“ neboli na dvojice trojúhelníků. Dobrou vlastností takového rozdělení je, že jakákoliv vyhrávající řada délky alespoň 4 prochází jedním celým „kosočtverečkem“. Abychom tedy soupeři zabránili ve výhře, stačí mu zabránit v ovládnutí „kosočtverečku“, a to je snadné. Kdykoliv náš soupeř zahraje do jednoho z dvojice trojúhelníků tvořícího kosočtverec, my zahrajeme do toho druhého. A protože v ovládnutí celého kosočtverce si umí oba hráči navzájem zabránit, nikdo z nich nemůže vyhrát. Pro $n = 4$ a následně i pro $n > 4$ nemá nikdo z hráčů vítěznou strategii.

Hra 24 (Dělitelnost třinácti). V tomto případě má vyhrávající strategii první hráč. V každé stovece po sobě jdoucích čísel je nejvýše osm z nich dělitelných třinácti, tudíž první hráč vždy může ve svém posledním tahu zvolit takovou cifru na místo desítek, že výsledné číslo nebude dělitelné třinácti bez ohledu na poslední tah druhého hráče (volbu cifry na místo jednotek).

Hra 25 (Mocnění). Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním kole zvolí číslo 2, výsledek druhého hráče bude mezi $2^2 = 4$ a $2^9 = 512 < 1000$. Ve druhém kole už se první hráč volbou čísla 9 dostane přes 1000. Nejmenší možné číslo, které mu druhý hráč mohl předat, je totiž čtyři, a $4^9 > 1000$.

Hra 26 (Plus minus). Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním tahu překreslí prostřední minus na plus (to v případě, že znaků je lichý počet), respektive prostřední dva plusy na minusy (to v případě, že znaků je sudý počet). Poté stačí symetricky opakovat tahy druhého hráče.

Hra 27 (Plus minus podruhé). Je-li znamének méně než tři, má vyhrávající strategii první hráč (svým prvním tahem změní na plus všechna najednou). Jsou-li znaménka alespoň tři, má vyhrávající strategii druhý hráč. První hráč totiž svým počátečním tahem kruh rozdělí a tím převede hru na předchozí Hru 26, ve které ovšem bude v roli druhého hráče.

Hra 28 (Kocouři). V případě $n = 6$ vyhraje první kocour se čtyřmi snědenými buřty (druhý sní dva), zatímco v případě $n = 7$ vyhraje druhý kocour rovněž se čtyřmi snědenými buřty (první sní tři).

V obecném případě lze matematickou indukcí podle počtu buřtů dokázat, že

- (i) je-li buřtů sudý počet, vyhraje první kocour, přičemž druhý sní o dva méně,
- (ii) je-li buřtů lichý počet (větší než 1), vyhraje druhý, přičemž první sní o jeden méně.

Hra 29 (Šestiúhelníky). Vyhrávající strategii má Alča (druhá hráčka). Na začátku je čokoláda středově symetrická. Rozeberme si Helčiny možnosti.

- (i) Helča rozlomí čokoládu napůl: Alča ze své části ulomí jeden trojúhelníček, ten předá Helče a Helča prohraje.
- (ii) Helča rozlomí čokoládu jinak než napůl a sní větší část: V takovém případě z menší části Alča opět může ulomit jeden trojúhelníček, předat ho Helče a Helča prohraje.
- (iii) Helča rozlomí čokoládu jinak než napůl a sní menší část: Alča dostala díl čokolády obsahující její původní střed, tudíž může provést tah (zlom) středově symetrický k Helčinému a Helče vrátit středově symetrický útvar.

Čokoláda je konečná, tedy možnost (iii) se nemůže opakovat do nekonečna a Helča vskutku prohraje.

Hra 30 (Dvě hromádky). Lze řešit zpětným rozborem nebo vysledovat, že je-li alespoň jedna z hromádek sudá (nenulová), je možné sníst lichou hromádku a sudou rozdělit na dvě liché. Jsou-li obě hromádky liché, není jiná možnost než vytvořit jednu hromádku sudou a jednu lichou. Konečná pozice je prohrávající a sestává ze dvou lichých hromádek. Odtud již plyne, že pozice typu (lichá; lichá) jsou prohrávající, kdežto pozice typu (sudá; sudá), (lichá; sudá), (sudá; lichá) jsou vyhrávající.

Hra 31 (Chomp).

- (i) Vyhrávající strategii má první hráč. V prvním tahu si vybere kostičku o jedna vpravo a o jedna nahoru od otrávené kostičky, čímž na protihráče zbyde útvar typu „L“ se stejně dlouhými „rameny“. Dále stačí hrát symetricky podle protihráče. Jediná nesymetrická kostička čokolády je otrávená, tudíž první má vskutku vyhrávající strategii.
- (ii) Vyhrávající strategii má opět první hráč. Podobně jako ve Hře 12 Mazání dělitelů se podívejme, jakého typu je pozice s chybějící kostičkou v pravém horním rohu.

Je-li tato pozice prohrávající, má první hráč vyhrávající strategii – stačí smazat ve svém počátečním tahu jedničku, a tím dostat protihráče do prohrávající pozice.

Naopak, je-li pozice bez pravého horního rohu vyhrávající, vede z ní tah do prohrávající pozice. Díky pravidlům hry se do oné prohrávající

pozice dá dostat hned prvním tahem, čímž jsme dokázali, že první hráč má vyhrávající strategii.

Poznamejme ještě, že stejnou argumentaci jako v případě (ii) lze samozřejmě použít i pro případ (i).

Hra 32 (Barvení bodů). Zapomeňme na chvíli na žluté body a spočtěme, na kolik rovnostranných trojúhelníků lze v rovině doplnit n oranžových bodů. Ke každé dvojici původních bodů jsou to dvě možnosti, dvojic je $n(n-1)/2$, celkem tedy $n(n-1)$ možností. Nezapočítali jsme, že některé možnosti se mohou překrývat, tomu ale snadno zamezíme, budou-li všechny oranžové body na jedné přímce.

Nyní vraťme žluté body do hry. Po n kolech je rozmístěno n oranžových bodů dávajících $n(n-1)$ možností na doplnění, z nichž nejvýše $100n$ je zabráno žlutými body – tedy nejpozději pro $n > 101$ se Pepovi podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy.

Hra 33 (Piškvorky 2 : 1). Majkl si před svým prvním tahem pomyslně vymezí na hracím plánu nepřekrývající se rámečky o rozměrech 100×1 (a neobsahující Ančin první křížek) – nechť je jich N .

V prvních $N/2$ kolech (předpokládejme, že N je sudé) zaplní Majkl kolečky první pole v každém rámečku. Pokud by se stalo, že první pole už mezitím Anča obsadila křížkem, zahraje Majkl odpovídající tah kamkoliv mimo rámečky. Mezitím stihne Anča umístit křížek nejvýše do $N/2$ rámečků, tedy zbyde minimálně $N/2$ rámečků bez křížků a s kolečkem na začátku – s těmi budeme pracovat dál.

V následujících $N/4$ kolech (předpokládejme, že $N/2$ je sudé) zaplní Majkl kolečky i druhá pole v oněch $N/2$ rámečcích a přitom do nejvýše $N/4$ z nich stihne Anča umístit kolečko. Máme tedy $N/4$ rámečků bez křížků a se dvěma kolečky na začátku.

A tak dále. Pokud Majkl na začátku zvolí $N = 2^{100}$, povede se mu po N tazích vytvořit nepřerušenu řadu ze 100 koleček.

Řešení her z 2. dílu

Hra 36. Mince na poli s číslem k odpovídá nimové hromádce o velikosti k , hrajeme tedy jako klasický Nim.

Hra 37 (Northcott). Northcottova hra není konečná, přesto má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

Pokud protihráč zvětší mezeru mezi nějakými dvěma kameny, zmenšíme mezeru na původní velikost. Jinak se na každý řádek díváme jako na nimovou hromádku, jejíž velikost odpovídá počtu mezer mezi kameny, a hrajeme jako klasický Nim. Pozice z obrázku tedy odpovídá Nimu s osmi hromádkami o velikostech $(4, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 2)$, a tudíž je vyhrávající.

Hra 38 (Bídný Nim). Hraje se stejně jako klasický Nim, a to dokud jsou alespoň dvě hromádky větší než jedna. Ve chvíli, kdy protihráč zahraje tak, že zbyde právě jedna hromádka větší než jedna, zmenšíme ji buď na jednu nebo na žádnou sirku, a to tak, aby zůstal lichý počet hromádek o velikosti jedna.

Výše uvedená strategie funguje z následujících důvodů. Vyhrávající strategie v klasickém Nimu nikdy nepožaduje, aby na stole zůstala právě jedna hromádka větší než jedna (Nim-součet musí být nulový), a zároveň protivník nikdy nemůže z pozice se dvěma hromádkami většími než jedna hrát do pozice s žádnou hromádkou větší než jedna.

Hra 42. Pro jednu hromádku a malé počty sirek jsou hodnoty SG funkce uvedeny v následující tabulce:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$SG(n)$	0	1	1	0	2	2	3	3	4	4

Pro $n > 10$ vychází už pravidelně $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.²⁹

Hra 43. Pro jednu hromádku a malé počty sirek jsou hodnoty SG funkce uvedeny v následující tabulce:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$SG(n)$	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11

Odtud lze vysledovat (a matematickou indukcí dokázat) obecné pravidlo:

n	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$4k + 4$
$SG(n)$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 4$	$4k + 3$

Hra 44 (Vločka). Graf, v němž nezbyly žádné hrany, má hodnotu SG funkce 0. Z vločky V_n jsou možné jen dva typy tahů – na vločku V_{n-1} nebo na graf bez hran. Z toho již plyne, že pro V_{2n+1} je hodnota SG funkce 1, zatímco pro V_{2n} je to 2 ($n \in \mathbb{N}$).

Hra 45 (Cesta). Hodnoty SG funkce jsou pro malá n uvedeny v následující tabulce:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$SG(n)$	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4	0	3	4	2	1	3	2	1	0	2

Řešení her z 3. dílu

Hra 47. Jedná se o hru s nulovým součtem, výplatní matice Lichého je

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ 1 & \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +2 & -4 \end{pmatrix} \\ 2 & \end{matrix}$$

Podobně jako ve Hře 46 lze nalezením vyvažujících strategií zjistit, že hodnota hry je 0 (tato varianta hry je tedy spravedlivá), optimální strategie Lichého je $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ a optimální strategie Sudého je rovněž $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

²⁹ Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x , což je největší celé číslo, které není větší než x .

Hra 48 (Karty). Jedná se o hru s nulovým součtem, výplatní matice první hráčky (Adi) je

$$\begin{array}{cc} & \text{červená} & \text{černá} \\ \text{černá} & \left(\begin{array}{cc} -3 & +9 \\ +10 & -16 \end{array} \right) \\ \text{červená} & & \end{array}$$

Obdobně jako v předchozích dvou hrách lze zjistit, že hodnota hry je $21/19$ (hra není spravedlivá), optimální strategie první hráčky (Adi) je $(13/19, 6/19)$ a optimální strategie druhé hráčky (Hely) je $(25/38, 13/38)$.

Hra 49. Dvojmatice hry je

$$\begin{array}{ccc} & A & B & A + B \\ A & (120, 120) & (150, 90) & (100, 140) \\ B & (90, 150) & (120, 120) & (60, 80) \\ A + B & (140, 100) & (80, 60) & (120, 120) \end{array}$$

Druhý řádek je dominován prvním, podobně je na tom druhý sloupec. Po jejich vyškrtnutí můžeme vyloučit rovněž první řádek a první sloupec, čímž nám pro každého hráče zbyde jen jedna strategie, a to „investuj do propagace na obou trzích“. Tato dvojice strategií je jediným rovnovážným bodem hry.

Hra 51 (Samaritánovo dilema). Z výplatní dvojmatice je patrné, že ve hře neexistují ryzí rovnovážné strategie.

Hledejme řešení ve smíšených strategiích. Označíme-li klasicky p pravděpodobnost, s níž volí první hráč strategii „podpořit“, a q pravděpodobnost, s níž volí druhý hráč strategii „snažit se“, pak jsou očekávané výhry jednotlivých hráčů po řadě

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p(5q - 1) - q, \quad \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = q(-2p + 1) + 3p.$$

Pomocí reakčních křivek lze zjistit, že jediný rovnovážný bod je

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right).$$

Hra 52. Ani v této hře neexistují ryzí smíšené strategie. Označme p pravděpodobnost, s níž volí Sněhurka strategii „lhát“, a q pravděpodobnost, s níž volí Trpaslík strategii „nevěřit“. Očekávané výhry jednotlivých hráčů jsou

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p(-8q + 2), \quad \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = q(3p - 2) - p.$$

Jediný rovnovážný bod hry je tedy ve smíšených strategiích a je jím bod

$$\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right).$$

Očekávaná výhra Sněhurky je rovna nule, zatímco pro Trpaslíka vycházejí $-\frac{2}{3}$. Ostatně už z výplatní dvojmatice bylo patrné, že Trpaslík může pouze prohrát, tedy se do podobné hry nejspíš dobrovolně pouštět nebude.

Závěr

Jak již bylo zmíněno v úvodu, podstatná část textu diplomové práce byla ve školním roce 2012/2013 zveřejněna jako tzv. „seriál“ v Matematickém korespondenčním semináři (MKS).

Cílem seriálu je ve třech částech seznámit řešitele s nějakým středoškolsky uchopitelným matematickým odvětvím, které se ovšem na většině středních škol nevyučuje. Žáci mají na prostudování každého dílu čtyři až pět týdnů a poté řeší tzv. „seriálovou sérii“.

Pro zajímavost uvádíme v následující tabulce všechny řešitele, kteří zaslali alespoň jednu seriálovou úlohu, a bodové ohodnocení, které za své úlohy získali. V každé seriálové sérii jsou zadány tři úlohy po pěti bodech. Kromě „reálných“ bodů za správnost řešení je možné získat nebo naopak ztratit ještě body „imaginární“, a to za výjimečně dobré či objevené matematické řešení, případně řešení příliš „neohrabané“ a „technické“. Na závěr se body upraví podle koeficientu, který má přidělen každý řešitel. Koeficient mírně zvýhodňuje mladší a nezkušené řešitele.

Pro představu o čtenosti textu ještě shrňme počty řešitelů jednotlivých sérií. První seriálovou sérii řešilo (tedy alespoň jednu úlohu zaslalo) 93 řešitelů, druhou 44 řešitelů a třetí 34 řešitelů (obecně v průběhu školního roku počet řešitelů MKS klesá z přibližně 150 na přibližně 60). Detaily lze nalézt na webových stránkách MKS (viz [4]).

Výsledková listina seriálu 32. ročníku

Ve sloupcích jsou uvedeny postupně tyto údaje – pořadí; jméno a příjmení; ročník; škola; body za seriálové úlohy (celkem devět úloh); celkový počet bodů; celkový počet bodů po přepočtení s koeficientem.

1.–3. <i>Martin</i>	<i>Raszyk</i>	3 G Karviná	5 5 5 5 5 5 5 5 5 45	45,00
1.–3. <i>Štěpán</i>	<i>Šimsa</i>	4 G JungmanLT	5 5 5 5 5 5 5 5 5 45	45,00
1.–3. <i>Radovan</i>	<i>Švarc</i>	2 G ČTřebová	5 5 5 5 5 5 5 5 5 45	45,00
4. <i>Jan</i>	<i>Soukup</i>	2 G Klatovy	5 5 5 5 5 5 5 5 4 44	44,27
5. <i>Miroslav</i>	<i>Stankovič</i>	3 G PošKošice	5 5 5 5 5 5 5 5 4 44	44,00
6. <i>Martin</i>	<i>Hora</i>	3 G Mikul23PL	5 4 5 5 4 5 5 5 5 43	42,14
7. <i>Matěj</i>	<i>Konečný</i>	2 G Jírov ČB	5 5 2 5 4 5 3 4 5 38	41,08
8. <i>Jakub</i>	<i>Šafin</i>	4 G HorMichal	5 5 5 5 5 5 5 1 5 41	40,25

9.	Jakub	Löwit	1	GČeskoliPH	5 5 2 5 0 5 4 4 4 34	40,20
10.	Tomáš	Novotný	3	G ČesLípa	5 5 2 5 4 5 - 5 5 36	39,87
11.	Marko	Puza	3	G PošKošice	5 5 5 5 4 - 4 5 5 38	38,21
12.	David	Hruška	4	GMikul23PL	5 5 5 5 5 5 - 5 5 40	37,66
13.	Jakub	Svoboda	3	G KomHavíř	5 5 1 5 3 3 5 2 4 33	36,18
14.	František	Couf	0	G ZborovPH	5 5 - 5 5 - 5 - - 25	35,99
15.	Adam	Láf	4	G ZborovPH	5 5 5 - 3 4 5 5 5 37	35,61
16.	Jakub	Dargaj	3	G PošKošice	5 5 2 5 5 - 2 5 5 34	35,06
17.	Dominik	Krasula	0	G Krnov	5 5 2 2 4 0 2 1 2 23	34,08
18.	Jan	Kadlec	2	G Klatovy	5 5 5 5 1 3 2 - 4 30	33,39
19.	Jiří	Guth	3	G Jírov ČB	5 5 2 5 5 5 2 0 4 33	33,14
20.	Petr	Lukeš	3	G NeumannŽR	5 5 5 - 1 5 2 - 5 28	30,95
21.	Anh Dung	Le	3	G Tachov	5 5 5 5 5 5 - - - 30	30,00
22.	Miroslav	Psota	3	GHlinŽilina	5 5 5 5 4 5 - - - 29	29,32
23.	Zuzana	Vlasáková	3	G Rumburk	5 5 - 5 - - - 5 5 25	28,86
24.	Viktor	Němeček	2	G JMasar JI	3 5 5 - 3 5 - 3 0 24	28,31
25.	Markéta	Calábková	2	G JŠkodyPŘ	5 5 - - 5 - - - 5 20	26,65
26.	Antonín	Češík	3	SPŠElek PA	- - - 5 4 4 2 5 5 25	26,45
27.	Miroslav	Krabec	3	G KomHavíř	5 5 - 1 3 - - 3 5 22	25,77
28.	Karolína	Kuchyňová	2	G MLerchaBO	5 5 3 - - - - 5 4 22	25,22
29.	Pavel	Turek	0	G TomkovaOL	5 5 5 4 0 - - - - 19	23,95
30.	Jan	Krejčí	3	G Bílovec	5 5 1 - - - - 2 5 4 22	23,90
31.	Josef	Svoboda	4	G FrýdlNOs	5 5 5 - 5 5 - 4 - 29	23,25
32.	Nicholas	Čapek	3	GBNěmcovHK	5 5 - 5 - - 2 - 2 19	22,90
33.	Henrieta	Michel'ová	1	GAlejKošic	5 5 2 3 - 2 - - - 17	22,28
34.-35.	Zuzana	Svobodová	1	G FrýdlNOs	5 5 5 1 1 1 - - - 18	21,00
34.-35.	Jan	Šorm	1	G JarošeBO	5 5 5 - 3 - - - - 18	21,00
36.	Michal	Buráň	4	G UherBrod	5 5 0 - - - 5 2 5 22	20,73
37.	Daniel	Demovič	1	G KepleraPH	5 5 2 3 0 0 - - - 15	19,77
38.	Jaromír	Mielec	0	G VolgogrOS	5 5 - - - - - 4 14	19,61
39.	Tran Vi T.	Pham	3	G NeumannŽR	5 5 2 - - - - - 5 17	19,45
40.	Anna	Steinhauserová	3	G Dačice	5 5 3 5 - - 3 - 0 21	19,37
41.	Zuzana	Šimečková	2	G ON ČesBud'	5 5 2 3 - - - - - 15	18,20
42.-48.	Anna	Doležalová	4	MasG Plzeň	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Ivona	Hrivová	3	GOkrŽilina	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Marta	Kossaczká	4	G Gröss BA	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Katarína	Krajčiová	2	GAlejKošic	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Tadeáš	Kučera	4	G JarošeBO	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Michal	Punčochář	3	G Jírov ČB	5 5 5 - - - - - 15	15,00
42.-48.	Martin	Sýkora	4	GNadAlejPH	5 5 5 - - - - - 15	15,00
49.	Barbora	Kociánová	4	GLesníZlín	5 5 2 4 - - - - - 16	14,50
50.	Kristýna	Šudomová	1	G ValašKlob	5 2 1 1 0 - - - - 9	13,78
51.	Martin	Čech	4	GNadAlejPH	5 5 4 - - - - - 14	13,73
52.	Josef	Havlíček	2	G NeumannŽR	5 5 2 - - - - - 12	13,47
53.	Jan	Erhart	2	G FXŠaldyLI	5 5 2 - - - - - 12	13,31
54.	Jakub	Hledík	2	GSŘMRSkuteč	5 5 2 - - - - - 12	13,30
55.-56.	Tomáš	Konečný	0	G JirsíkaČB	5 5 - - - - - 10	13,20
55.-56.	Václav	Steinhauser	0	ZŠVranéNVl	5 5 - - - - - 10	13,20

57.–58.	Miroslav Hanzelka	4 G ČesLípa	5 5 – 5 – – – – –	15	13,11
57.–58.	Dorota Jarošová	2 GAlejKošic	5 5 2 – – – – –	12	13,11
59.	Marián Poppr	2 GJNerudyPH	5 5 2 – 0 – 0 – –	12	12,99
60.–62.	Michaela Bieliková	3 G Sereď	5 5 2 – 0 – – – –	12	12,85
60.–62.	Petr Kepcija	3 G Jírov ČB	5 5 2 – – – – –	12	12,85
60.–62.	Magdaléna Tydrichová	3 G Mělník	5 5 2 – – – – –	12	12,85
63.–64.	Zuzana Drázdová	2 GON ČesBud'	5 5 1 – – – – –	11	12,64
63.–64.	Martin Surma	2 GJWolkraPV	5 5 1 – – – – –	11	12,64
65.	Barbora Šmídová	3 GBezručFM	5 5 2 – – – – –	12	12,53
66.	Aneta Šťastná	3 G Omská PH	5 5 2 – – – – –	12	12,47
67.	Jan Mikel	4 G RožnRadh	5 5 3 – – – – –	13	12,37
68.	Martin Minasjan	3 GKepleraPH	5 0 5 1 – – – – –	11	12,32
69.	Daniel Pišťák	1 GZborovPH	5 5 0 – – – – –	10	12,01
70.–71.	Tomáš Novotný	4 GJarošeBO	5 5 2 – – – – –	12	12,00
70.–71.	Tomáš Šlampiak	4 GStLubovňa	5 5 2 – – – – –	12	12,00
72.	Jakub Dolejší	2 GBNěmcovHK	5 5 – – – – –	10	11,93
73.	Jiří Zeman	3 GLesníZlín	5 – – – 4 – – – –	9	11,67
74.	Viktor Skoupý	3 G MTřebová	5 5 – – – – –	10	11,46
75.–77.	Lukáš Bystřický	3 GMikul23PL	5 4 1 – – – – –	10	11,23
75.–77.	Lukáš Knob	3 G Kojetín	5 5 – – – – –	10	11,23
75.–77.	Valentína Straková	3 G Sereď	5 5 – – – – –	10	11,23
78.	Tomáš Fiala	2 GLedečNSáz	5 4 0 – – – – –	9	11,15
79.	Matúš Porázik	3 GAlejKošic	5 5 – – – – –	10	10,91
80.	Mark Daniel	3 GPároNitra	5 5 – – – – –	10	10,90
81.	Janča Novotná	4 GJarošeBO	5 5 2 – – – – –	12	10,48
82.–83.	Lenka Šimonová	4 GLepařovJČ	5 5 0 – – – – –	10	10,00
82.–83.	Richard Trembecký	4 GAlejKošic	5 5 – – – – –	10	10,00
84.	Libor Martínek	4 GJarošeBO	4 5 – – – – –	9	9,00
85.	Filip Lamparter	1 GJarošeBO	5 – – – – –	5	8,51
86.	Ondřej Cífka	4 GNadAlejPH	5 5 – – – – –	10	8,41
87.	Martin Smolík	4 G Gröss BA	5 5 – – – – –	10	8,24
88.	Vendula Kotyzová	3 WichtG OS	5 1 – – – – –	6	7,25
89.	Anna Zavadilová	4 MKG Říčany	5 1 4 – – – – –	10	6,71
90.	Jan Křemen	3 G Vlašim	– 5 – – – – –	5	6,69
91.	Jiří Jaskowiec	3 WichtG OS	5 – – – – –	5	6,40
92.	David Bainer	4 GJarošeBO	5 0 2 – – – – –	7	5,84
93.	Michal Korbela	3 G Bánovce	2 – 1 – – – – –	3	4,07
94.	Václav Krchňák	1 GJarošeBO	0 0 0 1 – – – – –	1	2,51

Literatura a zdroje

Elektronické zdroje (aktuální k 17. březnu 2014)

- [1] Šeň A.: *Igry i strategii s točki zrenija matematiki*, Izdatelstvo MCNMO, Moskva, druhé vydání, 2008,
<http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-games.pdf>
- [2] Ferguson T. S.: *Game Theory*, University of California,
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html
- [3] XXXIII Turnaj M. V. Lomonosova, 26. září 2010,
<http://olympiads.mccme.ru/turlom/2010/zadaniya/tl2010mig.pdf>
- [4] *Matematický korespondenční seminář MFF UK*, Praha,
<http://mks.mff.cuni.cz>
- [5] Hykšová M.: *Teorie Her*, FD ČVUT, Praha, 2003,
http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/hry.pdf

Knižní zdroje

- [6] Engel A.: *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.
- [7] Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K.: *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Natick, Volume 1, Second Edition. A. K. Peters, Ltd, 2001.
- [8] Morris P.: *Introduction to Game Theory*, Springer-Verlag, New York, 1994.