Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

Kateřina Horáková

Eukleidovské a přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Eucklidean and Approximate Constructions of Regular Polygons

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: matematika - německý jazyk

PRAHA 2013

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem *Eukleidovské a přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků* vypracovala samostatně pod vedením mého vedoucího práce, Doc. RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D., s využitím výhradně pramenů uvedených v seznamu literatury.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle 60 odst. 1 autorského zákona.

V Drážďanech dne 23.6.2013 podpis

Na tomto místě bych chtěla poděkovat zejména mému vedoucímu práce, Doc. RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D., za jeho užitečné a cenné rady, podporu, konstruktivní připomínky a trpělivost při vedení bakalářské práce. Dále bych samozřejmě chtěla poděkovat i celé mé rodině a přátelům za podporu a důvěru.

Abstrakt

Tato práce se zabývá obecnou definicí, klasifikací a způsoby konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Díky systematickému uspořádání je možné tuto práci nazvat přehledem proveditelných konstrukcí vztahujících se k tématu pravidelného mnohoúhelníka. Kompilační metodou tak byl vytvořen přehled, který rozsahem svého zaměření je v české literatuře docela originální.

V první části je kladen důraz na teoretické zavedení pojmů a z toho i vyplývající souvislost algebry a geometrie.

Další část je věnována jednotlivým eukleidovsky sestrojitelným pravidelným mnohoúhelníkům. Předvedeny jsou jejich konstrukce pomocí pravítka a kružítka. U netriviálních případů je uveden důkaz o korektnosti použitého postupu. Velká pozornost je kladena na konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka, jehož konstruovatelnost zapříčinila zlom v chápání geometrie.

Závěrečná část je zaměřena na přibližné konstrukce některých mnohoúhelníků, jejichž eukleidovská konstrukce není proveditelná.

Klíčová slova: pravidelný mnohoúhelník, pravidelný sedmnáctiúhelník, eukleidovská konstrukce

Abstract

The main subjects of the present thesis are the basic definition, the classification and the construction methods of regular polygons. The structure of the thesis allows for using it as a summary of the whole topic. By employing the compilation method, a unique summarization was created for which there is no exact match in the field of the Czech literature.

The first part of this thesis deals with the theoretical definition of terms and with relations between algebra and geometry resulting from it.

The next part focuses on regular polygons the constructions of which are enabled by methods established by Euclid. The construction method is shown for the respective polygons, only tools alowed being the ruler and compasses. The exactness of the used methods is proved only in non-trivial cases. Great emphasis is also put on the construction of the regular heptadecagon, which caused a breakthrough in the understanding of geometry.

The last part presents several approximate construction methods for some polygons which cannot be constructed by using Euclid's method.

key words: regular polygon, regular heptadecagon, Euclidean construction

Obsah

Úvod

Tato práce je kompilací na zmíněné téma. Hlavní náplní a jejím cílem je klasifikace pravidelných mnohoúhelníků dle jejich konstruovatelnosti pouze za použití pravítka a kružítka.

Přestože je primárně zaměřena na konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, na začátku se budeme věnovat mnohoúhelníku obecně a rozdílům v jeho zavedení od různých autorů. Mezi těmi je například Eukleides, jehož principy slouží jako základní kámen té části geometrie, kterou se zde zabýváme.

Ne každý pravidelný mnohoúhelník je ale zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí. Proto se také budeme věnovat předpisu udávajícímu podmínky, které musí být splněny, aby bylo možné prohlásit, že daný mnohoúhelník lze sestrojit pouze eukleidovsky. Budeme se pak zabývat i částečným důkazem těchto podmínek.

V další části se zaměříme na konstrukce řady mnohoúhelníků sestrojitelných eukleidovskou konstrukcí. Neopomeneme zmínit a ukázat důkazy, proč jsou dané konstrukce skutečně platné a přesné. V prvé řadě se zaměříme na ty, jejichž konstrukce pochází už z dob samotného Eukleida. Pak si představíme pravidelný sedmnáctiúhelník, některé možnosti jeho konstrukce a i některé informace o historii jeho konstrukce. V neposlední řadě se zaměříme na další zkonstruovatelné mnohoúhelníky, jejichž konstrukce sice byly objeveny, ale nebudeme je uvádět, jelikož jsou příliš dlouhé a složité.

V poslední části se budeme věnovat pravidelným mnohoúhelníkům, jejichž eukleidovská konstrukce není možná, a důvodům k tomu vedoucím. V této kapitole si představíme i některé jejich přibližné konstrukce a určíme chybu, která při té či oné konstrukci vznikla.

Od počátku minulého století se neobjevily nové práce, které by se hlouběji zabývaly problematikou pravidelného sedmnáctiúhelníka, a už vůbec ne takové, které by se věnovaly stejnému tématu, navíc v jazyce českém. Nakonec existují i práce, které si v souvislosti na některé otázky, týkající se autora první konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka, odporují, což by zde mělo být objasněno.

Kapitola 1

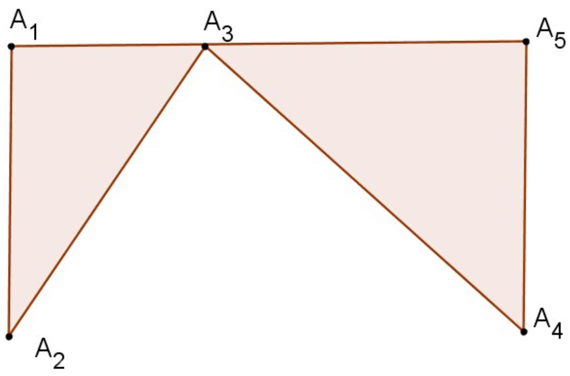
Mnohoúhelníky

Než se v této práci vůbec začneme zabývat eukleidovskými konstrukcemi pravidelných mnohoúhelníků, bylo by vhodné zavést několik nejdůležitějších pojmů. Mezi ty patří termíny *mnohoúhelník*, *pravidelný mnohoúhelník*, *eukleidovská konstrukce* a další.

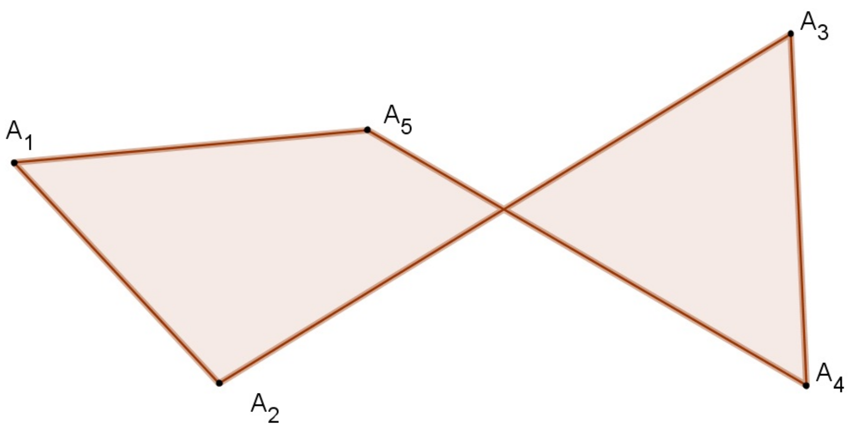
1.1 Definice mnohoúhelníka

Mnohoúhelník lze nadefinovat různými způsoby. Mezi těmito definicemi není fakticky velký rozdíl, nicméně například Eukleides zavádí pojem trojúhelníka, čtyřúhelníka a mnohoúhelníka v knize [1, s. 42] takto: „Trojúhelníkem je útvar třemi, čtyřúhelníkem čtyřmi a mnohoúhelníkem více než čtyřmi úsečkami (neboli stranami) omezený.“ Takto je ale pojmem *mnohoúhelník* nazván jen ten rovinný útvar, který má více než čtyři strany. To by však znamenalo, že trojúhelník a čtyřúhelník nejsou mnohoúhelníky. Ale například z pojetí Molnárovy a Kobzovy knihy [2, s. 57] lze získat definici mnohoúhelníka odlišnou: „Mnohoúhelník (n-úhelník) je ohraničený rovinný útvar, jehož hranicí je uzavřená lomená čára s n vrcholy, $n \in \mathbf{N}, n > 2$.“

Dle definice uvedené v knize [2] by se za mnohoúhelník dal považovat i některý z těchto rovinných útvarů (obr. 1.1, 1.2):



Obr. 1.1: Mnohoúhelník



Obr. 1.2: Mnohoúhelník

Ty ale na základní ani střední škole nenazýváme mnohoúhelníky. Mnohoúhelníky, se kterými jsou běžně seznamováni žáci základních a středních škol, spadají do kategorie tzv. *prostých mnohoúhelníků*. Krom toho, že splňují určené podmínky dané pro mnohoúhelníky, a to jak podle Eukleida, tak i Molnára s Kobzou, platí pro ně i další speciální pravidla. Tato pravidla však nesplňují výše znázorněné obrazce. Každý vrchol prostého mnohoúhelníka má být průsečíkem právě dvou stran[1] a jediným společným bodem dvou sousedních stran je vrchol mezi nimi, žádné nesousední strany nemají společný bod[2].

Všechny mnohoúhelníky lze rozdělit na *konvexní* a *nekonvexní*. Pro každý konvexní mnohoúhelník platí, že pokud jsou vybrány libovolné dva body, které tomuto mnohoúhelníku náleží, pak mu náleží i celá spojnice těchto dvou bodů. Jakýkoliv konvexní trojúhel-

[1]obr. 1.1 Bod A_3 je průsečíkem čtyř stran (A_1A_3, A_2A_3, A_3A_4, A_3A_5).

[2]obr. 1.2: Existuje průsečík nesousedních stran A_2A_3 a A_4A_5.

ník či čtyřúhelník je s jistotou prostý. Mnohoúhelník, který není konvexní, je nekonvexní. Mezi konvexními mnohoúhelníky pak existují takové, kterým lze opsat kružnici (tětivové mnohoúhelníky), vepsat kružnici (tečnové mnohoúhelníky), nebo opsat i vepsat kružnici (dvojstředové mnohoúhelníky). Jedním typem dvojstředových mnohoúhelníků je *pravidelný mnohoúhelník*. Takovýto mnohoúhelník je pak přesně definován v knize [2, s. 59] takto: „Mnohoúhelník je pravidelný, má-li shodné všechny vnitřní úhly a stejné délky všech stran.“

1.2 Eukleidovská konstrukce

V této práci se jedná o pravidelné mnohoúhelníky, které jsou zkonstruovatelné *eukleidovskými konstrukcemi*, popřípadě které jsou zkonstruovatelné povolenými nástroji alespoň přibližně. Tyto konstrukce jsou pojmenované podle řeckého matematika *Eukleida z Alexandrie* (4.–3. století př.n.l.). Ten zavedl terminologii a zásadní vlastnosti geometrických útvarů, aby je bylo možné pojmenovat a dále s nimi pracovat. Základní vlastnosti, na kterých je eukleidovský geometrický svět založen, jsou tzv. *axiomy*. Těch je celkem deset a popisují vztahy mezi obecnými geometrickými útvary. Těmito útvary jsou úsečka[3], bod, kruh, úhel apod.

Za eukleidovskou konstrukci pak považujeme takovou konstrukci geometrických objektů, při které se používá pouze kružítko a pravítko a která využívá některých ze základních pravidel. Při práci s pravítkem a kružítkem uvažujeme, že pravítko lze libovolně prodloužit tak, abychom byli schopni znázornit libovolně dlouhou úsečku, kružítkem lze znázornit kružnici s libovolným poloměrem.

Aby bylo jasné, co je vůbec možné s předepsanými nástroji tvořit a jak je možné s nimi pracovat, sepsal Eukleides i tzv. *postuláty*, které říkají, co je při eukleidovských konstrukcích povoleno. Tyto postuláty byly původně tři [1, s. 43]:

1. Vytvořit úsečku, která spojuje dva dané body.
2. Na jedné i druhé straně úsečku prodloužit tak daleko, jak potřebujeme.
3. Vytvořit kruh o daném středu, na jehož hranici[4] leží daný bod.

[3]Eukleides ji nazývá přímkou, přímkou v dnešní terminologii je pak úsečka libovolně prodloužitelná.
[4]Autor zde používá, dnes již pro danou problematiku nepoužívaný, výraz *obvod*.

Výše zmíněná pravidla pak jsou prakticky uchopitelná. Pokud jsou zadány dva body, jsme schopni sestrojit spojující úsečku. Stejně tak jsme schopni tuto úsečku libovolně prodloužit[5]. Nakonec také k nekonečně zadaným bodům zkonstruujeme nekonečné množství kružnic odpovídajících zadání. Všechny výše zmíněné postuláty by tedy při zadání nekonečného množství bodů bylo nutné ověřit.

Bohužel ale tato pravidla nejsou dostačující. Co víme o rovnoběžkách? Dle zavedení pojmu se v rovině neprotnou. Jak ale můžeme vědět, že se nejedná o různoběžky, které se přeci jen někde protnou? Někde, kam naše oko nedohlédne? Kvůli těmto případům Eukleides zavádí dodatečný čtvrtý postulát. „Postulát o rovnoběžkách. Nechť úsečka u protíná úsečky p, q tak, že na jedné straně úsečky u je součet vnitřních úhlů α, β, které svírají úsečky p, q s úsečkou u, menší než dva pravé úhly.[...]. Potom na této straně jest úsečky p, q prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla.“[1, str. 64]

Tento dodatečný čtvrtý postulát nakonec konstruujícího nutí uvěřit. Už se neřídí základním principem obsaženým v Základech: „Geometr [...] geometrické objekty vytváří, a to tak, že si je představuje. Bytí geometrických objektů tak není trvalé, je však obnovitelné. Vynořování geometrických objektů je tedy jejich tvořením.“[1, str. 36]. U čtvrtého postulátu se tedy předpokládá, že geometr bude věřit něčemu, co sám nevytvořil, a tedy co neexistuje.

Stojí za povšimnutí, že přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků nelze považovat za konstrukce eukleidovské.

1.3 Eukleidovské konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Není pravda, že by bylo možné pomocí eukleidovské konstrukce sestrojit bezchybně jakýkoliv pravidelný mnohoúhelník. Některé pravidelné mnohoúhelníky jsou sestrojitelné přesně (trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník,...), jiné přibližně[6] (sedmiúhelník).

Konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků se zabýval už Eukleides v obodobí starověkého Řecka. Podařilo se mu vyřešit konstruovatelnost a dokonce vytvořil samotný postup

[5]Nebo-li z ní (v dnešní terminologii) vytvořit přímku.

[6]Nikoliv však eukleidovskou konstrukcí, ale k ní povolenými prostředky.

konstrukce pro rovnostranný trojúhelník, čtverec a další, zkrátka všechny pravidelné mnohoúhelníky o n vrcholech, kde n odpovídá vztahu $n = 2^k 3^l 5^m$, kde $k \in \mathrm{N}_0 \wedge l, m \in \{0, 1\}$, nicméně co se týče dalších mnohoúhelníků (devítiúhelníka či sedmnáctiúhelníka), u nich nebyl schopen zkonstruovatelnost pouze pomocí kružítka a pravítka jednoznačně rozhodnout.

S řešením přišel téměř o dva tisíce let později německý matematik *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855). Zároveň pak vyslovil větu určující, kdy je pravidelný mnohoúhelník zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí. Tuto větu dnes nazýváme *Gaussovou větou*: „Pravidelný mnohoúhelník je eukleidovsky konstruovatelný (tj. pomocí kružítka a pravítka) tehdy a jen tehdy, když počet jeho vrcholů je roven číslu $k = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$, kde $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 3$ jsou celá čísla a $p_1, p_2, \dots, p_j$ navzájem různá Fermatova prvočísla.“ [3]. Už v devatenácti letech se mu podařilo dokázat, že pomocí pravítka a kružítka je možné zkonstruovat pravidelný sedmnáctiúhelník. Ve svém díle *Disquisiones arithmeticae* se pak zabývá konstruovatelností pravidelných mnohoúhelníků, jejichž počet vrcholů je z množiny Fermatových prvočísel. Tedy jednou z klíčových částí Gaussovy věty. Samotnou konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka, 257-úhelníka a dalších ale světu nepředvedl.

Fermatova prvočísla získala svoje pojmenování podle francouzského matematika *Pierra Fermata* (1601–1665). Dle jeho hypotézy každé číslo F_m tvaru $F_m = 2^{2^m} + 1$
pro $m = 0, 1, 2, \dots$ je prvočíslo. Všechna čísla odpovídající tomuto vztahu pak po svém objeviteli získala název *Fermatova čísla*. Výše zmíněnou hypotézu se mu ale nepodařilo dokázat. To by ani nebylo možné, protože není platná. Roku 1732 zjistil *Leonhard Euler*(1707–1783), že Fermatovo číslo F_5 je součinem dvou netriviálních činitelů, což vyvrací Fermatovu hypotézu o prvočíselnosti. Je ale možné vyřknout další větu: *Pokud je F_m prvočíslo, nazýváme jej Fermatovým prvočíslem.* [3]

Sice bylo dokázáno, že existují taková Fermatova čísla, která nejsou prvočísly, ale nebylo zdaleka dokázáno, zda existuje nekonečně mnoho Fermatových prvočísel, jak bylo v původní myšlence.

1.4 Gaussova věta

Ačkoliv není známo, zda je Fermatových prvočísel konečný či nekonečný počet, a počet pravidelných mnohoúhelníků je závislý na počtu Fermatových prvočísel[7], je možné tvrzení, že pravidelných mnohoúhelníků zkonstruovatelných eukleidovskou konstrukcí bude nekonečně mnoho. Počet vrcholů k mnohoúhelníka má odpovídat vztahu danému Gaussovou větou, tj. $k = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$, kde $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 3$ a p_n jsou postupně různá Fermatova prvočísla, takže při řešení konečnosti množiny obsahující všechny pravidelné eukleidovsky zkonstruovatelné mnohoúhelníky nesmí být opomenut první činitel výše uvedené věty – 2^i. Vzhledem k tomu, že čísel 2^i pro $i \geq 0$ existuje nekonečně mnoho, existuje stejně tak nekonečně mnoho pravidelných mnohoúhelníků, zkonstruovatelných pouze pomocí pravítka a kružítka.

Důkaz této věty provedeme postupně v několika krocích. Nejprve bude dokázána zkonstruovatelnost $2n$-úhelníka za předpokladu, že n-úhelník je zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí. V další části se budeme zabývat zkonstruovatelností l-úhelníka, pokud je l součinem různých vzájemně nesoudělných přirozených čísel, která udávají počet vrcholů mnohoúhelníků, které lze sestrojit pouze pomocí kružítka a pravítka. Nakonec bude břiblíženo, že aby bylo možné mnohoúhelník eukleidovskou konstrukcí sestrojit, musí být činitelé p_n uvedené v Gaussově větě různá Fermatova prvočísla.

Vzhledem k tomu, že čísla p_n mají být Fermatovými prvočísly, je nutné nejprve určit, pro která čísla m po dosazení do vztahu $F_m = 2^{2^m} + 1$ bude platit, že F_m je prvočíslem. Jak už bylo zmíněno výše, Fermat se domníval, že všechna čísla, která odpovídají uvedenému vztahu, lze označit za prvočísla. Ale již pro $m = 5$ a další čísla toto tvrzení nemusí platit. Jak stojí v [3], roku 1732 se podařilo Eulerovi rozložit Fermatovo číslo $F_5 = 2^{2^5} + 1$ na součin čísel 641 a 6 700 417. Obecnější důkaz, že je číslo F_5 rozložitelné na menší prvočísla, je uveden v knize [4, s. 153].

V první dokazované části se jedná o triviální konstrukci os stran, která je prováděna tolikrát, kolik činí exponent u základu dva. Tedy například pravidelný šestiúhelník by bylo možné sestrojit pomocí rovnostranného trojúhelníka a každé z jeho stran zkonstruovat osu. Její průsečík s kružnicí opsanou trojúhelníku by pak tvořil další vrchol požadovaného

[7] Počet vrcholů pravidelného mnohoúhelníka je roven součinu několika různých Fermatových prvočísel, jednomu takovému číslu, popřípadě jejich součinu s mocninou čísla 2.

útvaru. Analogicky by se dalo postupovat při konstrukci pravidelného dvanáctiúhelníka, čtyřiadvacetiúhelníka atd.

Vzhledem k tomu, že se budeme řídit tvrzením ohledně os stran a možnosti pomocí nich a kružnice opsané sestrojit mnohoúhelník s počtem vrcholů $2n$ k původnímu n-úhelníku, bude jej potřeba dokázat.

Pravidelný mnohoúhelník má všechny strany stejně dlouhé. Množinu bodů se stejnou vzdáleností k vrcholům A_1 a A_3 určuje osa o. Vzhledem k tomu, že pravidelnému mnohoúhelníku se dá opsat kružnice, musí všechny jeho vrcholy náležet jedné kružnici. Vrcholem pravidelného šestiúhelníka tedy bude průsečík osy o a kružnice opsané.

Krom této již výše zmíněné kostrukce, lze mnohoúhelník o *2n* vrcholech sestrojit i pomocí postupu *půlení kruhové výseče*, jinak také metodou *půlení úhlu.*

Tento postup lze libovolně opakovat, lze tak tedy vždy docílit i půlení při činiteli 2^i. Pokud tedy bude n-úhelník zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí, můžeme to samé prohlásit o $2n$-úhelníku.

Nyní se budeme zabývat součinem dvou vzájemně nesoudělných přirozených čísel, která udávají počet vrcholů zkonstruovatelného mnohoúhelníka. Důkaz níže je popsán blíže v knize [8, s. 48, 49]. Z předpokladu víme, že p_m, p_n mají být vzájemně nesoudělná. Za využití *Eukleidova algoritmu* tento vztah lze zapsat jako

$$a \cdot p_m - b \cdot p_n = 1,$$

kde $a, b \in \mathbf{N}$. Jestliže lze zkonstruovat mnohoúhelníky o p_m a p_n vrcholech, pak musí platit pro α, β

$$\alpha = \frac{2\pi}{p_m}, \quad \beta = \frac{2\pi}{p_n},$$

že jsou zkonstruovatelné. A tím pádem i jejich lineární kombinace odpovídá vztahu

$$b \cdot \alpha - a \cdot \beta = \frac{b \cdot 2\pi}{p_m} - \frac{a \cdot 2\pi}{p_n} = \frac{b \cdot p_n - a \cdot p_m}{p_m p_n} \cdot 2\pi.$$

Z původního předpokladu o nesoudělnosti vyplývá

$$\frac{b \cdot p_n - a \cdot p_m}{p_m p_n} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{p_m p_n}.$$

Do této doby jsme ale předpokládali, že původní činitelé $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_j$ skutečně udávají počet vrcholů pravítkem a kružítkem sestrojitelného pravidelného mnohoúhelníka. Aby byl daný pravidelný mnohoúhelník skutečně zkonstruovatelný, musí být těmito činiteli různá Fermatova prvočísla. Důkaz je např. v knize [16].

Kapitola 2

Eukleidovské konstrukce konkrétních pravidelných mnohoúhelníků

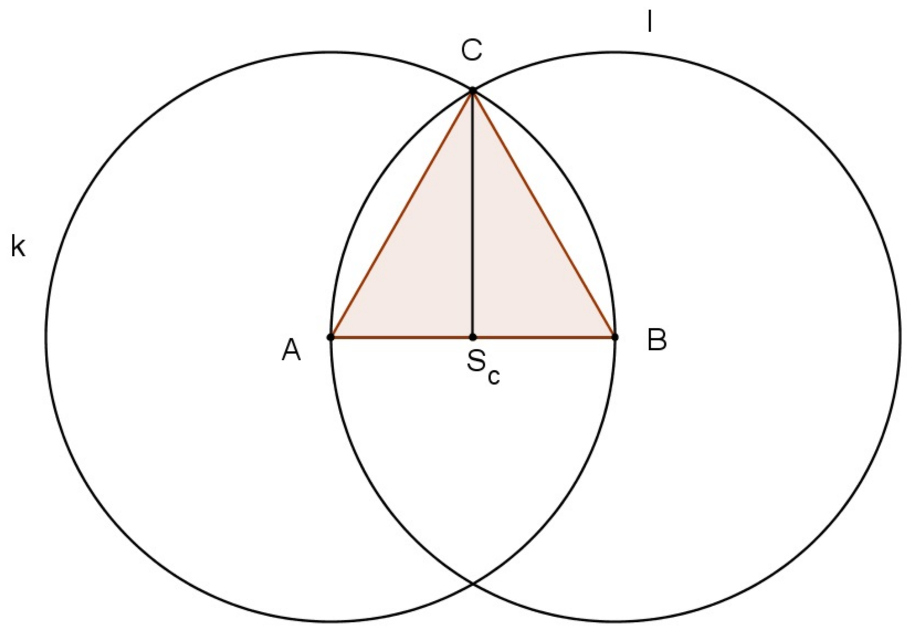
2.1 Konstrukce známé už z dob Eukleida

Jak již bylo zmíněno, už ve starověkém Řecku byly objeveny konstrukce pravidelných mnohoúhelníků o n vrcholech, kde platí vztah $n = 2^k 3^l 5^m$ pro $k \in \mathbf{N}_0 \wedge l, m \in \{0, 1\}$. Konkrétně se tedy jedná o rovnostranný trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, osmiúhelník, desetiúhelník, dvanáctiúhelník, patnáctiúhelník a další.

Tato část bude zaměřena právě na konstrukci rovnostranného trojúhelníka, čtverce, pětiúhelníka, šestiúhelníka a patnáctiúhelníka.

2.1.1 Rovnostranný trojúhelník

S pojmem *trojúhelník* byl geometrický svět seznámen za Eukleida z Alexandrie, který ho použil ve svých spisech o základech geometrie [1]. Při srovnání s dnešní definicí pro trojúhelník je Eukleidovo zavedení pojmu mnohem intuitivnější. Z hlediska poměru délek stran se trojúhelníky dělí na *rovnostranné, rovnoramenné* a *obecné*. Obecný trojúhelník nemá žádné dvě strany stejně dlouhé, rovnoramenný trojúhelník má právě dvě strany stejně dlouhé, rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany stejně dlouhé. Právě jeho konstrukcí se budeme zabývat (obr. 2.1).



Obr. 2.1: Konstrukce rovnostranného trojúhelníka

Důkaz konstrukce trojúhelníka. Dle obr. 2.1 a z konstrukce vyplývá, že body B a C náleží stejné kružnici a mají tak od středu – bodu A – stejnou vzdálenost. Podobná situace nastává v případě kružnice se středem v bodě B. Všechny tři úsečky jsou tedy stejně dlouhé.

Vzhledem k tomu, že v pravidelném mnohoúhelníku mají být i všechny úhly shodné, musíme i tuto podmínku dokázat.

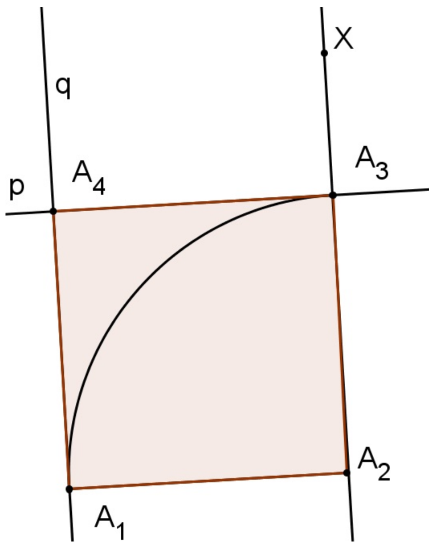
Nechť je dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod S_c jako střed strany AB. Po spojení bodů C a S_c vzniknou dva trojúhelníky – $\Delta AS_cC, \Delta BS_cC$. Podle věty *sss* („Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují ve všech třech stranách."[7, str. 19]) jsou tyto trojúhelníky shodné. Oba trojúhelníky tak mají shodné i odpovídající si úhly. Pak tedy platí, že $\angle BAC \cong \angle CBA$.

Stejný postup lze samozřejmě aplikovat i pro zbylé strany. Pro stranu AC, popřípadě BC získáváme $\angle ACB \cong \angle BAC$, popřípadě $\angle CBA \cong \angle ACB$. Po vzájemném dosazení vychází $\angle ABC \cong \angle ACB \cong \angle BAC$. □

2.1.2 Čtverec

Pro označení pravidelného čtyřúhelníka bývá také velmi často používán termín *čtverec*. Jeho konstrukce je známá také už z doby antického Řecka od již zmíněného Eukleida z Alexandrie. Přesnou konstrukci čtverce lze nalézt opět v jeho slavném spise *Základy*. My si tu ale předvedeme konstrukci trochu pozměněnou.

Pro konstrukci čtverce $A_1A_2A_3A_4$ máme zadanou délku jedné strany a. Tuto stranu pojmenujeme A_1A_2. Z bodu A_2 vedeme kolmici A_2X k úsečce A_1A_2. Na této kolmici pomocí kružítka naneseme bod A_3, a to tak, že $|A_2A_3| = |A_1A_2|$. Z bodu A_3 je vedena rovnoběžná přímka p se zadanou stranou A_1A_2, stejně tak bodem A_1 přímka q s přímkou A_2A_3. Průsečík těchto dvou přímek pak je bod A_4. Mnohoúhelník vzniklý postupným propojením bodů A_1, A_2, A_3, A_4 je hledaným *čtvercem* $A_1A_2A_3A_4$ (obr. 2.2).

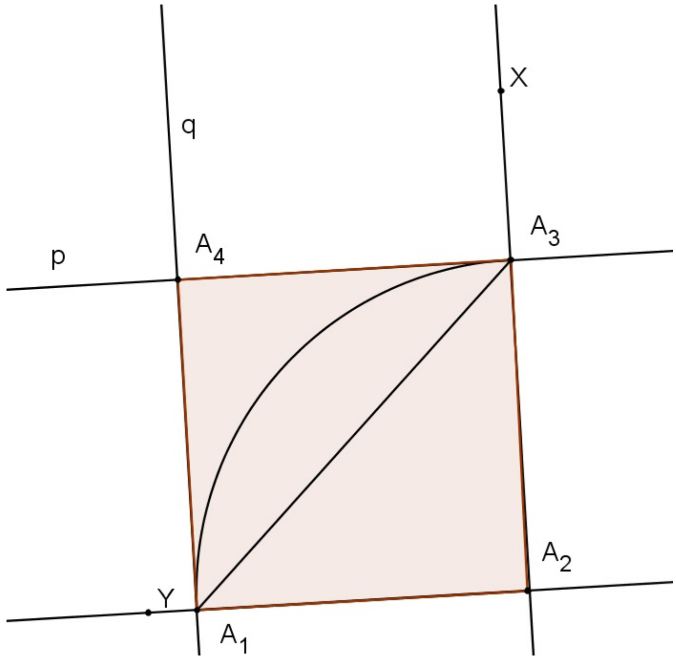


Obr. 2.2: Konstrukce čtverce

Níže je předveden důkaz, že byl touto konstrukcí skutečně sestrojen pravidelný čtyřúhelník – čtverec.

Důkaz konstrukce čtverce. Nejprve dokážeme stejnou velikost všech vnitřních úhlů získaného čtyřúhelníka.

Úhly $\angle A_2A_1A_4, \angle A_2A_3A_4$ mohou být větší, menší, nebo rovny úhlu pravému. Důkaz provedeme jen pro úhel $\angle A_2A_1A_4$, pro ten druhý je postup díky způsobu sestrojení obdobný.



Obr. 2.3: Pomocná konstrukce při důkazu zkonstruovaného čtverce

Pokud by byl sledovaný úhel menší než úhel pravý, muselo by platit:

$$|\angle A_2A_1A_4| + |\angle A_1A_2A_3| = |\angle A_2A_1A_4| + 90^\circ < 180^\circ.$$

Na základě věty o *vnitřních úhlech trojúhelníka*[1], by pak existoval takový bod P[2], že součet vnitřních úhlů trojúhelníka A_1A_2P by byl roven velikosti přímého úhlu. Jelikož mají být ale přímky A_1A_4 a A_2A_3 rovnoběžné, je existence takového bodu P vyloučena. To samé platí pro případ, že je sledovaný úhel větší než úhel pravý. Pak by byl totiž jeho vedlejší úhel – $\angle A_4A_1Y$ (obr. 2.3) – menší než pravý úhel a nastal by předchozí případ. Zkoumaný úhel tedy bude určitě pravý. Jak už bylo řečeno na začátku, stejným postupem můžeme ukázat, že pravý je i úhel $\angle A_2A_3A_4$.

Nyní je možné stejnou myšlenku použít i na ověření velikosti posledního z vnitřních úhlů – $A_1A_4A_3$. Z toho získáváme $|\angle A_1A_4A_3| = |\angle A_2A_3A_4| = |\angle A_1A_2A_3| = |\angle A_2A_1A_4|$. Všechny vnitřní úhly vzniklého mnohoúhelníka jsou tedy shodné.

Abychom ale skutečně mohli mluvit o čtverci, je nutné ještě dokázat, že jsou všechny strany stejně dlouhé. Z konstrukce vyplývá, že délky úseček A_1A_2 a A_2A_3 jsou stejné. Je nutno ukázat, že i úsečky A_3A_4 a A_1A_4 jsou stejně dlouhé jako A_1A_2 a A_2A_3.

[1] V každém trojúhelníku platí, že součet jeho vnitřních úhlů je roven dvěma úhlům pravým (2R).

[2] Průsečík přímek A_2X a A_1A_4.

Sestrojením úsečky A_1A_3 je čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$ rozdělen na dva trojúhelníky – – $A_1A_2A_3$ a $A_3A_4A_1$ (obr. 2.3). Úhly $A_2A_1A_3$ a $A_1A_3A_4$ jsou úhly střídavé, a proto platí $\angle A_3A_1A_2 \cong \angle A_1A_3A_4$. To samé je možno říct o dvojici úhlů $A_1A_3A_2$ a $A_3A_1A_4$. Dané trojúhelníky jsou dle věty *usu* („Dva trojúhelníky jsou shodné, právě když se shodují v jedné straně a v úhlech k ní přilehlých.“ [7, str. 19]) shodné. Potom mají shodné i všechny odpovídající si strany ($A_1A_4 \cong A_2A_3 \wedge A_1A_2 \cong A_3A_4$). A jelikož ze zadání konstrukce víme, že platí $|A_1A_2| = |A_2A_3|$, tak pak platí i $|A_3A_4| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_1A_4|$. Všechny strany vzniklého čtyřúhelníka jsou tedy stejně dlouhé. Námi sestrojený mnohoúhelník je skutečně čtvercem. □

2.1.3 Pravidelný pětiúhelník

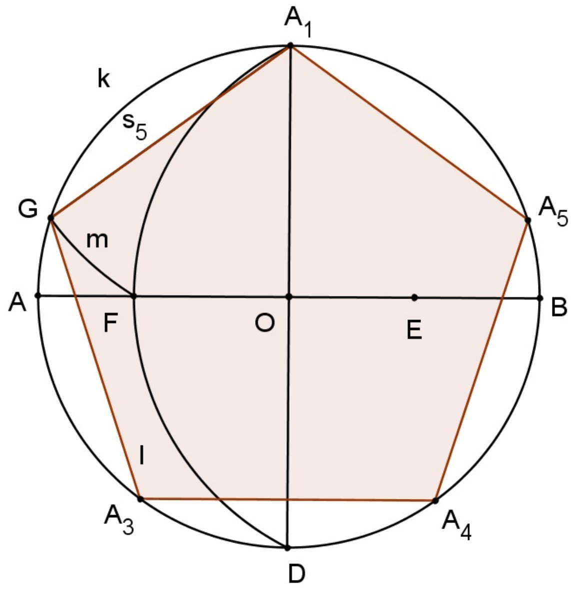
Jak již bylo zmíněno výše, konstrukce pravidelného pětiúhelníka je známá a sepsaná už od dob řeckého myslitele Eukleida. Nicméně narozdíl od rovnostranného trojúhelníka či čtverce v sobě nese i vlastnost *zlatého řezu* („Zlatým řezem úsečky se rozumí její rozdělení na dvě nestejně dlouhé úsečky, z nichž délka kratší z nich ku délce delší z nich je ve stejném poměru jako délka delší z nich ku délce celé úsečky.“ [7, str. 122]). Kvůli této vlastnosti se pravidelný mnohoúhelník zasloužil o svou popularitu mezi matematiky a umělci už od antického Řecka. S tím souvisí i fakt, že vznikla spousta předpisů jeho konstrukce.

Při zde uváděných konstrukcí jsme doposu využívali zejména toho, že byla při konstrukci daného mnohoúhelníka zadána délka strany tohoto útvaru. Vzhledem k tomu, že samotná Gaussova úvaha o konstruovatelnosti mnohoúhelníků se opírá o jednotkovou kružnici, kam se postupně nanášejí jednotlivé body, budeme se již od tohoto mnohoúhelníka řídit tímto pravidlem. Přesné znění této konstrukce, objevené samotným Eukleidem, je k nalezení v knize [8, str. 57].

Pro konstrukci daného pravidelného mnohoúhelníka je tedy zadána kružnice k se středem v bodě O. Úsečky AB a A_1D jsou navzájem kolmé průměry kružnice k. Platí tedy

$$AB \perp A_1D \ \wedge \ AB \cap A_1D \ni O$$

Jako E nazvěme střed úsečky OB a jako F takový bod na úsečce AB, pro který platí $|EF| = |EA_1|$ (obr. 2.4). Na kružnici k nalezneme pomocí kružnice m takový bod G, který má od bodu A_1 stejnou vzdálenost jako bod F. Vzdálenost $|GA_1|$ je pak délka strany hledaného pětiúhelníka – s_5. Kružnice k je kružnicí opsanou danému pětiúhelníku.



Obr. 2.4: Konstrukce pravidelného pětiúhelníka

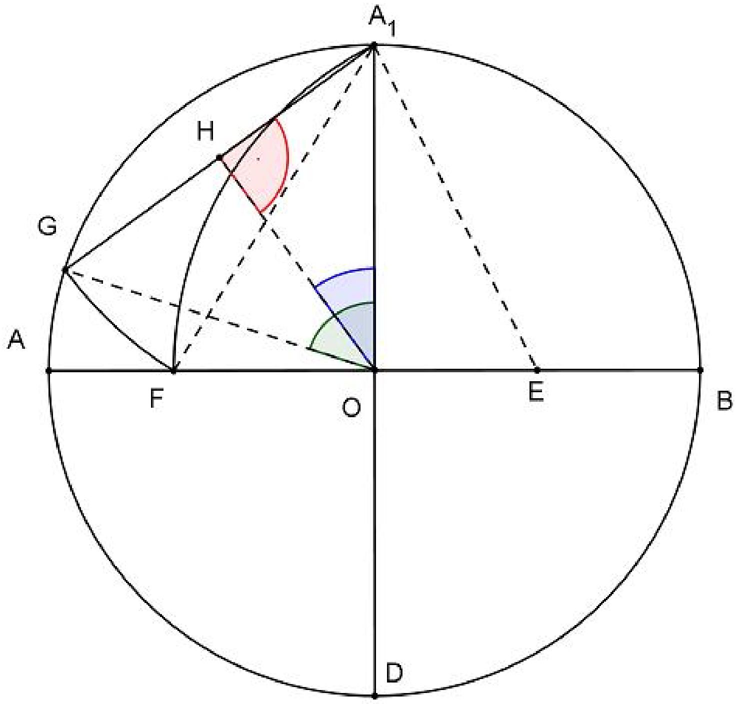
Průsečíky kružnice k a postupně nanášené délky s_5 z bodu A_1 jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníka. Po spojení sousedních vrcholů získáváme hledaný pětiúhelník $A_1GA_3A_4A_5$.

Důkaz konstrukce pravidelného pětiúhelníka. Nejprve se zaměříme na důkaz shodnosti jednotlivých stran mnohoúhelníka, poté bude dokázána shodnost vnitřních úhlů sestrojeného pětiúhelníka.

Jednotlivé vrcholy pětiúhelníka jsou průsečíky kružnice k a oblouku kolem sousedního vrcholu, a to až do vrcholu A_5. Otázkou tedy zůstává, zda platí i $|A_5A_1| = s_5$. Zda jsou tedy všechny takto vzniklé strany stejně dlouhé.

Zaměříme se na obr. 2.5, který je vlastně mezikrokem při konstrukci zadaného mnohoúhelníka. Po tomto stavu stačí jen odměřit kružítkem vzdálenosti jednotlivých stran a vzniklé průsečíky postupně spojit.

Bez omezení obecnosti můžeme uvažovat kružnici k s poloměrem 1. Všechny jiné kružnice by byly podobné této a při podobném zobrazení se sice mění vzdálenosti, nicméně poměry a úhly zůstávají stejné. A to je v našem důkazu klíčové.



Obr. 2.5: Mezikrok při konstrukci pravidelného pětiúhelníka

Trojúhelník A_1OG je *rovnoramenný* s rameny A_1O a GO. Spojnice bodu O a středu protější strany ho tedy rozdělí na dva menší trojúhelníky – A_1HO a GHO. Tyto trojúhelníky jsou dle věty *sss* navzájem shodné. Úhly u vrcholu H jsou úhly pravými, velikosti úhlů u vrcholu O jsou stejné. Velikost vnitřního úhlu u vrcholu O trojúhelníka A_1OG bude tedy dvojnásobná velikosti úhlu u stejného vrcholu v nově vzniklém trojúhelníku A_1HO, nebo-li $|\angle A_1OG| = 2|\angle A_1OH|$.

Podle Pythagorovy věty (Trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když platí, že obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.) lze vypočítat délku úsečky A_1E – přeponu pravoúhlého trojúhelníka EA_1O:

$$|A_1E| = \sqrt{|EO|^2 + |A_1O|^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Stejného vztahu lze využít i u trojúhelníka FOA_1:

$$|FO| = |FE| - |OE| = |A_1E| - |OE| = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$|FA_1| = \sqrt{|FO|^2 + |OA_1|^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} + 1} = \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Nyní již v trojúhelníku OA_1H známe délky dvou jeho stran a potřebujeme zjistit velikost úhlu $\angle A_1OH$. Dosadíme do

$$\sin(\angle A_1OH) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

z čehož vychází $|\angle A_1OH| = 36°$; odůvodnění tohoto je k nalezení níže. Úhel A_1OG je pak roven $72°$, součet pěti takovýchto úhlů je roven úhlu plnému. Všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou v jedné ze stran konstruovaného pětiúhelníka a s hlavním vrcholem ve středu O jsou podle věty *sus* shodné, pak jsou stejně dlouhé i všechny strany zkoumaného pětiúhelníka.

Během důkazu shodnosti bylo využito vztahu $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Níže je dokázáno, že je tento vztah skutečně platný.

K tomuto důkazu využijeme vztahu *zlatého řezu*, v tomto případě tedy konkrétněji *zlatého trojúhelníka*. To je takový rovnoramenný trojúhelník, kdy je poměr délky jeho ramena a základny roven *zlatému číslu*. Nejprve tedy bude nutné čtenáře blíže seznámit s vlastností zlatého řezu.

Jak již bylo zmíněno výše, jedná se o poměr délek dvou nestejných částí úsečky. Pro konkrétní představu si pak lze představit úsečku AB a bod C, který tuto úsečku rozděluje v poměru zlatého řezu. Platí tedy[3] $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Pokud platí, že $|AC| = x$ a $|AB| = a$, je velikost úsečky BC rovna $a - x$. Po dosazení do výše uvedené rovnice dostáváme kvadratickou rovnici

$$0 = x^2 - 3ax + a^2.$$

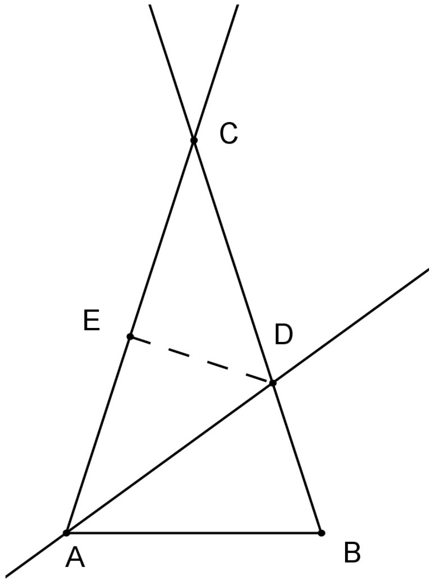
Pomocí této rovnice je možné vyjádřit délky x a $a - x$ v závislosti na a: $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$, $a - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Porovnáním těchto délek x a $a - x$ získáváme tzv. *zlaté číslo*:

$$\varphi = \frac{a-x}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Nechť je tedy dán zlatý trojúhelník ABC (obr. 2.6), jehož úhly při základně jsou rovny $72°$, třetí úhel tak bude mít velikost $36°$[4]. Na úsečce BC existuje takový bod D, že přímka AD je osa úhlu BAC. Jelikož jsou pak úhly DCA a DAC shodné, je trojúhelník

[3] V tomto případě za předpokladu, že $|AC| < |BC|$.

[4] Důkaz, že je takovýto trojúhelník zlatým trojúhelníkem, je např. v [7, str. 118].



Obr. 2.6: Zlatý trojúhelník

ADC také rovnoramenný s rameny CD a DA. Po spojení bodu E – středu strany AC – – a bodu D, dostaneme dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

Další zajímavou vlastností zlatého trojúhelníka je, že bod D dělí stranu BC v poměru zlatého řezu. Trojúhelníky ABC a BDA jsou totiž podle věty uu podobné, poměry v těchto trojúhelnících tedy budou stejné. Jestliže je poměr délek úseček DA a BD roven zlatému číslu, musí toto platit i pro poměr délek CD a BD, protože $|AD| = |DC|$.

Pak tedy můžeme aplikovat vztahy platící pro úsečky v poměru zlatého řezu:

$$|BD| = x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

$$|AD| = |CD| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

Vrátíme se k důkazu vztahu $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Díky pravoúhlému trojúhelníku ADE lze objevit vztah pro $\cos 36°$:

$$\cos 36° = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{a-x} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Dále využijeme vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Pomocí toho vyjádříme $\sin 36°$ jako

$$\sin 36° = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

čímž získáváme stejný tvar, kterého bylo využito při důkazu shodnosti stran sestrojeného pětiúhelníka.

Všechny strany sestrojeného pětiúhelníka jsou tedy beze sporu shodné. Nyní se budeme zabývat shodností všech jeho vnitřních úhlů.

Jak už bylo zmíněno, všechny trojúhelníky s vrcholem u středu kružnice a jednou stranou zkonstruovaného mnohoúhelníka jsou shodné. Bez omezení obecnosti si zvolíme trojúhelníky A_1OA_2, A_2OA_3 a A_3OA_4. Víme, že platí $\angle OA_1A_2 \cong \angle OA_2A_3 \cong \angle OA_3A_4$, tedy $|\angle OA_1A_2| = |\angle OA_2A_3| = |\angle OA_3A_4|$; stejně tak platí, že $\angle OA_2A_1 \cong \angle OA_3A_2 \cong$ $\cong \angle OA_4A_3$, tedy $|\angle OA_2A_1| = |\angle OA_3A_2| = |\angle OA_4A_3|$. Podle jedné ze základních Eukleidových zásad „Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.“ [1, str. 13], můžeme uvažovat, že $|\angle A_1A_2A_3| = |\angle A_2A_3A_4|$, a protože takovouto trojici je možné nelézt pro každé dva sousední úhly, jsou shodné všechny vnitřní úhly sestrojeného útvaru. □

2.1.4 Pravidelný šestiúhelník

Konstrukce pravidelného šestiúhelníka byla již v této práci zmíněna, a to v souvislosti s možností konstrukce pravidelného $2n$-úhelníka za využití pravidelného n-úhelníka a os jeho stran.

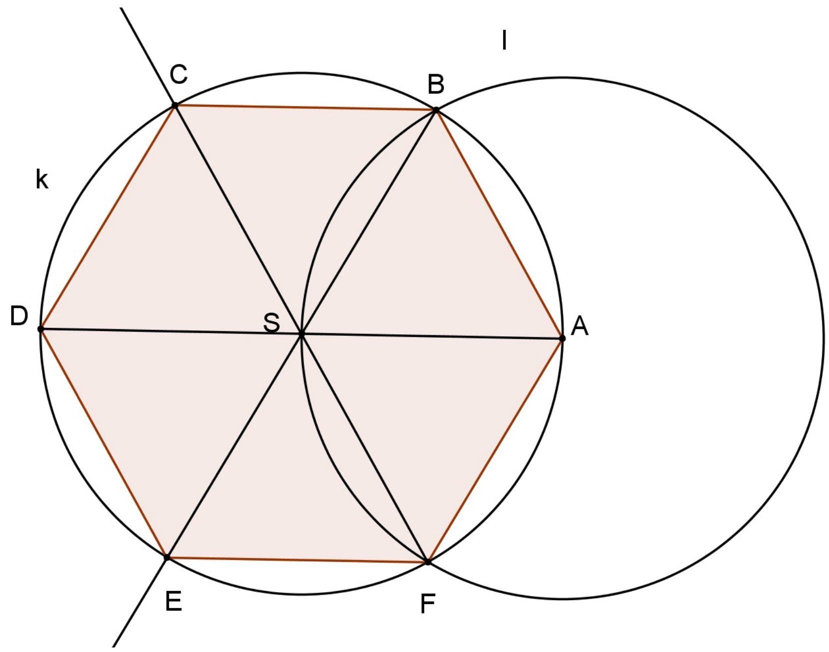
Tuto metodu by samozřejmě bylo možné použít, nicméně na základních školách jsou žáci seznamováni s metodou snažší. Ta je vlastně, co se týče konstrukční náročnosti, zjednodušenou verzí toho, s čím už dávno přišel Eukleides. My si tady ukážeme obě dvě. Nejprve si představíme verzi Eukleidovu.

Je dána kružnice k[5] se středem S. Body A, D nechť leží na kružnici k a zároveň jsou krajními body úsečky procházející bodem S – průměru kružnice k (obr. 2.7). Nechť l je kružnice se středem v bodě A a poloměrem AS. Průsečíky těchto dvou kružnic nazveme B, F ($B, F \in k \cap l$). Bodem E různým od B nazveme průsečík polopřímky BS a kružnice k ($E \in \overrightarrow{BS} \cap k, E \neq B$). Podobný postup pak platí pro označení bodu C ($C \in k \cap \overrightarrow{FS}$, $C \neq F$).

Postupným spojením bodů A, B, C, D, E, F byl sestrojen pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$.

Nyní si dokážeme, že touto konstrukcí skutečně vznikne pravidelný šestiúhelník.

[5]Kružnice k je kružnice opsaná šestiúhelníku $ABCDEF$.



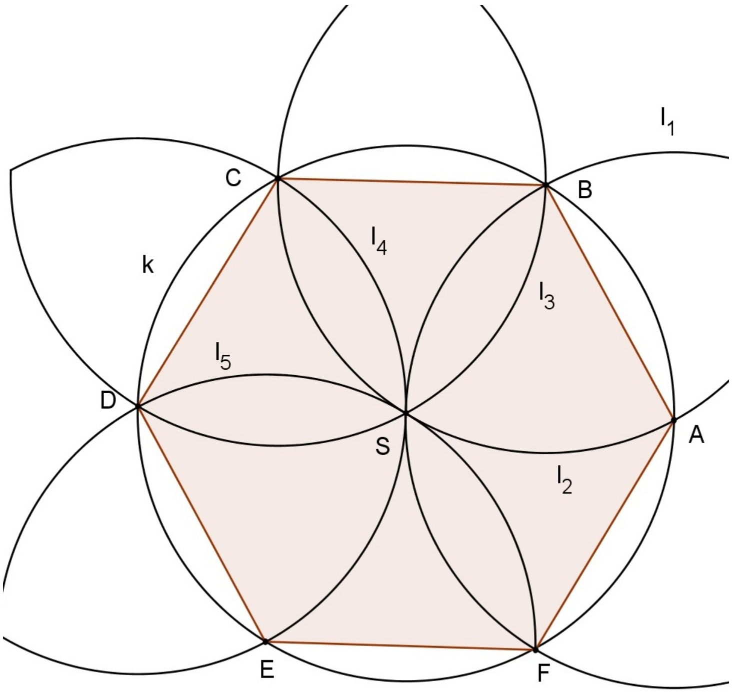
Obr. 2.7: Pravidelný šestiúhelník dle Eukleida

Důkaz konstrukce pravidelného šestiúhelníka, uvedené v Eukleidových Základech. Lze tvrdit, že trojúhelníky SAB a ASF jsou rovnostranné. Podle věty o vnitřních úhlech trojúhelníka je velikost každého vnitřního úhlu $\frac{2R}{3}$. Jelikož platí, že délky úseček AB a AF jsou stejné, pak jsou oba trojúhelníky podle věty *sss* shodné, a tím i jejich vnitřní úhly. Vzhledem k tomu, že $|\angle FSC| = 2R$, pak ze vztahu $|\angle FSC| = |\angle FSA| + |\angle ASB| + |\angle BSC|$ vyplývá, že $2R = \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} + |\angle BSC|$, takže platí $\frac{2R}{3} = |\angle BSC| = |\angle FSA| = |\angle ASB|$.

Obdobně lze dokázat, že jsou všechny středové úhly shodné. Podle věty *sus* jsou všechny trojúhelníky v daném šestiúhelníku shodné. Potom jsou ale i všechny strany šestiúhelníka $ABCDEF$ stejně dlouhé. □

Jak již bylo řečeno, žáci na základních a středních školách se setkávají spíše s odlišnou konstrukcí. Nech? je dána kružnice k a bod A jí náležící. Sestrojíme kružnici l_1 se středem v bodě A a poloměrem SA. Průsečíky těchto dvou kružnic nazveme B, F $(B, F \in k \cap l_1)$. Sestrojíme kružnici l_2 se středem v bodě B a s poloměrem stejným jako u kružnic k, l_2. Pokračujeme až po kružnici l_5 (obr. 2.8).

Postupným pospojováním průsečíků kružnice k a ostatními rýsovanými kružnicemi l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 jsme sestrojili pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Jak je na obr. 2.8 vidět, uvnitř narýsovaného šestiúhelníka byl vytvořen obrazec, který připomíná květ. Převezmeme tedy terminologii z anglické literatury a nazvěme každou ze shodných částí této květiny *okvětním lístkem*. Níže je uveden důkaz, že jsou tyto konstrukce na základních školách skutečně platné.



Obr. 2.8: Konstrukce pravidelného šestiúhelníka prováděná na základních školách

Důkaz konstrukce pravidelného šestiúhelníka, prezentované na základních školách. Pokud bychom mohli předem předpokládat, že bod F náleží kružnici l_5, pak by byl důkaz snadný. Z postupu konstrukce je jasné, že prvních pět vytvořených trojúhelníků ve vzniklém šestiúhelníku je rovnostranných. Že tomu tak je i u trojúhelníku šestého, bude dokázáno níže.

Z věty o vnitřních úhlech trojúhelníka vyplývá, že velikost každého úhlu v těchto rovnostranných trojúhelnících bude $\frac{2R}{3}$. Jelikož se kolem bodu S nachází *plný úhel*, jehož velikost je rovna dvěma úhlům přímým a který je tvořen vnitřním úhlem každého z trojúhelníků, lze pak zapsat vztah $4R = |\angle ASB| + |\angle BSC| + |\angle CSD| + |\angle DSE| + |\angle ESF| + |\angle FSA|$. Díky znalosti velikosti úhlů trojúhelníků je pak možné vyvodit, že

$$4R = \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} + |\angle ESF|,$$

tudíž $\frac{2R}{3} = |\angle ESF|$.

Podle věty *usu* platí: $\Delta ASB \cong \Delta ESF$. Pak ale platí i $|AB| = |EF|$. Všechny strany šestiúhelníka jsou tedy stejně dlouhé.

Pro důkaz nutné podmínky o shodnosti všech vnitřních úhlů při vrcholech daného mnohoúhelníka bude opět využito shodnosti jejich vnitřních úhlů. Jako ukázkový příklad použijeme srovnání úhlů ABC a BCD. Vzhledem k tomu, že jsou všechny vyskytující se zde trojúhelníky navzájem shodné, nebyl by problém analogicky stejný postup aplikovat i pro ostatní vrcholy šestiúhelníka.

Je očividné, že platí: $|\angle ABC| = |\angle ABS| + |\angle SBC|$, $|\angle BCD| = |\angle BCS| + |\angle SCD|$. Díky shodnosti trojúhelníků pak lze tvrdit $\angle ABS \cong \angle BCS$ a $\angle SBC \cong \angle SCD$.

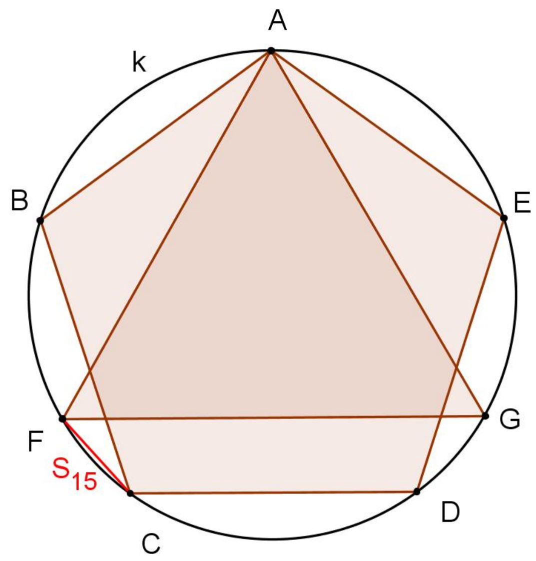
Podle jednoho ze základních Eukleidových axiomů „Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou si rovny.“[1, str. 43] vyplývá: $\angle BCD \cong \angle ABC$. Jak již bylo výše zmíněno, stejný postup by bylo možné aplikovat u každého vnitřního úhlu při vrcholu šestiúhelníka. Všechny strany i vnitřní úhly sestrojeného obrazce jsou tedy navzájem shodné. Jedná se o pravidelný šestiúhelník. $\square$

2.1.5 Pravidelný patnáctiúhelník

Posledním z pravidelných mnohoúhelníků, jehož konstruovatelnost pouze pravítkem a kružítkem byl Eukleides schopen ukázat a dokázat, je pravidelný patnáctiúhelník. Při konstrukci využijeme faktu, že počet vrcholů je součinem čísel, jež vyjadřují počet vrcholů pravidelných mnohoúhelníků, které již dokážeme sestrojit. Níže uvedená konstrukce byla převzata a upravena z Eukleidových *Základů* [1, str. 139].

Do kružnice k narýsujeme rovnostranný trojúhelník AFG, a to tak, že je mu kružnice k kružnicí opsanou. Kružnice k je opsanou i pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ (obr.2.9). Každý oblouk kružnice ohraničený vrcholy trojúhelníka AFG bude rozdělen na pět stejných částí, každá část je strana konstruovaného patnáctiúhelníka; body A,F,G je tedy možné přejmenovat na A_1, A_6, A_{11}. Každý oblouk na kružnici k ohraničený vrcholy pětiúhelníka $ABCDE$ bude rozdělen na tři části; vrcholy tohoto pětiúhelníka lze přejmenovat na $A_1, A_4, A_7, A_{10}, A_{13}$. Z toho vyplývá, ze oblouk AC (A_1A_7) kružnice k musí být rozdělen na šest částí, oblouk AF (A_1A_6) na částí pět. Úsečka FC (A_6A_7) je tak jednou ze stran pravidelného patnáctiúhelníka. Po postupném nanášení této vzdálenosti po obvodu kružnice k pak získáváme body $A_2, A_3, A_5, A_8, A_9, A_{12}, A_{14}, A_{15}$ – vrcholy pravidelného patnáctiúhelníka. Po následném spojení těchto vrcholů získáváme hledaný obrazec (obr. 2.10).

Že byl konstrukcí skutečně narýsován pravidelný patnáctiúhelník, je sepsáno níže.



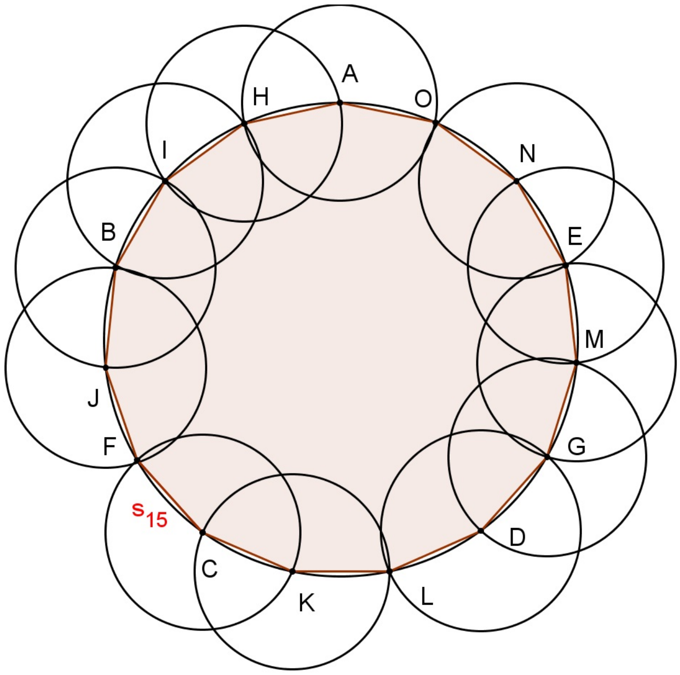
Obr. 2.9: Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníka

Důkaz konstrukce pravidelného patnáctiúhelníka. Abychom mohli bezpečně tvrdit, že mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_{15}$ je skutečně pravidelným patnáctiúhelníkem, musíme dle jeho definice dokázat, že jsou všechny strany tohoto mnohoúhelníka stejně dlouhé a že všechny vnitřní úhly u vrcholů jsou navzájem shodné.

Trojúhelník AFG ($A_1A_6A_{11}$) rozděluje kružnici k na třetiny. Pokud by tomu tak nebylo a některý z oblouků kružnice by byl delší, nemohl by být tento trojúhelník rovnostranný. Jestliže tedy chceme kružnici rozdělit na patnáct stejně velkých částí – čehož sestrojením pravidelného patnáctiúhelníka určitě dosáhneme – odpovídá každému oblouku ohraničenému vrcholy zadaného trojúhelníka přesně pět stejně velkých částí. Každá z těchto částí bude svými krajními body určovat stranu hledaného rovinného útvaru.

Podobné je to u sestrojeného pětiúhelníka. Ten rozděluje kružnici na pět stejně velkých částí[6]. Potom tedy ale musí být každý oblouk nad stranou pětiúhelníka rozdělen na tři stejně velké části. Tyto části jsou ohraničeny vrcholy hledaného obrazce.

[6]Části musí být stejně velké ze stejného důvodu, jako je tomu u trojúhelníka AFG.



Obr. 2.10: Dokončení konstrukce pravidelného patnáctiúhelníka

Jak je vidět, kružnice bude v různých obloucích rozdělena na různý počet stejně velikých částí. Od společného bodu obou pomocných obrazců můžeme odpočítat, kolik stran hledaného mnohoúhelníka ohraničují jednotlivé zvýrazněné oblouky kružnice k. U oblouku AB (A_1A_4) se to týká tří stran, u oblouku BF (A_4A_6) dvou. Oblouk FC (A_6A_7) je tedy složen z jedné jediné části, která je patnáctinou celé kružnice k. Úsečka FC je pak skutečně stranou patnáctiúhelníka $A_1A_2A_3 \dots A_{14}A_{15}$ se všemi stranami stejně dlouhými.

Zbývá dokázat, že i vnitřní úhly u vrcholů vzniklého obrazce jsou stejně velké. Důkaz shodnosti vnitřních úhlů je obdobný důkazu u pravidelného pětiúhelníka a šestiúhelníka.

Vzniklý obrazec je tedy skutečně pravidelným patnáctiúhelníkem. □

2.2 Pravidelné mnohoúhelníky, jejichž předpis konstrukce nepochází z dob Eukleida

2.2.1 Pravidelný sedmnáctiúhelník

V této části se nejdříve zaměříme na nezbytné události předcházející objevu konstruovatelnosti pravidelného sedmnáctiúhelníka a budeme se zabývat eukleidovskou konstrukcí za využití algebraického předpisu. Pak bude ukázán postup hledání vrcholů s využitím algebraických znalostí, nakonec přejdeme k samotným konstrukcím a ukážeme si i průběh nejznámější z nich.

Jak už bylo zmíněno výše, konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka nebyl Eukleides schopen ve své době rozhodnout. Jednoznačné řešení pak představil roku 1796 Gauss, kdy uveřejnil větu určující, při kolika vrcholech je mnohoúhelník zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí. Navzdory tvrzení „Autorem eukleidovské konstrukce pravidelného n-úhelníku pro $n = 17$ a $n = 257$ je C. F. Gauss ...“ [2, str. 60] ale Gauss samotnou konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka světu nepředvedl.

Základní myšlenkou v jeho důkazu, že je sedmnáctiúhelník zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí, je fakt, že od doby *Reného Descarta* (1596–1650) bylo možné pomocí kružítka a pravítka narýsovat složené výrazy obsahující operace $+, -, \times, \div$ a $\sqrt{}$. Jak pak později prokázal *Pierre Laurent Wantzel* (1814–1848) ve své knize [17], je taková konstrukce možná za vyjádření právě těmito operacemi. Prakticky se tedy otázka konstruovatelnosti změnila na otázku, zda je možné polohu vrcholu mnohoúhelníka v komplexní rovině vyjádřit pomocí algebraických výrazů za použití výše zmíněných symbolů. Konkrétně pro pravidelný sedmnáctiúhelník Gauss nalezl formuli

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right).$$

Jelikož je tedy za použití pravítka a kružítka tento výraz zkonstruovatelný, je možné nalézt i daný vrchol pravidelného sedmnáctiúhelníka.

Nyní se ale vrátíme na okamžik zpět ke Gaussově větě a jeho myšlence, dle níž je hledání vrcholů n-úhelníka v podstatě hledáním kořenů rovnice n-tého řádu[7]. V případě pravidelného sedmnáctiúhelníka pak musí platit $x^{17} = 1$, po zjednodušení pro kořen $x = 1$

[7] Postup je podrobněji popsán v knize [10].

pak $x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1=0$. Již je tedy známo, že jeden z vrcholů hledaného mnohoúhelníka bude mít souřadnice 1 a 0, dalších šestnáct vrcholů pak bude s pravidelnými odstupy rozloženo na jednotkové kružnici se středem v počátku. Podle *Moivrovy věty* obecně platí $x_k = \cos k\alpha + \mathrm{i}\,\sin k\alpha$ pro $\alpha = \frac{2\pi}{17}, k = 1, 2, \ldots, 16$. Dále pro takovéto kořeny můžeme říci, že jejich indexy odpovídají exponentu. Pro libovolné k pak bude $x_k^{17} = 1$.

Jak je uvedeno v knize [10], Gauss nazývá číslo 3 primitivním kořenem čísla 17.[8] Kořeny původní rovnice můžeme tedy seřadit v takovém pořadí, kdy je následující kořen třetí mocninou kořenu předcházejícího:

$$x_1, x_3, x_9, x_{10}, x_{13}, x_5, x_{15}, x_{11}, x_{16}, x_{14}, x_8, x_7, x_4, x_{12}, x_2, x_6$$

Jelikož je číslo 16 mocninou čísla 2, je možné řešení rovnice šestnáctého stupně převést na řešení kvadratických rovnic opakovanou substitucí za kvadratický člen. Pro jejich řešení výše zmíněných šestnáct kořenů seřadíme celkem do čtrnácti skupin po dvou, čtyřech či osmi prvcích:

$$y_1 = x_1 + x_9 + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_8 + x_4 + x_2$$

$$y_2 = x_3 + x_{10} + x_5 + x_{11} + x_{14} + x_7 + x_{12} + x_6$$

$$z_1 = x_1 + x_{13} + x_{16} + x_4,\ \ z_2 = x_9 + x_{15} + x_8 + x_2$$

$$z_3 = x_{10} + x_{11} + x_7 + x_6,\ \ z_4 = x_3 + x_5 + x_{14} + x_{12}$$

$$u_1 = x_1 + x_{16},\ \ u_2 = x_{13} + x_4,\ \ u_3 = x_{15} + x_2,\ \ u_4 = x_9 + x_8$$

$$u_5 = x_{11} + x_6,\ \ u_6 = x_{10} + x_7,\ \ u_7 = x_5 + x_{12},\ \ u_8 = x_3 + x_{14}$$

Dle výše uvedené rovnice šesnáctého stupně pak lze usoudit, že $y_1+y_2+1=0$. Abychom byli schopni využít Vietových vzorců, vyjádříme i součin výrazů y_1, y_2. Po úpravě všech exponentů vyšších než 17 dostáváme

$$y_1 \cdot y_2 = 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_{16}) = -4.$$

Čísla y_1, y_2 jsou tedy řešením rovnice $y^2 + y - 4 = 0$. Podobným postupem jsou získány i ostatní rovnice a dopočítány jednotlivé kořeny.

[8]Třetí mocniny čísla tři mají po vydělení sedmnácti všechny zbytky od jedné do šestnácti.

Ještě je ale nutné zjistit, jaká znaménka budou mít jednotlivé hodnoty u, ve kterých kvadrantech se příslušné body x budou nacházet. Jak již bylo možné si všimnout, pro u platí obecný vztah $u = x_k + x_{17-k} = 2\cos k\alpha$. Pro jednotlivé hodnoty u pak vychází:

$$u_1 = 2\cos\alpha,\ u_2 = 2\cos 4\alpha,\ u_3 = 2\cos 2\alpha,\ u_4 = 2\cos 8\alpha,$$

$$u_9 = 2\cos 6\alpha,\ u_{10} = 2\cos 7\alpha,\ u_{11} = 2\cos 5\alpha,\ u_{12} = 2\cos 3\alpha.$$

Vzhledem k tomu, že o úhlu α má platit $\alpha = \frac{2\pi}{17}$, můžeme tvrdit, že $4\alpha < 90°, 5\alpha > 90°$. Pak tedy platí, že jsou u_4, u_5, u_6, u_7 negativní. Podobně by šlo odpočítat i znaménko u z a y.

Strana pravidelného mnohoúhelníka pak má velikost[9]

$$a = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{2-u_1}.$$

Algebraickými metodami jsme tedy schopni jednotlivé vrcholy nalézt. Nyní si ukážeme, že v případě sedmnáctiúhelníka toto dokážeme i geometickými prostředky[10].

Níže je uvedena konkrétní konstrukce pro Gaussem objevenou formuli. Ta je se změnami uvedena v [13, str. 212–213].

Na jednotkové kružnici k se středem O zkonstruujeme vzájemně kolmé průměry této kružnice AB a CD. V bodech A,B pak narýsujeme tečny p, q ke kružnici k (obr. 2.11).

Vzhledem k tomu, že budeme výše uvedený algebraický výraz porovnávat, použijeme substituci $u_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$. Tím po zjednodušení dostáváme

$$u_1 = \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right).$$

Jelikož se celý zkonstruovaný výraz bude násobit $\frac{1}{8}$, budeme rovnou konstruovat velikosti osmkrát menší než u již znázorněné jednotkové kružnice. Proto uvažujme, že poloměr narýsované kružnice k má velikost 8.

Nechť je bod E v polovině úsečky AO, bod G dvě jednotky nad A a bod F jednotku pod A[11].

Pomocí Pythagorovy věty lze dopočítat hodnotu pro EF:

$$|EF| = \sqrt{|AF|^2 + |AE|^2} = \sqrt{17}$$

[9]V případě, že je jeho kružnicí opsanou jednotková kružnice.

[10]Za pomoci těch algebraických.

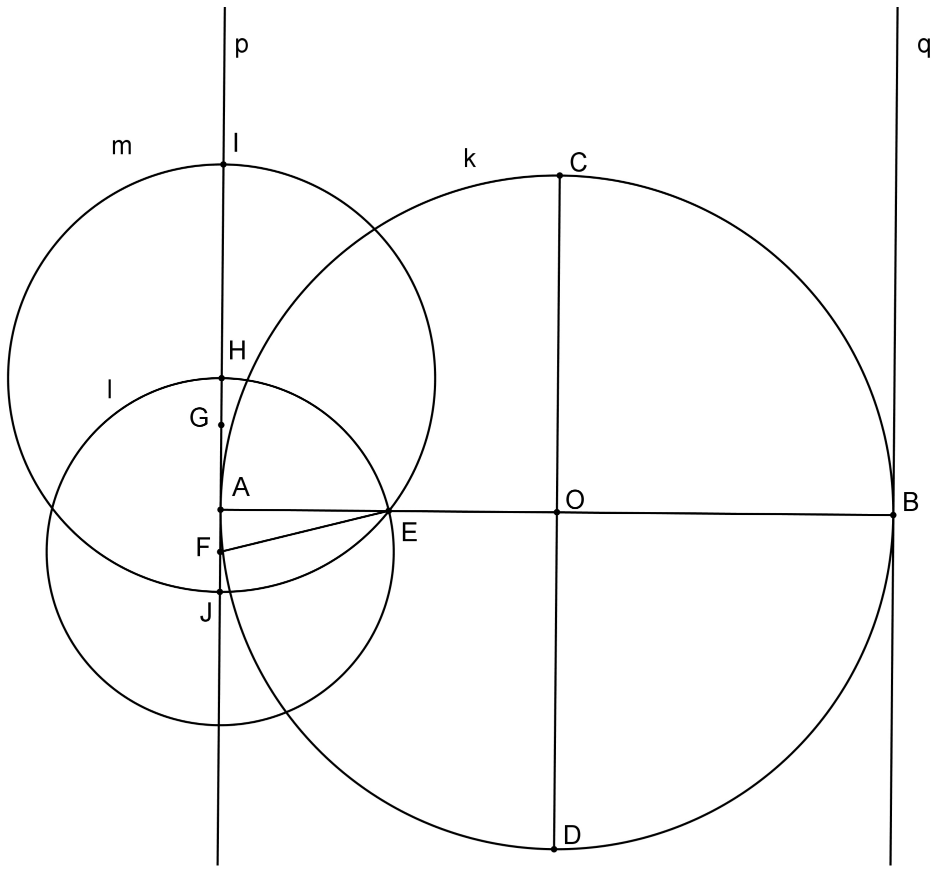
[11]Všechny tři body (A, G, F) náleží přímce p.

Kružnice l se středem v bodě F a poloměrem EF protne polopřímku AG v bodě H. Je zřejmé, že platí $|HA| = |EF| - 1 = \sqrt{17} - 1$. Po opětovném užití Pythagorovy věty pro trojúhelník EHA získáváme velikost úsečky HE:

$$|HE| = \sqrt{|HA|^2 + |AE|^2} = \sqrt{(\sqrt{17} - 1)^2 + 16} = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

Nechť je dána kružnice $m = (H; |HE|)$. Průsečíky s přímkou p nazveme I a J. Pak platí:

$$|IA| = |IH| + |HF| - |FA| = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} - 1$$
$$|JA| = |IH| - |HF| + |FA| = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1$$



Obr. 2.11: Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka na základě algebraického předpisu

Na úsečce AB určíme bod K tak, aby platilo $|AK| = |AJ|$ (obr. 2.12). Na polopřímce FE nalezneme bod L tak, aby platilo: $|FL| = \sqrt{17} + 2$. Nechť kružnice $n = (G; |FL|)$ protíná prodloužení průměru AB v bodě M. Pak platí:

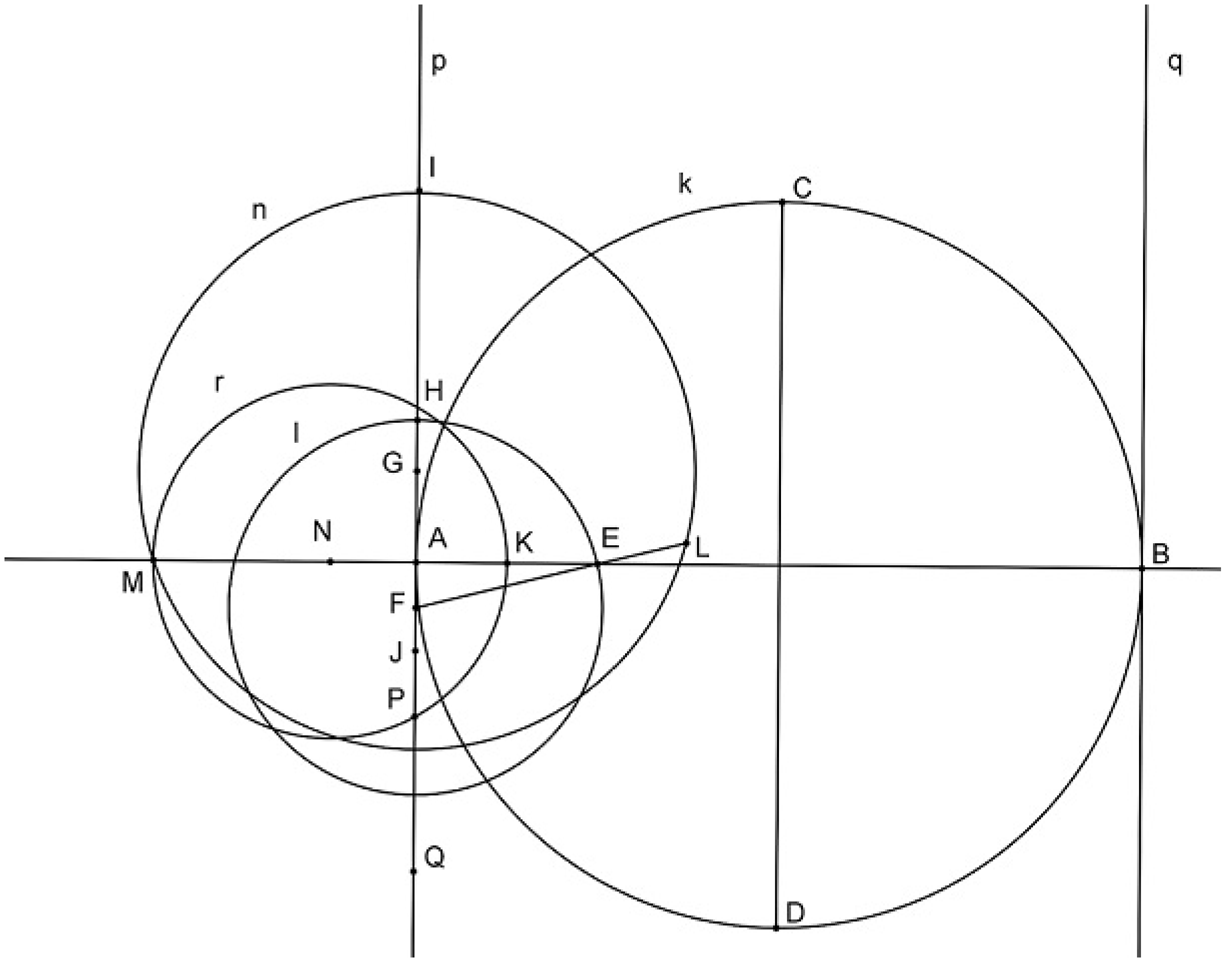
$$|AM| = \sqrt{|GM|^2 - |AG|^2} = \sqrt{|FL|^2 - 4} = \sqrt{(\sqrt{17} + 2)^2 - 4} = \sqrt{17 + 4\sqrt{17}}.$$

Ve středu úsečky KM nalezneme bod N. Nyní zkonstruujeme kružnici $r = (N; |MN|)$. Ta protne polopřímku AJ v bodě P. Podle Eukleidovy věty o výšce víme:

$$|PA|^2 = |AK| \cdot |AM| = |AJ| \cdot |AM|$$

$$|PA|^2 = \left(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right) \sqrt{17 + 4\sqrt{17}}$$

Na polopřímce AF nalezneme bod Q tak, aby platilo $|PA| = |PQ|$. Pak je



Obr. 2.12: Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka podle algebraického předpisu

$$|AI| + |AQ| = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} - 1 + 2\sqrt{\left(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right) \sqrt{17 + 4\sqrt{17}}},$$

což odpovídá hodnotě výše zvoleného u_1.

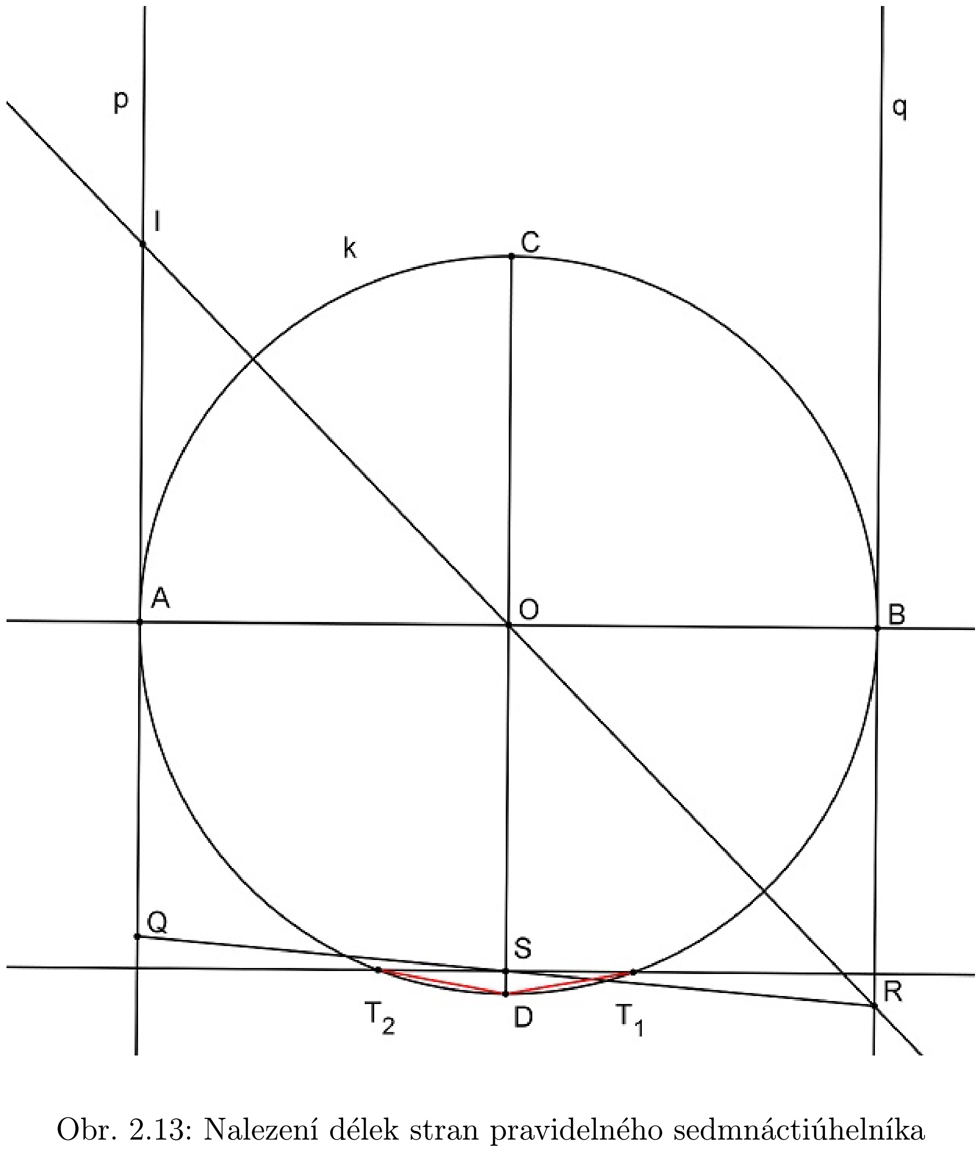
Přímky IO a q se protnou v bodě R (obr. 2.13). Spojením bodů R a Q získáváme bod S – průsečík úseček RQ a OD. Vzniklý trojúhelník RSO je podobný trojúhelníku

RQI, a sice s koeficienten podobnosti $\frac{1}{2}$. Proto také bude platit, že

$$|SO| = \frac{1}{2}|QI| = \frac{1}{2}u_1 = \cos\frac{2\pi}{17}.$$

Po sestrojení kolmice k úsečce OD procházející bodem S získáme body T_1, T_2 – vrcholy pravidelného sedmnáctiúhelníka. Úsečky DT_1, DT_2 jsou tedy jeho stranami.

Tímto se nám sice podařilo pravidelný sedmnáctiúhelník zkonstruovat, nicméně konstrukce byla značně zdlouhavá a nepraktická. Podobně tomu bylo u všech ostatních, které byly předkládány nedlouho po Gaussově objevu.



Obr. 2.13: Nalezení délek stran pravidelného sedmnáctiúhelníka

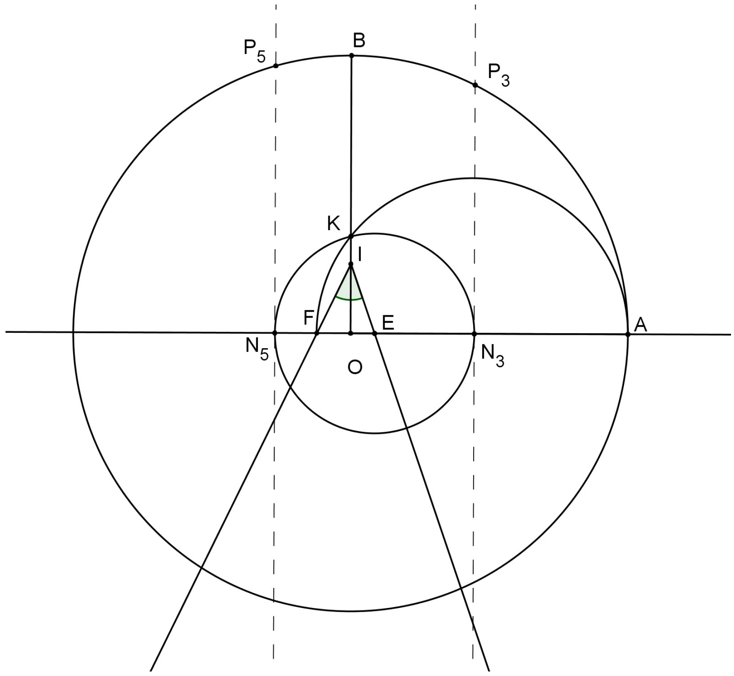
Výše předvedeným propojením eukleidovské geometrie a algebry Gauss ukázal doposud nepředstavitelné možnosti, kam až geometrie může zasahovat. Už nebyla pouze nástrojem ke sledování již dávno jasného, evidentního a známého, ale stala se další oblastí matematiky plnou neprozkoumaného.

Zjištění, že pravidelný sedmnáctiúhelník je zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí, vyvolalo vlnu zájmu, když se danou konstrukci matematici snažili nalézt. Zkonstruovat se ho podařilo až o několik let později. Mezi prvními byli například *Johannes Erchinger* (1788–1829), *Magnus Georg von Paucker* (1787–1855) a další. Jejich konstrukce jsou ale většinou příliš složité a nepraktické. Za autora jedné z prvních konstrukcí pravidelného sedmnáctiúhelníka provedené geometrickými prostředky je pak považován právě Erchinger. Tuto konstrukci pak měl sepsat roku 1825. K samotnému výtisku pravděpodobně ale nikdy nedošlo. O tom svědčí jak poznámka v knize [20, str. 37][12], tak jeho nemožnost zpracování pro knihu [9], kdy práce, o které se ve svém díle *Werke II* Gauss zmiňuje, není k dispozici, a to jak v Německé knihovně, tak v Královské vědecké společnosti v Göttingenu.

Jak je možné vidět v knize [9], objevovaly se konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka za použití nanejvýš pravítka a kružítka skutečně v hojném počtu. S velmi zajímavou konstrukcí přišel roku 1911 *Theodor Vahlen* (1849–1945). Konstruuje v ní pouze takové kružnice, které procházejí společným průsečíkem. S dalšími zajímavými konstrukcemi pak přišli *Christian von Staudt* (1842) a *Heinrich Schröder* (1872). Ti využívají pevně zadané kružnice se středem. Tu rozdělí na sedmnáct stejných částí, a to pouze za využití přímek. *Gotthilf Mulsow* (1898), *Louis Gérard* (1897) a *Richard Güntsche* (1902) pak přicházejí s takovými konstrukcemi, při kterých dokonce nevyužívají pravítka. Dokonce je v knize [9] k nalezení i konstrukce, při které bylo využíváno jen konstrukce pravých úhlů.

S níže uvedenou přišel roku 1893 britský učitel na univerzitě v Cambridge – *Herbert William Richmond* (1863–1948). Jeho konstrukce je dnes považována za jednu z nejelegantnějších; skládá se celkem z čtrnácti kroků, kdy v předposledním budou objeveny body P_3, P_5 – třetí a pátý vrchol sedmnáctiúhelníka. Tato konstrukce je uvedena například v [11, s. 206–207]. Grafické znázornění konstrukce je na obr. 2.14

[12] V dopise adresovaném Gaussovi má profesor práv na univerzitě v Thüringu Heinrich Schrader vyzývat k nutnému přepracování formy, bez nějž není možné dané dílo vydat.



Obr. 2.14: Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka

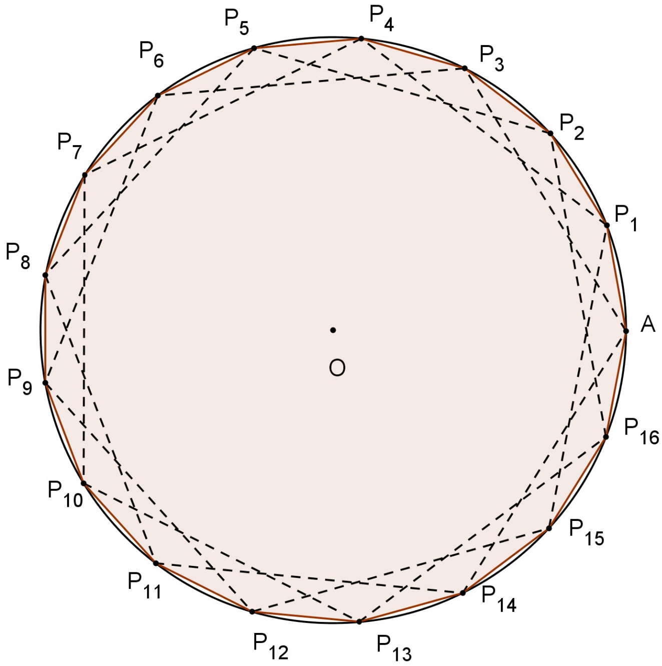
> Nechť jsou OA a OB $(\dots)$ navzájem kolmé poloměry kružnice. Narýsujte úsečku OI v jedné čtvrtině OB a úhel OIE v jedné čtvrtině OIA[13]; poté nalezněte na polopřímce AO bod F tak, že platí EIF je $45°$[14]. Nechť kružnice nad průměrem AF protíná OB v bodě K a nechť kružnice se středem v bodě E a poloměrem EK protíná OA v bodech N_3 a N_5. Pak jestliže jsou odvěsny N_3P_3 a N_5P_5 narýsovány do kružnice, arcsin $|AP_3|$ a arcsin $|AP_5|$ budou $|\frac{3}{17}|$ a $|\frac{5}{17}|$ délky kružnice. [11, str. 206–207][15]

Body P_3 a P_5 označují třetí a pátý, bod A první vrchol hledaného mnohoúhelníka. Nyní máme více možností, jak postupovat. Z nalezených vrcholů (A, P_3, P_5) si vybereme jednu dvojici a na kružnici postupně nanášíme vzdálenost odměřenou mezi vybranými body. Na obr. 2.15 je znázorněno pořadí, v jakém jsme nacházeli vrcholy sedmnáctiúhelníka při počáteční zvolené dvojici A, P_3, ale vzhledem k tomu, že každá z dvojic ohraničuje $\frac{3}{17}, \frac{2}{17}$, popřípadě $\frac{5}{17}$ délky kružnice a každý násobek čísel 3, 2 a 5 po vydělení sedmnácti dává vždy různý zbytek od 1 do 16, jsme schopni kterýmkoliv z těchto způsobů nalézt všech sedmnáct vrcholů hledaného mnohoúhelníka.

[13] $E \in OA$

[14] $F \notin EA$

[15] Přeloženo autorkou práce.



Obr. 2.15: Nalezení zbylých vrcholů pravidelného sedmnáctiúhelníka

Důkaz této konstrukce je v [11, str. 206–207] nebo [12, str. 459–461].

2.2.2 Další zkonstruovatelné mnohoúhelníky

Jak již bylo zmíněno výše, není možno určit, kolik přesně je Fermatových prvočísel, a tak ani to, kolik přesně pravidelných mnohoúhelníků s lichým počtem vrcholů je eukleidovsky zkonstruovatelných. Konkrétně tedy takových, jejichž počet vrcholů je roven Fermatovu prvočíslu. Nicméně zkoumání konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků u sedmnáctiúhelníka neskončilo. Roku 1832 přišel s konstrukcí pravidelného 257-úhelníka *Friedrich Julius Richelot* (1808–1875). Uveřejnil ji ve svém článku[16]. Se zjednodušenými konstrukcemi pak přišli například *Duane W. DeTemple* (1991), *Christian Gottlieb* (1999) koncem dvacátého století. I tak mají ale tyto konstrukce více než 1 150 kroků.

Dalším Fermatovým prvočíslem, konkrétně tedy F_4, je číslo 65 537. S konstrukcí 65 537-úhelníka měl přijít *Johann Gustav Hermes* (1846–1912). Nad danou konstrukcí měl

[16] *De resolutione algebraica aequationis* $x^{257} = 1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata* v novinách *Journal für die reine und angewandte Mathematik*

bádat celých deset let[17]. Hotové spisy měly mít celkem 191 listů papíru. Kufřík, ve kterém byly dané materiály roku 1889 předloženy, je i s nimi uschován na univerzitě v Göttingenu. Správnost daných spisů pak dokonce nikdo neuměl zkontrolovat. O pět let později o své práci napsal sám Hermes do třetího vydání Göttingenského zpravodaje.

[17]Zmíněno je toto např. v [8]

Kapitola 3

Přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

3.1 Pravidelný sedmiúhelník

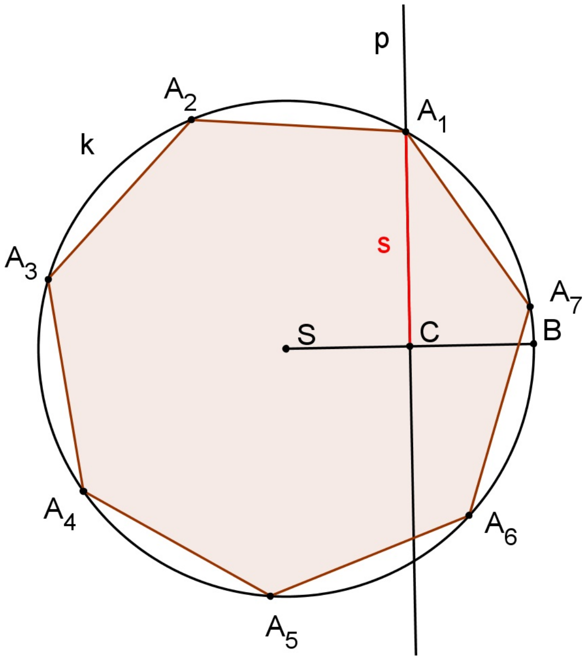
Pokud bychom pravidelné mnohoúhelníky měli seřadit vzestupně podle počtu vrcholů, byl by sedmiúhelník prvním, který nelze sestrojit eukleidovskou konstrukcí. Protože ale tento fakt až do roku 1801 nebyl dokázán, snažili se jeho konstrukci objevit již v nejstarších civilizacích. S konstrukcí pomocí rovnostranného trojúhelníka se zabýval například orientální učenec $Abu -' l - Waf\bar{a}$ či *Aristoteles* z antického Řecka.

Nejprve si ukážeme, proč není možné sestrojit pravidelný sedmiúhelník jen za použití kružítka a pravítka, a poté si představíme některé z přibližných konstrukcí.

Pro tentokrát vynecháme Gaussovu větu, která vylučuje, že by takovýto mnohoúhelník bylo možné narýsovat přesně pomocí pravítka a kružítka. Pokud má být sedmiúhelník pravidelný, tak musí platit $x^7 = 1$. Stejně jako u obecného řešení pravidelných mnohoúhelníků můžeme určením jednoho z kořenů ($x = 1$) snížit stupeň polynomu na polynom následující: $x^6 + x^5 + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$. Takovýto polynom ale nemá řešení v radikálech. Je tedy nemožné takovýto mnohoúhelník narýsovat pouze Eukleidem povolenými prostředky.

Nyní se budeme zabývat konkrétními přibližnými konstrukcemi a tím, jak se takové hodnoty liší od pravidelného sedmiúhelníka.

Jedna z nejstarších konstrukcí využívá rovnostranného trojúhelníka vepsaného zadané kružnici. Stranou sedmiúhelníka je jedna polovina strany tohoto trojúhelníka.



Obr. 3.1: Přibližná konstrukce sedmiúhelníka

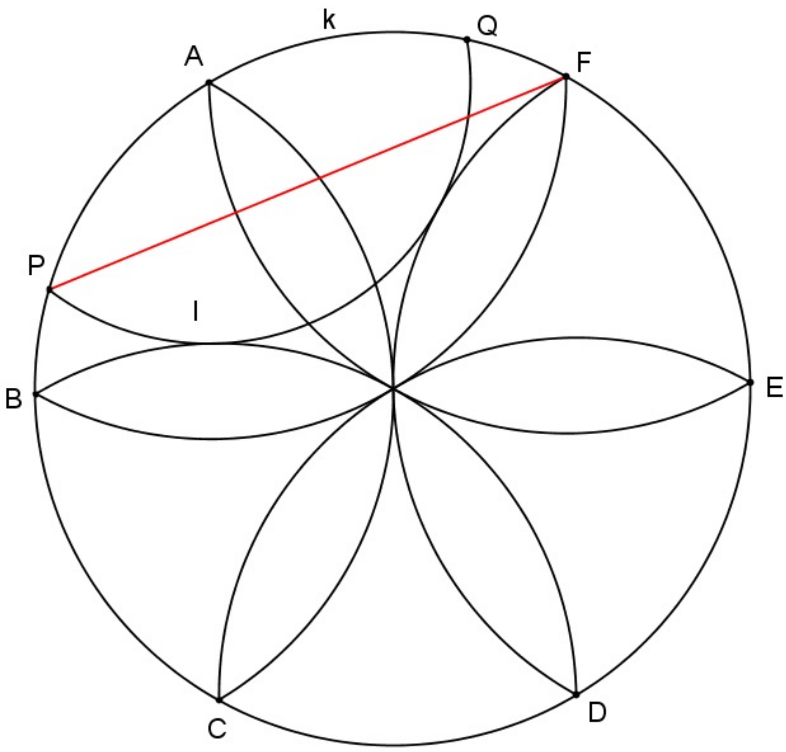
Nyní vypočítáme, jak velké chyby jsme se při konstrukci dopustili. Strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice má délku $\sqrt{3}$. Jedna strana sedmiúhelníka má mít poloviční délku – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pak by ale úhel u středu musel být roven cca $51,317\ 813°$. Pokud ale na druhou stranu uvažujeme, že u plného úhlu má být sedm shodných úhlů, musí být každý z nich veliký $51,428\ 571°$.

Další přibližná konstrukce je například v knize [5, str. 61] nebo [7, str. 119].

Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem SB (obr. 3.1). Nechť je dán bod C tak, aby platilo $|SC| = |CB|$. Sestrojíme kolmici p k úsečce SB tak, aby platilo $C \in p \cap SB$. Bod A_1 je průsečík kružnice k a přímky p. Délka úsečky A_1C je pak přibližně rovna délce s strany sedmiúhelníka. Po postupném nanášení této vzdálenosti na kružnici a spojení vzniklých průsečíků dostaneme hledaný sedmiúhelník.

Nyní se zaměříme na přibližný výpočet chyby, které by bylo při takovéto konstrukci dosaženo. Dle této konstrukce platí, že

$$|A_1C| = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$



Obr. 3.2: Přibližná konstrukce sedmiúhelníka

Délka strany pravidelného sedmiúhelníka je rovna $|A_1A_2| = 2r\sin\frac{\pi}{7}$. Pro konkrétnější údaje pak po zaokrouhlení výsledků na pět desetinných míst vycházejí hodnoty $0,867\,84 \cdot r$ a $0,866\,02 \cdot r$. Výsledné hodnoty se tedy očividně liší, ale odchylka je vcelku malá (necelé $0,002 \cdot r$). V praxi to znamená, že při poloměru 10 cm by byla chyba v délce strany 0,2 mm.

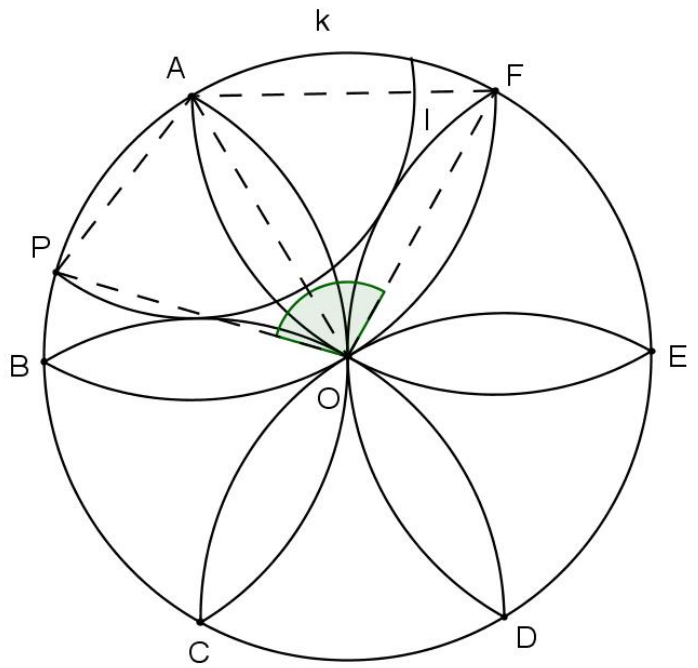
Poslední konstrukcí, kterou si zde předvedeme, v knize [14] uvádí *Robert Dixon*. Při té bychom při plném úhlu u středu kružnice měli mít chybu pouze $0,3°$.

Do jednotkové kružnice k narýsujeme *okvětní lístky* jako při konstrukci pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$. Poté z bodu A jako středu narýsujeme další oblouk l, a to podle obr. 3.2[1]. Nechť je bod P průsečíkem tohoto oblouku s kružnicí k, a to konkrétně ten, který je blíže bodu B. Spojme tedy bod P s bodem F. Úsečka FP ohraničuje oblouk o délce $\frac{2}{7}$ délky celé kružnice. Nalezením jeho středu získáme i hledaný vrchol sedmiúhelníka. Toto tvrzení si nyní dokážeme.

[1]Oblouk l má s oblouky BOD a DOF vždy jeden společný bod.

Pro začátek budeme uvažovat, že má oblouk l poloměr $\sqrt{3} - 1$. Proč tomu tak je, si ukážeme níže. Spojením bodů A, P se středem kružnice k získáváme rovnoramenný trojúhelník OPA (obr. 3.3). Po dosazení do kosinové věty získáváme velikost úhlu POA: $|\angle POA| = 42,941\ 403°$. Sousední trojúhelník AOF je rovnostranný, velikost všech jeho vnitřních úhlů je stejná. Platí tedy: $|\angle AOF| = 60°$. Úhel POF má tedy velikost $102,941\ 403°$. To je ale přibližně dvojnásobek středového úhlu pravidelného sedmiúhelníka. Osa tohoto úhlu dělí tuto kruhovou výseč na dvě shodné části, její průsečík s kružnicí k se nachází v polovině oblouku PB a je vrcholem konstruovaného sedmiúhelníka.

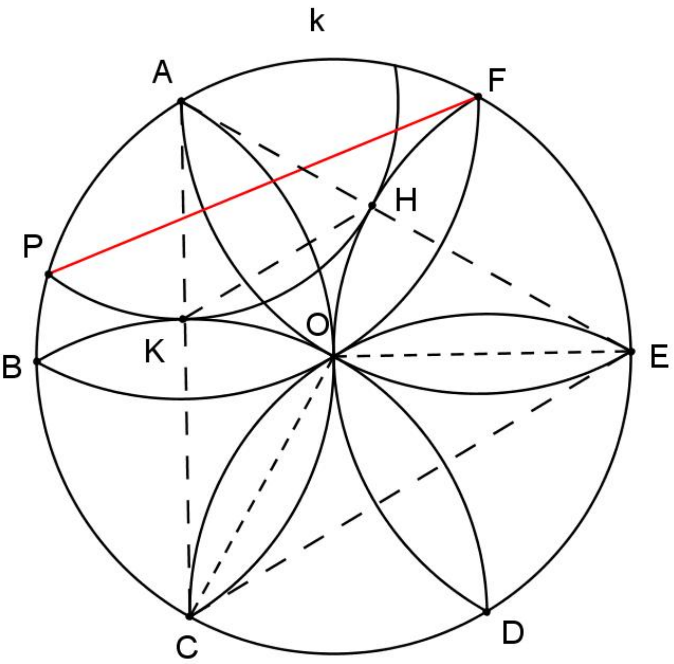
Výše jsme předpokládali, že poloměr vnitřní kružnice se středem v bodě A je roven $\sqrt{3} - 1$. To bude nyní dokázáno.



Obr. 3.3: Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníka

Jak je zobrazeno na obr. 3.4, je možné sestrojit trojúhelníky ACE a AKH, kde body K a H jsou tečnými body relevantních oblouků. Tyto body leží na úsečkách AC, popřípadě AE, jelikož tyto jsou spojnicemi středů odpovídajících oblouků.

Poloměr kružnice k je 1, úhel COE je roven $\frac{2\pi}{3}$. Pomocí kosinové věty tedy dokážeme



Obr. 3.4: Přibližná konstrukce sedmiúhelníka

vypočítat délku strany rovnostranného trojúhelníka ACE:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$a = \sqrt{3}$$

Jelikož $H \in AE$, platí:

$$|AH| = |AE| - |HE|$$

$$|AH| = \sqrt{3} - 1$$

Poloměr zkoumaného oblouku se středem v bodě A má skutečně poloměr $\sqrt{3} - 1$ při jednotkovém poloměru kružnice k 1[2].

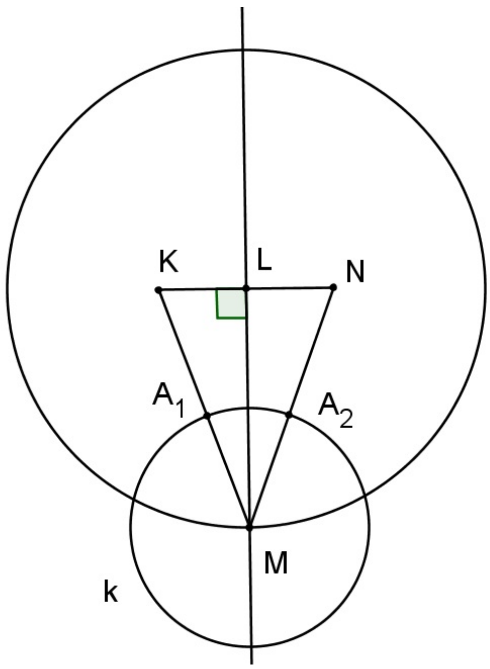
[2]Poloměr o velikosti 1 byl vybrán záměrně kvůli výpočtům, nicméně při jiném poloměru dojde ke změně konkrétních délek, nikoliv však poměrů či úhlů.

3.2 Pravidelný devítiúhelník

Mnohé jistě napadne, že devítiúhelník lze sestrojit celkem snadno. Stačí sestrojit trojúhelník a každý jeho úhel rozdělit na třetiny. Jenže zde nastává problém. Již v úvodu této kapitoly bylo ukázáno, že *trisekce úhlu* pomocí pravítka a kružítka je neřešitelný problém.

Opět si zde představíme metodu, pomocí které by bylo možné devítiúhelník sestrojit. Ta byla upravena dle knihy [14].

Narýsujeme pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem u vrcholu L a odvěsnami délek $|KL| = \sqrt{3} - 1$ [3] a $|LM| = 2$ (obr. 3.5). Úhel u strany LM bude mít velikost přibližně 20°. Stejně tak jsme schopni narýsovat pravoúhlý trojúhelník LMN s pravým úhlem při vrcholu L a za předpokladu, že $M \neq N$. V takovém případě pak máme trojúhelník KMN s úhlem při vrcholu M o velikosti přibližně 40°. Nyní sestrojíme kružnici $k = (M; 1)$. Její průsečíky s trojúhelníkem KMN jsou pak sousední vrcholy A_1, A_2 hledaného devítiúhelníka.



Obr. 3.5: Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníka

Pokud by byla velikost úhlu KMN rovna 40°, jednalo by se o pravidelný devítiúhelník

[3] Délku $\sqrt{3} - 1$ lze sestrojit pomocí Eukleidovy věty o výšce, jak tomu bylo výše u konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníka, popřípadě pomocí přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníka, kde je úsečka PA rovna právě námi požadované délce.

zkonstruovatelný eukleidovskou konstrukcí. Při devíti stranách by byl totiž součet vnitřních úhlů při vrcholu M roven úhlu plnému. Jak již ale bylo zmíněno výše, $|\angle KML| = 20°$ a $|\angle KMN| = 40°$ platí pouze přibližně. Zaměřme se tedy na to, jaké chyby jsme se při konstrukci dopustili. Toto budeme zkoumat právě na již zmíněných úhlech. Velikost úhlu α, který byl sestrojen námi provedenou konstrukcí, odpovídá vztahu

$$\alpha = \arctan \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \; = 20,103\,909°.$$

Trojúhelníky KLM a NLM jsou ale dle věty *sus* shodné, úhly KLM a NLM tak mají stejnou velikost. Proto platí, že

$$|\angle KMN| = 2|\angle LMK| = 40,207818°.$$

Chyba, které jsme se tímto dopustili, odpovídá vztahu

$$\frac{40,207818}{40} - 1 = 1,0051955 - 1 = \; = 0,005,$$

takže zhruba 0,5 %.

Závěr

V této práci je čtenář seznámen jak s metodou sestrojení a důkazy základních konstrukcí pocházejících už z dob antického Řecka, tak i s konstrukcemi, které spatřily světlo světa až v 18. století nebo i později. Zejména pak u těch později objevených je poukazováno na algebru, která hraje v takovýchto konstrukcích mnohem důležitější roli než dříve. Geometrie tak už není uzavřenou kapitolou, nicméně odvětvím, kde je stále co objevovat. Jako příklad lze uvést otázku, kolik mnohoúhelníků s lichým počtem vrcholů je možno sestrojit eukleidovskou konstrukcí nebo kolik úhlů by měl mít další mnohoúhelník, který lze takto sestrojit.

Průlomovou se stala Gaussova věta, která již ve své podstatě spojuje geometrii a algebru. V tom, kdo ji nakonec dokázal, nemají očividně autoři různých publikací jasno. Například tedy se lze dočíst, že je autorem této věty Gauss, nicméně podle [16] či [17] ji neměl sám dokázat.

Tato práce se jako jedna z mála česky psaných prací zabývá klasifikací pravidelných mnohoúhelníků v závislosti na jejich zkonstruovatelnosti eukleidovskou konstrukcí. Jako snad jediná blíže čtenáře seznamuje i s pravidelným sedmnáctiúhelníkem a některými jeho konstrukcemi. Jak je již v dané kapitole zmíněno, existuje spousta způsobů, jakými je možné pravidelný sedmnáctiúhelník sestrojit. Při případném rozšíření této práce by bylo určitě možné blíže se ještě jednotlivým konstrukcím věnovat. Stejně tak by bylo možné i rozšířit seznam přibližně zkonstruovatelných pravidelných mnohoúhelníků, a to například o pravidelný jedenáctiúhelník.

Tato bakalářská práce se však svým tématem hodí i k rozšíření na práci s didaktickým zaměřením, kdy by bylo možné například porovnat způsoby konstrukce jednotlivých pravidelných mnohoúhelníků na základních či středních školách, jakým způsobem jsou dané konstrukce žákům prezentovány, zda a jak jsou seznamováni s důkazy daných konstrukcí.

Literatura

[1] EUKLEIDES. *Základy Knihy I–IV*. Editor: Petr Vopěnka. Nymburk: OPS, 2007.

[2] MOLNÁR, J.; KOBZA, J. *Extremální a kombinatorické úlohy z geometrie: učební text pro IV. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990.

[3] KŘÍŽEK, M. O Fermatových číslech. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 1995. roč. 40, č. 5, s. 243-253. `http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138304/PokrokyMFA_40-1995-5_2.pdf`

[4] ASSER G. Grunbegriffe der Mathematik, Teil I-Mengen. Abbildungen. Natürliche Zahlen. In: ENGEL, W.; BREHMER, S.; SCHNEIDER, M., WUSSING, H. *Mathematik für Lehrer*

[5] WUSSING, H. *Carl Friedrich Gauss – Biographie und Dokumente.* Berlin: WEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980.

[6] KEMPERMANN, T. *Zahlentheoretische Kostproben.* 2. vydání. Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harrin Deutsch, 2005.

[7] BOČEK, L.; ZHOUF, J. *Planimetrie.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2009.

[8] HENN, H.-W. *Elementare Geometrie und Algebra. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Friedr. Vieweg u. Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, 2003.

[9] GOLDENRING, R. *Die elementargeometrischen konstruktionen des regelmäigen Siebzehnecks.* Weida in Thüringen: Thomas& Hubert, 1915.

[10] STRNAD, A. O pravidelném sedmnáctiúhelníku. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 1904. roč. 33. s. 543–557

[11] RICHMOND, H.W. A Construction for a regular polygon of seventeen sides, *The quarterly journal of pure and applied mathematics*, 206–207

[12] RICHMOND, H.W. A Construction for a regular polygon of seventeen sides, In: *Mathematische Annalen*, 4. vyd., Springer/Verlag, 1909, Část 67. s. 459–461

[13] VI LEZ, O.L.P. A Chord Approach for an Alternative Ruler and Compasses Construction of the 17-Side Regular Polygon . In: *Geometriae Dedicata*, 3. vyd., Kluwer Academic Publishers, 1994, Část 52. s. 209–213

[14] DIXON, R. *Mathographics.* Oxford: Dover Publications, 1987.

[15] WEISSTEIN, E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition.* 2. ilustrované vydání. CRC Press, 2010. s. 1344

[16] KŘÍŽEK, M.; LUCA, F.; SOMER, L. *17 Lectures on Fermat Numbers.* New York: Springer-Verlag, 2001.

[17] WANTZEL, P. M. L. Recherches sur les moyens de reconnatre si un probleme de Géométrie peut se résoudre avec la regle et le compas. In:*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Paris: bachelier, imprimeur-libraire, 1837, s. 366-372

[18] STEWART, I. *Galois Theory.* 3. vyd. ChapmannHall/CRC, 2004.

[19] KLEIN, F. *Famous Problems of Elementary Geometry.* Překladatel: TÄGERT, F. Editor: ARCHIBALD, R.C. New York: Dover Publikations, inc., 1930

[20] BACHMANN, P. Die Disquisitiones aritmeticae. Kreisteilung. In *Über Gauss' Zahlentheoretische Arbeiten.* 1911 s. 37