Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tereza Dvořáková

Kombinatorické úlohy o pokrývání

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky-deskriptivní geometrie pro střední školy

Praha 2014

Ráda bych poděkovala všem, kteří mě podporovali při psaní této diplomové práce. Zejména děkuji mému vedoucímu RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za cenné rady a čas věnovaný konzultacím.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .... Tereza Dvořáková

Název práce: Kombinatorické úlohy o pokrývání

Autor: Bc. Tereza Dvořáková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce představuje soubor řešených úloh o pokrývání rovinných obrazců (nejčastěji obdélníků s celočíselnými stranami) pomocí dlaždic známých pod názvem polyomina (např. domina, tromina, tetromina, atd.). Ve většině úloh jde o nalezení pokrytí nebo o důkaz, že takové pokrytí neexistuje. V náročnějších úlohách je cílem odvodit kritéria, jež musí obdélník splňovat, aby bylo zaručeno, že jej lze pokrýt zadanými polyominy. Poslední kapitola je věnována určení počtu všech možných pokrytí zadaného obdélníku.

Klíčová slova: polyomino, pokrytí, obdélník

Title: Tiling problems in combinatorics

Author: Bc. Tereza Dvořáková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The thesis represents a collection of solved problems concerned with covering planar shapes (mostly rectangles with integer sides) by tiles known as polyominoes (e.g., dominoes, trominoes, tetrominoes, etc.). In most cases, the goal is to find a tiling or to prove that no such tiling exists. In more difficult problems, the task is to deduce conditions for the rectangle to be tileable by specified polyominoes. The last chapter is devoted to calculating the number of all possible tilings of the specified rectangle.

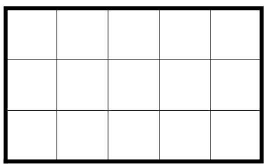
Keywords: polyomino, tiling, rectangle

Obsah

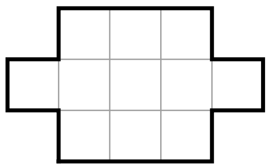
Úvod

Nejdříve ze všeho je potřeba upřesnit některé základní pojmy, které souvisí s pokrýváním. Většinou se budeme zabývat pokrýváním obdélníků o velikosti $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Takový obdélník se skládá z mn čtverců o velikosti 1×1, budeme říkat, že obdélník obsahuje mn políček (obrázek 1). Někdy budeme zkoumat pokrývaní jiných rovinných ploch než obdélníků, ale vždy se budou tyto plochy skládat z daného počtu políček. Např. můžeme pokrývat plochu, která vznikne z obdélníku o velikosti 3×5 odebráním všech rohových políček. Jednalo by se potom o plochu velikosti 11 políček (obrázek 2).

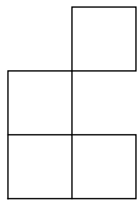
Pokrývat budeme pomocí dlaždic známých pod názvem polyomina. Jsou to obrazce, které pokrývají určitý počet políček. Nejmenší možné polyomino je monomino, to pokrývá právě jedno políčko. Ostatní větší polyomina lze vždy poskládat z konečného počtu monomin tak, že každé monomino tohoto obrazce musí mít společnou alespoň jednu stranu s libovolným jiným monominem, proto útvar na obrázku 3 za polyomino považovat nebudeme.



Obrázek 1: Obdélník o velikosti 3×5 obsahující 15 políček



Obrázek 2: Plocha, která vznikne z obdélníku o velikosti 3×5 odebráním všech čtyř rohů



Obrázek 3: Tento obrazec nepovažujeme za polyomino

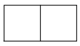
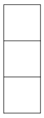
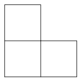
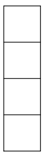
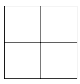
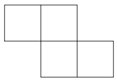
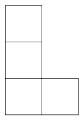
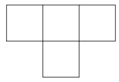
Polyominu, které pokrývá dvě políčka, budeme říkat domino. Polyominu, které pokrývá tři políčka, budeme říkat tromino. Je možné vytvořit dva druhy tromin a podle toho, jaké písmeno připomíná tvar tromina, je budeme nazývat: L-tromina a I-tromina. Obdobně pojmenujeme další větší polyomina (tetromina, pentomina, hexomina, heptomina, oktomina, nonomina atd.). V tabulce 1 jsou znázorněna a popsána polyomina, se kterými budeme nejčastěji pracovat.

Za plochu pokrytou polyominy budeme považovat takovou plochu, jejíž každé políčko je pokryto právě jedním polyominem. Zároveň se nesmí stát, že by polyomino přesahovalo přes okraj plochy.

V typických úlohách bude naším úkolem nalézt pokrytí konkrétní plochy pomocí zadaných polyomin, většinou pomocí několika polyomin stejného druhu, ale někdy i pomocí polyomin různých druhů. Samozřejmě ne vždy hledané pokrytí existuje, proto v některých úlohách budeme hledat důkaz neexistence takového pokrytí.

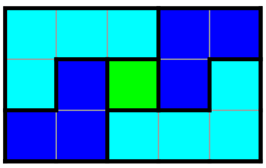
V některých úlohách se také můžeme zajímat o to, zda je dané pokrytí invariantní vůči středové či osové souměrnosti. Hovoříme potom o tzv. středově souměrném pokrytí

Tabulka 1: Polyomina

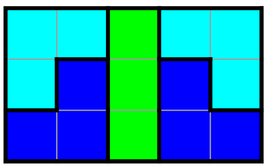
Monomino					
Domino					
Tromino	I-tromino	L-tromino			
					
Tetromino	I-tetromino	O-tetromino	Z-tetromino	L-tetromino	T-tetromino
					

(obrázek 4), resp. osově souměrném pokrytí (obrázek 5). Při pokrývání čtverce se navíc můžeme potkat s pokrytím invariantním vůči otočení o 90° okolo středu čtverce (obrázek 6).

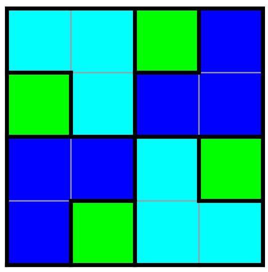
Další pojem, se kterým se potkáme při pokrývání obdélníků, je zlom. Jedná se o vodorovnou nebo svislou úsečku, jejíž krajní body leží na protilehlých stranách obdélníku. Navíc tato úsečka neprotíná žádné políčko obdélníku, pouze se jich dotýká podél jejich stran (obrázek 7). Této definici vyhovují i samotné strany obdélníku, ale ty za zlomy považovat nebudeme. Zřejmě tedy v každém obdélníku o velikosti $m \times n$ najdeme $m+n-2$ zlomů. V některých úlohách o pokrývání obdélníků budeme odlišovat, zda je dané pokrytí rozložitelné či nerozložitelné. Rozložitelné pokrytí je takové, ve kterém se nachází nějaký zlom, který neprotíná žádné polyomino, pouze se jich dotýká podél jejich stran (obrázek 8). Naproti tomu nerozložitelné pokrytí je takové, ve kterém každý zlom protíná alespoň jedno polyomino (obrázek 9).



Obrázek 4: Středově souměrné pokrytí obdélníku



Obrázek 5: Osově souměrné pokrytí obdélníku

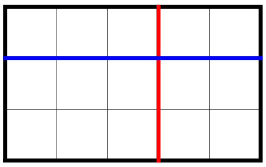


Obrázek 6: Pokrytí čtverce invariantní vůči otočení o 90°

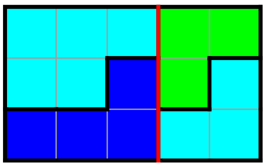
Jelikož pomocí daných polyomin lze pokrýt pouze některé obdélníky, ale jiné zase ne, nabízí se úlohy, ve kterých je cílem odvodit kritéria, jež musí obdélník splňovat, aby bylo zaručeno, že jej lze pokrýt zadanými polyominy. Tyto náročnější úlohy jsou často rozděleny do několika dílčích částí.

Převážně se tedy budeme věnovat existenci či neexistenci pokrytí. Většinu ploch lze pokrýt více způsoby. Těchto způsobů bývá dokonce obrovské množství, proto nemá smysl snažit se najít všechna možná pokrytí. Může nás však zajímat, kolik možných pokrytí zadaného obdélníku existuje. Touto problematikou se budeme zabývat v poslední kapitole.

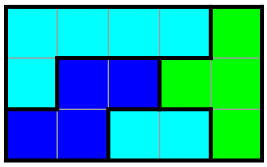
Značnou část úloh této diplomové práce jsem převzala z odborné literatury. V každé takové úloze je vždy u zadání citován příslušný pramen.



Obrázek 7: Červeně svislý a modře vodorovný zlom



Obrázek 8: Rozložitelné pokrytí obdélníku



Obrázek 9: Nerozložitelné pokrytí obdélníku

1 Pokrývání obdélníků dominy

Úloha 1.1 ([11], str. 3). Jaké podmínky musí splňovat čísla $m, n \in \mathbb{N}$, aby obdélník o velikosti $m \times n$ šel pokrýt dominy?

Řešení: Uvědomme si, že libovolné množství domin pokrývá sudý počet políček. Je tedy zřejmé, že jestliže obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt dominy, potom počet políček obdélníku, tj. číslo mn, musí být sudé. Toto je nutná podmínka a nabízí se otázka, jestli je i podmínkou postačující. Jestliže je číslo mn sudé, potom alespoň jedno z čísel m nebo n je sudé. Předpokládejme, že n je sudé, tj. počet políček v jednom řádku je sudý. Každý řádek tedy můžeme pokrýt dominy umístěnými ve vodorovné poloze.

Obdélník o velikosti $m \times n$ lze tedy pokrýt dominy právě tehdy, když mn je sudé.

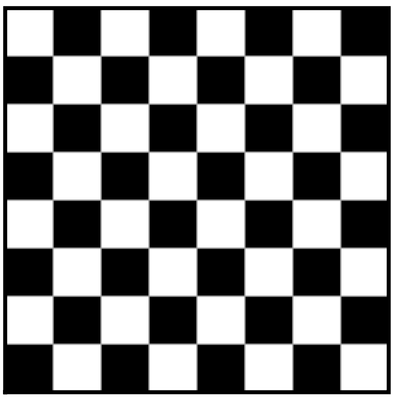
Úloha 1.2 ([13], str. 11). Je možné pokrýt dominy čtverec o velikosti 8×8, ze kterého odebereme dvě protilehlá rohová políčka?

Řešení: Zbylá plocha obsahuje 62 políček, což je sudé číslo. Je tedy splněna nutná podmínka pro pokrývání dominy a na první pohled se může zdát, že pokrytí existuje.

K nalezení řešení nám v tomto případě pomůže vhodné obarvení políček čtverce. Každé políčko obarvíme černou, nebo bílou barvou tak, aby se stejně barevná políčka dotýkala pouze rohy (obrázek 10). Jedná se o klasické obarvení šachovnice. Pokud nyní umístíme domino na libovolné místo obarveného čtverce, domino vždy pokryje jedno černé a jedno bílé políčko. Z toho lze odvodit další nutnou podmínku. Jestliže čtverec, obdélník (či jinou plochu vzniklou z obdélníku odebráním některých políček) lze pokrýt dominy, potom musí obsahovat stejný počet černých a bílých políček.

Vraťme se nyní k našemu příkladu. Čtverec o velikosti 8×8 má 32 černých a 32 bílých políček. Když z tohoto čtverce odebereme dva protilehlé rohy, což jsou políčka obarvená stejnou barvou, zbyde 30 políček jedné barvy a 32 políček druhé barvy.

Druhá nutná podmínka není splněna, proto čtverec o velikosti 8×8 bez dvou protilehlých rohů nelze pokrýt dominy.



Obrázek 10: Čtverec obarvený jako šachovnice

Úloha 1.3 ([13], str. 12). Je možné pokrýt dominy čtverec o velikosti 8×8, ze kterého odebereme dvě přilehlá rohová políčka?

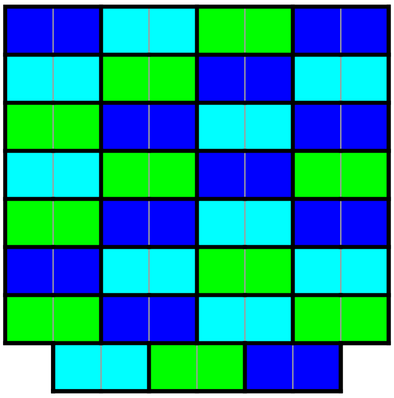
Řešení: Obě nutné podmínky jsou v tomto případě splněny. Chceme pokrýt 62 políček, přičemž 31 je černých a 31 je bílých. Jedno z možných řešení je na obrázku 11.

Úloha 1.4 ([13], str. 12). Dokažte, že jestliže ze čtverce o velikosti 8×8, který je obarven jako šachovnice, odebereme libovolné černé a libovolné bílé políčko, potom lze zbývající plochu pokrýt dominy.

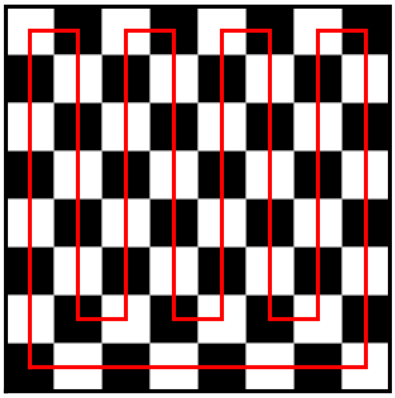
Řešení: V této úloze si vezmeme na pomoc šachovou figurku věž, která se smí na šachovnici v jednom tahu posunout o libovolný počet políček vodorovně nebo svisle. Najdeme cestu věže po šachovnici 8×8, kde při této cestě věž navštíví každé políčko šachovnice právě jednou a na závěr své cesty se vrátí na startovní políčko. Takových cest je mnoho, jedna je na obrázku 12.

Podél nalezené cesty můžeme naskládat domina tak, jak ukazuje obrázek 13. Nyní ze šachovnice odebereme libovolné černé políčko. Cesta věže už není uzavřená, ale stále tvoří jednu souvislou cestu, která začíná i končí na bílém políčku. Dále ze šachovnice odebereme libovolné bílé políčko. Buď odebereme první (resp. poslední) políčko cesty, čímž získáme jednu souvislou cestu o sudém počtu políček nebo odebereme bílé políčko uprostřed cesty, čímž se cesta věže rozpadne na dvě kratší cesty. Tyto kratší cesty obě začínají na bílém políčku a končí na černém políčku (popřípadě opačně, záleží, jaký si zvolíme směr cesty). Každopádně obě cesty se skládají ze sudého počtu políček.

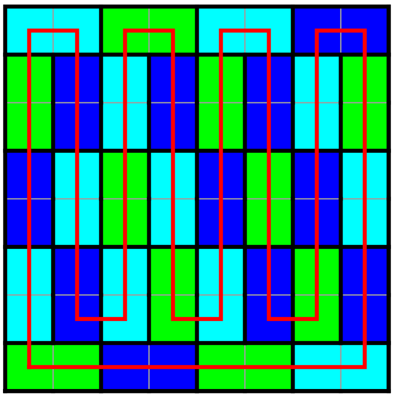
Zřejmě můžeme podél každé cesty věže o sudém počtu políček naskládat domina. Zbývající plochu šachovnice po odebrání dvou různobarevných políček tedy lze pokrýt dominy jak v případě, že se skládá z jedné cesty, tak v případě, že se skládá ze dvou kratších cest (druhou situaci ilustruje obrázek 14).



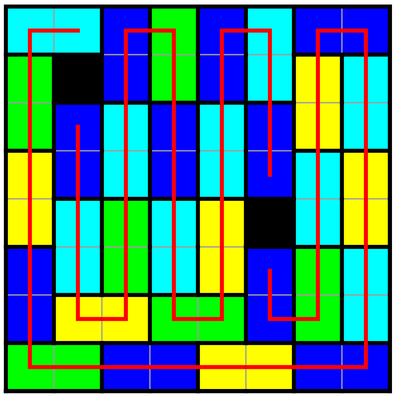
Obrázek 11: Obdélník o velikosti 8×8 bez dvou přilehlých rohů pokrytý dominy



Obrázek 12: Červeně je vyznačená cesta věže po šachovnici



Obrázek 13: Domina vyskládaná podél cesty věže



Obrázek 14: Domina vyskládaná podél dvou cest věže o sudém počtu políček

Úloha 1.5 ([11], str. 3). Je dán obdélník o velikosti $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, mn je sudé a $m, n > 1$, který je obarven jako šachovnice. Dokažte, že jestliže z tohoto obdélníku odebereme libovolné černé a libovolné bílé políčko, potom lze zbývající plochu pokrýt dominy.

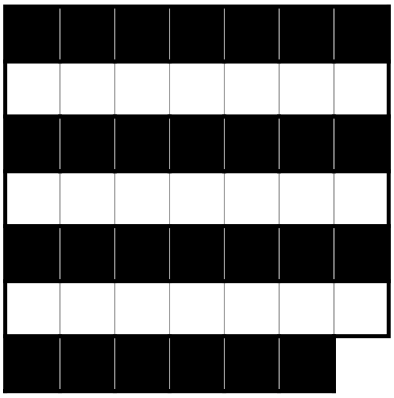
Řešení: Tato úloha je zobecněním úlohy předchozí. Stačí dokázat, že na šachovnici, která má rozměry $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, mn je sudé a $m, n > 1$ existuje uzavřená cesta věže popsaná výše. Předpokládejme, že n je sudé, tedy počet sloupců je sudý (pro sudé m je situace analogická). Potom lze vytvořit cestu věže, která bude vypadat obdobně jako na obrázku 12.

Cesta věže začne v levém dolním rohu, pokračuje přes celý dolní řádek do pravého dolního rohu, poté přes celý poslední sloupec do pravého horního rohu. Nyní se budou stále opakovat tyto dva kroky: Věž se posune o jedno políčko doleva a projde zbylá políčka daného sloupce. Tím se bude pravidelně střídat směr průchodu sloupců. Poslední (pravý) sloupec věž prošla směrem nahoru, a protože máme sudý počet sloupců, musí věž první (levý) sloupec projít směrem dolů. Tím je zaručeno, že se cesta věže uzavře.

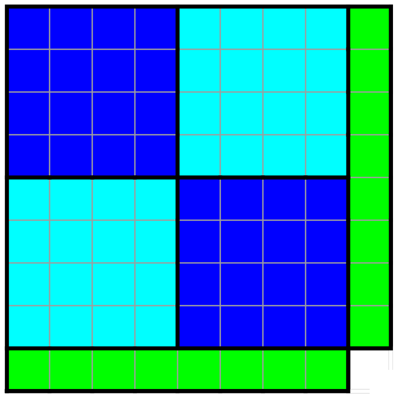
Úloha 1.6 ([4], str. 26). Ze čtverce o velikosti $(2n + 1) \times (2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, odebereme jedno rohové políčko. Pro jaké n lze zbývající plochu pokrýt dominy tak, aby polovina domin byla ve svislé poloze a polovina ve vodorovné?

Řešení: V této úloze nám opět pomůže obarvení čtverce. Tentokrát jej obarvíme pruhovaně, tj. tak, že každý řádek bude mít střídavě černou nebo bílou barvou (obrázek 15). Jestliže první řádek obarvíme černě, potom budou i všechna rohová políčka obarvena černě. Po odebrání jednoho rohového políčka bude zbylá plocha obsahovat $2n^2 + 3n$ černých a $2n^2 + n$ bílých políček, tj. celkem $4n^2 + 4n$ políček. Tuto plochu budeme pokrývat pomocí $2n^2 + 2n$ domin, z čehož $n^2 + n$ bude ve svislé a $n^2 + n$ bude ve vodorovné poloze.

Domino ve svislé poloze pokryje vždy jedno černé a jedno bílé políčko. $n^2 + n$ domin ve svislé poloze proto pokryje $n^2 + n$ černých a $n^2 + n$ bílých políček. Domina ve vodorovné



Obrázek 15: Obdélník bez rohového políčka obarvený pruhovaně po řádcích



Obrázek 16: Obdélník o velikosti 9×9 bez pravého dolního rohu rozdělený na šest částí

poloze tedy musí pokrýt zbývající políčka, tj. $n^2 + 2n$ černých a n^2 bílých políček.

Domino ve vodorovné poloze vždy pokryje dvě černá nebo dvě bílá políčka. Všechna domina ve vodorovné poloze proto musí pokrývat sudý počet černých a sudý počet bílých políček. Čísla $n^2 + 2n$, n^2 musí být obě sudá, což nastane právě tehdy, když je n sudé.

Našli jsme tedy nutnou podmínku. Jestliže čtverec o velikosti $(2n+1)\times(2n+1)$ bez jednoho rohového políčka lze pokrýt dominy napůl svisle a napůl vodorovně umístěnými, potom n musí být sudé číslo, resp. daný čtverec musí být velikosti $(4k + 1) \times (4k + 1)$ bez jednoho rohového políčka, kde $k \in \mathbb{N}$.

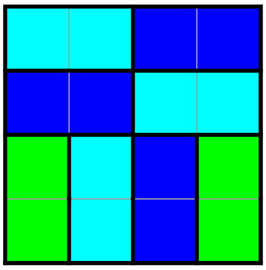
Ihned se nabízí otázka, jestli je tato podmínka postačující. Abychom ukázali, že ano, rozdělíme čtverec $(4k + 1) \times (4k + 1)$ bez pravého dolního rohu (pro jiné rohy analogicky) na několik částí: dolní řádek $(1 \times 4k)$, pravý sloupec $(4k \times 1)$ a k čtverců 4×4 (obrázek 16). Postupně budeme dominy pokrývat jednotlivé části. Dolní řádek vyplníme pomocí $2k$ vodorovných domin a levý sloupec vyplníme pomocí $2k$ svislých domin. Počet vodorovných a svislých domin je tedy zatím vyrovnaný. Dále každý čtverec 4×4 vyplníme pomocí čtyř svislých a čtyř vodorovných domin (jako na obrázku 17). Tím jsme pokryli celou plochu a dodrželi daný požadavek, podmínka je tedy i postačující.

Úloha 1.7 ([13], str. 225). Najděte nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5×6 dominy.

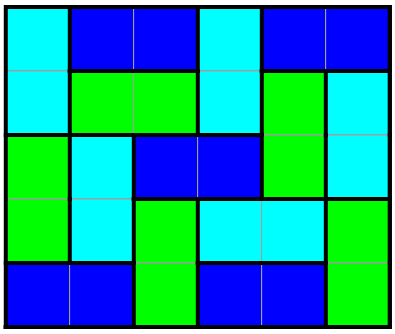
Řešení: Možné řešení je na obrázku 18.

Úloha 1.8 ([4], str. 27). Dokažte, že jestliže čtverec o velikosti 6×6 je pokrytý dominy, potom je toto pokrytí rozložitelné.

Řešení: Budeme postupovat sporem. Představme si, že existuje nerozložitelné pokrytí čtverce o velikosti 6×6. To znamená, že každý zlom musí protínat alespoň jedno domino. V tomto případě dokonce platí, že pokud zlom protíná jedno domino, potom musí protínat



Obrázek 17: Čtverec o velikosti 4×4 pokrytý dominy napůl svisle a napůl vodorovně umístěnými



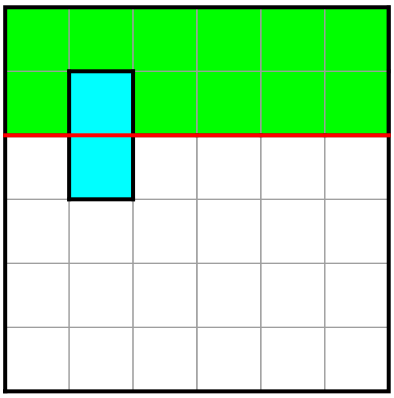
Obrázek 18: Nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5×6

nějaké druhé domino. Proč to platí, si vysvětlíme v následujícím odstavci.

Zaměříme se na libovolný zlom ve čtverci, např. k-tý vodorovný zlom, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a budeme předpokládat, že zlom protíná alespoň jedno domino. Zlom rozdělí čtverec na dva obdélníky o rozměrech $k \times 6$ a $(6 - k) \times 6$. První obdélník má $6k$ políček, tj. sudý počet. Zároveň ale jedno políčko zabírá zmíněné domino, které je protnuto daným zlomem. Nyní je třeba pokrýt dominy zbývající plochu prvního obdélníku, která má lichý počet políček, což nelze. Na obrázku 19 je tato situace znázorněna.

Obdobný problém nastane i u druhého obdélníku. Aby tedy bylo vůbec možné nějaké pokrytí nalézt, musí daný zlom protínat ještě druhé domino (resp. zlom musí protínat sudý počet domin), aby zbývající plocha prvního i druhého obdélníku měla sudý počet políček a šla tedy pokrýt dominy.

Ve čtverci o velikosti 6×6 je 10 zlomů. Aby bylo pokrytí nerozložitelné, musí každý zlom protínat alespoň dvě domina. Na pokrytí bychom tedy potřebovali alespoň 20 domin. Naše šachovnice má ale 36 políček a lze ji pokrýt jedině pomocí 18 domin. Došli jsme tedy ke sporu.



Obrázek 19: Čtverec o velikosti 6×6 s červeně vyznačeným vodorovným zlomem, který protíná právě jedno domino. Zelenou ani bílou plochu nelze dominy pokrýt.

2 Pokrývání obdélníků trominy

2.1 Pokrývání obdélníků I-trominy

Úloha 2.1. Jaké podmínky musí splňovat čísla $m, n \in \mathbb{N}$, aby obdélník o velikosti $m \times n$ šel pokrýt I-trominy?

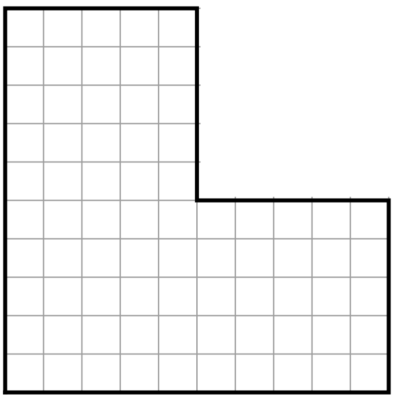
Řešení: I-tromino pokrývá tři políčka, proto musí být počet políček obdélníku dělitelný třemi, a to je právě tehdy, když jedno z čísel m, n je dělitelné třemi. Obdobně jako u domin se jedná zároveň o postačující podmínku, neboť pokud by bylo např. n dělitelné třemi, tj. počet políček v jednom řádku by byl dělitelný třemi, potom bychom mohli každý řádek vyskládat I-trominy.

Obdélník o velikosti $m \times n$ lze tedy pokrýt I-trominy právě tehdy, je-li mn dělitelné třemi.

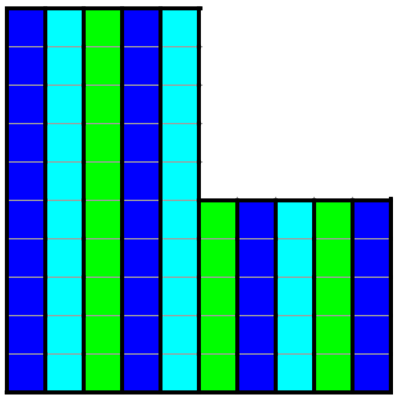
Úloha 2.2 ([11], str. 31). Plochu na obrázku 20 pokryjte I-trominy.

Řešení: Plocha obsahuje 75 políček a můžeme tedy očekávat, že ji lze pokrýt pomocí 25 I-tromin. Toto pokrytí ovšem neexistuje. Abychom to dokázali, obarvíme obrazec pruhovaně třemi různými barvami jako na obrázku 21.

I-tromino umístěné na plochu ve vodorovné poloze pokrývá od každé barvy jedno políčko, oproti tomu I-tromino ve svislé poloze pokrývá od jedné barvy tři políčka. Označíme-li S_1, S_2 a S_3 počet políček modré, azurové a zelené barvy, potom by pro plochu pokrytou I-trominy muselo platit, že $S_1 \equiv S_2 \equiv S_3 \pmod 3$. Pokud se ale podíváme na danou plochu, zjistíme, že $S_1 = 30$, $S_2 = 25$ a $S_3 = 20$, čímž jsme došli ke sporu.



Obrázek 20: Plocha, jež má být pokryta I-trominy



Obrázek 21: Plocha, jež má být pokryta I-trominy, obarvená pruhovaně třemi barvami

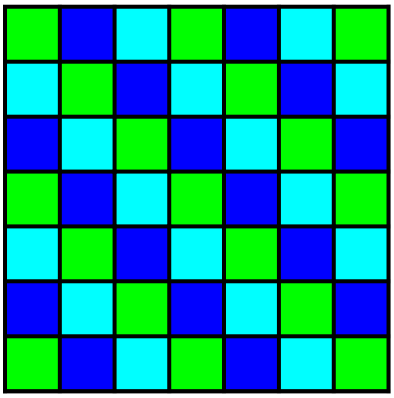
Úloha 2.3 ([4], str. 27). Čtverec o velikosti 7×7 chceme pokrýt pomocí 16 I-tromin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Řešení: V této úloze opět čtverec obarvíme pomocí tří barev: zelené, modré a azurové. Obarvení bude pruhované, tentokrát však nebudou pruhy svislé, nýbrž diagonální (obrázek 22). Ve čtverci se nyní nachází 17 zelených, 16 modrých a 16 azurových políček. Libovolné I-tromino umístěné v tomto čtverci pokryje od každé barvy jedno políčko. Monomino tedy musí být umístěno na některém zeleném políčku.

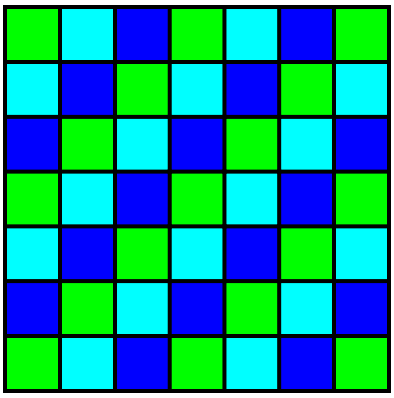
Čtverec nyní obarvíme podruhé. Opět pruhovaně pomocí tří barev, ale tentokrát budou pruhy ve směru druhé diagonály (obrázek 23). Ze stejného důvodu jako u předchozího obarvení musí být monomino umístěno na některém zeleném políčku.

Přípustná políčka pro monomina jsou taková, která jsou zelená při prvním i při druhém obarvení. Tato políčka jsou znázorněna na obrázku 24. Nyní bychom měli dokázat, že pokud umístíme monomino na libovolné z těchto políček, potom lze zbývající plochu pokrýt I-trominy.

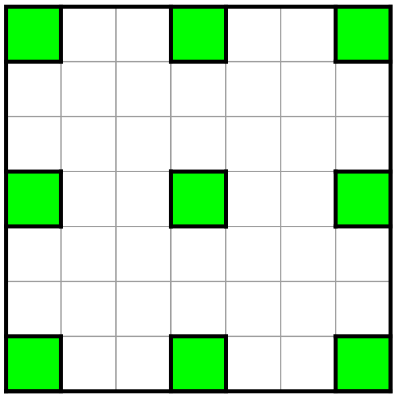
Pokud monomino umístíme na některé zelené políčko v horním (resp. dolním) řádku, potom tento řádek doplníme dvěma I-trominy a zbyde nám k pokrytí obdélník o velikosti 6×7, který pokryjeme dle úlohy 2.1. Pokud monomino umístíme do prostředního řádku, potom doplníme dvěma I-trominy prostřední řádek a zbydou nám k pokrytí dva obdélníky o velikostech 3×7, které opět pokryjeme dle úlohy 2.1.



Obrázek 22: Čtverec o velikosti 7×7 obarvený třemi barvami pruhovaně ve směru hlavní diagonály



Obrázek 23: Čtverec o velikosti 7×7 obarvený třemi barvami pruhovaně ve směru vedlejší diagonály



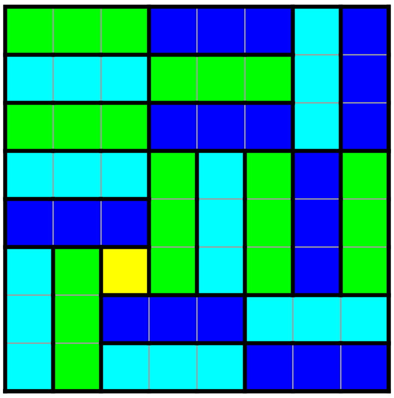
Obrázek 24: Zelená políčka jsou průnikem zelených políček z obrázků 22 a 23

Úloha 2.4 ([13], str. 230). Čtverec o velikosti 8×8 chceme pokrýt pomocí 21 I-tromin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Řešení: Mohli bychom postupovat obdobným způsobem, jako v předchozí úloze, tedy s využitím diagonálního obarvení pomocí tří barev. Ukážeme si ale nyní jiný možný postup.

Jednotlivá políčka na čtverci popíšeme pomocí souřadnic tak, že políčko v i-tém řádku a j-tém sloupci bude mít souřadnice (i, j). Umístíme-li do čtverce I-tromino vodorovně, potom políčka, která bude pokrývat, budou mít souřadnice (i, j), $(i, j+1)$, $(i, j+2)$. Součet všech prvních souřadnic je $3i$, součet druhých souřadnic je $3j+3$. Oba součty jsou dělitelné třemi. Dále si uvědomíme, že součet prvních souřadnic všech políček ve čtverci je $8 \cdot (1+2+\cdots+8) = 8 \cdot 36$, což je číslo dělitelné třemi. Stejný bude i součet všech druhých souřadnic. Z toho plyne, že pokud je čtverec pokrytý pomocí I-tromin a jednoho monomina, potom obě souřadnice monomina musí být čísla dělitelná třemi. Ve čtverci o velikosti 8×8 jsou to pouze čísla 3 a 6. Přípustné souřadnice pro monomino jsou tedy $(3, 3), (3, 6), (6, 3)$ a $(6, 6)$.

Nakonec je potřeba ukázat, že pro každou z těchto čtyř možností skutečně lze čtverec pokrýt. Na obrázku 25 je pokrytí pro monomino o souřadnicích $(3, 3)$. Postupným otáčením tohoto obrázku o $90°$ dostaneme pokrytí pro monomina umístěná na zbylých pozicích.



Obrázek 25: Čtverec o velikosti 8×8, který je pokrytý pomocí I-tromin a jednoho monomina o souřadnicích $(3, 3)$.

2.2 Pokrývání obdélníků L-trominy

V této kapitole budeme řešit několik drobnějších úloh, pomocí kterých budeme směřovat k obecnému kritériu pro pokrývání obdélníků L-trominy.

Úloha 2.5 ([11], str. 7). Obdélník o velikosti 4×5 pokryjte L-trominy.

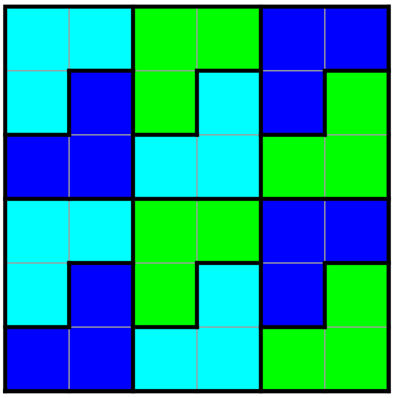
Řešení: Takové pokrytí neexistuje, jelikož je porušena jednoduchá podmínka. L-tromino pokryje tři políčka obdélníku, proto pokud libovolný obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt L-trominy, musí být počet políček tohoto obdélníku dělitelný třemi. To je právě tehdy, když alespoň jedno z čísel m, n je dělitelné třemi. Tuto podmínku ovšem zadaný obdélník nesplňuje.

Úloha 2.6 ([11], str. 7). Zjistěte pro jaké nejmenší číslo $n \in \mathbb{N}$ lze čtverec o velikosti $n \times n$ pokrýt L-trominy.

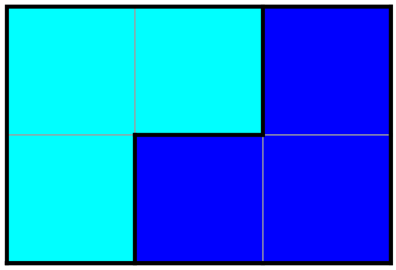
Řešení: Aby byla splněna nutná podmínka, zřejmě musí být n dělitelné třemi. Snadno lze vyzkoušet, že do čtverce o velikosti 3×3 nelze vložit více jak dvě L-tromina. U čtverce o velikosti 6×6 už řešení existuje. Jedno možné řešení je na obrázku 26.

Úloha 2.7 ([11], str. 7). Najděte všechna čísla $n \in \mathbb{N}$, pro která obdélník o velikosti $2 \times n$ lze pokrýt L-trominy.

Řešení: Aby měl tento obdélník počet políček dělitelný třemi, musí být číslo n dělitelné třemi, tedy n musí být tvaru $n = 3k, k \in \mathbb{N}$. To je nutná i postačující podmínka, neboť každý obdélník o velikosti $2 \times 3k$ lze rozdělit na k menších obdélníků o velikosti 2×3 a každý tento menší obdélník lze pokrýt L-trominy (obrázek 27).



Obrázek 26: Čtverec o velikosti 6×6 pokrytý L-trominy



Obrázek 27: Obdélník o velikosti 2×3 pokrytý L-trominy

Úloha 2.8 ([11], str. 8). Dokažte následující tvrzení: Jestliže obdélník o velikosti $a \times b$, kde b je dělitelné třemi, lze pokrýt L-trominy, potom i obdélník o velikosti $(a + 2) \times b$ lze pokrýt L-trominy.

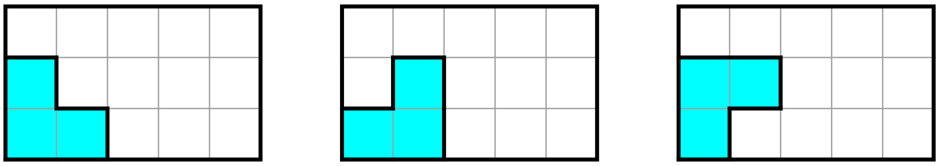
Řešení: Obdélník o velikosti $(a+2) \times b$ rozdělíme na dva menší. Jeden bude velikosti $a \times b$, ten lze pokrýt dle předpokladu tohoto tvrzení. Druhý bude velikosti $2 \times b$, kde b je dělitelné třemi. Podle předchozí úlohy umíme pokrýt i druhý obdélník.

Úloha 2.9 ([11], str. 7). Najděte všechna čísla $n \in \mathbb{N}$, pro která obdélník o velikosti $3 \times n$ lze pokrýt L-trominy.

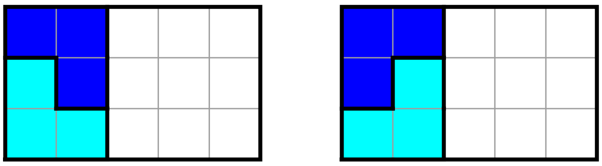
Řešení: Nejprve danému obdélníku pokryjeme levý dolní roh, to lze právě třemi způsoby (obrázek 28). Poté se pokusíme pokrýt levý horní roh. Ve třetím případě to nelze, proto není možné pokrývání celého obdélníku tímto způsobem dokončit. V prvních dvou případech to lze a vždy právě jedním způsobem, který vede k pokrytí menšího obdélníku o velikosti 3×2 (obrázek 29).

Dále je potřeba pokrýt zbylou plochu, což je obdélník o velikosti $3 \times (n - 2)$. Stejným způsobem budeme pokrývat levý dolní i horní roh a opět pokryjeme menší obdélník o velikosti 3×2.

Obdélník o velikosti $3 \times n$ lze tedy pokrýt L-trominy právě tehdy, když n je sudé.



Obrázek 28: Tři způsoby pokrytí levého dolního rohu obdélníku L-trominy



Obrázek 29: Dva způsoby pokrytí levého horního rohu obdélníku L-trominy

Úloha 2.10. Najděte všechna čísla $k, l \in \mathbb{N}$, pro která obdélník o velikosti $3k \times 2l$ lze pokrýt L-trominy.

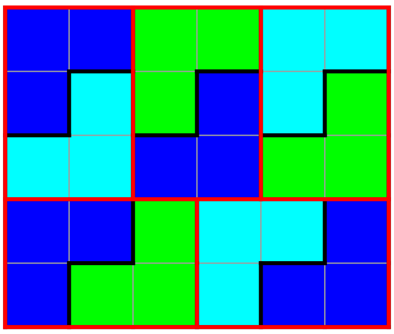
Řešení: Obdélník o velikosti $3k \times 2l$ lze rozdělit na kl menších obdélníků o velikostech 3×2, které lze L-trominy pokrýt (obrázek 27). Jeden z těchto obdélníků je na obrázku 26. Platí tedy, že každý obdélník o velikosti $3k \times 2l$, kde $k, l \in \mathbb{N}$, lze pokrýt L-trominy.

Úloha 2.11 ([11], str. 8). Obdélník o velikosti 5×6 pokryjte L-trominy.

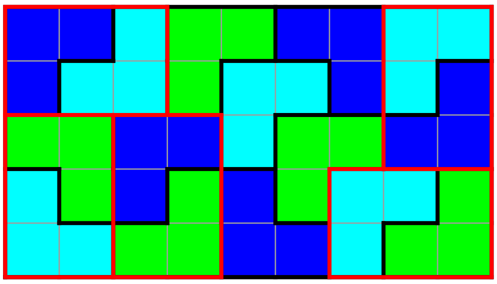
Řešení: Tento obdélník lze rozdělit na 5 menších obdélníků o velikosti 3×2. Jedno z možných řešení je na obrázku 30.

Úloha 2.12 ([11], str. 8). Obdélník o velikosti 5×9 pokryjte L-trominy.

Řešení: Jedno z možných řešení je na obrázku 31.



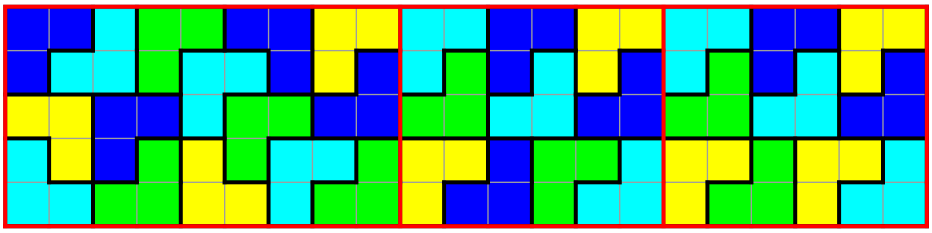
Obrázek 30: Obdélník o velikosti 5×6 pokrytý L-trominy



Obrázek 31: Obdélník o velikosti 5×9 pokrytý L-trominy

Úloha 2.13 ([11], str. 8). Dokažte, že obdélník o velikosti $5 \times 3k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ lze pokrýt L-trominy.

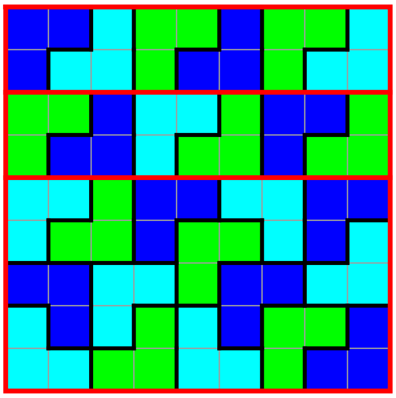
Řešení: Dva nejmenší takové obdélníky jsou velikosti 5×6 a 5×9. Pokrytí těchto obdélníků známe z předchozích dvou úloh. Všechny ostatní obdélníky, tedy obdélníky o velikosti $5 \times 3k$, $k > 3$ potom lze rozdělit na několik menších, které pokrýt umíme. Pro k sudé rozdělíme obdélník na $k/2$ menších typu 5×6. Pokud je k liché rozdělíme obdélník na jeden o velikosti 5×9 a na $(k-3)/2$ obdélníků o velikostech 5×6. Na obrázku 32 je příklad pokrytí obdélníku o velikosti 5×21.



Obrázek 32: Obdélník o velikosti 5×21 pokrytý L-trominy

Úloha 2.14 ([11], str. 8). Obdélník o velikosti 9×9 pokryjte L-trominy.

Řešení: Obdélník si rozdělíme na tři menší obdélníky. Dva budou velikosti 2×9 a jeden bude velikosti 5×9. Každý z těchto menších obdélníků už jsme v některé úloze výše pokrývali. Jedno z možných řešení je na obrázku 33.



Obrázek 33: Obdélník o velikosti 9×9 pokrytý L-trominy

Úloha 2.15 ([11], str. 9). Dokažte, že obdélník o velikosti $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \le m \le n$, lze pokrýt L-trominy právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:

(i) $m = 3$ a n je sudé

(ii) $m \neq 3$ a mn je dělitelné třemi

Řešení: Budeme postupovat tak, že obdélníky o velikosti $m \times n$ rozdělíme do několika skupin podle počtu řádků obdélníku, tj. podle čísla m. Dané tvrzení dokážeme postupně pro každou skupinu. Většinou pouze zrekapitulujeme výsledky úloh předchozích.

První skupinu tvoří obdélníky, kde $m = 2$. Podle úlohy 2.7 lze takový obdélník pokrýt právě tehdy, když n je dělitelné třemi.

Druhou skupinu tvoří obdélníky, kde $m = 3$. Podle úlohy 2.9 lze takový obdélník pokrýt právě tehdy, když je n sudé.

Třetí skupinu tvoří obdélníky, kde je $m > 3$ a zároveň m je dělitelné třemi. Ukážeme, že každý takový obdélník, kde $m \leq n$, lze pokrýt L-trominy. Musíme rozlišit dva případy, tentokrát podle počtu sloupců, tj. podle čísla n. Pokud je n sudé, obdélník lze pokrýt dle úlohy 2.10. Pokud je n liché, potom nejprve pokryjeme menší obdélník o velikosti $m \times 5$, což jsme už vyřešili v úloze 2.13. Zbyde nám k pokrytí obdélník o velikosti $m \times (n-5)$, kde m je dělitelné třemi a $n-5$ je sudé, což je opět typ obdélníku, který jsme pokrývali v úloze 2.10.

Čtvrtou skupinu tvoří obdélníky, kde je $m > 3$, je sudé a zároveň není dělitelné třemi. Z nutné podmínky pro pokrývání trominy plyne, že n musí být dělitelné třemi. Jedná se zároveň o postačující podmínku, neboť chceme pokrýt L-trominy obdélník o velikosti $m \times n$, kde m je sudé a n je dělitelné třemi (opět úloha 2.10).

Poslední skupinu tvoří obdélníky, kde je $m > 3$, je liché a zároveň není dělitelné třemi. Opět z nutné podmínky plyne, že n musí být dělitelné třemi. Ukážeme, že se jedná i o postačující podmínku.

Obdélníky o velikosti $m \times n$ v této skupině budeme pokrývat po částech. Nejprve pokryjeme obdélník o velikosti $5 \times n$, přičemž víme, že n je dělitelné třemi (úloha 2.13). Poté, je-li $m > 5$, pokryjeme zbývající plochu. Tou bude obdélník o velikosti $(m-5) \times n$, kde $m-5$ je sudé číslo (úloha 2.10).

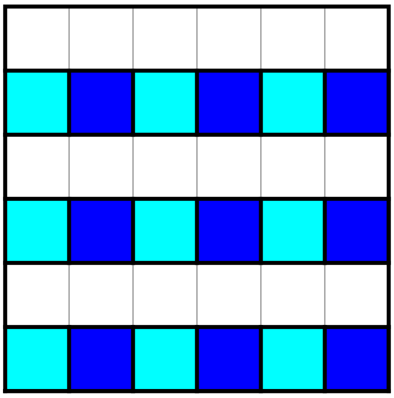
Pro obdélníky z každé skupiny jsme tedy dokázali, že je lze pokrýt právě tehhdy, když je splněna jedna ze zadaných podmínek.

2.3 Pokrývání obdélníků L-trominy a monominy

Úloha 2.16 ([4], str. 28). Jaký je minimální počet monomin, které musí být umístěny do obdélníku o velikosti $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, aby se už do obdélníku nevešlo jediné L-tromino?

Řešení: Znovu obdélníky rozdělíme do několika skupin podle počtu řádků či sloupců. Do první skupiny patří obdélníky, které mají sudý počet řádků i sloupců, tj. m, n jsou obě sudá čísla. Do těchto obdélníků se vejde $mn/4$ čtverců o velikosti 2×2 a do každého tohoto čtverce musíme umístit alespoň dvě monomina, což je dohromady $mn/2$ monomin. Nyní ukážeme, že $mn/2$ monomin je i dostatečný počet. Jedno z možných umístění je takové, že monomina vyskládáme do všech sudých řádků. Žádné L-tromino se už potom do obdélníku nevejde (obrázek 34).

Do druhé skupiny patří obdélníky, které mají sudý počet řádků a lichý počet sloupců, tj. m sudé a n liché. Bez újmy na obecnosti do této skupiny zahrneme i obdélníky s lichým



Obrázek 34: Čtverec o velikosti 6×6, ve kterém je umístěno dostatek monomin tak, aby se do obdélníku nevešlo žádné L-tromino.

počtem řádků a sudým počtem sloupců. Do obdélníku z této skupiny se vejde $m(n-1)/4$ čtverců o velikosti 2×2, do každého čtverce musíme umístit minimálně dvě monomina, což je dohromady $m(n-1)/2$ monomin. To je zároveň dostatečný počet, neboť $m(n-1)/2$ monominy můžeme zaplnit všechny sudé řádky (resp. sloupce), čímž už pro žádné L-tromino nezbyde místo.

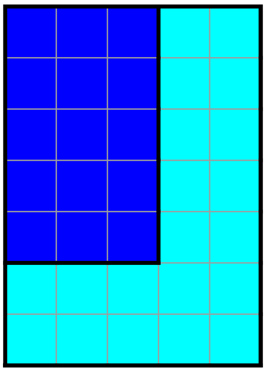
Do poslední skupiny patří obdélníky, které mají lichý počet řádků i sloupců, tj. m i n jsou lichá čísla. Předpokládejme, že $m > n$. Vyskládáme-li $m(n-1)/2$ monomin do sudých sloupců, bude obdélník zaplněn dostatečně. V následujícím odstavci ukážeme, že $m(n-1)/2$ monomin je také nezbytné množství.

Obdélník o velikosti $m \times n$ označíme R_0 a rozdělíme ho na dvě části: menší obdélník o velikosti $(m-2)\times(n-2)$, který označíme R_1 a plochu ve tvaru písmena L o šířce dvě políčka, kterou označíme L_1. Rozdělení je vidět na obrázku 35. Obdélník R_1 posléze opět rozdělíme na dvě části: menší obdélník o velikosti $(m-4)\times(n-4)$, který označíme R_2 a plochu ve tvaru písmena L o šířce dvou políček, kterou označíme L_2. Takto budeme pokračovat, dokud obdélník R_i nebude mít šířku 1. Situaci ilustruje obrázek 36.

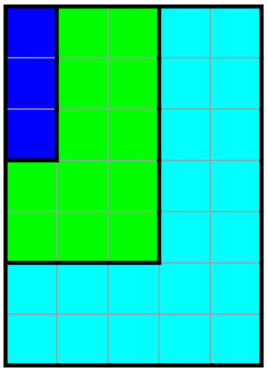
Postupně budeme plochy L_i pokrývat monominy tak, aby už nebylo možné do žádné plochy L_i vložit L-tromino. Začneme u plochy L_1. Ta se skládá z $\frac{m-3}{2}+\frac{n-3}{2}$ čtverců o velikosti 2×2 a z jednoho čtverce o velikosti 3×3 bez horního pravého rohu. Do každého čtverce 2×2 musíme umístit alespoň dvě monomina a do čtverce 3×3 bez jednoho rohu musíme umístit alespoň tři monomina (obrázek 37). Nezbytné množství monomin, které je potřeba na dostatečné pokrytí plochy L_1, je tedy $m+n-3$.

Plocha L_2 se skládá z $\frac{m-5}{2}+\frac{n-5}{2}$ čtverců o velikosti 2×2 a z jednoho čtverce o velikosti 3×3 bez horního pravého rohu. Proto k dostatečnému pokrytí plochy L_2 už postačí pouze $m+n-7$ monomin.

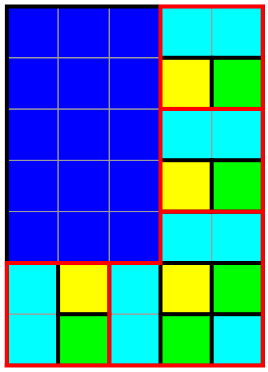
Počet nutných monomin pro plochu L_i tvoří aritmetickou posloupnost o diferenci -4. Počet ploch L_i, které se vejdou do původního obdélníku R_0 je $(n-1)/2$. Abychom zjistili nezbytný počet monomin, musíme zjistit součet prvních $(n-1)/2$ členů této posloupnosti, což je $\frac{m(n-1)}{2}$.



Obrázek 35: Obdélník R_0, v němž tmavě modře vyznačen obdélník R_1 a světle modře plocha L_1



Obrázek 36: Obdélník R_0, v němž tmavě modře vyznačen obdélník R_2, světle modře plocha L_1, zeleně plocha L_2



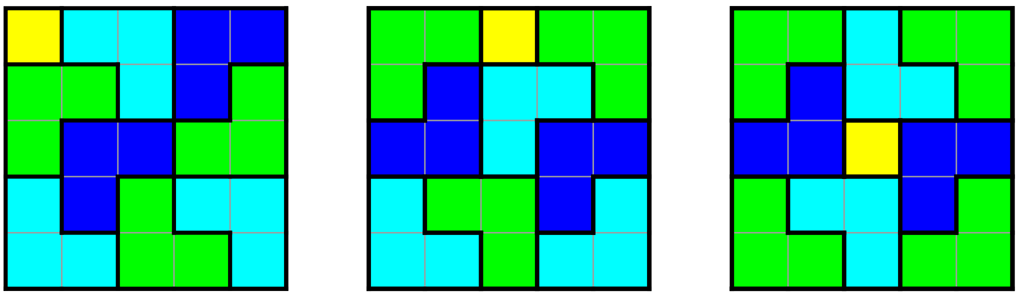
Obrázek 37: V ploše L_1 je umístěno dostatek monomin tak, aby se do plochy nevešlo žádné L-tromino

Úloha 2.17 ([5], str. 164). Čtverec o velikosti 5×5 chceme pokrýt pomocí osmi L-tromin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Řešení: Čtverec o velikosti 5×5 je poměrně malý, proto není příliš pracné rozebrat všechna možná umístění monomina. Na obrázku 38 vidíme pokrytí čtverce při třech různých polohách monomina. Postupným rotováním těchto obrázků o 90° můžeme vytvořit pokrytí čtverce s umístěním monomina na libovolném žlutém políčku z obrázku 39.

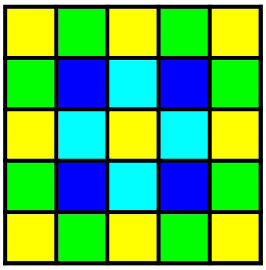
Podívejme se nyní, co se stane při umístění monomina na jedno z azurových políček z obrázku 39. Vyberme např. třetí políčko ve druhém řádku. Existují právě dvě možnosti, jak pokrýt políčko nad monominem. V obou případech však nebude možné pokrýt jeden z horních rohů čtverce (jedna možnost je na obrázku 40). Monomino tedy nemůže být umístěno na žádné azurové políčko z obrázku 39.

Nakonec uvažujeme možnost umístit monomino na některé ze zelených, nebo modrých políček. Díky symetrii stačí uvažovat např. druhé políčko v prvním řádku, nebo druhé políčko ve druhém řádku. V obou případech existuje jediná možnost jak pokrýt levý horní

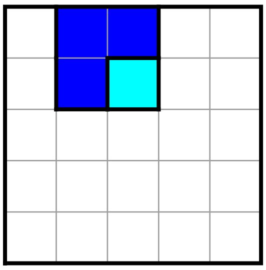


Obrázek 38: Tři různá pokrytí čtverce o velikosti 5×5 pomocí monomina a L-tromin

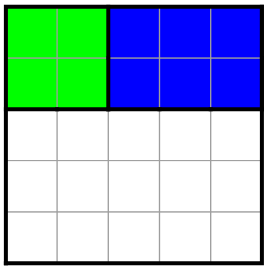
roh čtverce. Pokrytá budou zatím čtyři políčka, která jsou na obrázku 41 znázorněna zeleně. Dále pokryjeme prázdná políčka v prvním řádku, což lze právě dvěma způsoby, vždy pomocí dvou L-tromin. Ta pokryjí modrá políčka z obrázku 41. Nyní nám zbývá pokrýt obdélník o velikosti 3×5 pomocí L-tromin, ale dle úlohy 2.15 již víme, že takové pokrytí neexistuje. Monomino tedy nemůže být umístěno na žádné zelené ani modré políčko z obrázku 39.



Obrázek 39: Políčka čtverce o velikosti 5×5 jsou barevně rozdělena do čtyř skupin



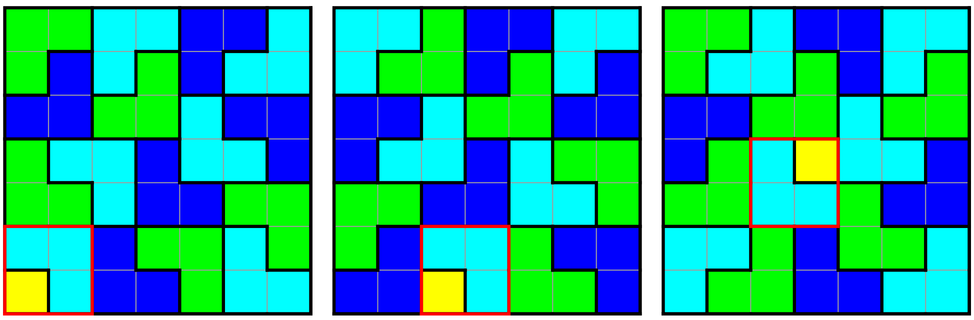
Obrázek 40: Pokrytí čtverce o velikosti 5×5 pomocí L-tromin s monominem ve třetím políčku druhého řádku neexistuje



Obrázek 41: Pokrytí čtverce o velikosti 5×5 pomocí L-tromin s monominem ve druhém políčku prvního nebo druhého řádku neexistuje

Úloha 2.18 ([5], str. 164). Čtverec o velikosti 7×7 chceme pokrýt pomocí 16 L-tromin a jednoho monomina. Jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Řešení: Na obrázku 42 vidíme tři pokrytí s různým umístěním monomina. V každém tomto pokrytí tvoří monomino s jedním sousedním L-trominem čtverec, který je vyznačen červeně. Zřejmě je možné monomino umístit na libovolné ze čtyř políček vyznačeného čtverce. Tyto tři obrázky proto znamenají existenci pokrytí celého čtverce pro 12 různých poloh monomina. Navíc můžeme obrázky postupně rotovat o 90°, popřípadě zobrazit



Obrázek 42: Tři různá pokrytí čtverce o velikosti 7×7 pomocí monomina a L-tromin

v osové souměrnosti a tím můžeme vytvořit pokrytí čtverce o velikosti 7×7 pomocí L-tromin a jednoho monomina umístěného na libovolném políčku.

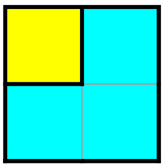
Úloha 2.19 ([5], str. 163). Čtverec o velikosti $2^n \times 2^n$ má být pokryt pomocí L-tromin a jednoho monomina. Jaké podmínky musí splňovat číslo n a jaká jsou možná umístění daného monomina, aby pokrytí existovalo?

Řešení: Nejprve určíme podmínky pro n. Aby vůbec bylo možné čtverec pokrýt, je potřeba, aby počet políček zbývající plochy po umístění monomina byl dělitelný třemi. Tj. číslo $2^{2n} - 1$ musí být dělitelné třemi. Můžeme elegantně dokázat, že tuto nutnou podmínku splňují všechna přirozená čísla n, neboť: $2^{2n} - 1 = 4^n - 1 \equiv 1^n - 1 \pmod 3$ a tedy $2^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Zdá se tedy, že pro n nemusí být splněny žádné podmínky. Tuto hypotézu potvrdíme, až pokrytí najdeme pro libovolné n.

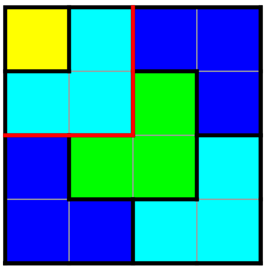
Začneme od nejmenších čtverců. Na obrázku 43 vidíme pokrytí čtverce o velikosti 2×2. Monomino můžeme umístit na libovolné ze čtyř políček a vždy bude možné zbývající plochu pokrýt L-trominem.

Dále pokryjeme čtverec o velikosti 4×4. Jedno z možných řešení je znázorněno na obrázku 44, kde je červeně vyznačen menší čtverec, v němž se nachází monomino. To může být umístěno na libovolné ze čtyř políček této části. Navíc pokud celým obrázkem budeme postupně otáčet o 90°, můžeme z tohoto pokrytí odvodit jiné s monominem umístěným na kterémkoli políčku.

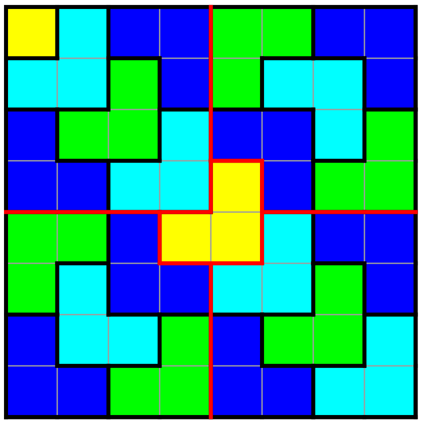
Čtverec o velikosti 8×8 (obrázek 45) rozdělíme na čtyři menší čtverce o velikostech 4×4. Jeden z těchto menších čtverců (např. levý horní) pokryjeme pomocí jednoho monomina a L-tromin stejně jako na obrázku 44. Navíc monomino může být umístěno



Obrázek 43: Čtverec o velikosti 2×2 pokrytý L-trominem a monominem



Obrázek 44: Čtverec o velikosti 4×4 pokrytý L-trominy a jedním monominem



Obrázek 45: Čtverec o velikosti 8×8 pokrytý L-trominy a jedním monominem

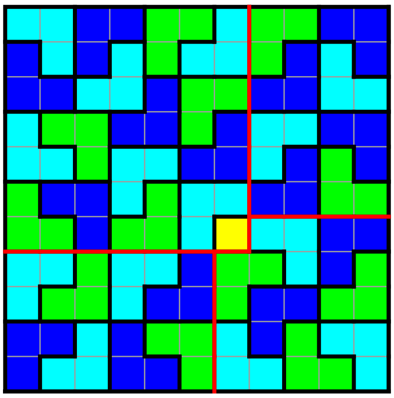
kdekoliv v této části. Zbylou plochu lze jistě pokrýt pomocí L-tromin, neboť jedno L-tromino umístíme do středu celého čtverce. Zbydou nepokryté tři čtverce o velikostech 4×4 bez jednoho rohového políčka. O těchto plochách již víme, že je lze pokrýt pomocí L-tromin. Postupným otáčením o $90°$ můžeme opět monomino přemístit na libovolné jiné políčko.

Dále bychom mohli pokračovat v pokrývání větších čtverců, ale je zřejmé, že vždy pomocí čtyř čtverců o velikosti $2^n \times 2^n$ můžeme odvodit pokrytí čtverce o velikosti $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Odsud plyne existence pokrytí čtverce o velikosti $2^n \times 2^n$ pro libovolné přirozené číslo n, přičemž monomino lze umístit kamkoliv.

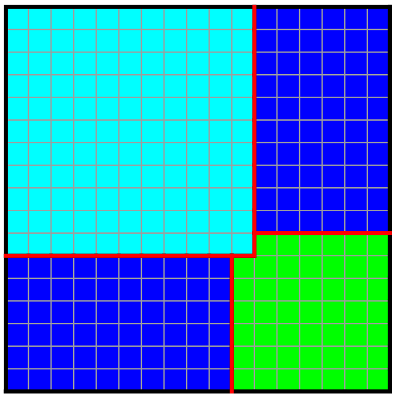
Úloha 2.20 ([7], str. 38). Dokažte, že čtverec o velikosti $n \times n$, kde $n > 5$, je liché a není dělitelné třemi, lze pokrýt pomocí L-tromin a jednoho monomina umístěného na libovolné políčko čtverce.

Řešení: Nejmenší takový čtverec má délku strany 7, jeho pokrytí jsme našli v úloze 2.18. Další je čtverec o velikosti 11×11. Rozdělíme ho na čtyři části: dva obdélníky o velikostech 4×6, čtverec o velikosti 5×5 bez jednoho rohu a čtverec o velikosti 7×7 (obrázek 46). První tři části lze pokrýt pomocí L-tromin (úlohy 2.15 a 2.17). Monomino můžeme umístit na libovolné políčko čtverce 7×7 a jeho zbylou část pokrýt L-trominy (úloha 2.18). Otáčením celého čtverce o $90°$ potom můžeme získat pokrytí pro libovolnou polohu monomina.

Dále budeme pokračovat matematickou indukcí. Předpokládejme, že čtverec o velikosti $n \times n$ splňující podmínky ze zadání lze pokrýt pomocí L-tromina a libovolně umístěného monomina. Ukážeme, že totéž platí pro čtverec o velikosti $(n+6) \times (n+6)$. Rozdělíme ho na čtyři části: dva obdélníky o velikostech $(n-1) \times 6$, čtverec o velikosti 7×7 bez jednoho rohu a čtverec o velikosti $n \times n$ (obrázek 47). První tři části lze jistě L-trominy pokrýt (úlohy 2.15 a 2.18). Poslední část lze pokrýt L-trominy a libovolně umístěným monominem dle indukčního předpokladu. Opět případným otáčením o $90°$ docílíme libovolného umístění monomina ve čtverci.



Obrázek 46: Čtverec o velikosti 11×11 pokrytý pomocí L-tromin a jednoho monomina



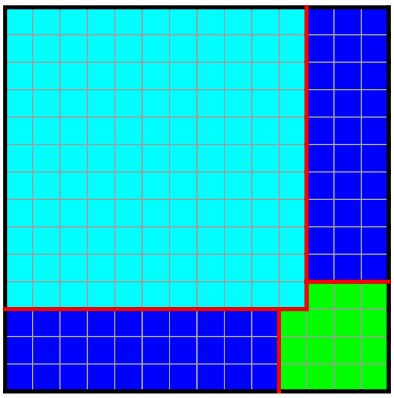
Obrázek 47: Čtverec o velikosti $(n+6) \times (n+6)$ rozdělený na čtyři části

Ukázali jsme, že pomocí pokrytí čtverce o délce strany 7 odvodíme pokrytí čtverců o délkách stran $13, 19, 25\dots$ a zároveň pomocí čtverce o délce strany 11 odvodíme pokrytí čtverců o délkách stran $17, 23, 29\dots$ Tímto jsme tedy dokázali existenci pokrytí všech čtverců o délkách stran n, kde n je liché číslo větší než 5, které není dělitelné třemi.

Úloha 2.21 ([7], str. 38). Dokažte, že čtverec o velikosti $n \times n$, kde n je sudé a není dělitelné třemi, lze pokrýt pomocí L-tromin a jednoho monomina umístěného na libovolné políčko čtverce.

Řešení: Podmínky splňují i čtverce o velikosti $2^n \times 2^n$, pro které jsme již v úloze 2.19 dokázali, že tvrzení platí. Existenci pokrytí pro tři nejmenší čtverce splňující podmínky ze zadání (čtverce o velkostech 2×2, 4×4, 8×8) jsme tedy již vyřešili.

Ostatní čtverce, ty o velikosti $n \times n$, kde n je jako v zadání a $n > 8$, rozdělíme na čtyři části: dva obdélníky o velikostech $3 \times (n-3)$, čtverec o velikosti 4×4 bez jednoho rohu a čtverec o velikosti $(n-3) \times (n-3)$ (obrázek 48). První tři části umíme pokrýt pomocí L-tromin (úlohy 2.15 a 2.19). Poslední část je čtverec o délce strany $n-3$, kde n je sudé, není dělitelné třemi a $n > 8$, proto číslo $n-3$ je liché, není dělitelné třemi a je větší než 5. Čtverec o velikosti $(n-3) \times (n-3)$ můžeme tedy pokrýt pomocí L-tromin a libovolně umístěného monomina (úloha 2.20). Nakonec rotací celého čtverce o $90°$ můžeme opět najít pokrytí pro libovolné umístění monomina.



Obrázek 48: Čtverec o velikosti $n \times n$ rozdělený na čtyři části

Úloha 2.22 ([7], str. 39). Odvoďte kritéria pro existenci pokrytí čtverce o velikosti $n \times n$ pomocí L-tromin a jednoho monomina umístěného na libovolné políčko čtverce.

Řešení: V úlohách 2.20 a 2.21 jsme zjistili, že pokud n není dělitelné třemi, $n > 1$ a $n \neq 5$, potom čtverec lze pokrýt L-trominy a libovolně umístěným monominem. Tyto podmínky pro n jsou také nutné, neboť pokud je n dělitelné třemi, potom po umístění monomina počet políček zbývající plochy není dělitelný třemi, tudíž nemůže být pokryta L-trominy. Čtverci o délce strany 5 jsme se věnovali v úloze 2.17. Nakonec čtverec o délce strany 1 bychom mohli považovat za speciální případ, protože jej vlastně lze pokrýt pomocí jednoho monomina a nula L-tromin.

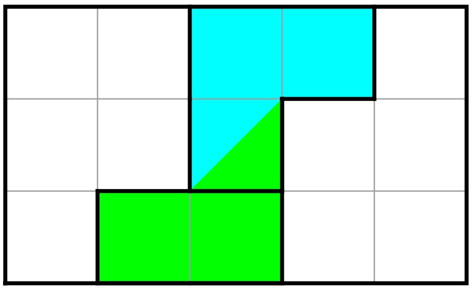
Platí tedy, že čtverec o velikosti $n \times n$ lze pokrýt pomocí L-tromin a libovolně umístěného monomina právě tehdy, pokud n není dělitelné třemi a $n \neq 5$.

2.4 Středově souměrné pokrývání obdélníků L-trominy

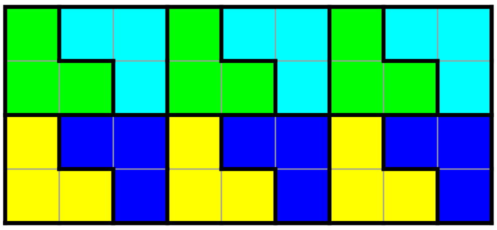
Úloha 2.23 ([11], str. 37). Najděte středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti 3×5 L-trominy.

Řešení: Přestože obdélník o velikosti 3×5 je možné pokrýt L-trominy, není možné nalézt středově souměrné pokrytí. Střed tohoto obdélníku se nachází ve středu jednoho políčka. Umístíme první L-tromino tak, aby pokrývalo dané středové políčko. Nyní bychom potřebovali umístit druhé L-tromino středově souměrně s prvním, což nelze učinit tak, aby se L-tromina na středovém políčku nepřekrývala (obrázek 49).

Z tohoto odvodíme nutnou podmínku pro středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti $m \times n$ L-trominy. Aby vůbec nějaké pokrytí L-trominy existovalo, musí být mn dělitelné třemi (úloha 2.5). Jestliže má navíc existovat středově souměrné pokrytí, potom střed obdélníku nesmí být ve středu nějakého políčka, ale musí být na hraně, či vrcholu políček, což je právě tehdy, pokud má obdélník sudý počet řádků nebo sloupců. Obě tyto podmínky můžeme shrnout do jedné: Jestliže obdélník o velikosti $m \times n$ lze středově souměrně pokrýt L-trominy, potom číslo mn je dělitelné šesti.



Obrázek 49: Obdélník o velikosti 3×5 nelze středově souměrně pokrýt L-trominy



Obrázek 50: Obdélník o velikosti 4×9 středově souměrně pokrytý L-trominy

Úloha 2.24 ([11], str. 37). Dokažte, že pro každý obdélník o velikosti $m \times n$, kde m je sudé a n je dělitelné třemi, existuje středově souměrné pokrytí L-trominy.

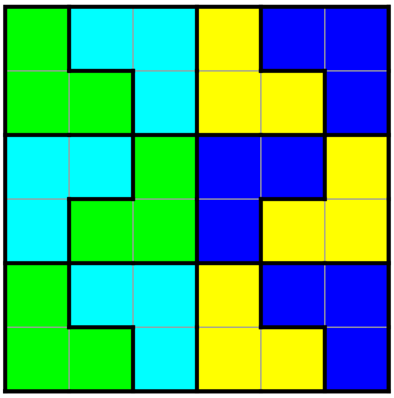
Řešení: Obdélníky si rozdělíme do několika skupin podle počtu řádků a sloupců. Do první skupiny zařadíme ty obdélníky, které mají počet řádků dělitelný čtyřmi. Obdélník z této skupiny můžeme středově souměrně pokrýt L-trominy následujícím způsobem. Nejprve libovolně pokryjeme horní polovinu obdélníku, což je obdélník o velikosti $(m/2) \times n$. $m/2$ je sudé číslo, n je dělitelné třemi, proto lze tento obdélník L-trominy pokrýt (úloha 2.10). Dolní polovinu obdélníku poté pokryjeme tak, abychom dodrželi středovou souměrnost s horní polovinou. Příklad pokrytí obdélníku z této skupiny je na obrázku 50.

Do druhé skupiny zařadíme obdélníky, které mají počet sloupců dělitelný šesti. U těchto obdélníků nejprve pokryjeme levou polovinu, což je obdélník o velikosti $m \times (n/2)$. Ten lze pokrýt opět dle úlohy 2.10. Poté pokryjeme pravou polovinu obdélníku tak, aby vzniklo středově souměrné pokrytí. Příklad pokrytí obdélníku z této skupiny je na obrázku 51.

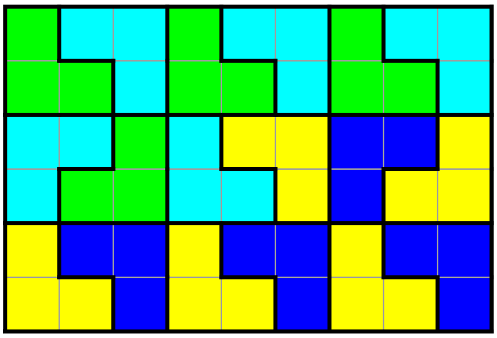
Obdélníky, které mají počet řádků dělitelný čtyřmi a zároveň počet sloupců dělitelný šesti, můžeme zahrnout do jakékoliv z prvních dvou skupin obdélníků.

Do poslední skupiny patří ty obdélníky, které nemají počet řádků dělitelný čtyřmi, ale pouze dvěma, a které nemají počet sloupců dělitelný šesti, ale pouze třemi. Při pokrývání obdélníků z této skupiny si obdélník nejprve rozdělíme na $mn/6$ menších obdélníků o velikosti 2×3. Těchto menších obdélníků je lichý počet. Jeden z nich obsahuje střed velkého obdélníku. Tento malý obdélník můžeme pokrýt dvěma způsoby, přičemž oba zachovají středovou souměrnost.

Dále budeme postupně pokrývat zbylé menší obdélníky v následujícím pořadí. Vybereme si libovolný nepokrytý menší obdélník a pokryjeme ho L-trominy. Najdeme s ním středově souměrný menší obdélník a pokryjeme ho tak, abychom zachovali středovou souměrnost. Tímto způsobem středově souměrně pokryjeme celý velký obdélník. Příklad pokrytí obdélníku z této skupiny je na obrázku 52.



Obrázek 51: Obdélník o velikosti 6×6 středově souměrně pokrytý L-trominy



Obrázek 52: Obdélník o velikosti 6×9 středově souměrně pokrytý L-trominy

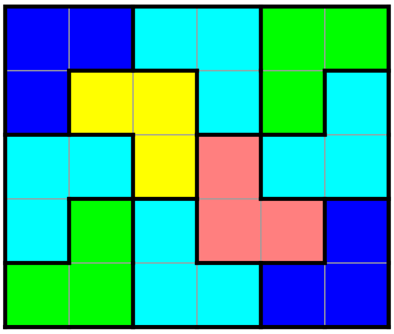
Úloha 2.25 ([11], str. 37). Najděte středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti 5×6 L-trominy.

Řešení: Jedno z možných řešení je na obrázku 53.

Úloha 2.26 ([11], str. 37). Dokažte, že pro každý obdélník o velikosti $5 \times 6k$, $k \in \mathbb{N}$, existuje středově souměrné pokrytí L-trominy.

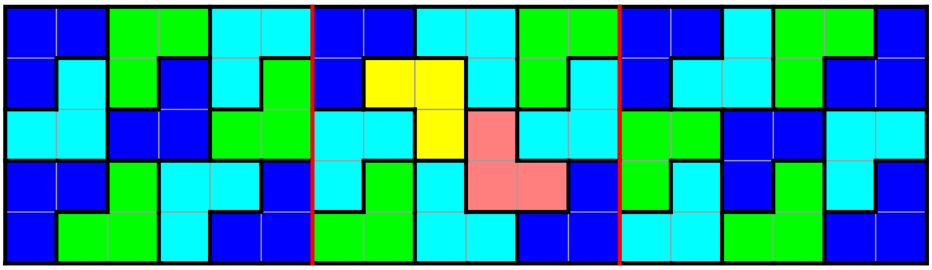
Řešení: Pro k sudé libovolně pokryjeme L-trominy levou polovinu obdélníku, tj. obdélník o velikosti $5 \times 3k$ (úloha 2.13) a pravou polovinu pokryjeme podle levé tak, aby byla zachována středová souměrnost pokrytí.

Pro k liché obdélník rozdělíme na tři menší obdélníky. Na krajích budou obdélníky



Obrázek 53: Obdélník o velikosti 5×6 středově souměrně pokrytý L-trominy

o velikostech $5 \times 3(k-1)$ a uprostřed obdélník o velikosti 5×6. Nejprve L-trominy středově souměrně pokryjeme prostřední obdélník o velikosti 5×6 (úloha 3.21). Poté libovolně pokryjeme levý obdélník o velikosti $5 \times 3(k-1)$ (dle úlohy 2.13) a na závěr pokryjeme pravý obdélník tak, abychom zachovali středovou souměrnost pokrytí vzhledem k levému obdélníku. Příklad pokrytí takového obdélníku ilustruje obrázek 54.



Obrázek 54: Obdélník o velikosti 5×18 středově souměrně pokrytý L-trominy

Úloha 2.27 ([11], str. 37). Dokažte, že pro každý obdélník o velikosti $m \times 6k$, $k \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, existuje středově souměrné pokrytí L-trominy.

Řešení: Jestliže je m sudé nebo dělitelné třemi, potom středově souměrné pokrytí existuje dle úlohy 2.24. Pro $m = 5$ středově souměrné pokrytí najdeme podle úlohy 2.26.

Pro ostatní lichá m, která nejsou dělitelná třemi, budeme postupovat následovně. Rozdělíme obdélník na tři části. Horní část bude obdélník o velikosti $(m-3)/2 \times 6k$, prostřední část bude obdélník o velikosti $3 \times 6k$ a dolní část bude opět obdélník o velikosti $(m-3)/2 \times 6k$. Horní obdélník libovolně pokryjeme L-trominy. Existenci tohoto pokrytí nám zaručí úloha 2.15, neboť počet řádků horního obdélníku je vždy alespoň dva (nejmenší m v tomto případě je $m = 7$) a počet sloupců je dělitelný šesti. Poté pokryjeme dolní obdélník středově souměrně s horním. Nakonec podle úlohy 2.24 středově souměrně pokryjeme prostřední obdélník.

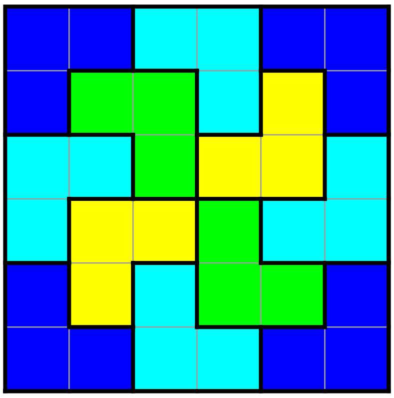
Úloha 2.28 ([11], str. 37). Dokažte následující tvrzení: Obdélník o velikosti $m \times n$, kde $m, n \geq 2$, lze středově souměrně pokrýt L-trominy právě tehdy, když mn je dělitelné šesti.

Řešení: První implikace zní: Jestliže existuje středově souměrné pokrytí obdélníku L-trominy, potom mn je dělitelné šesti. Toto tvrzení jsme už dokázali v úloze 2.23.

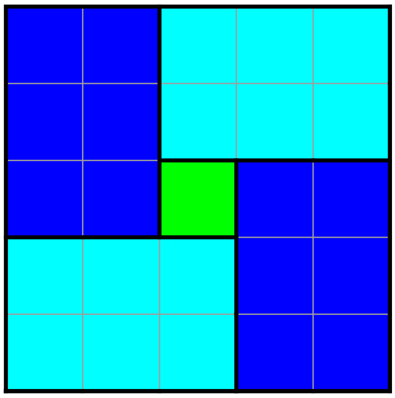
Druhá implikace zní: Jestliže je mn dělitelné šesti, potom existuje středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti $m \times n$ pomocí L-tromin. Pokud je mn dělitelné šesti, potom mohou nastat dvě situace. V první situaci je m sudé a n dělitelné třemi (popřípadě opačně). Pokrytí pro tento obdélník existuje dle úlohy 2.24. V druhé situaci je m (popřípadě n) dělitelné šesti. Pokrytí pro tento obdélník existuje dle úlohy 2.27.

Úloha 2.29 ([11], str. 37). Najděte pokrytí čtverce o velikosti 6×6 pomocí L-tromin invariantní vůči otočení o 90°.

Řešení: Řešení je na obrázku 55.



Obrázek 55: Pokrytí čtverce o velikosti 6×6 L-trominy invariantní vůči otočení o 90°



Obrázek 56: Čtverec o velikosti 30×30 rozdělený na pět částí: modře obdélníky o velikosti 12×18 a zeleně čtverec o velikosti 6×6

Úloha 2.30 ([11], str. 37). Dokažte, že pro čtverec o velikosti $n \times n$ existuje pokrytí L-trominy invariantní vůči otočení o 90° právě tehdy, když n je dělitelné šesti.

Řešení: Nejprve si uvědomme, že pokrytí čtverce, které je invariantní vůči otočení o 90°, je pouze speciálním případem středově souměrného pokrytí. Podle úlohy 2.28 musí tedy být n^2 dělitelné šesti a to je právě tehdy, když je n dělitelné šesti.

Co se týče opačné implikace, vezměme si čtverce o velikosti $6k \times 6k$ a rozdělíme je do dvou skupin podle k. Pro k sudé čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverce o velikostech $3k \times 3k$. Nejprve L-trominy libovolně pokryjeme menší čtverec umístěný např. v levé horní části původního čtverce (pokrytí existuje dle úlohy 2.10). Dále budeme postupně pokrývat zbylé menší čtverce tak, aby si odpovídaly při otočení o 90°.

Pro k liché rozdělíme čtverec na pět částí: čtverec o velikosti 6×6 umístěný ve středu původního čtverce a čtyři obdélníky o velikostech $6(k-1) \times 6(k+1)$, které budou umístěny v rozích původního čtverce. Rozdělení je vidět na obrázku 56. Menší čtverec o velikosti 6×6

pokryjeme jako v úloze 2.29. Poté libovolně pokryjeme jeden z obdélníků (pokrytí existuje dle úlohy 2.10). Nakonec postupně pokryjeme zbylé obdélníky tak, aby si odpovídaly při otočení o 90°.

3 Pokrývání obdélníků tetrominy

Úloha 3.1. Obdélník o velikosti 5×8 pokryjte pomocí 10 tetromin tak, aby se v pokrytí vyskytoval každý druh tetromina právě dvakrát.

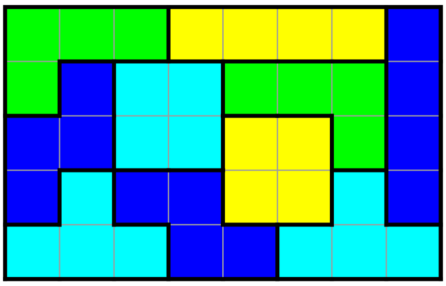
Řešení: Možné řešení je na obrázku 57.

Úloha 3.2 ([13], str. 14). Zjistěte, které obdélníky je možné pokrýt pomocí pěti různých tetromin.

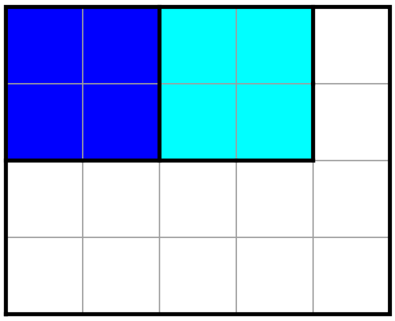
Řešení: Žádný takový obdélník neexistuje. Pokud totiž libovolný obdélník obsahující 20 políček obarvíme černobíle jako šachovnici, bude obsahovat 10 černých a 10 bílých políček. I-tetromino, O-tetromino, L-tetromino i Z-tetromino pokrývají vždy dvě bílá a dvě černá políčka. Jediné T-tetromino pokrývá tři políčka jedné barvy a jedno políčko druhé barvy. To je dohromady 9 políček jedné barvy a 11 políček druhé barvy.

Úloha 3.3 ([11], str. 15). Dokažte, že obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt O-tetrominy právě tehdy, když m, n jsou sudá.

Řešení: Jestliže m, n jsou sudá, potom zřejmě lze obdélník pokrýt. Zamysleme se tedy nad opačnou implikací: Jestliže obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt O-tetrominy, potom m, n jsou sudá. Jelikož každé tetromino pokrývá čtyři políčka, musí být mn dělitelné čtyřmi. Pokud by bylo m dělitelné čtyřmi a n by bylo liché, potom by nešlo pokrýt horní řádek obdélníku. Při postupném pokrývání políček horního řádku zleva doprava, které je možné učinit právě jedním způsobem, by zůstalo poslední políčko nepokryté (obrázek 58). Proto musí být m i n sudé.



Obrázek 57: Obdélník o velikosti 5×8 pokrytý pomocí 10 tetromin tak, že každý druh tetromina se v pokrytí vyskytuje právě dvakrát



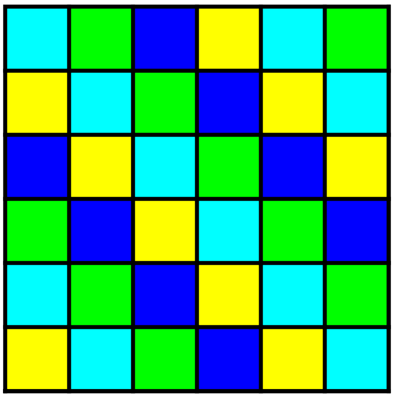
Obrázek 58: Horní řádek obdélníku o velikosti 4×5 nelze pokrýt O-tetrominy

Úloha 3.4 ([13], str. 227). Čtverec o velikosti 6×6 pokryjte pomocí I-tetromin.

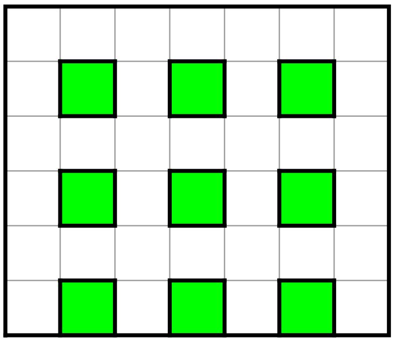
Řešení: Pokrytí v tomto případě neexistuje. Obarvíme-li totiž čtverec pomocí čtyř barev pruhovaně ve směru diagonály (obrázek 59), potom libovolné I-tetromino pokryje od každé barvy jedno políčko. Ve čtverci se však nachází 10 azurových, 9 zelených, 9 žlutých a 8 modrých políček.

Úloha 3.5 ([4], str. 26). Obdélník je pokrytý pomocí O-tetromin a I-tetromin. Libovolné tetromino odebereme a nahradíme tetrominem druhého druhu. Dokažte, že tetromina nelze přeuspořádat tak, aby byl obdélník pokryt.

Řešení: Obdélník obarvíme jako na obrázku 60. Při tomto obarvení každé O-tetromino pokrývá jedno zelené a tři bílá políčka a každé I-tetromino pokrývá buď dvě zelená a dvě bílá, nebo pouze čtyři bílá políčka. Pokud tedy jedno tetromino zaměníme, potom nový soubor tetromin bude pokrývat jiný počet zelených i bílých políček než původní soubor. Proto obdélník nelze pokrýt.



Obrázek 59: Čtverec o velikosti 6 × 6 obarvený pomocí čtyř barev pruhovaně ve směru diagonály



Obrázek 60: Obdélník, který je vhodně obarven k důkazu z úlohy 3.5

Úloha 3.6 ([11], str. 15). Dokažte, že žádný obdélník nelze pokrýt pomocí Z-tetromin.

Řešení: Pokusíme se pokrýt horní řádek libovolného obdélníku. Budeme postupovat zleva doprava. Levý horní roh lze pokrýt dvěma způsoby (obrázek 61). Pro pokrytí dalšího políčka v prvním řádku je v obou případech potřeba umístit Z-tetromino do vodorovné polohy (obrázek 62). Pro každé další políčko v prvním řádku existuje pouze jediný způsob

Obrázek 61: Dva způsoby pokrytí levého horního rohu obdélníku Z-tetrominy

jeho pokrytí. Takto budeme pokračovat, dokud nenarazíme na pravý horní roh, kde mohou nastat dvě situace (obrázek 63). Ani v jedné situaci roh nelze pokrýt.

Obrázek 62: Dva způsoby pokrytí následujícího políčka v prvním řádku obdélníku Z-tetrominy

Obrázek 63: Dvě situace při pokrývání pravého horního rohu obdélníka Z-tetrominy

3.1 Pokrývání obdélníků T-tetrominy

Úloha 3.7 ([4], str. 26). Pomocí T-tetromin pokryjte čtverec o velikosti 10×10.

Řešení: Nutná podmínka pro počet políček čtverce při pokrývání tetrominy je splněna, neboť čtverec má 100 políček, což je číslo dělitelné čtyřmi. Pokud ovšem čtverec obarvíme černobíle jako šachovnici, zjistíme, že obsahuje stejný počet černých a bílých políček. T-tetromino pokrývá buď tři bílá a jedno černé políčko, nebo tři černá a jedno bílé políčko. Zřejmě bychom tedy k pokrytí čtverce potřebovali od každého druhu stejný počet T-tetromin. Ale tento čtverec by mohl být pokryt pouze pomocí 25 tetromin.

Úloha 3.8 ([11], str. 17). Dokažte, že jestliže obdélník o velikosti $m \times n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$ lze pokrýt T-tetrominy, potom číslo mn je dělitelné osmi.

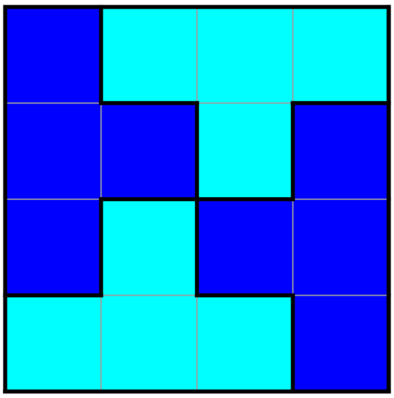
Řešení: Při důkazu tohoto tvrzení budeme vycházet z řešení předchozí úlohy. Jen je potřeba zmínit, že každý obdélník o sudém počtu políček, který obarvíme černobíle jako šachovnici, obsahuje stejný počet bílých a černých políček. Ze stejného důvodu jako v předchozí úloze tedy musí být obdélník pokryt sudým počtem T-tetromin. Počet políček obdélníku tedy musí být dělitelný osmi.

Úloha 3.9 ([4], str. 26). Čtverec o velikosti 8×8 pokryjte pomocí jednoho O-tetromina a 15 T-tetromin.

Řešení: Tato úloha nemá řešení. Obarvíme-li totiž tento čtverec černobíle jako šachovnici, bude obsahovat 32 černých a 32 bílých políček. O-tetromino pokryje vždy dvě černá a dvě bílá políčka. Zbývá nám T-tetrominy pokrýt 30 černých a 30 bílých políček. Ze stejného důvodu jako v úloze 3.7 bychom potřebovali sudý počet T-tetromin, ale my jich máme k dispozici 15.

Úloha 3.10 ([11], str. 17). Čtverec o velikosti 4×4 pokryjte T-tetrominy.

Řešení: Řešení je na obrázku 64.



Obrázek 64: Čtverec o velikosti 4×4 pokrytý T-tetrominy, pokrytí je invariantní vůči otočení o $90°$

Úloha 3.11 ([11], str. 17). Jaké podmínky musí splňovat číslo $n \in \mathbb{N}$, aby čtverec o velikosti $n \times n$ bylo možné pokrýt T-tetrominy?

Řešení: Dle úlohy 3.8 musí být číslo n^2 dělitelné osmi, což je právě tehdy, když číslo n je dělitelné čtyřmi. Tato nutná podmínka je zároveň i podmínkou postačující, neboť čtverec o velikosti $4k \times 4k$, kde $k \in \mathbb{N}$, lze rozdělit na k^2 menších čtverců o velikosti 4×4, které pokryjeme dle úlohy 3.10.

Úloha 3.12 ([11], str. 38). Dokažte, že pro čtverec o velikosti $n \times n$ existuje pokrytí T-tetrominy invariantní vůči otočení o $90°$ právě tehdy, když n je dělitelné čtyřmi.

Řešení: Nejmenší takový čtverec, tj. čtverec o velikosti 4×4, je pokrytý na obrázku 64. Větší čtverce o velikosti $4k \times 4k$, kde $k \geq 2$, vždy rozdělíme na k^2 menších čtverců o velikosti 4×4 a budeme je pokrývat postupně.

Pro k sudé pokryjeme $k^2/4$ menších čtverců např. v levé horní čtvrtině velkého čtverce a zbylé malé čtverce už pokryjeme tak, aby si odpovídaly při otočení o $90°$. Pro k liché nejprve pokryjeme centrální menší čtverec a poté budeme postupovat stejným způsobem jako pro k sudé.

Co se týče opačné implikace, pokud je čtverec pokryt T-tetrominy, potom dle úlohy 3.11 musí být n dělitelné čtyřmi. To samozřejmě platí i při pokrytí invariantním vůči otočení o $90°$.

3.2 Pokrývání obdélníků L-tetrominy

Úloha 3.13 ([11], str. 16). Dokažte, že jestliže obdélník o velikosti $m \times n$ je pokrytý L-tetrominy, potom je číslo mn dělitelné osmi.

Řešení: Jelikož je obdélník pokrytý L-tetrominy, musí být počet políček obdélníku dělitelný čtyřmi. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že má obdélník sudý počet sloupců. Když jej obarvíme černobílými svislými pruhy, bude obsahovat stejný počet bílých a černých políček.

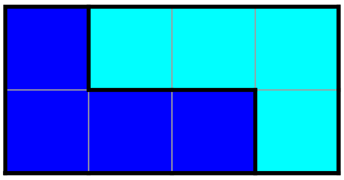
Každé L-tetromino umístěné do obdélníku pokryje buď tři černá a jedno bílé políčko, nebo tři bílá a jedno černé políčko. Proto při pokrývání obdélníku potřebujeme stejný počet L-tetromin od každého druhu, tedy dohromady musí být L-tetromin sudý počet, což znamená, že počet políček obdélníku musí být číslo dělitelné osmi.

Úloha 3.14 ([11], str. 16). Dokažte, že každý obdélník o velikosti $m \times n$, kde m je sudé a n je dělitelné čtyřmi, lze pokrýt L-tetrominy.

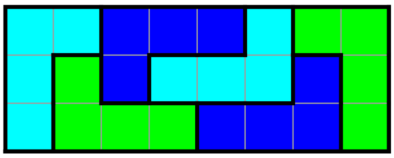
Řešení: Každý takový obdélník je možné rozdělit na menší obdélníky o velikosti 2×4. Tyto menší obdélníky potom pokryjeme L-tetrominy jako na obrázku 65.

Úloha 3.15 ([11], str. 16). Obdélník o velikosti 3×8 pokryjte L-tetrominy.

Řešení: Možné řešení je na obrázku 66.



Obrázek 65: Obdélník o velikosti 2×4 pokrytý L-tetrominy



Obrázek 66: Obdélník o velikosti 3×8 pokrytý L-tetrominy

Úloha 3.16 ([11], str. 17). Dokažte následující tvrzení: Obdélník o velikosti $m \times n$, kde $m \geq 2$, $n \geq 2$ lze pokrýt L-tetrominy právě tehdy, když je mn dělitelné osmi.

Řešení: Jednu implikaci jsme již dokázali v úloze 3.13. Nyní dokážeme druhou implikaci: Jestliže je mn dělitelné osmi, potom lze daný obdélník pokrýt L-tetrominy.

Jestliže je mn dělitelné osmi, mohou nastat dvě možnosti. Může být m sudé a n dělitelné čtyřmi (popřípadě opačně). Existenci tohoto pokrytí jsme dokázali v úloze 3.14. Nebo bude m liché a n je dělitelné osmi (popřípadě opačně). Tento obdélník rozdělíme na dva menší: obdélník o velikosti $3 \times n$ a obdélník o velikosti $(m - 3) \times n$. První menší obdélník se skládá z $n/8$ obdélníků o velikosti 3×8, které pokryjeme dle úlohy 3.15. Druhý menší obdélník pokryjeme dle úlohy 3.14, neboť $m - 3$ je sudé číslo a n je dělitelné osmi, tedy i čtyřmi.

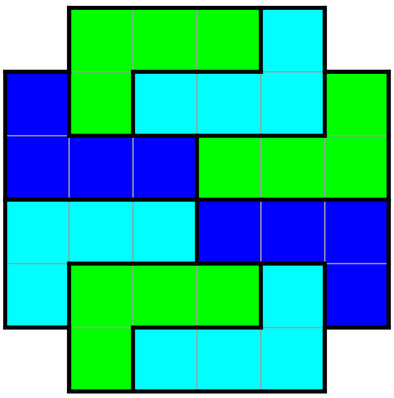
Úloha 3.17 ([4], str. 26). Čtverec o velikosti 6×6, kterému odebereme všechna rohová políčka, pokryjte L-tetrominy.

Řešení: Řešení je na obrázku 67.

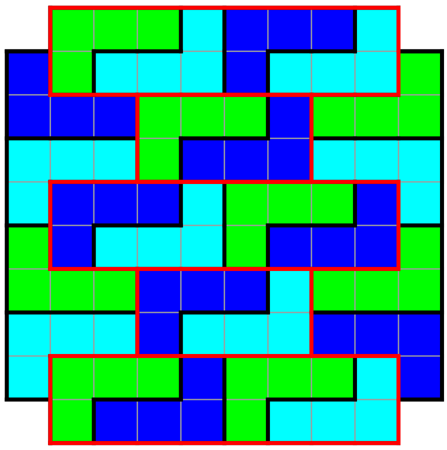
Úloha 3.18 ([4], str. 26). Pro jaká $n \in \mathbb{N}$ lze čtverec o velikosti $n \times n$, kterému odebereme všechna rohová políčka, pokrýt L-tetrominy?

Řešení: Tato plocha má $n^2 - 4$ políček, což musí být nutně číslo dělitelné čtyřmi. To je právě tehdy, když je n^2 dělitelné čtyřmi, proto n musí být tvaru $2l$. Dále i v této úloze využijeme obarvení plochy černobílými svislými pruhy. Původní čtverec má stejný počet černých jako bílých políček a to se nezmění ani po odebrání čtyř rohů. Tudíž ze stejného důvodu jako v úloze 3.13 potřebujeme, aby počet L-tetromin na pokrývané ploše byl sudý. Tedy číslo $n^2 - 4$ musí být dělitelné osmi. Dosadíme-li $n = 2l$, dostaneme výraz $4l^2 - 4$, který je dělitelný osmi právě tehdy, když $l^2 - 1$ je sudé, resp. l^2 je liché. Číslo l je tedy tvaru $l = 2k + 1$ a po dosazení nám vyjde: $n = 4k + 2$.

Dále ukážeme, že podmínka $n = 4k + 2$ je také postačující. Plochu budeme pokrývat po čtvercích o velikosti 2×4, které sestavíme ze dvou L-tetromin. k těchto menších obdélníků vyskládáme do prvního a druhého řádku. $k - 1$ menších obdélníků vyskládáme do třetího a čtvrtého řádku (umístíme je doprostřed řádků). Poté opět k obdélníků do pátého a šestého, $k - 1$ do sedmého a osmého (vždy umístěné uprostřed). Takto budeme postupovat až k poslednímu řádku. V této fázi bude zbývat jeden jediný způsob, jak pokrýt postranní sloupce. Příklad pokrytí této plochy je na obrázku 68.



Obrázek 67: Čtverec o velikosti 6×6 bez čtyř rohů pokrytý L-tetrominy

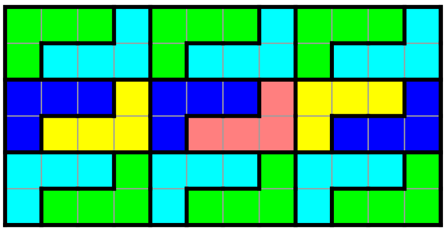


Obrázek 68: Čtverec o velikosti 10×10 bez čtyř rohů pokrytý L-tetrominy

Úloha 3.19 ([11], str. 37). Dokažte, že každý obdélník o velikosti $m \times n$, kde m je sudé a n je dělitelné čtyřmi, lze středově souměrně pokrýt L-tetrominy.

Řešení: Při řešení této úlohy budeme postupovat analogicky úloze 2.24. Obdélník o velikosti $2k \times 4l$ zařadíme do jedné ze tří skupin podle čísel k, l. Pokud je k sudé, zařadíme obdélník do první skupiny. Těmto obdélníkům nejprve pokryjeme horní polovinu (úloha 3.14), poté dolní polovinu doplníme středově souměrně. Pokud je l sudé, zařadíme obdélník do druhé skupiny. Těmto obdélníkům nejprve pokryjeme levou polovinu (úloha 3.14), poté pravou polovinu doplníme středově souměrně. Pro k i l sudá si vybereme jednu z těchto dvou skupin.

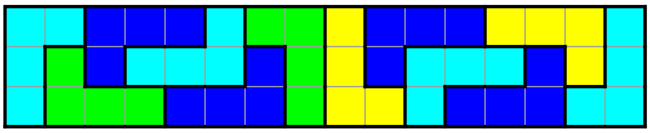
Pro k i l lichá si obdélník rozdělíme na kl menších obdélníků o velikosti 2×4 a budeme je pokrývat ve stejném pořadí, jako jsme v úloze 2.24 ve třetí skupině postupně pokrývali menší obdélníky o velikosti 2×3. Příklad takového obdélníku je znázorněn na obrázku 69.



Obrázek 69: Obdélník o velikosti 6×12 středově souměrně pokrytý L-tetrominy

Úloha 3.20 ([11], str. 37). Najděte středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti 3×16 L-tetrominy.

Řešení: Nejprve pokryjeme levou polovinu, tj. obdélník o velikosti 3×8 (obrázek 66), poté pravou polovinu doplníme středově souměrně. Jedno z možných řešení je na obrázku 70.

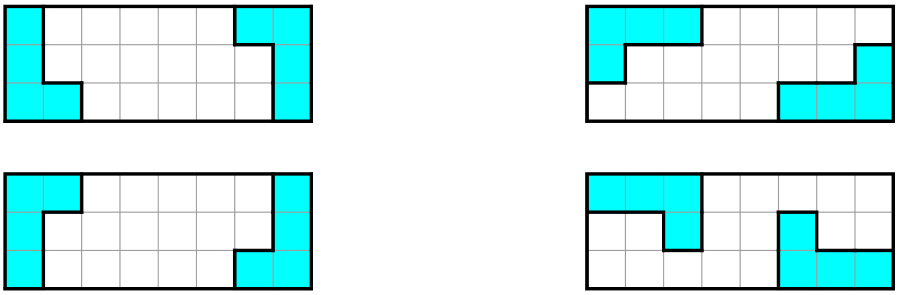


Obrázek 70: Obdélník o velikosti 3×16 středově souměrně pokrytý L-tetrominy

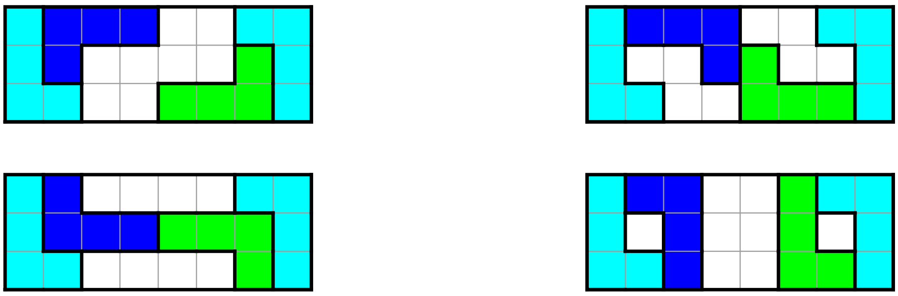
Úloha 3.21 ([11], str. 37). Najděte středově souměrné pokrytí obdélníku o velikosti 3×8 L-tetrominy.

Řešení: Tato úloha nemá řešení a bohužel mi není známo elegantnějšího důkazu, nežli vyzkoušení všech možností. Naznačím alespoň, jak systematicky postupovat. Nejprve pokryjeme levý horní roh obdélníku jedním L-tetrominem a ihned k němu přidáme středově souměrné L-tetromino. Existuje 6 možností, jak toho docílit, přičemž u dvou z těchto možností (obrázek 71) se již vyskytují políčka, která není možné dalším L-tetrominem pokrýt. U čtyř zbylých (obrázek 72) musíme vložit další dvě středově souměrná L-tetromina, např. tak, abychom pokryli následující volné políčko v prvním řádku. Pro první obdélník z obrázku 72 jsou čtyři možnosti umístění této dvojice L-tetromin (obrázek 73), ale v každém z těchto případů se nachází políčko, které již nelze L-tetrominy pokrýt.

Obrázek 71: Dva způsoby pokrytí levého horního rohu obdélníku L-tetrominy, které neumožní pokrytí levého dolního rohu obdélníku



Obrázek 72: Čtyři způsoby pokrytí levého horního rohu obdélníku L-tetrominy



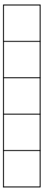
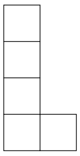
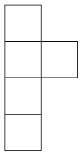
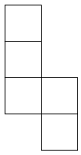
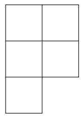
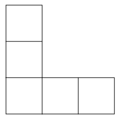
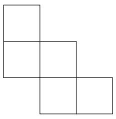
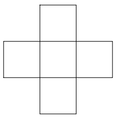
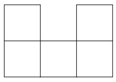
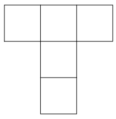
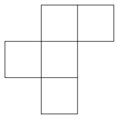
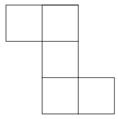
Obrázek 73: Čtyři způsoby pokrytí prvního a druhého políčka v horním řádku pomocí L-tetromin

4 Pokrývání obdélníků pentominy

Úloha 4.1 ([13], str. 236). Zjistěte, kolik existuje druhů pentomin a nakreslete je.

Řešení: Existuje 12 druhů pentomin. Všechny druhy jsou v tabulce 2. Obdobně jako u jiných polyomin budeme pentomina nazývat podle toho, jaká písmena připomínají. Musím podotknout, že k pojmenování některých pentomin je třeba trocha fantazie.

Tabulka 2: Pentomina

I-pentomino	L-pentomino	Y-pentomino	N-pentomino	P-pentomino	V-pentomino
					
W-pentomino	X-pentomino	U-pentomino	T-pentomino	F-pentomino	Z-pentomino
					

V následujících úlohách budeme pokrývat obdélníky pomocí dvanácti různých pentomin. Pokrytí tedy bude obsahovat od každého druhu pentomina právě jedno. Je zřejmé, že tyto obdélníky musí zabírat plochu šedesáti políček a délky stran těchto obdélníků budou jistě dělitele čísla 60. Možné rozměry jsou tedy následující: 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10. První dva obdélníky pokrýt nelze, neboť není způsob, jak na ně umístit např. V-pentomino. Ostatním obdélníkům jsou věnovány následující úlohy.

Úloha 4.2 ([13], str. 236). Najděte nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5×12 pomocí dvanácti různých pentomin.

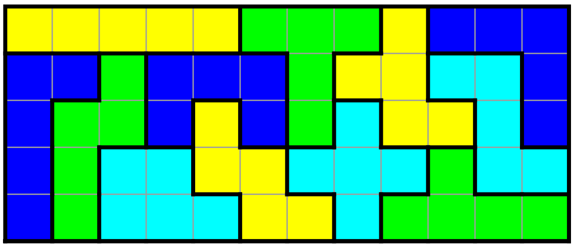
Řešení: Možné řešení je na obrázku 74.

Úloha 4.3 ([13], str. 236). Najděte nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 6×10 pomocí dvanácti různých pentomin.

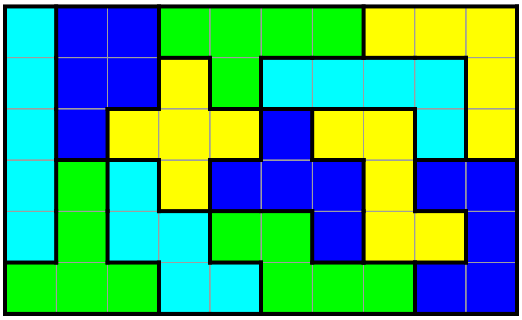
Řešení: Možné řešení je na obrázku 75.

Úloha 4.4 ([13], str. 236). Najděte rozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5×12 pomocí dvanácti různých pentomin.

Řešení: Obdélník rozdělíme na dva menší shodné obdélníky o velikostech 5×6. Každý z těchto menších obdélníků pokryjeme pomocí šesti různých pentomin. Možné řešení je na obrázku 76.



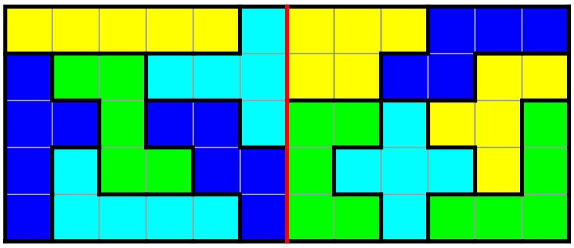
Obrázek 74: Nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5 × 12 pomocí dvanácti různých pentomin



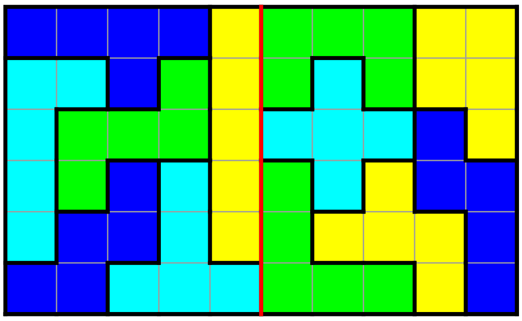
Obrázek 75: Nerozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 6 × 10 pomocí dvanácti různých pentomin

Úloha 4.5 ([13], str. 236). Najděte rozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 6 × 10 pomocí dvanácti různých pentomin.

Řešení: V této úloze využijeme řešení předcházející úlohy, kde jsme pokryli pomocí dvanácti různých pentomin dva obdélníky o velikostech 5 × 6. Tyto dva pokryté obdélníky otočíme o 90° a vytvoříme z nich pokrytí obdélníku o velikosti 6 × 10. Řešení je na obrázku 77.



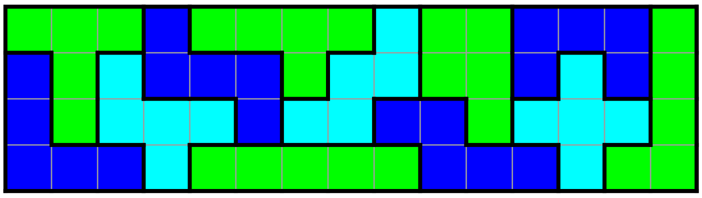
Obrázek 76: Rozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 5 × 12 pomocí dvanácti různých pentomin



Obrázek 77: Rozložitelné pokrytí obdélníku o velikosti 6 × 10 pomocí dvanácti různých pentomin

Úloha 4.6 ([13], str. 236). Obdélník o velikosti 4×15 pokryjte pomocí dvanácti různých pentomin.

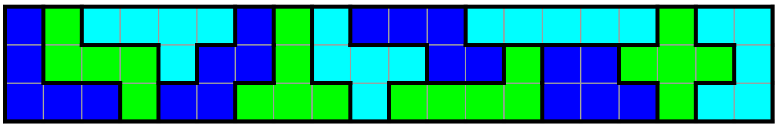
Řešení: Možné řešení je na obrázku 78.



Obrázek 78: Obdélník o velikosti 4×15 pokrytý pomocí dvanácti různých pentomin

Úloha 4.7 ([13], str. 236). Obdélník o velikosti 3×20 pokryjte pomocí dvanácti různých pentomin.

Řešení: Možné řešení je na obrázku 79.

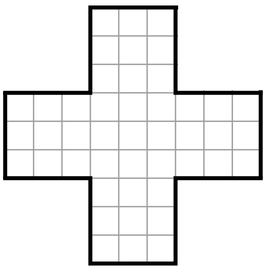


Obrázek 79: Obdélník o velikosti 3×20 pokrytý pomocí dvanácti různých pentomin

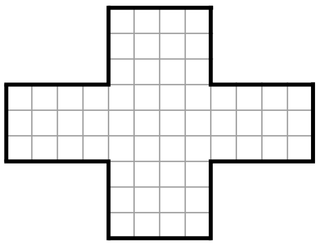
V dalších úlohách nebudeme pokrývat obdélník, ale plochu, kterou vytvoříme tak, že zvětšíme některé z pentomin.

Nejprve ztrojnásobíme výšku i šířku nějakého pentomina. Počet políček pentomina se zvětší devětkrát, a budeme je tedy pokrývat pomocí devíti pentomin. Na obrázku 80 vidíme plochu, která vznikla ztrojnásobením šířky i délky X-pentomina. Budeme tuto plochu nazývat (3×3) X-pentomino.

Následně zvětšíme pentomina tak, že ztrojnásobíme jejich výšku, ale šířku zvětšíme čtyřikrát. Počet políček takto zvětšeného pentomina se zvětší dvanáctkrát, a budeme je tedy pokrývat pomocí dvanácti pentomin. Na obrázku 81 vidíme příklad takové plochy, budeme ji nazývat (3×4) X-pentomino.



Obrázek 80: (3×3) X-pentomino

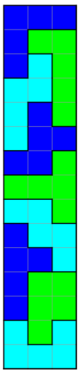
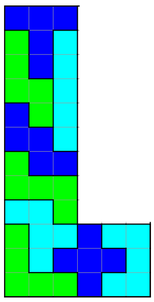
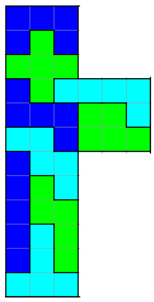
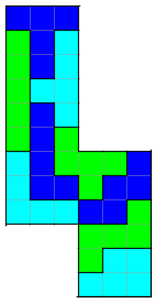
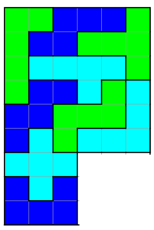
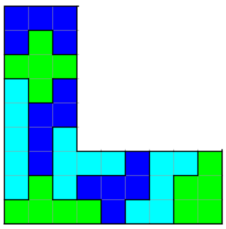
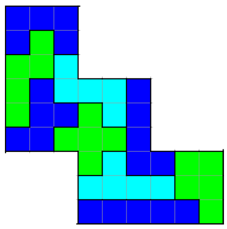
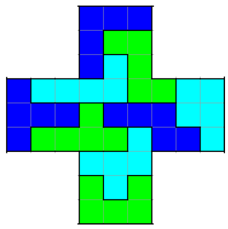
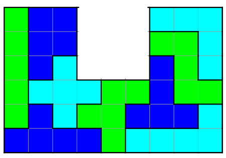
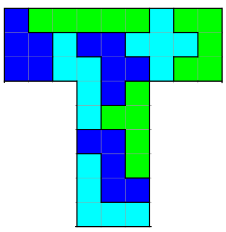
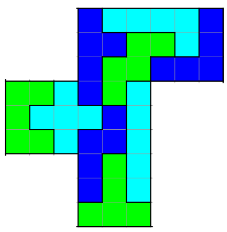
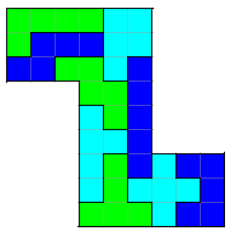


Obrázek 81: (3×4) X-pentomino

Úloha 4.8 ([13], str. 237). Najděte pokrytí všech druhů (3×3) pentomin pomocí devíti různých menších pentomin.

Řešení: Příklady možných řešení jsou znázorněny v tabulce 3.

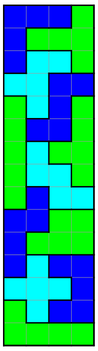
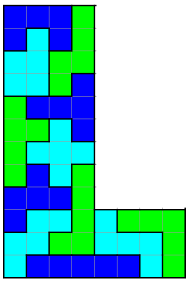
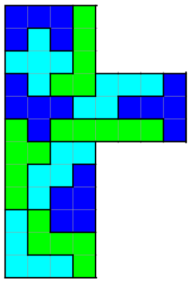
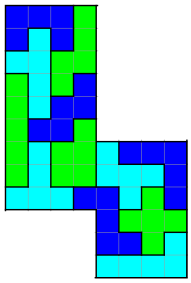
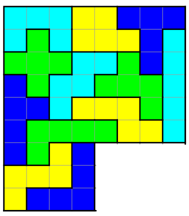
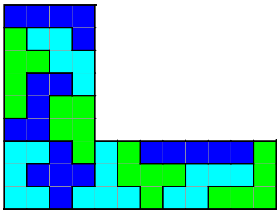
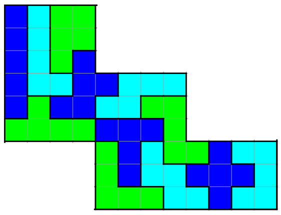
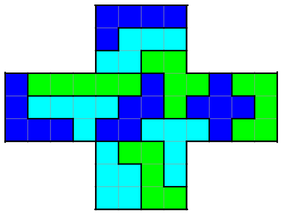
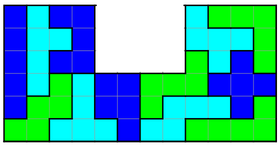
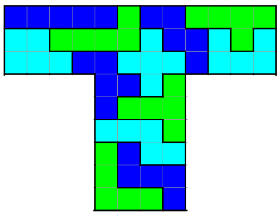
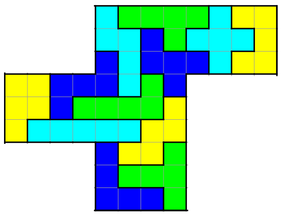
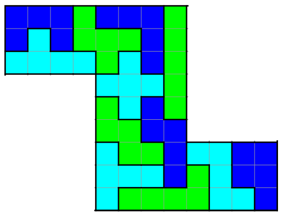
Tabulka 3: (3×3) pentomina pokrytá pomocí devíti různých menších pentomin

I-pentomino	L-pentomino	Y-pentomino	N-pentomino
			
P-pentomino	V-pentomino	W-pentomino	X-pentomino
			
U-pentomino	T-pentomino	F-pentomino	Z-pentomino
			

Úloha 4.9 ([13], str. 237). Najděte pokrytí všech druhů (3×4) pentomin pomocí dvanácti různých menších pentomin.

Řešení: Příklady možných řešení jsou znázorněny v tabulce 4.

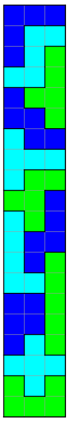
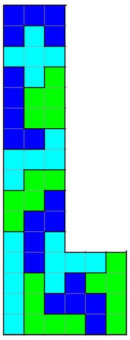
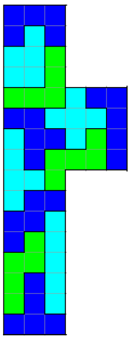
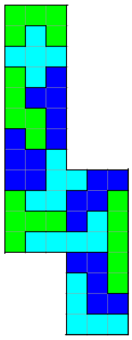
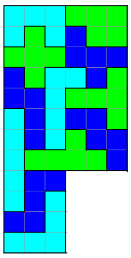
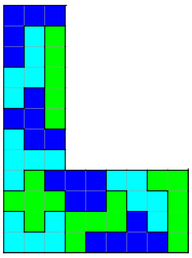
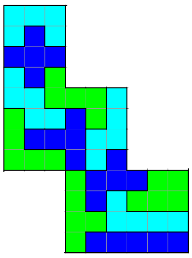
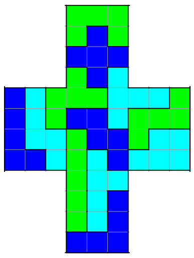
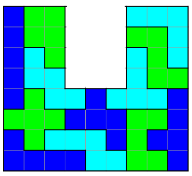
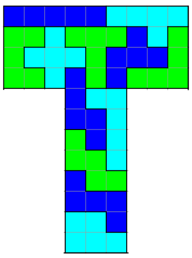
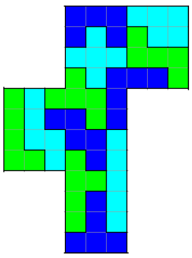
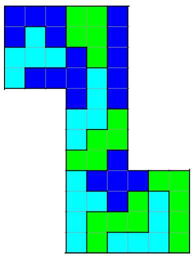
Tabulka 4: (3×4) pentomina pokrytá pomocí dvanácti různých menších pentomin

I-pentomino	L-pentomino	Y-pentomino	N-pentomino
			
P-pentomino	V-pentomino	W-pentomino	X-pentomino
			
U-pentomino	T-pentomino	F-pentomino	Z-pentomino
			

Úloha 4.10 ([13], str. 237). Najděte pokrytí všech druhů (4×3) pentomin pomocí dvanácti různých menších pentomin.

Řešení: Příklady možných řešení jsou znázorněny v tabulce 5.

Tabulka 5: (4×3) pentomina pokrytá pomocí dvanácti různých menších pentomin

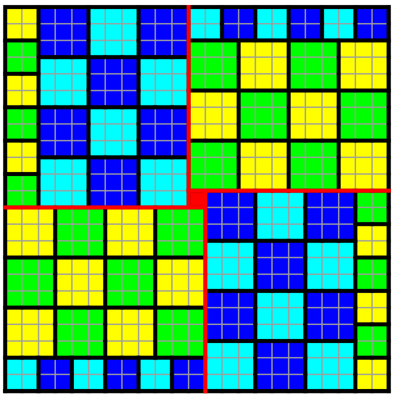
I-pentomino	L-pentomino	Y-pentomino	N-pentomino
			
P-pentomino	V-pentomino	W-pentomino	X-pentomino
			
U-pentomino	T-pentomino	F-pentomino	Z-pentomino
			

5 Pokrývání obdélníků polyominy tvaru obdélníků

Úloha 5.1 ([4], str. 28). Čtverec o velikosti 23×23 má být pokryt pomocí monomin, O-tetromin a O-nonomin (tj. pomocí menších čtverců o velikostech 1×1, 2×2 a 3×3). Jaký minimální počet monomin je k tomu potřeba?

Řešení: Nejprve zkusme najít pokrytí, které by neobsahovalo jediné monomino. Abychom ukázali, že takové pokrytí neexistuje, obarvíme čtverec černobíle pomocí svislých pruhů. O-tetromino umístěné ve čtverci vždy pokrývá dvě černá a dvě bílá políčka, O-nonomino pokrývá 6 políček jedné barvy a 3 políčka druhé. Rozdíl mezi počtem políček černé a bílé barvy v celém pokrytém čtverci by tedy měl být dělitelný třemi. Ve čtverci se ovšem nachází o 23 bílých políček více než černých.

Nyní zkusme najít pokrytí čtverce s využitím jediného monomina. Příklad takového pokrytí je na obrázku 82. Tím jsme dokázali, že minimální počet monomin, který je potřeba, aby existovalo pokrytí, je jedna.



Obrázek 82: Čtverec o velikosti 23×23 pokrytý pomocí jednoho monomina, 24 O-tetromin a 72 O-nonomin

V následujících úlohách se budeme věnovat pokrývání obdélníků lineárními polyominy. To jsou všechna polyomina tvaru obdélníku o rozměrech $1 \times k$, kde $k \in \mathbb{N}$. S některými lineárními polyominy jsme již pracovali. Byla to monomina, domina, I-tromina, I-tetromina, I-pentomina. Nyní však budeme hledat kritéria existence pokrytí obdélníku pomocí obecných lineárních polyomin o délce k.

V závěru kapitoly se budeme věnovat ještě obecnějšímu tvrzení, neboť se podíváme na kritéria existence pokrytí obdélníku pomocí polyomin tvaru obdélníku o rozměrech $a \times b$.

Úloha 5.2 ([11], str. 24). Dokažte, že obdélník o velikosti $m \times nk$, kde $m, n, k \in \mathbb{N}$ lze pokrýt pomocí mn lineárních polyomin o délce k.

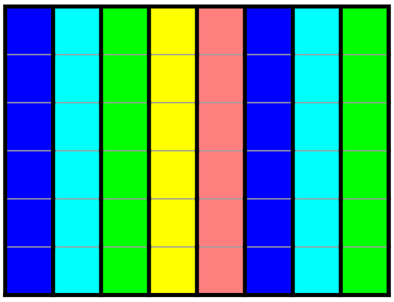
Řešení: Tvrzení jsme již dokázali pro domina (úloha 1.1) i pro I-tromina (úloha 2.1). Důkaz tohoto obecnějšího znění je zcela analogický. Jestliže má totiž pokrývaný obdélník rozměry $m \times nk$, potom lze každý řádek pokrýt pomocí n polyomin o délce k, a protože obdélník má m řádků, pokrytí se skládá z mn polyomin.

Úloha 5.3 ([11], str. 24). Dokažte, že pokud lze obdélník o velikosti $m \times n$ pokrýt pomocí lineárních polyomin o délce k, potom m nebo n je dělitelné číslem k.

Řešení: Budeme postupovat sporem. Předpokládejme tedy, že existuje obdélník o velikosti $m \times n$ pokrytý pomocí lineárních polyomin o délce k, kde m ani n není dělitelné číslem k.

Základní myšlenka důkazu je stejná jako v úloze 2.2. Obarvíme obdélník pruhovaně, tentokrát pomocí k barev, kde barevné pruhy budou svislé. Lineární polyomino o délce k umístěné do obarveného obdélníku pokryje buď k políček jedné barvy, nebo pokryje od každé barvy právě jedno políčko. Označíme-li S_1, $S_2 \dots S_k$ počet políček první, druhé až k-té barvy, potom by pro obdélník pokrytý polyominy muselo platit:
$S_1 \equiv S_2 \equiv \cdots \equiv S_k \pmod{k}$.

Nyní se zaměříme na to, kolik políček každé barvy se může nacházet v zadaném obdélníku. Označíme $t = n \mod k$. Jistě platí: $0 < t < k$, neboť předpokládáme, že n není dělitelné číslem k. Všimněme si, že sloupců obarvených první až t-tou barvou je vždy o jeden více než sloupců obarvených ostatními barvami (příklad obarvení je na obrázku 83). Počet políček v jednom sloupci je m, proto pro S_t a S_{t+1} bude platit: $S_t - S_{t+1} = m$. Jelikož m není dělitelné číslem k, je tato rovnost ve sporu s tím, k čemu jsme došli v prvním odstavci, tedy že $S_{t+1} \equiv S_t \pmod{k}$.



Obrázek 83: Obdélník o velikosti 6×8 obarvený pruhovaně pomocí pěti barev. Počet sloupců obarvených první až třetí barvou je o jeden větší než počet sloupců obarvených čtvrtou a pátou barvou.

Úloha 5.4 ([11], str. 24). Dokažte, že obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt pomocí lineárních polyomin o délce k právě tehdy, když m nebo n je dělitelné číslem k.

Řešení: Toto tvrzení lze přímo odvodit z tvrzení předchozích dvou úloh.

Úloha 5.5 ([11], str. 28). Jaké obdélníky lze pokrýt pomocí jednoho monomina a lineárních polyomin o délce k? Jaká jsou možná umístění daného monomina?

Řešení: Dva konkrétní případy této úlohy jsme již vyřešili (úlohy 2.3 a 2.4), kde jsme čtverce o velikostech 7×7 a 8×8 pokrývali pomocí jednoho monomina a I-tromin. Nyní úlohu vyřešíme zcela obecně.

Je zřejmé, že jestliže obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt pomocí jednoho monomina a lineárních polyomin délky k, potom $mn - 1$ musí být dělitelné číslem k. Proto ani m, ani n není dělitelné číslem k. Toto je první nutná podmínka. Pojďme odvodit druhou nutnou podmínku.

Další úvaha bude stejná jako při řešení úlohy 5.3. Předpokládejme, že obdélník o velikosti $m \times n$ je pokrytý jedním monominem a lineárními polyominy o délce k. Zavedeme konstanty $t, r \in \mathbb{N}_0$ tak, že platí: $n = rk + t$, kde $0 < t < n$. Obdélník obarvíme pruhovaně pomocí k barev. Nejprve budou barevné pruhy svislé. Označíme S_i počet políček i-té barvy, které jsou pokryty nějakým lineárním polyominem, mezi S_i tedy započítáme všechna políčka obdélníku i-té barvy kromě políčka, na kterém je umístěno monomino. Dále označíme P_i počet všech políček i-té barvy v obdélníku. Pro čísla S_i a P_i bude platit:

(i) $S_1 \equiv S_2 \equiv \cdots \equiv S_k \pmod{k}$, protože lineární polyomino o délce k pokryje buď k políček jedné barvy, nebo pokryje od každé barvy právě jedno políčko.

(ii) $P_1 = P_2 = \cdots = P_t = m(r+1)$, protože obdélník obsahuje $r+1$ sloupců první až t-té barvy a každý sloupec obsahuje m políček.

(iii) $P_{t+1} = P_{t+2} = \cdots = P_k = mr$, protože obdélník obsahuje r sloupců barev $t+1$ až k a každý sloupec obsahuje m políček.

Zároveň čísla P_i a S_i si budou rovná pro všechny barvy kromě jedné a to barvy toho políčka, na kterém bude umístěno monomino. Pokud monomino umístíme na políčko j-té barvy, potom $S_j = P_j - 1$.

Aby byly splněny rovnosti (i) – (iii), musí číslo t být rovno jedné, nebo $k-1$. Kdyby totiž bylo $1 < t < k-1$, měli bychom v podstatě dvě možnosti na umístění monomina. Za prvé bychom mohli monomino umístit na políčko obarvené jednou z prvních t barev. Zvolme např. první barvu. Jistě potom platí: $P_1 = P_2$, $S_1 = P_1 - 1$, $S_2 = P_2$. Proto: $S_1 = P_1 - 1 = P_2 - 1 = S_2 - 1 \not\equiv S_2 \pmod{k}$, a tedy není splněna podmínka (i).

Za druhé bychom mohli monomino umístit na některou z barev $t+1$ až k, zvolme např. k-tou barvu. Jistě potom platí: $P_k = P_{k-1}$, $S_k = P_k - 1$, $S_{k-1} = P_{k-1}$. Proto: $S_k = P_k - 1 = P_{k-1} - 1 = S_{k-1} - 1 \not\equiv S_k \pmod{k}$. Opět není splněna podmínka (i).

Zaměřme se nyní na případ, kdy $t = 1$, tedy $n \equiv t \equiv 1 \pmod{k}$. Monomino potom musí být umístěno do sloupce první barvy, protože počet políček první barvy se jediný liší od počtu políček všech ostatních barev. Je to tedy jediná možnost, jak zaručit splnění první podmínky. Umístíme-li monomino do x-tého sloupce zleva, potom $x \equiv 1 \pmod{k}$ a zároveň $S_1 = P_1 - 1, S_2 = P_2, \ldots S_k = P_k$. Pro splnění podmínky (i), tj. $S_1 \equiv S_2 \equiv \cdots \equiv S_k \pmod{k}$, musí ještě platit $P_1 - 1 \equiv P_2 \pmod{k}$, což podle rovností (ii), (iii) lze zapsat také jako $m(r+1) - 1 \equiv mr \pmod{k}$. Po úpravě dostaneme $m \equiv 1 \pmod{k}$.

Obarvěme nyní obdélník jinak a to opět pruhovaně pomocí k barev, tentokráte však budou barevné pruhy vodorovné. Musíme již předpokládat, že $m \equiv n \equiv x \equiv 1 \pmod{k}$. Analogickými úvahami jako pro svislé pruhy můžeme odvodit, že umístíme-li monomino na y-tý řádek zdola, potom bude navíc platit: $y \equiv 1 \pmod{k}$.

Vraťme se nyní ke svislým pruhům a druhému možnému případu pro t, kdy by bylo $t = k-1$, tedy $n \equiv t \equiv k-1 \pmod{k}$. Monomino musí být v této situaci umístěno do sloupce poslední barvy. Opět protože počet políček poslední barvy se jediný liší od počtu políček všech ostatních barev a nešlo by jinak splnit podmínku (i). Bude-li se jednat o x-tý sloupec, bude $x \equiv 0 \pmod{k}$ a zároveň $S_1 = P_1, S_2 = P_2, \ldots S_{k-1} = P_{k-1}, S_k = P_k - 1$.

Stále musí platit: $S_1 \equiv S_2 \equiv \cdots \equiv S_k \pmod{k}$, tedy také $P_{k-1} \equiv P_k - 1 \pmod{k}$ a to je totéž jako $m(r+1) \equiv mr - 1 \pmod{k}$. Po úpravě dostaneme $m \equiv -1 \pmod{k}$.

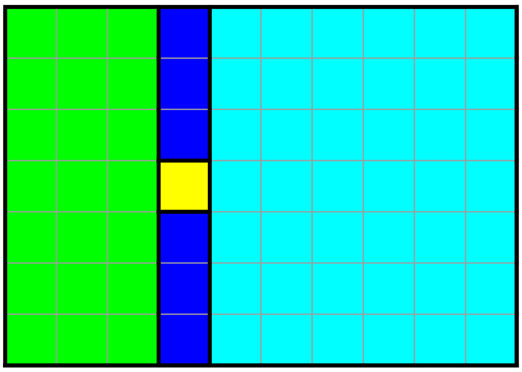
Opět v této fázi tentýž obdélník obarvíme pomocí k barev pruhovaně tak, aby pruhy byly vodorovné. Musíme již předpokládat, že $m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$ a $x \equiv 0 \pmod{k}$. Analogickými úvahami můžeme odvodit, že umístíme-li monomino na y-tý řádek zdola, potom bude navíc platit: $y \equiv 0 \pmod{k}$.

Zjistili jsme tedy dvě nutné podmínky: Pokud obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt pomocí jednoho monomina a lineárních polyomin délky k, potom:

- $mn - 1$ musí být dělitelné číslem k.
- platí buď $m \equiv n \equiv x \equiv y \equiv 1 \pmod{k}$, nebo $m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$ a zároveň $x \equiv y \equiv 0 \pmod{k}$, kde x je číslo sloupce a y je číslo řádku, ve kterých je umístěno dané monomino.

První nutnou podmínku můžeme vynechat, protože druhá podmínka je silnější, tedy pokud je druhá podmínka splněna, je tím automaticky splněna i ta první.

Zbývá nám ještě dokázat, že je tato jediná nutná podmínka také postačující. Nejprve vyřešíme první situaci. Mějme tedy dán obdélník o velikosti $(kp+1) \times (kq+1)$, kde v řádku $ks+1$ a ve sloupci $kr+1$ je umístěno monomino. Hledejme pokrytí zbylé plochy pomocí lineárních polyomin o délce k. Obdélník rozdělíme na tři části: menší obdélník o velikosti $(kp+1) \times kr$, poté sloupec $kr+1$ a nakonec menší obdélník o velikosti $(kp+1) \times (kq-kr)$ (příklad takového rozdělení obdélníku je na obrázku 84).



Obrázek 84: Obdélník o velikosti 7×10 s monominem ve čtvrtém řádku a čtvrtém sloupci, který je rozdělen na tři části pro pokrytí lineárními polyominy o délce $k = 3$

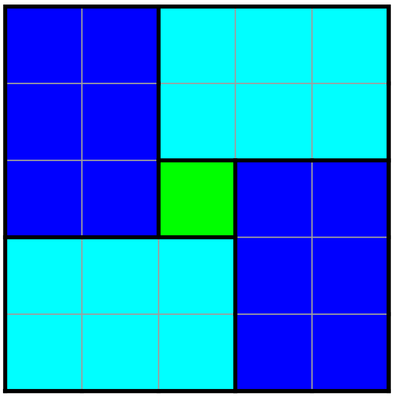
Dva menší obdélníky můžeme pokrýt dle úlohy 5.2. Sloupec $kr+1$ obsahuje $kp+1$ políček, přičemž políčko $ks+1$ (počítáno zezdola) je pokryto monominem. Zezdola je tedy třeba pokrýt kr políček, což lze pomocí r polyomin. Zbývá v tomto sloupci pokrýt horní část tj. $kp - ks$ a to lze pomocí $p - s$ polyomin.

Ve druhé situaci máme dán obdélník o velikosti $(kp-1) \times (kq-1)$, kde v řádku ks a ve sloupci kr je umístěno monomino. Hledejme pokrytí zbylé plochy pomocí lineárních polyomin o délce k. Začneme tím, že okolo daného monomina vytvoříme čtverec o velikosti $(2k-1) \times (2k-1)$ který pokryjeme pomocí $4k-4$ polyomin (obrázek 85). Zbývající plochu rozdělíme na čtyři menší obdélníky: obdélník o velikosti $(kp-1) \times (kr-k)$, obdélník o velikosti $(kp-1)\times(kq-kr-k)$, obdélník o velikosti $(kp-ks-k)\times(2k-1)$ a obdélník o velikosti $(ks-k)\times(2k-1)$ (příklad rozdělení obdélníku je na obrázku 86). Všechny čtyři tyto obdélníky lze pokrýt dle úlohy 5.2.

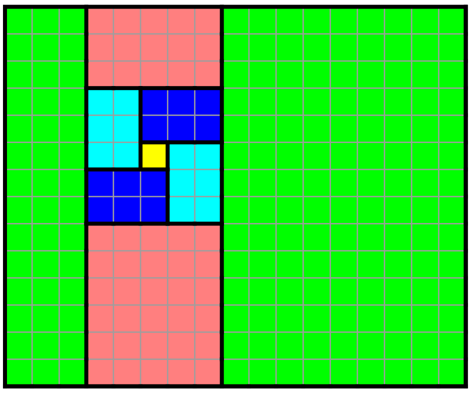
Závěr: Obdélník o velikosti $m\times n$ lze pokrýt pomocí jednoho monomina (umístěného v x-tém sloupci a y-tém řádku) a lineárních polyomin o délce k právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:

(i) $m\equiv n\equiv x\equiv y\equiv 1 \pmod k$

(ii) $m\equiv n\equiv -1 \pmod k$ a zároveň $x\equiv y\equiv 0 \pmod k$



Obrázek 85: Obdélník o velikosti $(2k-1)\times(2k-1)$ pro $k=3$



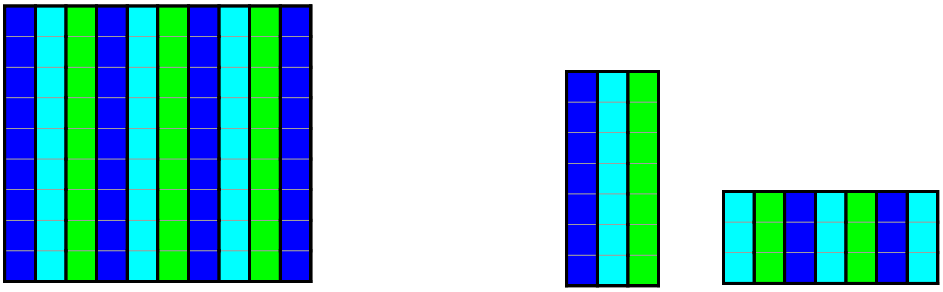
Obrázek 86: Obdélník o velikosti 14×17 s monominem v devátém řádku a šestém sloupci, který je rozdělen na pět částí pro pokrytí lineárními polyominy o délce $k=3$

Úloha 5.6. Dokažte, že pokud lze obdélník o velikosti $m\times n$ pokrýt pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a\times b$, potom a dělí aspoň jedno z čísel m, n a b dělí aspoň jedno z čísel m, n.

Řešení: Toto tvrzení je zobecněním tvrzení úlohy 5.3, proto při důkazu využijeme myšlenky z řešení této úlohy a pouze ji zobecníme. Pro větší přehlednost potřebných výrazů zaveďme již nyní konstanty: $p,q,r,t\in\mathbb{N}_0$, $q<a$, $t<a$, pro které platí: $b=pa+q$, $n=ra+t$.

Budeme tedy postupovat sporem: předpokládejme, že existuje obdélník o velikosti $m\times n$, který lze pokrýt pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a\times b$ a zároveň m ani n není dělitelné číslem a (důkaz pro b je analogický). Obdélník obarvíme pruhovaně pomocí a barev. Barevné pruhy budou svislé. Polyomino o velikosti $a\times b$ umístěné do obarveného obdélníku pokryje buď od každé barvy b políček, nebo od q barev (berme např. od prvních q barev) pokryje $(p+1)a$ políček a od $(a-q)$ ostatních barev pokryje pa políček (příklad je na obrázku 87). Označíme-li S_1, $S_2 \dots S_a$ počet políček první, druhé až a-té barvy, potom by pro obdélník pokrytý polyominy muselo platit, že $S_1 \equiv S_2 \equiv \dots \equiv S_a \pmod a$.

Dále jistě platí: $0 < t < a$, neboť předpokládáme, že n není dělitelné číslem a. Proto sloupců obarvených první až t-tou barvou je vždy o jeden více než sloupců obarvených ostatními barvami. Počet políček v jednom sloupci je m, proto pro S_t a S_{t+1} bude platit: $S_t - S_{t+1} = m$. Jelikož m není dělitelné číslem a je tato rovnost ve sporu s předcházejícím odstavcem (tj. s $S_{t+1} \equiv S_t \pmod a$).



Obrázek 87: Obdélník o velikosti 9×10 pokrýváme pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti 3×7. Obdélník tedy obarvíme pomocí tří barev. Polyomino umístěné do obdélníku pokrývá buď 7 políček od každé barvy (prostřední obrázek), nebo $3 \cdot 3$ políčka od azurové barvy a $2 \cdot 3$ políčka od zelené a modré barvy (obrázek vpravo).

Úloha 5.7. Dokažte, že obdélník o velikosti $ak \times bl$ lze pokrýt pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a \times b$.

Řešení: Prvních a řádků vyplníme pomocí l polyomin, taktéž druhých a řádků, atd. vyplníme všechny řádky. Příklad je na obrázku 88.

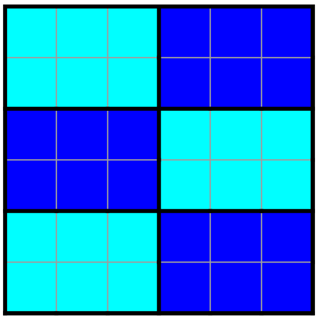
Úloha 5.8. Jakou podmínku musí splnit číslo m, aby existovalo pokrytí obdélníku o velikosti $m \times kab$ pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a \times b$?

Řešení: Předpokládejme, že $a > b$. Budeme říkat, že polyomino je umístěné ve vodorovné poloze, pokud má vodorovnou stranu délky a. Obdobně polyomino je umístěné ve svislé poloze, pokud má svislou stranu délky a.

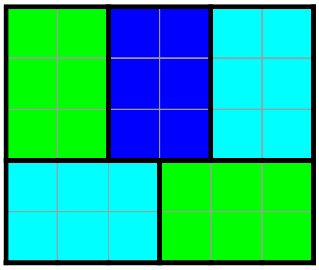
Zkusme pokrýt všechna políčka prvního sloupce zadaného obdélníku. Pokud se nám podaří první sloupec pokrýt pomocí r polyomin umístěných ve vodorovné poloze a s polyomin umístěných ve svislé poloze, potom jistě platí, že $m = rb + sa$, kde $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Tato podmínka je i postačující, neboť obdélník o velikosti $(rb + sa) \times kab$ pokryjeme tak, že dolních rb řádků pokryjeme pomocí rkb vodorovných polyomin a horních sa řádků pokryjeme pomocí ska svislých polyomin. Příklad je na obrázku 89.

Úloha 5.9. Odvoďte obecné kritérium pro existenci pokrytí obdélníku o velikosti $m \times n$ pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a \times b$?



Obrázek 88: Čtverec o velikosti 6×6 pokrytý polyominy tvaru obdélníku o velikosti 2×3



Obrázek 89: Obdélník o velikosti 5×6 pokrytý polyominy tvaru obdélníku o velikosti 2×3

Řešení: Shrneme-li výsledky předchozích tří úloh, můžeme prohlásit: Obdélník o velikosti $m \times n$ lze pokrýt pomocí polyomin tvaru obdélníku o velikosti $a \times b$ právě tehdy, když je splněna aspoň jedna z následujících čtyř podmínek:

(i) a dělí m a zároveň b dělí n

(ii) a dělí n a zároveň b dělí m

(iii) a i b dělí m a zároveň existují čísla $r, s \in \mathbb{N}_0$ taková, že $n = ra + sb$

(iv) a i b dělí n a zároveň existují čísla $r, s \in \mathbb{N}_0$ taková, že $m = ra + sb$

Všimněme si, že pro $b = 1$ jsou všechny podmínky ekvivalentní a odpovídají tvrzení úlohy 5.4.

6 Hledání počtu řešení

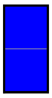
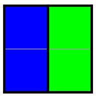
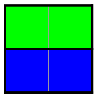
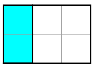
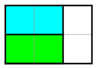
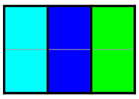
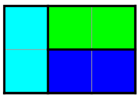
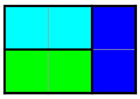
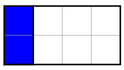
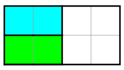
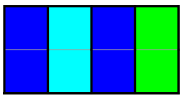
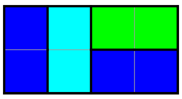
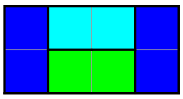
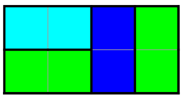
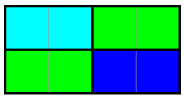
Až do této chvíle nás u každé úlohy zajímalo pouze to, zda existuje pokrytí určité plochy pomocí zadaných polyomin. Nyní se zaměříme na hledání všech takových řešení, resp. jejich počtu. Přitom za dvě různá řešení budeme považovat i taková pokrytí, která lze na sebe přemístit pomocí shodného zobrazení. Např. ve druhém řádku tabulky 6 vidíme dvě pokrytí čtverce, která budeme považovat za různá, i když lze jedno na druhé převést otočením o 90°.

Obecně se jedná o velmi komplikovanou otázku, na kterou budeme znát odpověď jen výjimečně. Podívejme se tedy na několik typických úloh.

Úloha 6.1. Najděte všechna pokrytí obdélníků o velikostech 2×1, 2×2, 2×3 a 2×4 pomocí domin.

Řešení: Všechna možná řešení jsou systematicky znázorněna v tabulce 6.

Tabulka 6: Pokrývání obdélníků o výšce 2 dominy

2×1		
2×2		
		
2×3	 	
		
2×4	  	 

Úloha 6.2 ([2], str. 51). Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $2 \times n$ dominy.

Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $2 \times n$ dominy označíme a_n. Obdélník budeme pokrývat postupně zleva doprava. Levý horní roh obdélníku lze dominem pokrýt dvěma způsoby (jak je zobrazeno ve třetím řádku tabulky 6). Buď umístíme domino svisle a zbyde nám k pokrytí obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$. Počet všech těchto pokrytí je a_{n-1}.

Nebo první domino umístíme vodorovně, potom existuje jediná možnost, jak pokrýt levý dolní roh a zbyde nepokrytý obdélník o velikosti $2 \times (n-2)$. Počet všech jeho pokrytí je a_{n-2}. Tento princip postupného pokrývání je vidět už v tabulce 6.

Zjistili jsme, že pro $n > 2$ platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Navíc z předchozí úlohy již víme, že $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tímto rekurentním vzorcem s počátečními podmínkami jednoznačně určena. V tabulce 7 je uvedeno prvních 10 členů posloupnosti.

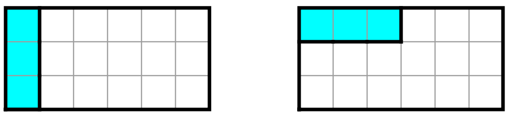
Tabulka 7: Prvních 10 členů posloupnosti $\{a_n\}$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

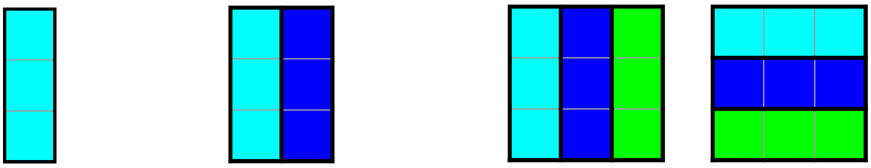
Pozn.: Této posloupnosti se často říká Fibonacciho a vzorec pro její n-tý člen vypadá následovně: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$. Odvození lze nalézt v literatuře (např. v [2], str. 60).

Úloha 6.3. Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $3 \times n$ I-trominy.

Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $3 \times n$ I-trominy označíme b_n. Budeme postupovat obdobně jako v přechozí úloze zleva doprava. Levý horní roh lze pokrýt dvěma způsoby (obrázek 90). Buď můžeme první I-tromino umístit svisle, potom bude zbývat k pokrytí obdélník o velikosti $3 \times (n-1)$ a ten lze pokrýt b_{n-1} způsoby. Nebo můžeme první I-tromino umístit vodorovně, potom existuje jediný způsob, jak pokrýt zbytek prvního sloupce tj. dvěma vodorovnými I-trominy. Zbyde nepokrytý obdélník o velikosti $3 \times (n-3)$, počet způsobů jeho pokrytí je b_{n-3}. Jistě tedy bude platit: $b_n = b_{n-1} + b_{n-3}$.



Obrázek 90: Dvě možnosti pokrytí levého horního rohu obdélníku pomocí I-tromina



Obrázek 91: Všechny způsoby pokrytí obdélníků o velikostech 3×1, 3×2 a 3×3 pomocí I-tromin

Toto rekurentní zadání samozřejmě platí pro $n > 3$ a pro jednoznačné určení posloupnosti $\{b_n\}$ je potřeba znát počáteční podmínky. Podívejme se tedy, kolika způsoby lze pokrýt obdélníky o velikostech 3×1, 3×2 a 3×3 pomocí I-tromin. Řešení jsou znázorněna na obrázku 91 a můžeme tedy doplnit: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ a $b_3 = 2$. V tabulce 8 je uvedeno prvních 10 členů této posloupnosti.

Tabulka 8: Prvních 10 členů posloupnosti $\{b_n\}$

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
1	1	2	3	4	6	9	13	19	28

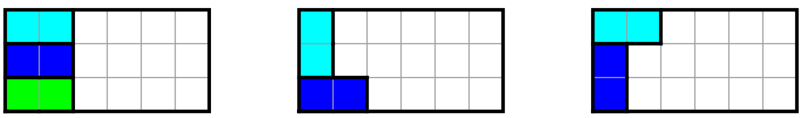
Úloha 6.4. Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $k \times n$ lineárními polyominy o délce k.

Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $k \times n$ lineárními polyominy o délce k označíme c_n. Zřejmě nyní zobecníme řešení úloh 6.2 a 6.3. Rekurentní zadání bude vypadat takto: $c_n = c_{n-1} + c_{n-k}$ pro $n > k$ a počáteční podmínky jsou následující: $c_1 = 1, c_2 = 1, \ldots, c_{k-1} = 1$ a $c_k = 2$.

Úloha 6.5 ([6], str. 329). Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $3 \times n$ dominy.

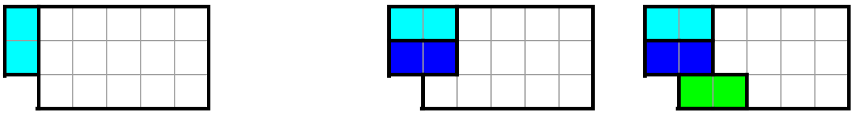
Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $3 \times n$ dominy označíme d_n. Nejprve si připomeneme, že dle úlohy 1.1 pokrytí tohoto obdélníku existuje právě tehdy, když číslo n je sudé.

Začneme s pokrýváním levého sloupce obdélníku. Možnosti jsou tři (obrázek 92). V prvním případě zbyde prázdný obdélník o velikosti $3 \times (n-2)$, který lze pokrýt d_{n-2} způsoby. Ve druhém i ve třetím případě zbyde k pokrytí obdélník o velikosti $3 \times (n-1)$ bez jednoho rohu. Nechť e_n značí počet pokrytí obdélníku $3 \times n$ bez rohového políčka (nezáleží na tom, o který roh se jedná). Z předchozí úvahy pak plyne: $d_n = d_{n-2} + 2 \cdot e_{n-1}$.



Obrázek 92: Tři možnosti pro pokrytí levého sloupce obdélníku pomocí domin

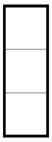
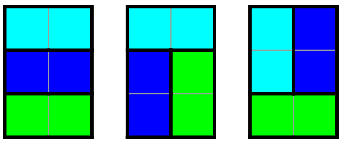
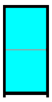
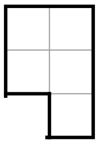
Dále najdeme rekurentní vztah pro posloupnost $\{e_n\}$. Mějme tedy dán obdélník o velikosti $3 \times n$ bez jednoho rohu např. levého dolního. Zbývající políčka v levém sloupci lze pomocí domin pokrýt dvěma způsoby (obrázek 93). V prvním případě bude k pokrytí zbývat obdélník o velikosti $3 \times (n-1)$ a ten lze pokrýt d_{n-1} způsoby. Ve druhém případě bude až na jedno políčko pokrytý i druhý sloupec. Toto políčko lze pomocí domina pokrýt jediným způsobem, proto můžeme domino rovnou umístit (obrázek 93 vpravo). Potom zůstane prázdný obdélník o velikosti $3 \times (n-2)$ bez jednoho rohu, který můžeme pokrýt e_{n-2} způsoby. Platí tedy: $e_n = d_{n-1} + e_{n-2}$.



Obrázek 93: Pokrývání levého sloupce obdélníku bez levého dolního rohu pomocí domin

Nakonec je potřeba uvést počáteční podmínky. Pro posloupnost $\{d_n\}$ je $d_1 = 0$, $d_2 = 3$ a pro posloupnost $\{e_n\}$ je $e_1 = 1$ a $e_2 = 0$ (viz tabulku 9).

Tabulka 9: Počáteční podmínky pro posloupnosti $\{d_n\}$ a $\{e_n\}$

	$n = 1$	$n = 2$
d_n		
e_n		

Zrekapitulujeme výsledky této úlohy. Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $3 \times n$ dominy jsme označili d_n. K vyjádření posloupnosti $\{d_n\}$ jsme museli zavést pomocnou posloupnost e_n. Platí: $d_n = d_{n-2} + 2 \cdot e_{n-1}$ a $e_n = d_{n-1} + e_{n-2}$ pro $n > 2$, kde $d_1 = 0$, $d_2 = 3$, $e_1 = 1$ a $e_2 = 0$. V tabulce 10 je uvedeno prvních 10 členů obou posloupností.

Tabulka 10: Prvních 10 členů posloupností $\{d_n\}$ a $\{e_n\}$

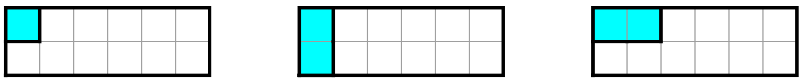
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
0	3	0	11	0	41	0	153	0	571

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
1	0	4	0	15	0	56	0	209	0

Z tohoto rekurentního zadání lze odvodit vzorec pro n-tý člen, který vypadá následovně: $d_{2n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{n+1}$. Vzorec popisuje pouze sudé členy posloupnosti d_n, což stačí, protože liché členy jsou vždy rovny nule, jak již bylo řečeno v úvodu řešení úlohy.

Úloha 6.6. Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $2 \times n$ pomocí monomin a domin.

Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $2 \times n$ pomocí monomin a domin označíme f_n. Začneme pokrýváním levého horního rohu. To lze třemi způsoby pomocí monomina nebo domina (obrázek 94). V prvním případě nám zbyde k pokrytí obdélník o velikosti $2 \times n$ bez jednoho rohu. Počet způsobů jeho pokrytí označíme g_n. Ve druhém případě zůstane nepokrytý obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$, počet jeho pokrytí je f_{n-1}.



Obrázek 94: Tři možnosti pro pokrytí levého horního rohu obdélníku pomocí monomina nebo domina

V posledním případě ještě pokryjeme levý dolní roh. To lze dvěma způsoby (obrázek 95). Potom nám zbyde k pokrytí buď obdélník o velikosti $2 \times (n-2)$, který lze pokrýt f_{n-2} způsoby, nebo obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$ bez jednoho rohu a ten lze pokrýt g_{n-1} způsoby.

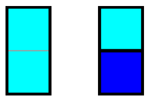
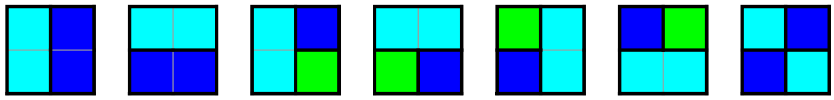
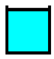
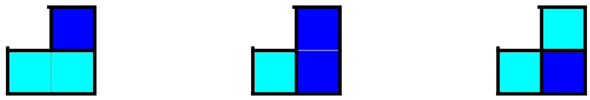
Obrázek 95: Dvě možnosti pro pokrytí levého dolního rohu obdélníku pomocí monomina nebo domina

Pro posloupnost $\{f_n\}$ tedy platí: $f_n = g_n + f_{n-1} + g_{n-1} + f_{n-2}$. Dále najdeme rekurentní vztah pro posloupnost $\{g_n\}$, tj. počet pokrytí obdélníku o velikosti $2 \times n$ bez levého horního rohu pomocí monomin a domin. Jeho levý dolní roh lze pokrýt dvěma způsoby, a to buď monominem, nebo dominem ve vodorovné poloze (obrázek 96). V prvním případě zbyde k pokrytí obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$, což lze provést f_{n-1} způsoby. Ve druhém případě zůstane nepokrytý obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$ bez jednoho rohu. Počet jeho pokrytí je g_{n-1}. Platí tedy: $g_n = f_{n-1} + g_{n-1}$.

Obrázek 96: Dvě možnosti pro pokrytí levého dolního rohu obdélníku bez levého horního rohu pomocí monomina nebo domina

Nakonec určíme počáteční podmínky. Podle obrázků v tabulce 11 je $f_1 = 2$, $f_2 = 7$, $g_1 = 1$ a $g_2 = 3$. V tabulce 12 je uvedeno prvních 10 členů obou posloupností.

Tabulka 11: Počáteční podmínky pro posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$

	$n = 1$	$n = 2$
f_n		
g_n		

Tabulka 12: Prvních 10 členů posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
2	7	22	71	228	733	2356	7573	24342	78243
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
1	3	10	32	103	331	1064	3420	10993	35335

Úloha 6.7. Určete, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $2 \times n$ pomocí monomin a L-tromin.

Řešení: Počet všech pokrytí obdélníku o velikosti $2 \times n$ pomocí monomin a L-tromin označíme h_n. Levý horní roh obdélníku lze pokrýt čtyřmi způsoby (obrázek 97). V prvním případě zbyde k pokrytí obdélník o velikosti $2 \times n$ bez jednoho rohu. Počet možných pokrytí této plochy pomocí monomin a L-tromin označíme i_n. Ve druhém i ve třetím případě zbyde k pokrytí obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$ bez jednoho rohu, což lze provést i_{n-1} způsoby.

V posledním případě můžeme rovnou levý dolní roh pokrýt monominem, protože není

Obrázek 97: Čtyři možnosti pro pokrytí levého horního rohu obdélníku pomocí monomina nebo L-tromina

jiný způsob, jak políčko pokrýt. Poté zůstane nepokrytý obdélník o velikosti $2 \times (n-2)$, počet jeho pokrytí je h_{n-2}. Pro posloupnost $\{h_n\}$ tedy platí: $h_n = i_n + 2 \cdot i_{n-1} + h_{n-2}$.

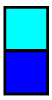
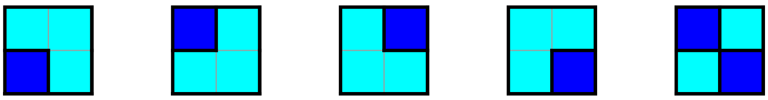
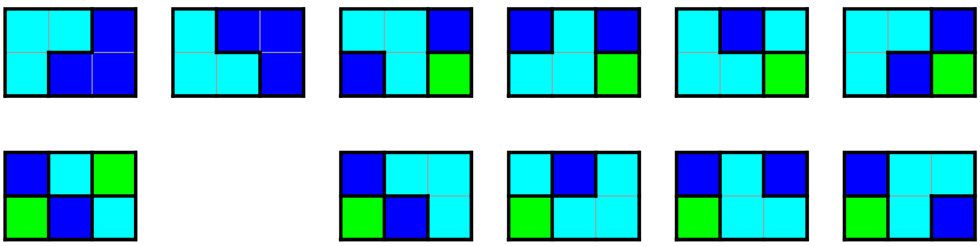
Pro určení posloupnosti $\{i_n\}$ pokryjeme levý dolní roh obdélníku o velikosti $2 \times n$ bez levého horního rohu. Máme zde dvě možnosti: buď políčko pokryjeme monominem, nebo L-trominem (obrázek 98). V prvním případě zůstane nepokrytý obdélník o velikosti $2 \times (n-1)$, který lze pokrýt h_{n-1} způsoby. Ve druhém případě zbyde prázdný obdélník o velikosti $2 \times (n-2)$, který lze pokrýt h_{n-2} způsoby. Pro posloupnost $\{i_n\}$ tedy platí: $i_n = h_{n-1} + h_{n-2}$.

Obrázek 98: Dvě možnosti pro pokrytí levého dolního rohu obdélníku bez levého horního rohu pomocí monomina nebo L-tromina

Jelikož každý člen posloupnosti $\{i_n\}$ lze vyjádřit pouze pomocí členů posloupnosti $\{h_n\}$, můžeme do rovnice $h_n = i_n + 2 \cdot i_{n-1} + h_{n-2}$ dosadit $i_n = h_{n-1} + h_{n-2}$. Po menší úpravě dostaneme rovnici $h_n = h_{n-1} + 4 \cdot h_{n-2} + 2 \cdot h_{n-3}$.

Na závěr musíme určit počáteční podmínky. Z tabulky 13 můžeme usoudit, že $h_1 = 1$, $h_2 = 5$ a $h_3 = 11$. V tabulce 14 je uvedeno prvních 10 členů této posloupnosti.

Tabulka 13: Počáteční podmínky pro posloupnosti $\{h_n\}$

h_1	
h_2	
h_3	

Z rekurentního zápisu můžeme odvodit vzorec pro n-tý člen, který vypadá takto: $h_n = (-1)^n + \frac{(1+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}} - \frac{(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$. Odvození zde neuvádím, ale např. v [2] je uveden obecný postup, jak řešit rekurentní rovnice, popřípadě je možné vzorec získat pomocí vhodného matematického softwaru.

Tabulka 14: Prvních 10 členů posloupnosti $\{h_n\}$

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
1	5	11	33	87	241	655	1793	4895	13377

Je zřejmé, že čím větší bude pokrývaný obdélník, tím komplikovanější bude nalézt řešení. Velmi lákavé by bylo např. vyjádřit, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $m \times n$ pomocí domin. Postupné pokrývání levého sloupce zde k výsledku evidentně nepovede. Řešení se dá odvodit s využitím teorie grafů, jak uvádí např. [8]. Označíme-li $L(m,n)$ počet pokrytí obdélníku o velikosti $m \times n$ pomocí domin, potom platí:

$$L(m,n) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(4\cos^2\frac{i\pi}{m+1} + 4\cos^2\frac{j\pi}{n+1})^{\frac{1}{4}} = \prod_{i=1}^{[\frac{m}{2}]}\prod_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}(4\cos^2\frac{i\pi}{m+1} + 4\cos^2\frac{j\pi}{n+1})$$

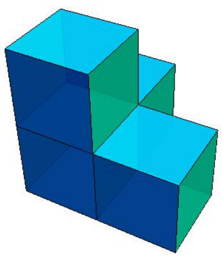
Závěr

Úloh o pokrývání obdélníků polyominy je nepřeberné množství. V této diplomové práci jsem se snažila zachytit ty nejznámější, ale téma ještě zdaleka není vyčerpáno. Existuje spousta dalších zajímavých úloh, na které mi již nezbyl prostor.

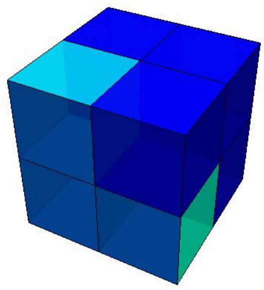
Zabývala jsem se obzvláště pokrýváním obdélníků pomocí nejmenších polyomin, tedy domin, tromin, tetromin a pentomin. Zřejmě se takto můžeme věnovat i větším polyominům: hexominům, heptominům atd. (O utváření větších polyomin se dočteme např. v [3].) Zajímavou úlohou s tímto rozšířením související je určení počtu všech různých polyomin dané velikosti. Víme že monomino a domino mají jediný možný tvar, tromina jsou již dvě, tetromin je pět, pentomin dvanáct. Zatím ještě nikdo nevymyslel rozumný algoritmus nebo vzorec, pomocí kterého by se dal zjistit počet druhů polyomin o velikosti k políček. Největší polyomino, pro které se mi podařilo najít počet druhů, je polyomino o velikosti 28 políček a je jich 153511100594603 druhů (viz [10]).

Navíc se v této práci věnuji převážně úlohám, ve kterých je pokrývanou plochou obdélník s celočíselnými stranami. Ten můžeme různě zobecnit a nabízí se nám tak široká škála obměněných úloh. Obdélník např. nemusí ležet v rovině, ale můžeme spojit dvě jeho protější strany a vytvořit tak čtvercovou síť na válci. V tomto válci můžeme spojit podstavy a vytvořit tak torus, zde ovšem dojte k deformaci čtvercové sítě. Obě tyto plochy lze pokrývat polyominy (viz [11]). Dále můžeme v rovině pokrývat obdélník, jehož strany nejsou celočíselné, pomocí různých menších obdélníků (viz [12] nebo [1]). Popřípadě můžeme zkoumat, jakými obrazci lze pokrýt rovinný pás nebo i celou rovinu (viz [9]).

V neposlední řadě zmiňme úlohy zabývající se vyplňováním kvádrů o celočíselných stranách pomocí prostorových polyomin. Ty vzniknou obdobně jako ta rovinná, jen se neskládají ze čtverců o velikosti 1×1, ale z krychlí o velikosti $1 \times 1 \times 1$ (viz [11]). Na obrázku 99 vidíme příklad prostorového tetromina a na obrázku 100 krychli, která je dvěma těmito tetrominy vyplněna.



Obrázek 99: Prostorové tetromino



Obrázek 100: Krychle o velikosti $2 \times 2 \times 2$ vyplněná dvěma prostorovými tetrominy

Seznam použité literatury

[1] M. Aigner a G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. New York: Springer, 1998. ISBN 35-406-3698-6.

[2] E. Calda. *Kombinatorika pro učitelské studium*. Praha: Matfyzpress, 1996. ISBN 80-858-6313-8.

[3] B. Cipra, E. D. Demaine, M. L. Demaine a T. Rodgers. *Tribute to a mathemagician*. Wellesley: A K Peters, 2005. ISBN 15-688-1204-3.

[4] A. Engel. *Problem-solving strategies*. New York: Springer, 1998. ISBN 03-879-8219-1.

[5] M. Gardner. L-tromino Tiling of Mutilated Chessboards. *The College Mathematics Journal* 2009, vol. 40, issue 3, s. 162-168.

[6] R. L. Graham, D. E. Knuth a O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[7] Ch. I-Ping a R. Johnsonbaugh. Tiling Deficient Boards with Trominoes. *Mathematics Magazine* 1986, vol. 59, issue 1, s. 34-40.

[8] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice. *Physica* 1961, vol. 27, issue 12, s. 1209-1225.

[9] D. A. Klarner. *Mathematical recreations: a collection in honor of Martin Gardner*. Mineola, New York: Dover Publications, 1998. ISBN 04-864-0089-1.

[10] T. Oliveira e Silva. Animal enumerations on the {4,4} Euclidean tiling. In: *Sweet: Universidade de Aveiro* [online]. Aveiro: Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática, Universidade de Aveiro. [cit. 27. 2. 2014]. Dostupné z: `http://sweet.ua.pt/tos/animals/a44i.html#r`

[11] A. Soifer. *Geometric etudes in combinatorial mathematics*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-038-7754-697.

[12] S. Wagon. Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle. *The American Mathematical Monthly* 1987, vol. 94, issue 7, s. 601-617.

[13] J. J. Watkins. *Across the board: the mathematics of chessboard problems*. Princeton: Princeton University Press, 2004. ISBN 06-911-1503-6.