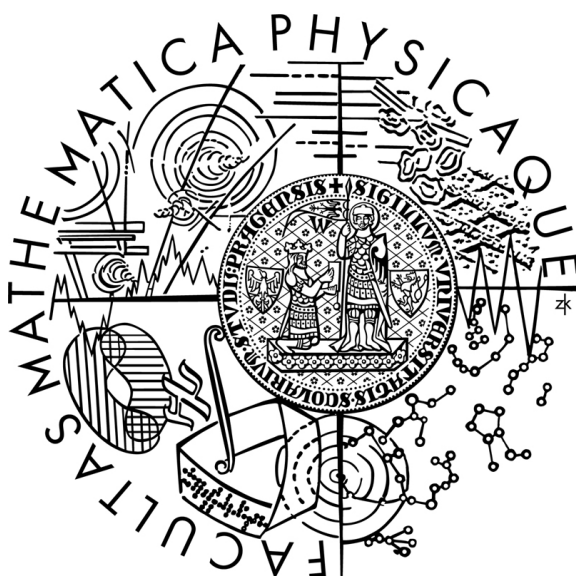


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE PRO SOUTĚŽ SVOČ



Eliška Chudáčková

Modelování křivek na počítači

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí seminární práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2014

Název práce: Modelování křivek na počítači

Autor: Eliška Chudáčková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí seminární práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Abstrakt: Seminární práce *Modelování křivek na počítači* se zabývá důležitými křivkami počítačové grafiky a jejich aplikacemi v programech. Speciálně se věnuje Fergusonově kubice, Bézierově křivce a Coonsově kubice. Práce je koncipována předně jako učební text. Jednak pro středoškolské studenty informatického semináře, dále pro studenty geometrie. Je také využitelná jako přehled teorie křivek nebo sbírka příkladů týkajících se studia křivek. Důležitým přínosem práce jsou programy, které umožňují experimentální ověření vlastností studovaných křivek. K většině křivek a příkladů je připojen také obrázek. Součástí práce je přiložené CD, na kterém se nacházejí programy a obrázková příloha v elektronické podobě.

Klíčová slova: křivky, modelování, interpolace, aproximace, řídicí polygon

Title: Computer modeling of curves

Author: Eliška Chudáčková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Abstract: Seminar work *Computer modeling of curves* deals with important curves of computer graphics and their applications in programs. It is especially devoted to Ferguson cubic, Bezier curve and Coons cubic. The work is outlined as a study material. First for high school students of informatics seminar, second for undergraduate students of geometry. It is also useful as an overview of the theory of curves or a collection of examples relating to study of curves. An important contribution of this work are programs that allow experimental verification of properties of the studied curves. There is also a picture attached to most of curves and examples. Part of this work is an enclosed CD, where you can find all the programs and the picture supplement in the electronic form.

Keywords: curves, modeling, interpolation, approximation, control polygon

Obsah

Seznam obrázků	iv
Úvod	1
1 Úvod do studia křivek	2
1.1 Různá dělení křivek	2
1.2 Teorie na úvod	3
2 Křivky volného tvaru	5
2.1 Fergusonova kubika	5
2.2 Bézierova křivka	9
2.3 Coonsova kubika	18
3 Algoritmy a experimentální vyhodnocení	20
3.1 Souhrn programů	20
3.2 Společné prvky programů	20
3.3 Výpočet a vykreslení Fergusonovy kubiky	21
3.4 Výpočet a vykreslení Bézierovy křivky	22
3.5 Výpočet a vykreslení Coonsovy kubiky	23
Závěr	24
Literatura	25

Seznam obrázků

2.1	Hermitovy polynomy	5
2.2	Příklady Fergusonovy kubiky	6
2.3	Fergusonovy kubiky z příkladu	7
2.4	Změny tečného vektoru v bodě navázání Fergusonových kubik . .	7
2.5	Fergusonova kubika z příkladu	8
2.6	Navazování Fergusonových kubik v prostoru	8
2.7	Fergusonova kubika z příkladu	9
2.8	Navázání Fergusonových kubik v rovině	9
2.9	Bernsteinovy polynomy nultého až pátého stupně	11
2.10	Změny Bézierovy křivky	12
2.11	Kroky algoritmu <i>de Casteljau</i>	13
2.12	Bézierovy křivky z příkladů	14
2.13	Navázání Bézierových křivek	15
2.14	Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou	15
2.15	Racionální Bézierova kubika	17
2.16	Racionální Bézierova křivka z příkladu	17
3.1	Grafická okna k ukázce	22

Úvod

Seminární práce *Modelování křivek na počítači* si klade za cíl seznámit čtenáře se křivkami využívanými v počítačové grafice a vytvořit programové prototypy, které slouží při jejich modelování a aplikacích na počítači.

Práce je koncipována jako studijní materiál pro studenty geometrie, zároveň však jako přehled teorie křivek, sbírka příkladů týkajících se studia křivek počítačové grafiky a v neposlední řadě jako ukázka programů, tedy jako ukázka praktické aplikace geometrie. Důležitým přínosem této práce je její využitelnost jako didaktické pomůcky na střední škole. Použité algoritmy a studované křivky jsou vhodným rozšířením učiva, které se hodí na informatický seminář. V práci bylo k implementaci vybráno prostředí MatLab, je ovšem možné použít jakýkoliv programovací jazyk. Pomocí programů pak lze názorně předvést jednotlivé vlastnosti křivek. Další možné využití na střední škole je při studiu kuželoseček, které jsou v práci studovány jako racionální Bézierovy křivky.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola popisuje obecné vlastnosti křivek a zavádí základní pojmy a definice. První část kapitoly je věnována možným rozdělením křivek podle různých kritérií. Druhá část se pak zabývá vlastnostmi parametrických křivek, které tato práce studuje.

Ve druhé kapitole jsou konkrétně popsány důležité křivky počítačové grafiky. V první části je zavedena Fergusonova kubika a jsou uvedeny její vlastnosti. Druhá část je věnována studiu Bézierovy křivky, nejprve její neracionální variantě a poté variantě racionální, díky níž je možné zvést kuželosečky. Ve třetí části druhé kapitoly je podrobena studiu Coonsova kubika. Zároveň jsou zkoumány vzájemné vztahy uvedených křivek.

Ve třetí, stěžejní kapitole této seminární práce, jsou popsány programy, které jsem implementovala v prostředí MatLab. Každé křivce studované ve druhé kapitole je věnován jeden nebo více programů, které uživateli nabízejí výpočet a vizualizaci konkrétně zadané křivky a případně jejich dalších vlastností. Je tedy možné si s jejich pomocí experimentem ověřit vlastnosti křivek studovaných v předešlých kapitolách této práce.

Součástí seminární práce je přiložené CD, na němž se nacházejí programy popsané ve třetí kapitole. Celý text je pro názornost doplněn obrázky, které jsem získala s využitím programu MatLab. Tyto obrázky se v elektronické podobě také nacházejí na přiloženém CD.

1. Kapitola

Úvod do studia křivek

Způsob náhledu na pojem křivka prošel historicky dlouhým vývojem. Od první Euklidovy definice „čára jako délka bez šířky“ přes Descartovo zavedení pomocí průsečíku dvou pohybujících se přímek, dále od počátku 18. století křivka jako graf funkce. Od poloviny 19. století se již začala vyvíjet diferenciální geometrie křivek, jak ji známe dnes. Nicméně zavedení pojmu křivka se objevovalo i v odvětvích matematiky jako je teorie množin, topologie a teorie dimenze. V neposlední řadě je pak křivka definována jako jednorozměrná podvarieta, kde na křivku pohlížíme lokálně jako na zakřivený jednorozměrný podprostor v \mathbb{R}^n . Více o historii vývoje pojmu lze nalézt v [7].

V současné době nahlížíme na křivku více způsoby. Chápeme ji jako trajektorii bodu, jako průnik ploch, jako graf funkce, jako algebraickou množinu. Křivku také můžeme zadat množinou bodů a vztahem k nim společně s dalšími požadavky. Výsledkem potom jsou různé druhy aproximačních a interpolačních křivek. V této práci bude pojem křivka chápán podle situace jako křivka i s jejím nakreslením nebo jako samotné vyjádření. Podle aplikace, ke které slouží, vybíráme vhodný popis křivky. Pro naše účely budeme vybírat taková vyjádření, která se hodí pro potřeby počítačové grafiky a jsou proto dobře využitelná v počítačové grafice v praxi. Nutno podotknout, že při reprezentaci křivek v počítači se pro vykreslení vždy používá po částech lineární interpolace. Při dostatečně jemném dělení intervalu, na kterém je křivka vykreslována, ji pak lidské oko vnímá jako hladkou.

1.1 Různá dělení křivek

Dle druhu zadání lze křivky rozdělit na explicitně, implicitně a parametricky vyjádřené. Podle konkrétní aplikace vybíráme, které z těchto vyjádření použijeme. V této práci se budeme z následně popsanych důvodů zabývat parametricky vyjádřenými křivkami. Ukáže se totiž, že reprezentace je nejvýhodnější pro účely počítačové grafiky, kde nás vždy zajímá co nejjednodušší vyjádření bodu na křivce.

Explicitní vyjádření

Explicitním vyjádřením křivky se rozumí její vyjádření předpisem $y = f(x)$, kde y je závisle proměnná a x nezávisle proměnná z nějakého intervalu.

S explicitně vyjádřenou křivkou se příjemně počítá, lze k ní snadno zavést pojem orientovaná křivka, jednoduše se pro její zobrazení spojuje více hodnot funkce f úsečkami, aby tak pro oko vznikl dojem hladké křivky. Významná nevýhoda však je, že mnoho křivek takovýmto způsobem vyjádřit nelze - například již kružnici nebo elipsu bychom museli zadat dvěma různými předpisy. Vzhledem k tomu, že nás zajímají vyjádření, která se hodí pro práci na počítači, necháme explicitní vyjádření křivek stranou.

Příkladem explicitně zadané křivky je parabola daná předpisem $y = ax^2 + bx + c$, kubická parabola daná předpisem $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nebo řetězovka

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Implicitní vyjádření

Implicitně lze křivku vyjádřit jako množinu nulových bodů funkce $F(x, y)$, tedy jako množinu $M = \{[x, y]; F(x, y) = 0\}$. Takto vyjadřovat křivku je však při práci na počítači velmi nepraktické.

Příkladem může být množina nulových bodů funkce $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, množina nulových bodů polynomu $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $a > 0$ (tzv. Descartův list) nebo například polynomu $F(x, y) = y^2 - x(x - 1)(x + 1)$.

Parametrické vyjádření

Parametrické vyjádření křivky je vhodné z hlediska jednoduchého vyjádření bodu na křivce. Zároveň máme možnost tak vyjádřit jakoukoliv křivku. Také vyhovuje často kladeným požadavkům jako je nezávislost na volbě souřadnic a jednoduché omezení výpočtu pouze na část křivky. Navíc například odpovídá fyzikálnímu pojetí křivky jako dráhy bodu.

Společně s nepříjemnostmi ostatních dvou vyjádření jsou toto důvody, proč se budeme nadále zabývat křivkami vyjádřenými v parametrickém tvaru.

Podle potřeby lze křivky kromě způsobu zadání rozdělit do dalších skupin. Můžeme je dělit například dle dimenze - rovinná nebo prostorová křivka. Dále pak můžeme křivky zadané množinou bodů rozdělit na takové, které jimi prochází (interpoláčnické křivky) a takové, které zadanými body neprocházejí (aproximační křivky).

1.2 Teorie na úvod

Definice 1.2.1(Bodová funkce jedné reálné proměnné) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Potom zobrazení Q intervalu I do euklidovského prostoru \mathbb{R}^n se nazývá *bodová funkce jedné reálné proměnné*, $Q(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. Reálné funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, $t \in I$ se nazývají *souřadnicové funkce* bodové funkce jedné reálné proměnné.

Definice 1.2.2(Vektorová funkce jedné reálné proměnné) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Potom zobrazení q intervalu I do zaměření V euklidovského prostoru \mathbb{R}^n se nazývá *vektorová funkce jedné reálné proměnné*, $q(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Reálné funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, $t \in I$ se nazývají *souřadnicové funkce* vektorové funkce jedné reálné proměnné.

Definice lze najít například v [6].

Definice 1.2.3(Parametrizovaná křivka) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Parametrizovaná křivka v \mathbb{R}^n je diferencovatelné zobrazení $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Množina hodnot $\langle c \rangle = c(I)$ se nazývá obraz parametrizované křivky. Řekneme, že křivka c je regulární v bodě $t_0 \in I$, pokud $c'(t_0) \neq o$.

Definice 1.2.4(Tečný vektor k parametrické křivce) Pro parametrickou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c(t) = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)]$, nazveme vektor $c'(t) \equiv \frac{dc}{dt}(t) =$

$(\frac{dc_1}{dt}(t), \frac{dc_2}{dt}(t), \dots, \frac{dc_n}{dt}(t)) \in \mathbb{R}^n$ tečným vektorem k parametrické křivce c v bodě $c(t)$.

Definice 1.2.5(Tečna ke křivce) Tečna ke křivce $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ v regulárním bodě $t_0 \in I$ je přímka s parametrizací $t \mapsto c(t_0) + tc'(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.2.6 Mějme dvě křivky, zobrazující pro jednoduchost do \mathbb{R}^2 , přímku $Q = A + tu$, $t \in \mathbb{R}$ a parabolu $P = A + tu + t^2v$, $t \in \mathbb{R}$. Chceme-li vyjádřit bod přímky Q , zapíšeme ho pomocí bodové funkce $Q(t) = [a_1 + tu_1, a_2 + tu_2]$. Podobně pokud chceme vyjádřit bod paraboly P , zapíšeme ho opět pomocí bodové funkce, tentokrát $P(t) = [a_1 + tu_1 + t^2v_1, a_2 + tu_2 + t^2v_2]$. Tečný vektor paraboly P naopak zapíšeme pomocí vektorové funkce $P'(t) = \frac{dP}{dt}(t) = (\frac{dP_1}{dt}(t), \frac{dP_2}{dt}(t)) = (u_1 + 2tv_1, u_2 + 2tv_2)$. Tečnu k parabole P v bodě t_0 bychom zapsali pomocí bodové funkce $Pt(z) = [P_1(t_0) + z\frac{dP_1}{dt}(t_0), P_2(t_0) + z\frac{dP_2}{dt}(t_0)] = [a_1 + t_0u_1 + t_0^2v_1 + z(u_1 + 2t_0v_1), a_2 + t_0u_2 + t_0^2v_2 + z(u_2 + 2t_0v_2)]$, $z \in \mathbb{R}$.

Definice 1.2.7(Ekvivalentní křivky) Nechť c je parametrická křivka na $I \in \mathbb{R}$ a d parametrická křivka na $J \in \mathbb{R}$. Existuje-li zobrazení $\varphi : I \rightarrow J$, které je bijektivní, spojitě diferencovatelné a $\frac{d\varphi}{dt}(t) \neq 0 \forall t \in I$ a pro které platí $c(t) = d(\varphi(t))$ na I , potom křivku d nazveme *reparametrizací* křivky c a křivky c a d nazveme ekvivalentní.

Definice lze najít například v [12].

Definice 1.2.7 zajišťuje, že je splněn výše zmíněný požadavek nezávislosti křivky na volbě souřadnic. Je navíc jasné, že dvě ekvivalentní křivky mají stejný obraz.

Definice 1.2.8(Spojitost křivky) Křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}$, má spojitost k -tého řádu v bodě $t \in I$ (resp. na I), právě když má její vektorová funkce v tomto bodě (resp. na I) spojitost k -tého řádu, tj. když jsou derivace všech jejích souřadnicových funkcí v tomto bodě (resp. na I) až do k -tého řádu spojitě. O takové křivce pak říkáme, že je C^k spojitá v bodě $t \in I$ (resp. na I).

Definice 1.2.9(Spojitost napojení dvou křivek) Nechť jsou dány dvě křivky $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}$, $I = \langle a, b \rangle$ a $d : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J = \langle p, q \rangle$, $J \in \mathbb{R}$ a nechť c je C^k spojitá na I a d je C^k spojitá na J .

Říkáme, že křivka d je svým počátečním bodem na koncový bod křivky c napojena s C^k spjitostí, popř. že tyto křivky jsou C^k spojitě napojeny, pokud platí: $c^{(i)}(b) = d^{(i)}(p)$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$. Takto definovaná spjitost napojení dvou křivek se označuje jako *parametrická spjitost*.

Říkáme, že křivka d je svým počátečním bodem na koncový bod křivky c napojena s G^k spjitostí, popř. že tyto křivky jsou G^k spojitě napojeny, pokud platí: $c^{(i)}(b) = h.d^{(i)}(p)$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$, $h > 0$. Takto definovaná spjitost napojení dvou křivek se označuje jako *geometrická spjitost*.

Definice lze najít například v [?].

Poznámka: Parametrická spjitost C^k v bodě napojení dvou křivek vyjadřuje, že vektory prvních k derivací obou křivek jsou v tomto bodě totožné. Naproti tomu geometrická spjitost G^k v bodě napojení dvou křivek vyjadřuje, že vektory prvních k derivací obou křivek jsou v tomto bodě lineárně závislé. Je tedy jasné, že požadavek na geometrickou spjitost je slabší než požadavek na spjitost parametrickou.

Další teorii diferenciální geometrie lze najít v literatuře.

2. Kapitola

Křivky volného tvaru (Freeform curves)

V následující kapitole se budeme zabývat některými důležitými křivkami využívanými v počítačové grafice. Pro jednotlivé křivky budeme zavádět pojmy a definice a poté formulovat jejich vlastnosti. Křivky budou studovány výhradně v \mathbb{R}^3 (případně \mathbb{R}^2), vzhledem k zaměření směrem na výuku a k reálným aplikacím v programech.

2.1 Fergusonova kubika

Fergusonova kubika je křivka třetího stupně, která interpoluje dva zadané body. Je to jedna z neznámějších interpolačních křivek používaných v počítačové grafice. Poprvé byla použita J.C.Fergusonem pro konstruování křivek v leteckém průmyslu roku 1964.

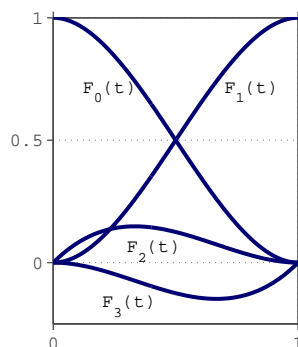
Definice 2.1.10(Fergusonova Kubika) Necht' jsou dány dva řídicí body A a B , tečné vektory A' a B' v těchto bodech. Potom je vektorová rovnice Fergusonovy kubiky $Q(t)$:

$$Q(t) = F_0(t)A + F_1(t)B + F_2(t)A' + F_3(t)B'; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.1)$$

kde báze funkce $F_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, jsou Hermitovy polynomy třetího stupně a platí

$$\begin{aligned} F_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ F_1(t) &= -2t^3 + 3t^2 \\ F_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ F_3(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

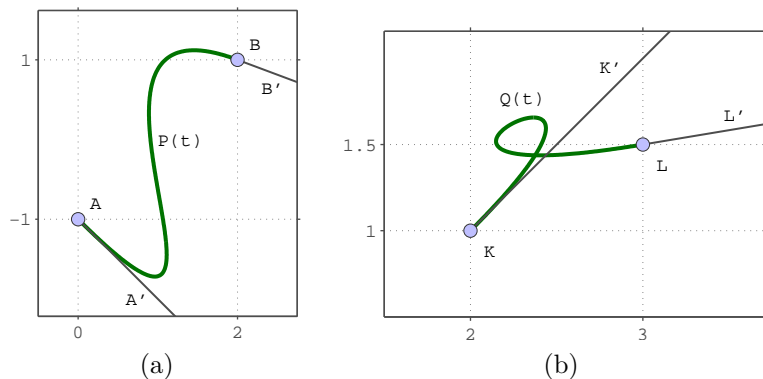
Definice je uvedena například v [6].



Obrázek 2.1: Hermitovy polynomy

Fergusonova kubika je tedy zadaná svými koncovými body a tečnými vektory v příslušných bodech. Na obrázcích 2.2a. a 2.2b. vidíme dvě různá zadání

Fergusonovy kubiky. Křivka se vždy přimyká k tečnému vektoru v jeho směru, míra přimykání je dána jeho velikostí. Pro změnu křivky tedy můžeme pohnout koncovým bodem, změnit velikost tečného vektoru nebo změnit směr tečného vektoru.



Obrázek 2.2: Příklady Fergusonovy kubiky

Poznámka: Při modelování na počítači (v prostředí MatLab) se často využívá maticový zápis, který má tvar

$$Q(t) = TFA = \underbrace{\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ A' \\ B' \end{pmatrix}}_A$$

Chceme-li navázat dvě Fergusonovy kubiky, je z definice jasné, že pokud ztotožníme koncový bod první křivky a počáteční bod křivky druhé a příslušné tečné vektory, dostaneme křivku se spojitostí C^1 . Výjimku tvoří pouze případ, kdy je některý tečný vektor nulový. (Pokud ztotožníme pouze směry příslušných tečných vektorů, získáme pro výslednou křivku spojitost G^1). Častý požadavek na C^1 spojitost křivky vzniklé navazováním segmentů je proto jednoduché splnit.

Zadání Fergusonovy kubiky lze zobecnit pro interpolaci i -tého a $(i + 1)$ -ho bodu z n zadaných bodů ($i < n$):

Definice 2.1.10*(Fergusonova kubika) Necht' jsou dány body A_i a A_{i+1} a tečné vektory v těchto bodech A'_i a A'_{i+1} . Necht' uvedeným bodům odpovídají hodnoty parametru t_i a t_{i+1} . Fergusonovu kubiku určíme pomocí rovnice

$$Q(t) = H_0(t - t_i)A_i + H_1(t - t_i)A_{i+1} + H_2(t - t_i)A'_i + H_3(t - t_i)A'_{i+1} \quad (2.3)$$

kde $H_i(s)$ jsou polynomy třetího stupně.

Definice je uvedena například v [3].

Z podmínek $Q(t_i) = A_i$, $Q(t_{i+1}) = A_{i+1}$, $Q'(t_i) = A'_i$ a $Q'(t_{i+1}) = A'_{i+1}$ určíme koeficienty u jednotlivých mocnin výrazu $t - t_i$. Při označení $s := t - t_i$, $k_i :=$

$t_{i+1} - t_i$ dojdeme ke vztahům

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{2}{k_i^3} s^3 - \frac{3}{k_i^2} s^2 + 1 \\ H_1(s) &= -\frac{2}{k_i^3} s^3 + \frac{3}{k_i^2} s^2, \\ H_2(s) &= \frac{1}{k_i^2} s^3 - \frac{2}{k_i} s^2 + s, \\ H_3(s) &= \frac{1}{k_i^2} s^3 - \frac{1}{k_i} s^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pro volbu uniformní parametrizace $t_i = 0$, $t_{i+1} = 1$ tj. $k_i = 1$ mají polynomy $H_i(s)$ tvar bázových polynomů $F_i(t)$.

Příklad 2.1.11 Určete parametrické vyjádření Fergusonových kubik $P(t)$, $Q(t)$ navázaných spojitostí C^1 a jejich tečných vektorů $P'(t)$, $Q'(t)$. Kubika $P(t)$ je zadána body A , B a tečnými vektory A' , B' v těchto bodech, kubika $Q(t)$ je zadána body B , C a tečnými vektory B' , C' v těchto bodech. $A = [1, 0]$, $B = [3, 2]$, $C = [4.5, 1]$, $A' = (1, 3)$, $B' = (1, -4)$, $C' = (2.5, 1)$.

Řešení: Dle (2.1) je $P(t) = F_0(t)[1, 0] + F_1(t)[3, 2] + F_2(t)(1, 3) + F_3(t)(1, -4)$; $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

tj. $P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)[1, 0] + (-2t^3 + 3t^2)[3, 2] + (t^3 - 2t^2 + t)(1, 3) + (t^3 - t^2)(1, -4)$.

Spočítáme zvlášť první a druhou složku bodu $P(t)$:

$$P_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 + 3(-2t^3 + 3t^2) + t^3 - 2t^2 + t + t^3 - t^2 = -2t^3 + 3t^2 + t + 1$$

$$P_2(t) = 0 + 2(-2t^3 + 3t^2) + 3(t^3 - 2t^2 + t) - 4(t^3 - t^2) = -5t^3 + 4t^2 + 3t$$

a dostaneme tedy $P(t) = [P_1(t), P_2(t)] = [-2t^3 + 3t^2 + t + 1, -5t^3 + 4t^2 + 3t]$.

$$P'(t) := \frac{dP}{dt}(t) = \left(\frac{dP_1}{dt}(t), \frac{dP_2}{dt}(t) \right) = (-6t^2 + 6t + 1, -15t^2 + 8t + 3).$$

Nyní stejně pro $Q(t)$:

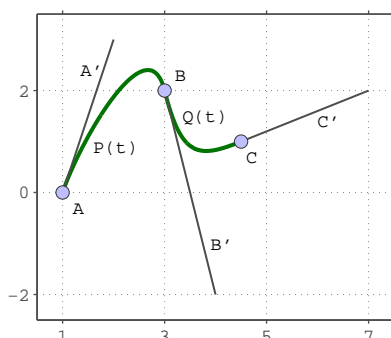
$$Q(t) = F_0(t)[3, 2] + F_1(t)[4.5, 1] + F_2(t)(1, -4) + F_3(t)(2.5, 1); \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

$$Q_1(t) = 3(2t^3 - 3t^2 + 1) + 4.5(-2t^3 + 3t^2) + t^3 - 2t^2 + t + 2.5(t^3 - t^2) = \frac{1}{2}t^3 + t + 3$$

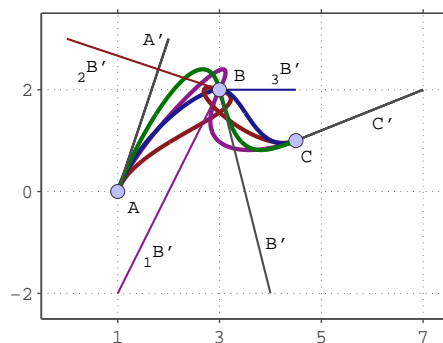
$$Q_2(t) = 2(2t^3 - 3t^2 + 1) - 2t^3 + 3t^2 - 4(t^3 - 2t^2 + t) + t^3 - t^2 = -t^3 + 4t^2 - 4t + 2$$

$$Q(t) = \left[\frac{1}{2}t^3 + t + 3, -t^3 + 4t^2 - 4t + 2 \right].$$

$$Q'(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + 1, -3t^2 + 8t - 4 \right); \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$



Obrázek 2.3: Fergusonovy kubiky z příkladu 11.



Obrázek 2.4: Změny tečného vektoru B' křivky v bodě B

Obrázek 2.4. znázorňuje postupnou změnu tečného vektoru B' na vektory ${}_1B'$, ${}_2B'$, ${}_3B'$ v bodě navázání dvou segmentů Fergusonovy kubiky.

Příklad 2.1.12 Určete rovnici Fergusonovy kubiky $Q(t)$ pro body $A = [1, 0, 0]$, $B = [2, 2, 2]$ a tečné vektory v těchto bodech $A' = (-1, 3, 1)$, $B' = (-0.5, 1, -2)$.

Řešení:

Dle (2.1): $Q(t) = F_0(t)[1, 0, 0] + F_1(t)[2, 2, 2] + F_2(t)(-1, 3, 1) + F_3(t)(-0.5, 1, -2)$; $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Vypočítejme zvlášť složky bodu $Q(t)$:

$$Q_1(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1) + 2(-2t^3 + 3t^2) - (t^3 - 2t^2 + t) - \frac{1}{2}(t^3 - t^2) = -\frac{7}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - t + 1$$

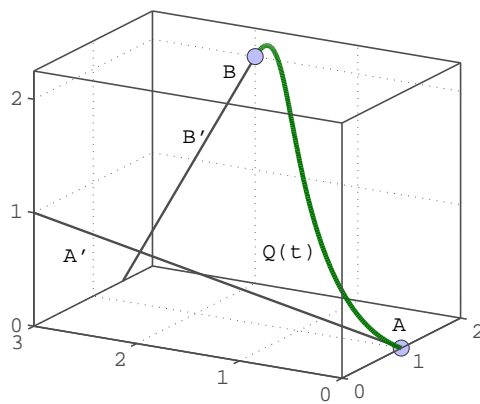
$$Q_2(t) = 0 + 2(-2t^3 + 3t^2) + 3(t^3 - 2t^2 + t) + (t^3 - t^2) = -t^2 + 3t$$

$$Q_3(t) = 0 + 2(-2t^3 + 3t^2) + (t^3 - 2t^2 + t) - 2(t^3 - t^2) = -5t^3 + 6t^2 + t$$

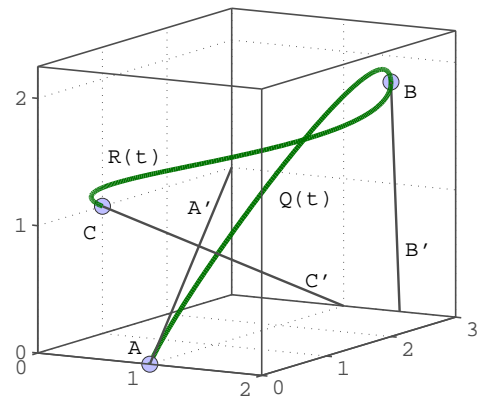
Tedy dostaneme:

$$Q(t) = [Q_1, Q_2, Q_3] = [-\frac{7}{2}t^3 + \frac{11}{2}t^2 - t + 1, -t^2 + 3t, -5t^3 + 6t^2 + t]; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Výsledky příkladů 2.1.11 a 2.1.12 lze získat spuštěním programu *FergusonovaKubika*, který je popsán na straně 21.



Obrázek 2.5: Fergusonova kubika z příkladu 12.



Obrázek 2.6: Navázání další Fergusonovy kubiky v bodě B spojitostí C^1 .

Příklad 2.1.13 Určete, kdy Fergusonova kubika $Q(t)$, zadaná body A, B a tečnými vektory A', B' v těchto bodech, degeneruje na křivku druhého stupně. $A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$, $A' = (a, a)$, $B' = (b, -b)$; $a, b > 0$.

Řešení: Vyjdeme z rovnic (1) a (2). Máme určit a a b tak, aby koeficienty u členu t^3 byly rovny nule - pokud je to možné.

Tedy máme:

$$2A - 2B + A' + B' = o$$

tj.

$$\left. \begin{array}{l} -4 + a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{array} \right\} a = b = 2$$

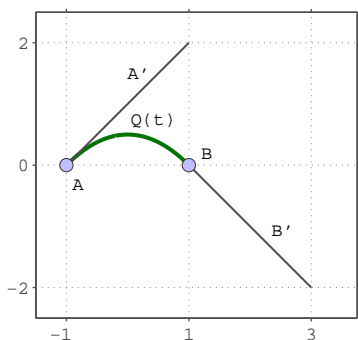
Vzhledem k rovnicím (1) a (2) má získaná křivka vyjádření

$$Q(t) = F_0(t)[-1, 0] + F_1(t)[1, 0] + F_2(t)(2, 2) + F_3(t)(2, -2)$$

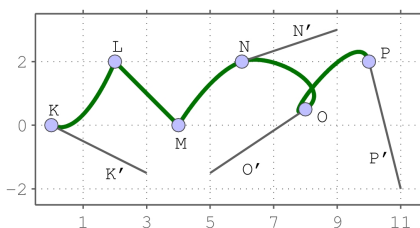
tj.

$$x = 2t - 1, \quad y = -2t^2 + 2t; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a po převedení na explicitní tvar dostaneme $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$; $x \in \langle -1, 1 \rangle$.



Obrázek 2.7: Fergusonova kubika z příkladu 13.



Obrázek 2.8: Navázání několika Fergusonových kubik, s nulovými tečnými vektory a spojitostí C^1 .

Na obrázku 2.8. je znázorněno navazování Fergusonových kubik v rovině. Vždy vektor v koncovém bodě jednoho segmentu splývá s vektorem v počátečním bodě následujícího segmentu. Můžeme sledovat, jak v takovém případě ovlivní nulové tečné vektory v koncových bodech chování výsledné křivky.

2.2 Bézierova křivka

Bézierova křivka je aproximační křivka, která je velmi hojně používána v počítačové grafice. Její konstrukce stojí na intuitivním geometrickém algoritmu *de Casteljau*. Tento algoritmus umožňuje geometrickou konstrukci a úpravu křivky na základě jejího tvaru - pomocí změny bodů kontrolního polygonu, který Bézierovu křivku určuje. Doba vzniku Bézierových křivek se datuje na přelom padesátých a šedesátých let minulého století, kdy Paul de Casteljau a Pierre Bézier objevovali teorii těchto křivek. S Bézierovými křivkami se můžeme setkat například při popisu TrueType (kvadratické křivky) a postscriptových (kubické křivky) fontů.

Definice 2.2.14(Bézierova křivka) Bézierova křivka $Q(t)$ n -tého stupně je určena posloupností $n + 1$ bodů A_i , které tvoří kontrolní polygon, a vztahem

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) A_i ; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.5)$$

kde $B_i^n(t)$ jsou Bernsteinovy polynomy n -tého stupně tvaru:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} ; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

kde dodefinujeme následující výrazy: $\binom{n}{i} := \frac{n!}{(n-i)!i!}$, $\binom{n}{0} := 1$, $0^0 := 1$.

Definice je uvedena například v [6], [10].

Poznámka: Při práci v prostředí MatLab se často používá maticový zápis, který má tvar

$$Q(t) = TBA = \underbrace{\begin{pmatrix} t^n & t^{n-1} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}}_T B \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}}_A \quad (2.7)$$

kde B je čtvercová matice typu $(n+1) \times (n+1)$,

$$B = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-2} & -n & 1 \\ (-1)^{n+1}n & (-1)^n n(n-1) & (-1)^{n-1}n\binom{n-1}{2} & \dots & -n(n-1) & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy například pro Bézierovu křivku 3. stupně

$$Q(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

V následující tabulce 2.1 jsou vypočítány Bernsteinovy polynomy stupně 0, 1, 2 a 3 vždy pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$B_0^0(t) = 1$	$B_0^1(t) = 1 - t$	$B_0^2(t) = (1 - t)^2$	$B_0^3(t) = (1 - t)^3$
	$B_1^1(t) = t$	$B_1^2(t) = 2t(1 - t)$	$B_1^3(t) = 3t(1 - t)^2$
		$B_2^2(t) = t^2$	$B_2^3(t) = 3t^2(1 - t)$
			$B_3^3(t) = t^3$

Tabulka 2.1: Bernsteinovy polynomy stupně 0, 1, 2 a 3

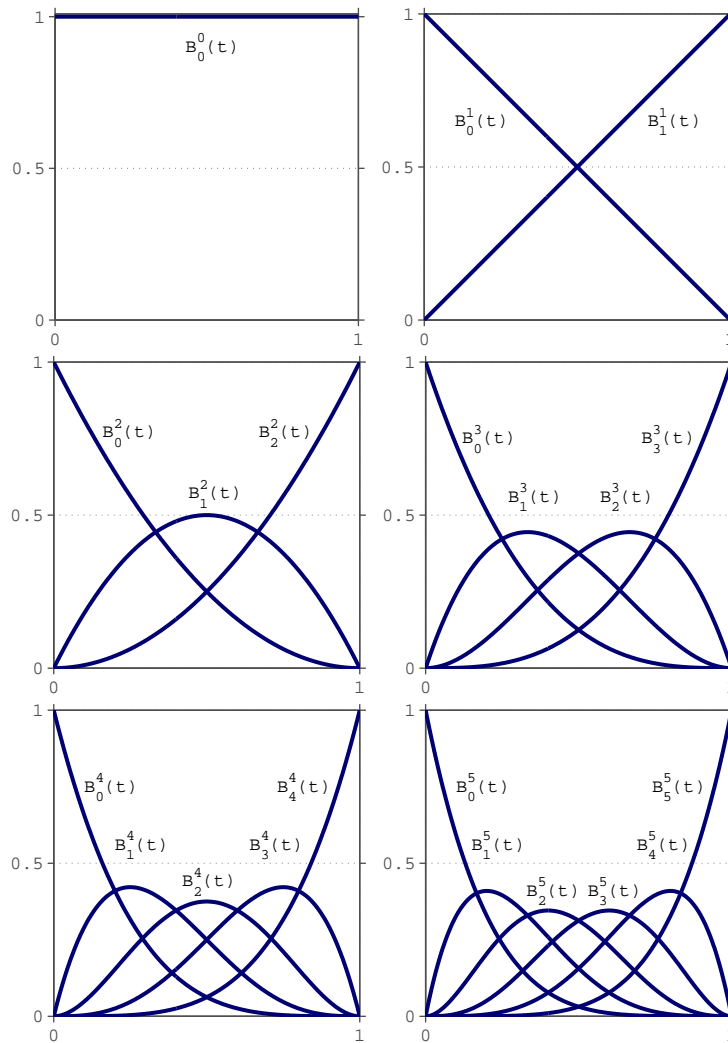
Bernstenovy polynomy nultého až pátého stupně jsou znázorněny na obrázku 2.9.

Tvrzení 2.2.15 *Bézierova křivka určená posloupností $n+1$ bodů kontrolního polygonu A_0, A_1, \dots, A_n prochází bodem A_0 a bodem A_n pro $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Nechť body A_0, A_1, \dots, A_n jsou body kontrolního polygonu určujícího Bézierovu křivku $Q(t)$. Protože $B_0^n(0) = 1$ a $B_i^n(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, platí $Q(0) = A_0$. Stejně $B_n^n(1) = 1$, $B_i^n(1) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, tedy $Q(1) = A_n$. \square

Tvrzení 2.2.16 *Je-li Bézierova křivka $Q(t)$ určená body kontrolního polygonu A_0, A_1, \dots, A_n , pak*

- (a) *vektor A_0A_1 a tečný vektor křivky $Q(t)$ v bodě $t = 0$ jsou lineárně závislé*
- (b) *vektor $A_{n-1}A_n$ a tečný vektor křivky $Q(t)$ v bodě $t = 1$ jsou lineárně závislé.*



Obrázek 2.9: Bernsteinovy polynomy nultého až pátého stupně

Důkaz. Spočteme $Q'(0) := \frac{dQ}{dt}(0)$. $(B_0^n)'(0) = -n$, $(B_1^n)'(0) = n$, $(B_i^n)'(0) = 0$, $i = 2, \dots, n$. Tedy $Q'(0) = n(A_1 - A_0)$. Stejně pro $Q'(1) := \frac{dQ}{dt}(1)$. $(B_{n-1}^n)'(1) = -n$, $(B_n^n)'(1) = n$, $(B_i^n)'(1) = 0$, $i = 0, \dots, n - 2$. Tedy $Q'(1) = n(A_n - A_{n-1})$. \square

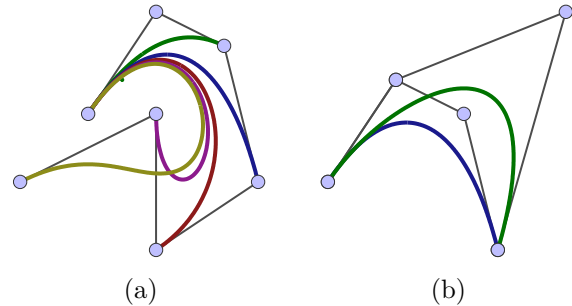
Tvrzení 2.2.17 *Bézierova křivka je invariantní vůči afinní transformaci.*

Důkaz. Prvně si uvědomíme, že $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1$.

Nechť je dána Bézierova křivka $Q(t)$ body kontrolního polygonu A_0, A_1, \dots, A_n a afinní zobrazení, které $x \mapsto \tilde{x} = Mx + m$. Nechť je křivce $Q(t)$ tímto zobrazením přiřazena křivka $R(t)$ a bodu A_i bod \tilde{A}_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Pak $R(t) = MQ(t) + m$ a $\tilde{A}_i = MA_i + m$. Nechť $S(t)$ je Bézierova křivka daná body \tilde{A}_i . Potom $S(t) = \sum_{i=0}^n (MA_i + m)B_i^n(t) = M \sum_{i=0}^n A_i B_i^n(t) + m \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = MQ(t) + m = R(t)$. \square

Výše uvedená tvrzení lze dohledat například v [2], [3], [9].

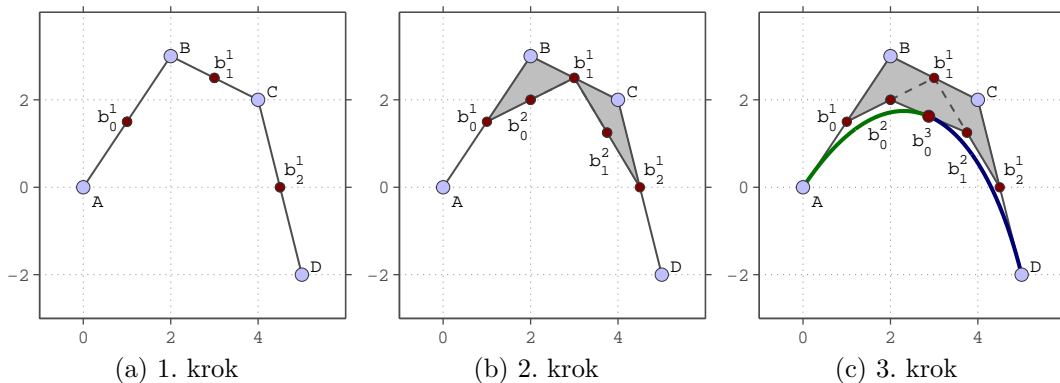
Stupeň Bézierovy křivky se odvíjí od počtu bodů kontrolního polygonu. Pro $(n + 1)$ bodů je její stupeň n . Obrázek 2.10a ilustruje jak stupeň Bézierovy křivky ovlivňuje její přimykání ke kontrolnímu polygonu. Z obrázku 2.10b je zřejmé, že změna jednoho bodu kontrolního polygonu ovlivní průběh celé výsledné křivky. Ze zmíněného vyplývají omezení, která Bézierova křivka má. S rostoucím stupněm se stává nepraktickou a zároveň se celá mění při změně i přidání jediného bodu kontrolního polygonu. Tento fakt výrazně zneprůjemňuje práci s ní, neboť je vždy nutné celou křivku přepočítat.



Obrázek 2.10: Změna Bézierovy křivky zvýšením stupně a posunutím bodu kontrolního polygonu

Pro výpočet (konstrukci) bodů Bézierovy křivky se používá algoritmus *de Casteljau*. Jeho vstupem je $(n + 1)$ bodů kontrolního polygonu A_i , $i = 0, 1, \dots, n$, výstupem bod ležící na Bézierově křivce určené tímto polygonem. Algoritmus počívá v opakované lineární interpolaci. V prvním kroku algoritmu provedeme lineární interpolaci bodů kontrolního polygonu: bereme vždy $t \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $b_j^1(t) = (1-t)A_j + tA_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$. V každém následujícím i -tém kroku vždy provádíme lineární interpolaci bodů na právě vzniklých úsečkách stále pro stejnou hodnotu parametru t : $b_j^i(t) = (1-t)b_j^{i-1}(t) + tb_{j+1}^{i-1}(t)$, $j = 0, 1, \dots, n - i$. V n -tém kroku dostaneme jedinou úsečku $b_0^n(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro zvolenou hodnotu parametru t získáme bod na Bézierově křivce.

Na obrázku 2.11 jsou kroky algoritmu *de Casteljau* znázorněny pro Bézierovu kubiku danou body kontrolního polygonu A, B, C, D pro $t = \frac{1}{2}$. V prvním kroku jsou vyjádřeny body $b_0^1(t), b_1^1(t), b_2^1(t)$ na úsečkách AB, BC, CD . Ve druhém kroku jsou vyjádřeny body $b_0^2(t), b_1^2(t)$ na úsečkách $b_0^1(t)b_1^1(t), b_1^1(t)b_2^1(t)$. Ve třetím, posledním kroku je vyjádřen bod $b_0^3(t)$ na úsečce $b_0^2(t)b_1^2(t)$.



Obrázek 2.11: Kroky algoritmu *de Casteljau* pro $t = \frac{1}{2}$

Tvrzení 2.2.18 Bod $b_0^n(t)$ z výše popsaného algoritmu *de Casteljau* pro zvolené $t \in \langle 0, 1 \rangle$ leží na Bézierově křivce určené body A_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Důkaz. Mějme pevné $t \in \langle 0, 1 \rangle$. $b_0^n(t) = (1-t)b_0^{n-1}(t) + tb_1^{n-1}(t) = (1-t)((1-t)b_0^{n-2}(t) + tb_1^{n-2}(t)) + t((1-t)b_1^{n-2}(t) + tb_2^{n-2}(t)) = (1-t)^2b_0^{n-2}(t) + 2t(1-t)b_1^{n-2}(t) + t^2b_2^{n-2}(t) = \dots = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i} b_i^{n-N}(t)$; $N = 0, 1, \dots, n$,

tj. $b_0^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} b_i^0(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) A_i = Q(t)$. □

Výše uvedená tvrzení lze dohledat například v [2], [3], [9].

Algoritmus *de Casteljau* tedy dělí Bézierovu křivku na dvě části, s kontrolními polygony $A_0 b_0^1(t) b_0^2(t) \dots b_0^n(t)$ a $b_0^n(t) b_1^{n-1}(t) \dots b_{n-1}^1(t) A_n$, jak vidíme i na obrázku 2.11c. Pokud bychom pro nově vzniklé body algoritmus opakovali a dostali bychom se tak na k -tou úroveň opakování, získali bychom z nově vzniklých 2^k kontrolních polygonů lineárně lomenou křivku, která se pro $k \rightarrow \infty$ blíží k Bézierově křivce dané kontrolním polygonem A_0, A_1, \dots, A_n . Na obrázku 2.11c je algoritmus proveden pouze jednou, přesto však již můžeme pozorovat výraznější přimykání křivky k nově vzniklým kontrolním polygonům.

Příklad 2.2.19 Určete parametrické vyjádření Bézierovy kubiky $Q(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, která je dána body řídicího polygonu $A = [0, 0]$, $B = [2, 3]$, $C = [4, 2]$, $D = [5, -2]$.

Řešení: Počet bodů kontrolního polygonu je 4, hledáme tedy opravdu kubickou křivku ($n = 3$). Příklad vyřešíme dvěma způsoby.

Nejprve pomocí algoritmu *de Casteljau*. Provedeme první krok algoritmu - lineární interpolaci bodů kontrolního polygonu - a spočítáme $b_j^1(t)$, $j = 0, 1, 2$ podle vztahu $b_j^1(t) = (1-t)A_j + tA_{j+1}$

$$b_0^1(t) = (1-t)A + tB = (1-t)[0, 0] + t[2, 3] = [2t, 3t]$$

$$b_1^1(t) = (1-t)B + tC = (1-t)[2, 3] + t[4, 2] = [2t + 2, -t + 3]$$

$$b_2^1(t) = (1-t)C + tD = (1-t)[4, 2] + t[5, -2] = [t + 4, -4t + 2]$$

Následně provedeme druhý krok algoritmu, dle vztahu pro bod $b_j^i(t)$:

$$b_j^2(t) = (1-t)b_j^1(t) + tb_{j+1}^1(t), \quad j = 0, 1$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) = (1-t)[2t, 3t] + t[2t + 2, -t + 3] = [4t, -4t^2 + 6t]$$

$$b_1^2(t) = (1-t)b_1^1(t) + tb_2^1(t) = (1-t)[2t + 2, -t + 3] + t[t + 4, -4t + 2] = [-t^2 + 4t + 2, -3t^2 - 2t + 3]$$

A nakonec třetí krok, poslední lineární interpolace bodů minulého kroku:

$$b_0^3(t) = (1-t)b_0^2(t) + tb_1^2(t)$$

Bod křivky $Q(t)$ má tedy vyjádření (pro zvolené $t \in \langle 0, 1 \rangle$):

$$Q(t) = b_0^3(t) = (1-t)[4t, -4t^2 + 6t] + t[-t^2 + 4t + 2, -3t^2 - 2t + 3] = [-t^3 + 6t, t^3 - 12t^2 + 9t]$$

Dále řešíme příklad dle definice (2.6). V tabulce 2.1 najdeme vyjádření Bernsteinových polynomů třetího stupně:

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Potom podle definice Bézierovy křivky (2.5) vyjádříme $Q(t)$:

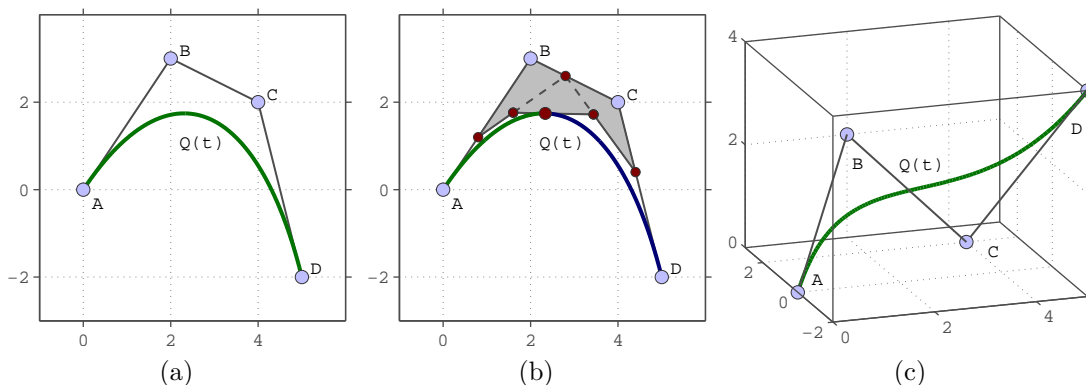
$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t)A_i = (1-t)^3[0, 0] + 3t(1-t)^2[2, 3] + 3t^2(1-t)[4, 2] + t^3[5, -2]$$

Nakonec vypočítáme zvlášť složky bodu $Q(t)$:

$$Q_1(t) = 0 + 2(3t(1-t)^2) + 4(3t^2(1-t)) + 5t^3 = -t^3 + 6t$$

$$Q_2(t) = 0 + 3(3t(1-t)^2) + 2(3t^2(1-t)) - 2t^3 = t^3 - 12t^2 + 9t; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Výsledky příkladu 2.219 lze získat spuštěním programu *BezierovaKrivka*, který je popsán na straně 22. Průběh příkladu je navíc znázorněn v ukázce na straně ??.



Obrázek 2.12: Bézierovy křivky z příkladů 2.2.19. a 2.2.20.

Na obrázku 2.12a vidíme výsledek příkladu 2.2.19, na obrázku 2.12b jeho řešení pomocí algoritmu *de Casteljau*, zde pro $t = \frac{2}{5}$. Na obrázku 2.12c je řešení následujícího příkladu 2.2.20.

Příklad 2.2.20 Určete parametrické vyjádření Bézierovy křivky dané body kontrolního polygonu $A = [0, 0, 0]$, $B = [2, 3, 2]$, $C = [4, 2, 0]$, $D = [5, -2, 4]$.

Řešení: Vypočítejme pomocí algoritmu *de Casteljau*. První krok - lineární interpolace bodů řídicího polygonu:

$$b_0^1(t) = (1-t)[0, 0, 0] + t[2, 3, 2] = [2t, 3t, 2t]$$

$$b_1^1(t) = (1-t)[2, 3, 2] + t[4, 2, 0] = [2t + 2, 3 - t, 2 - 2t]$$

$$b_2^1(t) = (1-t)[4, 2, 0] + t[5, -2, 4] = [t + 4, 2 - 4t, 4t]$$

Druhý krok - lineární interpolace bodů získaných v minulém kroku:

$$b_0^2(t) = (1-t)[2t, 3t, 2t] + t[2t + 2, 3 - t, 2 - 2t] = [4t, -4t^2 + 6t, -4t^2 + 4t]$$

$$b_1^2(t) = (1-t)[2t + 2, 3 - t, 2 - 2t] + t[t + 4, 2 - 4t, 4t] = [-t^2 + 4t + 2, -3t^2 - 2t + 3, 6t^2 - 4t + 2]$$

Třetí krok - opět lineární interpolace bodů získaných v minulém kroku:

$$Q(t) = b_0^3(t) = (1-t)[4t, -4t^2 + 6t, -4t^2 + 4t] + t[-t^2 + 4t + 2, -3t^2 - 2t + 3, 6t^2 - 4t + 2] = [-t^3 + 6t, t^3 - 12t^2 + 9t, 10t^3 - 12t^2 + 2t].$$

Výsledky příkladu 2.2.20 lze získat spuštěním programu *BezierovaKrivka*, který je popsán na straně 22.

Všimněme si, že je splněno tvrzení 2.2.17 o invarianci Bézierovy křivky vůči afinním transformacím: body v příkladu 2.2.20. mají stejné x -ové a y -ové souřadnice jako body v příkladu 2.2.19. Ty jsou proto průmětem bodů z příkladu 2.2.20. do roviny (x, y) . Výsledná křivka z příkladu 2.2.19. je také průmětem křivky z příkladu 2.2.20. do roviny (x, y) .

Bézierova křivka se se zvyšujícím se stupněm stává nepraktickou, proto je pro více bodů výhodné navázat několik Bézierových křivek nižšího stupně. V následujícím příkladě spočítáme napojení Bézierových křivek druhého a třetího stupně s různými typy spojitosti.

Příklad 2.2.21 Bézierova křivka 2. stupně $P(t)$ je dána body kontrolního polygonu $A = [0, 0], B = [0, 2], C = [2, 3]$. Bézierova kubika $Q(t)$ je dána body kontrolního polygonu $K = [2, 3], L = [u, v], M = [6, 3], N = [4, 0]$; $u, v \in \mathbb{R}$ a podmínkou:

(a) napojení křivek $P(t)$ a $Q(t)$ je spojitosti G^1

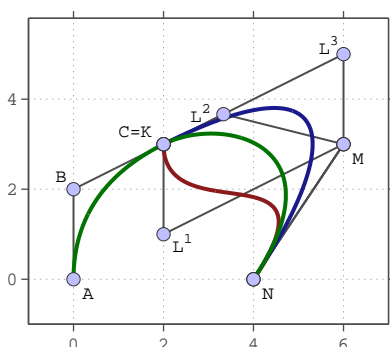
(b) napojení křivek $P(t)$ a $Q(t)$ je spojitosti C^1

Dourčete souřadnice bodu L kontrolního polygonu křivky $Q(t)$.

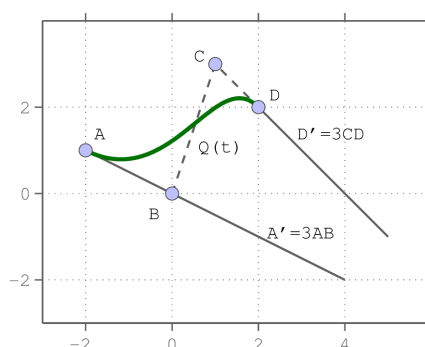
Řešení: V obou případech budeme zkoumat vztah tečného vektoru $P'(t)$ v koncovém bodě křivky $P(t)$ a tečného vektoru $Q'(t)$ v počátečním bodě křivky $Q(t)$. Ty získáme rychle, podle tvrzení 2.2.16. totiž platí $P'(1) = 2(C - B) = (4, 2)$ a $Q'(0) = 3(L - K) = 3(u - 2, v - 3)$.

(a) Pro spojitost G^1 potřebujeme, aby vektory $P'(1)$ a $Q'(0)$ byly lineárně závislé, tedy aby $3(u - 2, v - 3) = k(4, 2)$; $k \neq 0$. Z toho vyplývá, že bod L musí ležet na přímce $p : [u, v] = [\frac{1}{3}(4k + 6), \frac{1}{3}(2k + 9)]$; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Pro spojitost C^1 potřebujeme, aby se vektory $P'(1)$ a $Q'(0)$ rovnaly, tj. aby bylo $k = 1$, tedy $L = [u, v] = [\frac{10}{3}, \frac{11}{3}]$.



Obrázek 2.13: Navázání Bézierových křivek různými typy spojitosti



Obrázek 2.14: Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou

Na obrázku 2.13 je vyobrazeno navázání Bézierových křivek z příkladu 2.2.21. První křivka je dána body kontrolního polygonu A, B, C , druhá body kontrolního polygonu K, L^1 (resp. L^2, L^3), M . Křivky jsou navázány spojitostí C^0 (resp. C^1, G^1).

Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou

Z tvrzení 2.2.16. víme, že pro Bézierovu kubiku $R(t)$ danou body A, B, C, D má tečný vektor $R'(t)$ v počátečním bodě tvar $R'(0) = 3(B - A)$ a v koncovém bodě $R'(1) = 3(D - C)$. Pokud tedy chceme zadat Fergusonovu kubiku $S(t)$ tak, aby $R(t) = S(t)$, zadáme ji body A, D a tečnými vektory $3(B - A), 3(D - C)$ v těchto bodech.

Obrázek 2.14 ilustruje vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou: Bézierova kubika zadaná body A, B, C, D a jí odpovídající Fergusonova kubika zadaná body A, D a příslušnými tečnými vektory $3AB$ a $3CD$.

Racionální Bézierova křivka

U samotné Bézierovy křivky není žádná možnost, jak ovlivňovat její tvar lokálně. Křivka mění tvar pouze při změně (přidání, ubraní) bodu kontrolního polygonu. Racionalizací Bézierovy křivky z (2.5) je přidána možnost ovlivnit, nakolik se ke kterému z bodů kontrolního polygonu křivka přimyká. Je potom například možné, aby Bézierova křivka 2. stupně tvořila i část elipsy, kružnice a hyperboly, nejen paraboly. Každému bodu totiž můžeme přiřadit váhu, která udává míru přimykání křivky k příslušnému bodu.

Definice 2.2.22(Racionální Bézierova křivka) Racionální Bézierova křivka $Q(t)$ n -tého stupně je určena posloupností $n + 1$ bodů A_i , které tvoří kontrolní polygon, a vztahem

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n R_i^n(t) A_i ; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.9)$$

kde $R_i^n(t)$ jsou racionální Bernsteinovy polynomy n -tého stupně tvaru:

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} ; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \omega_i \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.10)$$

kde $B_i^n(t)$ jsou Bernsteinovy polynomy n -tého stupně a ω_i je váha přiřazená bodu A_i .

Definice je uvedena například v [2].

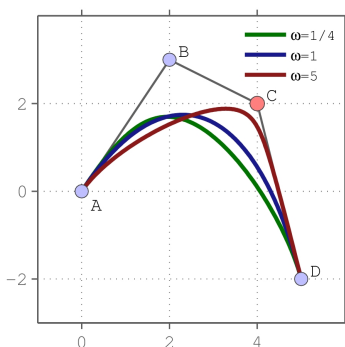
Obrázek 2.15 znázorňuje změnu váhy u bodu C racionální Bézierovy křivky zadané body kontrolního polygonu A, B, C, D s vahami u bodů A, B, D rovnými jedné. Obrázek 2.16 ilustruje řešení následujícího příkladu 2.2.23.

Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

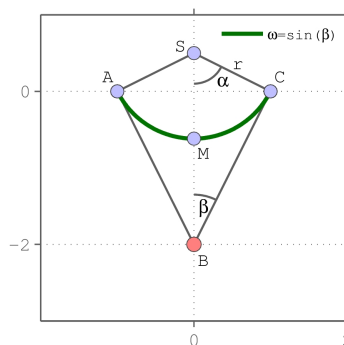
Každá křivka druhého stupně je kuželosečka. Pro tři nekolineární body kontrolního polygonu dostáváme Bézierovu křivku druhého stupně.

Podívejme se, že pokud není Bézierova křivka druhého stupně racionální, pak může být pouze částí paraboly. Bézierovu křivku druhého stupně vyjádříme (v tabulce 2.1 máme připraveny Bernsteinovy polynomy):

$$Q(t) = (1-t)^2 A + 2t(1-t)B + t^2 C = (A - 2B + C)t^2 + (-2A + 2B)t + A = at^2 + bt + c$$



Obrázek 2.15: Racionální Bézierova kubika



Obrázek 2.16: Racionální Bézierova křivka 2. stupně z příkladu 2.2.24.

A, B, C jsou nekolineární, tedy $A - B \neq B - C$ a proto $a \neq 0$. Vyjdeme-li z parametrizace paraboly $P(t) = (t, t^2)$, dostaneme se reparametrizací k obecnému vyjádření $Q(t) = at^2 + bt + c$, $a \neq 0$. Viz. například [3].

Ostatní kuželosečky tedy nelze pomocí Bézierovy křivky bez její racionalizace získat.

Příklad 2.2.23 Racionální Bézierova křivka 2. stupně $Q(t)$ je daná body kontrolního polygonu A, B, C . Klasifikujte křivku podle parametru ω - váhy u bodu B . Váhy u bodů A a C jsou rovny jedné.

Řešení: Pro $\omega = 0$ jde o úsečku AC , předpokládejme tedy, že $\omega \neq 0$. Bernsteinovy polynomy 2. stupně máme v tabulce 2.1.

$$\text{Pomocí nich křivku vyjádříme: } Q(t) = \frac{(1-t)^2 A + 2t(1-t)\omega B + t^2 C}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\omega + t^2}$$

Nyní rozebereme jmenovatele $J(t)$ křivky $Q(t)$ v závislosti na koeficientu ω s užitím projektivních vlastností kuželoseček, uvedených například v [5]

$J(t) := (1-t)^2 + 2t(1-t)\omega + t^2 = 2t^2(1-\omega) + 2t(\omega-1) + 1$, tedy $D = 4(\omega-1)(\omega+1)$:
 $\omega \in (0, 1) : J(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(t)$ je část elipsy nebo ve speciálním případě kružnice

$\omega = 1 : J(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(t)$ je neracionální Bézierova křivka, tj. část paraboly

$\omega > 1 : \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : J(t_1) = 0 \wedge J(t_2) = 0 \Rightarrow Q(t)$ je část hyperboly

Příklad 2.2.24 Racionální Bézierova křivka 2. stupně $Q(t)$ je daná body kontrolního polygonu $A = [-1, 0], B = [0, -b], C = [1, 0], b > 0$. Určete hodnotu váhy ω u bodu B tak, aby křivka byla částí kružnice. Váhy u bodů A a C jsou rovny jedné.

Řešení: Využijeme příkladu 2.2.23. Víme tedy už, že musí být $\omega \in (0, 1)$. Prvně najdeme souřadnice bodu $Q(\frac{1}{2})$, který leží na ose y :

$$M := Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A+2\omega B+C}{2(\omega+1)} = [0, -m], \quad -m = \frac{\omega(-b)}{\omega+1} \Rightarrow \omega = \frac{m}{b-m}$$

Tečné vektory v koncových bodech A, C musí být kolmé na spojnici příslušného koncového bodu a středu S kružnice $K(t)$, jíž je křivka $Q(t)$ částí. Střed S musí také ležet na ose symetrie oblouku křivky, můžeme tedy označit $S = [0, s]$, $s \in \mathbb{R}$. Dále označíme $\beta := \frac{1}{2}|\angle ABC|$, $\alpha := \frac{\pi}{2} - \beta$, $r := |SC|$. Nyní tedy platí

$\alpha = |\angle BSC|$.

Dále: $m = r - s = r - r \sin \beta$, $b - m = b + s - r = \frac{r}{\sin \beta} - r = \frac{r - r \sin \beta}{\sin \beta}$.

Proto: $\omega = (r - r \sin \beta) \left(\frac{\sin \beta}{r - r \sin \beta} \right) = \sin \beta$, což je pro body A, B, C v závislosti na parametru b : $\omega = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}}$

2.3 Coonsova kubika

Definice 2.3.25(Coonsova kubika) Necht' jsou dány čtyři řídicí body A_0, A_1, A_2 a A_3 . Potom je vektorová rovnice Coonsovy kubiky $Q(t)$:

$$Q(t) = C_0(t)A_0 + C_1(t)A_1 + C_2(t)A_2 + C_3(t)A_3; \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.11)$$

kde bázové funkce $C_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, jsou Coonsovy polynomy třetího stupně a platí

$$\begin{aligned} C_0(t) &= \frac{1}{6}(1-t)^3 \\ C_1(t) &= \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) \\ C_2(t) &= \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) \\ C_3(t) &= \frac{1}{6}t^3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Poznámka: Při modelování na počítači (v prostředí MatLab) se často se využívá maticový zápis, který má tvar

$$Q(t) = \frac{1}{6}TCA = \frac{1}{6} \underbrace{\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}}_A$$

Tvrzení 2.3.26 *Je-li Coonsova kubika dána body A_0, A_1, A_2 a A_3 , potom je $Q(0) = \frac{1}{6}(A_0 + 4A_1 + A_2)$ počáteční bod této kubiky a $Q(1) = \frac{1}{6}(A_1 + 4A_2 + A_3)$ její koncový bod. Dále tečné vektory v těchto bodech mají tvar $Q'(0) = \frac{1}{2}(A_2 - A_0)$ a $Q'(1) = \frac{1}{2}(A_3 - A_1)$.*

Důkaz. $C_0(0) = \frac{1}{6}$, $C_1(0) = \frac{1}{6} \cdot 4$, $C_2(0) = \frac{1}{6}$, $C_3(0) = 0 \rightarrow Q(0) = \frac{1}{6}(A_0 + 4A_1 + A_2)$

$C_0(1) = 0$, $C_1(1) = \frac{1}{6}$, $C_2(1) = \frac{1}{6} \cdot 4$, $C_3(1) = \frac{1}{6} \rightarrow Q(1) = \frac{1}{6}(A_1 + 4A_2 + A_3)$
 $C'_0(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^2$, $C'_1(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 6t)$, $C'_2(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 2t + 1)$, $C'_3(t) = \frac{1}{2}t^2$
 $C'_0(0) = -\frac{1}{2}$, $C'_1(0) = 0$, $C'_2(0) = \frac{1}{2}$, $C'_3(0) = 0 \rightarrow Q'(0) = \frac{1}{2}(A_2 - A_0)$
 $C'_0(1) = 0$, $C'_1(1) = -\frac{1}{2}$, $C'_2(1) = 0$, $C'_3(1) = \frac{1}{2} \rightarrow Q'(1) = \frac{1}{2}(A_3 - A_1) \quad \square$

Tvrzení je uvedeno například v [6].

Poslední tvrzení znamená, že počáteční bod kubiky leží v tzv. antitěžišti trojúhelníka $A_0A_1A_2$, koncový pak v antitěžišti trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Zároveň ukazuje, že

tečný vektor v počátečním bodě je lineárně závislý s vektorem A_0A_2 a navíc má poloviční velikost, tečný vektor v koncovém bodě je v tomtéž vztahu k vektoru A_1A_3 .

Poznámka: Antitěžiště trojúhelníka ABC je bod ležící na těžnici t_b ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ její délky od vrcholu B .

Příklad 2.3.27 Vypočítejte Coonsovou kubiku zadanou body $K = [0, 0]$, $L = [2, 3]$, $M = [4, 2]$, $N = [5, -2]$.

Řešení: Budeme postupovat podle definice:

$$Q(t) = \frac{1}{6}((1-t)^3K + (3t^3 - 6t^2 + 4)L + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)M + t^3N)$$

$$Q_1(t) = \frac{1}{6}(2(3t^3 - 6t^2 + 4) + 4(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + 5t^3)$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{6}(3(3t^3 - 6t^2 + 4) + 2(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) - 2t^3)$$

$$Q_1(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 12t + 12)$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{6}(t^3 - 12t^2 + 6t + 14)$$

Coonsova kubika daná těmito body má proto tvar

$$Q(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 12t + 12, t^3 - 12t^2 + 6t + 14)$$

Vztah mezi Coonsovou a Fergusonovou kubikou

Díky tvrzení 2.3.26. máme vyjádřeny koncové body a tečné vektory v těchto bodech. Pro ztotožnění Coonsovy kubiky dané body A_0, A_1, A_2, A_3 s Fergusonovou kubikou proto stačí zadat Fergusonovu kubiku body $K = \frac{1}{6}(A_0 + 4A_1 + A_2)$, $L = \frac{1}{6}(A_1 + 4A_2 + A_3)$ a tečnými vektory v těchto bodech $K' = \frac{1}{2}(A_2 - A_0)$, $L' = \frac{1}{2}(A_3 - A_1)$.

3. Kapitola

Algoritmy a experimentální vyhodnocení

3.1 Souhrn programů

V následující tabulce jsou vypsané programy implementované v prostředí MatLab s popisem jejich vstupů, účelu a využívaných funkcí.

program	vstup	funkce, které používá	popis
FergusonovaKubika	–	NactiData	spočítá a vykreslí FK
BezierovaKrivka	–	NactiData, BernsteinovyPolynomy	spočítá a vykreslí BK
CoonsovaKubika	–	NactiData	spočítá a vykreslí CK
NactiData	–	ZiskejDimenzi, ZiskejZpusobZadani, ZiskejPocet, NactiBody	načte data, která jsou na vstupu programů
BernsteinovyPolynomy	stupeň	–	spočítá matici koeficientů Bernsteinových polynomů stupně n

3.2 Společné prvky programů

V této části textu se zaměříme na popis algoritmů a struktur, které využívají všechny uvedené programy. Při samotném rozboru algoritmů se tomuto společnému základu již nebudeme věnovat.

Načtení dat

Načítání dat zajišťuje funkce *NactiData*. Ta je rozdělena na tři části – načtení dimenze, načtení způsobu, jakým budou body zadány a samotné načtení bodů. Program ošetřuje nesprávné hodnoty vstupu, což je ukázáno později na příkladě [číslo].

Volbu dimenze zajišťuje funkce *ZiskejDimenzi*. Ta nemá žádný vstupní parametr, uživatel je vyzván k volbě mezi dimenzí 2 (body v rovině) a 3 (body v prostoru).

Volba způsobu zadání bodů je zajištěna funkcí *ZiskejZpusobZadani*. Vstupním parametrem této funkce je zvolená dimenze. Je možné body zadat pomocí souřadnic a nebo graficky (pouze u rovinného případu). Dále je poskytnuta možnost použít připravené body.

Samotné zadávání bodů probíhá u grafického zadávání i zadávání souřadnicemi stejně. Program čeká na načtení všech bodů. U grafického zadávání je zadání posledního bodu odlišeno stiskem jiného (levého) tlačítka myši, u zadávání souřadnicemi se program uživatele předem zeptá, kolik bodů chce zadat.

Reprezentace a vykreslení křivek

Body jsou v programech vždy reprezentovány maticí, kde má každý bod vlastní řádek a jeho i -tá souřadnice je v i -tém sloupci matice. Jak již bylo zmíněno v části *Úvod do studia křivek*, při reprezentaci křivek v počítači se pro vykreslení vždy používá po částech lineární interpolace bodů křivky. Je-li dělení intervalu, na kterém je křivka vykreslována, dostatečně jemné, lidské oko ji pak vnímá jako hladkou. Každou křivku proto reprezentujeme posloupností bodů, které na ní leží. V našem případě je jich *PocetDeli*. Taková posloupnost je jednoduše zachycena maticí bodů, která má potom velikost $PocetDeli \times dimenze$.

Před zobrazením křivky jsou nejprve vypočítána maxima a minima, kterých křivka na daném intervalu nabývá (tento úkon je vynechán v případě grafického zadávání bodů). Důvodem je vykreslení vhodné části roviny (resp. prostoru). Pro vykreslení lineárních segmentů, které jsou interpolacemi spočítaných bodů křivky, je vždy použit jeden cyklus. Stejně tak pro vykreslení bodů a tečných vektorů, kterými je křivka určena a kterých je podle počáteční uživatelské volby *PocetBodu*.

3.3 Výpočet a vykreslení Fergusonovy kubiky

K výpočtu a vykreslení Fergusonovy kubiky slouží program *FergusonovaKubika*, kterým se teď budeme zabývat.

Je připravena matice H Hermitových polynomů o velikosti 4×4 a matice T parametru t v mocninách od 0 do 3. Matice T má velikost podle počtu intervalů, na kterých provádíme lineární interpolaci bodů křivky, $PocetDeli \times 4$. Podle počtu bodů na vstupu (označme n) je určen počet segmentů Fergusonovy kubiky ($n-1$). Pro každý segment je prováděn následující výpočet: Jsou vybrány ty dva body (A, B) a tečné vektory (A', B') , které danému segmentu přísluší. Dále je vytvořena speciální matice *BodyVektory* ve tvaru $(A; B; A'; B')$. Poté jsou vypočítány body Fergusonovy kubiky tohoto segmentu dle definice $- T * H * BodyVektory$.

```

1 H = [2, -2, 1, 1; -3, 3, -2, -1; 0, 0, 1, 0; 1, 0, 0, 0];
2 t = linspace(0, 1, PocetDeli)';
3 T = [t.^3, t.^2, t, ones(PocetDeli, 1)];
4 FergusonKubika = ones(PocetDeli, Dimenze, PocetBodu - 1);
5 for ii = 1:PocetBodu - 1
6     BodySegmentu = Body(ii:ii+1, :);
7     TecneVektorySegmentu = TecneVektory(ii:ii+1, :);
8     BodyVektory = [BodySegmentu; TecneVektorySegmentu];
9     FergusonKubika(:, :, ii) = T * H * BodyVektory;
10 end

```

Výpočet Fergusonovy kubiky

3.4 Výpočet a vykreslení Bézierovy křivky

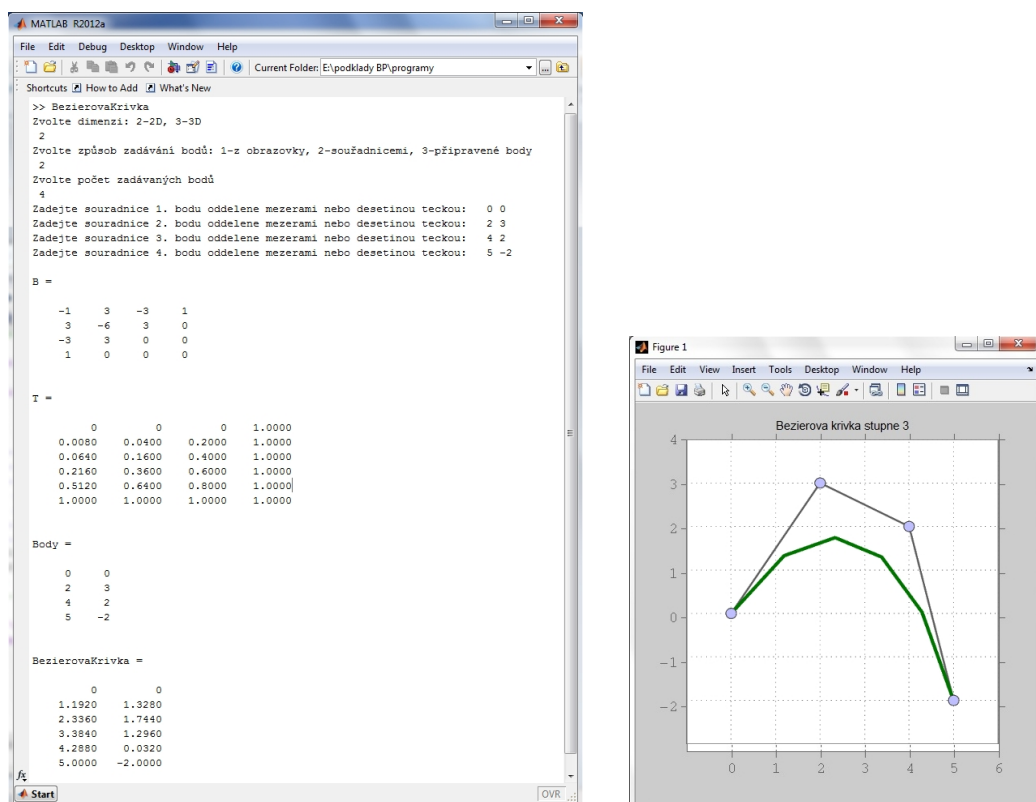
Nyní rozebereme tu část programu *BezierovaKrivka*, ve které probíhá samotný výpočet bodů křivky.

Nejprve je potřeba vypočítat matici B Bernsteinových polynomů příslušného stupně (n). Tu počítá funkce *BernsteinovyPolynomy*. Poté je vypočítána matice T , kde jsou hodnoty koeficientu t až do příslušné mocniny (n). Má velikost podle počtu intervalů, na kterých provádíme lineární interpolaci bodů křivky – $PocetDeli \times (n + 1)$. Nakonec stačí podle definice vynásobit tyto dvě matice a matici *Body* zadaných bodů – $T * B * Body$.

```
B = BernsteinovyPolynomy(PocetBodu-1);
2 t = linspace(0,1,PocetDeli)';
T = ones(PocetDeli,PocetBodu);
4 for ii = 1:PocetBodu
    T(:,ii) = t.^(PocetBodu-ii);
6 end
BezierovaKrivka = T*B*Body(1:PocetBodu,:);
```

Výpočet Bézierovy křivky

Ukázka 3.4.28 *Chceme-li zobrazit a vypočítat Bézierovu křivku danou body kontrolního polygonu $A = [0, 0]$, $B = [2, 3]$, $C = [4, 2]$, $D = [5, -2]$, budou výstupy programu vypadat takto:*



Obrázek 3.1: Grafická okna k ukázce 3.4.28 pro $PocetDeli = 6$

Ukázka patří k příkladu 2.2.19 řešenému na straně 13

3.5 Výpočet a vykreslení Coonsovy kubiky

Budeme zkoumat program *CoonsovaKubika*, který Coonsovu kubiku počítá.

Prvně je připravena matice C Coonsových polynomů. Poté je vypočítána matice T , kde jsou hodnoty parametru t v mocninách od 0 do 3. Má velikost podle počtu intervalů, na kterých provádíme lineární interpolaci bodů křivky – $PocetDeli \times 4$. Dále jsou vybrány ty čtyři body, které přísluší danému segmentu (*BodySegmentu*). Nakonec stačí podle definice tyto matice vynásobit – $\frac{1}{6} * T * B * BodySegmentu$. Pro názornost obrázku, který je výstupem, jsou navíc vypočítány body navázání jednotlivých segmentů *BodyNavazani* a tečné vektory v těchto bodech *VektoryVBodech*.

```
1 C = [-1,3,-3,1;3,-6,3,0;-3,0,3,0; 1,4,1,0];
2 t = linspace(0,1,PocetDeli)';
3 T = [t.^3, t.^2, t, ones(PocetDeli,1)];
4 CoonsovaKubika = ones(PocetDeli,Dimenze,PocetBodu-3);
5 BodyNavazani = ones(PocetBodu-2,Dimenze);
6 VektoryVBodech = ones(PocetBodu-2,Dimenze);
7 KoncBodyVektoru = ones(PocetBodu-2,Dimenze);
8 for ii = 1:PocetBodu-3
9     BodySegmentu = Body(ii:ii+3,:);
10    CoonsovaKubika(:, :, ii) = (1/6) .* T * C * BodySegmentu;
11    BodyNavazani(ii, :) = (1/6) .* (Body(ii, :) + 4 .* Body(ii
+1, :) + Body(ii+2, :));
12    VektoryVBodech(ii, :) = (1/2) .* (Body(ii+2, :) - Body(
ii, :));
13    KoncBodyVektoru(ii, :) = BodyNavazani(ii, :) +
VektoryVBodech(ii, :);
14 end
```

Výpočet Coonsovy kubiky

Závěr

Výsledkem této seminární práce jsou programy, které čtenáři umožňují studovat chování konkrétních křivek a experimentem si tak ověřit jejich vlastnosti.

Zároveň jsme podali přehled nejdůležitějších křivek počítačové grafiky. Přitom jsem se zaměřili především na Fergusonovu kubiku, Bézierovu křivku a Coonsovu kubiku. U každé z křivek je uvedena její definice a vlastnosti a je poskytnuto porovnání křivek pomocí jejich vzájemných vztahů.

Ke všem zmíněným křivkám se váže alespoň jeden obrázek, aby bylo možné si danou křivku lépe představit. Ke každé křivce je připojen jeden nebo více programů. Tyto programy, které jsem implementovala v prostředí MatLab, jsou hlavním přínosem práce. Dovolují totiž čtenáři doprovodit teorii ověřením na konkrétním příkladě a vizualizací problému.

Seminární práce *Modelování křivek na počítači* by měla být přínosem pro studenty a učitele geometrie a středoškolské studenty informatického semináře. Zároveň by měla sloužit jako učební text, který spojuje teoretickou a experimentální stránku teorie křivek.

Literatura

- [1] L. Boček, V. Kubát: Diferenciální geometrie křivek a ploch, 1983, Státní pedagogické nakladatelství
- [2] F. Ježek: Geometrické a počítačové modelování, 2006
- [3] F. Ježek: Numerické a geometrické modelování, 2005
- [4] J. Kobza: Počítačová geometrie, 2008
- [5] M. Lávička: KMA/G2 Geometrie 2, 2006
- [6] I. Linkeová: Základy počítačového modelování křivek a ploch, 2008, Vydavatelství ČVUT v Praze, ISBN 978-80-01-04011-9
- [7] L. Lomtatidze: Historický vývoj pojmu křivka, 2006, Akademické nakladatelství CERM, ISBN 978-80-7204-492-4
- [8] L. Míchal: Křivky v počítačové grafice, 2008
- [9] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: Architectural Geometry, Bentley Institute Press, 2007, ISBN 978-0-415-27820-1
- [10] A. Saxena, B. Sahay: Computer Aided Engineering Design, Anamaya Publishers, 2005, ISBN 978-1-4020-2555-6
- [11] E. Sojka, M. Němec, T. Fabián: Matematické základy počítačové grafiky, VŠB-TU Ostrava, 2011
- [12] V. Souček: Diferenciální geometrie křivek a ploch, 2012