10. setkání

1+1=10

učitelů matematiky všech typů a stupňů škol

Jč / m+f

VYDAVATELSKÝ SERVIS

Pořadatelé konference

Společnost učitelů matematiky, sekce JČMF
suma.jcmf.cz

Česká matematická společnost, sekce JČMF
cms.jcmf.cz

JČMF, pobočka Plzeň
www.jcmf.zcu.cz

Katedra matematiky FAV ZČU
www.kma.zcu.cz

Jazyková korektura nebyla provedena,
za jazykovou správnost odpovídají autoři příspěvků.

O zařazení příspěvků do sborníku rozhodl programový výbor
na základě posouzení vybranými recenzenty.

Rozmnožování a šíření jen se svolením Vydavatelského servisu.

1. vydání

© Miroslav Lávička, Bohumír Bastl, Marie Ausbergerová, 2006

Obsah

Předmluva 7

Plenární přednášky 9

Jiří Herman
Školní vzdělávací program – příležitost nebo hrozba? 11

František Kuřina, Dag Hrubý
Matematika a škola – dvě součásti kultury 19

Luděk Niedermayer
Finance a matematika 27

Ivan Saxl
Pravděpodobnost a statistika v našich životech 37

Příspěvky v sekcích 47

Jindřich Bečvář
Matematika, vzdělanost a vzdělávání 49

Jiří Benedikt
WebMathematica a vědecké výpočty 65

Marie Benediktová
Logika v úvodních kursech matematiky v příkladech 69

Helena Binterová, Václav Dobiáš
GlobalSchool 73

Daniela Bittnerová
Matematika v angličtině na gymnáziu 79

Emil Calda
Pár slov o nekonečných řadách a nekonečnu v matematice na střední
škole 85

Jana Coufalová
Pre- nebo post- aneb co a kdy naučit učitele 91

Jaroslav Černý
Motivace pro aplikovanou geometrii 97

Eduard Fuchs
Zamyšlení nad Školními vzdělávacími programy 103

Petr Girg
webmath.zcu.cz – matematika domů přes internet 109

Milan Hejný
Prostředí, která otevírají svět čísel 115

Jitka Hlaváčková
Průřezová témata ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ 121

Miroslav Hricz
Využití videotechniky ve vyučování matematice a jeho evaluaci 125

Antonín Jančařík
Algoritmické myšlení a jak ho rozvíjet 131

Vladimír Jehlička, Pavla Jindrová
Evaluace výuky matematiky na DFJP UPa 137

Darina Jirotková
Budování konceptuálních představ čísla u dětí ve věku 5–8 let 143

Marika Kafková
Interaktivní metody ve výuce matematiky 151

Jan Kašpar
Program TI InterActive! – vytváření dokumentů o řešení matematických úloh 157

Milada Kočandrlová, Hana Lakomá
Parametrické úlohy – forma samostudia 163

Alena Kopáčková
Počátky diferenciálního a integrálního počtu ve školské matematice 169

Magdalena Krátká
Jak hledat překážky v porozumění nekonečnu 175

Marie Kubínová
Školní vzdělávací program nestačí jen napsat 181

Miroslav Lávička, Jaromír Dobrý
Možnosti využití počítače k podpoře výuky geometrie na technických fakultách 189

Ludmila Machačová, Libor Koudela
Máme rádi matematiku 195

Jarmila Novotná, Marie Hofmannová
Mé šťastné číslo 197

Karel Otruba
$1 + 1 = 10$ Čti „jedna a jedna jsou dvě“ 203

Šárka Pěchoučková
Představy čísla u dětí prvního ročníku 209

Jaroslav Perný
Mentální manipulace se sítí tělesa 215

Otakar Prachař
Co zkoušet z matematiky na vysoké škole technického a ekonomického zaměření? 219

Ludvík Prouza
Zkušenosti s výukou matematiky a fyziky v bakalářské formě studia na DFJP Univerzity Pardubice 225

Jana Příhonská, Jan Grégr
Prostorová představivost a její uplatnění v chemii 231

Jarmila Robová
Současné trendy ve vzdělávání učitelů matematiky 237

Michal Roháček, Pavel Tlustý
Dělitelnost a číselné soustavy – demonstrační program 243

Filip Roubíček
Některé problémy v komunikaci učitel–žák 247

Jana Slezáková
Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let 253

Miroslav Staněk
Výuka nejen matematiky na SOŠ a SOU 259

Naďa Stehlíková
Využití videozáznamů v dalším vzdělávání učitelů matematiky 265

David Stein
Reforma vyučování matematice v USA 271

Veronika Svobodová
Trojrozměrná geometrie v praxi 277

Václav Sýkora
Projekty dalšího vzdělávání učitelů matematiky ve vztahu k tvorbě školních vzdělávacích programů 283

Zdeněk Šíma
Metoda trojkroku v hodině matematiky 289

Marie Tichá
Reflexe a profesionalizace práce učitele 293

Jiří Vaníček
Modelování jednoduchých mechanismů v prostředí dynamické geometrie 301

Zuzana Voglová
Výuka kombinatoriky na středních školách 307

Zuzana Voglová, Pavla Zagorová
Multimediální cvičebnice kombinatoriky a teorie grafů 313

Jaroslav Zhouf
Korespondenční seminář jako podpora výuky matematiky 317

Seznam účastníků 323

Předmluva

Nevím, kdo před více než dvaceti lety přišel v Jednotě československých matematiků a fyziků na nápad uspořádat setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Byla to však idea z řady důvodů vynikající. To, že toto setkávání mělo a má smysl, prokazuje výrazně již ten fakt, že jsme dospěli již k setkání desátému. Skutečnost, že řada účastníků se těchto setkání zúčastňuje pravidelně, je pak dokladem toho, že akce je pro ně přínosná a zajímavá.

Nápad je jistě důležitý, sám o sobě však nestačí. Jak už to bývá, řada dobrých nápadů se neuskuteční, neboť se nenajdou lidé, kteří jsou ochotni a schopni věnovat čas, energii a úsilí tomu, aby se idea proměnila v realitu.

Netuším, zda někoho z plzeňských kolegů a kolegyň, kteří se ujali organizace prvního setkání, někde v hloubi duše tehdy napadlo, že na sebe berou závazek, který přetrvá několik desetiletí. Jen ten, kdo někdy organizoval podobnou akci, dovede dostatečně ocenit práci všech, kteří se na přípravě dosavadních setkání podíleli. Všem plzeňským organizátorům i zastřešujícím institucím, především Západočeské univerzitě a plzeňské pobočce JČMF, proto patří naše uznání.

To, že akce neskončila prvním setkáním, jak bylo s největší pravděpodobností původně zamýšleno, mělo jistě řadu příčin. Tou hlavní bylo jistě to, že účastníci ze základních, středních i vysokých škol a z dalších matematických pracovišť zjistili, jak přínosné je pro všechny učitele, když se mohou setkat se svými kolegy z jiných pracovišť. Jako pracovník z vysoké školy zabývající se navíc výchovou budoucích učitelů, mohu z vlastní zkušenosti potvrdit, jak podnětné a povzbuzující pro mne pokaždé bylo vidět desítky učitelů zapálených pro svou práci a dokazujících, že přes všechny potíže a problémy našeho školství lze děti vychovávat tvůrčím a inspirativním způsobem.

K úspěchu prvního setkání však jistě přispěla i bezchybná organizace a mimořádně šťastná volba místa setkání – Mariánských Lázní. Nebylo proto divu, že když bylo rozhodnuto o opětovném konání akce, padla volba místa opět na Mariánské Lázně. „Mariánky“, jak se akci začalo brzy říkat, se staly v naší matematické veřejnosti pojmem. První tři setkání se navíc staly jedním z nemnoha ostrůvků pozitivní deviace v marasmu tehdejší společnosti.

I po změně společenských poměrů se však ukázalo, že prospěšnost setkání přetrvává i v nových podmínkách. Z řady důvodů, především cenových, se sice muselo změnit tradiční místo konání, duch původních „Mariánek“ však zůstal zachován.

Akce samotná však má mnohem hlubší rozměr. Doufám, že mnozí účastníci těchto setkání si uvědomili, jak Jednota českých matematiků a fyziků obecně a akce typu těchto setkání zvláště přispěly k tomu, že matematická komunita má mezi ostatními učitelskými profesemi do jisté míry výsadní postavení. To, co my, matematikové, považujeme za víceméně samozřejmé, je v ostatních předmě-

tech – snad s částečnou výjimkou fyziky – nedostižným cílem. Co mám na mysli? Skutečnost, že se my, učitelé matematiky základních škol, gymnázií, středních odborných škol i učilišť a konečně i škol vysokých vzájemně známe, pravidelně se stýkáme, vyměňujeme si názory a zkušenosti, o problémech diskutujeme. A když se děje něco zásadního, dovedeme zaujmout víceméně jednotné stanovisko, vypracovat ve vzájemné spolupráci fundované materiály a dohodnout se na řadě věcí. Tak to bylo například při tvorbě standardů, přípravě podkladů k „nové“ maturitě či ke školním vzdělávacím programům a podobně. K tomuto stavu se ve většině ostatních vyučovacích předmětů ani nepřiblížili.

Když se začalo organizovat desáté setkání, přemýšleli jsme o jeho zaměření. Základní schéma spočívající v několika plenárních přednáškách a v jednání sekci, jimž je věnována většina času, jsme porušit nechtěli. Při diskusích o zásadním zaměření jsme se posléze dohodli, že se nebudeme orientovat na jednu matematickou disciplínu, ale budeme se snažit o širší pohled na matematiku jako přirozenou součást lidské kultury, nezbytnou složku všeobecného vzdělání a mocný nástroj poznávaní zákonitostí světa. Dnes, kdy se stalo jistou módou „postmoderní“ nazírání na směřování lidstva, kdy se otázka vzdělání často zaměňuje s vulgárním pragmatismem typu „k čemu to budu potřebovat“, v době kdy jsou nám vnucovány názory, k čemu vlastně učit matematiku, když máme počítače, se nám výše zmíněný pohled na matematiku a její výuku jevil jako potřebný a užitečný.

Zda se nám podařilo tyto záměry uskutečnit, to posoudí účastníci tohoto setkání.

Eduard Fuchs

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Matematika – součást kultury

Školní vzdělávací program – příležitost nebo hrozba?

Jiří Herman

Abstrakt

Příspěvek je zamyšlením nad novou reformou vzdělávacího systému, která právě nyní probíhá v českém základním a středním školství. Autor shrnuje své zkušenosti s tvorbou školního vzdělávacího programu pro gymnázia, jehož se jeho škola – jako jedno z 16 „pilotních“ gymnázií – zúčastnila. Pokouší se tyto zkušenosti zobecnit a ukázat, jaké má připravovaná reforma přednosti i upozornit na rizika, která podle jeho názoru přináší.

Ve sborovnách českých základních a středních škol, mezi poučenou částí rodičovské veřejnosti i akademické obce, dokonce též – byť výjimečně – v seriózních médiích se v současné době zjevuje „přízrak“ nové školské reformy. Protože pro mnohé z nás jde již o několikátou transformaci českého školství, kterou máme na svých bedrech zakoušet, zdají se nám její kontury hrozivé, a to tím hrozivější, máme-li o ní jen nepřesné a neúplné informace. Pokusím se v následujícím příspěvku – jako ředitel gymnázia, které bylo vybráno (spolu s dalšími 15 gymnázii z celé ČR) Výzkumným ústavem pedagogickým v Praze do souboru tzv. pilotních škol, které v praxi ověřují pokusnou tvorbu školních vzdělávacích programů a zároveň mají jedinečnou možnost výrazně ovlivnit výslednou podobu stěžejního dokumentu – *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnaziální vzdělávání*, tyto obrysy zpřesnit. Ponechávám pak na čtenářích, zda tuto významnou změnu, k níž v našem školství nyní dochází, budou chápat více jako šanci, jak reagovat na výzvy nové doby, či jako riziko („přízrak“), které zásadním způsobem ohrozí kvalitu našeho základního a středního vzdělávání.

1 Podstata reformy a její legislativní rámec

Principy kurikulární reformy byly zformulovány v tzv. Bílé knize – *Národním programu rozvoje vzdělávání*. Zavádí se dvoustupňový model kurikula, který je založen na spoluúčasti škol na jeho tvorbě, což odpovídá zkušenostem z řady evropských zemí a významně posiluje autonomii školy a její odpovědnost za kvalitu vzdělání, které poskytuje. Na státní úrovni vznikají *rámcové vzdělávací programy* (RVP), které stanovují závazný rámec vzdělávání a standardní obsah

pro předškolní, základní a střední vzdělání. Druhou úroveň tvoří *školní vzdělávací programy* (ŠVP), které připravují samy školy. Při jejich tvorbě sice vycházejí z RVP, avšak mohou v nich zohlednit specifika svých žáků, záměry a podmínky školy i regionu, v němž působí. Legislativně je povinnost škol vytvořit (a následně v praxi realizovat) vlastní ŠVP dána školským zákonem, a to do dvou let po schválení RVP pro daný stupeň vzdělávání ministerstvem. Protože RVP pro základní vzdělávání byl podepsán v r. 2005, již od 1. září příštího školního roku se začne v 1. a 6. třídách (jakož i v primách osmiletých gymnázií) učit „ponovu“. Příprava RVP pro střední vzdělávání právě probíhá, schválení jeho definitivní podoby odhaduji na roky 2008–2009.

2 Co je RVP?

RVP je tedy „obrysový“ dokument pro daný typ vzdělávání s pevnou strukturou. Obsahuje především:

- vymezení RVP v souvislosti s ostatními „vzdělávacími“ dokumenty
- charakteristika daného oboru vzdělávání (organizační uspořádání, podmínky přijetí, způsob ukončování)
- pojetí a cíle daného typu vzdělávání
- klíčové kompetence
- vymezení vzdělávacích oblastí
- průřezová témata
- rámcový učební plán
- vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami z žáků mimořádně nadaných
- podmínky pro realizaci vzdělávání (materiální, technické, personální, ...)
- zásady pro tvorbu ŠVP

Co mají připravené rámcové vzdělávací programy společného a v čem se zásadně liší od stávajících dokumentů (učebních plánů a osnov)? Především kladou zásadní *důraz na žáka*. Definují přesně tzv. *klíčové kompetence*, tedy dovednosti, znalosti, vědomosti, schopnosti, postoje a hodnoty, kterých by měl žák po absolvování daného stupně vzdělání dosáhnout. Jsou to kompetence, které jsou nezbytné pro další život žáka, a to ať již daným stupněm vzdělání svou dosavadní školní přípravu skončí, nebo bude pokračovat ve studiu na navazujícím typu školy. Předpokládá se, že ŠVP přesně popíše, jakým způsobem bude daná škola tyto klíčové kompetence rozvíjet. Například pro gymnaziální vzdělávání jde o tyto kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence komunikativní

- kompetence sociální a personální
- kompetence občanské

Vlastní vzdělávací obsah je v RVP rozdělen do *vzdělávacích oblastí*, které se dále člení do *vzdělávacích oborů*. Například pro vyšší gymnázium jde o následující oblasti a obory:

1. Jazyk a jazyková komunikace
   - Český jazyk a literatura
   - Cizí jazyk I, II
2. Matematika a její aplikace
   - Matematika
3. Člověk a příroda
   - Fyzika
   - Chemie
   - Biologie
   - Geografie
   - Geologie
4. Člověk a společnost
   - Historie
   - Občanský a společenskovědní základ
5. Člověk a svět práce
6. Člověk a zdraví
   - Tělesná výchova
   - Výchova ke zdraví
7. Umění a kultura
   - Hudební obor
   - Výtvarný obor
8. Informační a komunikační technologie

Učební plán v RVP pouze předepisuje minimální hodinovou dotaci za celé 4 roky studia a ročníky, v nichž musí být oblast zařazena buď povinně, nebo volitelně. Konkrétní rozdělení vzdělávacích oblastí do jednotlivých předmětů i jejich zařazení do vlastního učebního plánu je pak plně v pravomoci školy. RVP předpokládá, že některé předměty, které se dosud učí odděleně, bude možné integrovat v jediný předmět (např. „science“), jiné bude možné rozdělit na předmětů několik (např. oddělená výuka českého jazyka a literatury), některé oblasti (např. Člověk a svět práce) bude možné integrovat do různých předmětů (základy společenských věd, ekonomika).

Pro všechny vzdělávací oblasti a obory definuje RVP *očekávané výstupy*, které popisují, jakých znalostí, vědomostí či dovedností by měl žák po absolvování

daného typu školy dosáhnout, a *základní učivo*, která by měl zvládnout. Jejich časové zapracování je obsahem *osnovy* předmětu, který si vytváří každá škola sama; ta má samozřejmě možnost osnovu v předmětech, které považuje za klíčové pro své zaměření, rozšířit a (nebo) prohloubit. (Mimochodem, například o obsahu osnov v jednotlivých oborech vzdělání na gymnáziu probíhaly velmi bouřlivé diskuse pracovníků VÚP s oborovými garanty jednotlivých pilotních gymnázií.)

Do školního vzdělávacího programu každé školy musí být navíc zapracována tzv. *průřezová témata*, která by se měla prolínat výukou několika předmětů. Např. pro gymnázia jde o:

- výchovu k sociálním dovednostem
- výchovu k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- multikulturní výchovu
- enviromentální výchovu
- mediální výchovu

3 Co je ŠVP?

ŠVP je povinný dokument školy, přístupný veřejnosti, podle něhož se uskutečňuje vzdělávání na dané škole. Musí být zpracován v souladu s RVP a dalšími platnými právními předpisy pro celé období vzdělávání na dané škole. Jeho zpracování je plně v kompetenci ředitele školy, který za něj plně odpovídá. K návrhu ŠVP se vyjadřuje školská rada a posuzuje jej Česká školní inspekce. ŠVP popisuje výchovně-vzdělávací strategie, které škola používá pro osvojování vzdělávacího obsahu a rozvoj klíčových kompetencí svých žáků, prezentuje zaměření školy a profil jejího absolventa, reflektuje postavení školy v regionu. Má pevnou strukturu a obsahuje:

- identifikační údaje
- charakteristiku školy a ŠVP
- učební plán (tabulka s výčtem předmětů a počtem hodin v ročnících, podmínky maturitní zkoušky)
- učební osnovy
- způsoby hodnocení žáků a autoevaluace školy

ŠVP je otevřený dokument, takže po zhodnocení zkušeností s jeho realizací je možné jej měnit či doplňovat. Je však zřejmě, že jeho případná zcela zásadní změna by mohla velmi ublížit důvěryhodnosti školy v očích veřejnosti.

4 Jak psát ŠVP?

Tvorba ŠVP je netriviální záležitost. My jsme si ji „vyzkoušeli“ jako pilotní gymnázium pod vedením týmu z Výzkumného ústavu pedagogického. Šlo o dvouletý proces, který začal v červenci 2005 a skončil odevzdáním definitivních verzí našich tří ŠVP v červnu 2007 a ty od září pokusně ověřujeme. Tím byla naše situace ve srovnání s ostatními školami zásadně zjednodušena, neboť při řešení všech problémových situací jsme měli zajištěnu odbornou a metodickou pomoc ze strany VÚP.

Zcela zásadní roli má na každé škole *koordinátor* tvorby ŠVP, který ji řídí a organizuje. Výběr vhodné osobnosti pro tuto roli (není-li jím sám ředitel) je klíčový. Musí jít o učitele, který je ve sboru všeobecně respektován, má dobré schopnosti organizovat a komunikovat s kolegy. Kolem něj se nejprve vytváří užší *projektový tým*, který je pro koordinátora nejbližším spolupracovníkem (a často oponentem). Vlastní práce týmu začíná podrobnou *analýzou školy*, v níž se stanoví její silné a slabé stránky, přitom se kvalifikovaně vyhodnotí názory studentů, rodičů, absolventů i jiných partnerů školy. Již jenom tato analýza je proces, který – bez odborné pomoci – zabere několik měsíců. Na základě zpracované analýzy pak užší projektový tým vypracuje *profil absolventa* školy, charakteristiku *vzdělávacích strategií*, na které bude škola ve své práci klást důraz. V další fázi pak předloží pedagogickému sboru návrh *učebního plánu*, který je pak podroben (často velmi bouřlivé) diskusi. Při sestavování učebního plánu je třeba začít rozmýšlet, jakým způsobem zařadit do výuky *průřezová témata* a kdy a jakými metodami rozvíjet *klíčové kompetence* žáků. Definitivní rozhodnutí o tom padne v okamžiku tvorby *učebních osnov*, což je proces, do nějž je nutno zapojit podstatnou část celého učitelského sboru. Tvorba vlastních osnov je velmi komplikovaná záležitost, k níž nejsou učitelé školeni, proto jsme zejména zde velmi uvítali pomoc VÚP, který pro tvůrce osnov ze všech pilotních gymnázií pořádal společná „oborová“ setkání. I v tomto okamžiku je nezanedbatelná role užšího týmu – sepsaným osnovám je třeba dát „jednotný kabát“, a to jak po stránce formální, tak i jazykové. V závěrečné etapě práce pak užší tým navrhuje způsoby *hodnocení žáků* i *vlastního hodnocení školy* (autoevaluace).

Z uvedeného je zřejmé, že úspěch při práci nad ŠVP závisí na ochotě učitelů přistoupit k jeho tvorbě aktivně, být přesvědčen o smyslu své (velmi náročné, a to nejen časově) práce. Má-li ředitel k dispozici kromě vlídného slova i další materiální stimuly, je pak přesvědčování jeho učitelů zajisté snazší.

5 ŠVP a matematika

„Revoluce se nekoná!“ oddechnou si matematici, když si přečtou pasáže věnované jejich vzdělávací oblasti v RVP jak pro základní, tak pro gymnaziální vzdělávání. Vždyť výčet očekávaných výstupů i základní učivo a posloupnost jeho řazení v těchto materiálech korespondují s tím, co znají ze své vlastní dosavadní

praxe, možná jim i některé „tradiční“ pojmy mohou chybět. Přesto však i v matematice lze žádoucí změny uskutečnit – a to jak v rovině formální, tak zejména v obsahové, či lépe řečeno metodické. Popíšu aspoň jednu, které hodláme zavádět na našem gymnáziu. Výuku povinných „základů“ matematiky ukončíme ve 3. ročníku čtyřletého cyklu (bez infinitezimálního počtu, který jsme dosud „nutili“ všem studentům). Pak si žáci zvolí jeden ze dvou předmětů Matematika 4 (koncipován je stejně jako dosavadní výuka v maturitním ročníku), nebo předmět *Matematika pro život* (lepší název jsme bohužel nebyli schopni vymyslet), který je vypsán zejména pro studenty, kteří se matematikou již nehodlají v dalším studiu zabývat. V něm budeme věnovat důkladnou pozornost jednak „triviálním“ aplikacím (nikterak „vysoké“) matematiky v běžném životě (užití procentového počtu zejména v oblasti finanční matematiky, kritická četba textu, užití rovnic a nerovnic či kombinatorických a statistických postupů v „běžném“ životě), jednak filosofickým a historickým přesahům, které by měly žákům ilustrovat, proč matematika tvoří nedílnou součást lidské kultury.

Zamýšleli jsme se i nad tím, jak zpestřit výuku, jaké nové metodické postupy použít. Jsme si však vědomi toho, že naučit se středoškolské matematice je pro studenta práce, spojená s jistým nemalým intelektuálním úsilím, v níž mu dobrým průvodcem může být přesný, zajímavý a věcně správný výklad učitele. Proto v žádném případě nemíníme některé osvědčené postupy (i když z doby „předreformní“) – a to nejen v matematice – opouštět.

6 Příležitosti a rizika

Pokusím se nyní stručně shrnout, jaké klady a zápory popisovaná reforma podle mého názoru má. Každý z nich by bylo jistě možné ilustrovat celou řadou příkladů, kvůli rozsahu příspěvku to však neučiním.

Jaká jsou tedy *pozitiva* této reformy?

- orientace na žáka, který se z objektu vzdělávání mění v jeho subjekt
- možnost (či lépe řečeno nutnost) zavádění nových netradičních postupů (projektová výuka, týmová spolupráce, ...)
- integrace předmětů či naopak jejich oddělení, tvorba nových, netradičních předmětů
- profilace školy jako konkurenční výhoda v oblastech s vysokou koncentrací „podobných“ škol
- budování pozitivního obrazu školy v očích veřejnosti
- přehodnocení „vize“ školy – příležitost k zamyšlení nad současným stavem školy a jejími výhledy do budoucna
- aktivizace učitelského sboru

V čem spatřuji její *rizika*?

- rozpad „jednotné“ vzdělávací soustavy, obtíže žáků, kteří mění školu v průběhu svého vzdělávání
- enormní administrativní náročnost
- slabá podpora spolupracujících institucí
- absence supervize nad výslednou podobou ŠVP
- nepřipravenost fakult vzdělávajících učitele na reformu
- nepřipravenost učitelů škol jak na tvorbu ŠVP, tak na jeho realizaci
- neobyčejné pracovní zatížení učitelů v době tvorby ŠVP
- neklid, nervozita v učitelských sborech
- nechuť a neochota měnit stereotypy učitelské práce

V toto chvíli jistě nelze předpovídat, zda popisovaná reforma bude úspěšná, zda její přednosti převáží výše uvedené (a jistě i dosud skryté) nedostatky. Vždyť její masivní zavedení do každodenní praxe škol ještě nenastalo. Za sebe mohu jen říci, že naše škola (kterou považuji za relativně úspěšné gymnázium) nalezla při tvorbě svého vzdělávacího programu mnoho inspirujících podnětů, které by jí při zkvalitňování své práce mohly v budoucnosti výrazně pomoci, a proto nepovažuji vynaložené úsilí za promarněné. Přeji si, aby podobně mohli reformu hodnotit nejen ředitelé ostatních škol, ale zejména jejich žáci, rodiče i celá veřejnost.

Matematika a škola – dvě součásti kultury

František Kuřina, Dag Hrubý

Abstrakt

Diskutován pojem kultury, jako způsob dosahování určité kvality, jako zušlechťování či tříbení metod a poznávání omylů v souvislosti s pedagogickou kulturou ve škole a matematickou kulturou ve vědě. Dále je věnována pozornost otázce, zda je vyučování matematice ve škole na dobré kulturní úrovni. Uvedené problémy jsou diskutovány v také v souvislosti s probíhající kurikulární reformou v ČR.

Úvod

Je pro nás velkou ctí, že můžeme na zahájení jubilejního 10. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol připomenout tradici Mariánských Lázní 1983–2000, přerušenou v roce 1992 Žinkovy, v roce 2002 Prachaticemi a od roku 2004 pokračující v Srní. Atraktivní prostředí Mariánských Lázní a šumavské přírody tvoří ovšem pouze rámec našich setkání.

Domníváme se, že otcové zakladatelé chtěli obrátit pozornost našich učitelů matematiky ke kulturním kořenům matematiky a k zamyšlení nad významem matematiky pro současnost v souvislosti s problémy matematického vzdělávání v naší škole. Setkání měla být příležitostí k vzájemnému poznávání představitelů naší matematické vědy s učiteli matematiky od první třídy po univerzitu. Je škoda, že učitelé matematiky základních škol, kteří představují největší část našich „profesionálů matematiků“, tvořili na setkáních od samého začátku menšinu.

Téma 10. Setkání dokumentuje, že synové pokračovatelé připomenutou kulturní tradici ctí a chtějí v ní pokračovat. Iniciátory setkání byli v osmdesátých létech vědečtí pracovníci v matematice, postupem času se těžiště ideové přípravy setkání přesouvá na pracovníky pedagogické. Setkání od samého vzniku myšlenky jsou spjata s plzeňskou pobočkou JČMF a katedrou matematiky fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity. Patří jim za tuto záslužnou činnost dík nás všech.

1 O kultuře

Chápeme-li kulturu jako civilizaci, jako souhrn materiálních i duchovních hodnot vytvořených a vytvářených lidstvem v procesu historického vývoje, a vzdělávání jako uvádění do kultury, je matematika i škola součástí kultury. Matematika poskytuje takřka všem vědám nástroje k řešení problémů, pojmy libovolné disciplíny se utvářejí abstrakcí, cestou, která např. při studiu kvantitativních vztahů vedla k pojmům číslo a jeho vlastnosti, při studiu souvislostí pak k relacím, funkcím a jejich vlastnostem, při studiu celků pak ke studiu struktur a modelů, k deduktivnímu uspořádávání výsledků a k axiomatickému budování nejrůznějších disciplín. Skutečnost, že věda vyžaduje logické uspořádání nic nemění na faktu, že proces objevování není procesem deduktivním. Tvůrčí myšlení přispívalo v historii k rozvoji člověka a utvářelo matematiku i ostatní vědy. Kultura, civilizace a společnost nejsou bez matematiky možné.

Chápeme-li však termín kultura jako způsob dosahování určité kvality, jako zušlechťování či tříbení metod a poznávání omylů, pak není ani pedagogická kultura ve škole ani matematická kultura ve vědě jevem samozřejmým.

O úrovni, smyslu a účelnosti matematických poznatků zde podala řada autorů v minulosti pozoruhodné výklady a v tomto úvodním příspěvku se k nim nechceme vracet. Na letošním setkání jsou zařazeny samostatné přednášky o užití matematiky ve finanční sféře a o pravděpodobnosti a statistice v našich životech. Doklady toho, že matematika je významnou složkou kultury budou tedy i letos povolanými odborníky podány. Je to důležité pro nás, jako pro učitele, neboť si můžeme učinit hlubší pohled na obor, jehož vyučováním se zabýváme.

O tom, zda je praxe vyučování matematice ve škole na dobré kulturní úrovni, bychom se ovšem chtěli zmínit. Problémy, které zde v praxi existují, mají kořeny historické; jsou však společenskou realitou, se kterou se musí potýkat každý z nás, učitelů.

2 O pedagogické kultuře

V roce 1969 se *J. Piaget* „zhrozil disproporce mezi energií vynaloženou na výzkumy myšlení a usuzování dítěte a absencí jakýchkoliv jejich účinků na stav školské praxe“ (citováno podle knihy [1, s. 18]). Domníváme se, že se situace za posledních 30 let ještě zhoršila. Teoretických publikací o škole a vzdělávání ve světě nepřehledné množství, problémy školy se snad nikde nedaří úspěšně řešit. „Dnes hrozí, že se strom vědeckého poznání zhroutí pod vahou svých plodů a rozdrtí Adama, Evu i nešťastného hada“ (*E. Morin*, [2, s. 26]). Přitom ovšem je pozoruhodné, že „živá bytost (i ta nejskromnější, např. baktérie) komputuje, to znamená, že nejenom počítá, kalkuluje, ale také provádí operace, které jsou podřízeny jisté logice a jistým pravidlům, takovým, která směřují k zachování organismu“ ([2, s. 101]). To věděl již *B. Spinoza*, současník *Komenského*, který

napsal: „Dobré je to, co je nám užitečné, tj. co zvětšuje naši schopnost něco konat a tak přispívá zachování našeho bytí“ (citováno podle knihy [3, s. 55]).

Teoretický základ naší současné školské reformy, *Bílá kniha*, je uvedena touto myšlenkou *J. A. Komenského*: „... přejeme si, aby každý člověk byl celistvě vzdělán a správně vycvičen, nikoli jen v nějaké jediné věci nebo v několika málo nebo v mnohých, nýbrž ve všech, které dovršují podstatu lidství...“ ([4, s. 12]). Přitom již 300 let před Komenským varuje tibetský mnich *Sakja – pandita*: „K čemu je vepři lázeň voňavá, slepému záře duhová, tomu, komu netráví potrava, tupému moudrost Buddhova?“ ([4, s. 108]). Na otázky, které jsou i dnes aktuální – otázky formálního přetěžování žáků, upozorňovali i naši významní pedagogové minulosti. Např. *V. Příhoda* píše: „to stálé přidávání hodin a předmětů, které rozdrobilo žákův týden, má ... také veliké nebezpečí mravní. Vyvíjí se polovzdělanost rychlíkovou jízdou za poučením v kostce. Žák nemůže přemýšleti o tom, čemu se učí, neboť denně konzumuje nesčetné vědomosti naprosto nesouvislé. To konzumenství, nikoli producenství, jest znakem školství založeného na pomyslu všeobecného vzdělání. ... V nejdůležitějších letech života si člověk navyká ničeho nedomyslet, ničeho nedocílit, nad ničím se nezastavit.“ V teorii je vše jasné. Ale praxe 50 let po Příhodovi nutí *J. Peterku*, aby v *Monologu učitele k hvězdnému nebi* napsal verše:

„Jak papiňák faktografií děti nabité.
Už v sedmičce maminky nestačí.
Kolik je bitev v jednom husitství –
ó tolik, že z nich ani nevytéká krev.
I zeměpisné souřadnice měst umíme zpaměti.
Třídění žab a mrkví vtlučem do dětí.
A slovní druhy, zvlášť co kolidují, chytnem pod krkem
jak příslovečnou spřežku.
Dneska už nezjednodušujeme ani vešku.“
(Citováno podle knihy [6, s. 233].)

Takovéto formální vzdělávání není projevem pedagogické kultury. Současná reforma se snaží orientací na kompetence tyto negativní rysy vzdělávání odstranit. Zda se jí to podaří, je ovšem vážná otázka, která souvisí s realizací reformy v praxi. Tvorba školních vzdělávacích programů je pouze první krok. Podstatné je změnit přístup učitelů a vytvořit tvořivé klima ve všech školách. Formalismus je v našich školách bohužel velmi zakořeněn. „Kdyby se na pokročilý formalismus umíralo, maturity by se dožil jen nepatrný zlomek žáků“, píše *O. Štefflí*. Naše škola není bohužel koncipována pracovně, není založena na zkušenostech žáků. Výstižně ji popisuje např. *O. Pardubský* v článku [7]: „... procesu vyučování (na ZŠ) musí být účastny dvě strany. Ten, co látku přednáší a vysvětluje a ten, co naslouchá a učivo přijímá.“ To je sice v souladu s *Komenského* názorem že učitel „na katedře nejvýš stoje ... mluví, ukazuje, píše a maluje, ... ústa učitelská jsou

studnice, odkud... všechna moudrost plyne, ...“ ([8, s. 114]), ale i s přesvědčením *J. Průchy*: „Ať se jakkoliv proklamuje, že učitel nemá být hlavním předavatelem poznatků, že má především řídit učení žáků a pod., je to mylná představa. Učitel je takový subjekt edukačního procesu, jehož činnost je prioritně zacílena na transmisi poznatků k příjemcům – žákům“ ([6, s. 321]). Podle našeho názoru toto není projev dobré pedagogické kultury. Komenský ovšem není jen zastáncem frontálního vyučování. V jeho *Didaktice* najdeme mnoho podnětů, k nimž se skutečně moderní vzdělávání právem hlásí. Připomeňme např. dvě jeho zásady: „Vše vlastní a ustavičnou praxí žáků. Vše vlastními smysly, vždy a rozmanitě“ ([9, s. 22]). To je cesta k porozumění a pochopení smyslu, k podstatnému rozvíjení pedagogické kultury ve všech předmětech. Současná škola je převážně verbální, jakoby jejím cílem bylo naučené poznatky předat u zkoušky. Přijímací zkoušky a testování žáků, tak jak se často realizují, přímo či nepřímo nutí k tomuto nekulturnímu stylu práce i poctivé učitele. Americký učitel *J. Holt* osvětluje tyto souvislosti velmi výstižně: „My učitelé... jsme v zajetí pozoruhodné iluze. Myslíme si, že můžeme vzít obrázek, konstrukci, fungující představu vybudovanou v naší hlavě na základě dlouhé zkušenosti a znalosti a přeměnou této představy do posloupnosti slov ji přenést celou do hlavy někoho jiného... Snad v jednom případě z tisíce... může tento způsob fungovat a nějaký smysl může být sdělen.“ ([10, s. 159]). Jeden zajímavý příklad „přeměny teorie v praxi“ uvádí *J. D. Barrow*: *T. Kaluza*, mimořádně nadaný spolupracovník *A. Einsteina*, se „po svém třicátém roce rozhodl naučit se plavat. Vzal si knihu o plavání, pečlivě ji pročetl, skočil do vody a úspěšně plaval na prvý pokus“ ([11, s. 193]).

Zatím jsme mluvili o pedagogické kultuře z hlediska vzdělávání v užším, „poznatkovém“ smyslu slova. Škola však má i poslání „výchovné“. Bohužel, jak píše např. *F. Dobšík*, „učitel musí... výchovně působit na žáky mnohdy proti jejich vůli“ ([12]). Francouzský filosof *A. Finkielkraut* to vidí mnohem ostřeji: „Škola se snaží setřít hranici mezi nevzdělanou a vzdělanou částí lidského rodu, žáci vykládají tento emancipační záměr jako zastaralý program donucování a v témže odmítání autority, disciplíny i tradice směšují mistra, jenž učí, s mistrem jenž vládne.“ Učitel je nucen pracovat „v prostředí vítězství blboučké pošetilosti nad myšlením“ ([13, s. 92, 96]). Těžko můžeme srovnávat naši školu jako celek např. se školou francouzskou, nicméně jsme přesvědčeni, že *Bílá kniha* nestaví na realitě naší pedagogické skutečnosti, ale vychází z abstraktní konstrukce. Veškerá tíha reformy tak spočívá na učitelích v praxi, na nich bude koneckonců záviset i úspěch reformy. „Alarmujícím problémem je způsob zavádění rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělání do praxe...“ (J. Skalková, [14, s. 148]). Pro ilustraci uveďme aspoň jeden literárně doložitelný příklad morálních problémů naší školy: „Vysvětluji dětem, že pokud si o učitelích myslím, že jsou debilové, protože se je snaží něco naučit, je to ubohé. Nebo jinak: myslet si to sice můžou, ale nemůžou to říci“ ([15]). Základní a nejtěžší problém naší školy je problém změny klimatu školy a úrovně masy učitelů. V atmosféře neupřím-

nosti, nátlaku, úzkosti, strachu, ... nelze úspěšně ani vychovávat, ani vzdělávat. *P. Piťha* vyslovuje názor: „Neznám nic tak ničivého, jako je tichá symbióza líného učitele s vypočítavým studentem, jev dnes bohužel častý“ ([15, s. 31]). Lze klima školy změnit „v střednědobém horizontu“, jak to požaduje *Bílá kniha*? Obáváme se, že nikoliv.

3 O KULTUŘE ŠKOLSKÉ MATEMATIKY

„Dokud budou matematice a fyzice rozumět jen géniové a děti odborníků, dokud si ostatní budou ve školách připadat jako méněcenní idioti, nemůže se nikdy zvýšit zájem o studium přírodních věd“, píše *T. Brdečková* ([17]). Je to výstižný obraz matematiky na našich školách? Chtělo by se nám protestovat, že ne. Když si však uvědomíme, že se mezi studenty učitelství objevují i takoví, jejichž matematická kultura hraničí s negramotností, jsme opatrní. Uveďme pro ilustraci tři odstrašující příklady.

1. Z rovnosti $22^2 + 31^2 + 35^2 = r^2$ plyne $22 + 31 + 35 = r$.
2. Soustava rovnic
$$\begin{aligned} y &= -x - y + 4 \\ y &= y \end{aligned}$$
má jediné řešení $[4, 0]$, neboť z toho, že $y = y$, plyne $y = 0$.
3. Rovnice $3x + 2y = 20$ nemá řešení, protože neznámé jsou dvě a rovnice jen jedna.

Bývalý učitel základní školy podává svědectví o naší škole, z něhož vyjímáme: „Viděl jsem žáky, kteří byli za výborné výsledky ve škole odměněni učebnicí astrologie. Viděl jsem školníka řvát na učitelku, která zůstala ve škole déle, aby pro děti něco připravila. Viděl jsem učitele, který vysvětloval násobení stem tak, že se desetinná čárka posouvá na chodbu, při dělení k oknu“ ([18]).

Víme ovšem o množství výborných a obětavých učitelů, kteří dosahují dobrých vyučovacích výsledků. Ti budou dosahovat v uvolněném prostředí reformy výsledků ještě lepších. Není však reforma naší školy příležitostí, aby ti, kteří nejsou dobří, byli ještě méně dobří?

Přitom bychom chtěli připomenout, že různí didaktikové matematiky vidí problematiku rozdílně a těžiště práce zůstává opět na učiteli ve třídě. Má orientovat svou matematickou výuku k budoucímu povolání žáků, k přijímacím zkouškám, k potřebám běžného života, k požadavkům rodičů nebo ke spokojenosti žáků. Na rozdíl od mnoha teoretiků jsme přesvědčeni, že bychom v matematice měli učit žáky pracovat, vést k vynakládání úsilí, přesvědčit je, že je v jejich zájmu něco se naučit a naučit se to dobře. Je kladem současné reformy, že je zaměřena na kultivaci kompetencí žáka, k rozvoji jeho osobnosti, je zde však nebezpečí, že nebude na dostatečné úrovni rozvíjet matematické řemeslo; zdá se,

že někteří reformátoři si myslí, že lze rozvíjet čisté kompetence, tedy např. metody řešení úloh bez řešení úloh, komunikaci bez porozumění souvislostem, ... Přitom si samozřejmě uvědomujeme, že pozice matematiky ve společnosti se vyvíjí. Jestliže kolem r. 1000 znamenalo umění násobit kvalifikaci pro místo ve státní správě a při zavádění povinné školní docházky r. 1775 se ozývaly protestní hlasy proti tomu, že všichni se mají učit počítat (jako kdyby chtěli být prodavači), existují dnes hlasy proti učení se algoritmům sčítání, odečítání, násobení a dělení – když přece všichni mají kalkulačky. To je samozřejmě pravda, věříme však – a bohužel nemůžeme uvést solidnější argument – že počítání přináší kladné hodnoty žákům, kteří to dobře zvládnou – např. dovednost soustředit se, zapamatovat si dílčí výsledky, provádět odhady, ...

Proč se nedaří přesvědčit veřejnost, že matematika kultivuje myšlení? Podle našeho názoru především proto, že teprve správně pěstovaná matematika přispívá k rozvíjení myšlení. Matematika bez porozumění, matematika „nazpaměť“ myšlení spíše utlumuje než rozvíjí. Učitelé, kteří snad takto učí, poškozují nejen své žáky. Poškozují celý obor, snižují význam práce školy.

Bohužel o přijetí matematiky rozhoduje i společnost. Jestliže se uplatní lépe žák, který se umí přizpůsobit, než žák s originálním myšlením, ovlivní to pozici matematiky velmi výrazně. Jestliže dává učitel přednost hbitým odpovědím ve stylu učíme se komunikovat před přemýšlivou váhavostí, opět tím matematice škodí.

Podstatná je podle našeho názoru „profesionální upřímnost“. Tím myslíme nezastírat problémy, které my jako učitelé můžeme s některými úlohami mít. Některé otázky jsou v našem školství tradičně a podle našeho názoru ne zcela správně chápány. Tak např. obyvklé schéma řešení (konstrukčních) úloh ve fázích *rozbor, konstrukce, důkaz, diskuse* je spíše popisem řešení vyřešené úlohy než návodem, jak úlohu řešit. Dát konkrétní metodu k řešení libovolného problému nelze, nicméně realistický přístup k řešení problémů propisuje např. *J. Hadamard* v práci [19]. Připomeňme stručně jeho výklad.

První fáze řešení úlohy je přípravná. V ní se řešitel soustředěně věnuje studiu problému. Druhá fáze řešení, zrání problému, který je již zakotven v mysli řešitele, probíhá podvědomě. Nápady se volně „honí hlavou“, většina z nich nevede k cíli. Třetí fáze propuká náhle: řešitel dostává nápad. Čtvrtá část řešení je opět vědomá: jde v ní o verifikaci toho, že nápad vede k cíli.

Srovnáme-li tento postup s možnostmi práce ve třídě, je zřejmé, že opravdové problémy se prakticky ve škole řešit stěží mohou. Úlohy matematické olympiády však patrně takovýto, přirozeně různě modifikovaný přístup, vyžadují. Minimálně z jednoho hlediska je popsaný postup řešení problémů poučný pro kultivaci matematické kultury školní třídy: Nemůžeme vyřešit úlohu, která „není naše“, která není součástí našeho vědomí.

Složkou matematické kultury je ovšem i uspořádání věcí, pořádek v pojmech, vědomí toho, co je dokázáno a jak je to dokázáno. Zavádění pojmů je proces,

který by měl být doprovázen zkušenostmi. Je dosti rozšířeným omylem, že pojmy se zavádějí definicemi. To platí v konečné fázi uspořádání matematiky, nikoliv však v etapě utváření matematiky. A ke kultuře matematického vzdělávání přirozeně vyvozování pojmů a správné uspořádávání učiva patří.

Závěr

V nezdravé společnosti nemůže být ani škola zdravá. Žáci nežijí ve vzduchoprázdnu, z rodiny i společnosti dobře vědí, jak se věci mají. Škola by měla být realistická. Přesto, že společnost se svými prioritami není utvářena snahou po originalitě, optimálním provozu a logické správnosti, že vůdčí ideou mnoha lidí je úspěch, pokud možno rychlý, velký, někdy dokonce za každou cenu, bychom měli v žácích pěstovat rozumné vlastnosti. Měli bychom vidět optimisticky budoucnost, s možností uplatnění tvořivých lidí. Škola by měla být institucí pořádku a plnění povinností. Měla by zajišťovat minimum vzdělání pro všechny a poskytování maxima těm, kteří o to stojí. Měli bychom se starat o to, aby takových žáků a studentů bylo co nejvíce.

Kulturní škola není školou kvaltování, ale oasou klidu, školou tvořivé spolupráce učitelů a žáků.

Literatura

[1] KALHOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika.* Praha : Portál, 2002.

[2] MORIN, E. *Věda a svědomí.* Brno : Atlantis, 1995.

[3] TVRDOŇ, J. *Tam nahoře.* Praha : Dauphin, 2005.

[4] *Bílá kniha. Národní program rozvoje vzdělávání v České republice.* Praha : MŠMT, 2001.

[5] SAKJA – pandita *Pokladnice moudrých rčení.* Praha : Odeon, 1984.

[6] PRŮCHA, J. *Moderní pedagogika.* Praha : Portál, 1997.

[7] PARDUBSKÝ, O. Základní škola by měla končit závěrečnou zkouškou. *Lidové noviny*, 19. 5. 2005.

[8] *Jana Amose Komenského Didaktika.* Praha : W komissí u Řiwnáče, 1849.

[9] KOMENSKÝ, J. A. *Analytická didaktika.* Praha : Státní nakladatelství, 1947.

[10] HOLT, J. *Jak se děti učí.* Praha : Strom, 1995.

[11] BARROW, J. D. *Konstanty přírody.* Praha : Paseka, 2005.

[12] DOBŠÍK, F. Učitel není povolání, ale poslání. *Lidové noviny*, 24. 5. 2006.

[13] FINKIELKRAUT, A. *Destrukce myšlení.* Praha : Atlantis, 1989.

[14] SKALKOVÁ, J. *Pedagogika a výzva nové doby.* Brno : Paido, 2004.

[15] Deník učitele základní školy. *Lidové noviny*, 27. 4. 2001.

[16] *Hledání učitele.* Praha : Pedagogická fakulta UK, 1996.

[17] BRDEČKOVÁ, T. Matematika. *Respekt*, 3.–9. 4. 2006.

[18] MALIJEVSKÝ, I. Zpráva o neúspěšné vizi. *Literární noviny*, 2. 9. 2000.

[19] HADAMARD, J. *The Mathematician's Mind.* Princeton : Princeton University Press, 1996.

Finance a matematika

Luděk Niedermayer

Abstrakt

Zapojení moderních technologií, obvykle na bázi počítačů, do běžného života neustále roste. Přesto však paradoxně se zdá, že význam oborů s touto oblastí přímo souvisejících klesá. Již první pohled na způsob práce finančních institucí ukazuje obrovské zapojení výpočetní technicky. Ovšem použité aplikace jsou připravovány týmy odborníků pro uživatele, jejichž znalosti o jejich fungování, stejně tak jako rozhled v těchto „tvrdých“ disciplínách, mohou být velmi omezené. V příspěvku jsou popsány základní postupy, které jsou používány ve světě finančích trhů. Jedná se jednak o koncept časové hodnoty peněz, vedoucí k řešení polynomů n-tého stupně, dále princip volatility, jakožto měřítka rizika finančního instrumentu a na závěr je uveden úvod do problematiky nesymetrických instrumentů – opcí. Aplikace matematiky ve světě finančích trhů a ekonomických analýz jsou pochopitelně širší. Zahrnují například v poslední době velmi dynamicky rostoucí svět makro modelování či zavádění statistických konceptů do regulace finančích institucí.

K tomu, abychom zjistili, že matematika nepatří mezi 5 nejoblíbenějších předmětů studentů na školách téměř každého typu, není třeba nákladných průzkumů veřejného mínění. V dnešní rychlé až uspěchané době, plné snadno stravitelných vjemů, není snadné získat pozornost pro předmět poměrně náročný a poměrně exaktně hodnotitelný. Navíc, studenti škol jsou obklopeni levně dostupnou technologií, která se nabízí, že „odvede práce za ně“. Zatím co za dob mého studia byla vrcholem kalkulačka, dnes již skoro všem dostupný tabulkový procesor umí například řešit nesmírně komplikované rovnice.

V boji o pozornost studentů je proto každý argument dobrý. A vzhledem k tomu, že alespoň u části populace roste její tolik potřebný pocit zodpovědnosti za svůj budoucí život včetně toho profesního, je každý argument dobrý proto, aby studenty o potřebě matematiky například i z tohoto úhlu přesvědčil.

Bohužel musím zklamat ty, kteří čekají, že takovéto snadné argumenty lze najít ve světě financí. Jako konec konců v téměř každé profesi totiž i například špičkový obchodník s obligacemi je na své pracovní pozici obklopen výkonnou výpočetní technikou, která mu na stisk tlačítka (nejlépe označeného dobře rozpoznatelnou barvou) na obrazovce ukáže všemožné „matematické“ charakteristiky zkoumaného instrumentu.

Navíc, jak dále ukážu, ve světě financí a ekonomů se nevyužívá právě ten nejsofistikovanější aparát, který se studenti učí až týdny před promocí při studiu odborné matematiky. Naopak, poměrně jednoduchý „aparát“ středoškolské (či prvních dvou ročníků vysokoškolské) matematiky stačí k porozumění většině procesů v této oblasti.

Přesto však považuji zběhlost v matematice za velmi podstatnou pro úspěch v profesích na finančních trzích, v bankovnictví či ekonomii.

Z obecného pohledu je totiž podstatné, že určitá míra zběhlosti v matematice nevede jen ke schopnosti volit správně a zvládnout konkrétní matematické postupy, ale vede k určitému systematickému způsobu pohledu na problém, jeho analýzu. To pak v mnoha případech vede i k lepšímu řešení.

Z více technického pohledu na věc se jeví jako přínos chápat alespoň v určité míře logiku a postup procesů, které se odehrávají za předem naprogramovanými funkčními klávesami speciálních analytických systémů. Ne třeba nutně proto, aby jeden každý uživatel měl ambice přeprogramovávat tyto systémy, ale i proto, aby chápal omezení některých obecně užívaných charakteristik ekonomických metod, či třeba ocenění finančních nástrojů, které tyto nástroje na stisk tlačítka nabízejí.

A v neposlední míře platí také poučka známá z každého školského předmětu – v hlavě studentů uvázne jen část znalostí, které si musí ve škole osvojit. Což zdůvodňuje onen (diskutabilní) školský přístup, nutící žáky ve škole ukázat schopnost zvládnout poněkud širší rozsah látky, než bude v životě potřebné.

Pokud bych se oprostil od pohledu na svět přes oblast, kde profesně působím, tak i v tomto případě vidím argumenty pro přinejmenším nesnižování počtu předmětů z tzv. tvrdých věd proti rozsahu tzv. měkkých dovedností. Argumentem proto mi je nejen směřování naší ekonomiky, kde zřejmě v následujícím období uvidíme velmi dobré uplatnění pro kvalifikované lidi s technickými dovednostmi, ale také v tom, že ony „hard skills“ je mnohem těžší si osvojit v pozdějším věku.

Nyní ale již k tomu, kde a jak se používá, jak bylo již dříve uvedeno, poměrně „lehký“ matematický aparát ve světě financí a ekonomů.

1 Časová hodnota peněz – základ finančních trhů

Již na základní škole se učí žáci úročit. Princip úroku za dobu investování peněz lze popsat takto:

$$FV = PV \cdot (1 + i),$$

kde PV je současná hodnota peněz (present value), FV budoucí hodnota (future value) a i úrok (interest) na adekvátní období. Pochopitelně, použijeme-li nikoliv jednoduchého úročení, ale složeného (tedy zohledňujícího úrok z úroku), obvykle propočteného na roční bázi, či délce období jiné než je jeden rok, dostaneme následující úrokové členy:

$$(1+i) \to \left(1 + i \cdot \frac{d}{365}\right) \to (1+i)^{\frac{d}{365}}.$$

Pro matematiky není problém tuto rovnici upravit takto:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)}.$$

Což nám říká, jaká je hodnota peněžních prostředků obdržených v nějakém budoucím okamžiku. Tento jednoduchý koncept je základem oceňování klíčového finančního nástroje zvaného obligace (dluhopis).

Obligace je předem definovaný budoucí peněžní tok (cash flow) popsaný obvykle nominálem, kuponem a splatností. Obligace v nominální hodnotě 100, s kuponem 5 % a (jednorázovou) splatností 5 let představuje závazek jejího emitenta zaplatit v následujících 4 letech vždy 5 (úrok) a po 5 letech 105 (úrok i nominál). Zaplatíme-li za takovouto obligaci přesně její nominální částku, je na první pohled zřejmé, že „výtěžek“ zvaný výnos této investice bude 5 %. Problém nastává při ocenění výnosu při jiné než nominální ceně. S použitím předchozího principu však matematik snadno vidí, že:

$$PV = \frac{5}{(1+i)} + \frac{5}{(1+i)^2} + \frac{5}{(1+i)^3} + \frac{5}{(1+i)^4} + \frac{105}{(1+i)^5}$$

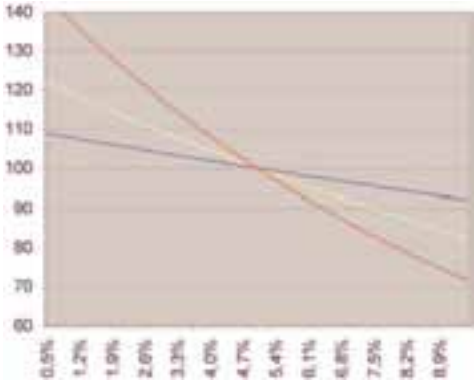
Vzhledem k tomu, že známe cenu za obligaci zaplacenou, zbývá rovnici vyřešit. V závislosti na počtu peněžních toků jde o polynom vysokého stupně, použije se k řešení numerická metoda, předem naprogramovaná i například do finančních kalkulátorů.

Význam tohoto výpočtu pro fungování finančních trhů je značný. Umožní totiž porovnat výnosy různých obligací. Toto porovnání má pak smysl zejména v případě, kdy obligace mají stejnou splatnost. Na příklad 5 letá obligace za cenu 100 s kuponem 5 % (tedy i výnosem 5 %) má stejný výnos, jako obligace s cenou 104,3 ale kuponem 6 % nebo cenou 91,3 a kuponem 3 %.

2 Finanční trh je dynamický

Výše uvedená konstrukce ukazuje, že klíčové pro investora je „poměr“ ceny a rozsahu budoucího peněžního trhu – výnos. Ten je také hlavním indikátorem vývoje trhu. Investoři uvažují, za jaký výnos jsou ochotni určitý peněžní tok prodat či koupit (pochopitelně, jiný výnos požadují pro jinou splatnost a třeba jinou rizikovost dlužníka).

Požadovaný výnos na trhu pro určenou splatnost se neustále mění tak, jak se mění nabídka a poptávka a třeba i tržní očekávání. Změna požadovaného výnosu se pak promítá do změn cen různých obligací.



Obr. 1

Graf ukazuje, jak se vyvíjí cena v závislosti na požadovaném u obligace s kuponem 5 % pro splatnost 2,5 a 10 let.

Změna ceny držené obligace přitom představuje pro investora nejen možnost nárůstu její ceny, ale zejména riziko poklesu ceny. Podle svého sklonu k riziku investor pak volí buďto obligaci, u které se změna ceny projevuje málo (na grafu modrá čára, presentující 2 letou obligaci), nebo naopak hodně (10 letá obligace s červenou čárou).

Matematik dovede tento proces exaktně popsat: cena konkrétní obligace je dle rovnice uvedené výše funkcí jejich známých parametrů (kuponu – C, splatnost – M) a požadovaného výnosu Y (v rovnici výše i):

$$PV = f(C, M, y).$$

Pokud chceme znát aproximaci změny ceny v daném bodě dle změny nezávislé proměnné, stačí funkci derivovat:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{5}{(1+y)} + \frac{5}{(1+y)^2} + \frac{5}{(1+y)^3} + \frac{5}{(1+y)^4} + \frac{105}{(1+y)^5} \\ \frac{\mathrm{d}PV}{\mathrm{d}y} &= -\frac{5}{(1+y)^2} - \frac{10}{(1+y)^3} - \frac{15}{(1+y)^4} - \frac{20}{(1+y)^5} - \frac{525}{(1+y)^6} \end{aligned}$$

Derivace v daném bodě, jakožto směrnice tečny, je pak dobrou aproximací místní citlivosti ceny na změnu požadovaného výnosu. Ukazuje, o kolik procent se změní cena (pochopitelně s opačným znaménkem) při jednoprocentní změně požadovaného výnosu. Tato charakteristika cenného papíru se nazývá duration, a spočte se jako:

$$D = \sum_{1}^{M} \frac{-i \cdot C}{(1+y)^{i+1}} + \frac{m \cdot 100}{(1+y)^{M+1}}.$$

3 Charakteristika nejistoty

Ocenění citlivosti instrumentu na změnu tržního prostředí (v tomto případě požadovaného výnosu) je nepochybně užitečné. Není to však dostatečná informace bez toho, aniž by investor byl schopen ocenit pravděpodobnost změny tržních podmínek eventuelně její rozsah.

Jak ukazuje graf v obr. 2 různé proměnné na finančním trhu mají různou tendenci jak k rozsahu změn, tak k jejich rychlosti (směnný kurz Kč a Eura a 3 měsíční úroková sazba):

K zachycení statistických charakteristik této nestability (volatility) se používá směrodatná odchylka změn pozorované proměnné v určeném období (například v měsíci či roce). Pro uvedené veličiny je graf zobrazen na obr. 3.

Předpoklad toho, že charakteristika této finanční veličiny bude sledovat do budoucna nějaké chování (obvykle normální) pak umožní použití obvyklého statistického aparátu:

Graf rozložení normálního rozdělení udává intervaly spolehlivosti, které jsou základem metody „VAR – value at risk“. (obr. 4)

Vzhledem k tomu, že víme, že vzdálenost zhruba 1, 2 a 2,5 směrodatné odchylky od střední hodnoty stanoví 68 %, 95 % a 99 %, lze pak říci, že odchylka sledované finanční veličiny pro určené období vyšší než 1, 2 nebo 2,5 volatility má pravděpodobnost menší než 16 %, 2,5 % či 0,5 %. Pokud pak investor nakoupil 1 000 jednotek tohoto nástroje, pak při (denní) volatilitě 0,5 % by s pravděpodobností 16 % neměl přijít (za den) o více než 5, či s pravděpodobností 2,5 % o více než 10 jednotek.

Koncept value at risk navíc umožňuje u různých investic vyhledávat kovariance, a tady hledat investice, které mají pravděpodobně, statisticky ověřitelně, opačné chování.

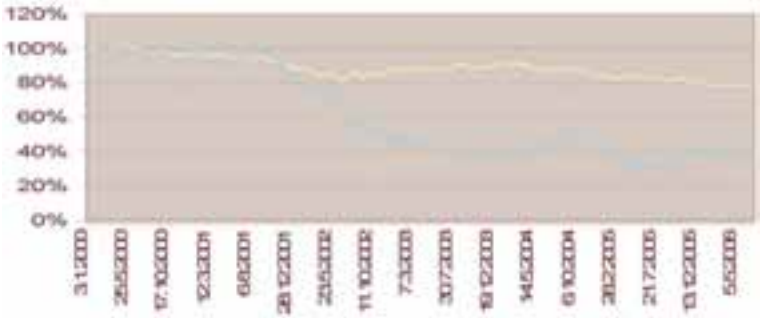
Tento postup pak umožňuje rozsah jednotlivých rizik nejen kvantifikovat, ale také korektně agregovat.

Systém VAR, nebo také „capital at risk“ se stal v 90. letech základem řízení rizik nejprogresivnějších finančních institucí a v této dekádě se postupně stal i regulatorním standardem.

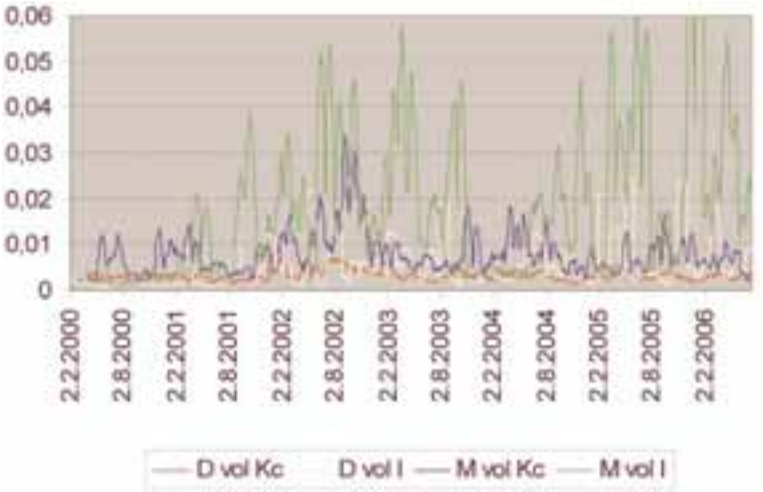
4 Nesymetrické profily

Finanční instrumenty, které byly popisovány, měly lineární a symetrické charakteristiky. V zásadě to znamená, že opačný vývoj finančního trhu přinesl stejnou změnu hodnoty finanční investice jen v opačném směru.

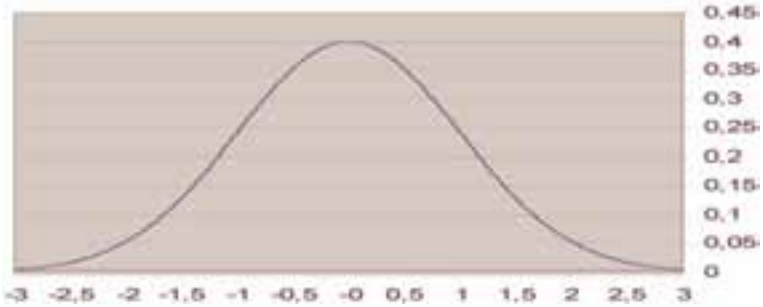
Poměrně jednoduchými nástroji (derivativy) lze například změnit směrnici čáry popisující vývoj hodnoty investice ze sklonu $\frac{1}{2}$ (tedy 10 % změny hodnoty finančního instrumentu znamená 10% zisk nebo ztrátu) na libovolný vyšší, či změnit směrnici na zápornou (derivativ nebo short selling).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Investory však přirozeně zajímá jiný profil – ten, ve kterém v případě příznivého vývoje dosahuje zisku, v opačném případě ztrátu netrpí:

Obr. 5

Profil opčního obchodu vzniká na jedné straně požadavkem kupujícího vyloučit ze „standardního obchodu (červená čára) vznik nepříznivého výsledku (žlutá čára), v kombinaci s tím, že prodávající opce nechce poskytnout toto pojištění zdarma (modrá čára)“.

Jakkoliv jsou opční obchody historicky známé a rozšířené, obchodování s opcemi na burzách má historii starou stovky let, matematický aparát sloužící k ocenění opcí byl vytvořen až v 70. letech Fischerem Blackem a Myronem Scholem z University Chicago. Umožňuje nejen teoreticky odvodit cenu opce, popsat její charakteristiky, ale také vytvořit strategie zajištění proti rizikům změn pohybu ceny opce.

Model, založený na určitých statistických předpokladech (markovský pohyb cen, efektivita trhu a normální rozložení výnosů), byl odvozen pro jednoduché opce na akcie ale byl rozšířen na složitější opční struktury.

Nejjednodušší verze modelu je následující (opce na nákup akcie, bez dividend a pře, při ceně S, s opcí na cenu za T let. Úroková sazba je r, volatilita σ):

$$C(S,T) = SN(d_1) - k\mathrm{e}^{rT}N(d_2),$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{K} + \frac{r+\sigma^2}{2}\cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

kde N je kumulativní funkce normálního rozložení.

5 Makroekonomické modelování

Rozhodování o měnové politice se v posledních dekádách stalo bezpochyby profilovou oblastí centrálních bank. S rozvojem finančního trhu roste význam změn

nastavení úrokových sazeb a existence likvidních instrumentů s dlouhou splatností klade důraz nejen na aktuální rozhodování, ale také na ovlivňování očekávání.

Na poptávku po větší transparentnosti a schopnosti zdůvodnit, jak centrální banka ekonomiku vnímá, reagovali centrální bankéři využitím komplexnějších a sofistikovanějších nástrojů pro ekonomické analýzy.

Složité ekonometrické analýzy, které se občas pohybují až v oblasti „data mining“, jsou v 90. letech vystřídány modelováním. Tento nástroj přinesl tolik potřebnou možnost simulovat paralelní procesy, které odrážejí lépe ekonomickou realitu, kde „vše souvisí se vším“. Situace byla usnadněna také díky lepší a jasnější definici cíle centrální banky, kterým se stala migrace na režim cílování inflace.

Po matematické stránce se jedná o rozvoj dvou nástrojů:

1. samotného vytváření modelu, tedy popisu ekonomických vazeb. Tento proces musí zahrnovat i počáteční kalibraci modelu a interpretaci toho, zda výsledky odpovídají povědomí o fungování ekonomiky,
2. programování a řešení modelů, obvykle pomocí komplikovaných numerických algoritmů.

Pro dokreslení lze uvést příklad velmi jednoduchého tzv. gapového[1] modelu uzavřené ekonomiky[2], kterým lze simulovat reakci ekonomických subjektů na šoky a možnosti měnové politiky tuto reakci ovlivnit (Y je odchylka růstu od potenciálu, I odchylka úroků od rovnováhy a P je inflace):

$$Y = 0{,}8 \cdot Y(-1) - 0{,}2 \cdot (I - PI(+1));$$

produkční mezera Y je funkcí minulé produkční mezery a měnové politiky (reálných úrokových sazeb)

$$PI = 0{,}5 \cdot PI(+1) + 0{,}5 \cdot PI(-1) + 0{,}2 \cdot Y;$$

inflace je funkcí budoucí „modelově konzistentní“ a minulé inflace a současné polohy ekonomiky v cyklu (produkční mezery)

$$I = 0{,}5 \cdot I(-1) + 0{,}5 \cdot (1{,}6 \cdot (PI - TAR) + 0{,}5 \cdot Y);$$

úroky se mění dle odchylky inflace od cíle – TAR a dle aktuální polohy ekonomiky v cyklu.

[1] Model je označen jako gapový, protože nepřináší „predikci budoucího vývoje ekonomiky“, ale predikuje jen odchylku od rovnovážného trendu. Ten se v praxi pochopitelně může z mnoha důvodů měnit.

[2] Podchycení v praxi nutného požadavku na „otevřenost“ ekonomiky, tedy zahrnutí přinejmenším jejího zahraničního obchodu, vede pochopitelně ke značné komplikovanosti modelu.

Jak je vidět, tak tento simultánní proces je třeba řešit numericky[3], například pomocí vlastního programu v softwarových produktech jako MATLAB, GAUSS nebo softwarech vytvořených pro řešení nelineárních systémů rovnic s vpřed-hledícími modelově-konzistentními očekáváními (Dynare, Winsolve). Ve skutečnosti jsou moderní makroekonomické modely současnosti samozřejmě mnohem složitější a jsou odvozeny z mikroekonomického optimalizačního chování ekonomických subjektů. I tak však pochopitelně nemohou podchytit celou komplexnost ekonomických faktorů v reálné ekonomice.

Na závěr této krátké exkurze do alespoň nejnižších vrstev využití matematického aparátu v oblasti ekonomie a financí se sluší podotknout, že toto jsou opravdu jen ty nejjednodušší případy, rutinně používané v každodenní praxi ekonomů a účastníků finančních trhů. Jako v téměř každé oblasti bádání, teoretický výzkum stejně tak jako nejpokročilejší účastníci finančního trhu používají rutinně technologie mnohem komplexnější.

[3]Kromě vyřešení simultánního systému je potřeba odvodit modelově konzistentní očekávání pro vpřed-hledící veličiny.

Pravděpodobnost a statistika v našich životech

Ivan Saxl

Abstrakt

Příspěvek je věnován náhodným jevům ovlivňujícím naše životy a každodenní rozhodování. Krátce je zmíněn vznik současné teorie pravděpodobnosti a její filosofické interpretace. Závěrem jsou uvedena doporučení pro systematické vzdělávání žáků v oblasti hodnocení náhodných jevů.

1 Úvod

Prvním náhodným jevem, jehož se v životě účastníme a případně se na něm i aktivně podílíme, je naše narození. Jako řada jiných náhodných jevů má pouze dva možné výsledky – budeme žít nebo budeme mrtví. Oba tyto výsledky jsou důsledky součinnosti celé řady dalších víceméně náhodných jevů, počínaje okamžitým zdravotním stavem matky a konče schopnostmi pomáhajících lékařů a zdravotních sester, jejichž přítomnost je ovšem následkem šťastné shody okolností, že auto odvážející rodící matku do porodnice nebylo zadrženo dopravní zácpou.

Náhodnost tohoto prvního životního jevu si ještě neuvědomíme, ale další náhodné jevy už vnímat budeme a budou nás provázet od prvních okamžiků života až do jeho konce. V závislosti na okamžitém obtížně popsatelném stavu našich buněk budeme mít pocity, jež budeme většinou jen obtížně ovlivňovat a pro něž si budeme vymýšlet názvy jako únava, nálada, čilost, hlad, žízeň, strach, závist, hněv, nemoc atd. Postupně se alespoň některé z nich naučíme očekávat, zčásti ovládat a potlačovat či rozvíjet. Budeme prožívat období opakovaných rituálů (spánek, mytí, krmení), které jsou však občas z důvodů pro nás nepochopitelných narušovány. Zvykneme si na to, že i ony jsou náhodnými jevy vyskytujícími se s jistou relativní četností. Mohli bychom říci, že intuitivně chápeme jejich elementární pravděpodobnost, tj. jak často či zřídka k nim dochází. Obecně známý je odlišný vývoj jedinců z rodin rozvrácených hádkami, alkoholismem, drogami či chronickou nemocí některého z rodičů, jejichž život je od počátku provázen nepředvídatelnými průvodními jevy.

Po jistou počáteční dobu svého života se ve svých myslích (opět jeden z nejasných termínů) považujeme za objekt zcela unikátní a s ničím nesrovnatelný. Rodina je totiž velmi nesourodý soubor jedinců s rozdílnými rozměry, právy i aktivitami, který je definován jejich společným pobytem v našem okolí s dočasnými odchody a návraty a nám se nikdo nepodobá.

Náš vstup do školky či školy tuto situaci zásadně mění. Najednou se stáváme prvkem poměrně homogenního souboru a musíme se začít srovnávat s jeho ostatními členy. Začínáme chápat rozdíly ve stejnosti a do našeho života vstupuje popisná statistika. Zjistíme, že na první pohled homogenní soubor se nám rozpadá na dvě zhruba stejně početné části podle pohlaví (tedy s použitím zavedené statistické terminologie podle *nominálního*[1] měřítka či znaku), které se dále diferencují podle výšky, váhy, síly, sociální přizpůsobivosti a dalších vlastností. Ve škole pak přibude klasifikační hodnocení, které soubory dále diferencuje. Je to první důsledný vstup číselného hodnocení, byť i jen podle charakteristik *ordinálních*, tj. umožňujícího vzájemné srovnávání kvalitativních znaků. *Poměrová* měřítka se vyskytují jen u výšek a vah, jejich numerické hodnoty však alespoň v počátečním období nemají velký praktický význam a převládá přibližné optické hodnocení.

Popisné statistice zůstáváme věrni po celý život při svých přechodech z jedné lidské skupiny (souboru) do jiné s vyhraněným smyslem pro nositele maximálních a minimálních charakteristik (tedy pro *rozpětí* **souboru**) i pro jejich mediány. V pozdějším životě ovšem intuitivně provádíme i hodnocení výběrová, která se opírají o dílčí zkušenosti s několika členy nejrůznějších souborů s nějakou společnou charakteristikou: povoláním, národností, stářím a samozřejmě pohlavím. Je ovšem nesporné, že tato naše subjektivně laděná výběrová šetření, prováděná obvykle na souborech omezeného *rozsahu* často vedou k chybným odhadům.

Vybraným příkladům uplatnění pravděpodobnosti a statistiky v našich životech se budeme věnovat v dalších částech příspěvku. Zde již jen připomenu, že všechny nás čeká jedna z mála životních jistot – smrt. Protože však nevíme kdy nás potká, můžeme se opírat pouze o demografická data udávající pravděpodobnost úmrtí v závislosti na věku, náš zdravotní stav a dědičné dispozice atd., a tak i tato jistota z nejjistějších je pro nás nejistotou co do realizace v čase.

2 Z dějin pravděpodobnosti

Zmínku o výběrovém šetření (odhad počtu listů stromu) najdeme již v indickém eposu Mahábhárata, v Bibli jsou náhodné jevy využívány k liturgickým účelům i k dělení majetku či země. Podobně je tomu v Talmudu, kde je navíc i řada

[1] *Nominální* charakteristiky popisují disjunktní nečíselné vlastnosti – kategorie (pohlaví, barva), *ordinální* charakteristiky popisují jednoznačně uspořádatelné nečíselné kategorie (vojenské hodnosti, počet hvězdiček hotelu, stupeň vzdělání, školní známky), *poměrové* znaky určují vlastnosti měřitelné pomocí zvolené jednotkové míry.

jednoduchých pravděpodobnostních úvah a z nich vyvozených pravidel. Tacitus v *Germanii* popisuje užití náhodně hozených tyčinek s runami, k věštbám a liturgickým účelům sloužily zřejmě i egyptské kostky s reliéfy Osirise, Isidy a dalších bohů. Kolem roku 1400 př. Kr. se v Egyptě ustálilo dnešní značení kostek se součtem 7 na protilehlých stěnách. Popularita her v kostky byla v antickém světě značná; nalézáme o tom řadu zmínek v literatuře, počínaje Hérodotovými *Dějinami* přes Suetoniovy *Životy římských císařů*, spisky Lúkiánovy a poezii Propertia a Iuvenalise. Kostky se objevují na řeckých mincích i na keramice, byly oblíbené u Etrusků i Římanů a obrazy hráčů s kostkami se dochovaly i na freskách z Pompejí. Kombinatorické úvahy jsou rovněž ve staroindické literatuře, ve vztahu k četnosti součtů při hře dvěma či třemi kostkami se objevují již ve středověku. Vesměs je používáno pravidlo, že určitý výsledek je tím častější, čím více způsobů k němu vede, např. při hodu dvěma kostkami dostaneme součet $5 = \{2+3, 3+2, 1+4, 4+1\}$ dvakrát častěji než součet $3 = \{1+2, 2+1\}$.

Počátek dnešní teorie pravděpodobnosti se obvykle datuje korespondencí B. Pascala (1623–1662) a P. Fermata (1601–1662) vedenou v roce 1654 a věnovanou po staletí známé úloze o rozdělení sázky: *dva hráči A, B míčové hry se dohodnou, že smluvenou sázku získá ten, kdo první dosáhne šesti bodů. V okamžiku, kdy stav je* $5:3$ *pro hráče A, musejí hru ukončit. Jak se mají o sázku rozdělit?* O její řešení se neúspěšně pokoušela řada italských renesančních matematiků jako L. Pacioli (1445–1517), N. F. Tartaglia (1499–1557), G. Cardano (1501–1576). Ke správnému řešení $(7:1)$[2] se dostal nejblíže G. F. Peverone (1509–1559), který dostal poměr $6:1$ a první použil principu úměrnosti obecně přičítaného Cardanovi: *Při řešení nejisté úlohy v budoucnosti máme uvažovat pouze to, co se může stát, a nikoliv to, co se již stalo.* Je zřejmé, že tímto obecným pravidlem se neřídí ani hráči sázející v ruletě celé jmění na červenou poté, co šestkrát vyšla černá, ani organizátoři tak vysoce nejistých a obtížně předvídatelných jevů, jakými jsou dostavby přehrad a elektráren, když se dožadují dalších částek při překročení původního rozpočtu s odkazem na náklady již vynaložené.

Další rozvoj teorie pravděpodobnosti je spojen se jmény Ch. Huyghense (1629–1695), Jakoba Bernoulli (1654–1705), P. R de Montmorta (1678–1719) a především A. de Moivrea (1667–1754), jehož kniha *The Doctrine of Chances* vycházející v roce 1718 a postupně rozšiřovaná ve vydáních z let 1738 a 1756 je dodnes aktuálním a soustavně reprintovaným zdrojem pravděpodobnostních úloh a problémů založených na kombinatorice elementárních stejně možných jevů. Mimo jiné je v ní poprvé odvozeno normální (Gaussovo či Gaussovo-

[2] K dokončení je třeba maximálně tří her a Fermatovo řešení vypočítává možné kombinace výsledků všech možných trojic, tj. AAA, AAB, ABA, BAA, BBA, BAB, ABB, BBB (písmeno označuje vítěze hry). Hráč BBB vyhrává pouze při poslední kombinaci, hráč A při ostatních sedmi. Všimněme si, že zde s **násobnou** četností vystupují případy, které by skončily již po první nebo druhé hře, jako A●●, BA●.

Laplaceovo) rozdělení jako limita rozdělení binomického[3], čehož si nikdo nevšiml až do konce XIX. století a teprve ve dvacátých letech XX. století to zpopularizoval přední statistik K. Pearson (1857–1936). Je jistě zajímavé, že při rozšíření her založených na náhodě, které podle archeologů provázejí lidstvo po několik desítek tisíc let, vznikla matematická teorie pravděpodobnosti tak pozdě. Možné zdůvodnění nalezneme v úvodu Montmortovy knihy *Essay d'analyse sur les Jeux de Hazard*:

Především ve hrách založených na náhodě se projevuje slabost lidské mysli a její sklon k pověrčivosti... Obecným principem této pověrčivosti je připisování dobra i zla a všeho, co se v tomto světě děje, osudové síle, která se neřídí žádným řádem ani žádnými pravidly. Věří, že je třeba uchlácholit tuto slepou sílu, kterou nazývají Štěstěnou, a donutit ji, aby jim byla příznivá a řídila se pravidly, která pro ni vymysleli.

3 Filosofické interpretace pravděpodobnosti

Klasická doba rozvoje teorie pravděpodobnosti a ještě i většina úvah XIX. století řešila soustavy nejistých dějů ekvivalentních v tom smyslu, že jejich elementární komponenty jsou stejně možné. Pravděpodobnost sama pak byla mírou možnosti jejich realizace a zároveň vyjádřením naší nedokonalé znalosti. Laplaceův Démon[4] by zcela jistě věděl, zda při tom či onom konkrétním hodu mincí padne panna nebo orel. Na počátku XX. století se však začaly rozvíjet poněkud komplikovanější filosofické teorie pravděpodobnosti, které se rozpadají do dvou skupin. Podle skupiny interpretací *objektivních* je pravděpodobnost na nás zcela nezávislá. Pokud charakterizuje náhodný jev opakující se v identických podmínkách, je limitou jeho relativní četnosti pro velký počet pokusů. Tato interpretace se nazývá *frekvenční* nebo také *fyzikální* a spadají pod ni vedle mnohých fyzikálních měření také hry s kostkami, kartami či ruleta. Její variantou je interpretace *propenzitní*, uvažující pravděpodobnosti unikátních jevů opakujících se pouze jedenkrát, jako např. rozpad radioaktivního atomu.

Druhou skupinu tvoří interpretace *epistemologické*, tj. založené na naší zkušenosti. V jejich *logické* větvi založené J. M. Keynesem se schopnost odhadnout pravděpodobnost jevu přičítá naší vnitřní logické schopnosti, která u většiny lidí za daných okolností dá její zhruba stejný odhad. Naproti tomu *subjektivní* interpretace F. P. Ramseye a B. de Finneti předpokládá, že odhad pravděpodobnosti děje je čistě subjektivní a plně závislý na osobě, která jej provádí.

[3]Binomické rozdělení udává pravděpodobnost, že při n opakovaných realizacích alternativního děje (např. hod mincí) dostaneme jeden ze dvou možných výsledků právě k-krát, $0 \leq k \leq$ $\leq n$.

[4]Personifikace nekonečně inteligentní bytosti, o níž Laplace říká, že kdyby měla k dispozici všechny možné informace, minulost i budoucnost by pro ni existovaly stejně reálně jako přítomnost.

4 Pravděpodobnost v denním životě

Náš vztah k nejistým jevům je podivně obojetný. Na jedné straně doufáme ve šťastné náhody v hrách, jsme okouzleni náhodnými setkáními či odhaleními, důvěřujeme reklamám i podvodným návodům na zbohatnutí, na druhé straně se často zbytečně obáváme nepříznivých událostí, i když jejich uskutečnění je velmi nepravděpodobné. Oboje však ponecháváme v čistě intuitivní oblasti, aniž se snažíme pravděpodobnost události jakkoliv kvantitativně odhadnout. Jistoty samozřejmě v oblasti náhodných jevů dosáhnout nemůžeme, ale hlubší porozumění nás může v některých situacích od mnohého uchránit a dodat nám odvahy v případech jiných. Z výše uvedených interpretací pravděpodobnosti se v našem životě uplatňují obě. U pravidelně se opakujících jevů se musíme řídit frekvenční interpretací, u ostatních spíše subjektivní.

Předně je však nutné si uvědomit, že náhodné jevy jsou všude kolem nás a že se na nich neustále podílíme nebo v nich jen vystupujeme. Každá cesta do práce, za nákupy či za rekreací, vaření i konzumace jídla, úklid, četba i sledování televize nebo návštěva divadla, vše může, ale zdaleka nemusí dopadnout tak, jak si to předem naplánujeme. Tramvaj č. 24 nejede, oděv není v požadované velikosti, cestovní kancelář právě zkrachovala, nakoupili jsme potraviny se salmonelami, porouchal se vysavač, v knize chybí stránka, v televizi je změna programu a představení pro onemocnění hlavního představitele odpadlo nebo na ně nemůžeme jít, protože nám přijela nečekaná návštěva. Od těchto situací se odvíjejí další náhodné děje a my je vesměs s většími či menšími úspěchy zvládáme proto, že jejich variabilita je naší denní zkušeností. Přitom se nejedná o jevy tak snadno popsatelné, jako jsou ony hody mincí a kostkou, z nichž se naše teorie pravděpodobnosti vyvinula. Nemáme-li přicházet do práce v polovině případů pozdě, musíme dobře odhadnout **možná** dopravní zpoždění a nepravidelnosti, oděv si jdeme koupit v **dostatečném** předstihu, nakupujeme ve **spolehlivé** prodejně atd. Tam, kde to jde, vycházíme z ověřené **opakované** zkušenosti, přičemž zároveň připouštíme **rozumné** riziko. Potud naše aktivity, u nichž tučně vytištěná slova označují výsledky našich intuitivně pravděpodobnostních úvah.

Náhodné ovšem není jen to, co se kolem nás děje, ale všechno, co nás obklopuje. Žádné dva výrobky nejsou dokonale stejné. Odchylky v jejich jednotlivých parametrech mají předepsané tolerance, jejichž dodržování ověřujeme náhodným výběrem; nejsou-li dodrženy, je výrobek vyřazen jako zmetek. Když se mezní tolerance několika součástek složitého výrobku nevhodně střetnou, dostaneme zmetek kontrolou nezachycený. Zvláště v případě motorových vozidel jsou rozdíly mezi jednotlivými vozidly velmi markantní a je za ně vesměs zodpovědná určitá kombinace tolerancí jednotlivých dílů.

Jak je to s živými organismy? Jednotlivé exempláře octomilky obecné (*Drosophila melanogaster*) i člověka rozumného (*Homo sapiens sapiens*) jsou náhod-

nými od sebe se víceméně lišícími realizacemi svého druhu, podobně jako jimi jsou hrušně obecné (*Pyrus communis*) a také všechny jejich plody. Název rodu je „abstraktní idea“ podobná matematickým abstrakcím *kruh* či *čtverec*, jejichž realizacemi jsou ovšem jen přibližné kruhy a čtverce, protože klasické matematické abstrakce jsou příliš přísné[5]. Promyšlení a pochopení tohoto triviálního konstatování nám v mnoha ohledech usnadní rozhodování v osobním i společenském životě. Ze všeho nejdříve se musíme rozloučit se všemi hypotézami o rovnosti a z nich plynoucími představami o společenském uspořádání i o rovných nárocích a šancích. Pro jednotlivé specifické oblasti od schopnosti pochopit krásu a důmyslnost matematiky po nároky na finanční zajištění, množství volného času, pracovní aktivitu a především v záležitostech zdraví a rozmnožování si musíme představit nějakou přibližně zvonovou křivku normálního nebo jemu podobného rozdělení. Toto rozdělení je limitou něčeho tak jednoduchého, jako je opakovaný alternativní proces – tedy zjednodušeně odpovědi „ano–ne“ na naše otázky po kvalitách, schopnostech a možnostech. Připomeňme, že ačkoliv odvození této limity předpokládá počet pokusů $n \to \infty$, aproximace normálním rozdělením je snesitelná již při $n = 8$ a velmi dobrá při $n = 30$. A dále, že v oboustranném rozmezí velikosti tzv. směrodatné odchylky kolem střední hodnoty budeme mít kolem 68 % jedinců, ve dvojnásobném rozmezí 95 % jedinců a mimo rozmezí trojnásobné nám ještě pořád zbývá 1 %, to je jeden ze sta – to přece není tak málo.

Zkusme tuto představu o různosti aplikovat na třídu, ve které učíme; to je zhruba právě oněch 30. Obávám se, že hlubší vztah k matematice není „průměrně“ rozdělenou schopností, a tedy že ty, kteří jej mají, musíme hledat mimo oněch 68 %, na jednom z chvostů rozdělení, tedy u 16 %, tj. zhruba u pěti žáků z našich 30. Když si vzpomenu na svá studijní léta, tak mi tento odhad připadá docela dobrý. A co tedy s ostatními 25? To je otázka, kterou v rámci pravděpodobnosti a statistiky neřešíme.

Jinou vhodnou oblastí aplikace podobných úvah jsou léky a testy jejich účinnosti, neúčinnosti či dokonce škodlivosti. Obvykle se požaduje 95% spolehlivost a obecná představa je, že to je postačující, ba skoro jisté. Asi něco na způsob, že na 95 % někam přijdeme nebo že na 95 % jsem doma zamkl. To je však hluboký omyl: toto číslo znamená, že na jednoho pacienta z dvaceti lék nebude působit nebo bude mít negativní účinky. Jeden z dvaceti je málo? Ale to je námitka formálně statistická, mohli bychom se dohodnout, že to musí být 99 %, i když tím pouhým jedním ze sta mohu být právě já. Podstatnější je skutečnost, že výpočet je založen na představě, že všichni testovaní jsou stejní, že

[5]Nakreslené i vytvořené objekty nikdy nemohou být tak přesné, jak to postulují jejich definice. G. Matheron a poté také D. G. Kendall zformulovali v šedesátých a sedmdesátých letech XX. století teorii náhodných množin, z níž se postupně vyvinula rozsáhlá samostatná část teorie pravděpodobnosti. V jejím rámci se najde místo pro všechny možné „nepřesné“ geometrické objekty.

výběr jedinců je nestranný a že výzkum vlivu nového léku je něco jako hod mincí. Na neaplikovatelnost běžné statistiky v lékařství upozorňoval Johannes von Kries (1853–1928) již v 19. století. Pacienti, kteří onemocněli nějakou chorobou, nejsou nestranným výběrem – vybrala je choroba, a navíc jejich onemocnění nemá stejný stupeň, protože ten nedovedeme spolehlivě určit, a jejich schopnost se uzdravit i bez léku je různá. A zdraví dobrovolníci sice mohou být vybráni nestranně, ale jejich rekce na lék může být zásadně odlišná od reakce nemocných, jak se nedávno prokázalo ve Velké Britanii. Kromě toho se také nedávno bezpečně prokázalo v USA, že farmaceutické firmy mají tendenci statistické výsledky falšovat.

Vhodnou pomůckou pro naše rozhodování je tzv. *užitek* $u = p_V V - p_Z Z$, kde V a Z jsou subjektivní nebo objektivní hodnocení výhody a ztráty při realizaci nejistého děje a p_V, p_Z jsou jejich subjektivně odhadnuté pravděpodobnosti. Např. se rozhodujeme mezi preferovanou akcí A (návštěva letního kina s Oscarovým filmem, vyžadující dobré počasí – pravděpodobnost $p_v = 0{,}3$), kterou oceníme 300 body, a komplementární akcí B (televizní estráda doma), které dáme 100 bodů. Potom $u = 0{,}3 \times 300 - 0{,}7 \times 100 = 20$ a budeme riskovat zmoknutí v kině.

Jindy je rozhodování komplikovanější. Pravděpodobnost, že během roku havaruji je 0,01, cena pojistného je 5 000 Kč, za zničené auto dostanu od pojišťovny maximálně 100 000 Kč. Potom $u = (0{,}01 \times 100\,000 - 0{,}99 \times 5\,000)$ Kč $=$ $= -4\,850$ Kč. Pojistka je z tohoto hlediska nevýhodná, ale možnost finančně nevyčíslitelného těžkého zranění provázejícího havárii naši rozvahu změní a pojistíme se, i když z finančního hlediska je to akce ztrátová.

Výskyt nemocí a epidemií (zvláště neznámých chorob) je opět oblastí plnou pravděpodobnosti a statistiky. Média obvykle prezentují absolutní počty onemocnění v jisté oblasti, nikoliv relativní hodnoty vzhledem k počtu obyvatel, a už vůbec nejsou uvažovány směrodatné odchylky. Jestliže ve městě s 10 tisíci obyvatel je v průměru 10 onemocnění, je to stejná situace, jako 100 onemocnění ve městě s desetinásobkem obyvatel[6]. Jestliže v prvním městě je směrodatná odchylka počtu onemocnění rovna třem, pak krátkodobá snížení počtu nemocných na 7 nebo dokonce 4 či naopak zvýšení na 13 až 16 nejsou důvodem k radosti nad ústupem epidemie ani důkazem jejího vzestupu. Detailní statistické sledování epidemií je důležité, velký význam má i sledování jejího prostorového rozmístění[7], vlivu předběžného očkování, hygienických opatření a jejich dodržování, efektu izolace nemocných atd.

[6]To je dost starý poznatek jak ukazuje citát z Talmudu: *Ve městě je 500 vojáků, tři zemřou ve třech dnech po sobě následujících. Pak je to mor. Ve městě je 1 500 vojáků, devět jich zemře ve třech dnech po sobě následujících. Pak je to mor.*

[7]Slavné jsou výsledky prostorového sledování šíření infekce, které provedli W. Seeman (1770–1812, epidemie žluté horečky v New Yorku v roce 1795) a J. Snow (1813–1858, cholera v Londýně v roce 1854), které vedly k odhalení zdrojů nákazy.

Standardně věnujeme také pozornost vraždám a jiným neobvyklým způsobům úmrtí, jež přispívají k celkové úmrtnosti pouze zlomky procent, zatímco zhruba šestinásobná úmrtnost na silnicích středem veřejného zájmu není[8].

Rozsáhlou oblastí aplikace kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky je rovněž genetika a celý vývoj života na naší planetě. Mendelova teorie dědičnosti, Galtonovy (1822–1911) statistické interpretace Darwinovy teorie přirozeného výběru, jeho objev regrese vlastností (např. výšky jedince) ke střední hodnotě a jeho pozorování o zákonech dědičnosti, z nichž se vyvinula posléze nacisty zkompromitovaná eugenika, Fisherovy metodiky práce s malými soubory nezbytné v zemědělství, jakož i současný vývoj těchto věd a debaty o plynulém či skokovitém charakteru evoluce jsou důraznou lekcí o realitě života na naší planetě, ovládané náhodnými jevy a jejich zákonitostmi[9].

5 Závěr

V didaktické literatuře se v posledních letech objevuje termín *statistická gramotnost*, tj. představa či omezená znalost metod sběru, úpravy a interpretace dat včetně jejich grafického znázornění, příp. i testování hypotéz. V zemích, kde výuka a osnovy nemají příliš dlouhou tradici (Nový Zéland, Austrálie, Jižní Amerika), je budování pravděpodobnostního cítění věnována velká pozornost. Seznamování se základními principy tvorby a hodnocení výběrů se doporučuje již od mateřské školky (diferenciace dětí podle kategorií – pohlaví, barva očí a vlasů, varianty oblečení – a tvorba odpovídajících histogramů např. pomocí kostek). Později je pozornost žáků obrácena k dalším vlastnostem žákovských souborů (zájmy, obliba školních předmětů, sporty, známkování) i souborů předmětů žáky obklopujících, rovněž ke srovnávání získaných datových souborů se soubory získanými v jiných třídách. Maximum iniciativy je třeba přenést na žáky a přesvědčit je, že data jsou o nich a že se jejich prostřednictvím něco dovídají o sobě i o svých zájmech a hrách. Takový **průběžný** kurz pravděpodobnosti a statistiky s častými odkazy i na jiné předměty[10] a vysokým podílem žákovské aktivity by měl realizovat každý učitel matematiky. Jeho zahrnutí do osnov není vůbec nutné a odměnou učitelova úsilí bude, že své žáky učí něco, co v životě určitě budou potřebovat, a že v nich rozvíjí hlubší porozumění něčemu, s čím se intuitivně musejí vyrovnávat již od narození.

[8] Např. zasažení bleskem s pravděpodobností řádově rovnou tisícině procenta je vždy zaznamenáno tiskem a televizí, i když nemusí být příčinou úmrtí: kubánský zemědělec Jorge Marquez přežil v roce 2002 zásah bleskem již po páté.

[9] Současně vydaná kniha J. Goulda: *Dinosauři v kupce sena.* Praha : Academia, 2005, je inspirativní diskusí (i když místy se spornými závěry), o vývoji života ovládaného náhodnými ději v uplynulých více než třech miliardách let.

[10] Např. distribuce počtu písmen ve slovech různých jazyků, doby vlády panovníků v různých obdobích, dělení zemí na správní oblasti a jejich geometrické i číselné charakteristiky atd.

LITERATURA

(Z mnoha možných odkazů jsou vybrány texty ke kapitolám 2 a 3 a především velmi přístupná a prakticky orientovaná populární kniha Rosenthalova.)

[1] DAVID, F. N. *Games, Gods and Gambling, A history of probability and Statistical Ideas.* Mineola (N.Y.) : Dover Publ., Inc., 1998.

[2] SAXL, I. Filosofické interpretace pravděpodobnosti. In J. Bečvář, E. Fuchs (edit.) *Matematika v proměnách věků III.* Praha : Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2005.

[3] ROSENTHAL, J. S. *Struck by Lightning. The Curious World of Probability.* Toronto : HarperCollins, Ltd., 2005.

PŘÍSPĚVKY V SEKCÍCH

Matematika, vzdělanost a vzdělávání

Jindřich Bečvář

Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na kritiku některých současných jevů ve školství a vzdělávání – všestranné snižování požadavků, soustavné reformování, zatracování faktografických znalostí a důsledného procvičování dovedností, úpadek vyjadřovacích schopností, nedůslednosti ve výchově studentů i doktorandů atd.

1 Úvod

V tomto článku bych se rád věnoval některým současným problémům školství a vzdělávací činnosti, které výrazně ovlivňují naši práci, práci učitelů matematiky.

Můj příspěvek je zaměřen na několik témat, která mě tíží, a o nichž předpokládám, že trápí i učitele základních a středních škol.

Důrazně upozorňuji, že se téměř vůbec nebudu zmiňovat o skutečnostech, které v dnešním školství považuji za pozitivní. Nebudu tedy chválit. Budu značně kritický, zejména k některým názorům, které nám jsou dnes a denně vnucovány. Nerad bych, aby byla tato stať chápána negativně, ale jako varování, výzva k zamyšlení a k nápravě.

2 Snižování požadavků

Tlak společnosti na soustavné zvyšování počtu studentů a absolventů středních a vysokých škol, financování škol podle počtu studentů a velké možnosti cestování a vydělávání peněz, které někteří studenti zneužívají, jsou podle mého názoru závažnými faktory, které negativně ovlivňují proces vzdělávání. Jejich důsledkem je *soustavné snižování požadavků na znalosti a dovednosti* studentů při přijímacích řízeních, pokud tato ještě existují, při následném studiu i při závěrečných zkouškách všech typů. Domnívám se, že případné zavedení školného tyto problémy ještě prohloubí; spíše by napomohlo zavedení vhodně stanovených a stupňovaných poplatků za opravné zkoušky.

Je obecně známo, že mnohé školy usilují všemi možnými prostředky o získání a udržení co největšího počtu studentů. Tato situace je silně demotivující

a mnozí studenti ji zneužívají, neboť dobře vědí, že na nějakou školu se dostanou a pokud to jen trochu půjde, škola je ze studia nevyhodí. Již přijetí ke studiu je mnohdy zárukou úspěšného absolvování té které školy. Některé školy nevyloučí ze studia ani toho, kdo má velký počet neomluvených hodin, neplní své povinnosti a podvádí.

Můžeme hovořit o „nastavení parametrů“ souvisejících s *kvantitou*, ale nikoli s *kvalitou*. Většího procenta studentů a absolventů středních či vysokých škol totiž dosahujeme hlavně *snižováním laťky* a *tolerováním neseriózního přístupu ke studiu*. O celkovém *zvýšení vzdělanosti populace* nemůže být řeč.

K všestrannému snižování úrovně studia vede nutně i to, že na střední školy přicházejí studenti, kteří nejsou ze základních škol na středoškolské studium řádně připraveni, absolventi středních škol nejsou připraveni ke studiu na školách vysokých. Řada studentů navíc *není mentálně pro příslušné studium zralá*. Mnozí ani *nechtějí studovat*, jde jim jen o *diplom*. Někteří nevědí, kolik práce skutečné studium obnáší, jiní to sice tuší, ale nejsou ochotni tolik času a energie do studia investovat.

Skutečný hlad po vědění a živelnou touhu se vzdělávat má jen malé procento populace. Poměrně málo studentů plní své studijní povinnosti na devadesát až sto procent, většina na padesát až devadesát procent a mnoho studentů jen pod padesát procent. Jsem přesvědčen, že snížením požadavků se výše uvedená situace v podstatě nezmění: opět bude jen několik studentů plnit své povinnosti na devadesát až sto procent, většina na padesát až devadesát procent a mnoho studentů pod padesát procent. *Čím méně po studentech chceme, tím méně dostáváme.*

Studenty je třeba nejrůznějšími způsoby ke vzdělávání *motivovat*, *inspirovat*, *přesvědčovat o kráse a užitečnosti vědění*, vést je k zodpovědnému plnění rozumně vymezených povinností. To je patrně nejzávažnějším a nejtěžším naším úkolem, velkou roli zde hraje *osobnost učitele* a zejména jeho *osobní příklad*.

Ke studentům je nutné přistupovat *diferencovaně*, co platí na jednoho žáka, neplatí na druhého. Přestože jsou požadavky na znalosti a dovednosti studentů stále měkčí, snažme se klást individuálně vyšší nároky na ty studenty, kteří jsou schopni a ochotni podávat v tom kterém předmětu vyšší výkon. K práci je třeba studenty někdy i trochu „přitlačit“. Většina z nich to později ocení.

3 Reformování

Našemu školství nesvědčí neustálé reformování. K němu docházelo ve velké míře za minulého režimu a dochází k němu s nezmenšenou intenzitou i dnes. Východní vzory byly zaměněny za vzory západní, rutinovaní reformátoři úspěšně změnili svou orientaci, přibyli k nim obdobní reformátoři další generace a navíc tzv. školští podnikatelé. Obávám se, že většině těchto lidí vůbec nejde o naše školství a vzdělanost, ale pouze o vlastní prospěch, kariéru, důležitost.

Pedagogičtí odborníci (naši i zahraniční) mění čas od času pojmy a termíny své vědy, posouvají jejich význam, sepisují nové práce více méně o tomtéž tak, že jen modifikují a „překládají“ své starší statě do „nového“ jazyka (osnovy, studijní plány, metodické pokyny, kurikula, standardy, kompetence, rámcové vzdělávací programy, školské vzdělávací programy atd. atd. ad infinitum). Výsledky své činnosti se bohužel snaží prosadit do praxe. Jejich snahy jsou pochopitelné, i oni mají povinnost vykazovat počty publikací, citací i své aktivity v experimentování a reformování.

Výsledky jejich činnosti však dopadají na mnoho dalších školských pracovníků, zejména na ředitele a učitele, kterým je tím většinou jen komplikován život, na žáky a studenty, na jejich rodiče a celou společnost.

Cílem školských podnikatelů, jako kterýchkoli jiných podnikatelů, je vydělávat peníze. Jejich šlechetná starost o stav našeho školství je většinou jen rétorikou a reklamou. Náš stát musí dát jejich aktivitám jasná pravidla a vymezit přesné mantinely.

Školští podnikatelé se soustřeďují zejména na prodávání nejrůznějších materiálů (hlavně testů, nyní i školských vzdělávacích programů), snaží se o povinné zavedení svých produktů na školy. Často postupují v úzké součinnosti s reformátory a ministerskými úředníky, kteří jim připravují půdu (např. prosazováním těch či oněch testů na prověřování znalostí a dovedností na nejrůznějších stupních a typech škol – žáci, studenti či školy musí platit přípravu a následné vyhodnocování testů).

Pedagogičtí reformátoři i školští podnikatelé velmi často kritizují znalosti faktografické, zpochybňují důsledné a soustavné procvičování dovedností. Z neúspěchu vzdělávací činnosti viní především školu a učitele, „zapomínají“ připomenout malou snahu samotných žáků a studentů, vliv rodičů a celospolečenskou situaci, která vytváří podmínky i atmosféru, v níž vzdělávání probíhá. Jejich bojovnost podporovaná velmi často sdělovacími prostředky a často i rodiči žáků a studentů naše školství devastuje. Kvalitní a nároční učitelé jsou pod tímto trvalým tlakem soustavně nuceni snižovat své nároky, někteří ze škol odcházejí, nepřizpůsobiví učitelé mají na svých školách většinou problémy, ostatní učitelé se snaží „pružně se přizpůsobit“ jakékoli situaci. Mnozí absolventi učitelského studia z řady důvodů do škol vůbec nenastupují. O to víc je třeba si vážit těch učitelů, kteří drží vysokou laťku, učí dobře a s nadšením a odolávají vnějším tlakům.

V poslední době dopadla na základní a střední školy, jejich ředitele a učitele povinnost tvorby tzv. *školských vzdělávacích programů*, formulují se tzv. *kompetence*. Myslím, že se ve většině případů jedná pouze o sepisování *formálních slohových cvičení*. To učitele jednak znechucuje, jednak odvádí od jejich vlastní práce – od důkladné přípravy na výuku, od zadávání a opravování domácích úkolů, od přípravy a opravování prověrek, slohových prací atd., od individuálního přístupu k žákům a studentům a v neposlední řadě od jejich vlastního odborného studia a všestranného rozšiřování obzorů.

Důsledkem zavedení školských vzdělávacích programů bude patrně další rozrůznění programů i úrovní jednotlivých škol. Při narůstající mobilitě obyvatelstva, po které se stále volá a ke které snad dojde v důsledku pohybu populace za prací, budou mít děti větší a větší problémy při přechodu z jedné školy do druhé, neboť se jednotlivé školy budou často diametrálně lišit. Úrovní, charakterem, skladbou předmětů, jejich časovým řazením atd. Obávám se, že se od dřívější jednotné školy vzdálíme více, než je zdrávo (princip kyvadla). Stručně řečeno: diferenciace ano, ale v rozumné míře.

Jsme rovněž svědky závažné reformy – rozdělení vysokoškolského studia na bakalářský a magisterský stupeň. Domnívám se, že čas, energie i prostředky, které byly do tohoto rozdělení v řadě oborů vloženy, nejsou dostatečně vyváženy přínosem této reformy. Zejména pro studium učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů nemá rozdělení na bakalářský a magisterský stupeň rozumný smysl. Na druhé straně je vznik řady bakalářských oborů, které mají rozumný výstup, patrně pozitivním jevem, neboť umožňují maturantům zvýšení kvalifikace.

4 Sdělovací prostředky

Neblahou roli hrají sdělovací prostředky svou povrchností, neobjektivitou, honbou za senzacemi a kontroverzními názory. Dávají velký prostor pavědám, různým šarlatánům, pochybným reformátorům, svoji pozornost zaměřují většinou jen na formální stránky vzdělávání, např. kolik studentů bylo nebo nebylo ke studiu přijato apod. Přispívají rovněž k všestrannému podrývání morálky, a to mimo jiné i relativizováním čehokoli.

Vytvářejí atmosféru zaměřenou proti poctivému vzdělávání, proti škole a učitelům, zpochybňují klasickou vzdělanost, tradiční koncepci vzdělávání, výchovu ke kázni a zodpovědnosti, význam matematiky, přírodovědného a technického vzdělávání, zatracují rozvíjení paměti, soustavný a důsledný nácvik nejrůznějších dovedností, zadávání domácích úkolů, domácí přípravu, někdy i povinnou školní docházku. Přispívají ke zpochybňování klasických výukových disciplin, propagují neuvážené a nepřipravené spojování jednotlivých předmětů, zavádění nejrůznějších „náhražkových“ předmětů, únikových studijních témat, problematických výukových metod atd.

Jednostranně zdůrazňují *práva žáků a povinnosti učitele*, o *právech učitelů a povinnostech žáků* však většinou mlčí.

Veškerá média s potěšením poskytují prostor „slavným lidem“, kteří se arogantně chlubí svými školními neúspěchy, svými neznalostmi, svou averzí vůči vzdělanosti. Postrádám větší množství seriózních televizních pořadů o vědě, o práci vědců a učitelů. Jejich cílem by mělo být vzdělávat diváky, upozorňovat na ušlechtilé hodnoty a pozitivně motivovat mladou generaci.

Náš problém je i v tom, že jsme se ještě nenaučili vnímat všechny projevy světa, který se u nás již druhé desetiletí utváří. Některým jevům přikládáme

bohužel větší význam než zasluhují, např. tomu, co prezentuje televize. Ta často informuje jen o negativních událostech a my pak máme pocit, že dobré věci se vůbec nedějí.

5 Vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život

Neustálé snižování nároků bývá zdůvodňováno sloganem *Vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život.* Tento požadavek slyšíme a čteme velmi často, bývá bohužel zneužíván nejen proti matematice a přírodním vědám, ale i proti dějinám apod. V souvislosti s výše zmíněným snižováním úrovně vzdělávání jsme svědky nejrůznějších návrhů na redukci počtu výukových hodin učiva klasických předmětů, zejména matematiky. I někteří učitelé matematiky navrhují např. vynechat na střední škole učivo o kvadratické rovnici či výuku algoritmu dělení na škole základní. Přitom jsou obě výše uvedená témata pro matematiku a rozvoj myšlení velmi plodná; míním tím názorné a inspirující odvození vzorce pro kořeny kvadratické rovnice (tzv. převedení na úplný čtverec, a to algebraické i geometrické) a poukázání na geometrické a analytické souvislosti (tj. parabola a její poloha vůči ose x), či pochopení toho, co je to algoritmus. Právě takováto témata mohou některé žáky oslnit krásou a logikou matematiky, viděním souvislostí, pochopením příčin, úspěšností algoritmického myšlení. A takovýchto témat se má škola zbavit? Je třeba si též uvědomit, že výsledkem pochopení a ovládnutí určitého souboru faktů a dovedností je *metodické poznání*, které má obecný charakter a s výchozím souborem faktů a dovedností má již jen málo společného.

Pokud se nad sloganem *Vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život* hlouběji zamyslíme, uvědomíme si, že ze školních vědomostí využije každý z nás ve skutečném životě opravdu jen nepatrnou část. Pokud ovšem pojmy *život* a *potřebovat pro život* chápeme doslovně a velmi zjednodušeně.

Autor těchto řádků ke své základní existenci opravdu nepotřeboval vědět, kdo byla a co napsala Božena Němcová nebo Ernest Hemingway, kdo byl Gaius Julius Caesar, Karel IV., že existuje Antarktida, Pamír a Ohňová země, jaký je vzorec vody a kyseliny sírové, jak vypadá trepka, vraní oko čtyřlisté, jak funguje noha havrana a jak se pozná čedič. V běžném životě nevyužil ani Pythagorovu větu, ani Archimedův zákon a nevyřešil žádnou kvadratickou rovnici.

Všechny poznatky a dovednosti získané ve škole i mimo ni však jeho život výrazně obohatily, přispěly k jeho všeobecnému rozhledu, vnitřnímu uspokojení a obrátily jeho pozornost k ušlechtilým hodnotám, o které však nejde hned v první řadě. Podstaně ovlivnily jeho vidění světa i způsoby potýkání se s ním.

Požadavek *Vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život* je třeba v jeho primitivní podobě, tj. tak jak bývá nejčastěji prezentován, zcela zásadně odmítnout jako naprosto pochybený. Ti, co tento požadavek hlásají, jej většinou užívají jako základní argument pro redukci některých předmětů a pro posílení jiných.

Je třeba si uvědomit, že vůbec není jasné, co se rozumí pod pojmem *život* a co tedy potom znamená být *potřebný pro život*, a že to, co je potřebné pro život jednoho jedince nemusí být potřebné pro život jiného jedince. A o jaký život se jedná? O ten současný nebo o ten budoucí? Víme, jaký bude život populace, kterou dnes ve školách vychováváme, např. za padesát let? A víme, co pro takový život bude potřebné?

Jsem přesvědčen, že základní a střední škola má do značné míry poskytovat všeobecné vzdělání, střední školy mají být navíc diferencovaně orientovány k budoucímu uplatnění (nebo dalšímu studiu) svých absolventů.

Na základní a střední škole je důležité ukazovat krásu všestranného vědění, které náš život obohacuje, demonstrovat pestrou škálu nejrůznějších dovedností. Praktický život škola reflektovat musí, ale zdaleka ne ve veškerém vyučovacím čase.

Snad by pomohlo, kdyby některý z našich časopisů vyzval své čtenáře k zasílání příspěvků zaměřených právě na téma „co z matematiky je opravdu potřebné pro život“; příspěvky by však musely být věcné, stručné a konkrétní.

6 Faktografické znalosti a paměť

Již řadu let je voláno po razantním omezování tzv. *faktografických vědomostí*, hanlivě se hovoří o nesmyslném *biflování*. Je módní zesměšňovat jakékoliv *hlubší znalosti*. Někdy dokonce slyšíme, že nemáme učit vůbec žádná fakta, ale pouze sdělovat, kde je najít. V tom případě bychom mohli po nástupu dětí do první třídy všem sdělit: „Jsou knihovny, je internet, jděte domů!“ A všechny školy ihned zrušit!

Důsledkem razantní redukce faktů ve škole je *postupná likvidace paměti*. Je to nebezpečný experiment, kterému podrobujeme další generace; nevíme, jaké důsledky může mít. Nevíme, jak nejrozumněji paměť cvičit, jaká fakta jsou v dnešní rychle se měnící době nejužitečnější. Víme, že mechanickou paměť je třeba rozvíjet do puberty, později je to obtížné, paměť je však třeba nadále „udržovat“.

Domnívám se, že rozvíjení a soustavné cvičení paměti je velmi důležité pro rozvoj mozku a myšlení. Za starých časů byla paměť ve škole cvičena soustavným vstřebáváním a opakováním faktů, ať již se jednalo o memorování básní, učení se hlavních měst států, slovíček, posloupností panovníků, historických událostí apod. Některé tématické oblasti určené k memorování je možno označit za užitečné, alespoň z hlediska obecně kulturního (historie, literatura apod.), jiné za více méně samoúčelné (např. dlouhé seznamy plodin, které se kde pěstují, seznamy průmyslových odvětví, která jsou kde rozvíjena).

Postrádám krátké, stručné a věcné články, které by přesvědčivě zdůvodňovaly, proč máme či nemáme při výuce matematiky věnovat čas a energii tomu kterému tématu. Diskuse na toto téma by mohla být vyhlášena některým z našich časopisů.

7 Fakta, myšlení, práce s informacemi

Místo *vyučování faktům* máme prý *učit myslet*. Nelze však myslet bez vědomostí, stejně jako nelze vařit z prázdné lednice a prázdné spíže. Nutným předpokladem myšlení jsou *schémata uspořádaných poznatků* v naší mysli. Kdo občas sepisuje nějaký odborný text, jistě potvrdí, jak těžce se formulují myšlenky, čerpáme-li vědomosti o tématu, které nám není blízké, pouze z několika rozložených knih nebo internetových stránek, protože je nemáme aktivně uloženy v potřebných souvislostech ve své mysli. Rovněž diskuse o jakémkoli tématu bez znalosti příslušných faktů a souvislostí je jen mlácením prázdné slámy a nemá valné ceny. Bez znalosti faktů si nelze o čemkoli udělat správnou představu. Je zbytečné planě diskutovat o poválečném odsunu, nemají-li diskutující hlubší znalosti o událostech předchozího desetiletí. Redukce výuky historie může mít horší důsledky než neznalost matematiky. Všeobecná nechuť k výuce dat a faktů je zneužívána k výraznému pokroucení historie – demagogové všeho druhu mají volné pole působnosti.

Fakta je dobré vyučovat v logických souvislostech a v nejrůznějších vazbách, schématech a strukturách, časových posloupnostech. Tak se jednotlivé poznatky lépe pamatují, navzájem se „podporují“ a současně se již navozuje myšlení o nich. Připomeňme např. logickou podstatu vzorců pro obsahy rovinných útvarů (obsahy jednoduchých rovinných útvarů se převádějí na obsah vhodného obdélníka) a vztah mezi vzorci pro obsahy rovinných útvarů a vzorci pro objemy těles (obsah základny násobený výškou, případně ještě koeficientem 1/3 u jehlanu a kužele, resp. koeficientem 2/3 u koule). Zmíněný tématický celek je souhrnem většího počtu faktů podporovaných logickými souvislostmi, které dobře demonstrují matematické myšlení. Zdůrazněme, že právě matematika rozvíjí různé myšlenkové postupy (kauzální, algoritmické, pravděpodobnostní a statistické myšlení, existenční a konstruktivní důkazy, důkazy sporem, kvantifikace atd.).

Souhrn informací, údajů a poznatků podaných bez souvislostí, struktury a vazeb je pouze neužitečnou *tříští faktů*. Nelze analyzovat a vyhodnocovat fakta, která neznáme v příslušných souvislostech. Výuka poskytující jen nesourodou a neuspořádanou tříšť faktů studentům mnoho nepřináší. Takovou výuku je třeba odsoudit.

Někdy je zdůrazňováno, že místo *faktů* máme učit *práci s informacemi*. Veškeré informace jsou však rovněž fakta. Zavrhujeme-li fakta, jak máme pracovat s informacemi?

Práce s informacemi je v rychle se měnící době stále důležitější. Nejde však pouze o jejich vyhledávání – od klasických způsobů až po ty nejmodernější, ale zejména o jejich porovnávání, zvažování jejich správnosti, serióznosti, významu, nalézání nejrůznějších souvislostí, příčin a důsledků, případně důvodů šíření atd. Z tisíců různě obsáhlých a někdy i protichůdných informací je třeba v krátkém čase umět vyhledat ty pravé.

Novou informaci, pokud je pro nás důležitá, bychom měli umět ve své mysli někam zařadit, konfrontovat ji se strukturou příbuzných faktů.

Člověk nevzdělaný, nepoznamenaný patřičnou průpravou, se v záplavě informací, balastu reklam a propagandy všeho druhu těžko orientuje. Zejména tehdy, když je nepoznamenán fakty. Takový člověk je velmi snadno manipulovatelný a zneužitelný pro cokoli.

8 Zatracování procvičování dovedností

Společně s odmítáním faktografických znalostí je zavrhováno i *soustavné a důsledné procvičování dovedností*, často se hovoří přímo o drilu. Slovo *dril* je chápáno negativně, ve škole se prý máme vyhýbat čemukoliv, co by dril jen vzdáleně připomínalo.

Zatracování faktografických znalostí a nácviku dovedností vede k výraznému snížení vědomostí a dovedností žáků a studentů. Právě proto přicházejí na střední školy ze škol základních v průměru horší studenti než před léty. Čas promarněný na základní škole se dá později těžko dohnat, střední školy se o to snaží s problematickými výsledky.

Nedostatečné procvičování znalostí a dovedností na středních školách způsobuje, že na vysoké školy přicházejí studenti, kteří nejsou schopni utvořit větu, sepsat souvislý odstavec, neumějí pravopis, neznají základní historická fakta ani jejich výklad, nedokáží správně pracovat se zlomky, upravovat algebraický výraz apod. Je těžké tyto studenty učit pracovat s maticemi, derivovat a integrovat, nemají-li základní početní dovednosti, nemohou-li se např. soustředit na příslušnou substituci, protože urputně zápasí se sčítáním a krácením zlomků.

Mnohé znalosti a dovednosti musí být v člověku „vrostlé“ a „zautomatizované“, aby o nich již nemusel přemýšlet. Těžko si představit fotbalistu, který během hry listuje v pravidlech, aby zjistil, co má nebo nemá udělat, aby nebyl ofsajd, aby se vyhnul rohu vlastního mužstva, kdy se může rukou dotknout míče apod. Těžko si představit hudebníka, který neustále hledá v rozložených tabulkách, o jakou notu v partituře jde, a kde patřičný tón najde na klaviatuře nebo hmatníku. Rovněž nelze úspěšně provádět např. Hornerovo schéma nebo Gaussův eliminační algoritmus, zápasíme-li těžce se čtyřmi základními početními úkony. Přitom vůbec nejde o to, abychom právě tyto algoritmy využívali v praxi, ale abychom pochopili podstatu věci, logické zákonitosti atd.

Marná sláva, je těžké si představit špičkového fotbalistu, hokejistu, hudebníka, zpěváka (abychom uvedli „viditelné“ profese), který neprošel v tom nejlepším slova smyslu drilem tréninků, posilování, cvičení a který své schopnosti každý den neudržuje a nerozvíjí. Špičkoví hudebníci někdy vzpomínají, jak je rodiče nutili k soustavnému několikahodinovému dennímu cvičení. A to (spolu s příslušným nadáním) vedlo k úspěchu.

Ani v matematice nelze uspět bez usilovné práce. Připomeňme jen slavný antický výrok: *Neexistuje královská cesta ke geometrii!* I král, chce-li pochopit geometrii, musí „v potu tváře“ studovat geometrické pojmy a geometrická tvrzení jako kdokoli jiný.

Tři britské učené společnosti varovaly nedávno před úpadkem matematických dovedností. *Pokrok ve zvládání matematiky závisí na redukci známých pracných postupů na automatické mentální pochody, které již nevyžadují vědomé myšlení. To vytváří duševní prostor, který studentovi umožňuje, aby se soustředil na nové neobvyklé ideje.* Někdy se v tomto smyslu říká, že člověku příslušné postupy *přejdou do krve.*

Předčasné užívání kalkulaček a počítačů vede k likvidaci matematických dovedností (ztráta početní praxe, neschopnost odhadu výsledku atd.). Je třeba pečlivě rozlišovat, kdy se má výpočetní technika užívat a kdy ne.

Pokud je někdo zcela zásadně proti častému procvičování dovedností, nechť si dobře rozmyslí, zda si nechá slepé střevo operovat od někoho, kdo pouze ví, kde si v lexikonu přečte, jak vypadá skalpel, a umí na internetu vyhledat návod pro operování slepého střeva, nebo od toho, kdo operačním drilem prošel. Asi bychom rovněž nepředpokládali, že řidič autobusu, který nás veze na dovolenou, soustavně listuje při jízdě pravidly silničního provozu, aby zjistil, kdy má přednost, zda může nebo nemůže přejíždět nepřerušovanou bílou čáru, zda má předjíždět vpravo nebo vlevo atd.

9 Postoje

Důležitější než znalosti a dovednosti jsou prý tzv. *postoje*; nejdůležitější je, aby student tu kterou činnost *dělal rád*, není již podstatné, zda k ní má patřičné vědomosti a dovednosti.

Představme si však pěvecký sbor sestavený z těch, kteří zpívat neumějí, ale zpívají rádi, zubaře, který stomatologické dovednosti nemá, ale vášnivě rád trhá zuby, kuchaře, který rád vaří, ale neumí to. Máme na místa řidičů autobusů přijímat jen podle toho, jak rádi tito lidé řídí?

Je jistě dobré, když svoji práci děláme rádi a se zaujetím, tj. když máme ke své profesi kladný postoj. Nelze však dávat přednost postojům před znalostmi a dovednostmi.

10 Porozumění jazyku, vyjadřovací schopnosti

Děti i studenti dnes čtou daleko méně než dříve (selhání rodičů, vliv televize, počítačových her apod.), výrazně se zhoršilo porozumění psanému textu, upadají vyjadřovací schopnosti, slovní zásoba. Redukována je tzv. povinná četba (selhání školy), ze škol rychle odchází spisovný jazyk. Za starých časů se na základní škole muselo *odpovídat celou větou*, dnes je to často označováno za buzeraci, neboť jednoslovné odpovědi „šetří čas“.

Dnešní studenti mají většinou velmi chabou slovní zásobu. Vypomáhají si všelijak, velmi často ukazovacími zájmeny: „Vezmu tu tu a pak tam dám ten ten.“ Přitom to první *tu*, resp. *ten* je zájmeno, zatímco to druhé *tu*, resp. *ten* je podstatné jméno!

Se špatným porozuměním psanému slovu se potýkáme i při vyučování matematice. Někteří vysokoškolští studenti matematiky dokonce nevnímají rozdíl mezi definicí a větou. Příčiny tohoto stavu nejsou v matematice, ale ve špatném chápání významu slov, struktury jazyka, v neschopnosti porozumět čtené nebo napsané větě. Z obdobných důvodů dělají dětem na základní škole stále větší potíže slovní úlohy.

Výrazné zhoršení práce s jazykem velmi úzce souvisí se zavrhováním paměti a důsledného procvičování pravopisu i slohu, a to již na základní škole.

Velkým problémem většiny studentů (i absolventů učitelského studia!) je pravopis. Narůstá sice počet absolventů vysokých škol, ale ti dělají stále více hrubých pravopisných chyb. Problémem je rovněž ústně nebo písemně zformulovat větu, souvětí, smysluplný odstavec. Vyjadřovací schopnosti i myšlení mají být podporovány psaním esejí, seminárních prací apod. Stále častěji se však setkáváme s případy, kdy žák, student, ba i doktorand odevzdá text stažený z internetu, a to pouze s drobnými úpravami nebo dokonce bez nich. Řada našich studentů si právě tak představuje „práci s informacemi“.

Tento stav je důsledkem *selhání pedagogů*, kteří zadávají nevhodná témata, nejsou dobře připraveni na danou problematiku, práce studentů buď vůbec nekontrolují nebo nejsou schopni rychle nalézt, odkud byly opsány či staženy, a v případě podvodu vyvodit důsledky.

11 Povinnost naučit

Škola má prý *povinnost naučit*. Jakmile je žák nebo student na školu přijat, předpokládá se často téměř automaticky, že absolvování školy je již jen otázkou uplynutí příslušného počtu let. Vina za případný neúspěch žáka je dávána škole. Podle mého názoru má škola pouze povinnost *vyučovat*, tj. nabízet žákům a studentům *možnost* něčemu se naučit, získat znalosti a dovednosti. Škola má též poskytovat svým žákům a studentům *přátelské prostředí*, má vyžadovat určitou *kázeň*, má *motivovat*, *inspirovat*, poskytovat široké možnosti k učení a v nejlepším slova smyslu *vychovávat*. Někteří žáci využijí toho, co jim škola nabízí, více, jiní méně.

Povinnost *učit se a naučit se* je na straně žáka a studenta.

Bude-li jednou zavedeno školné, výrazně zesílí představa, že škola musí za inkasované školné naučit, resp. předstírat, že naučila, tj. vydat diplom, vysvědčení, certifikát atd. („Vždyť jsem si zaplatil!“)

12 Kázeň a zodpovědnost

Škola má vychovávat ke kázni a zodpovědnosti, má *posilovat morálně volní vlastnosti* svých žáků. Učitelům však v současné době nejsou dány téměř žádné možnosti, jak kázeň a zodpovědnost ve škole udržet. Rodiče, veřejnost a sdělovací prostředky se v případě konfliktu často postaví proti učiteli, proti škole. Přesto je stále řada učitelů, kteří si kázeň zjednají silou své osobnosti, svým rozhledem, přiměřenou přísností, spravedlivostí a důsledností.

Často je zdůrazňováno, že žák či student má ve škole dělat jen to, co ho baví, že nemá být k ničemu nucen, a že když při vyučování ztratí zájem o prováděnou činnost, má si někde stranou odpočinout. Považuji tento názor za výrazně škodlivý. Navíc je ve sporu s tím, že *škola má vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život.* V životě totiž musíme velmi často zodpovědně konat i tu práci, která nás vůbec nebo v daném okamžiku nebaví. I k tomu mají být naši žáci a studenti ve škole vychováváni a vedeni.

Jak bychom se dívali na lékaře, kterého během operace přestane jeho činnost bavit a odejde od operačního stolu na procházku do parku, na pilota, který se před přistáním rozhodne místo sledování přístrojů číst knížku, na záchranáře a hasiče, kterým se nebude chtít zasahovat v okamžiku poplachu?

13 Stresování žáků

Někdy se dočítáme, že škola nemá žáky a studenty stresovat prověrkami, zkoušením, domácími úkoly, známkováním apod. Prý máme ve škole děti za každý jejich výkon *jen a jen chválit*, kritické či negativní hodnocení prý děti stresuje. Tím však často vychováváme lidi, jejichž velké sebevědomí není podloženo patřičnými znalostmi a dovednostmi, kteří nikdy netrpí sebemenšími pochybnostmi, nejsou schopni jakékoli sebereflexe a sebekritiky. Z nich se bohužel často rekrutují vedoucí pracovníci a politici.

Stanovisko, že žáci a studenti nemají být ve škole stresováni prověrkami, zkoušením, hodnocením atd., je opět ve sporu s tím, že *škola má vyučovat jen tomu, co je potřebné pro život.* Život totiž přináší nejrůznější stresové situace poměrně často, a proto je rozumné, aby se žáci a studenti i ve škole s přiměřenou mírou stresu setkávali. Jsem přesvědčen, že určitá míra stresu je žádoucí i ve škole. Stresování by však nemělo být záměrné.

O stresování ve škole se hovoří rovněž v souvislosti se známkováním.

14 Známkování

V poslední době bývá zavrhováno *známkování* a propagováno *slovní hodnocení.* Známkování prý žáky a studenty stresuje.

Myslím, že je třeba stále zdůrazňovat, že známky, kterými jsou hodnoceny školní úspěchy či neúspěchy žáků a studentů, nemají velkou vypovídající hodnotu

o jejich budoucí úspěšnosti v životě. To by si měli uvědomit jak žáci a studenti, tak rodiče. Ti by neměli trápit své děti výčitkami kvůli známkám a vysvědčením a neměli by je nepřiměřeně trestat. Žáci a studenti jsou stresováni zejména svými rodiči, nesplnitelnými nároky, které na ně mnohdy kladou, nikoli samotnými známkami. Všichni učitelé by se měli snažit v tomto smyslu působit na rodiče svých svěřenců, ale i na žáky a studenty samotné. Velký dluh zde mají sdělovací prostředky.

Slovní hodnocení se mohou velmi snadno zvrtnout v planá slohová cvičení, která jsou každoročně v mírné modifikaci opisována z hodnocení loňských a předloňských. Vzpomínám, že jsme takto před léty psávali tzv. komplexní hodnocení.

Vzpomínám si však rovněž, že v nižších třídách základní školy nám třídní učitelka psávala každý týden výstižné slovní hodnocení do notýsku nebo do žákovské knížky – jaký byl prospěch, chování, píle, jak mají rodiče na své dítě působit apod. Za takováto slovní hodnocení na prvním stupni a takovouto komunikaci s rodiči se vřele přimlouvám.

Za starých časů bývala na vysvědčení hodnocena i tzv. *píle*. Tento údaj významným způsobem doplňoval výsledky z jednotlivých předmětů; bylo vidět, jaké úsilí vynaložil příslušný žák na získání uvedených známek. Rovněž bývalo uváděno, na kterém místě se student umístil v třídním kolektivu (např. čtvrtý z 37). Z této informace bylo možno do určité míry odhadnout přísnost známkování a úroveň školy.

15 Učitelské studium matematiky

Středoškolští učitelé matematiky jsou v tomto malém státě vychováváni asi na patnácti fakultách. Výchova je proto značně roztříštěná, neefektivní, na jednotlivých fakultách absolvuje učitelské studium matematiky každoročně jen malý počet studentů. Za současné situace není reálné se dohodnout na nějakém „rozdělení sfér působnosti“, neboť fakulty bojují o každého studenta. Přijímací řízení je buď zcela prominuto nebo neustále změkčováno. Snažíme se přijaté studenty doučit nedostatky, které mají z předchozího studia, a pokud to jen trochu jde, snažíme se je nevyhazovat. Studenti to dobře vědí a často na to hřeší. Navíc se na učitelské studium hlásí čím dále, tím více průměrných a podprůměrných studentů, z nichž mnozí o profesi učitele zájem nemají a upřímně říkají, že učit nikdy nepůjdou. Úroveň učitelského studia i absolventů celkově klesá, alarmující je rychlost zpětné vazby; již po několika málo letech se na vysokých školách objevují žáci našich absolventů učitelského studia.

Myslím, že pro učitelské studium je naprosto nevhodné rozdělení na bakalářský a magisterský stupeň. Absolvent bakalářského studia nezískává aprobaci k výkonu učitelské profese. (Nemíní-li však jít učit, je to asi lhostejné.) Rozdělení do dvou stupňů je na řadě škol násilné a formální, přináší více problémů než výhod.

16 Doktorské studium

V roce 1992 bylo na MFF UK a PřF MU koncipováno doktorské studium *Obecné otázky matematiky a informatiky* s podobory *Elemetární matematika*, *Historie matematiky* a *Vyučování matematice*. Původně jsme se domnívali, že bude určeno převážně pro středoškolské učitele z praxe, že bude nadstavbou učitelského studia matematiky a že budeme vychovávat jen malý počet doktorandů.

Vzhledem k tomu, že vysoké školy vyžadují od svých učitelů vědeckou hodnost Ph.D. (jako ekvivalent dřívějšího CSc.) nebo alespoň zahájené doktorské studium, vzrostl výrazně zájem o studium výše uvedeného oboru, a to hlavně ze strany učitelů pedagogických, technických a ekonomických fakult. Středoškolští učitelé jsou mezi našimi doktorandy v menšině.

Doktorské studium zaměřené na didaktiku matematiky a vzdělávání v matematice později vzniklo či je v současné době před akreditací na několika dalších fakultách. Vývoj patrně spěje k tomu, že takovéto doktorské studium bude téměř na každé fakultě připravující učitele matematiky.

O doktorském studiu oboru Obecné otázky matematiky a informatiky na MFF UK je možno si udělat podrobnou představu pročtením příslušných webových stránek[1] – během posledních deseti let bylo obhájeno více než dvacet prací, za něž se nemusíme stydět.

Bohužel je třeba konstatovat, že ne všichni doktorandi mají o doktorské studium skutečný zájem, mnohým jde jen o formální splnění podmínky požadované zaměstnavatelem, jiným jde pouze o to, aby ke své výdělečné činnosti pobírali – jako kapesné – po tři roky stipendium, některé zajímá jen titul.

Problémem doktorského studia výše uvedených oborů jsou již témata budoucích disertačních prací, která vypisují potenciální školitelé. Některá vzbuzují rozpaky již v okamžiku zadání svou neujasněností, obtížností nebo naopak plytkostí. Problémem je rovněž „stavba na zelené louce“; mnohá témata jsou zadávána jako didaktický výzkum, pokus, statistické šetření apod. Začínající doktorand, který ještě nikdy neučil, zahajuje bez jakýchkoli pedagogických zkušeností a odborných znalostí jakýsi didaktický experiment, aniž ví cokoli o tom, jak se takovéto experimenty koncipují, provádějí a vyhodnocují. Někdy má studovat a posuzovat současné či historické učební texty, aniž by vůbec měl vlastní hlubší studijní zkušenosti – vždyť studoval do té doby pouze ze svých poznámek z přednášek. Někdy vidíme naprostý nezájem o zadané téma, absenci snahy po vyhledání bibliografických informací, zpráv o výzkumech, které již byly udělány, nezájem o metody a výsledky práce předchůdců. Mnozí doktorandi neprojevují zájem o aktivity pracoviště, na němž studují, ani o práci svých kolegů doktorandů. Před neseriózním přístupem k doktorskému studiu (doktorandů, školitelů i pracovišť) zavíráme oči, neboť my i naše pracoviště jsme mimo jiné hodnoceni

[1] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar/pgs/pgs.htm

počtem doktorandů. V protikladu zde jsou zájmy odborné a výchovné na jedné straně a zájmy ekonomické na straně druhé.

Zodpovědnost za úspěšnost jednoho konkrétního doktorského studia leží zejména na studentovi, který k němu byl přijat. Zodpovědnost za výchovu doktorandů je na školitelích a školících pracovištích, zodpovědnost za úroveň oboru na oborových radách. Věnujme doktorskému studiu výše zmíněných oborů více pozornosti, snažme se vychovat své nástupce, kteří by měli být v nadcházejících letech vedoucími osobnostmi ve vyučování matematice.

17 Učebnice, skripta

Učebnice matematiky pro žáky základních a nižších středních škol (zhruba do 15 let věku žáka) jsou vydávány několika autorskými týmy v několika nakladatelstvích. Je jistě dobré, že nemáme jen jediný soubor učebnic, ale nemohu se zbavit kacířské myšlenky, že méně by bylo více.

Učebnice pro vyšší střední školy již nejsou takovou komerční záležitostí, proto souborů těchto učebnic není mnoho.

Pozitivní roli sehrála v posledních patnácti letch Jednota českých matematiků a fyziků a nakladatelství Prometheus koncipováním a vydáním několika ucelených souborů učebnic.

Vysokoškolská skripta a učebnice jsou bohužel značně izolovanou záležitostí, jejich autoři většinou nebývají informováni ani o významných světových monografiích a učebnicích ani o obdobných textech z jiných fakult či dokonce z jiné katedry (pozná se to ze seznamu literatury i z letmého posouzení textu). Snad by trochu pomohlo zveřejňování podrobnějších informací o vydávaných titulech na webových stránkách jednotlivých fakult.

18 Recenze

Za velmi negativní rys poslední doby považuji naprostou absenci kritických recenzí. Učitelé základních i středních škol by jistě přivítali stanoviska odborníků, tj. pravidelně publikované zasvěcené recenze nových učebnic matematiky a dalších vzdělávacích textů. Takovéto kritické recenze by jistě přispěly k matematické a didaktické kultivaci naší učitelské obce; učitelé by mohli konfrontovat své názory a zkušenosti s názory našich profesionálních didaktiků. Ti mají podle mého názoru ve sféře recenzí učebnic velký dluh.

Prostor pro zveřejňování recenzí by měly poskytovat zejména časopisy *Matematika, fyzika, informatika*, *Učitel matematiky*, případně i *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Mají však tyto časopisy o recenze zájem? Recenze by bylo jistě možno zveřejňovat na webových stránkách.

Sepisování recenzí však není vděčnou záležitostí. V seznamech publikací recenze tolik neváží, napsat kritickou recenzi učebnice dá víc práce než zplodit krátký příspěvek do sborníku z nějaké konference. Zveřejnění kritické recenze

může mít navíc pro jejího autora negativní důsledky v oblasti mezilidských vztahů.

19 Závěr

Je velká škoda, že vyučování matematice je dnes zcela na okraji zájmu většiny profesionálních matematiků. V posledních patnácti letech velmi silně postrádám jejich hlasy. Domnívám se, že by jejich stanoviska, proslovená jasně a zcela zásadně, mohla současnou situaci ve vyučování matematice pozitivně ovlivnit, mohla by být protiváhou názorů obecných pedagogů a reformátorů.

Profesionální matematici by svými vyjádřeními mohli podpořit své kolegy ze základních a středních škol, dát jim argumenty, ovlivnit jejich stanoviska a dodat jim sílu v jejich často svízelných situacích.

Vážené kolegyně, vážení kolegové!

Nenechte si svou práci otrávit reformováním a znechutit tím, co se prezentuje v médiích. Nebojte se užívat vlastní rozum, obhajovat své názory a své postoje. Trpělivě vysvětlujte svým žákům, studentům i jejich rodičům význam vzdělání, upozorňujte na škodlivost některých názorů a jevů, poukazujte na demagogii, s níž se často setkáváme.

Usilujte každý podle svých možností o to, aby obec, společnost i stát přistupovaly ke vzdělávání, školství a školám zodpovědně a uvážlivě.

Uvědomte si, že se po celý svůj aktivní život pohybujete mezi mladými lidmi, že svou prací formujete další generace, že každý den máte ve škole ve svých rukou budoucnost. Vzdělávejte se proto, přemýšlejte o matematice, o práci svých žáků a studentů, o své každodenní pedagogické činnosti. Bez ohledu na všechno, co vás obklopuje a s čím se třeba těžko potýkáte a vyrovnáváte, vyučujte podle svého nejlepšího vědomí a svědomí. Snažte se své žáky, studenty i doktorandy naučit těm faktům a dovednostem, které považujete za důležité a potřebné, budujte v nich pozitivní vztah ke svým předmětům, ke vzdělání a vzdělanosti, k ušlechtilým hodnotám. Nezapomínejte ani na morálně volní vlastnosti.

Přeji vám, aby vám vaše práce přinášela radost a uspokojení!

WebMathematica a vědecké výpočty

Jiří Benedikt

Abstrakt

Účelem příspěvku je upozornit odbornou veřejnost na projekt řešený na Západočeské univerzitě v Plzni, který pomocí webMathematicy volně zpřístupní výpočetní cluster pro vědecké výpočty i výuku matematiky. Na příkladu ukazujeme jakým způsobem a na jaký typ výpočtů je takové řešení vhodné.

1 Projekt

V současné době je na Západočeské univerzitě v Plzni řešen projekt financovaný Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v rámci programu „Informační infrastruktura výzkumu (program 1N)“, jehož základním cílem je poskytnout široké odborné veřejnosti prostředky k realizaci rozsáhlých vědecko-technických výpočtů. Těmito prostředky jsou jak výpočetně silný hardware, tak i vhodný software, jejichž pořízení je finančně velmi nákladné a které díky tomuto projektu budou moci využívat i instituce či jednotlivci, v jejichž možnostech taková investice není. Název projektu je „Realizace interaktivně informačního portálu pro vědecko-technické aplikace“ a jeho řešitelem je Ing. Petr Girg, Ph.D. (autor je spoluřešitelem).

2 Hardware

Jako optimální řešení byl (s ohledem na přidělené prostředky, které navýšila i spoluúčast výzkumného záměru Katedry matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni) zvolen cluster PC čítající 16 uzlů v RACKovém provedení, z nichž každý je osazen dvěma procesory AMD Athlon 64 a 1 až 2 GB RAM.

3 Software

K realizaci uvedených cílů se jako nejvhodnější software jeví program *Mathematica*, a to díky své univerzálnosti. Lze jej použít na náročné numerické a symbolické výpočty i například na statistické zpracování rozsáhlých souborů dat. Konkrétně bylo zakoupeno 8 licencí tzv. *gridMathematicy*. Jedna licence umožňuje spustit a řídit výpočet na 4 procesorech vzdáleným přístupem (ne interaktivně), takže je ideální pro výpočetní clustery.

Program *Mathematica* je dále kombinován s jeho nadstavbou *webMathematica*, která generuje webové formuláře, pomocí nichž pak lze výpočet spustit prostřednictvím libovolného webového prohlížeče (s podporou Javy), tj. nejen z počítače připojeného k internetu, ale i z PDA nebo (v případě jednodušších formulářů) dokonce z mobilu.

Webové formuláře generuje *webMathematica* na základě tzv. *packagů*, které obsahují za prvé algoritmus výpočtu a za druhé popis prvků webového formuláře (s vazbou na parametry úlohy). Tyto *package* vytváří řešitelský tým a tím zpřístupní algoritmy vyvíjené v rámci své vědecké specializace. Připravuje se ale i možnost vytvořit *package* libovolným uživatelem, a to opět interaktivně pomocí webového prohlížeče, bez nutnosti znalosti syntaxe *packagů*.

V době přípravy tohoto příspěvku jsou veřejně přístupné pouze základní algoritmy, vhodné zejména pro podporu výuky, u kterých je možné výsledek okamžitě zobrazit na stejném formuláři, kde se zadávají parametry úlohy (např. přímo pod zadaným předpisem funkce se po zmáčknutí tlačítka „Počítej“ ihned objeví předpis její primitivní funkce) – viz http://webmath.zcu.cz. Spouštění rozsáhlých výpočtů na clusteru probíhá ve fázi testování a zároveň je cluster začleňován do tzv. *METACentra* (http://meta.cesnet.cz). Služby poskytované *METACentrem* pak umožní automatické plánování spouštění rozsáhlejších úloh zadaných přes webové rozhraní i např. zasílání e-mailových oznámení o dokončení výpočtu s URL odkazem na výsledek výpočtu (obrázek, textový či datový soubor).

4 Příklad

Jako příklad využití clusteru uveďme výpočet tvaru tzv. *Fučíkova spektra* Dirichletovy okrajové úlohy čtvrtého řádu

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \chi_1(t)\mu u^+(t) - \chi_2(t)\nu u^-(t), & t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

kde $\chi_1, \chi_2 \in C[0,1]$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a $u^+ = \max\{0, u\}$, resp. $u^- = \max\{0, -u\}$ je kladná, resp. záporná část u (tj. $u = u^+ - u^-$). *Fučíkovo spektrum* úlohy (1) je definováno jako množina dvojic (μ, ν), pro které má úloha (1) netriviální řešení. Použitím obdoby *metody střelby* (viz [1]) lze Fučíkovo spektrum úlohy

(1) zobrazit jako nulovou hladinu funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jejíž vyčíslení v jednom bodě obnáší výpočet řádově desítek počátečních úloh pro rovnici v (1).

Ukazuje se, že tato rovnice je velmi citlivá na změny počátečních podmínek a zaokrouhlovací chyby – např. pro $\chi_1 = \chi_2 \equiv 1$, $\mu = 40^4$ a $\nu = 30^4$ způsobí změna třetí derivace v $t = 0$ o 10^{-10} změnu hodnoty řešení v $t = 1$ řádu jednotek. Je tedy nutné počítat numerické řešení počátečních úloh s větší přesností, než je standardní (typ `double` v jazyce `C`). Jedním (možná jediným) z nástrojů implementujících výkonné numerické řešiče počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice s možností výpočtu s libovolnou přesností je právě *Mathematica*.

Samozřejmě je potřeba počítat s tím, že zvýšení přesnosti znamená řádové zpomalení výpočtu, např. na procesoru Intel Pentium M 1 600 MHz trvá vyčíslení zmíněné funkce v jednom bodě téměř 5 minut. Vykreslení její nulové hladiny pomocí výpočtu funkční hodnoty na síti např. 200×200 bodů je pak časově neúnosné. Výpočet se ale dá snadno datově paralelizovat (výpočet v každém z $200 \times 200 = 40\,000$ bodů může běžet naprosto nezávisle) a při použití dostatečně výkonného clusteru lze dobu výpočtu podstatně zkrátit. Připomeňme, že parametry úlohy jsou pouze dvě funkce χ_1 a χ_2, takže takový výpočet půjde snadno spustit dokonce i z mobilu, a pokud uživatel dostává na mobil e-maily, může si po obdržení zprávy o dokončení výpočtu ihned prohlédnout výsledný obrázek.

Poděkování

Autor je podporován granty 1N04078 a MSM 4977751301 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Literatura

[1] BENEDIKT, J. Using `NDSolve` with `EventLocator` to Solve Higher-Order Differential Equations with Jumping Nonlinearity. In *Proceedings of Wolfram Technology Conference 2005.* Champaign – Urbana, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2005. http://library.wolfram.com/infocenter/Conferences/5790

Logika v úvodních kursech matematiky v příkladech

Marie Benediktová

Abstrakt

Cílem příspěvku je představení právě vznikajícího projektu
Multimediální učební text příkladů „Logika (nejen) pro nelogiky“,
který rozšíří systém TRIAL (http://trial.kma.zcu.cz) *o příklady z výrokové logiky a predikátové logiky prvního řádu.*

1 Cíle projektu

Na různých typech a stupních škol se setkáváme s výukou logiky, která nemusí nutně směřovat ke specializaci v logice, ale slouží jako doplnění všeobecného přehledu či jako opora pro další předměty ve vzdělávacím procesu. V současné době existuje několik základních učebnic úvodu do logiky. Pro vlastní pochopení logických pojmů a vztahů mezi nimi je nutné, aby si student stejně jako v matematice osvojil i praktickou stránku logiky a dokázal vyřešit ilustrační příklady, které výklad nezbytně doplňují. Sbírka příkladů z logiky ovšem v českém prostředí naprosto chybí a mnozí vyučující, stejně jako studenti, na tento nedostatek poukazují.

Představovaný projekt má za cíl tuto mezeru vyplnit a dodat interaktivní studijní materiál, který je kdekoli, kde je přístup k internetu, okamžitě k dispozici. To ocení jak studenti, kteří se procvičováním příkladů snaží látku pochopit, tak i vyučující, kteří mohou přímo před studenty řešit problematičtější příklady a demonstrovat jejich úskalí.

Snahou projektu je tedy pomoci studentovi na počátku jeho studia matematiky na vysokých školách technického či přírodovědného směru překonat strach z matematického zápisu a důkazu. Svým charakterem bude však i dobrou pomůckou pro výuku základů logiky při studiu humanitních směrů, a to jak na úrovni vysokoškolské, tak i středoškolské. Tomu bude přizpůsobena i odstupňovaná náročnost textu. Z větší části ji tak budou využívat učitelé na středních školách při výuce matematiky a základů společenských věd (v partiích věnovaných logice) či v rámci vlastního celoživotního vzdělávání.

2 Metody

Ke splnění výše uvedených cílů je nutné vytvořit databázi vzorově řešených příkladů z klasické logiky s ohledem na její začlenění do otevřeného výukového systému Trial, http://trial.kma.zcu.cz.

Trial rozvíjí a internetový portál spravuje katedra matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Tento systém zahrnuje příklady k procvičení nejrůznějších partií matematiky na vysokých školách včetně souhrnu příkladů ze středoškolské matematiky. V současné době si zájemce zvolí matematickou disciplínu, resp. katedrou vyučovaný předmět, a v jeho rámci téma, které chce procvičit. Pak má díky náhodnému generování příkladů a jejich mutací k dispozici nepřeberně úloh na řešení. Přitom má možnost zvolit si buď pouze zadání a výsledek, nebo zadání, postup řešení a výsledek, anebo např. vzorové zadání pro písemnou práci. Vzhledem k tomu, že Trial je otevřený systém, který se stále rozvíjí a doplňuje, postupně přibudou i další možnosti jeho aplikovatelnosti.

Vypracované příklady budou publikovány i formou CD ROM.

Svým charakterem interaktivního přístupu k příkladu, přes odkrývání vzorového postupu až k vlastnímu řešení přispívá projekt k aktivnímu používání výpočetní techniky a k modernizaci vzdělávacího procesu. Svojí otevřeností dává projekt také možnost příklady rozšiřovat i po jeho skončení a celou cvičebnici vlastně stále aktualizovat.

3 Aktuální stav projektu

Projekt, jehož délka trvání je jeden rok (leden až prosinec 2006), je v době psaní příspěvku ve fázi shromažďování příkladů, vypracovávání řešení a tvorby souborné databáze. V nejbližší době budou zveřejněny některé typové příklady na Trialu. Kompletní výstupy budou plně k dispozici na konci období řešení projektu.

4 Ukázky příkladů

Příklady, které budou tvořit výslednou sbírku, budou pokrývat následující témata:

- úvod do logiky,
- výrokovou logiku v rozsahu výroky, výrokové spojky, jazyk výrokové logiky, formule, tautologie, kontradikce, splnitelnosti, logický důsledek, odvozování formulí výrokové logiky (formální důkaz) (viz příklady 1–3),
- predikátovou logiku prvního řádu v rozsahu jazyk predikátové logiky, splňování a pravdivost v predikátové logice, odvozování v predikátové logice, automatické dokazování – prenexní normální forma (viz příklady 4 a 5),

- v nástinu neklasické logiky – vícehodnotové logiky, modální logiky, fuzzy logiky a jejich vztahy.

Příklad 1. Zapiště všechny vlastní podformule formule

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg(\chi \vee \varphi).$$

Řešení. φ, ψ, χ, $\neg\psi$, $\varphi \wedge \neg\psi$, $\chi \vee \varphi$, $\neg(\chi \vee \varphi)$.

Příklad 2. Dokažte

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Řešení. Důkaz

1. $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (axiom $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$),
2. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (věta o dedukci na 1),
3. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (axiom $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$),
4. $\{\neg A\} \vdash (A \Rightarrow B)$ (modus ponens na 2 a 3),
5. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (věta o dedukci na 4).

Příklad 3. Je pravda, že z premis (předpokladů) $A \Rightarrow B$, $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ a C vyplývá závěr $\neg C$?

Řešení. Ano, protože neexistuje žádné přiřazení hodnot výrokům A, B a C, při kterém by byly všechny tři premisy současně pravdivé. Poznamejme, že tento příklad patří mezi ty, jejichž pochopení může studentům činit potíže, protože mezi premisami je C, zatímco závěr je $\neg C$.

Příklad 4. Formulí prvního řádu (s rovností) vyjádřete, že existuje právě jedno individuum s vlastností F.

Řešení. $\exists x \forall y (F(x) \wedge (\neg(x = y) \Rightarrow \neg F(y)))$.

Příklad 5. Nalezněte prenexní normální formu formule

$$(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists y Q(y) \vee \exists x R(x)).$$

Řešení. Budeme postupovat v následujících krocích:

1. $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists y Q(y) \vee \exists z R(z))$ (přejmenování proměnné),

2. $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists y \exists z (Q(y) \vee R(z)))$ (distributivita kvantifikátoru),
3. $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y \exists z (Q(y) \vee R(z)))$ (vlastnost kvantifikátorů),
4. $\forall x \exists y \exists z (P(x) \Rightarrow (Q(y) \vee R(z)))$ (přesun kvantifikace).

Poděkování

Autorka je podporována grantem č. G5/212/2006 Fondu rozvoje vysokých škol Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy.

Literatura

[1] BENEDIKTOVÁ, M. Základy logiky. In *Trial.* Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2006 (připravuje se). http://trial.kma.zcu.cz

[2] BENEDIKTOVÁ, M. A Few Examples on Classical Proposition Logic. In *Proccedings of the 5th International Conference Aplimat 2006.* Bratislava : Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2006, p. 267–276.

[3] JIRKŮ, P., VEJNAROVÁ, J. *Logika. Neformální výklad základů formální logiky.* 2. vyd. Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze, 2000.

[4] ŠVEJDAR, V. *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost.* 1. vyd. Praha : Academia, 2002.

GlobalSchool

Helena Binterová, Václav Dobiáš

Abstrakt

Žijeme ve světě plném počítačů. Rozvoj počítačů a internetu si žádá změny cílů ve vyučování. Dnes již není hlavním cílem vyučování učit děti, aby uměly zpaměti množství pojmů, či dobře aplikovat algoritmus při výpočtu lomených výrazů. Vytvořili jsme e-learningový portál, který je založen na komunikaci při řešení matematických úloh [7]. *Tento projekt byl pojmenován GlobalSchool* (http://globalschool.jcu.cz).

1 Virtuální škola

Ve virtuální škole – GlobalSchool jsou žáci zařazeni do virtuálních škol a tříd, do kterých si mohou učitelé, dle libosti vkládat různá diskusní fóra, chaty, obrázky nebo jiné dokumenty. Ve třídách jsou dále zařazeni do skupinek, ve kterých dostávají úkoly od učitele, a společně je řeší.

V testovacím období spolupracovaly na projektu GlobalSchool školy ZŠ Nerudova z Českých Budějovic a ZŠ Londýnská z Prahy. Projektu se zúčastnily celkem čtyři třídy, celkem 70 dětí, žáci šestých a sedmých tříd. Testovací období probíhalo od 1. 10. 2005 do 1. 2. 2006. V tomto období nás zajímaly dvě statistiky k 19. 12. 2005 a na konci testovacího období, tedy 1. 2. 2005. Žáci pracovali v GlobalSchool jednou za čtrnáct dní, každý žák strávil na projektu přibližně 9 vyučovacích hodin. Byli rozděleni do pracovních skupinek po dvou. V tomto virtuálním prostředí byly předkládány matematické úlohy, které byly vybrány tak, aby žáci při jejich řešení museli spolupracovat, navzájem si předávat různá data, nebo společně porovnávat svá řešení. Po odsouhlasení správného výsledku virtuálním učitelem zaškrtli odpovězeno. Tím byla úloha odeslána ke kontrole a opravě.

Úloha č. 1 Sudoku mini

Při řešení této úlohy měli děti pochopit princip práce v GlobalSchool. Vyřešení úkolu nevyžadovalo žádnou větší spolupráci.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	21	6	5	1
1. 2. 2006	21	6	5	1

Hodnocení úlohy:

Úloha děti bavila, byla hodnocena jako jednoduchá. Z tabulky je vidět, že žáci, kteří úlohu nedokončili, se k ní už v druhém období nevraceli.

Úloha č. 2. Závěsné draky – aplet

První úloha je zaměřena na procvičení základních pojmů středové souměrnosti. Úkolem je překrýt dva obrazce a slovně popsat svůj postup.

Druhá úloha procvičuje pojmy obraz ve středové souměrnosti, obraz obrazu ve středové souměrnosti a středy středových souměrností. Žáci mají pohybovat obrazcem a středy středové souměrnosti tak dlouho, až všechny tři obrazce splynou v jeden. Poté mají popsat svůj postup.

Třetí úloha pracuje se stejnými objekty, jako v předcházející úloze, žáci mají vytvořit dlaždice a poté popsat postup.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	4	18	7	6
1. 2. 2006	6	19	6	4

Hodnocení úlohy:

Ani tato úloha nevyžadovala žádnou spolupráci mezi žáky ve dvojici. Největším problémem byl slovní popis řešení úlohy. Žáci neznali některé geometrické pojmy a měli zjevné potíže popsat své řešení tak, aby tento popis byl pro virtuálního spolužáka dostačující pro vyřešení úkolu. Z tabulky je vidět, že se k této úloze v druhém období vracelo minimum dvojic (2). Velmi často se stávalo, že na sebe v lavicích dlouho navzájem čekali, proto si nemohli nechat úlohu schválit.

Úlohu jsme zadávali ve dvou třídách – v sedmé třídě s rozšířenou výukou matematiky a v „normální“ sedmé třídě. Ve třídě s rozšířenou výukou matematiky byla středová souměrnost nedlouho před tím probrána. Děti vyřešily zadání, ale úloha je nenadchla. V normální třídě, kde ještě nebyla středová souměrnost probrána a děti měly pouze intuitivní představu o probíraném pojmu, opravdu „objevovaly“ princip, jak funguje středová souměrnost. Bylo vidět jednoznačné zaujetí problémem a snahu přijít mu na kloub – u žáků, kteří by neměli k ma-

tematice žádný výjimečný vztah. Mají děti z matematické třídy, díky rozšířené výuce matematiky k matematice záporný vztah?

Úloha č. 3 Akrobacie na lyžích

Další aplet, tentokrát zaměřený na prostorovou představivost. Žáci mají označenou plochu na prostorovém tělese a mají označit tutéž plochu na průmětech tělesa.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	5	17	8	5
1. 2. 2006	11	13	6	5

Hodnocení:

Poslední motivační úloha nevyžadující spolupráci ve dvojici. Děti aplet braly spíše jako hru. Bavil je a rády se k němu vracely. Po zjištění, jak to funguje, byl aplet hodnocen jako ne příliš náročný. Díky tomu, že se v úloze nevyžadovalo nic náročného, ji zpracovalo k odevzdání poměrně dost žáků.

Úloha č. 4 Název týmu

Žáci se měli dohodnout na názvu pro svou lavici. Název měl mít nějakou spojitost s matematikou.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	2	16	10	7
1. 2. 2006	2	16	10	7

Hodnocení:

První úloha vyžadující komunikaci ve dvojici. Vznikly problémy s hledáním názvu a jak je vidět z tabulky, žáky úloha nezaujala a vůbec se k ní nevraceli.

Úloha č. 5 Sjíždění vodopádů

Žáci si měli navzájem ve dvojicích spočítat rozměry nejmenší možné bedny, do které se ještě vejdou.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	0	20	6	9
1. 2. 2006	0	19	7	9

Hodnocení:

Potíže činilo pochopit podstatu problému a vybrat správné rozměry, ze kterých by mohl jejich spolupracovník vypočítat nejmenší možnou bednu, do které se ještě vejdou. Úkol žáci v některých případech obcházeli tak, že změřili více rozměrů a nechali spolupracovníka, ať si vybere. V této úloze se značně projevil nedostatek zájmu na jedné z spolupracujících škol, a to se negativně odrazilo na motivaci k práci ve škole druhé.

Úloha č. 6 Tým pro přežití

Velmi podobná úloha jako předcházející. Žáci se měli změřit a vypočítat největší rozdíly v procentech.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	0	6	0	28
1. 2. 2006	0	10	1	23

Hodnocení:

Velmi „neoblíbená“ úloha. Po prvních třech motivačních a hravých úlohách přišly tři úlohy zaměřené na spolupráci a komunikaci, které žáky naprosto nezaujaly. Nezájem je vidět obzvláště ve druhém období. Možnou příčinou tohoto jevu by mohl být slabý zájem jedné ze škol, žáci z této školy odpovídali sporadicky, což působilo nemotivačně na jejich spolužáky z lavice.

Úloha č. 7 Gliding

Žáci měli spočítat do jaké výšky musí vystoupat kluzák, aby při dané klesavosti doletěl do školy jejich spolupracovníka.

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	0	7	0	28
1. 2. 2006	2	19	0	13

Hodnocení:

Úloha nevyžadující komunikaci a spolupráci. Žákům stačilo vypočítat svou část a čekat až spolupracovník dopočítá zbytek. Asi proto tuto úlohu zpracovalo více dětí, než úlohu č. 6 „Tým pro přežití“, i když bylo dětem řečeno, že by měly úlohy řešit tak, jak jdou za sebou.

Ale i přes vcelku dobrou „vypracovanost“ činilo dětem problémy spočítání zadané úlohy. Podle nás je to zapříčiněno tím, že děti hledaly algoritmy vedoucí k vyřešení daného příkladu. V příkladech, domácích úkolech, písemkách jim jsou dávány příklady, které jen vybízejí k aplikaci daného algoritmu. Nepřekonatelným problémem bylo najít na internetu vzdušnou vzdálenost mezi městy.

Úloha č. 8 Šifra

Rozšifrujte text v angličtině

Statistika:

hodnocení k datu	schváleno	rozpracováno jedním žákem	rozpracováno oběma žáky	nerozpracováno
19. 12. 2005	0	0	0	35
1. 2. 2006	1	22	4	9

Hodnocení:

Šifra byla pro děti velkou výzvou, dlouho ji nemohly rozlousknout. Tato úloha dopadla lépe, než předchozí dvě.

2 Závěr

V průběhu práce ve virtuální škole jsme se potýkali s některými problémy. Jednak nebyla dostatečná komunikace a spolupráce zúčastněných škol, z čehož pramenilo malé množství schválených úloh. Tato skutečnost byla nejspíš způsobena tím, že třídy neměly stejné podmínky pro práci ve virtuální škole. Jedna škola, která velmi stála o účast na projektu vyčlenila pro práci žáků jednu hodinu týdně, zatímco druhá měla jen nárazovou „návštěvnost“ školy.

Druhým problémem byl jiný způsob práce, na který děti nejsou vůbec zvyklé. Nemáme na mysli pouze práci v nestandardní třídě, ale hlavně zaměření zadávaných úloh a hlavně nutnost slovního popisu jednotlivých řešení. Způsob práce ve virtuálních třídách a jednotlivých dvojic žáků byl natolik odlišný od každodenní práce v hodinách matematiky, že pro některé děti byly úkoly velmi obtížné. Pomůže zavedení rámcově vzdělávacího plánu na základních školách? V projektu jednoznačně propadly úlohy zaměřené na komunikaci. Tyto úlohy děti nebavily, neuměly je vyřešit. Nakonec nebyl problém něco spočítat, ale například nepřekonatelný problém byl dohodnout se na názvu pracovní skupinky.

Další problém vidíme ve způsobu myšlení žáků, ke kterému jsou vedeni. Pro žáky je nejjednodušší naučit se daný algoritmus vedoucí k vyřešení daného problému. U žáků je většinou velmi málo rozvíjeno samostatné usuzování, argumentování a schopnost analyzování daného problému.

Je však otázkou, zda žáci sedmé třídy jsou takovýchto myšlenkových operací schopni.

Otevřenou otázkou, kterou bychom chtěli dále zkoumat, zůstává výběr úloh pro vyučování matematice ve virtuálním prostředí. Úlohy, které se nám zdály na začátku vhodné pro tento způsob výuky se ukázaly jako nevhodné a naopak některé úkoly, u kterých jsme to ani neočekávali, se velmi osvědčily.

Literatura

[1] FUCHS, E., HRUBÝ, D., a kol. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Praha : Prometheus, 2000.

[2] HEJNÝ, M., KUŘINA, T. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2001.

[3] HOŠPESOVÁ, A., BINTEROVÁ, H. Objevování v matematickém vyučování podporované Excelem. In P. PECH (Ed.) *Department of Mathematics Report Series. Vol 11.* České Budějovice : Jihočeska univerzita, 2003, s. 267–273.

[4] KUBÍNOVÁ, M., NOVOTNÁ, J. *Projekty ve vyučování matematice na základní škole.* Plzeň : Pedagogické centrum Plzeň, 1998.

[5] KUTZLER, B. CAS jako Pedagogické prostředky ve vyučování a učení se matematice (1). *Učitel matematiky*, **12** (2), s. 101–110.

[6] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* 2004. http://www.vuppraha.cz

[7] BINTEROVÁ, H., MILOTA, J., VANÍČEK, J. *Global School – virtuální prostředí pro výuku matematiky na ZŠ formou e-learningu.* Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep. 13, 2005. ISSN 1214-4681.

Matematika v angličtině na gymnáziu

Daniela Bittnerová

Abstrakt

V článku jsou uvedeny ukázky problémových úloh pro studenty středních škol, kde se vyučuje matematice v angličtině. Úlohy jsou použitelné pro opakování učiva i pro studenty základních kurzů matematiky v angličtině na vysokých školách či k procvičování odborné terminologie v anglickém jazyce.

1 Úvod

V posledních letech se učitelé stále více setkávají s nutností vysvětlovat odborné předměty v cizím jazyce, převážně anglicky. Navíc vznikla cizojazyčná gymnázia a tím se pro učitele otevřela možnost celoročně učit na těchto školách. Výuka v cizím jazyce má svá specifika a pravidla. Na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Fakulty pedagogické Technické univerzity v Liberci již patnáct let několik pedagogů učí zahraniční studenty. Jde o několik různých typů studia i jejich forem. Navíc někteří z nich více než deset let externě působí na víceletém soukromém anglicko-francouzském gymnáziu, kde učí matematiku či fyziku. Během tohoto období se vyvinula úzká spolupráce mezi fakultou a gymnáziem, ať už jde o společné granty, přednášky pro zahraniční hosty z jiných fakult nebo o možnost náslechů a vykonávání pedagogické praxe studentů – budoucích učitelů. Tuto možnost využívá i Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky TUL před deseti lety vyhověla přání studentů kombinace matematika – angličtina a otevřela volitelný předmět Matematika v angličtině. Tento předmět byl původně jednosemestrální, od loňského školního roku však byl pro velký zájem rozdělen na dvě části – MAG (Matematika anglicky) a GAG (Geometrie anglicky). Oba jednosemestrální předměty jsou zakončeny klasifikovaným zápočtem. Během obou semestrů musejí studenti zvládnout vybranou partii z daného oboru. V MAG jde o základy teorie a metod řešení soustav diferenciálních rovnic, v GAG studenti probírají šroubové plochy. Každá hodina (90 minut) začíná přibližně třicetiminutovým procvičováním základní anglické odborné terminologie, kdy studenti řeší úlohy z učiva pro základní a střední školy. Po té následuje anglický odborný výklad

malé části nového učiva a ve zbytku hodiny se učivo aktivně procvičuje. Během každého semestru studenti napíší dvě písemné práce, jejichž součástí je diktát matematických výrazů, test odborné terminologie a příklady z probírané látky. Navíc každý student vypracuje podle předem daných pokynů didaktickou přípravu menšího celku podle svého výběru pro výuku matematiky na základní či střední škole.

Největším problémem při výuce v cizím jazyce je nejen zvládnutí odborné terminologie, ale i její aktivní používání. Studenti mají ze začátku snahu text překládat. Je třeba je naučit hledat v textu podstatu věci, i když třeba neznají všechna anglická slova. Matematické termíny však musejí ovládat automaticky. Proto je vhodné občas do hodin zařadit problémové úlohy, které se nemusejí vždy týkat právě probíraného učiva. V tomto článku je uvedeno několik takových úloh – „problem solving“, obsahujících jednoduché dovednosti.

2 Problem Solving

Při řešení problémových úloh studenti pomocí samostatného řešení dílčích problémů postupují k problémům složitějším, při nichž již využívají odvozené vlastnosti. Tyto úlohy podporují tvůrčí a logické myšlení a připravují studenty na systematickou práci při dalším studiu. V současné době lze k tomu také přiměřeně využít prostředků multimediální techniky. Níže uvedené úlohy jsou ukázkou anglické verze.

Exercise 1

1. Explain how numbers are used to put the following things in order:
   (a) Years (b) Time of day (c) Homes (d) Clothes
2. Explain how letters of the alphabet are used to put the following in order:
   (a) Names (b) Words (c) Motor cars (d) Grades
   Give examples.
3. What is the purpose of numbering?
   (a) Telephones (b) Pages of a book (c) Post Office Savings Accounts
   (d) Aircraft flights (e) Bank notes (f) Buses

Exercise 2

1. Find the next number in each of these sequences:
   (a) 5, 10, 15, 20, 25 (b) 3, 8, 13, 18, 23, ...
   (c) 4, 7, 10, 13, 16, ... (d) 6, 12, 18, 24, 30, ...
   (e) 10, 14, 18, 22, 26, ... (f) 4, 5, 7, 10, 14, ...
   (g) 20, 28, 35, 41, 46, ... (h) 30, 29, 27, 24, 20, ...
   (i) 1, 2, 4, 8, 16, ... (j) 8, 7, 5, 2, −2, ...

2. Find the 10th and 20th terms of each of the sequences. (The first five terms are given in each case.)

EXERCISE 3

1. Follow the program below:

   - Choose a number between 10 and 99.
   - Write down back to front.
   - Add the back to front number to the original number.
   - Divide the result by 11.
   - Write down the remainder.
   - Repeat the above program starting with a number between 100 and 999.

2. Follow this program:

   - Choose a number (n).
   - Square it (n^2).
   - Subtract 1 from n^2.
   - Divide by $n + 1$.
   - Write down the result and the remainder.
   - Choose a new number and start again.

3. What does the above program tell you about the relationship between?
   (a) $(n^2 - 1)$ and $(n - 1)$ (b) $(n^2 - 1)$ and $(n + 1)$

EXERCISE 4

- Find whether 149 is a prime number.
- Find whether 351 is a prime number.
- Find a square number, which is also a triangular number.
- Are you able to find the second such number?
- Try to draw flow charts for it.
- Do you think there are any more numbers that are both triangular and square?

Exercise 5 – Trial and Error

Sometimes, to find the answer to a problem, we start by guessing. We then look at the result to se how far out we are. This tells us the error. We then use the error to make an improved guess. This process is repeated until a satisfactory answer is reached.

1. Using the trial and error method, find the missing number:

$128 + ? = 475$	$2{,}616 - ? = 0{,}484$	$12 \cdot ? = 102$	$162 : ? = 18$
$14{,}4 + ? = 100$	$3{,}6 - ? = 2{,}45$	$9{,}1 \cdot ? = 53{,}69$	$2\,380 : ? = 85$
$3\,852 + ? = 5\,283$	$44{,}45 - ? = 1{,}777$	$362 \cdot ? = 32$	$36{,}55 : ? = 4{,}3$

2. Use the trial and error method to solve these equations:

$2x + 2{,}5 = 4$	$2x - 7 = 11$	$0{,}8x + 3 = 7$	$5x - 3 = 14$
$3x + 5 = 9{,}5$	$4x - 7 = 3{,}4$	$5x + 8 = 17{,}5$	$5x + 11 = 26$
$0{,}35x + 6 = 14$	$0{,}75x + 11 = 20$	$3x - 2 = 3{,}5$	$0{,}4x - 2{,}2 = 8{,}8$

3. Work out the length of sides of a rectangle made from 40 cm of wire if the area is:

   (a) $75\,\mathrm{cm}^2$ (b) $96\,\mathrm{cm}^2$ (c) $51\,\mathrm{cm}^2$ (d) $60\,\mathrm{cm}^2$

4. A rectangle is made from wire 100 cm long. Which of rectangles that could be made from this wire have the largest area?

   - Draw all the rectangles in question 3 (to a scale 1 cm to 10 cm on $1\,\mathrm{mm}^2$) so that two of sides overlap.
   - What do you notice about the fourth point?
   - What do you notice about the largest rectangle?

5. Use the trial and error method to solve these problems:

   - Draw a right-angled triangle where $\angle DAC = 90°$ and $BC = 2AB$. Measure $\angle ABC$.
   - Draw a rectangle whose area is $150\,\mathrm{cm}^2$ and whose perimeter is 60 cm.
   - Divide a strip of paper 20 cm long into exactly 3 equal parts.
   - Find the number whose **square** is 300.
   - Find the number whose **cube** is 300.
   - Find a word in which the letters a, b, and c are in the right order.

EXERCISE 6 – THE PROBLEM SOLVING – THE EQUATION $p^x = px$, $x > 0$, $p > 0$

Let us investigate an equation $g(x, p) = 0$ where p is a parameter in the set of all real numbers. We would like to solve the equations $p^x = px$, $x^p = px$, $p^x = x^p$, $p^x = \log_p x$. We are going to use graphs of the functions $y^x = xy$, $x^y = xy$, $y^x = x^y$, $y^x = \log_y x$, where $y = f(x)$ is a real function of one real variable.

- Choose a function suitable for the solving of this equation from the edit menu.
- Write down the conditions for this equation.
- Eliminate $\ln y$ from this equation.
- How to express y from the expression above? (Use the inverse function of $\ln y$.)
- Write down the domain for this function.
- Try to find a solution of the equation (3) if $x = 1$.
- It is the ordered pair of all points $[1; y$, $y > 0$.
- Calculate limits of the inverse function at the points 0, 1, $+\infty$.
- Sketch the graph of the inverse function.
- Taking into consideration the graph of the question above sketch the graph of the dependence of the variable x on the parameter p.
- What results follow from it for the solution of the equation $p^x = px$, $p > 0$, $x > 1$? Read them from the graph.

3 ZÁVĚR

Praxe ukazuje, že studenti si rychle osvojují dovednosti při práci s PC, je proto vhodné využít těchto schopností jednak pro obohacení výuky, jednak pro motivaci jejich samostatného studia. Na Technické univerzitě v Liberci vytváříme pro studenty v rámci projektu Rozvoj multimediální výuky pro strukturované studijní programy elektronický katalog úloh. V něm jsou zařazeny i problémové úlohy. Předpokládáme, že výsledky projektu nebudou využívat pouze studenti prezenčního i kombinovaného studia všech fakult (především technických) k zopakování a doplnění svých středoškolských znalostí, ale například i studenti Fakulty pedagogické a učitelé základních a středních škol, s nimiž jsme v kontaktu v rámci didaktických seminářů. Dále jej bude možné využít i jako doplněk pro samostudium v rámci opakovacích kurzů pořádaných pro technické fakulty. Cizojazyčné verze jsou určené pro zahraniční studenty TUL, popř. učitele ze středních škol s výukou matematiky v angličtině a francouzštině.

Literatura

[1] BITTNEROVÁ, D. *Pre-calculus.* 1. vyd. Liberec : EUG, 1996.

[2] BITTNEROVÁ, D. Problémové úlohy v matematice. In *XXIII. Vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu.* 1. vyd. Brno : UO, 2005.

[3] BOROVSKI, E. J., BORWEIN, J. M. *Dictionary of Mathematics.* 2. vyd. Glasgow : Collins, 2002.

[4] KANER, P. *Integrated Mathematics Scheme.* IMS A2. 5. vyd. Londýn : Bell & Hyman limited, 1986.

[5] KANER, P. *Integrated Mathematics Scheme.* IMS B2. 2. vyd. Londýn : Bell & Hyman limited, 1983.

Pár slov o nekonečných řadách a nekonečnu v matematice na střední škole

Emil Calda

Abstrakt

Příklady nekonečných řad, jejichž součet lze určit z definice. Divergence harmonické řady. Komutativní zákon pro nekonečné řady. Achilles a želva.

Úvod

Zůstane-li vám rozum nad něčím stát, je to znamení, že ho stále ještě máte.
(Emil Calda, Pedagogické zásady a termíny ve výuce &F)

Před dávnými léty, když jsem učil na 14. jedenáctileté střední škole v Praze na Vinohradech, používal jsem v hodinách matematiky při výkladu limity posloupnosti o obratu „n jde do nekonečna“ netuše, že tím narušuji výchovné působení školy ohledně světonázorového profilu žactva. Co všechno jsem tím mohl způsobit, mi po jedné návštěvě vyučovací hodiny vysvětlila zástupkyně ředitele. Pravila něco v tom smyslu, že slovo „nekonečno“ by v některých žácích mohlo vzbuzovat dojem něčeho nepoznatelného, kterýžto objekt, jak jistě vím, neexistuje. A taky by si někteří morálně málo vyspělí studenti mohli myslet, že tam – nedej bože – sídlí Bůh, který, jak také jistě vím, rovněž neexistuje. A doporučila mi, abych příště raději používal obrat „n roste nade všechny meze“. Chtěl jsem namítnout, že meze neexistují také, neboť už byly rozorány, ale raději jsem se pokusil vysvětlit, že v matematice je slovo „nekonečno“ poměrně běžné, že neznamená nic obskurního a že když škola bude o některých věcech mlčet a dělat, že neexistují, že se to studenti stejně dovědí odjinud. Názor nadřízené kolegyně jsem tím samozřejmě nezměnil, ona můj také ne, ale svůj názor poněkud poopravila přirozená čísla: Byla-li v mé hodině přítomna inspekční návštěva, rostla nade všechny meze, nebyla-li, chodila do nekonečna.

Problémy uvedeného typu dnes už na školách nepochybně neexistují, nekonečno však některým studentům působí potíže i nadále. Projevuje se to zejména v partii věnované nekonečné geometrické řadě. Často jsem se setkával s následujícími otázkami, a to i od studentů, kteří se na střední škole s tímto tématem seznámili.

Dá se vůbec v konečném čase sečíst nekonečně mnoho sčítanců?

Toto tvrzení svědčí o tom, že tazatel vůbec nepochopil, co to součet nekonečné řady je. Zdá se mi, že to je způsobeno tím, že tomuto pojmu je věnovaná malá pozornost. Obvykle se krátce vysvětlí, že součtem nekonečné řady se rozumí limita posloupnosti jejích částečných součtů, odvodí se vzorec pro součet nekonečné řady geometrické a potom už se pracuje pouze s tímto vzorcem. A protože definici součtu nekonečné řady studenti už dále k ničemu nepotřebují, rychle na ni zapomenou. Domnívám se, že by se tato situace dala zlepšit tak, že by se po vysvětlení pojmu součet nekonečné řady nepřikročilo hned k řadě geometrické a k odvození vzorce pro její součet, ale předtím se ukázalo několik nekonečných řad, jejichž součet je možno určit podle definice. Jsou to například řady:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,\ \text{se součtem } s=\lim\frac{n}{n+1}=1,$$

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots,\ \text{se součtem } s=\lim\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}=1,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}+\ldots,$$

$$\text{se součtem } s=\lim\frac{2}{n(n+1)}=2,$$

$$\frac{1}{\log 2\cdot\log 4}+\frac{1}{\log 4\cdot\log 8}+\ldots+\frac{1}{\log 2^n\cdot\log 2^{n+1}}+\ldots,\ \text{se součtem } s=\frac{1}{\log^2 2},$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots,\ \text{se součtem } s=\frac{3}{4}.$$

Může řada $a_1+a_2+a_3+\ldots$ divergovat, jestliže $\lim a_n=0$?

Protože se studenti setkávají jenom s geometrickými řadami, jejichž kvocient je v absolutní hodnotě menší než jedna, vzniká v nich dojem, že konečný součet mohou mít pouze ty nekonečné řady $a_1+a_2+a_3+\ldots$, pro jejichž členy je $\lim a_n=0$. Měli bychom jim ukázat, že tento dojem je mylný. V této souvislosti se obvykle uvádí řada harmonická, jejíž divergence se dokazuje seskupením jejích členů do skupin končících mocninou čísla dvě. Pro některé studenty je možná srozumitelnější tento důkaz:

Protože posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a má za limitu číslo e, platí pro všechna $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}\ \text{neboli}\ n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,\ \text{tj.}\ \frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

odkud plyne:

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} &> \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}= \\ &= \frac{\ln 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}=\ln(n+1), \end{aligned}$$

což znamená, že harmonická řada diverguje. Tento výsledek, jak neopomeneme studentům ukázat, je v následující interpretaci tak trochu v rozporu s tzv. zdravým rozumem:

Jakkoli velkou plochu (např. Václavské náměstí v Praze) lze (teoreticky) pokrýt postupným pokládáním čtverečků, jejichž obsahy jsou $1\,\mathrm{cm}^2$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, $\frac{1}{3}\,\mathrm{cm}^2,\ldots$

Jiným příkladem řady tohoto typu, který můžeme jako ukázku použít, je řada

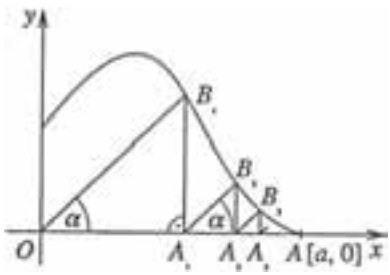
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\ldots,$$

která diverguje, neboť – jak zjistíme snadným výpočtem – je $s_n=\sqrt{n+1}-1$.

Platí pro součet nekonečně mnoha sčítanců komutativní zákon?

V partii věnované nekonečné geometrické řadě se často určují délky různých lomených čar složených z nekonečně mnoha stále se zmenšujících úseček. Jeden takový příklad si ukážeme.

Je dána lomená čára $OB_1A_1B_2A_2B_3\ldots$, jejíž vrcholy A_i leží na ose x a vrcholy B_i na křivce znázorněné na obrázku. Úsečky, z nichž je tato lomená čára složena, jsou střídavě rovnoběžné s úsečkou OB_1 a s úsečkou A_1B_1, která je kolmá na osu x. Má se určit délka d této lomené čáry, je-li známa délka a úsečky OA a velikost α úhlu A_1OB_1.



Obr. 1

V bodě A vztyčíme kolmici k ose x a sestrojíme její průsečík C s přímkou OB_1. Délka úsečky OC je rovna součtu délek všech úseček svírajících s osou x úhel α, délka úsečky AC je rovna součtu délek všech úseček k ose x kolmých. Pro délku d lomené čáry tak dostáváme:

$$d = |OC| + |AC| = \frac{a}{\cos\alpha} + a \operatorname{tg}\alpha = \frac{a(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

V tomto odvození se mlčky předpokládá, že členy nekonečné řady lze přerovnat, aniž se tím její součet změní. Nikdy se mi sice nestalo, že by se někdo nad přerovnáním této řady pozastavil, ale přesto si myslím, že bychom studenty měli upozornit na to, že ne každou řadu lze přerovnat, ale že v případě řad s kladnými členy to možné je.

Kde je chyba v Zénónově „důkazu“, že Achilles nedohoní želvu?

V partii o nekonečných řadách se můžeme zmínit o známé Zénónově aporii Achilles a želva. Zénón z Eleje (asi 490–430 př. Kr.) tvrdí, že Achilles, který je v Homérově Illiadě obdařen přívlastkem „rychlonohý“ a „rychlý v běhu“, nedohoní pomalou želvu. Zdůvodňuje to tak, že Achilles přiběhnuvší do bodu A_i, ve kterém želva byla, už ji v něm nenajde, protože za dobu, kterou k doběhnutí do tohoto bodu potřeboval, se želva přemístila do bodu A_{i+1}. Achilles tak stále přibíhá do bodů, ve kterých želva byla, ale nikdy se s ní v žádném nesetká, takže ji nemůže předběhnout, i když se k ní stále přibližuje. Zkušenost i výpočet však ukazují něco jiného.

Dobu T, za kterou Achilles (běžící rychlostí u) dohoní želvu (prchající před ním rychlostí v a nacházející se na počátku ve vzdálenosti d od něho), určíme tak, že si představíme, že želva stojí a Achilles se k ní rychlostí $u - v$ přibližuje:

$$T = \frac{d}{u-v}.$$

Chceme-li aplikovat získané poznatky o nekonečných řadách, určíme doby t_i, které Achilles potřebuje k proběhnutí vzdáleností mezi body A_i a A_{i+1}. Dostaneme tak geometrickou řadu s kvocientem $\dfrac{u}{v}$, jejíž součet je

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = \frac{d}{u-v}.$$

Ani jeden z obou způsobů výpočtu však nevysvětluje, kde je v Zénónově úvaze chyba, a vysvětlit si to netroufá ani autor těchto řádků.

ZÁVĚR

Do rozsáhlé oblasti nekonečných řad můžeme na střední škole pouze krátce nahlédnout. Studenti by měli bezpečně zvládnout nekonečnou řadu geometrickou a nezapomínat na to, že vzorec pro součet nekonečné geometrické řady platí pouze pro $|q| < 1$. Zkuste si ověřit, kolik z nich bude při určování součtu

$$s = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots$$

pro $x = \dfrac{3\pi}{2}$ postupovat takto:

$$s = \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Kromě toho by si však ze střední školy měli odnést i poznatek, že pro sčítání nekonečně mnoha čísel neplatí obecně stejná pravidla jako pro součty konečné.

Pre- nebo post- aneb co a kdy naučit učitele

Jana Coufalová

Abstrakt

Změna role učitele související s proměnou současné školy. Zaměření pregraduální přípravy na vytvoření základů profesních kompetencí. Vliv klimatu školy, na kterou nastupuje absolvent. Význam celoživotního učení.

1 Jaký učitel?

Chceme-li uvažovat o tom, co a kdy učitele matematiky naučit, musíme nejprve uvažovat o tom, jaký má takový učitel být. Má to být onen přísný a obávaný „matykář“, jakého vidíme snad v každé televizní inscenaci, v každém současném filmu či televizním seriálu? Nebo usilujeme o něco jiného?

Učitelé v praxi oprávněně kritizují absolventy pedagogických fakult z pohledu jejich připravenosti na práci se žákem. Absolvent často přichází nabitý řadou teoretických poznatků ze svého oboru, pedagogiky a psychologie, ale tváří v tvář třídě selhává. Neúspěch a zklamání vedou čerstvého učitele k tomu, že má tendenci utíkat tam, kde cítí jistotu – a tou jistotou jsou matematické poznatky samy, ne způsob, jak k nim dovést žáka. Často nastoupil na školu s odhodláním „učit jinak“, ale brzy se dostává do systému, který má zažitý ze svého vlastního předchozího vzdělávání. Jeho přístup k žákům je direktivní, ze studia na fakultě sice zná rozdíl mezi transmisivním a konstruktivistickým pojetím vyučování, transmisivní pojetí „ideově odmítá“, ale nakonec se takový přístup pro něho stává jistotou a útočištěm. Kruh je uzavřen.

2 Co má umět?

Zatímco v přípravě učitelů pro 1. stupeň se již hodně změnilo a řada pedagogů působících v oblasti primárního vzdělávání uplatňuje pojetí vyučování zaměřené na dítě (Podle Spilkové (2006) pracuje v intencích nového pojetí 20–30 % primárních škol), na druhém stupni základních škol a zejména na středních školách stále přetrvává vyučování, ve kterém učitel předává žákům hotové poznatky.

Znamená to, že učitel matematiky nepotřebuje příliš matematické teorie? Stačí mu pouze oživit a utřídit to, co si přinesl z předchozího vzdělávání, a v jeho

přípravě je třeba se zaměřit především na otázku, jak si učivo osvojí žáci? Snahy vyjádřit optimální vztah mezi teoretickou a didaktickou složkou přípravy číselným poměrem považuji za nesprávné. Přemíra teorie bez vazby na realitu vyučování je právem odsuzována, ale část veřejnosti (bohužel i pedagogické) žádá učitele praktika, jakéhosi „řemeslníka na vzdělávání dětí“. Zastánci tohoto názoru si neuvědomují, že teoretický nadhled osvobozuje učitele od formalismu, vytváří předpoklady pro jeho flexibilitu a tvořivost. Odpověď je tedy třeba hledat ne na otázku „Kolik?“, ale „Jak?“.

Studium na vysoké škole je často poslední příležitostí ukázat studentovi učitelství jiný pohled na matematiku. I když to zní paradoxně, na učitelství matematiky se hlásí i uchazeči, kteří nemají k matematice pozitivní vztah. Hledají druhý aprobační obor k učitelské dvojkombinaci a vzhledem k nižšímu počtu uchazečů se jim zdá cesta ke studiu učitelství volbou matematiky schůdnější než při volbě jiného oboru. Je reálné i z takových studentů vychovat učitele, kteří budou mít rádi svůj obor a budou vzbuzovat zájem o matematiku u svých žáků?

Laikovi by se mohlo zdát, že výuku matematiky zatraktivní vynechání definic, vět, důkazů, stačí ukázat jenom několik zajímavostí a věnovat se aplikacím. Takový přístup může sice chvíli studenta motivovat, může mu poodhalit krásu matematiky, ale nikdy ho nepřivede k její podstatě. Nemá smysl namlouvat studentům a žákům, že je matematika vlastně lehká. Říkejme jim poctivě, že studium matematiky vyžaduje těžkou práci, že je to někdy dokonce dřina. V matematice se neobejdeme bez vytváření systému a to vyžaduje vytrvalost a píli. Absolvent učitelského studia by měl rozumět svému oboru v tom smyslu, že nemusí být encyklopedií poznatků tohoto oboru, ale umí používat nástroje typické pro jeho obor, umí uplatnit myšlenkové postupy, chápe vzájemné vazby a alespoň tuší, v čem spočívá „krása“ studovaného oboru. Pro matematiku to platí plnou měrou.

Velkou chybou je, když se student učitelství stává osamělým běžcem, který se sám pere se všemi překážkami. Chceme, aby do výuky na základních a středních školách pronikalo kooperativní učení, ale studentům dáváme jenom malý prostor pro spolupráci. Dáváme budoucímu učiteli příležitosti k tomu, aby vyjádřil svůj názor na problém, aby ho porovnal s jinými názory, aby ho obhajoval? Nejčastějším prověřováním toho, co se student naučil, je v matematice písemný test. U řady zkoušek student jenom opakuje to, čím v několika předchozích dnech zatížil svoji paměť, a po zápisu výsledku do indexu to rychle zapomíná. V zahraničí jsem měla možnost vidět zkoušku ve zcela odlišném pojetí. Skupina studentů dostala několik dní před zkouškou zadaný úkol, na tom společně pracovala a výsledek potom obhajovala při samotné zkoušce. Někdo možná namítne: „A co známka, jak byla objektivně udělena? Co když někdo pracoval více a někdo se jenom vezl?“ Samozřejmě nejsme na podobný způsob zkoušení zvyklí, ale o co nám u zkoušky jde – jen o to, aby student co nejvěrněji reprodukoval to, co jsme odpřednášeli?

Aby se učitel mohl stát průvodcem žáka na cestě k poznání, musí sám takovou cestu objevování a poznávání prožít. Během studia bychom měli hledat a využívat každou příležitost k tomu, aby student dospěl k poznání svojí cestou, aby zažil radost z dosažení cíle, ale i z cesty samé. Vedle frontální výuky mu musíme nabídnout výuku formou tvořivé dílny, ve které se vysokoškolský učitel stane partnerem spolupracujícím na společném díle. Takový způsob výuky je oboustranně obohacující, má často silný emotivní náboj a vede k přijetí nové dimenze vztahu učitele a žáka.

Uvedený přístup k budoucímu učiteli vyžaduje ve výuce klid a dostatek času. Při tvorbě studijních plánů se však pravidelně opakuje jakýsi mezikatedrální boj o hodiny a kredity. Zatím jsme nedospěli do stádia, kdy by zástupci různých kateder společně přemýšleli nad tím, jak integrovat učivo, aby student neslyšel opakovaně totéž a aby se co nejvíce využilo vzájemných vazeb teoretických, didaktických, pedagogických a psychologických předmětů k vytvoření prostoru pro rozvoj samostatného myšlení, pro tvořivost, pro spolupráci.

Učitel, který vede žáka jeho vlastní cestou, který mu nabízí a inspiruje ho, musí být schopen odhalovat individuální zvláštnosti jednotlivých žáků. Ve školách roste počet dětí se speciálními vzdělávacími potřebami. Absolvent učitelství by měl být připraven reagovat na komplikující se mezilidské vztahy, na probíhající změnu dětské psychiky, na měnící se hierarchii hodnot. Současný trend integrace a inkluze handicapovaných dětí vede k požadavku na rozšíření výuky speciální pedagogiky a k zařazení disciplín orientovaných na diagnostiku psychopatologických změn. Budoucí učitelé by měli být rovněž připraveni na příliv imigrantů a nárůst počtu jejich dětí ve třídách, a to nejen z hlediska jazykového, ale především z hlediska sociokulturního.

Součástí studijních plánů učitelství jsou i disciplíny formující osobnost studenta. Pomáhají mu poznat sebe sama a často překonat to, čím byl poznamenán ve vlastním předchozím studiu. Přispívají zároveň k rozvoji kultury mluveného projevu studentů. V takzvaném společném základu studia učitelství jsou rovněž zařazeny tradiční předměty typu filozofie, biologie dítěte, ale i nové disciplíny, jejichž potřeba byla vyvolána požadavky společnosti. Jedná se především o předměty zvyšující kompetence ve využívání informačních technologií a o předměty věnované výchově ke zdraví. Nesmíme zapomenout ani na studium jazyků.

Zvláštní pozornost bychom měli věnovat otázce pedagogické praxe. Ekonomické, organizační i časové důvody nedovolují vysokým školám zařazení pedagogické praxe v rozsahu, který by připravil studenta na maximum situací, které bude muset ihned po nástupu na školu řešit. Učitelé z praxe si často představují, že absolvent bude vědět, jak, co a kam přesně zapsat do pedagogické dokumentace, bude znát všechny vyhlášky a nařízení. To není možné a ani to není smyslem přípravy učitele. Uvědomme si, kolik reforem školství, kolik různých zákonů, kolik změn tiskopisů asi zažije čerstvý absolvent, pokud ve školství vydrží až do důchodu! Cílem praxe je umožnit sledování a srovnávání různých stylů práce

učitele, pozorovat dítě v procesu učení, hledat příčiny jeho chování, ale především postupně vytvářet vlastní pojetí výuky. Student se učí pracovat s obsahem předmětu, zvládat didaktickou transformaci a interpretaci poznatků jednotlivých vědních disciplín, rozvíjí svoje komunikativní dovednosti, učí se klást otázky, volit strukturu hodiny, její vhodné časové rozvržení apod., ale především si vytváří základ vztahu k žákům a ke své budoucí učitelské roli. Konfrontace praktických zkušeností s teorií ukazuje studentovi nezbytnost teoretického základu, má motivační vliv na jeho další pregraduální i postgraduální studium. Proto by praxe měla probíhat paralelně s výukou didaktik, aby zkušenosti studentů mohly být analyzovány, aby se konkrétní situace stávaly zdrojem diskusí a hledání variant řešení. Návrat k vlastní činnosti, její uvědomování si, zkoumání a hodnocení vede budoucího učitele k tomu, aby si uvědomoval co a proč dělá, aby později dovedl obhájit svoje pojetí výuky s oporou o teorii.

Z uvedeného vyplývá, že připravit učitele znamená připravit vyzrálou osobnost vybavenou kompetencemi oborovými, komunikativními, diagnostickými, intervenčními, osobnost s kompetencí sebereflexe a teoretické reflexe praxe.

3 Kdy se to má naučit?

Pokud sumarizujeme, které kompetence by měl učitel, tedy i učitel matematiky, mít a zvážíme, jak dlouhou dobu má vysoká škola na formování jeho osobnosti, je zřejmé, že neplatí: absolvent = „hotový“ učitel. Vypouštějí tedy vysoké školy do praxe jakési polotovary? V jistém smyslu ano, pokud toto označení nevnímáme pejorativně. Studium na vysoké škole umožňuje vytvořit základy příslušných kompetencí, ale jejich dotvoření musí nutně proběhnout až v praxi. Proto je tak nutné zaměřit se již v pregraduální přípravě učitelů na nalezení pozitivního vztahu k dané profesi a využít všechny prostředky k probuzení potřeby celoživotního učení. To hlavní se bude absolvent učit v každodenní praxi. Bude dozrávat jeho pojetí výuky, to, co si přinesl ze studia, se bude přetransformovávat v konkrétních podmínkách.

Do přípravy učitele vstupuje v současné době nový prvek. Na většině fakult připravujících učitele již proběhla nebo se připravuje restrukturalizace studia. Dosud souvislá čtyřletá nebo pětiletá příprava učitelů je rozdělena na tříleté bakalářské studium, které nevede k získání učitelské kvalifikace, a dvouleté navazující učitelské studium. Odpůrci restrukturalizace poukazují na to, že dojde ke zkrácení doby, po kterou může vysoká škola formovat osobnost studenta jako osobnost budoucího učitele.

Proces vytváření profesních kompetencí je nepochybně dlouhodobou záležitostí. Bakalářské studium, i když má výrazněji odborné zaměření, by mělo poskytovat prostor i pro položení základů kompetencí studenta potřebných pro budoucí učitelskou profesi. Jedná se především o zařazení disciplín zaměřených na osobnost učitele, ale využitelných i v dalších profesích (například rozvoj ko-

munikativních dovedností, poznávání sama sebe spojené se sebereflexí apod.). Během bakalářského studia bychom měli nabídnout zájemcům o studium učitelství praxi, která by jim umožnila vidět školu jinak než jenom z dosavadní pozice žáka. Absolvent bakalářského studia se tak bude rozhodovat pro učitelské studium zralejší a bohatší o poznání svých vlastních možností a předpokladů. Dá se očekávat, že studentů navazujícího studia bude méně než při dosavadním „dlouhém“ studiu, ale budou výrazněji motivováni. Jejich další volba bude uvědomělejší. Navazující studium by jim mělo nabídnout další růst především v oblasti didaktik, pedagogiky a psychologie.

Opominout nelze ani fakt, že zákon o pedagogických pracovnících umožňuje i další cesty k získání učitelské kvalifikace. Na školy budou nastupovat učitelé, kteří neabsolvovali pedagogickou praxi v obvyklém rozsahu, neprošli škálou pedagogických a psychologických disciplín. Zejména jim budou muset vysoké školy a další instituce nabídnout variabilní kurzy celoživotního vzdělávání doslova „šité na míru“.

4 Závěrem

Pojetí učitele prochází v současné době velkými přeměnami. Pozitivní změna školy, její orientace na dítě, její humanizace je realitou, na kterou musí být absolvent pedagogické fakulty připraven. U čerstvého absolventa lékařské fakulty se rozhodně neočekává, že bude sám operovat pacienty – čerstvý absolvent pedagogické fakulty stojí sám před třídou a přejímá plnou odpovědnost za vývoj žáků. Absolvoval sice na fakultě pedagogickou praxi, ale ta skutečná praxe ho teprve čeká. Bez pomoci a pochopení zkušenějších kolegů nenajde sám sebe, nezíská tu správnou rovnováhu mezi sebejistotou a věčným pochybováním, které provází učitelskou profesi. Doba, za kterou se stane skutečným Učitelem, je různá. Záleží na jeho předchozí přípravě, na vlivu okolí, ale především na něm samotném.

Literatura

[1] HELUS, Z. *Dítě v osobnostním pojetí.* Praha : Portál, 2004.

[2] JANÍK, T. *Znalost jako klíčová kompetence učitelského vzdělání.* Brno : Paido, 2005.

[3] KASÍKOVÁ, H., VALENTA, J. *Reformu dělá učitel.* Praha : Ikarus, 2004.

[4] LUKÁŠOVÁ, H. *Učitelská profese v primárním vzdělávání a pedagogická příprava učitelů.* Ostrava : PedF OU, 2003.

[5] MAREŠ, J., SLAVÍK, J., SVATOŠ, T., ŠVEC, V. *Učitelovo pojetí výuky.* Brno : Masarykova univerzita, 1996.

[6] SPILKOVÁ, V., a kol. *Proměny primárního vzdělávání v ČR.* Praha : Portál, 2005.

[7] SPILKOVÁ, V. Klíčové trendy v proměnách vzdělávání učitelů primárních škol po roce 1989. In *Matematika 2.* Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2006.

Motivace pro aplikovanou geometrii

Jaroslav Černý

Abstrakt

Výuka matematiky a geometrie na technických vysokých školách má velmi blízko k aplikacím v inženýrských oborech, které jsou předmětem studia. Příkladů a problémů geometrie, které můžeme studentům jako motivaci ke studiu geometrie ukázat je celá řada. Příspěvek ukazuje některé z nich, úlohu na konstrukce kružeb gotických oken představuje detailněji.

1 Úvod

Proces poznání a bádání je spojen úzce s procesem učení a vyučování. K hlubšímu poznávání je potřeba přesnějších a sofistikovanějších metod popisu reality. Proces vyššího vzdělávání se dotýká v posledních desetiletích stále větší skupiny populace a úroveň znalostí a dovedností, které jsou cílem vzdělávání se mění. V tomto procesu na vysokých školách přispěla i reforma založená na Boloňském procesu, který rozdělil většinu studií, včetně inženýrského studia, na dvě části – bakalářskou a magisterskou (inženýrskou). Změna filosofie technického vzdělání tak vedle globálních trendů (např. zájem o studium, které je tradičně obtížné, navíc je ovlivňován i větší nabídkou humanitních studií) tak přinesla oživení otázek praktičnosti výuky řady oborů/předmětů, včetně matematiky. *Na vysokých školách je vlivem strukturovaného studia studium rozděleno na dva stupně – bakalářský a magisterský. Proto je třeba hledat i odpovídající rozdělení vysokoškolské výuky matematiky na tyto dva stupně. Jistě se ale nejedná o prosté rozdělení ve smyslu „tuto partii ano a tuto ne“. Důležitým momentem ve výuce matematiky bude názornost výuky. Matematická teorie je často prezentována „na příkladech pro příklady“. Měla by být prezentována na příkladech z praxe daného oboru. Mělo by být ukázáno, k čemu matematika je. To platí především pro bakalářské studium.*

Dlouhý citát je z [1]. Podobných vyjádření najdeme mnoho, většinou je vyslovují inženýři. Problém není jednoduchý, kdyby nalezení jeho řešení bylo zřejmé a snadné, jistě by bylo na řadě oborů a studijních programů okamžitě realizováno. Problém je v rozsahu hodin pro matematiku, postavení kurzů matematiky v učebním plánu, ..., ale také v tradičním pojetí výuky matematiky, který charakterizuje spojení *„na příkladech pro příklady“* uvedené výše.

Ukázat užitečnost a aplikovatelnost teorie je pro studenta technického oboru důležité. Na druhou stranu je pragmatický až utilitaristický přístup charakteristický pro dnešní dobu jako celek, jako filosofie nešťastný. Častý dotaz „a k čemu to vlastně budeme potřebovat“ je sice někdy namístě, ale student učící se řadu dnešních norem, materiálů a technologických postupů, na ně v praxi později narazit vůbec nemusí. Proto univerzalita vzdělání, vyšší míra přiměřené „teoretičnosti studia“ by měla být i v bakalářském studiu. Toto není v rozporu s nutností ukázek aplikačních motivací a aplikací v matematických předmětech. Matematik, jehož filosofické zaměření není často charakterizováno zkratkou (ikonou) JAK, ale PROČ, může mít s touto filosofií potíže.

2 A co geometrie

Jakou geometrii máme na mysli? Postavení geometrie v historickém kontextu až po současnost bylo vždy předmětem diskusí. Geometrie na technice byla většinou reprezentována kurzem deskriptivní geometrie, dnes pod hlavičkou konstruktivní, konstrukční, inženýrské geometrie s některými výjimkami (např. kurz deskriptivní geometrie pro studenty geodézie na fakultě stavební ČVUT v 80. letech, i nyní). Předmět má na různých technických univerzitách různou podobu i různý název. Je často spojen s lineární algebrou a analytickou geometrií, obsahuje základy diferenciální geometrie, či geometrie užité v počítačové grafice. Bývá však koncipován i jako kurz klasické deskriptivní geometrie. Pomineme-li sporadické studium (pokud počítáme počet studentů, kteří studium absolvují) specializace M + DG na MFF UK a UFP v Olomouci, je DG součástí učitelských studií na pedagogických fakultách (např. s názvem „Zobrazovací metody“ se specializacemi M + * na pedagogické fakultě UK), je však povinnou součástí velké části technických studijních programů.

Je zajímavé, že geometrie nebývá v inženýrské obci předmětem kritiky z nedostatku názornosti, aplikovatelnosti či „l’art pour l’art“-ismu. Jistě to pramení i z historie výuky deskriptivní geometrie, ale také ze současného postavení a váhy předmětu ve studiu. Výhoda geometrie v oblasti aplikací tkví v tom, že najdeme řadu zajímavých a ne obtížně formulovatelných aplikací, které nás dovedou k problémům, jejichž řešení vyžaduje použít matematickou teorii, bez níž bychom problém nevyřešili. Ukážeme si příklady problémů, které nejsou přímo z deskriptivní geometrie, ale ve výuce geometrie na technice je najdeme. Jedním se budeme zabývat detailněji.

3 Problémy

Problémy, které představíme, byly při různých příležitostech prezentovány studentům programu *Architektura a stavitelství* ve výuce na fakultě stavební ČVUT v Praze. Přílohy jsou na internetové stránce http://mat.fsv.cvut.cz/cerny.

Snaha je vždy najít jednoduchý motivační problém, který uvede jednotlivou partii a může pak představovat při hlubším studiu podnět pro samostatnou práci studentů. Následující výčet ukazuje na některá témata, která již byla v minulých letech studenty zpracována.

- *Elipsa se z technologických důvodů nahrazuje často oválem. Úkolem je najít konstrukci pro ovál složený ze 4 nebo 8 kruhových oblouků. Problematika se váže k Apolloniovým úlohám. Také ke konstrukcím křivek složeným z kruhových oblouků nebo oblouků jiných křivek, napojování křivek, spliny.*
- *Le Corbusier, modulor a zlatý řez. Jednou z úloh geometrie při studiu architektury je vnímání prostoru, hmoty, plochy, čar, ale také dimenzí a poměrů. Poměry hrají v architektuře důležitou úlohu. Student má poznat zlatý řez jako základní poměr používaný jak v historické, tak dnešní architektuře.*
- *Důležitými objekty jsou mnohostěny. Student vytváří pravidelné a polopravidelné mnohostěny. Motivací jsou geodetické kupole, fuleren (C 60) a příklady staveb. Motivace vede ke studiu mnohostěnů, Eulerova věta, zobecněná Eulerova věta.*
- *Řada konstrukcí se realizuje jako prutové konstrukce, plochy se pak nahrazují mnohostěny. Na plochách se vytvářejí mřížoviny, obvykle z minimálně dvou soustav křivek. Student se setkává s tématem u ploch, např. zobrazuje mřížovinu na válcové ploše, tvořenou kružnicemi, přímkami a šroubovicemi. Ale také na kuželové ploše, kulové ploše, rotačním hyperboloidu.*
- *V současné době se používají počítačové algebraické systémy, např. Mathematica, Maple. Jaké zobrazovací metody se při zobrazení používají. Student se seznámí se středovým promítáním a tříuběžníkovou perspektivou.*
- *Šroubové schodiště, Turning Torso, Fordham Spire a řada dalších staveb vychází ze šroubových ploch. Student se zabývá možnostmi zobecnění šroubového pohybu jako složení dvou rovnoměrných pohybů – otáčení kolem přímky a posouvání podél této přímky. Vytváří šroubovici na rotační ploše nebo šroubovici nad rovinnou křivkou. Hledá realizace v praxi.*
- *Ve všech kreslicích systémech, třeba CAD systémech se používá kresba „obecné křivky“. Jak je tato křivka určena, jaká je to křivka a jaké tvary umožní obvykle systém nakreslit? Student se seznámí s de Casteljau algoritmem, aplikuje jej na parabolu.*
- *Střešní konstrukce mohou mít různý tvar, student nakreslí zastřešení jednoduchého půdorysu, nebo použije jako střechu jednoduchou plochu (byť půdorys bude „složitější“). Nakreslí vhodný průmět vrstevnic použité plochy. Zakreslí spádové křivky do vrstevnicového plánu. Seznámí se s pojmem jednoparametrický systém křivek, jak jej popsat diferenciální rovnicí a jak*

popsat ortogonální systém na jednoduchých příkladech. Cílem je popsat spádové křivky na vybraných plochách střešních konstrukcí.

- *V historických stavbách jsou významným prvkem klenby. Valené klenby mají různé profily (spojené s tzv. tlakovou a střednicovou čárou). Geometricky jsou tvořeny jedinou válcovou plochou. Složitější klenby vznikají průniky ploch (klášterní, křížová klenba, průnik dvou rotačních válcových ploch s kolmými, různoběžnými osami). Cílem je popsat a zobrazit klenby, které jsou vytvořeny složitějšími plochami než válcovými.*
- *Jednoduchý model visutého mostu a příklady staveb, např. Gateway Arch v St. Louis, obrázek optimální střednicové čáry valené klenby, dovedou studenta k otázce popisu tvaru čáry, kterou tvoří hlavní lano mostu, střednicová čára, apod. Cesta vede k parabole a řetězovce. Cílem je poznání a popis řetězovky.*

Ve stavebních oborech jsou významnou motivací realizované stavby, jejich geometrické prvky, architektonické návrhy a architektonické prvky jak v historických, tak současných stavbách. Podle mého názoru to má pro výuku stavebních inženýrů, zvláště architektů, dnes větší význam než klasické metody deskriptivní geometrie. Příklady jsou uvedeny na adrese [4], v obrazové verzi tohoto příspěvku a budou prezentovány na konferenci.

Výčet problémů by mohl pokračovat. Ve výše uvedeném výčtu jsme vybrali problémy, které již byly se studenty řešeny. Vyberme nyní jeden z problémů, který je blízký středoškolské geometrii a představíme si, jak vypadá scénář výkladu problému detailněji.

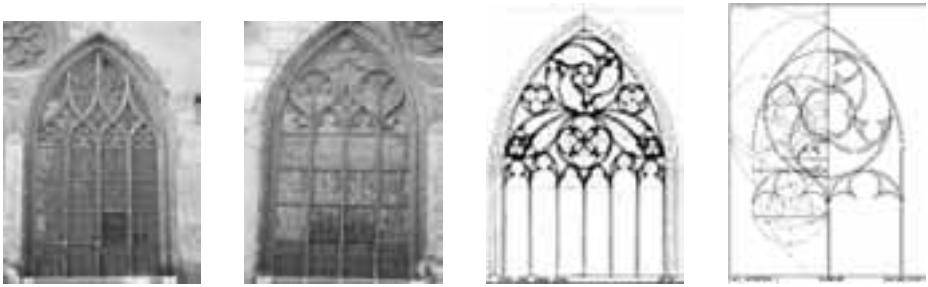
4 Od gotických oken k Apolloniovým úlohám

Problém byl řešen ve volitelné přednášce pro studenty 1. ročníku v akademickém roce 2003/2004. Přednášky se účastnilo 35 studentů.

Nakreslete si nějaké gotické okno. Co jej bude charakterizovat, kromě lomeného oblouku? V oknech bývají často kružby. Při zjednodušení budou kružby vytvářet oblouky kružnic. Řešte jednoduché úlohy kružeb: vepište jednu (dvě, tři) kružnici do horní části okna, . . . , vytvořte si vlastní kružbu.

Situaci jsme popsali, vysvětlili jsme si jednoduché dělení oken podle tvaru hranice, ukázali jsme si několik příkladů kružeb. Studenti řešili první jednoduchou úlohu: do horní části okna vepište kružnici tak, aby se dotýkala středné obou oblouků. Zdánlivě jednoduchá úloha přinesla nečekané problémy. Postupně jsme formulovali ekvivalentní podmínky pro určení kružnice:

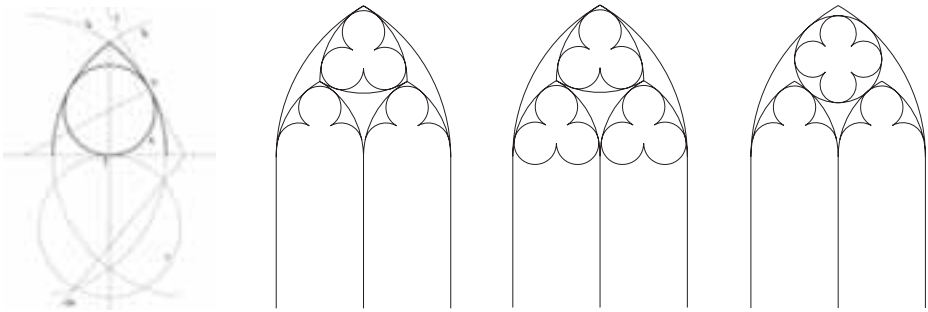
- dotýká se obou oblouků a středné,
- zadání je symetrické: dotýká se jednoho z oblouků, středné a střed má na ose symetrie okna,



Obr. 1

- dotýká se jednoho oblouku a středné, na které známe bod dotyku.

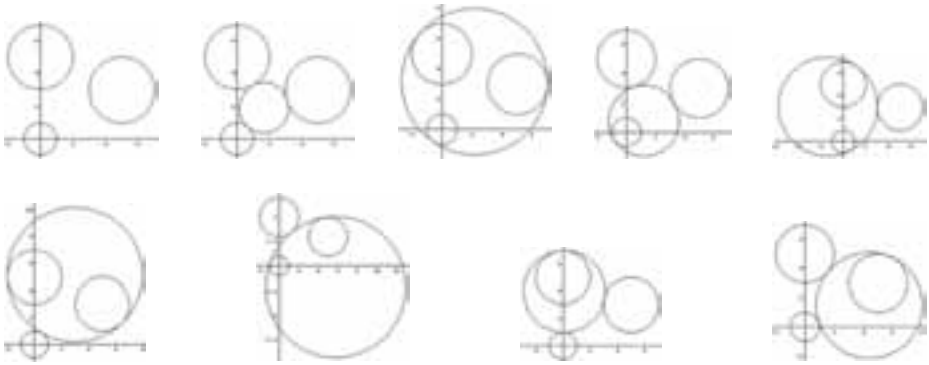
Diskuse řešení nás dovedla k Apolloniovým úlohám, také k mocnosti bodu ke kružnici a chordále. Pro studenty byla překvapením, jak při znalosti těchto pojmů, je řešení úlohy jednoduché.



Obr. 2

V diskusi se objevila i otázka algoritmu, kterým je úloha řešena v některých grafických programech (např. AutoCAD). Program sestrojí kružnici, která se dotýká tří křivek (přímek nebo kružnic, alternativně úseček nebo kruhových oblouků). Analytické řešení vede na soustavu tří kvadratických rovnic pro tři neznámé. Zajímavé bylo, že studenti označili jako nejjednodušší úlohu „tři tečny“ a nejobtížnější „tři kružnice“. Při sestavení soustavy rovnic se ukázalo, že úloha „tři kružnice“ vede na jednodušší soustavu rovnic než tři přímky. Volba soustavy, resp. volba řešení je závislá na určení části přímky nebo oblouku kružnice, který jsme vybrali, tzn. software nakreslí pouze jediné řešení.

Výsledky jsme zobrazili pomocí parametrických rovnic (demonstraci v softwaru *Mathematica* jsem prováděl sám).



Obr. 3

Studenti preferují úlohy, které mají strukturu „ukažte mi vzorec, já naměřím data a dosadím“. Úlohy, které jsou nestandardní, byť nejsou obtížné, vzbuzují obavy a lokálně ve výsledku učení nepřinesou „žádný efekt“. Lekce o oknech (volitelná přednáška) trvala 6 hodin, výsledkem byl návrh vlastního okna, kde však studenti aplikovali vesměs prvky a postupy, které byly prezentovány na cvičení. Do většího experimentování se nepouštěli. Kdo uměl AutoCAD, měl řešení snazší, k narýsování okna nepotřeboval „žádnou konstrukci“.

Literatura

[1] JURA, P., VAVŘÍN, P. *Kybernetika, automatizace a měření ve strukturovaném studiu.* Automa č. 10, 2004, s. 43–45.

[2] http://www.fa.cvut.cz/vladimirahajkova

[3] http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari/kog2

[4] http://mat.fsv.cvut.cz/cerny/

Zamyšlení nad Školními vzdělávacími programy

Eduard Fuchs

Abstrakt

Autor příspěvku vedl autorský kolektiv, který v rámci JČMF zpracoval materiály, které by měly učitelům matematiky pomoci při tvorbě školních vzdělávacích programů. V příspěvku je obsažena základní informace o těchto materiálech a několik zamyšlení nad současným stavem našeho školství.

1 Školní vzdělávací programy

Naše školství od druhé světové války prošlo početnou řadou reforem a změn koncepcí organizačních i obsahových. Zkušenější učitelé o tom vědí své.

Permanentně proklamovaná péče o zvyšování úrovně vzdělanosti u nás nabyla podoby vymýšlení zásadních změn, úprav učebních plánů, neustálého zavádění nových metod a učebních postupů. Školství samozřejmě musí reagovat na vývoj vědy, na celkový rozvoj společnosti i na zavádění nových technologií. Jen je nutno mít na paměti, že nově zaváděné koncepce budou záhy koncepcemi zastaralými a žádné změny neumenší rozhodující roli učitelů. Ti dobří budou učit dobře i při špatné reformě, jen jejich práce bude obtížnější, a některým vyučujícím žádná reforma ke zkvalitnění výuky nepomůže.

Hlavním nástrojem právě probíhající reformy mají být *Školní vzdělávací programy*, které si školy samostatně připraví na základě tzv. *Rámcových vzdělávacích programů*, které postupně pro jednotlivé typy škol MŠMT zveřejňuje.

Typické pro zavádění reforem u nás je to, že nikdo v této souvislosti fundovaně neodpověděl na zásadní otázku, zda je správné přenést tak velkou volnost v tvorbě koncepce jednotlivých předmětů a ve formulaci výstupních požadavků na jednotlivé školy. Zcela jistě existuje velká řada škol, které takto získané možnosti bezezbytku využijí a na základě četných diskusí mezi vyučujícími jednotlivých předmětů připraví program, který bude pro žáky znamenat zkvalitnění výuky nejen v jednotlivých předmětech, ale přinese i nezbytné a dosud obtížně prosazované posílení mezipředmětových vztahů.

Na druhé straně je nutno si uvědomit, že v ČR existuje více než 1 500 základních škol, které mají méně než 100 žáků. Na těchto školách často učí neaprobovaní učitelé, maturanti a přesluhující důchodci. Opravdu i na těchto školách

budou probíhat kvalifikované diskuse mezi vyučujícími, které posléze vyústí ve formulaci školního programu, který bude znamenat kvalitativní zlepšení současného stavu? Opravdu jsou na všech základních i středních školách ředitelé, kteří mají pochopení pro rozvoj a adekvátní postavení **všech** předmětů ve výuce na dané škole?

Dochází k naprosto kuriózní situaci. Vysoké školy musí připravovat akreditační materiály rozepsané do nejmenších podrobností a po akreditaci se musí těchto dokumentů bezpodmínečně držet. Jakákoliv změna v hodinové dotaci například ve cvičení k některé přednášce je téměř neprůchodná s odůvodněním, že není v souladu s akreditovanými materiály. Fakulty jsou násilně tlačeny do bakalářsko-magisterské unifikace, která je pro některé obory nevyhovující a mnohdy doslova absurdní. Zdůvodnění je fiktivní a nesmyslné: je motivováno představou některých byrokratů (a bohužel i řady akademických pracovníků), že je nutno v rámci Evropské unie umožnit nekomplikovaný přechod bakalářům z jedné univerzity na magisterské pokračování i jiného typu studia na univerzitě jiné. S jistou dávkou nadsázky: absolvent bakalářského studia dějin umění v Bruselu by měl mít možnost bez problémů pokračovat v magisterském studiu jaderné fyziky v Praze (a naopak).

A v této situaci se základním (a středním) školám dává pravomoc, díky níž se Pepíček, který se přestěhuje z Horní Lhoty do Lhoty Dolní – a takové stěhování je na rozdíl od výše zmíněného přechodu Praha–Brusel reálné a obvyklé – ocitne sice ve stejné třídě, leč se zcela jinými vyučovacími předměty a s odlišnou náplní.

Základní právní prostředí je však nutné respektovat a výuka musí probíhat v těch mantinelech, které jsou vymezeny. Za každé situace přesto zůstává dost prostoru pro aktivní vklad jednotlivců i institucí.

Již před lety, na 4. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v r. 1992, jsme se rozhodli vytvořit v rámci JČMF pro základní školy a pro všechny typy středních škol standardy pro výuku matematiky, které by formulovaly názor *Jednoty* na to, jaká by měla být výstupní úroveň žáků, a to bez ohledu na to, kdy, jak a zda vůbec k obdobnému názoru dospěje Ministerstvo školství.

Toto rozhodnutí se ukázalo správným a prozřetelným. Standardy, které jsme vytvořili, sehrály důležitou roli a dodnes patří k dokumentům, které ani oficiální instituce nemohou obejít při formulaci základních programových dokumentů. Poznamenejme, že k podobnému stavu se nedopracovala pedagogická veřejnost v žádném z dalších vyučovacích předmětů.

Proto jsme považovali za samozřejmé, že je nutno reagovat i na situaci, kterou lze jednoduše charakterizovat pojmem *Rámcové vzdělávací programy.* Možná si někteří účastníci letošního setkání vybaví vzrušenou debatu poté, co jsme na minulém setkání v Srní v r. 2004 ohlásili, že ve spolupráci s nakladatelstvím Prometheus chceme přichystat sérii materiálů na pomoc učitelům matematiky při tvorbě školních vzdělávacích programů. Na jedné straně následoval téměř jed-

notný souhlas učitelů, na straně druhé až překvapivě negativní reakce zástupců oficiálních institucí (především VÚP), kteří v tom zřejmě viděli nepřiměřený zásah do svých kompetencí a jednostranných představ o tom, jak mají být školní vzdělávací programy tvořeny.

Přes tyto reakce jsme se rozhodli na oznámených materiálech pracovat. Podobně jako u standardů jsme se dohodli, že s přípravou materiálů nebudeme u jednotlivých typů škol čekat na zveřejnění definitivních a oficiálních *Rámcových programů*, neboť základní parametry probíhající reformy nastaveny byly a náš materiál, jakkoliv měl být zaměřen jako pomocný text pro přípravu školních programů, jsme nikdy nechápali jako ryze účelový bezduchý rozpis programu rámcového, ale chtěli jsme učitelům nabídnout své zkušenosti, návrhy, metodické postupy, argumenty pro vedení školy i širší veřejnost atd.

S potěšením můžeme konstatovat, že materiály, které jsme na minulém setkání avizovali, byly vypracovány a nakladatelství Prometheus je v průběhu roku 2006 vydalo (viz [2, 3, 4, 5]).

2 Postavení matematiky

Jak již bylo naznačeno, jedním z cílů zmíněných materiálů bylo poskytnout učitelům dostatek argumentů pro zajištění odpovídajícího postavení matematiky ve školních vzdělávacích programech. Všichni dobře víme, jak módní je dnes vystupovat proti matematice a exaktním vědám vůbec. Velmi častá je argumentace typu *K čemu to budou děti potřebovat?* nebo *Náš František* (*Anička*) *bude lékařem* (*historikem, umělcem, ...*) *a matematiku nebude nikdy potřebovat.*

Smyslem školy přece není jen předání jistého souhrnu vědomostí, ale především **výchova** a **vzdělávání** v tom nejširším slova smyslu. Jak již bylo mnohokrát řečeno, to nejpodstatnější, co si absolvent školy do života odnáší, je to, co mu zůstane, až zapomene všechny dílčí poznatky. Proto je diskuse na téma „K čemu to budu potřebovat?“ zcela pomýlená a kontraproduktivní. Kdybychom situaci hodnotili jen z tohoto hlediska, mohli bychom odbourat ze školy téměř vše. Většinu vědomostí nebudeme v praktickém životě potřebovat nikdy a navíc dopředu ani nevíme, co opravdu potřebovat budeme.

Bohužel však k těmto diskusím velmi nešťastně přispívají i někteří představitelé JČMF, kteří v médiích zcela vážně vyhlašují, že je například zbytečné ve školách učit kvadratické rovnice apod. Jak by takto vychovávaní žáci porozuměli například elementárním základům mechaniky, to mně věru uniká.

A lze rozumně argumentovat rodičům zmíněného Františka nebo Aničky? Samozřejmě. I když pomineme skutečnost, že není vůbec jisté, zda zmíněný František bude opravdu tím, co si rodiče desetiletého kloučka přejí, je jejich vidění světa naprosto deformované.

Proč by se měl matematiku učit třeba historik? Protože si neumím představit, jak může historik vysvětlit a pochopit „smysl“ toho, co se odehrálo například

v 16. a 17. století, když nepochopí dosah toho, co znamenali např. Descartes, Newton nebo Leibniz. Vhled do jejich vidění světa je pro pochopení dějin důležitější než znalost chronologie panovníků tehdejší doby.

Opravdový znalec umění nemůže pochopit kompozici obrazu bez znalosti perspektivy a znalosti toho, co je to „zlatý řez“. (Abychom byli spravedliví: může význam zlatého řezu studentům vysvětlit matematik, který se nikdy nevnořil do kompozice obrazů a jejich zákonitostí?)

Potřebuje matematiku lékař? Pokud ne, tak proč k nám na fakultu chodí lékaři z fakultní nemocnice, kteří se marně snaží pochopit návod k moderním přístrojům, kde se na první straně hovoří o vlastnostech rychlé Fourierovy transformace?

Potřebujeme vůbec umět počítat, když přece v knihách (v kalkulačce, v počítači) jsou všechny vztahy uvedeny a jde jen o to děti naučit tyto prameny používat? Pokud ne, proč se při výuce cizího jazyka biflujeme cizí slovíčka? Vždyť přece ve slovníku (translátoru, na internetu, ...) jsou všechna tato slova uvedena. Napadne někoho, že to je důvod k tomu, abychom se jazyky neučili?

Takových příkladů bychom mohli jmenovat nepřeberně.

Samozřejmě, že škola nemá učit zbytečnou faktografii, musí reagovat na moderní vědecké trendy, musí využívat a současně učit i děti využívat moderní technologie atd. Nic z toho však neumenšuje zásadní roli učitele.

Přímo esencí těch nejzrůdnějších názorů na vývoj našeho školství je nedávný článek O. Botlíka uveřejněný v Lidových novinách [1]. Autor nejprve předestřel falešný obraz našeho současného školství. Citujme: (*Žáci*) *byli sice ve škole přítomni fyzicky, ale ne duchem. Proč by taky měli vnímat nešťastnici, která na tabuli přepisovala ze svých dvacet let starých příprav světová naleziště černého uhlí a ropy?* Do protikladu pak postavil ideál toho, jak by škola v blízké budoucnosti měla vypadat. Nejprve urazí většinu učitelů, fakult, autorů učebnic atd. (*Třeba osnovy a metody výuky jsou v podstatě stejné jako v polovině minulého století. Tahle setrvačnost vždy vyhovovala většině učitelů ve školách, mnoha jejich učitelům na pedagogických fakultách i autorům učebnic.*), nezapomene udělat standardní „mediální“ omyly, když například nezaznamená, že většinu středoškolských učitelů nevychovaly pedagogické, ale filozofické, přírodovědecké, matematicko-fyzikální fakulty apod. a poté předvede svůj obraz ideálního školství, v němž se nebudou žáci nic muset „učit postaru“.

Podle Botlíka lze počty odbourat: *Dnes už se žáci učí počítat z hlavy spíš kvůli tomu, že to rozvíjí jejich myšlení. Potřebovat to nebudou.*

Ostatně i učit psaní je zbytečné: ... *Na počítači se malé děti naučí produkovat text rychleji: „výroba písmenek“ se zásadně zjednoduší, chyby lze snadno opravit a vytištěný výsledek vypadá skvěle. Děti navíc nemusí do omrzení opakovat stejné znaky a slova jako v písance... Psát rukou se děti snadno naučí o rok či dva později.*

Tak jen nevím, proč například sportovci tak usilovně trénují. Podle Botlíkova modelu by se měl například budoucí skokan do výšky dívat na rozbory skoku na internetu, napsat o tom několik důmyslných esejů a pak, až bude potřeba, za nějaký ten rok světový rekord klidně skočí.

Podle Botlíka ovšem ani těch učitelů nebude příliš zapotřebí. „Rozumná“ škola si za pár let nechá tak nanejvýš dva nebo tři, které ovšem bude moci pořádně zaplatit, další místa obsadí „učitelskými pomocníky“ bez patřičného vzdělání: *Škole na ně rázem přibylo peněz, neboť ostatní zaměstnanci – učitelští pomocníci – mají jen maturitu. Mladí lidé nikdy neměli s novými technologiemi vážnější potíže – zato škola ano.*

Bylo by to úsměvné, kdyby to nebylo svým způsobem tragické. Lidé s takovými názory mají v dnešní společnosti, bohužel, vliv nikoliv zanedbatelný.

3 Závěr

Jsou věci, které občas mohou člověka deprimovat, současně však na každou takovou myšlenku existuje protilék. Tím jsou například akce jako je například naše setkání v Srní.

Vždycky je potěšující vidět a poslechnout si tolik učitelů základních a středních škol, kteří svou dennodenní činností vyvracejí slova všech Botlíků, postdomodernistů a dalších. Díky jim – a nejen jim – si snad naše školství i nadále podrží vysokou úroveň, kterou má.

Čím víc jsem měl možnost poznat úroveň školství v zahraničí, tím více si vážím toho našeho. Tím samozřejmě ani v nejmenším nechci naznačit, že není co zlepšovat. Právě akce našeho typu je však dokladem toho, že se o to společně snažíme.

Literatura

[1] BOTLÍK, O. Začnou čeští učitelé rozbíjet počítače? *Lidové noviny*, 29. 4. 2006.

[2] FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. SOU.* Praha : Prometheus, 2006.

[3] FUCHS, E., HOŠPESOVÁ, A., LIŠKOVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. Základní školství.* Praha : Prometheus, 2006.

[4] FUCHS, E., HRUBÝ, D. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. Gymnázia.* Praha : Prometheus, 2006.

[5] FUCHS, E., PROCHÁZKA, F., STANĚK, M. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu. SOŠ.* Praha : Prometheus, 2006.

webmath.zcu.cz – MATEMATIKA DOMŮ PŘES INTERNET

Petr Girg

Abstrakt

Počítačové algebraické systémy hrají stále důležitější úlohu ve vědecko-technických výpočtech. Pořízení a správa těchto systémů včetně odpovídajícího hardware je finančně náročná. Jako alternativa se nabízejí webové služby. S masovým rozšířením těchto služeb pravděpodobně dojde k zásadním změnám v přístupu k řešení určitých typů úloh. Tento trend si vyžádá změnit také metodiku výuky a klást větší důraz na teorii.

1 Úvod

Se stále rostoucím rozsahem zpracovávaných úloh přicházejících z praxe na jedné straně a rozvojem výpočetní techniky na straně druhé počítačové algebraické systémy hrají stále důležitější úlohu ve vědecko-technických výpočtech. Kromě provádění rozsáhlých numerických výpočtů dovedou dnes tyto systémy zobrazovat výsledky těchto výpočtů a také manipulovat s rozsáhlými symbolickými výrazy. Dvě posledně jmenované vlastnosti lze s výhodou použít ve výuce matematiky a samozřejmě i dalších předmětů. Bohužel pořízení a správa těchto systémů včetně odpovídajícího hardware je finančně náročná a ne každá instituce si jejich nákup může dovolit. Co je však ještě horší, většina studentů si nemůže dovolit ani studentskou verzi těchto produktů pro domácí použití. Jako alternativa se nabízejí webové služby, které umožňují vizualizaci dat i některé výpočty provádět přes webové rozhraní. V současné době lze na webu najít velké množství jednoúčelových aplikací psaných v jazyce Java™. Na ZČU jsme zvolili obecnější přístup. Zakoupili jsme systém *webMathematica*®, který umožňuje vytvářet interaktivní webové stránky nad výpočetním prostředím sw *Mathematica*®. Přístup k webovým aplikacím lze najít na této stránce http://webmath.zcu.cz. Systém *webMathematica*® má implementován svůj skriptovací jazyk pro snadné vytváření apletů v jazyce Java™. Tyto aplety pak neprovádějí výpočet přímo, ale spouštějí jádro sw *Mathematica*®, které pak provádí výpočty. Tento přístup výrazně šetří programátorský čas, jak při psaní vlastní výpočetní aplikace, tak při psaní příslušného webového rozhraní.

2 Projekt

Od roku 2004 je na katedře matematiky FAV řešen projekt webového portálu, který zpřístupní široké odborné veřejnosti prostředky k provádění vědecko-technických výpočtů (projekt je financován ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v rámci programu 1N – informační infrastruktura výzkumu). Přestože, jak vyplývá ze zaměření programu 1N, hlavním cílem projektu je vybudování výpočetní infrastruktury, souběžně jsou vytvářeny i webové stránky na podporu výuky. Důvod je ten, že součástí webových stránek projektu je i rozsáhlá dokumentace výpočetních metod. Protože stránky jsou určeny i nematematikům, považujeme za užitečné na stránkách vysvětlit i něco z teorie. Tak vlastně vznikají podpůrné texty s jednoduchými výpočetními aplikacemi, které slouží zároveň i jako učební pomůcka.

Na projektu se podílejí pracovníci několika matematických oborů.

- Bohumír Bastl (oddělení geometrie) algebra, Gröbnerovy báze, algebraická a diferenciální geometrie, http://www.kma.zcu.cz/Bastl
- Jiří Benedikt (oddělení matematické analýzy) diferenciální rovnice, tvorba rozhraní pro mobilní telefony, http://www.kma.zcu.cz/Benedikt
- Petr Girg (oddělení matematické analýzy) diferenciální rovnice, paralelní výpočty, symbolické výpočty, řešitel projektu, http://www.kma.zcu.cz/Girg
- Pavel Martínek (student) realizace webového rozhraní, statistika
- Josef Otta (student) diferenciální rovnice, http://home.zcu.cz/~jotta
- Petr Tomiczek (oddělení matematické analýzy) diferenciální rovnice, zpracování dokumentace, návaznost na výuku, http://www.kma.zcu.cz/Tomiczek

Při této příležitosti bych rád vyzdvihl podíl dvou studentů pana Martínka a pana Otty na zdárný průběh řešení projektu. Účast studentů na řešení tohoto projektu byla vždy podporována a to jak ze strany řešitelů tak ze strany katedry (mimořádná stipendia). Přestože počet zapojených studentů $n = n(t)$ v průběhu řešení projektu kolísal, po celou dobu byla splňena podmínka $n(t) \geq 2 \quad \forall t\colon 0 < t < t_{\text{dosud}}$, neboť výše uvedení dva pánové se již stali nedílnou součástí řešitelského kolektivu.

V článku [Jiří Benedikt, *webMathematica a vědecké výpočty*, publikováno v tomto sborníku] se dozvíte podrobnější informace o technologickém zázemí a také jeden motivační příklad, proč je tak silné zázemí nutné.

3 Vliv na výuku

Jak již bylo řečeno, studenti mohou využívat interaktivních webových stránek především k zobrazování dat – v jejich případě především vykreslování grafů

posloupností a funkcí – a symbolickým výpočtům limit, derivací, integrálů, řešení rovnic závislých na parametrech a podobně. Symbolických výpočtů mohou používat ve dvou stádiích. V prvním stádiu, kdy se učí například integrovat, mohou webový integrátor http://integrator.webmath.zcu.cz používat ke kontrole ručně spočtených příkladů z neřešené sbírky. V druhé fázi, kdy již mají integrování základních funkcí zvládnuté a potřebují počítat integrály například ve fyzice nebo různých technických oborech, mohou k výpočtu použít webový integrátor místo namáhavé práce. Zde může padnout oprávněná námitka ze strany kolegů matematiků, že při řešení úloh je třeba poskytnout postup ověřitelný druhou osobou a kde jednotlivé kroky na sebe snadno navazují a tedy, že výsledek bez postupu je nepřijatelný. Této námitce lze oponovat tím, že je matematicky korektní i postup, při němž řešení uhádnu a poté dokáži, že se skutečně jedná o řešení dané úlohy. V případě úlohy na nalezení primitivní funkce stačí ověřit, že nalezená funkce splňuje vlastnosti primitivní funkce (např. spojitost tam, kde je původní funkce omezená) a její derivace je rovna původní funkci. Aby byl tento postup nalezení primitivní funkce správný i z metodologického hlediska, museli bychom býti schopni řešení (pokud existuje) vždy najít (nebo alespoň ve většině případů, jako to dokáží standardní metody integrace reálných funkcí). Protože však dnes máme k dispozici počítačové algebraické systémy, které toto „hádání“ provedou za nás, je tento přístup správný i z metodologického hlediska a měl by být zaveden do výuky. Pro srovnání obou metod z časového hlediska uvedu příklad výpočtu integrálu $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$. Klasickou metodou (substituce $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, rozklad na parciální zlomky) výpočet trval cca 25 minut. Výpočet přes webmath.zcu.cz a následné derivování trvalo cca 5 minut. Výhoda druhého postupu je zřejmá.

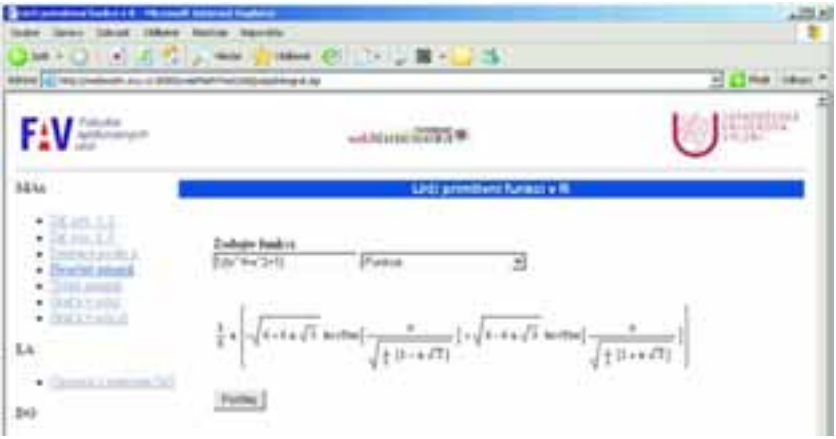
Z výše uvedeného se může zdát, že studenti při použití webového integrátoru nemusí znát nic o integrování funkcí, stačí umět derivovat. Bohužel to je omyl!

Jako příklad uvedu neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Po dosazení do integrátoru dostaneme

$$\frac{1}{6}\mathrm{i}\left(\sqrt{6-6\mathrm{i}\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}}\right)-\sqrt{6+6\mathrm{i}\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}}\right)\right),$$

což není zrovna zdařilý zápis reálné funkce[1] (s použitím vzorečků z komplexní

[1] Jádro sw *Mathematica*®, které používáme k výpočtům přes webmath.zcu.cz, nepočítá integrály, pomocí metod jaké by použil člověk, tj. triky založené na substitucích, integraci *per-partes* a rozkladech na parciální zlomky apod. Místo toho obsahuje vzorečky pro integraci určitých velmi obecných tříd funkcí. Nejprve najde příslušnou třídu, do které daná funkce náleží a poté dopočte parametry tak, aby dostal tuto funkci [1]. Všechny výpočty se provádí v komplexním oboru, což bohužel někdy vede k výsledkům tohoto typu.



Obr. 1 Webová aplikace na určení primitivní funkce. Ukázka, kde nelze užít tuto aplikaci přímo, viz text.

analýzy se nakonec imaginární složky zruší). Student by ovšem měl vědět že primitivní funkce k reálné funkci je reálná funkce a tudíž by se v případě takovéhoto výsledku měl zamyslet. Mělo by mu dojít, že se jedná o výpočet primitivní funkce k racionální lomenné funkci, které se integrují pomocí rozkladu na parciální zlomky. Při výpočtu tohoto neurčitého integrálu by také měl zkusit použít webový rozkladač na parciální zlomky a pak jednotlivé zlomky nakopírovat do integrátoru. Z výše uvedeného je patrné, že tedy student musí něco o integrálech a metodách jejich výpočtu vědět.

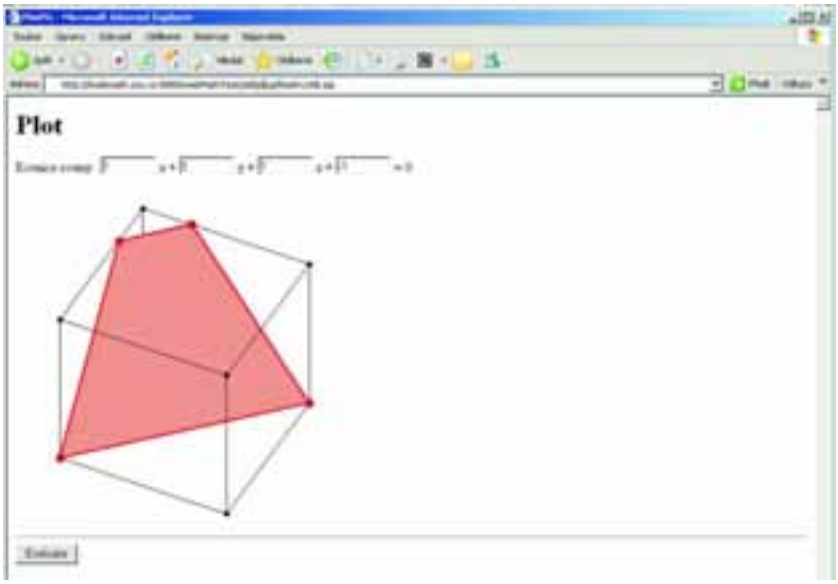
Tato nová metodika ovšem osvobozuje od drilu propočítávaní se mnoha sbírkami a ušetřený čas je možné věnovat výkladu „trivialit“ jako je např. to, že určitý integrál z nezáporné funkce nemůže vyjít `-1`, neurčitý (určitý) integrál reálné funkce je reálná funkce (reálné číslo nebo $\pm\infty$), primitivní funkce k omezené funkci je spojitá, integrál z liché omezené (integrovatelné) funkce integrovaný přes symetrický obor vzhledem k nule je `0` a další.

Toto byl příklad nové metodiky výpočtu neurčitého integrálu. Čtenář si sám domyslí, jak postupovat v dalších případech úloh, kde je snazší ověřit výsledek než jej hledat jako např. řešení diferenciálních rovnic, úlohy na rozklad na parciální zlomky apod.

Pro úplnost dodejme, že samozřejmě výše uvedený postup se neomezuje na výlučné použití s www.webmath.zcu.cz, ale lze jej provádět s jakýmkoliv počítačově algebraickým systémem jako např. Derive™, Maple™, Matlab® atd. či kalkulačkou podporující symbolické operace. Je to tedy obecný postup nezávislý na použitém hw a sw.

4 Další podpora středním školám

Kromě kalkulu, který se probírá v posledních ročnících, můžeme středním školám poskytnout pomůcku k výuce stereometrie. Podle našich zkušeností z prvních ročníků se prostorová představivost studentů stále zmenšuje. Proto jsme na našich stránkách umístili také aplikaci na provádění řezů konvexními mnohostěny. Ze stejného důvodu (nepřipravenost studentů) připravujeme též grafické aplikace pro kuželosečky.



Obr. 2 Webová aplikace na určení řezu krychlí danou rovinou

5 Závěr

V rámci psaní rozsáhlé dokumentace k portálu pro vědecko-technické výpočty vytváříme též výukové texty použitelné jak pro studenty vysokých škol tak i pro podporu výuky matematiky na středních školách. V souvislosti s rozvojem počítačových algebraických systémů bude třeba změnit také metodiku výuky a klást větší důraz na teorii.

Poděkování

Práce na příspěvku byla podporována z prostředků grantu 1N04078 MŠMT.

Literatura

[1] WOLFRAM, S. *The Mathematica Book.* the fifth edition, Champaign : Wolfram Media, 2003.

Prostředí, která otevírají svět čísel

Milan Hejný

Abstrakt

Kvalita aritmetického a algebraického poznání žáků 2. stupně ZŠ je výrazně formována způsobem výuky aritmetiky v prvních ročnících školní docházky. Studie diskutuje některé základní didaktické fenomény, které se na zmíněném formování podílejí.

1 Úvod

Výzkumy v didaktice matematiky ukazují (viz např. [2]), že výraznější zlepšení výsledků výuky matematiky nelze dosáhnout ani změnou osnov, ani změnou učebnic, ani změnou edukačních technologií, ale pouze změnou edukační strategie, která je zcela v rukou učitele. Didaktika matematiky může zde přispět pouze poznáním, které nabídne těm učitelům, kteří o zlepšení vlastní práce usilují. Současná realita školy ovlivněná potřebou tvorby RVP zde otevírá nové možnosti.

2 Formulace problému

Domníváme se, že aritmetické schopnosti žáka druhého stupně ZŠ jsou zásadně formovány již v prvním a druhém ročníku. Je-li zde kladen důraz na nácvik základních početních operací, získá žák kalkulativní dovednosti, ale jeho porozumění číslu a jevu mnohosti se rozvíjí jen málo. Ve vědomí žáka se nebuduje aritmetická struktura, ale soubor návodů na řešení standardních úloh. Absence strukturálního myšlení se projeví až na druhém a třetím stupni při práci se zlomky, zápornými čísly, při řešení slovních úloh apod. Z uvedeného plyne, že zkvalitnění výsledků vyučování matematice lze dosáhnout zdůrazněním aktivit, které pomáhají žákovi budovat aritmetickou strukturu. O jaké aktivity se jedná? Tak zní otázka, na řešení které je náš výzkum zaměřen.

Cílem výzkumu tedy bylo navrhnout a didakticky rozpracovat soubor aritmetických prostředí, která umožňují žákovi 1. stupně, zejména žákovi prvních dvou ročníků, vybudovat ve svém vědomí strukturální představu pojmu číslo.

3 Metodika

Náš současný výzkum je pokračováním experimentů, které na autorovi tohoto článku realizoval jeho otec Vít Hejný, když bylo autorovi 5 let. O 30 let později výzkum pokračoval druhou etapou a „pokusným králíkem“ byl autorův syn. Od roku 1975 se pak do výzkumu zapojilo více kolegů soustředěných v bratislavském semináři z didaktiky matematiky. Výzkum, orientovaný na druhý stupeň ZŠ, byl založený na experimentálním vyučování členů semináře v několika třídách. Výsledky byly částečně publikovány v knize [1]. Bádání pokračovalo v Praze a výsledky jsou uveřejněny v knize [3], která stále zůstává naší nejkomplexnější výpovědí o číselných představách dětí. V současnosti ve spolupráci s D. Jirotkovou a J. Slezákovou je výzkum orientován především na implementaci teoretických výsledků do praxe, protože náš současný kolektiv podepsal smlouvu s nakladatelstvím FRAUS na napsání učebnic matematiky pro 1. stupeň.

Některé z výsledků výzkumu i ilustrace z jejich projekce do učebnicové podoby jsou uvedeny v příspěvcích Jirotkové [4], který je zaměřen na konceptuální myšlení, a Slezákové [6], který je zaměřen na procesuální myšlení.

4 Východiska

Otevírání světa čísel dítěti je komplexní proces, který je rozumné rozložit do několika dimenzí a každou z nich prozkoumat nejprve odděleně. Z mnoha dimenzí, které jsme ve výzkumech analyzovali, uvedeme v dalším pouze 6, o nichž se domníváme, že jsou nejzávažnější. Jsou to 1. motivace, 2. představa čísla, 3. polarita proces/koncept, 4. schéma triády, 5. modelování a 6. jazyk.

4.1 Motivace

Motivace je rozhodující faktor jakékoli lidské činnosti. Strach z chyby a neúspěchu na jedné straně a nuda, která je důsledkem stereotypního opakování stejných činností na straně druhé, jsou dvě nejčastější příčiny ztráty motivace žáka. Známé „sloupečky“ na sčítání a odčítání, v nichž se stereotypně opakují stejné úlohy, hodnotí někteří žáci jako strašáka (zejména když se jedná o řešení s časovým limitem) a jiní jako otravu. Žáci naopak ožijí, když se na hodině objeví něco nového, zajímavého, překvapivého, nějaká intelektuální provokace, nebo výzva. Většina žáků velice stojí o to, aby mohla sama do vlastní práce zasahovat. Tedy zvědavost, radost z osobnostního růstu a možnost intelektuální i sociální seberealizace jsou příčiny nárůstu motivace. Naopak obava z neúspěchu a nuda jsou příčiny útlumu motivace.

Učitelé dobře znají klíčovou roli motivace a dobří učitelé dokáží motivační potence u žáků systematicky budovat. Učebnice může úsilí učitele podpořit tím, že mu nabídne přitažlivá prostředí, v nichž se čísla objevují v žákovi blízkých nebo překvapivých situacích a která dávají dostatečný prostor aktivitě žáka. Asi

tucet takových prostředí je již v různé míře rozpracováno. Tato prostředí budou do učebnic uváděna postupně, aby měl učitel čas dobře zažít každé z nich. Zkušenosti, které jsme získali ve spolupráci s několika učiteli, ukazují, že učitelé jsou novými pohledy motivováni a tvořivým způsobem upravují a rozšiřují matematické myšlenky, které učebnice nabízí.

4.2 Představa čísla

Když máme sčítat např. $15 + 37$, uděláme tuto operaci abstraktně, aniž bychom čísla jakkoli vázali na realitu. Jestliže ale pětileté dítě dostane otázku, kolik je $3 + 2$, běžně si situaci sémantizuje. Například řekne, že 3 prsty a 2 prsty je 5 prstů. V první třídě hraje sémantické ukotvení čísla rozhodující roli, a proto je potřebné ujasnit si, jaká ukotvení vlastně existují. V první třídě existují 4 různá sémantická ukotvení čísla a ve dvou z těchto případů je nutné ještě další dělení. Vše je přehledně uvedeno v tabulce 1.

Tabulka 1

Třída	**Podtřída**		**Ilustrace**
Stav		S	Vidím 3 děti. V akváriu je 15 litrů vody.
Operátor	Změny	Oz	Ztratil jsem 5 Kč. Eva se přestěhovala o 2 patra výše.
	Porovnání	Op	Jan má o 5 Kč více než Mirek.
Adresa	Místa	A	Bydlím ve 4. podlaží. Informace jsou v místnosti 123.
	času		TGM se narodil v roce 1850. Vyučování začíná v 8.00.
Jméno			Tramvaj číslo 13. Jágr má číslo 68.

Třída „jméno“ hraje jen marginální roli a nebudeme jí zde věnovat žádnou pozornost.

4.3 Polarita proces vs. koncept

První počtářská dovednost, které se dítě zmocňuje, je říkanka „jeden, dva, tři, ...“ Říkanka umožní dítěti zjistit počet prvků daného souboru. Například počet prstů na ruce. Poměrně rychle ale dítě počet prstů na ruce umí určit bez počítání. Podobně dítě, které hrává stolové hry jako Člověče nezlob se, nemusí počítat počet ok na hrací kostce. Všech 6 čísel, která se zde vyskytují, umí určit vhledem. Takové dítě má ve svém vědomí příslušný koncept daného čísla. Dítě, které tento koncept ještě vytvořen nemá, musí zjistit počet ok počítáním, tedy procesem. Obě uvedené poznávací potence, proces a koncept, jsou přítomny ve většině poznávacích procesů. Případné zdůrazňování jedné z potencí vede k disharmonii poznávacího procesu. Negativně se to projeví zejména u těch žáků, jejichž genetické nastavení není volbou potence respektováno. Při určování počtu procesní přístup předchází představě konceptuální. U pojmu čtverec

vzniká ve vědomí žáka nejprve představa tohoto objektu tedy koncept. Až později je dítě schopno se čtvercem zacházet procesně, tedy samo čtverec vytvořit (například ze sirek). Poznání, které v sobě propojuje jak procesuální, tak i konceptuální složku, nazvali Gray s Tallem proceptem (viz [3, s. 34]).

V článku [4] je představeno prostředí, které je dominantně konceptuální, a v článku [6] prostředí, které je dominantně procesuální.

4.4 Schéma triády

Představte si, že se vás někdo zeptá, kolik máte ve svém bytě/domě a) oken, b) dveří, c) lamp, d) koberců. Asi žádné z těchto čísel neřeknete ihned, ale ke každému se dopracujete. Budete v duchu procházet z místnosti do místnosti a budete počítat okna. To můžete udělat proto, že ve vědomí máte uloženo **schéma** svého bytu. Na otázku neodpovíte ihned, ale odpověď najdete zcela bezpečně.

Představte si teď bizardní situaci, že se ucházíte o lukrativní místo a víte, že společně s vámi se o stejné místo hlásí i osoba X. Víte i to, že konkurzní komise se bude vás obou ptát na počty různých objektů ve vašem bytě. Jste přesvědčen(a), že konkurz musíte vyhrát. Jenže chyba lávky. I když osoba X zná váš byt pouze povrchně, naučila se zpaměti odpovědi na všech 50 otázek uvedených v informačním letáku a u pohovorů zazářila skvělou odpovědí. Vám přišlo zbytečné učit se čísla zpaměti, protože jste předpokládal(a), že komise bude zjišťovat skutečné poznání, nikoli pouze několik údajů, které je možné se naučit zpaměti. Osoba X konkurz vyhraje. Vás to mrzí. Víte, že kdyby se konkurzní komise zeptala na něco, co nemá osoba X nacvičeno, ukázalo by se, že váš byt zná daleko méně než vy.

Popsaná situace je hodně přitažená za vlasy. Bohužel není až tak daleká od toho, co praktikujeme často u různých zkoušek z matematiky. Žáka hodnotíme podle toho, jak rychle a přesně zvládne úlohy jistých typů. Ne podle toho, jaký má do matematiky vhled. V tradičním vyučování je nácviku izolovaných spojů typu $A \pm B = C$ věnováno mnoho času a energie a příslušná schémata leží v pozadí. Přitom právě dobře poznané schéma má velikou informační sílu a je základem toho, čemu říkáme vhled.

V učebnici nabízíme žákovi i učiteli různé reprezentace triády $A \pm B = C$. Jedná se vesměs o úlohy, kdy dvě z čísel vztahu $A + B = C$, resp. $A - B = C$ jsou známá a třetí je neznámé. Podobně budujeme i složitější schémata, jako jsou $A + B - C = D$, nebo $2 \cdot A = B$, nebo $A + 2B = C$ atd.

4.5 Modelování

Modelováním rozumíme transformaci jistého s čísly provázaného děje nebo s čísly provázané situace do znakového jazyka matematiky. Nejběžnějším případem jsou slovně formulované úlohy. Víme, že tyto úlohy patří k nejnáročnějším. Příčinu vidíme v tom, že ve výuce je věnováno málo péče porozumění úloze, protože je

to časově náročné. Místo toho jsou často žákům nabízeny instrukce typu „když je tam slovo dohromady, tak musíš sčítat“. Žáci sami pak dělí slovní úlohy na úlohy o plusu a úlohy o mínusu. Je jasné, že tito žáci budou mít v budoucnu s náročnějšími slovními úlohami veliké potíže. Efektivní edukační strategie řešení slovních úloh je založená na procesu, který vede k porozumění popsané situace, nebo popsaného děje. Nástrojem porozumění může být manipulace nebo obrázek nebo dramatizace nebo vzájemná diskuse žáků.

Jsou-li slovní úlohy, které žákům předkládáme, stereotypní, vede to u žáků k tvorbě vzorových schémat. Žáci pak úlohy řeší pomocí šablon. V naši učebnici se snažíme již v 1. ročníku seznámit žáky se všemi základními typy úloh na součet $A+B=C$ a na rozdíl $A-B=C$. Přiložená tabulka 2 ukazuje 7 různých situací na sčítání $2+3=5$.

Tabulka 2

1	$S+S=S$	2 prsty a 3 prsty dohromady je 5 prstů
2	$S+Oz=S$	Iva měla 2 Kč. Maminka je přidala 3 Kč. Teď má Iva 5 Kč.
3	$S+Op=S$	Na talíři jsou 2 jablka. V koši jich je o 3 více. Je tam 5 jablek.
4	$A+Oz=A$	Láďa stál na 2. schodu. O 3 schody vystoupil. Je na 5. schodu.
5	$A+Op=A$	Bydlím ve 2. podlaží. Eva bydlí o 3 podlaží výše. Bydlí v 5. p.
6	$Op+Op=Op$	A je o 2 cm vyšší než B. C je o 3 cm vyšší než A. C je o 5 cm vyšší než B.
7	$Oz+Oz=Oz$	Dana vystoupala o 2 schody. Pak o 3 schody. Celkově vystoupala o 5 schodů.

Z každé situace můžeme vytvořit tři různé úlohy, když v ní jedno z daných tří čísel zaslepíme. Výjimku tvoří první typ, kde zaslepením čísla 2, nebo čísla 3 získáme vlastně stejnou úlohu. Celkově tedy nám uvedený přehled nabízí 20 typů úloh na triádu. Některé z nich, jako například typ $Oz+Oz=?$, jsou velice náročné, jak uvádí např. [5]. V článku [6] je ukázáno jak i žáci prvního ročníku úspěšně řeší tento typ úloh.

4.6 Jazyky

Nejběžnějším jazykem aritmetiky prvního stupně je zápis čísla pomocí číslic v desítkové soustavě provázený znaky + a − pro operace sčítání a odčítání a znaky $>$ a $<$ pro porovnávání. Je to jazyk velice ekonomický, přehledný a účinný. Je-li ale zaveden příliš brzo, vede k odloučení znaku od představy mnohosti. Sčítání $12+3=15$ vnímá žák jako hru se znaky a představa o tom, co tyto znaky znamenají, není v jeho vědomí přítomna. Projeví se to později, když bude žák sčítat desetinná čísla $2{,}7+4{,}8=6{,}15$ nebo zlomky $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{6}{12}$.

K uvedeným nežádoucím jevům nebude docházet, když žák bude od začátku pracovat s různými jazyky a různými znakovými zápisy. Samozřejmě sem patří

kuličky počitadla i prsty, ale i mnohé další jazyky, v nichž i operace + a − jsou znázorněny nikoli znaménkem, ale třeba polohou čísla v geometrickém obrázku (např. v sčítacím trojúhelníku). Jako velice účinné se ukazují speciální jazyky, které jsou prezentovány v příspěvcích kol. Jirotkové a Slezákové.

V oblasti jazyků je ještě jeden důležitý prvek: tvořivá práce žáků. Ne všechny jazyky je třeba žákům ukázat. Je rozumné žádat po žácích, aby oni sami vytvořili jazyk, kterým mohou evidovat důležité údaje. Příkladem kontextu, který to od žáků žádá, je hra na autobus. Toto prostředí představíme na příští konferenci.

Poděkování

Studie i navazující články D. Jirotkové a J. Slezákové byly vypracovány s podporou grantu FRVŠ 476/2006. Náš společný výzkum probíhá ve spolupráci s některými školami a učiteli. Jedná se zejména o ZŠ Školní, Neratovice, ZŠ Chlupova, Praha 5 a ZŠ Vodičkova, Praha 1.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, 1990.

[2] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (eds) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha : Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004.

[3] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : UK v Praze, PedF, 1999.

[4] JIROTKOVÁ, D. Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let. (zde ve sborníku)

[5] RUPPELDTOVÁ, J. Interpretačná dominanta riešenia slovnej úlohy. In Uhlířová, M., (Ed) *Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Olomouc : 2006, str. 212–217.

[6] SLEZÁKOVÁ, J. Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let. (zde ve sborníku)

Průřezová témata ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ

Jitka Hlaváčková

Abstrakt

Příspěvek informuje o Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání, průřezových tématech a nutnosti jejich začleňování do devíti základních vzdělávacích oblastí. Specielně se zaměří na možnost propojení průřezových témat do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace na 1. stupni základní školy.

1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Rámcový vzdělávací program (dále jen RVP) je kurikulární dokument, vycházející z Národního programu rozvoje vzdělávaní v České Republice (tzv. Bílá kniha) z roku 2001. Na jeho základě každá škola vypracovává Školní vzdělávací program (dále jen ŠVP) příslušné úrovně – předškolní, základní, gymnaziální, střední odborné vzdělávání apod. Takto zpracované ŠVP již některé školy uvedly do praxe (tzv. pilotní školy), ostatní se podle nich začnou řídit počínaje školním rokem 2007/08.

Stručně o RVP pro základní vzdělávaní, speciálně vzdělávání na 1. stupni ZŠ:

V RVP ZV je obsah vzdělávání rozdělen do devíti oblastí. Na začátku každé oblasti je uvedena charakteristika a cíle dané vzdělávací oblasti. Dále uvádí očekávané výstupy, které jsou závazné v jednotlivých etapách vzdělávání na prvním i druhém stupni. V rámci 1. stupně ZŠ se vzdělávací obsah rozděluje na dvě období: 1. období vymezuje 1.–3. ročník ZŠ a 2. období 4.–5. ročník ZŠ. Představuje také učivo, které má být prostředkem k dosažení očekávaných výstupů. Když je škola zapracuje do jednotlivých ročníků (podle ŠVP), stává se toto učivo v jednotlivých etapách vzdělávání závazné [1, s. 10]. Zaměřme se především na matematiku, která je jednou z devíti vzdělávacích oblastí v RVP nazvána *Matematika a její aplikace.*

Na základní škole je matematika založena především na aktivních činnostech a využití matematických poznatků v reálném životě. Vzdělávací obsah je na 1. stupni rozdělen na tři tématické okruhy:

- Čísla a početní operace
- Závislosti, vztahy a práce a daty
- Geometrie v rovině a v prostoru

Vzdělávání v matematice tvoří i Nestandardní aplikační úlohy a problémy, které by měly prolínat všemi tématickými okruhy a využívat tak logického myšlení žáků [1, s. 21].

2 Průřezová témata

Průřezová témata nereprezentují jednotlivé vyučovací předměty, ale svým způsobem by měla prolínat všemi předměty a svou aktuálností přispět k formování postojů/hodnot žáků, individuálnímu uplatnění žáka a rozvoji spolupráce. RVP pro základní vzdělávání vymezuje šest průřezových témat:

- Osobnostní a sociální výchova
- Výchova demokratického občana
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Multikulturní výchova
- Environmentální výchova
- Mediální výchova [1, s. 82].

Každé téma je v úvodu charakterizováno, dále vyjadřuje přínos k osobnostnímu rozvoji žáka a obsah jednotlivých témat je členěn do tematických okruhů s nabídkou činností/námětů. V kompetenci školy je, zda jednotlivá témata začlení do vyučovacího procesu ve formě samostatného vyučovacího předmětu či formou seminářů, projektů apod. Každá základní škola musí během vzdělávání nabídnout žákům všechny tématické okruhy jednotlivých témat uvedené v RVP ZV.

V úvodní charakteristice jednotlivých průřezových témat je stručně popsáno, jakým způsobem lze nalézt přímou vazbu mezi daným tématem a některou vzdělávací oblastí. Všechna témata nabízejí návaznost na vzdělávací oblast *Jazyk a jazyková komunikace* a *Člověk a společnost*, v mnohých se nabízí návaznost na oblast *Člověk a jeho svět* a *Informační a komunikační technologie*. Takto bychom mohli pokračovat a vypsat všechny vzdělávací oblasti, které se v průřezových tématech vyskytly alespoň jednou v přímé souvislosti s nabízeným postupem k zařazování do výuky. Ani v jednom případě však tento výčet nezahrnuje vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace*, přestože v charakteristice převážné většiny průřezových témat je řečeno, že na realizaci průřezového tématu se podílí (či může podílet) většina vzdělávacích oblastí.

Potřebě integrované výuky na základní škole je stále věnována pozornost odborníků, a to z pohledu různých oborů [2, s. 23–30]. V tomto případě se de facto jedná o integraci tématických okruhů průřezových témat do výuky (nejen matematiky).

2.1 Jak využít průřezová témata ve výuce matematiky

Průřezové téma *Osobnostní a sociální výchova* definuje mimo jiné přínos v oblasti postojů a hodnot tak, že vede žáka k uvědomování si hodnoty spolupráce

a vzájemné pomoci. Toho lze docílit vhodně voleným zadáním úlohy pro skupinovou práci, která bude založena na nutnosti vzájemné spolupráce a respektování stanoviska druhých.

Výchova demokratického občana spatřuje přínos v oblasti vědomostí, dovedností a schopností v tom, že vede žáka k uvažování o problému v širších souvislostech. Navodíme vhodnou modelovou situaci, která se zdá žákům na první pohled jasná, avšak její zadání bude obohaceno o nezvyklé souvislosti. Následné řešení problému může ukázat rozmanitost přístupů k dosažení požadovaného cíle, přičemž každé východisko a individuální logický postup může být relevantní.

V oblasti postojů a hodnot uvádí RVP přínos průřezového tématu *Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech* mimo jiné v tom, že žákům pomáhá překonávat stereotyp. Žák může řešit známý problém jiným způsobem, než je zvyklý. Nutno podotknout, že takové změny pravděpodobně nebude vhodné předkládat slabším žákům, které by mohl odlišný způsob řešení spíše mást. Toto rozhodnutí by mělo být v kompetenci učitele, který žáky i jejich schopnosti zná.

Multikulturní výchova prolíná všemi vzdělávacími oblastmi, svým způsobem tedy zasahuje i do matematického učiva. Na prvním místě uvádí přínos v oblasti vědomostí, dovedností a schopností tak, že poskytuje žákům základní znalosti o různých etnických a kulturních skupinách žijících v české a evropské společnosti. Do hodin matematiky lze snadno vpravit prvky odlišných kultur – učitel zadá úlohy z učebních textů jiných národů (získané např. od žáků migrujících rodin). Takto navozené úlohy vzbuzují u žáků spontánní dotazy, na které by měl být učitel připraven a tedy i schopen vhodně reagovat – přiblížit příslušnou kulturu/situaci žákům adekvátně k věkové skupině.

Environmentální výchova poskytuje široký prostor pro matematické učivo, a to nejen vhodně zvoleným zadáním běžné úlohy. V tomto směru lze vytvářet ekologicky zaměřené projekty či školní výzkumy, ve kterých se žáci neobejdou bez počtů. Může se jednat o úlohy seznamující žáky s aktuálními společenskými trendy, jako je např. třídění a recyklace odpadu, význam obnovitelných zdrojů, apod.

Mediální výchova má mimo jiné napomáhat k rozvoji využívání potenciálu médií v oblasti získávání informací, naplňování volného času a hledání kvalitní zábavy. V tomto směru má matematika jednoznačně „zelenou“. Nejen že žák může v médiích nalézat kvalitní informace z oblasti matematiky a následně je vhodně využívat, ale současně může nalézat různé kvízy/rébusy, ve kterých uplatní logické myšlení či prostorovou představivost rozvíjenou především v hodinách matematiky (geometrie).

2.2 Multikulturní výchova ve vyučovacím procesu

Aktivity popsané v následujícím textu nemusí probíhat v jedné vyučovací jednotce, mohou se zapojit do krátkodobého projektu či pouze ozvláštnit jedno školní dopoledne, kde nehraje roli zvonění ani tradiční přestávky. V obou pří-

padech lze zapojit mnoho dalších činností, které mohou přispět k propojení jednotlivých předmětů do jednoho tématického celku.

Vyučovací jednotka (popř. delší časový úsek) začne četbou předem vybrané pohádky, např. romské, indiánské, černošské, židovské, apod. Bezprostředně po přečtení žáci svými dotazy reagují na nezvyklost příběhu, postav a prostředí. Z vlastní zkušenosti mohu potvrdit, že žáky potěší vlastní invence učitele v podobě převleku. Následuje diskuse s učitelem o konkrétním národu, jeho zvyklostech, kultuře. Můžeme zařadit i samostatnou/skupinovou práci s literaturou či jinými informačními zdroji s ohledem na právě probírané téma, např. z oblasti jazykové vybavenosti, přírodovědy, zeměpisu, apod. Všechny takto zaměřené aktivity by měly u žáků vyvolávat respekt k danému národu, zbavovat je předsudků a xenofobie.

Matematika se může začlenit do této výuky použitím učebních textů (resp. úloh) pocházejících z konkrétní země. Pokud takové úlohy nemá učitel k dispozici, může běžné slovní úlohy transformovat do daného prostředí. Namísto sčítání/odčítání hrušek a jablk, mohou žáci operovat s turbany, kilty nebo exotickým ovocem. Nabízí se také úlohy z oblasti cestování, převodu domácích peněz na cizí měnu apod.

Výše jmenované aktivity lze podle aktuální situace různě měnit, kombinovat, doplňovat a obohacovat jimi „všední výuku“. Postupně můžeme žáky seznámit s různými kulturami, které žijí v různých státech světa nebo i v naší zemi. V oblastech, kde dochází k migraci obyvatelstva je nutnost začleňování multikulturní výchovy velice potřebná, protože z neznalosti se u žáků může projevit strach/nedůvěra vůči spolužákům z neznámého etnika. Učitel by měl spolupracovat také se zástupci dané minority, kteří mají zájem o lepší pochopení jejich způsobu života. Konkrétního žáka, kterého se dané téma týká, by bylo dobré též zapojit do učitelových příprav a nechat jej vyprávět o životě v jeho rodině (popř. v jeho rodné zemi).

Z výše uvedeného výčtu různých aktivit je patrné, že multikulturní výchova začleněná do vyučovacího procesu je vždy doprovázena dalšími vzdělávacími oblastmi i průřezovými tématy.

3 Závěr

Kdyby se snad vlivem působení nové vlády ve školství Rámcový/Školní vzdělávací programy neprosadily, průřezová témata řeší aktuální problémy dnešní společnosti, proto by bylo dobré s nimi do budoucna počítat a snažit se s nimi konstruktivně pracovat i mimo rámec Školního vzdělávacího programu.

Literatura

[1] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* [on-line] Dostupné z WWW: http://www.rvp.cz/sekce/58.

[2] MELICHAR, J. *Integrovaná výuka s matematikou. Matematika v škole dnes a zajtra.* 1. vyd. Ružomberok : Katolícka univerzita v Ružomberku, 2001.

Využití videotechniky ve vyučování matematice a jeho evaluaci

Miroslav Hricz

Abstrakt

Předložený článek se zabývá možnostmi využití videotechniky ve vyučování matematice. Zaměřuje se na přínos pro žáky i učitele. Popisuje reakce žáků.

1 Úvod

Úlohou učitele je nejen své žáky naučit, ale též pozitivně přispět k rozvoji jejich osobností, ke správnému sebehodnocení, ke schopnosti autoevaluaci. Ve vědecké terminologii má evaluace obecný význam hodnocení.

Pedagogická evaluace je podle [5] „zjišťování, porovnávání a vysvětlování dat charakterizující stav, kvalitu, efektivnost vzdělávací soustavy“. Poskytuje nejen žákům, ale i učiteli důležitou zpětnou vazbu. Ta je (podle [5]) „jeden z nejdůležitějších prvků řízení různých systémů“. Žák získává informaci o svém učení od učitele, od spolužáků, učitel získává zpětnou vazbu z žákovských dotazů, reakcí, výsledků. Může následně přizpůsobit svůj výklad, volit vhodné metody a formy práce. Je velmi důležité a žádoucí, aby se zpětná vazba zaměřovala na činnost nebo chování žáků, nikoliv na hodnocení žákovské osobnosti – její kvality a zápory, na hodnocení žákových vlastností. Zpětná vazba musí být charakteristická svou věcností, měla by obsahovat i ocenění, uznání za např. vynaložené úsilí (což vyjadřuje pozitivní vztah mezi zúčastněnými), a to bez ohledu na to, zda je zpětná vazba pozitivní či negativní. O pedagogické zpětné vazbě se pojednává [4, s. 95–105]. Otázkami hodnocení práce žáků (evaluace) a práce učitele (autoevaluace) pojednává příspěvek Sýkory a Kubínové v [6, s. 16–18].

2 Využití videonahrávek

Následující příspěvek pojednává o možnostech využití videonahrávek a fotografií jako evaluačního nástroje. Pořizovat videodokumentaci a fotodokumentaci jsem

začal pro potřeby projektu IIATM[1]. Přišlo mi velmi užitečné z hlediska autoevaluace sledovat videozáznamy práce žáků, vnímat detaily na fotografiích zachycující průběh práce žáků a na fotografiích výsledků této práce. Napadlo mne, že by mohlo být užitečné poskytnout tento materiál i žákům. Můj předpoklad se potvrdil.

Ukážu to na dvou příkladech.

2.1 Příklad 1 – 6. ročník ZŠ

Zadání úlohy

Ze 40 krychliček poskládejte krychli a kvádr.

Popis videozáznamu

Děti pracují v tříčlenné skupince (dvě dívky – A a L, chlapec D). Rozdělily krychličky na 2 hromádky po 20. A sestavuje krychli, D a L kvádr. A sestavila kvádr (rozměry $3 \times 3 \times 2$), 2 krychličky ji zbyly. D a L je ale nepotřebují – mají už kvádr sestaven ($2 \times 2 \times 5$).

Následně přepočítávají počet krychliček v tělesech (ověřují, zda mají 40 krychliček). D dává 2 zbylé krychličky na kvádr.

Komentář

Třída diskutovala, zda se jedná o spolupráci, když si rozdělili krychličky a A pracovala sama. Po chvíli se shodli na tom, že je-li to dohoda členů skupiny, o spolupráci se jedná.

Popis videozáznamu

A rozbořila své těleso, L několikrát přepočítávala krychličky.

Komentář

Později říkala, že kontrolovala, jestli A sestavila krychli, ale pořád to bylo 3×3.

Popis videozáznamu

D je rozčilen z toho, co A udělala. Skupina začíná spolupracovat ve 3. A a L sestavily stejné těleso, které A postavila na začátku, D je sleduje. Pak se ptá: „Má to bejt 20 na 20?“ A rozbourala i „původní kvádr“. D se chytá za hlavu se slovy „Já se tady s tím stavím a ona…“

[1] Realizováno v rámci projektu IIATM – Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Sokrates–Comenius 2.1, 112218-CP-1-2003-CZ-COMENIUS-C21.

Poté sestavili krychli ($2 \times 2 \times 2$) a 2 kvádry ($2 \times 2 \times 9$). Když jsou upozorněni, že mají mít jeden kvádr a jednu krychli, začnou stavět „krychli do výšky“. Práce je ukončena a tato skupina ji nestihla.

Komentář

V následné diskusi A říká, že si uvědomila, že ničila něčí práci, aniž by se na tom skupina domluvila. Jiný žák ze třídy říká: „Vy už jste byli tak blízko, stačilo dát ty dva kvádry na sebe“. D se opět chytá za hlavu se slovy: „Nojo, to nás, ale vůbec nenapadlo.“

Závěr práce

Žáci byli vyzváni, aby zhodnotili užitečnost prezentací. Předpokládám, že v pozdějším období se objeví i negativní stanoviska. V tuto chvíli to bylo něco nového, s čím se ve vyučování dosud nesetkali. Někteří tuto záležitost vnímali především jako zpestření hodiny.

Komentář

Uvádím příklady reakcí žáků:

- poučíme se z chyb, které jsme udělali
- po čase zpřesňujeme svá vysvětlení
- můžeme k natočenému něco dodat
- pochopil jsem učivo až z videa
- rychle a jednoduše si připomeneme, co jsme dělali
- je to legrace vidět se po delší době
- je to dobré, ale nenapadá mě proč
- vidíme, jak nám nějaké učivo šlo
- vidíme práci ve skupinách, jak jsme se chovali
- můžeme říct některé věci znovu líp než na videu

2.2 Příklad 2 – 9. ročník ZŠ

Zadání úlohy

Žáci řešili úlohy na kvadratické funkce. Pracovali ve třech skupinách. Výsledky práce žáci prezentovali. Tyto prezentace jsme natáčeli a následně sledovali na videu. Reakce žáků uvádím níže a jsou pro mne důležitou zpětnou vazbou pro další pedagogickou práci.

Komentář

- uvědomíme si chybu, něco dalšího nás k tomu napadne
- pro někoho to může být trapný – může se cejtit blbě
- vidíme lépe, jestli jsme udělali chybu nebo co jsme řekli správně
- prospívá nám to, protože si uvědomujeme svoje chyby, které jsme udělali, příště už je třeba neuděláme
- vidíme více postupů řešení – kdybychom o tom jen mluvili, tolik bychom to nepochopili
- slyšíme, co říkáme, chyby můžeme opravit, vysvětlit si to, ...
- pro někoho to může bejt trapný a může se cejtit blbě
- abychom věděli, co jsme udělali nebo řekli dobře, kde jsme udělali chybu – pomáhá nám to, ...
- prospívá nám to, uvědomujeme si svoje chyby, které jsme udělali – příště už je třeba neuděláme
- uvědomujeme si, jestli při práci ve skupinkách spolupracujeme
- dozvím se něco nového, co by mě třeba nenapadlo, dozvím se, že to jde i několika způsoby
- vidíme, jak se ve třídě chováme při hodině
- naučíme se líp komunikovat
- vyslechneme názory ostatních
- podíváme se na naše chyby
- na konci roku si tím rychle zopakujeme učivo
- kromě toho, že vidíme svoji chybu, tak to žádný význam nemá
- dala bych místo videa jenom zvuk, někomu může bejt docela trapně
- když někdo tomu tématu nerozuměl, teď vidí, jaké říká nesmysly – ty chyby co dělají, tak už neudělají
- skupiny prezentují práci jako kdybychom viděli, co mají ve svých řešeních, ale my to nevidíme
- vidíme, jak se umíme vyjadřovat při prezentacích
- mluvíme nesrozumitelně

3 Závěr

Rád bych zdůraznil důležitost vhodného výběru témat či úloh pro natáčení. Také příliš vysoká četnost využití není vhodná. Využití této dokumentace ve vyučování matematice je nutné považovat za doplňkovou.

Využití videonahrávek a fotografií považuji za velmi přínosné jak pro učitele, tak pro žáky. Domnívám se, že prezentace této dokumentace podněcuje žáky k lepším výkonům (tzv. podnětné vyučování [8, s. 2]) a zároveň přispívá k rozvoji všech klíčových kompetencí u žáků. I nadále se touto tematikou budu zabývat.

Literatura

[1] HARTL, P. *Psychologický slovník.* Praha : Budka, 1994. ISBN 80-901549-0-5.

[2] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava : SPN, 1990. ISBN 80-08-01344-3.

[3] KOPŘIVA, P., a kol. *Respektovat a být respektován.* Kroměříž : Spirála, 2005. ISBN 80-901873-6-6.

[4] MAREŠ, J., KŘIVOHLAVÝ, J. *Komunikace ve škole.* Brno : Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1070-3.

[5] PRŮCHA, J., a kol. *Pedagogický slovník.* Praha : Portál, 1995. ISBN 80-7178-029-4.

[6] SÝKORA, V., KUBÍNOVÁ, M. Podíl učitele matematiky na tvorbě Školního vzdělávacího programu (zamyšlení nad probíhající kurikulární reformou). In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2005, sborník příspěvků.* Praha : UK – PedF, 2005. ISBN 80-7290-223-7.

[7] STEHLÍKOVÁ, N. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha : PedF UK, 2004.

[8] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe.* Text k projektu ESF Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu.

Algoritmické myšlení a jak ho rozvíjet

Antonín Jančařík

Abstrakt

Algoritmické myšlení je důležitou matematickou kompetencí. Zařazení algoritmů do výuky matematiky je plně v souladu s rámcovými vzdělávacími plány. Autor předkládá několik návrhů, jak algoritmické myšlení rozvíjet pomocí netradičních úloh využívajících moderní deskové a karetní hry.

1 Úvod

Algoritmické myšlení je často chápáno jako kompetence, která má být rozvíjena především v rámci vzdělávací oblasti informační a komunikační technologie. Skutečnost je ale jiná; algoritmy patří mezi společná témata matematiky a informatiky. Algoritmy mají důležité postavení v takových odvětvích matematiky, jako je teorie čísel či teorie grafů. V současné době je běžným jevem, že informatická výchova na druhém stupni základních škol a na středních školách směřuje především k informační gramotnosti. Přesto témata jako algoritmy a programování stojí mnohdy na okraji zájmu a nezřídka jsou vymezeny pouze pro vybrané skupiny studentů v rámci volitelných předmětů. Námi navrhovaný přístup otevírá možnosti pro zařazení tématu algoritmů a s ním souvisejícího rozvoje algoritmického myšlení do hodin matematiky.

2 Co je algoritmické myšlení

Algoritmické myšlení je poměrně široký a doposud ne zcela ustálený pojem. Pojem algoritmické myšlení zahrnuje následující čtyři kompetence – schopnost správně aplikovat algoritmus v konkrétní situaci, schopnost vytvářet vlastní algoritmy, schopnost ověřit správnost a efektivitu algoritmu a schopnost rozeznat problém, který nemá algoritmické řešení (viz [1]). Hranice mezi výše uvedenými dovednostmi není ostrá, jednotlivé dovednosti se stále navzájem ovlivňují. Použité rozdělení je více méně orientační a napomáhá porozumění a pochopení pojmu.

2.1 Schopnost správně aplikovat algoritmus v konkrétní situaci

Výuka matematiky na základní škole se z velké části sestává z předávání již známých postupů. Příkladem je na elementární úrovni algoritmus písemného násobení či dělení. Ovšem i ve vyšších ročnících se řešení úlohy skládá z vhodně zvoleného a správně aplikovaného algoritmu. Schopností správně aplikovat algoritmus proto rozumíme jak schopnost správně analyzovat situaci, rozpoznat známé prvky, rozdělit úlohu na jednodušší části a pro každou z dílčích úloh vhodně zvolit postup – algoritmus řešení, tak schopnost zvolený algoritmus správně a bez chyb aplikovat.

2.2 Schopnost vytvářet vlastní algoritmy

Schopnost vytvářet vlastní algoritmy je úzce spjata s předchozí dovedností. U složitějších úloh nestačí pouze zvolit jeden konkrétní algoritmus a ten aplikovat. Žák by se měl často setkávat i s nestandardními úlohami, které vyžadují hlubší analýzu a nestandardní přístup. Proces algoritmizace je velmi často procesem postupného dělení problému na menší a jednodušší části a opětovného složení řešení z dílčích výsledků. Nalezení jednotlivých dílčích kroků je procesem tvorby vlastního algoritmu. V této souvislosti je vhodné zadávat i úlohy, u nichž je cílem nalézt způsob řešení, a nikoli pouze jedno konkrétní řešení.

2.3 Schopnost ověřit správnost a efektivitu algoritmu

Jedním z největších nebezpečí při výuce matematiky je formálnost a bezduché aplikování vzorců a postupů bez porozumění významu a důvodům užití jednotlivých kroků. Jedním z cílů moderního vyučování matematice je proto vést studenty k porozumění jednotlivým používaným pojmům a postupům. Užití algoritmu nelze nikdy oddělit od zdůvodnění, které je přizpůsobeno úrovni žáka. Jako vhodný příklad lze v této souvislosti zmínit porovnání hledání největšího společného dělitele pomocí Euklidova algoritmu a rozkladu na prvočinitele.

2.4 Schopnost rozeznat problém, který nemá algoritmické řešení

Tato poslední dovednost je ze všech nejnáročnější. Mezi laickou veřejností je poměrně rozšířen názor, že matematika umí dávat odpovědi na „matematické otázky“. Přijmout a pochopit fakt, že některé matematické problémy vyřešit nelze nebo je nelze řešit efektivně, je velmi obtížné. Porozumění skutečnosti, že na některé otázky nelze dát odpověď, je velice podstatnou součástí filozoficko-matematického pohledu na svět. Jako příklad lze uvést kvadraturu kruhu, nedokazatelné věty či algebraické řešení rovnic vyšších řádů. To, že se amatérští matematici stále snaží nalézt trisekci úhlu je jen důkazem, že tato schopnost není samozřejmá a běžná.

3 Algoritmy v RVP

Výuka na základních a středních školách bude již v krátkém časovém období do značné míry ovlivněna rámcovými vzdělávacími programy (dále RVP), z nichž budou vycházet vzdělávací programy školní. Proto dříve než přikročíme k několika praktickým nápadům, jak algoritmické myšlení rozvíjet, uvedeme několik míst z RVP, které se zařazení algoritmů do výuky věnují.

V RVP pro druhý stupeň ZŠ se v charakterizaci vzdělávací oblasti matematika a její aplikace kromě jiného uvádí:

„*Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití...*

V tematickém okruhu Čísla a početní operace na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh Číslo a proměnná, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací).“ (viz [2])

Následně v cílovém zaměření vzdělávací oblasti nalezneme tyto body:

„*Vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu.*

Provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému.“ (viz [2])

V rámci nestandardních aplikačních úloh a problémů se očekává, že žáci *řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.*

Obdobně připravovaný RVP pro gymnázia v současné verzi u cílového zaměření vzdělávací oblasti matematika a její aplikace uvádí jako cíl vést žáky *k vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu.* (viz [3])

Uvedené citace dokládají, že zařazení algoritmů a dalších úloh směřujících k rozvoji algoritmického myšlení a porozumění je plně v souladu se záměry RVP.

4 Nestandardní úlohy

Autor článku se dlouhodobě věnuje vyhledávání netradičních úloh a her, které napomáhají rozvoji algoritmického a strategického myšlení. Je přesvědčen, že hry mohou výrazným způsobem ovlivnit jak klima třídy, tak celé školy. Moderní strategické hry nabízejí velmi kvalitní zábavu a mohou u dětí konkurovat televizi i počítačovým hrám. Hry však nerozvíjejí pouze sociální kompetence. V mnoha

případech lze hry využít i pro rozvoj konkrétních matematických dovedností. Hry jako nástroj pro rozvoj algoritmického myšlení mohou být používány i v hodinách matematiky. Hra může být jak didaktickou pomůckou, tak v případě hledání vítězné strategie i samotným objektem studia. V tomto ohledu jsou vhodné především hry, u nichž jsou předem přesně daná pravidla a kde do hry nevstupuje prvek náhody. Výběr vhodné hry a způsob jejího použití do velké míry závisí na zaměření učitele a dostupnosti jednotlivých her. Následující ukázky je proto nutné brát jen jako motivační, ukazující směr využití.

4.1 Roborally

Tato v Čechách málo rozšířená hra vychází částečně z principů, na kterých byl založen programovací jazyk Karel. Hráči mají k dispozici karty s povely pro svého robota, který se pohybuje po hrací desce plné nástrah. Každý hráč si na počátku svého kola připraví pět karet, které pak musí v daném pořadí odehrát, aniž by jeho robot přišel k úhoně. Ve hře musí žáci uvažovat nejen nad svými tahy, ale i nad možnostmi protivníků, neboť roboti soupeřů jim mohou v průběhu hry zablokovat cestu.

4.2 Ricochet Robot

Druhá z představovaných her je svým průběhem velmi pasivní, proto ji může hrát tolik hráčů, kolik vidí na hrací desku. Hra se opět hraje s roboty na hrací desce plné překážek. Cílem hry je najít s vylosovaným robotem co nejkratší cestu do určeného cíle. Roboti se v této hře pohybují pouze přímočaře a svůj pohyb ukončují či mění pouze při styku s překážkou. Pro nalezení nejkratší cesty může hráč použít všechny roboty ve hře (přesunem jiného robota vytvořit výhodnou zarážku pro změnu směru robota vlastního). Hráč, který naleznete cestu, kterou považuje za výhodnou, pouze oznámí svůj počet tahů (ničím nehýbá) a ostatní hráči mohou v časovém limitu určeném přesýpacími hodinami jeho výsledek překonávat.

Úloha, která je základem této hry, má velice blízko k úlohám z teorie grafů. Pokud chce být hráč v této hře úspěšný, musí používat efektivní algoritmus na eliminaci méně vhodných tahů. Hra je opět vhodná jako nabídka pro volný čas žáků, například o přestávkách. Diskuze o postupech, které žáci při vyhledávání cest používají, však může být plnohodnotnou součástí hodin matematiky.

4.3 Dvacet jedna

Poslední nabízená hra je úpravou velmi známé matematické hry Gale's Vingt-et-en. Obě hry se hrají s kartami s čísly od jedné do deseti (můžete použít karty ze hry Ligretto). V originální hře jsou všechny karty vyloženy na stole, první hráč si vybírá jednu kartu. Po té se hráči střídají a každý hráč si odbírá po kartě až do okamžiku, kdy je součet jeho karet vyšší než součet karet protivníka. Hráč,

který dosáhne (resp. překročí) součet 21, vyhrává. Vítězná strategie pro tuto hru byla nalezena za pomocí počítače v roce 2002 (viz [4]).

S žáky je možné hledat vítěznou strategii pro variantu hry, ve které každý hráč bere ve svém tahu jen jednu kartu a součet se počítá na jedné hromádce dohromady oběma hráčům. Nalezení vítězné strategie při vhodně zvoleném postupu rozboru jednotlivých situací zvládnou i žáci základní školy. Úlohu lze zahájit diskuzí s žáky v hodině matematiky a dokončení zadat jako dobrovolný domácí úkol.

5 Závěr

Rozvoj algoritmického myšlení v hodinách matematiky má v rámcových vzdělávacích programech své opodstatnění. Cílem výuky není jen naučit žáky algoritmy používat, ale i analyzovat a aktivně vytvářet. Zvláště pro tvorbu nových algoritmů je nutné žákům předkládat dostatečné množství netradičních úloh. Moderní deskové a karetní hry nabízejí dostatek zajímavých úloh, které lze v tomto kontextu využít. V tomto příspěvku jsou předloženy tři ukázky využití her pro rozvoj algoritmického myšlení, které mohou sloužit jako inspirace.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu GAČR 406/05/P561.

Literatura

[1] LARSON, J. A. *Report on Round 2 Questions for NCTM Standards Revision Group.* Association For Symbolic Logic Committee On Logic Education, 1998. [on-line] http://www.ucalgary.ca/philosophy/asl-cle/nctm/Q2A.html

[2] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (se změnami provedenými k 1. 9. 2005).* [on-line] http://www.vuppraha.cz/download.php?f=rvp_zv.pdf

[3] *Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání (pilotní verze).* [on-line] http://http://www.vuppraha.cz/download.php?f=PilotRVPGV.pdf

[4] NG, P.T., TAY, T.S., *Gale's Vingt-et-en.* [on-line] http://www.math.nus.edu.sg/∼matlhh/UROPS/Abstracts/Vingtetun(NPT).pdf

Evaluace výuky matematiky na DFJP UPa

Vladimír Jehlička, Pavla Jindrová

Abstrakt

Práce se zabývá výukou předmětu Matematika I na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice. Je zaměřena na rozbor výsledků zkoušek studentů v 1. semestru jejich vysokoškolského studia. Autoři se pokusili nalézt hlavní příčiny neúspěchů studentů u zkoušek a navrhnout realizaci kroků, které by přispěly k vyšší kvalitě výuky matematiky.

1 Úvod

V rámci každého vyučovacího procesu je třeba vždy nejprve přesně definovat cíle, které chceme dosáhnout. Pak je nutno učinit vše pro dosažení těchto cílů a na závěr provést evaluaci, tj. přesvědčit se, zda tyto cíle byly dosaženy. Při výuce na vysokých školách jsou cíle uvedeny v sylabu každého vyučovaného předmětu. O dosažení těchto cílů se vyučující přesvědčují v rámci zkoušek. Na základě rozboru výsledků zkoušek mohou garanti předmětů modifikovat stávající metody výuky tak, aby výuka byla kvalitní a efektivní.

Neúspěšnost studentů při studiu na vysokých školách je velice závažným problémem, kterým se zabývá i MŠMT ČR ve svém *Dlouhodobém záměru vzdělávací a vědecké, výzkumné, vývojové, umělecké a další tvůrčí činnosti pro oblast vysokých škol na období 2006–2010.* Ministerstvo má zájem na zvyšování procenta úspěšnosti studia (tj. poměru počtu absolventů ku počtu studentů přijatých do 1. roku studia), aniž by byly snižovány požadavky odpovídající typu studijního programu. V citovaném Dlouhodobém záměru MŠMT ČR je v kapitole II „Kvalita a excelence akademických činností“ v odstavci 2.5 uvedeno: „Ve vzdělávací činnosti bude velmi důležitý kvalitativní ukazatel zefektivnění studia…“

2 Výsledky zkoušek během jednoho semestru

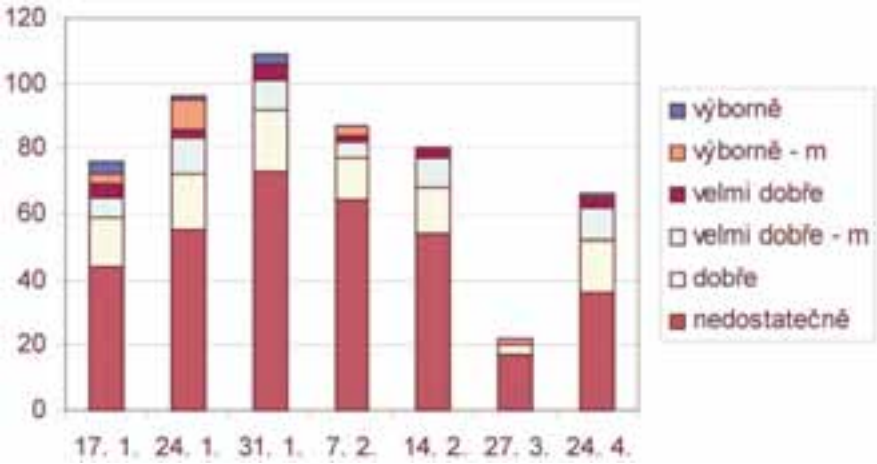
Problematika úspěšnosti studia je řešena i na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice. V akademickém roce 2005–2006 bylo na této fakultě zapsáno na předmět Matematika I, který je vyučován v prvém semestru, celkem 478 studentů. Během akademického roku úspěšně složilo zkoušku 193 studentů,

tj. 40,4 %. Jedná se o stav, který není neobvyklý, ale naopak je v posledních letech standardní. Přehled výsledků zkoušek je uveden v následující tabulce 1, do které jsou zahrnuti pouze ti studenti, kteří se skutečně dostavili ke zkoušce. Na každý termín se totiž vždy přihlásí několik studentů, kteří se ke zkoušce nedostaví, a to z jakéhokoliv důvodu. Mnohdy svoji neúčast ani dodatečně neomluví. Počty těchto studentů by zkreslovaly dále presentované výsledky.

Tabulka 1 Výsledky zkoušek z Matematiky I

	17. 1.	24. 1.	31. 1.	7. 2.	14. 2.	27. 3.	24. 4.	celkem	v %
výborně	4	1	3	0	0	0	1	9	1,7 %
výborně – m	3	9	0	3	0	2	0	17	3,2 %
velmi dobře	4	3	5	2	3	0	3	20	3,7 %
velmi dobře – m	6	11	9	5	9	0	10	50	9,3 %
dobře	15	17	19	13	14	3	16	97	18,1 %
nedostatečně	44	55	73	64	54	17	36	343	64,0 %
celkem	76	96	109	87	80	22	66	536	100,0 %

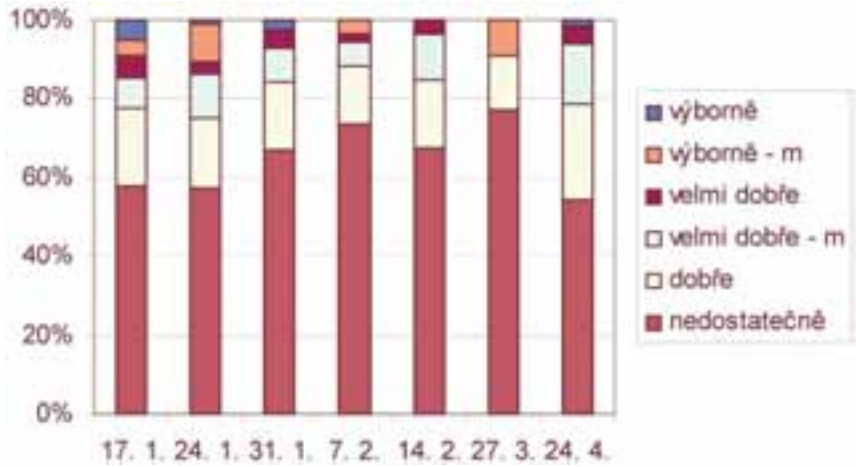
Na obr. 1 jsou číselné hodnoty z předcházející tabulky vyjádřeny graficky.



Obr. 1 Grafické znázornění výsledků zkoušek

Z grafu je zřejmé, že studenti, kteří neuspěli v řádném zkouškovém období, tj. do 14. února, využívají další dva termíny nevyváženě. Snaží se o co největší oddálení zkoušky, takže výrazně větší zájem projevují až o poslední termín.

Aby bylo možno posoudit úspěšnost studentů u zkoušek v různě obsazených zkouškových termínech, jsou všechny výše uvedené absolutní údaje přepočteny na procentuální vyjádření a jsou uvedeny v grafu na následujícím obrázku 2.



Obr. 2 Relativní vyjádření výsledků zkoušek

Z grafu je zřejmé velké procento neúspěšnosti ve všech zkouškových termínech. Jak dokladuje tabulka 1, průměrná neúspěšnost dosahuje hodnoty 64 %.

Při zkoumání trendů, které lze vysledovat z grafu na obr. 2, je zřejmé, že celková úspěšnost u zkoušky je na začátku zkouškového období nejvyšší a pak postupně klesá. Výjimkou je zkouškový termín 14. 2. 2006. Poslední termín se od sledovaného trendu také odchyluje. Lze to přičíst skutečnosti, že se jedná právě o poslední termín, na který studenti vždy maximálně zmobilizují svoje síly a snaží se co nejlépe zvládnout zkoušku.

S malými odchylkami je možno tyto grafy vysledovat i v minulých letech. Studenti se pak mylně domnívají, že na začátku zkouškového období jsou zadávány lehké písemky a s přibývajícími termíny jejich obtížnost narůstá. Jsme přesvědčeni, že jednotlivá zadání písemných prací se zásadně svojí obtížností neliší. Neúspěšnost v jednotlivých zkušebních termínech přičítáme tomu, že na začátku zkouškového období jdou na zkoušku studenti, kteří celkově umějí matematiku lépe a s přibývajícími termíny přicházejí na zkoušku studenti s horšími vědomostmi.

3 Příčiny neúspěšnosti u zkoušky

Při opravování zkouškových písemných prací se setkáváme se skutečností, že studenti dělají chyby nejenom v látce, která byla přednášena na vysoké škole, ale také v látce, kterou by měli znát ze střední, případně ze základní školy. Stává se např., že student nedokáže vypočítat hodnotu limity funkce, protože udělá chybu v úpravě zlomku. Nebo nedokáže separovat proměnné při řešení diferenciálních rovnic, protože nedokáže upravovat rovnice.

Proto jsme se pokusili analyzovat hlavní zdroje chyb v jednotlivých příkladech a nalézt cestu k jejich odstranění.

4 Výsledky zkoušek v jednotlivých termínech

Vzhledem k rozsahu tohoto článku nelze uvádět rozbor všech písemných prací, které v každém zkouškovém termínu obsahovaly vždy tři varianty s pěti příklady. Pro ukázku jsou dále uvedeny rozbory příkladů ve variantě A ze 17. ledna 2006 (tab. 2) a 24. dubna 2006 (tab. 3). Jedná se o rozbor souborů písemných prací, které presentují početně dobře obsazené termíny na začátku a na konci zkouškového období. Zkoumání dalších souborů písemných prací přineslo obdobné výsledky.

V analyzovaném souboru písemných prací jsme kromě počtu správně vyřešených příkladů sledovali příčiny chyb podle následujících kritérií:

- **Nezačal, všechno špatně**: do této kategorie jsme shrnuli jak případy, kdy student vůbec nezačal řešit daný příklad, tak ty, kdy pokus o řešení byl naprosto zcestný a vůbec nesouvisel s danou problematikou.
- **Látka vysoké školy**: student udělal chybu v postupu, který se měl naučit v rámci studia předmětu Matematika I na vysoké škole.
- **Látka střední školy**: student udělal chybu v postupu, který je vyučován na střední škole.
- **Látka základní školy**: student udělal chybu v postupu, který by měl znát ze základní školy.

V tabulce 2 je uveden přehled dosažených výsledků z jednotlivých příkladů (A1 až A5) v rámci analyzovaného souboru zkouškových písemných prací.

Tabulka 2 Vyhodnocení příkladů varianty A ze dne 17. 1. 2006

	A1	A2	A3	A4	A5	celkem	v procentech
látka základní školy	2	3	3	0	1	9	6,9 %
látka střední školy	4	0	0	0	0	4	3,1 %
látka vysoké školy	11	6	13	4	1	35	26,9 %
nezačal, všechno špatně	0	10	0	1	22	33	25,4 %
bez chyby	9	7	10	21	2	49	37,7 %
Celkem	26	26	26	26	26	130	100,0 %

Z tabulek je zřejmé, že neznalost látky ze základní a střední školy se nezanedbatelným způsobem projevuje na výsledku zkoušek na vysoké škole. Zpravidla více než 10 % studentů nevyřešilo příklady, protože udělali chybu na úrovni učiva základní nebo střední školy.

Tabulka 3 Vyhodnocení příkladů varianty A ze dne 24. 4. 2006

	A1	A2	A3	A4	A5	celkem	v procentech
látka základní školy	2	0	1	0	0	3	2,7 %
látka střední školy	0	2	1	8	0	11	10,0 %
látka vysoké školy	6	10	2	7	1	26	23,6 %
nezačal, všechno špatně	12	1	11	1	20	45	40,9 %
bez chyby	2	9	7	6	1	25	22,7 %
Celkem	22	22	22	22	22	110	100,0 %

Čísla uvedená v tabulce 3 v porovnání s tabulkou 2 dokladují nárůst počtu studentů, kteří příklad nezačali řešit, nebo jejich řešení bylo zcela mylné. S tím také souvisí pokles počtu správně vyřešených příkladů.

Není to však hlavní příčina neúspěchu u zkoušky. Zásadní vliv na neúspěch má nezvládnutí probírané vysokoškolské látky, které se projevuje v chybném výpočtu, nebo v tom, že student vůbec neví jak začít s řešením příkladu. Je zřejmé, že v položce „nezačal, všechno špatně“ se mohou skrývat také studenti, kteří by se mohli dopouštět chyb na úrovni učiva základní nebo střední školy, pokud by vůbec věděli, jak začít s řešením příkladu.

Čísla v tabulce 2 také dokladují skutečnost, že některé typy příkladů studenti zvládají lépe, jiné hůře, ačkoliv jsme přesvědčeni, že náročnost zadaných příkladů je vyvážená. Na základě rozhovorů se studenty víme, že mnozí z nich často riskují a některé kapitoly se vůbec neučí a předpokládají, že daný typ příkladů se v písemné práci neobjeví.

5 Příčiny neúspěchu u zkoušky

Z předcházejícího vyplývá, že základní problém spočívá v nezvládnutí vysokoškolské látky. Na základě zkušeností a rozhovorů se studenty se domníváme, že hlavní příčinou jejich neúspěchu u zkoušek je malé množství samostatně vypočítaných příkladů. Studenti se často domnívají, že stačí pasivně porozumět postupu řešení v ukázkovém řešeném příkladu a již se nesnaží o samostatné vyřešení dalších procvičujících příkladů. Nedokáží správně odhadnout čas, který je nezbytný pro přípravu na zkoušku.

Příčinu tohoto jevu spatřujeme v obecně negativním postoji řady studentů k matematice. Tito studenti nezískali v minulosti dostatečnou motivaci ke studiu matematiky. Jsou přesvědčeni o tom, že matematika nesouvisí s každodenním životem, a že pro reálné životní situace je nepotřebná. Tento postoj je mnohdy podporován i ze strany některých vysokoškolských učitelů, kteří matematiku nepoužívají, její význam podceňují a tento svůj postoj přenášejí na studenty.

6 Cesty ke zlepšení současné situace

Současný neutěšený stav ve výuce matematiky by zásadním způsobem mohla ovlivnit zvýšená motivace žáků a studentů na všech stupních škol, která spočívá v řešení slovních úloh a v provázání výuky matematiky s dalšími předměty.

Na vysoké škole by paralelně se základní výukou matematiky měly být realizovány semináře, ve kterých by byly řešeny praktické příklady z oboru, který studenti studují. Praktické příklady by jak svojí obtížností, tak tematicky, měly bezprostředně navazovat na právě probíranou látku z matematiky. Výuku musí zabezpečit přednášející, který velmi dobře zvládá obor přednášený na dané fakultě a současně je dobrým matematikem. Jedná se o velice náročný požadavek na kvality vyučujícího, který dokáže zvládnout mezioborový integrální přístup k výuce. Je nutno konstatovat, že kvalitních vyučujících, kteří dokáží zvládnout tento přístup k výuce, není nadbytek.

7 Závěr

Neúspěch studentů u zkoušek z matematiky je ovlivněn úrovní jejich předcházejícího studia matematiky, ale není to hlavní příčina. Tou je slabá motivace ke studiu a malá, mnohdy žádná, provázanost výuky matematiky s výukou dalších odborných předmětů.

Budování konceptuálních představ čísla u dětí ve věku 5–8 let

Darina Jirotková

Abstrakt

Pro rozvoj matematického myšlení žáků je důležité dbát na harmonický rozvoj jeho procesuální i konceptuální složky. Nejprve ilustrujeme negativní důsledky zanedbaného rozvoje konceptuálního myšlení, pak popíšeme prostředí vhodné pro rozvíjení konceptuální představy čísel a nakonec se zmíníme o třech fenoménech týkajících se specifického jazyka tohoto prostředí.

1 Úvod

Školská matematika je orientována spíše na rozvoj procesuálních znalostí a dovedností žáků/studentů a konceptuální myšlení je poněkud zanedbáváno. V učebnicích pro první stupeň ZŠ jsou zdůrazňovány kalkulativní procedury. Situace, které podněcují konceptuální myšlení, se objevují řídce, pojmotvorný proces bývá omezen na učení se „slovíček“ – správných názvů matematických objektů (názvy geometrických útvarů i aritmetických termínů – sčítanec, činitel, podíl, ...). O polaritě proces – koncept píše M. Hejný [4]. Procesuální problematice je věnována studie J. Slezákové [5].

Negativní důsledky zanedbávání rozvoje konceptuálního myšlení ilustrujeme jedním příkladem. Dále popíšeme prostředí pohádky, ve kterém lze rozvíjet konceptuální číselné představy žáků ZŠ a které je vhodné i pro učitele ke zkoumání konceptuálního myšlení žáků.

Zkušenosti s tímto prostředím jsme získali v průběhu jak akčního, tak klinického výzkumu. Myšlenky zde prezentované pocházejí z experimentální výuky M. Hejného [2] a z analýz klinických experimentů. Experimenty z poslední doby byly realizovány ve trojici Hejný, Jirotková, Slezáková za účelem ověření tohoto prostředí pro použití do právě připravované učebnice matematiky pro 1. ročník v nakladatelství Fraus. Analýzy experimentů odkryly řadu jevů charakterizujících myšlenkové procesy žáků v daném prostředí. Některé z nich v článku popíšeme. O zmíněném probíhajícím výzkumu je pojednáno v [1].

2 Ilustrace

V [1] jsou uvedeny dvě ilustrace, které jasně dokumentují důsledky nedostatečně rozvinutého konceptuálního přístupu k řešení matematických úloh. Zde uvedeme ještě jednu. Spadá do oblasti úprav algebraických výrazů a týká se žáka 9. ročníku připravujícího se z „Bělouna“ na přijímací testy na střední školu.

Úloha je standardní a poměrně jednoduchá: Zjednoduš výraz $(a+1)/(1+a)^2$.

Řešení: Žák nejdříve umocnil jmenovatele a pak po chvíli požádal o pomoc. Je zřejmé, že použil *procesuální meta-strategii* (viz [1]), která tentokráte nevede přímo k výsledku.

Pokusme se zkonstruovat řešitelský proces, který proběhl v mysli žáka.

1. Žákovu pozornost nejdříve upoutává jmenovatel a úlohu řadí do oblasti „práce se vzorečky typu $(a+b)^2$“.
2. Druhou mocninu ve jmenovateli vnímá jako výzvu k umocnění.
3. Aktivizuje znalost příslušného vzorečku.
4. Realizuje úpravu jmenovatele podle vzorečku.
5. Končí řešení úlohy a žádá o pomoc, neboť si je vědom, že ji nevyřešil dobře. Jeho výsledek není jednodušší než zadaná úloha.

Nyní se pokusíme popsat hypotetický řešitelský postup při použití *konceptuální meta-strategie.*

1. Snažíme se vytvořit si představu o daném výrazu (zlomku) jako celku.
2. Všimneme si, že jeho klíčovým prvkem je výraz $(a+1)$.
3. Daný výraz uchopíme jako novou myšlenkovou jednotku, tj. zvolíme substituci $A = (a+1)$.
4. Na daný výraz aplikujeme zvolenou substituci a dostaneme výraz A/A^2.
5. Na jednoduchý výraz aplikujeme operaci krácení zlomku; dostaneme výraz $1/A$.
6. Zpětným použitím substituce dostaneme výsledný výraz $1/(1+a)$.

Konceptuální řešitelskou strategii nazýváme též řešení vhledem. Učitelé vědí, že takový postup volí jen málo zvláště nadaných žáků. My se domníváme, že počet těchto žáků je možné zvýšit tím, že konceptuální porozumění číslům a operacím budeme rozvíjet u žáků již od prvního ročníku.

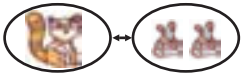
Obr. 1

3 Popis prostředí

Prostředí, které je zde popsáno, je dáno svým příběhem a metaforickým jazykem. Jeho podstatou je sémantizace kvantity a mateřskou oblastí je číslo, částečně též logika a kombinatorika. Použít zvířátko jako nositele kvantity není nová myšlenka. Najdeme ji u jiných autorů; např. [3].

Děda Lesoň je pohádková postava. Pečuje o různá zvířátka a stará se o jejich zábavu. Každé zvířátko je prezentováno trojím jazykem: verbálně (např. slovo myš), obrázkem a ikonou (viz obr. 1 – výtvarná stránka byla realizována D. Raunerovou). Ikony zvířátek jsou nakresleny na žetony (široké plastové uzávěry např. od mléka), takže s nimi lze dobře manipulovat. Další znak – písmeno – je používáno pouze experimentátory; žáci budou písmena používat až později.

Dítě samo pracuje ve všech třech jazycích. Pokud pracuje písemně, může použít nabídnuté znaky nebo může tyto samo tvořit.

a) 

b)

Obr. 2 Obr. 3

Děda Lesoň často organizuje pro zvířátka jejich oblíbenou hru přetahování se lanem. Utkání v přetahování se odehrává na hřišti, které je tvořeno dvěma ovály, červeným a žlutým. Přetahují se jak jednotlivá zvířátka, tak i skupinky. Po nějaké době děda Lesoň zjistil, že nejslabším zvířátkem je myš (M). Dále zjistil, že dvě myši jsou stejně silné jako jedna kočka (K). Jedna kočka s jednou myší jsou stejně silné jako jedna husa (H). Jedna husa s jednou myší jsou stejně silné jako jeden pes (P). Obdobně jsou definována a tím do hry uvedena další zvířátka, o kterých se v tomto příspěvku zmiňovat nebudeme. Rovnosti, které definují sílu jednotlivých zvířátek, jsou zavedeny nejdříve pomocí obrázku (obr. 2a) i ikonicky (obr. 2b), později pracujeme pouze s ikonami. Při představování těchto rovností je důležité, aby se žák nejdříve dobře seznámil s ikonickým jazykem například tak, že rovnosti překreslí podle sebe.

Úlohy jsou dětem předkládány v ikonické podobě na kartičce a/nebo ústně. Například úloha, že na jednu stranu nastoupily dvě kočky a jedna husa a na

druhou stranu pes a myš, je znázorněna ikonicky na obr. 3. Zde ji budeme (a později i se žáky) symbolicky zapisovat takto: $\{KKH\} \sim \{PM\}$. Ikonické zadání žák nejdříve formuluje ústně a pak je vymodeluje pomocí žetonů. Úlohou žáka je: a) rozhodnout, která skupina je silnější; b) své tvrzení podpořit argumenty; c) přidat ke slabší skupině zvířátko nebo zvířátka tak, aby obě skupiny byly stejně silné. Úlohy žáci řeší nejdříve manipulací se žetony, později písemně používáním ikonického a nakonec pracují se symbolickým jazykem.

V tomto článku uvažujeme pouze o úlohách uvedeného typu. V experimentálním vyučování M. Hejného ve 3.–5. ročníku byly použity i náročnější úlohy typu rovnice. Například přetahování se děje v době masopustu a některá zvířátka mají masky. Tato označujeme znaky X, Y. V těchto úlohách obě skupiny červená i žlutá jsou stejně silné. Např. v červené skupině je kočka a dvě zvířátka X a ve žluté jsou dva psi. Situaci zde symbolicky značíme rovnicí $\{KXX\} = \{PP\}$. Tímto způsobem je možné formulovat náročné úlohy, například soustavu rovnic o dvou neznámých: $\{KXX\} = \{PP\}$, $\{XY\} = \{P\}$ nebo soustavu $\{YXX\} = \{PM\}$ a $\{XYY\} = \{PH\}$.

Obtížnost úloh lze odstupňovat podle předpokládané řešitelské strategie a podle počtu možných řešení. Řešitelské strategie u těchto úloh mohou být: **doplnění** (Dop) vhodného zvířátka, **škrtání** (Škr – odstranění příslušného zvířátka, **krácení** (Kra) – odstranění stejných zvířátek nebo stejně silných skupin z obou stran, **substituce** (Sub), **vhledem** (Vhl), **rozšíření** (Roz) – přidání stejného zvířátka na obě strany.

Například úlohu: $\{P\} \sim \{M\}$ (v tabulce 1 č. 09) lze řešit takto: a) Pes je silnější než myš, b) protože pes je stejně silný jako myš a husa. c) Tedy můžeme doplnit husu k myši (Dop H) a obě strany budou stejně silné. Nebo je možné k myši doplnit kočku s další myší (Dop KM), anebo tři myši (Dop MMM).

V tabulce 1 uvedeme ukázku série dvaceti úloh spolu s některými předpokládanými řešitelskými strategiemi a počtem možných řešení.

4 Výsledky

Zde uvedeme jen tři zajímavé jevy z našich experimentů s 8 žáky 1.–3. ročníku z prosince 2005, které jsou z oblasti použité trojice jazyků. Více o jazycích v matematice viz [4]. V našich experimentech mohlo dítě použít nabídnuté znaky nebo tyto samo tvořit.

1. Náš předpoklad, že ikonický jazyk bude pro některé děti nesrozumitelný, se ukázal chybný. Všechny děti z našich experimentů i experimentálního vyučování, přijaly ikony zcela spontánně.

2. Další jev se týká motivace. Děti motivované výtvarně se snažily ikony nebo obrázky kreslit. Týna (7 let) volí pro grafické vyjádření rovnosti $\{P\} = \{HM\}$ obrázkový jazyk (viz horní část obr. 4). Obrázky myši i psa se od nabídnutých obrázků výrazně liší. Odlišnosti ukazují nejen na výtvarnou tvořivost dítěte, ale

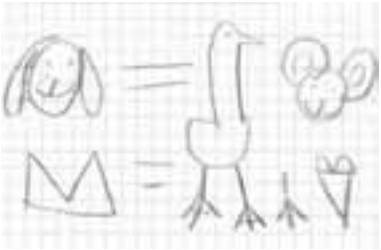
Tabulka 1

č.	úloha	řešení	počet řešení
01	$\{K\} \sim \{M\}$	Dop M	1
02	$\{H\} \sim \{K\}$	Dop M	1
03	$\{H\} \sim \{M\}$	Dop K; Dop MM	2
04	$\{K\} \sim \{MMM\}$	Dop M; Škr M	2
05	$\{H\} \sim \{P\}$	Dop M	1
06	$\{HM\} \sim \{KMM\}$	Sub KM $\rightarrow$ H; Kra M	=
07	$\{P\} \sim \{HMM\}$	Dop M; Škr M	2
08	$\{HMM\} \sim \{PM\}$	Sub HM $\rightarrow$ P; Kra M	=
09	$\{P\} \sim \{M\}$	Dop H; Dop KM; DopMMM	3
10	$\{H\} \sim \{MM\}$	Sub MM $\rightarrow$ K $\wedge$ Dop M	1
11	$\{MMM\} \sim \{H\}$	Sub MM $\rightarrow$ K	=
12	$\{KM\} \sim \{P\}$	Sub KM $\rightarrow$ H $\wedge$ Dop M	1
13	$\{P\} \sim \{MMM\}$	Sub MMM $\rightarrow$ H [11] $\wedge$ Dop M	1
14	$\{HMM\} \sim \{P\}$	Sub P $\rightarrow$ HM $\wedge$ Dop M; Škr M	2
15	$\{HMMM\} \sim \{PM\}$	Sub HM $\rightarrow$ P $\wedge$ Kra P $\wedge$ (Dop M $\vee$ Škr M); Kra M $\wedge$ (Škr M $\vee$ Dop M)	2
16	$\{HH\} \sim \{KKMM\}$	Vhl; Sub KM $\rightarrow$ H (2x)	=
17	$\{PK\} \sim \{HH\}$	Roz M $\wedge$ Sub MH $\rightarrow$ P $\wedge$ Kra P Sub H $\rightarrow$ MKč & Kra Kč	=
18	$\{HHH\} \sim \{PP\}$	Sub P $\rightarrow$ HM (2x) $\wedge$ Kra HH [10]	1
19	$\{PH\} \sim \{HMMMM\}$	Kra H $\wedge$ Sub P $\rightarrow$ HM $\wedge$ Sub MM $\rightarrow$ K $\wedge$ Kra M	=
20	$\{P\} \sim \{KK\}$	Sub K $\rightarrow$ MM (2x) $\wedge$ [13]	=

i na motivační sílu prostředí. Děti motivované kognitivně považují obvykle kreslení obrázků za zdržování a při zápisu jisté situace se snaží o ekonomizaci ikon (obr. 5, Viktor, 8 let). Z hlediska matematiky se druhý typ dětí jeví jako vyspělejší. Je však třeba posuzovat osobnostní vývoj dítěte v celku. Děti výtvarně motivované věnují sice více energie činnosti výtvarné než činnosti kognitivní, ale na druhé straně právě tato skutečnost je přitahuje k tomuto v podstatě kognitivnímu prostředí.

3. Třetí jev se týká prolínání obou vizuálních jazyků. Na obr. 6 vidíme, jak Alenka (8 let) zakreslila rovnost $\{H\} = \{KM\}$. Na levé straně rovnosti je ikona a na pravé spíše obrázky. Je možné, že dítě obrázek husy nesvedlo. Důležité ale je, že heterogenita jazyků nepředstavuje pro dítě kognitivní překážku.

Analogický jev se v matematickém myšlení objevuje v mnoha oblastech. Když například žák 6. ročníku napíše $0{,}25 + 0{,}25 = \frac{1}{2}$, vidíme na jedné straně, že daný vztah dobře chápe, protože jeho zápis obsahuje jak desetinná čísla, tak zlomek. Na druhé straně za jistý nedostatek takového vyjádření považujeme heterogenitu



Obr. 4

Obr. 5

Obr. 6

jazyků. Kdyby danou myšlenku žák zapsal způsobem $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5 = \frac{1}{2}$, pak by bylo jasné, že první rovnost poukazuje na aritmetické myšlení a druhá rovnost tlumočí desetinné číslo do jazyku zlomků. Takovýto přístup vidíme na obrázku 4, kde v horní části je rovnost zapsána jazykem obrázků a v dolní jazykem ikon. Zatím si neodvažujeme tvrdit, že některý z uvedených způsobů je lepší a některý horší. Polarita heterogenity/homogenity jazyků bude předmětem našeho dalšího bádání.

Je zřejmé, že popsané prostředí je vhodný nástroj výzkumu konceptuálního myšlení žáků nejen na prvním stupni. Bude zajímavé sledovat, jak se u žáků, kteří pracují v tomto prostředí, bude schopnost konceptuálního myšlení dále vyvíjet. Naše tři spolupracující učitelé potvrzují, že úlohy o zvířátkách odhalují značné rozdíly v kvalitě myšlení jednotlivých žáků. Tedy popsané prostředí se nabízí i jako vhodný diagnostický nástroj umožňující charakterizovat kognitivní i metakognitivní styl žáka.

Poděkování

Popsané prostředí v tomto článku bylo rozpracováno s podporou grantu FRVŠ 476/2006 v kolektivu autorů M. Hejný, D. Jirotková, J. Slezáková. Na konečné podobě a na ověření ve výuce se nezištně podílely učitelky J. Michnová a I. Kročáková ze ZŠ Školní, Neratovice a K. Nejedlá ze ZŠ Vodičkova, Praha 1, za což jim patří naše upřímné poděkování.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., KRATOCHVÍLOVÁ, J. Early Conceptual Thinking, In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková, *PME 30 proceedings.* Praha : Charles University in Prague, Faculty of Education, 2006, vol. 3, s. 3–289–296.

[2] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : UK v Praze, PedF, 1999.

[3] HOFFMANN, A. How one can use „The Super Farmer“ game in teaching mathematical modelling and problem solving. In *The Mathematics Education into the 21st Century.* Palermo : September, 2002, pp. 186–187, http://math.unipa.it/∼grim/SiHoffman.PDF

[4] HEJNÝ, M. Prostředí, která otvírají svět čísel. (zde ve sborníku)

[5] SLEZÁKOVÁ, J. Budování procesuálních představ čísla u dětí ve věku 5–8 let. (zde ve sborníku)

Interaktivní metody ve výuce matematiky

Marika Kafková

Abstrakt

Článek pojednává o novém projektu, který vznikl na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity, nazvaný „Globaschool“, jenž se snaží o zapojení moderních metod do výuky matematiky.

1 Úvod

Interaktivní výuka je moderní vyučovací proces, který probíhá za spoluúčasti pedagogů a studentů. Jejich vztah je založen na principu partnerství a spolupráce, přičemž student je aktivním subjektem, který má vliv na průběh a podobu tohoto procesu.

Předmět matematika je často na základních a středních školách vyučován standardním způsobem, kdy žáci sedí v lavici a plní příkazy učitele, který v pozici „vůdce“ nařizuje, napomíná, hlídá a nutí žáky k nějaké činnosti. Probírají-li se např. objemy těles v prostoru, žáci se většinou naučí potřebné vzorečky a pak řeší jeden příklad za druhým. Příklady jsou nejčastěji typu: *Je dán válec o rozměrech... Vypočti, jaký je objem válce.* Málokdy se objeví příklad řešící danou problematiku, který by byl zaměřen na problém z praxe. Žáci proto nejsou nuceni více se zamýšlet nad daným problémem, matematika se jim zdá nezáživná a řadí ji mezi neoblíbené předměty. Kreativita a seberealizace žáků ve výuce tak představuje jen malou roli. Lze říci, že určitá transformace českého školství od stereotypu k tvořivé a zábavné činnosti žáků probíhá velmi pomalu. Žáci také často nevědí a ani si neumí představit, k čemu jim některé vědomosti budou dobré v životě a kde by je mohli uplatnit.

2 Globalschool

Tyto a jiné problémy se snaží do jisté míry eliminovat projekt vzniklý na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v roce 2005 zvaný *Globalschool*, který se určitou mírou snaží o interaktivní výuku matematiky charakterizovanou spoluprací žáků různých základních a středních škol. *Globalschool* vytváří takové projekty a příklady, kde žáci mohou uplatnit nejen své dosavadní matematické

Obr. 1 Žák při práci v *Globalschool*

znalosti a dovednosti, ale jsou i nevědomky seznámeni např. s pojmem „spoluzodpovědnost“ za výsledky, učí se komunikovat se svými vrstevníky prostřednictvím internetu a prostřednictvím vhodných příkladů či projektů se učí vnímat realitu i problémy okolního světa. Učí se samostatně pracovat s počítačovými programy, mají možnost vymýšlet si svá řešení a ta pak konzultovat se svým kolegou atd. Na druhé straně jednotlivá řešení a průběh řešení daných problémů umožňují učitelům zjistit, jak se žák umí vypořádat s nestandardním úkolem, kolik času potřebuje na správné řešení, zda je schopen příklad vyřešit sám, jak dokáže komunikovat se svým spolužákem apod.

Na tomto projektu Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity kooperuje s Přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity v zastoupení Doc. RNDr. Eduarda Fuchse, CSc., a doktorandky Mgr. Mariky Kafkové (vede a vyhodnocuje činnosti žáků jedné z virtuálních tříd), kteří jsou rovněž členy řešitelského kolektivu.

Díky *Globalschool* jsou žáci do jisté míry seznámeni s metodou e-learningu. Matematické příklady a projekty, které jsou žákům předkládány, vycházejí víceméně z praxe, přičemž důležitou charakteristikou daných projektů je propojení matematiky s ostatními předměty. Příklady jsou vybírány tak, aby byly zábavné a motivující pro další studium matematiky.

Cílem projektu je, aby žák byl schopen:

- chápat svět v souvislostech,
- nahlížet na problémy z více než jednoho úhlu pohledu,
- spolupracovat se svými kolegy,
- předkládat svá řešení daného problému a obhájit si svůj názor,
- být vstřícný k jiným názorům, k odlišným řešení,
- vyhledat si potřebné informace,
- využít dosavadních znalostí,
- využít potřebné informační technologie, které jsou nedílnou součástí dnešní moderní doby.

3 První rok realizace

Jak již bylo zmíněno výše, jedná se o spolupráci žáků různých škol, přičemž komunikace mezi nimi probíhá přes internetové prostředí – tzv. spolupráce „na dálku“.

Po registraci žáků (každá osoba má své přístupové jméno a heslo) škol, které projevily zájem o tento projekt a byly zařazeny do *Globalschool*, byly vytvořeny třídy skládající se ze žákovských skupin, resp. „lavic“, v nichž žáci společně řeší přidělené úkoly. V každé „lavici“ sedí žáci rozdílných škol. Komunikace mezi sousedy probíhá pouze prostřednictvím webových stránek *Globalschool*. Jednotlivé „lavice“ pak řeší uložené příklady, přičemž jedna z důležitých podmínek pro splnění příkladů je, že žáci musí spolupracovat a komunikovat mezi sebou, tzn. že na řešení se musí podílet oba. Každá „lavice“ si může vybírat, v jakém pořadí chce řešit úkoly a určovat si své tempo. Žáci svá řešení mohou odeslat ke kontrole pouze tehdy, jestliže na řešení spolupracovali oba a oba mysleli, že je správné. Poté jeden z žáků označí úkol jako zodpovězený a tímto způsobem dává vědět virtuálnímu učiteli[1], že jsou s příkladem hotovi. Žáci vidí pouze uspořádání všech lavic, resp. jakýsi zasedací pořádek. Sledovat jednotlivá řešení příkladů jim je umožněno pouze ve své „lavici“.

V tomto školním roce se např. objevily příklady následujícího znění:

Sjíždění vodopádů

Jak se sjíždějí vodopády? Člověka uzavřou do pevné bedny vyrobené „přesně na míru“ a vhodí bednu do řeky nad vodopádem. Když to dobře dopadne, pod vodopádem jej z bedny vytáhnou...

[1] Virtuální učitel je osoba, která kontroluje a uznává řešení jednotlivých úkolů.

Máte za úkol provést výpočty pro výrobu bedny pro svého spolužáka z lavice. Bedna musí přesně odpovídat jeho postavě tak, aby v ní mohl stát. Rozhodněte se, zda vytvoříte bednu tvaru kvádru nebo válce. Rozměry si u spolužáka zjistěte (a pošlete mu rozměry své). Vypočítejte objem a povrch takové bedny. Výsledky měření a výpočet napište do řešení úlohy. Jako následný úkol spočítejte, kolik litrů vzduchu zůstane v bedně, jestliže se do ní spolužák vsouká (počítejte s tím, že kolik kg člověk váží, tolik litrů má objem). Jak dlouho by člověk v takové bedně přežil, pokud spotřebuje 7 litrů vzduchu za minutu? Na tyto otázky můžete odpovědět společně.

Tým pro přežití

V soutěžích „survival“, v nichž mají týmy soutěžících především přežít v drsné přírodě, je výhodné, pokud se jednotlivci co možná nejvíce odlišují, aby mohli plnit nejrozmanitější úkoly.Budete spolupracovat v lavici. Vaším úkolem je zjistit, kterou svojí měřitelnou vlastností se od sebe nejvíce lišíte. Pokud jste například jeden velký a druhý malý, nebo svalnatý a netrénovaný, těžký a lehký, máte šanci.

Například:
Jeden z lavice váží 45 kg a druhý 50 kg. Jeden z lavice má nohu č. 8 a druhý č. 5. Musíte rozhodnout, který z těchto rozdílů je větší. Tento rozdíl spočítáte v procentech (o kolik je jeden z nás větší než druhý?). Změřte a navzájem si vyměňte své rozměry a další údaje, na kterých se domluvíte a které vás napadnou. Spočítejte, kde je mezi vámi dvěma největší rozdíl v procentech. Tento údaj napište jako výsledek Např: „Jeden z nás má o 15 % větší obvod hlavy.“ „Jeden z nás má o 34 % delší nehty než druhý.“ Svoje výpočty nebo změřené údaje přiložte.

Na těchto a dalších příkladech pracovali např. žáci 1. ročníku Gymnázia v Brně a žáci kvarty Gymnázia v Nymburce. Z těchto žáků se utvořily buď smíšené „lavice“ nebo „lavice“ skládající se jen z dívek či chlapců. Práce na těchto příkladech nebyla začleněna do hodin matematiky, žáci řešili příklady ve svém volném čase, což mělo za následek menší aktivitu než jsme očekávali. Z devětadvaceti vzniklých lavic velmi dobře pracovala šestina, přičemž se jednalo o čtyři dívčí a jednu smíšenou lavici. V dalších několika lavicích pracoval pouze jeden žák, a proto podle daných pravidel nebyly příklady uznány. Ostatní žáci byli buď pasivní nebo se zapojovali jen zřídka.

Podle dosavadního průběhu je zřejmé, že když projekt *Globalschool* nebude zapojen do vyučovacího procesu např. jako výběrový předmět s alespoň dvěma hodinami měsíčně, bude a je velmi těžké motivovat žáky k nějaké činnosti.

V druhé polovině školního roku byly žákům předloženy dva rozsáhlejší příklady, resp. projekty, na které měli několik měsíců. Na tomto projektu spolupracovali už nejenom žáci výše zmíněných škol, ale také např. žáci z primy Gymnázia v Ostravě.

Žáci si nejprve vybrali projekt, na kterém chtěli pracovat a poté byli utvořeny „firmy“ skládající se minimálně ze čtyř osob, které měly za úkol daný projekt vyřešit. Jeden z projektů byl nazván „Sportovní areál“. Popis projektu byl žákům „vyvěšen“ na webových stránkách *Globalschool*: http://globalschool.jcu.cz, kde byla popsána daná situace a cíl jednotlivých firem. Protože se jednalo o dlouhodobější a rozsáhlejší úkol, bylo jeho řešení usnadněno tím, že úkol byl rozfázován do pěti fází a každá fáze jasně definovala postup řešení.

Žáci měli za úkol vytvořit plán moderního sportovního areálu, pro který jistá obec vyčlenila přilehlou louku o určitých rozměrech a zároveň definovala své představy, ze kterých se měl areál sestávat. Žáci si mohli určit další objekty a s nimi související služby, které mají v areálu důležitou a nepostradatelnou funkci. Prvořadým cílem bylo vytvořit plán rozvržení jednotlivých objektů v areálu. Dále měly jednotlivé firmy za úkol vymyslet název, popřípadě logo své firmy, název sportovního areálu, sepsat důležité údaje o sportovních objektech v areálu od správných rozměrů hřišť a použitých materiálů až po komplexní vybavení sportovních objektů. Všechny tyto údaje měly být sepsány do komentáře předloženého s návrhem areálu.

S výsledky své práce žáci, resp. „firmy“ vystoupí na malé konferenci, která se uskuteční v říjnu 2006 na Pedagogické fakultě v Českých Budějovicích, kde budou jednotlivé projekty vyhodnoceny a poté vybrán jeden pro „realizaci“...

Literatura

[1] BINTEROVÁ, H., MILOTA, J., VANÍČEK, J. *Globalschool – virtuální prostředí pro výuku matematiky na ZŠ formou e-learningu.* Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep. 13, 2005. ISSN 1214-4681.

[2] KAFKOVÁ, M. Využití prostředí Plone ve výuce matematiky. Milota, J., Kašpar, J. *Sborník Plone konference.* 1. vyd., České Budějovice : JČU v Českých Budějovicích, 2006. ISBN 80-7040-859-6.

[3] http://globalschool.jcu.cz/

Program TI InterActive! – vytváření dokumentů o řešení matematických úloh

Jan Kašpar

Abstrakt

Program pro vytváření dokumentů o řešení matematické úlohy, software typu CAS (Computer Algebra System), editor grafů, tabulkový editor, textový editor, komunikace s internetem, statistické zpracování dat.

1 Základy práce s programem

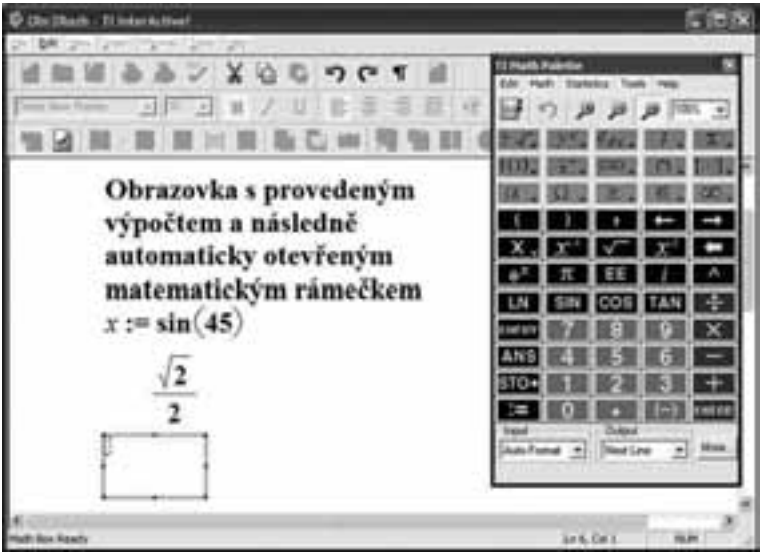
Program TI InterActive! (dále TIIA) byl vyvinutý firmou Texas Instruments (dále TI) a má sloužit zejména učitelům matematiky. Jedná se o velmi snadno zvládnutelný software, který umožňuje velice jednoduše vytvářet dokumenty o řešení matematických úloh.

Pomocí TIIA je možné provádět matematické výpočty, zobrazovat grafy, pracovat s daty uloženými do tabulek (včetně dat stažených z Internetu), do dokumentu psát volný text formou velmi podobnou běžným textovým editorům.

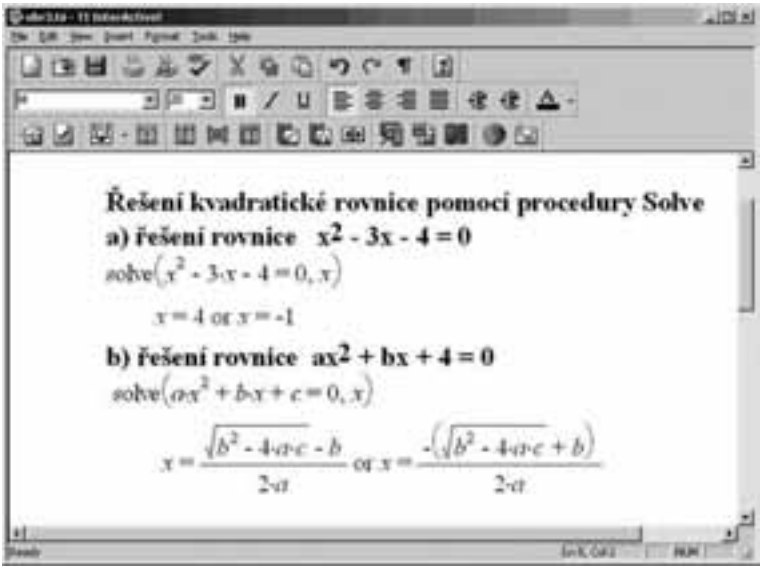
TIIA umožňuje vytvářet dokumenty pro výklad látky, připravovat zadání úloh pro žáky a v případě, že program budou mít k dispozici i žáci, pak od nich vyžadovat zpracování úloh pomocí tohoto programu.

Na obr. 1 je ukázka jednoduchého výpočtu doplněná průvodním textem a dále ukázka otevřeného prázdného matematického rámečku, který je po skončení práce v rámečku předchozím automaticky otevřen. Spolu s matematickým rámečkem je na pracovní ploše automaticky otevřená TI Math Palette pro zadávání výpočtů v matematickém rámečku.

Výpočet funkce sinus je zde pro stupňovou míru a bylo provedené nastavení výpočtu přesného výsledku. Nastavení režimu výpočtu resp. překontrolování tohoto nastavení je velmi důležitým úkonem před zahájením práce s programem. TIIA umožňuje nastavit formát zápisu čísel, počet zobrazených číslic, úhlovou míru, přesnost výpočtů, číselný obor, soustavu jednotek a typ grafu. V okně pro nastavení režimu výpočtů je velmi podrobná a názorná nápověda.



Obr. 1 Pracovní plocha TIIA s provedeným výpočtem a komentářem



Obr. 2 Ukázky výpočtů

2 Výpočty v TIIA

Program TIIA umožňuje provádět výpočty jak s konkrétními čísly tak s čísly obecnými. V následujícím dokumentu (obr. 2) je ukázka výpočtu dvou kvadratických rovnic pomocí procedury Solve.

Zadávání výpočtů můžete provádět z klávesnice počítače nebo z klávesnice TI Math Palette. Kromě základních početních operací a standardních matematických funkcí můžete pro výpočty použít nabídku mnoha dalších matematických procedur a funkcí, které najdete v nabídkách **Math**, **Statistics** popř. **Tools** v TI Math Palette, kde jsou funkce a procedury seskupené do tematických celků. Kliknutím na každou z nich se otevře okno s první úrovní nabídek. V tomto okně si vyberete příslušný tematický celek a kliknutím na něj otevřete jeho okno nabídek. V některých případech není ani druhá úroveň nabídek poslední. Na obr. 3 je ukázka postupně otevřených oken nabídky **Math**, **Algebra**, **Complex** a **Solve**. V tomto případě je pro proceduru **Solve** (pro řešení rovnic) zvolená verze pro obor komplexních čísel (v matematickém rámečku je pak zapsaná jako **cSolve**).

Obr. 3 Ukázka otevřené vícestupňové nabídky

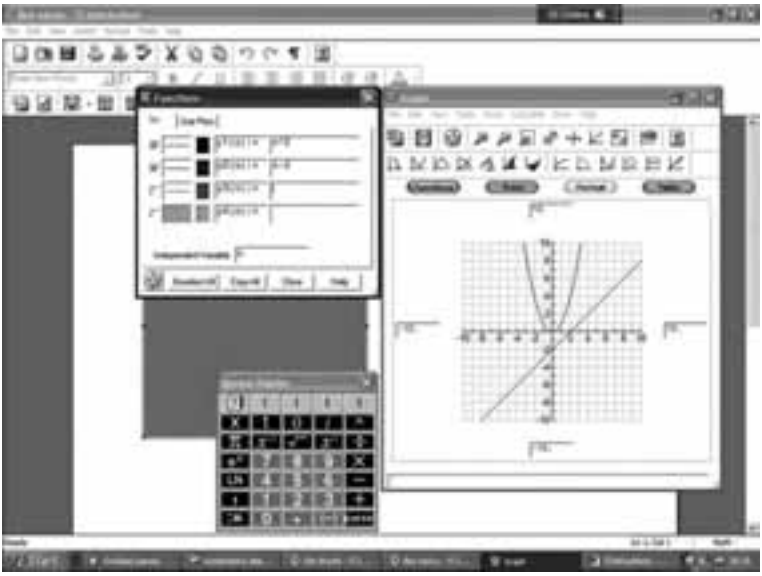
Výpočty v matematickém rámečku je možné editovat. Okno pro editaci matematického rámečku (aktivního) otevřete buď z klávesnice počítače stisknutím kláves **CTRL** a **P** nebo otevřením nabídky **Edit** v TI Math Palette a zde kliknutím na volbu **Properties**... nebo kliknutím na tlačítko **More**... na posledním

řádku TI Math Palette. Pro editaci výpočtu v matematickém rámečku poskytuje program TIIA mnoho možností. Je možné mj. volit barvu a velikost písma pro zadání a výsledky výpočtů, symbol, vkládaný mezi zadání a výsledek, umístění zadání a výsledku na stejný řádek nebo pod sebe, odsazení mezi zadáním a výsledkem, zobrazení zadání a výsledku v dokumentu (jeden z nich je možné „skrýt“).

Všechny symboly, procedura a funkce, které jsou v TIIA k dispozici, najdete též v katalogu, který otevřete kliknutím na první ikonu druhého řádku nabídek v TI Math Palette. Zde jsou funkce a procedury řazené abecedně.

3 Grafy a pohyblivé lišty v TIIA

Do dokumentu je možné vkládat grafy. Je možné zobrazit grafy funkcí v kartézských souřadnicích, grafy parametrických rovnic, grafy funkcí v polárních souřadnicích a dále zobrazit data pro statistické výpočty. Pokud chcete do protokolu vložit graf, musíte nejprve zvolit jednu z pěti zmíněných možností. Po kliknutí na příslušnou ikonu pro volbu typu grafu se na ploše zobrazí dva rámečky pro zadání potřebných údajů pro graf, který má být do dokumentu vložen (viz obr. 4).



Obr. 4 Zadávání grafů do dokumentu

V rámečku Functions se do okének vpravo vyplňují předpisy funkcí, jejichž grafy mají být zobrazené. Dále je možné v tomto rámečku zadat typ a barvu „čáry“ grafu. V rámečku Graph je možné zadat například rozsah zobrazených částí souřadnicových os, způsob zobrazení souřadnicových os, opatřit graf nadpisem, připojit tabulku funkčních hodnot atd. Kromě toho se v tomto rámečku při zadávání funkcí automaticky vykresluje graf tak, jak bude zobrazen v dokumentu. Současně s rámečky Functions a Graph je na obrazovce vyznačené místo, kam bude graf v dokumentu umístěn (šedé místo, částečně pod rámečky Functions a Symbol Palette).

Program TIIA rovněž umožňuje vkládat do dokumentu pohyblivé lišty. Ty uživateli poskytnou možnost interaktivně přiřazovat proměnným hodnoty ze zadaného intervalu. Výpočty následující za touto pohyblivou lištou, stejně tak jako grafy, jsou realizované pro příslušnou nastavenou hodnotu proměnné, pokud se v nich tato vyskytuje (tzv. dynamický systém).

4 Závěr

Na závěr tohoto stručného představení programu TIIA bych rád upozornil na to, že všechny elementy, které jste poznali a které můžete vložit do dokumentu (matematický rámeček, graf, tabulku, pohyblivou lištu) jsou v dokumentu editovatelné, tzn. můžete je kopírovat, měnit jejich velikost, zařadit do textu jako „obtékané“ prvky, kopírovat popř. editovat jejich obsah (např. pokud máte v matematickém rámečku složitý výpočet, můžete zadání obvyklým způsobem označit, zkopírovat do jiného matematického rámečku a tam potřebně upravit) nebo z dokumentu jako celek odstranit. Výsledný dokument pak můžete exportovat jako .html, .doc, .rtf nebo .txt soubor.

Jestliže vás na základě této úvodní informace program zaujal, můžete si na 30 dní z adresy http://www.education.ti.com stáhnout jeho demo verzi (zde si otevřete odstavec Products a následně Software, kde je program TIIA nabídnutý ke stažení). A pokud vás program zaujal natolik, že uvažujete o jeho zakoupení, tak na stránkách http://www.akermann.cz najdete aktuální cenovou nabídku, která je, domnívám se, velmi lákavá.

Parametrické úlohy – forma samostudia

Milada Kočandrlová, Hana Lakomá

Abstrakt

Příspěvek představuje průřez výuky matematických předmětů (matematika a geometrie) v jednom z bakalářských studijních programů (Geodézie a kartografie) na Stavební fakultě ČVUT pro malý počet studentů (cca 100). Tento výukový proces je optimalizován vzhledem ke dvěma aspektům. Jedním je vytváření konkurenčního prostředí pro studenty a druhým usnadnění práce učitele při řízení samostatné práce studenta.

1 Úvod

Jedním z aktuálních problémů výuky matematiky a geometrie na oboru Geodézie a kartografie Fakulty stavební ČVUT je zamezit snižování odborné úrovně studentů při zachování stávajícího trendu zvyšování jejich počtu. Doplnění řádného denního vysokoškolského způsobu studia vhodným řízeným samostudiem se zdá být jedním z možných řešení. Při kontrole výsledků samostudia je však třeba najít vhodný systém předcházející či maximálně eliminující možnost opisování studentů. Našemu školství a společnosti vůbec se zatím nedaří vytvořit studentům na školách v rozumné míře konkurenční prostředí. Takové prostředí, ve kterém by bylo studentovi, který opisuje, zřejmé, že nepodvádí systém, ale sebe sama a student, který opisovat dává, by zjistil, že škodí jak sobě, tak opisujícím spolužákům.

2 Individuálně zadávané úlohy

Nutnost omezit na minimum možnost opisování při zadávání úloh, výkresů či projektů v rámci samostudia matematiky či geometrie vede k formulaci úloh s individuálním zadáním. Přitom takových, aby jejich kontrola a hodnocení nadměrně časově nezatěžovaly učitele. I v případě splnění těchto požadavků na úlohy však zkušenost ukazuje, že lze řízenou samostatnou práci studentů aplikovat na nepříliš početnou skupinu studentů. Na oboru geodézie a kartografie momentálně funguje systém samostudia, do kterého je zapojeno přibližně sto studentů.

Obor Geodézie a kartografie je v bakalářském programu na fakultě stavební ČVUT dotován standardním počtem hodin geometrie a největším počtem hodin

matematiky. Zaměření oboru pak generuje zaměření aplikačních úloh ve vyšších semestrech.

V následujících podkapitolách je stručně popsán rozsah, obsah a forma výuky jednotlivých předmětů a z nich vyplývající příležitosti k zadávání úloh řízené parametrem, včetně několika ukázek takto zadaných úloh.

2.1 Matematika

Forma výuky prvního semestru matematiky je pokračováním středoškolského způsobu výuky, na který jsou studenti zvyklí: příprava – výuka – testování. V rámci přípravy na příští hodinu je studentovi přidělena jedna úloha ze souboru dvaceti až třiceti jednoduchých příkladů. Zkušenost ukazuje, že počet úloh je dostatečný hlavně vzhledem k tomu, že se studenti z různých studijních skupin na začátku studia ještě neznají. Kontrola osvojených vědomostí je formou testů s volenou odpovědí, viz [1]. Tematické celky, které studenti v prvním semestru tímto způsobem studují, jsou dva: diferenciální počet funkce jedné proměnné a analytická geometrie s lineární algebrou. Jediné aplikace, které se zde objevují, jsou Schmidtova ortogonalizace a metoda nejmenších čtverců, numerické řešení rovnice pro jednu neznámou a interpolace funkce polynomem.

Druhý semestr výuky matematiky je věnován třem tématům: Reimannův určitý integrál, diferenciální počet funkce dvou proměnných a úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Pravě Reimannův intergál je vhodný pro individuální zadání řízené parametrem. Přitom lze volit úlohy, které mají aplikační význam. Některá z témat zadávaných úloh jsou:

- parametrické rovnice klotoidy, přechodnice v silničním stavitelství
- Laplaceův-Gaussův integrál, hustota normálního rozdělení pravděpodobnosti
- Bernoulliova lemniskáta, přechodnice pro regulaci vodních toků
- obecná řetězovka, průhyb kovového měřického pásma
- délka oblouku meridiánu referenčního elipsoidu
- izometrická šířka v Mercatorově promítání.

Každá úloha je doplněna historickým vývojem a praktickým využitím a v zadání požaduje od studentů vypracování pěti dílčích podúloh.

Struktura zadání jedné úlohy je ukázána na případě *Úlohy o klotoidě.*

Nejprve jsou studenti seznámeni s novým objektem a jeho definicí.

Funkce

$$x(s) = \int_0^s \cos\frac{t^2}{2a^2}\,\mathrm{d}t, \quad y(s) = \int_0^s \sin\frac{t^2}{2a^2}\,\mathrm{d}t,$$

určují pro každé s souřadnice bodů křivky, která se nazývá klotoida.

Poté studenti v prvních třech podúlohách objevují obecné vlastnosti definovaného objektu, které ověřují pomocí základních pojmů z teorie integrálů. Tyto podúlohy jsou společné pro všechny studenty.

a) *Ukažte, že funkce x, y jsou liché, tj. křivka má dvě větve symetrické podle počátku soustavy souřadnic.*

b) *Ukažte, že tečný vektor křivky v každém jejím bodě je jednotkový (jeho souřadnice jsou derivace funkcí x, y podle oblouku s).*

c) *Určete velikost vektoru, jehož souřadnicemi jsou druhé derivace funkcí x, y podle oblouku s. Převrácená hodnota velikosti tohoto vektoru je poloměr křivosti klotoidy v jejím bodě.*

V dalších dvou podúlohách studenti počítají integrál a chybu výpočtu lichoběžníkovou (resp. Simpsonovou) metodou pro danou konstantu a. Každý student na jemu přiděleném intervalu, určeném pořadovým číslem ve studijní skupině, počítá přírůstek souřadnicových funkcí s daným krokem. Pro následnou kontrolu stačí vypočítané hodnoty vynést do grafu křivky. Přesnost řešení pak vidí jak vyučující, tak studenti, jež si takto zároveň mohou snadno navzájem porovnat kvalitu svých výsledků.

a) *Zvolte a^2 a určete přírůstky $x(k) - x(k-1)$, $y(k) - y(k-1)$, kde $k > 0$, lichoběžníkovou metodou s krokem $h = 0{,}2$.*

b) *Určete chybu výpočtu z bodu d). Přírůstky souřadnic nahraďte prvním totálním diferenciálem a porovnejte s výsledky z bodu d).*

Další úlohy, které studenti druhého semestru řeší v rámci samostudia, jsou ze zbývajících dvou tématických celků učiva. U zadání úlohy na funkce dvou proměnných je parametr zakomponován do argumentu zadávané funkce. Osvojované dovednosti se pak především týkají využití derivací, gradientu, totálního diferenciálu a Taylorova polynomu. V úloze z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je analytické řešení dané rovnice porovnáváno s numerickým řešením metodami Rungovými-Kuttovými.

Třetí semestr výuky matematiky je věnován integrálům funkcí dvou, resp. tří proměnných. Úlohy zadávané v rámci samostudia obsahují příklady na výpočet statických momentů, těžiště a momentů setrvačnosti. Parametrem pro individuální zadání těchto úloh jsou různé funkce hustoty.

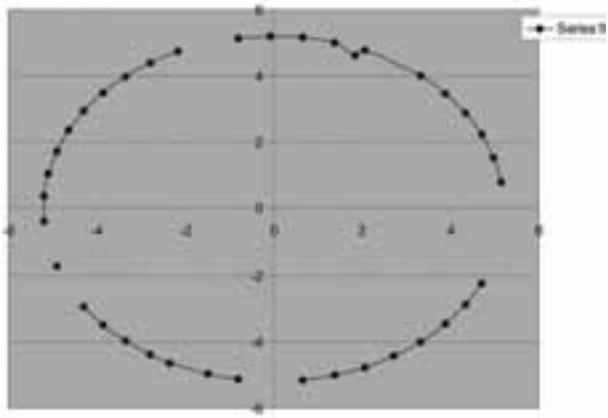
V samostudijních úlohách čtvrtého semestru výuky matematiky se probírané řady funkcí aplikují jednak na integrály řešené ve druhém semestru a jednak na řešení diferenciálních rovnic 2. řádu, např. Legendreova, Čebyševova, Laguerrova rovnice.

Po absenci matematiky v pátém semestru, je šestý semestr věnován numerickým metodám v geodézii. Úlohy z numerické matematiky jsou velmi vhodné

pro parametrické zadávání, jak je patrné ze zadání a následné ukázce kontroly *Úlohy o Keplerově rovnici.* V Keplerově rovnici $E = M + e \sin E$ pro excentrickou anomálii E dráhy planety při daném zploštění e a hlavní poloose a počítá každý student pro jemu přidělený úhel průvodiče střední anomálie M, určený pořadovým číslem ve studijní skupině, polohu planety.

Řešte Keplerovu rovnici pro dráhu Jupitera (23. 8. 1996): $a = 5{,}203\,3\,\mathrm{AU}$, $e = 0{,}048\,4$ *a* $M = 8^\circ k$, $k = 1, \ldots, 44$.

Pro následnou kontrolu stačí vypočítané hodnoty vynést do grafu eliptické dráhy planety, jak ukazuje grafické znázornění na obr. 1, na kterém je vidět i třetí Keplerův zákon.



Obr. 1

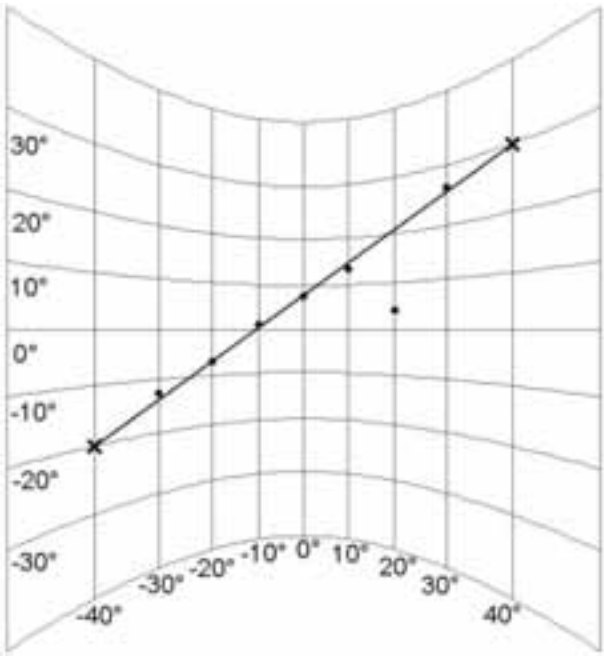
2.2 Geometrie

Obsah jednosemestrálního předmětu Konstruktivní geometrie se skládá ze čtyř tématických celků: názorné zobrazování zemské sféry včetně její kartografické sítě, geodetické křivky, geometrie azimutálních kartografických projekcí a sférická trigonometrie a její aplikace v geografii a astronomii. Grafické práce, zadávané studentům v rámci samostudia, rozšiřují dané téma nebo vhodně kombinují znalosti a postupy více témat dohromady. Snahou je, aby zadání většiny těchto prací obsahovala i individuální složku.

Příkladem zadání jedné dvoutematické úlohy je úloha *O ortodromě.* Každý student na jemu přiděleném patnáctistupňovém pásmu zeměpisné délky, určeném přiděleným celým číslem, počítá zeměpisnou šířku koncového bodu ortodromy procházející daným pásmem (aplikace sférické trigonometrie). Výsledný bod potom vynese do mapy sestrojené gnómonickou projekcí (vlastnosti azimutálních kartografických projekcí).

Uvažujte, že Země je sféra o poloměru $R = 6\,370\,\mathrm{km}$ *a zeměpisné souřadnice místa A jsou* $[m^\circ, V^\circ = (2k-1) * 5^\circ]$. *Určete zeměpisnou šířku místa B, jestliže jeho zeměpisná délka je* $V^\circ + 15^\circ$ *a azimut ortodromy spojující obě místa je v místě A roven* n°. *Do dané společné mapy sestrojené gnómonickou projekcí vyneste zjištěné souřadnice bodu B, porovnejte se správným řešením a zdůvodněte případné odchylky od správného řešení.*
$k = -4, \ldots, 2, m, n$ *tabelizováno pro dané* k

Na mapě sestrojené gnómonickou projekcí se ortodroma zobrazuje jako úsečka. Leží-li tedy studentem vypočítaný bod mimo úsečku, sestrojenou při kontrole výsledků samostatné práce, je zřejmé, že při výpočtu bodu došlo k chybě. Výsledek kontroly ukazuje obr. 2.



Obr. 2

3 Závěr

Učitelé podílející se na řízení samostudia se shodují v závěru, že kontrola a hodnocení prací zadaných s vhodně zvolenými parametry, umožňujícími společnou jednorázovou kontrolu výsledků, které se účastní i studenti, kteří práci vypracovávali, nijak nadměrně nezatěžuje standardní průběh výuky a konzultačních

hodin. Společná kontrola výsledů se zdá být i pozitivním motivačním faktorem pro většinu studentů. Diskuze při společné kontrole výsledků pak učiteli i studentům samotným může pomoci odhalit ne zcela správně osvojenou část učiva, pokud existuje. Z této diskuze také mohou vzejít témata vhodná například k dalšímu samostudiu, nebo k individuálnímu zpracování do studentské Vyčichlovy soutěže, jako téma ročníkové práce, viz [2], či dokonce jako téma budoucí práce bakalářské.

Literatura

[1] KOČANDRLOVÁ, M., LAKOMÁ, H. Řízení samostatné práce bakalářů v matematice. In *Sborník 28. konference VŠTEZ.* Rožňava : JSMF a JČMF, 2004, s. 179–186.

[2] KOČANDRLOVÁ, M., LAKOMÁ, H. Projekt – samostatná práce studenta. In *Sborník 9. setkání učitelů matematiky.* Plzeň : Vydavatelský servis, 2004, s. 133–138.

Počátky diferenciálního a integrálního počtu ve školské matematice

Alena Kopáčková

Abstrakt

Popisován je jeden z prvních pokusů o zařazení základů matematické analýzy do školské matematiky v českých zemích. Je připomenuta zajímavá osobnost Václava Šimerky, jehož text z r. 1863 je pokládán za první českou učebnici diferenciálního a integrálního počtu.

1 Úvod

Za období vzniku diferenciálního a integrálního počtu je považován přelom 17. a 18. století, přičemž největší zásluhy jsou zde přičítány Newtonovi (1643–1727) a Leibnizovi (1646–1716). Newton s Leibnizem však nebyli první, kdo studovali změny proměnných veličin, zabývali se geometrickými křivkami a řešili úlohy spadající svým charakterem do matematické analýzy. Již od dob antiky se učenci pokoušeli na konkrétních příkladech o popis různých mechanických pohybů, vyšetřovali křivky a snažili se zformulovat kinematické zákony jejich vzniku, počítali obsahy různých obrazců a objemy těles. Používali při tom důmyslné infinitesimální techniky, ale na rozdíl od obou zakladatelů matematické analýzy je aplikovali vždy na konkrétní příklady funkcí, křivek, obsahů a objemů. Newton s Leibnizem byli první, kdo (nezávisle na sobě a s použitím různých přístupů) překonali bariéru mezi konkrétním a obecným a zformulovali obecné diferenciální a integrální procedury použitelné pro jakoukoliv funkci zadanou analyticky. D'Alembert (1717–1783) pak později přidal definici derivace pomocí $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, přičemž dnes obvyklou $\varepsilon - \delta$ definici limity začal používat v 19. století až Weierstrass (1815–1897).

Bude nás zajímat, jak se tyto změny v matematice-vědě odrazily ve školské matematice[1], a povšimneme si v této souvislosti pozoruhodné osobnosti české matematiky Václava Šimerky.

[1] Školskou matematikou rozumíme matematiku odpovídající dnešní základní a střední škole.

2 Vstup matematické analýzy do školské matematiky

Dvě století trvalo, než nově vzniklá matematická disciplína pronikla do školské matematiky. Diferenciální a integrální počet se nejprve stal součástí univerzitních kurzů matematiky – věhlasná byla v té době učebnice „Elementa calculi differentialis et integralis“ profesora Stanislava Vydry (1741–1804), která vyšla r. 1783 v Praze i Vídni.

K masivnějšímu pronikání základů analýzy do matematiky na střední škole docházelo v Evropě až po setkání německých přírodovědců v Meranu v r. 1905, kde Felix Klein (1849–1925) prohlásil za osu vyučování v matematice tzv. *funkční myšlení* a požadoval zařazení základů matematické analýzy do středoškolské matematiky. Tyto tendence se odrazily velmi brzy i v Rakousko-Uhersku. Školní rada Karel Zahradníček ve své přednášce „K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střední škole“ v r. 1906 zdůraznil význam zavedení základů matematické analýzy do školské matematiky slovy: *„Je velmi žádoucí, aby ve středoškolské matematice byl obsažen pojem funkce a prvky diferenciálního a integrálního počtu; je to nutné při moderním pojetí didaktiky matematiky, má-li odpovídat současnému vědeckému pojetí, a je to nutné i pro použití matematiky ve fyzice, která svým charakterem spadá do oblasti infinitesimální analýzy, jejíž metody zde mohou být jednoduše užity.“* (Citováno podle [6, s. 9]).

Pojem funkce a základy diferenciálního počtu se postupně stávaly součástí učiva matematiky na rakouské střední škole až po Merchatově reformě osnov z roku 1909. Při prosazování modernizace učiva matematiky v duchu meranského programu sehrála významnou roli Jednota českých matematiků (JČM), která sledovala reformní evropské hnutí ve vyučování matematice a vydávala učebnice – za zmínku stojí zejména učebnice Bydžovského a Vojtěcha z r. 1912.

Naším cílem je upozornit na jeden z dřívějších pokusů o zařazení základů matematické analýzy do vyučování v českých zemích.

3 Václav Šimerka

Václav Šimerka se narodil r. 1819 ve Vysokém Veselí. Po studiu na gymnáziu studoval filozofii v Praze a teologii v Hradci Králové. V r. 1845 byl vysvěcen za kněze a stal se kaplanem ve Žlunicích u Jičína. Složil zkoušku učitelské způsobilosti z matematiky a od r. 1852 studoval v Praze fyziku. Devět let pak vyučoval matematiku a fyziku na gymnáziu v Českých Budějovicích. Další učitelské působení mu nebylo umožněno, neboť upadl u školských úřadů v nemilost. *„Přes to, že učitelské působení jeho co do výsledku u žáků mělo úspěch vpravdě neobyčejný, neměl prý daru zalíbiti se rozhodujícím činitelům.“* (Citováno podle [5, s. 97], původní zdroj Ottův slovník naučný.) Od r. 1862 působil jako farář, nejdříve ve Slatině u Vamberka a od r. 1866 do r. 1886 v Jenšovicích u Vysokého Mýta. Zemřel r. 1887 v Praskačce u Hradce Králové, kde mu JČM postavila z prostředků

Obr. 1 Pomník Václavu Šimerkovi, Praskačka u Hradce Králové (autorčino foto z 10. 6. 2006)
Text:
„Zde odpočívá P. Václ. Šimerka, farář a mathematický spisovatel, 1819–1887.“
Na boku pomníku zleva:
„Svému čestnému členu“, zprava: *„Jednota českých mathematiků“*

speciální finanční sbírky jako jednomu ze svých prvních čestných členů v roce 1889 pomník.

Šimerka se vedle své služby církvi věnoval matematice a publikoval mnoho prací (zejména v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky vydávaném JČM). V r. 1858 vydal ve Vídeňské akademii věd práci „Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten“, v r. 1862 v Královské české společnosti nauk práci „Příspěvky k neurčité analytice“. Posledně jmenovaná práce je považována za první vědeckou práci psanou v českém jazyce. V r. 1863 vydal gymnaziální učebnici „Algebra čili počtářství obecné“, jejíž dodatek o diferenciálním a integrálním počtu je prvním česky psaným učebním textem matematické analýzy. Vzhledem k tomu, že v té době nebyly základy matematické

analýzy součástí osnov středoškolské matematiky, lze předpokládat, že tento text byl pouze doplňkovým či volitelným učebním materiálem. Text „Přídavek k algebře pro vyšší gymnasia“ vyšel samostatně v roce 1864.[2]

Dokladem Šimerkovy všestrannosti je práce „Síla přesvědčení – Pokus v duchovní mechanice“ vydaná r. 1881 česky a r. 1883 německy. Šlo o první pokus o aplikaci matematiky v psychologii a Šimerkova „Síla přesvědčení“ může být považována za předchůdce teorie subjektivní pravděpodobnosti, která se rozvíjela ve 20. a 30. letech 20. století díly Ramseye a Finettiho a zejména v 50. letech prací Savageho.

4 „Počátky počtu differenciálného a integrálného“

Výše uvedený název je podtitulem samostatného Šimerkova „Přídavku k algebře“ vydaného r. 1864 v Praze. Text má 56 stran a jeho součástí je 8 obrázků („obrazců“, jak uvádí Šimerka) na konci knihy. „Počátky počtu differenciálného a integrálného“ jsou co do rozsahu a úrovně srovnávány s Vydrovými učebnicemi z r. 1783 (viz [2, s. 244]). Učebnice je členěna do 6 kapitol:

I. Differencialy daných úkonů

II. Proměňování úkonů v řady

III. Úkony trigonometrické

IV. Taylorova poučka a její následky

V. Základy počtu integrálného

VI. Upotřebení počtu nekonečného v geometrii

Z mnohých odkazů na učebnici algebry, jíž je text doplňkem, lze usoudit, že jsou tam vysvětleny některé elementární pojmy analýzy, např. pojem funkce. Z textu vyplývá, že funkce je pojímána jako obecná analytická formule, nikoliv však konstanta.[3] Více si povšimneme první kapitoly věnované základům diferenciálního počtu.

4.1 Diferenciál funkce

Základním pojmem diferenciálního počtu u Šimerky je intuitivně zavedený pojem diferenciálu: *„Nesmírně čili nekonečně malá část, o niž spojitou proměnnou veličinu (x, y, z, atd.) růsti necháváme, jmenuje se differencial (lišné, rozčinek) veličiny této, a znamená písmenou δ před veličinu onu postavenou (δx, δy, δz, atd.)“* [7, s. 1]

[2] Na skutečnost, že Šimerkův „Přídavek k algebře“ je považován za první českou učebnici diferenciálního a integrálního počtu, mne upozornil kolega Karel Mačák, který mi také pomohl kopii tohoto textu v Univerzitní knihovně v Praze získat. Za jeho ochotu a pomoc mu velmi děkuji.

[3] Toto pojetí pojmu funkce je v duchu Eulerově (1707–1783).

Při zavedení pojmu se nevyužívá pojmů derivace ani limita. Šimerka předpokládá, že při změně nezávisle proměnné x o δx se změní závisle proměnná y o δy [7, s. 2]:

$$y + \delta y = f(x + \delta x). \tag{1}$$

Dalo by se očekávat, že nerozlišování skutečného přírůstku funkce $\Delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ a přibližného přírůstku daného diferenciálem δy bude mít za následek chybné závěry. Šimerka však to, že ztotožňuje Δy a δy a neuvažuje tak chybu aproximace přírůstku diferenciálem, vyvažuje sofistikovanou a obezřetnou prací s infinitesimálními veličinami tak, jak to bylo běžné např. u Newtona i Leibnize.[4] Výchozí úvaha je zobecněna i na funkci více proměnných.

Na intuitivní bázi (zanedbávání nekonečně malých veličin) je založeno i počítání s diferenciály. Ukážeme, jak je odvozen diferenciál součinu funkcí [7, s. 3]:

$$\delta(tu) = (t + \delta t)(u + \delta u) - tu = t\delta u + u\delta t + \delta t\delta u \tag{2}$$

Jelikož je součin dvou diferenciálů $\delta t\delta u$ nekonečně malý ve srovnání s každým z činitelů, je možné ho zanedbat. Získá se tak:

$$\delta(tu) = u\delta t + t\delta u \tag{3}$$

Srovnejme tento závěr se známým pravidlem pro derivaci součinu funkcí t, u: $(tu)' = ut' + tu'$ (popř. při obvyklém označení $(uv)' = u'v + uv'$). Diferenciály většího počtu činitelů jsou počítány podobně.

S využitím diferenciálu součinu a substituce $\dfrac{x}{y} = z$, $x = yz$ je odvozen podobně i diferenciál podílu. Diferenciály vyšších řádů jsou odvozovány na konkrétním příkladu polynomické funkce $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, přičemž *„v případu takovém zastupuje jedna proměnná např. y funkci kterous druhé čili x, při čemž si myslíme, že x o částky nekonečně malé a však stejné roste, tedy δx stálé a protož* $\delta^2 x = \delta(\delta x) = 0$ *jest.“* [7, s. 7] Všimněme si, že není užito pojmu konstanta.

Zde Šimerka poprvé upozorňuje na podíly $\dfrac{\delta y}{\delta x}$, $\dfrac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, $\dfrac{\delta^3 y}{\delta x^3}$, …, $\dfrac{\delta^k y}{\delta x^k}$, které nazývá prvním, druhým, třetím, …, k-tým *„odvozeným úkonem“* (čili derivací). *„Kde tedy o funkcích odvozených řeč jest, vyrozumívají se vždy differencováním povstalé.“* [7, s. 7]

5 Závěr

Šimerkova učebnice diferenciálního a integrálního počtu je odlišná od učebnic používaných dnes. Některá nyní běžně zařazovaná témata v ní chybějí úplně (např. vyšetřování průběhu funkce). Učebnice neobsahuje téměř žádné obrázky,

[4] Pokusem o rehabilitaci diferenciálního počtu v duchu jeho zakladatelů je Vopěnkova práce [9]. Pojmu zavedení derivace podle Newtona a Leibnize je věnován článek [4].

chybí jakékoliv grafy funkcí. Hlavním rozdílem ve srovnání s dnešními učebnicemi je, že derivace u Šimerky není základním pojmem diferenciálního počtu, je „úkonem odvozeným“ z diferenciálu, který je založen na intuitivních infinitesimálních kalkulacích bez použití pojmu limita. Šimerkova učebnice však podporuje naše přesvědčení, že i poměrně hluboké pojmy matematické analýzy lze ve školské matematice prezentovat v souladu s historickým vývojem intuitivnějším a přístupnějším způsobem.

Literatura

[1] EDWARDS, C. H. Jr. *The Historical Development of the Calculus.* New York, Heidelberg, Berlin : Springer/Verlag, 1979.

[2] FOLTA, J., a kol. *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století.* Praha : Nakl. ČSAV, 1961.

[3] KOPÁČKOVÁ, A. Fylogeneze pojmu funkce. In *Matematika v proměnách věků II. Dějiny matematiky.* sv. 16, Praha : Prometheus, 2001, s. 46–80.

[4] KOPÁČKOVÁ, A. Obyčejná derivace? In *Sborník příspěvků z mezinárodní konference Prezentace matematiky ICPM 2005.* TU Liberec, 2006, s. 129–136.

[5] PÁTÝ, L. *Jubilejní almanach JČSMF.* Praha : Prometheus, 1987.

[6] POTŮČEK, J. *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945, 2. díl.* Plzeň : Ped. fak. ZČU, 1993.

[7] ŠIMERKA, V. *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia.* Praha : Dr. E. Grégr, 1864.

[8] ŠIMERKA, V. *Síla přesvědčení – Pokus v duchovní mechanice.* Praha : Dr. E. Grégr, 1881.

[9] VOPĚNKA, P. *Calculus infinitesimalis (pars prima).* Praha : Práh, 1996.

Internetové odkazy:

[10] http://www.math.muni.cz/math/biografie/vaclav_simerka.html

[11] http://www.mff.cuni.cz/win.en/fakulta/lib/vystava/12.htm

Jak hledat překážky v porozumění nekonečnu

Magdalena Krátká

Abstrakt

Příspěvek se věnuje překážce jakožto nástroji pro uchopení porozumění nekonečnu jedincem. Naznačuje způsob vyhledávání překážek souvisejících se znalostmi o bodu a přímce, které na sobě jev nekonečna nesou a se kterými se zároveň žáci setkávají od počátku školní výuky. V článku jsou také navrženy možné aktivizující otázky, které mohou pomoci při prohlubování představ o nekonečnu, konkrétně v geometrickém kontextu.

1 Úvod

Nekonečno je velmi náročný a zároveň velmi důležitý matematický pojem. Díky vysoké míře abstrakce mají studenti různého věku (a mnohdy nejen studenti) nemalé problémy s jeho uchopením. Avšak z historie matematiky jako vědy je zřejmé, že právě formování názorů na nekonečno dokonale koresponduje s formováním samotné matematiky. Tedy že nekonečno je pro matematiku zásadní. Domnívám se, společně např. s D. Jirotkovou [5] nebo P. Eisenmannem [3], že rozvíjení představ napomáhá rozvoji osobnosti žáka a že porozumění nekonečnu odpovídá jistým způsobem kognitivní úrovni jedince.

V následujících odstavcích se seznámíme s tím, jak lze poznávat a rozvíjet porozumění nekonečnu prostřednictvím identifikování překážek a jejich překonávání. Stručně vymezíme pojem překážky a epistemologické překážky, navrhneme postup pro jejich identifikaci a navrhneme možné další aktivity.

2 Překážky, epistemologické překážky

Překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stálé a opakují se. K opakování dochází u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. „děti obvykle dělají tuto chybu“), a také v historii.

Překážkou[1] je znalost, nebo existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěně použít. V novém kontextu však znalost selhává a dává

[1] Podrobněji např. v [6].

špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření „lepší“ znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Zajímavé pro nás jsou tzv. epistemologické překážky. Ty se vztahují k samotnému procesu nabývání znalostí. Jsou to překážky, kterých se nemůžeme a ani bychom se neměli vyvarovat, neboť mají fundamentální formativní funkci pro danou znalost. Právě tyto můžeme nalézt v historii samotného pojmu.

3 Nekonečno

Nekonečno má mnoho různých projevů. Například pokud uvažujeme o přímce, můžeme se zaměřit na její délku či šířku či počet bodů, které na ní leží. Ve všech případech je jev nekonečna přítomen, ale cítíme, že pokaždé jinak. Již v 17. století jezuitský kněz Rodrigo de Arriaga (1592–1667) ve svých úvahách o nekonečnu rozlišoval tři formy nekonečna [8]: **nekonečno co do velikosti**, **nekonečno co do počtu** a **nekonečno co do intenzity**.

V geometrickém světě se zcela jistě setkáváme s první a druhou formou nekonečna. Třetí formu de Arriaga uvažuje v souvislosti se schopnostmi Boha, neboť Boží láska či moudrost je nekonečná. Náš seznam zbývá ještě doplnit o další podobu nekonečna[2], se kterou se v matematice setkáváme, a to **nekonečně malé veličiny**.

Budeme se blíže věnovat dvěma konkrétním pojmům matematiky, se kterými se žáci setkávají od počátku své školní docházky a které na sobě nesou jev nekonečna, a to pojmu přímka (nekonečná délka přímky) a bod (nekonečná malost bodu).

4 Hledání překážek v porozumění nekonečnu

Zamyslíme-li se, co může být největší překážkou pro pochopení nekonečna, pravděpodobně nás nepřekvapí, že je to znalost konečného. Právě s konečností máme mnoho zkušeností. Všechny děje, všechny objekty, všechny procesy, se kterými se v běžném životě setkáváme, jsou konečné. Mnohdy si ani neuvědomujeme, že využíváme právě znalosti o konečnosti. Například, některé vlastnosti konečných množin, jako „část je menší než celek“, kterou postuloval i Eukleides ve svých Základech, chybně přenášíme na nekonečné množiny a odmítáme výsledky, které nekonečné množiny přinášejí. Znalost, že část je vždy menší než celek, je

[2] Známými pojmy pro různé přístupy k nekonečnu jsou ‚pojetí potenciální‘ a ‚pojetí aktuální‘. Zajímavé je jejich srovnání s pojmy proces, koncept a procept, jak je definuje Tall [4].

správná, pokud pracujeme s konečným množstvím, ale nesprávná, pokud pracujeme s množstvím nekonečným. Vystavení této znalosti kontextu nekonečných množin dovoluje nejen charakterizaci toho, co je nekonečná množina, ale také dovolí hlubšímu porozumění konečným množinám. Znalost konečného splňuje tedy všechny požadavky kladené na překážku v porozumění nekonečnu.

4.1 Je delší přímka nebo polopřímka?

Do jaké míry dítě rozumí tomu, že přímka je nekonečně dlouhá? Můžeme očekávat, že tato znalost o přímce není rozhodně jednoduchá a že dítě musí překonat překážky. Jak mu můžeme pomoci? Lze se poučit z role paradoxů, kterou sehrály (a sehrávají) ve vývoji matematiky, a pokusit se navodit stav rozporu ve znalostní struktuře jedince. Mohou nám k tomu dopomoci i tzv. nekorektní otázky. V tabulce 1 jsou uvedeny možné odpovědi a znalosti, které k nim byly použity.

Tabulka 1 Otázka: *Je delší přímka nebo polopřímka?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Přímka je delší než polopřímka.	Část je menší než celek.
Nelze určit, která je delší.	Přímka i polopřímka jsou nekonečné. Část je menší než celek.
Obě jsou stejně dlouhé.	Přímka i polopřímka jsou nekonečné.

Se všemi z těchto odpovědí se setkáváme u žáků základních škol i u studentů středních škol. S odpovědí, že delší je polopřímka, jsme se nikdy nesetkali[3] a ani ji nepředpokládáme.

Z našeho hlediska je velmi důležitá druhá z odpovědí. Zde se jedinec do vnitřního konfliktu pravděpodobně již dostal. K navození rozporu i k jeho překonání lze pokračovat dalšími otázkami:

Která z polopřímek je delší?

Obr. 1

Máme dvě polopřímky. Jednu z nich rozdělíme na dílky (jak je naznačeno na obrázku) a každý druhý dílek obarvíme. Je delší polopřímka AA' nebo obarvená část polopřímky BB'?

Obr. 2

[3] O experimentech podrobněji v [7].

Třetí polopřímku opět rozdělíme, ale na menší dílky a obarvíme každý druhý. Opět se ptáme, zda je delší obarvená část polopřímky BB' nebo obarvená část třetí polopřímky.

Tyto úvahy můžeme rozvíjet a následně konfrontovat jednotlivé odpovědi. Jednotlivé otázky se snaží přivodit konflikt, který je výše zmíněn jako rozpor dvou znalostí:

přímka i polopřímka jsou nekonečně dlouhé $\cdots$ *část je menší než celek.*

4.2 Jak je velký bod?

Nekonečno skryté v geometrickém bodu může být pro dítě ještě mlhavější než nekonečno nesené délkou přímky. Nekonečnost přímky lze přijmout snadněji, neboť ji necháváme zmizet mimo náš obzor. Avšak bod leží celý před námi a přesto může být nedosažitelný.

Cokoli, co známe z reálného světa, má nějaký rozměr. Ale i většina z toho, s čím se dítě setkává ve školské geometrii, má rozměr. Bod je něco, co s těmito objekty úzce souvisí, ale co tuto vlastnost nepřebírá. Žáci proto velmi často o bodu přemýšlí jako o významném místě jiného objektu, např. vrchol trojúhelníku, nebo ho ztotožňují s geometrickým obrázkem, např. tečkou.

Opět se pokusíme formulovat provokativní otázku, která by mohla vyvolat vnitřní konflikt, poté vyslovíme možné odpovědi a znalosti, které by k nim mohly vést.

Tabulka 2 Otázka: *Máme úsečku AB o velikosti* 5 cm. *Představme si (v hlavě), že ji rozstřihneme na menší a větší část v poměru* $2:3$. *Jaké geometrické objekty získáme? Pojmenujme je.*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Získáme dvě úsečky AC a CB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost I)
Získáme dvě úsečky AC a DB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost II)

S úsečkou jako rovnou čárou se dvěma krajními body pracuje už Eukleides a nepřipouští, že by krajní bod mohl chybět.

Tabulka 3 Otázka ad I): *Jak to, že bod C existuje dvakrát? Jak to, že je na dvou různých místech?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Jeden bod C přejmenujeme na bod D.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení.
Bod C jsme rozstřihli.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.
Oba body C jsou jediným bodem, jen je pokaždé umístěn jinde.	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).

Tabulka 4 Otázka ad II): *Kde byly body C a D původně na úsečce AB?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Body C a D byly těsně vedle sebe, úsečku jsme rozstřihli právě mezi nimi.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení. Body na úsečce lze jeden po druhém oddělovat.
Body C a D byly původně jediný bod na úsečce AB (překrývají se).	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).
Body C a D spojením vytvoří jediný bod na úsečce AB.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.

Otázky, předpokládané odpovědi a uvažované znalosti naznačují, že dítě, které řeší tento problém, se dostává na tenký led. Žák na ZŠ nemá prostředky pro řešení takových úloh, ale ani středoškolský student, který se setkal s otevřenými intervaly, často tuto zkušenost nepřenáší do geometrického kontextu úsečky. Žák je tak nucen pracovat se svými představami o úsečce a bodu. Některé jeho představy o objektech ho mohou dovést k takovým odpovědím, které budou pro něj samotného nepřijatelné, a tím motivovat snahu takové znalosti překonat.

Opět uvedeme možné navazující otázky, které problém dále rozvedou a zdůrazní rozpory.

Jestliže jsou body C a D těsně vedle sebe, ale jsou různé, existuje ještě něco mezi nimi? Pokud ne, existují tedy dva různé body, které nejde spojit úsečkou nebo neexistuje střed mezi nimi? Argumentace lze převést do aritmetiky, kdy úsečku nahradíme částí číselné osy a body čísly.

Jestliže se body překrývají, nepodařilo se úsečku rozstřihnout, protože dvě části, které vznikly, mají společný bod. Lze to udělat tak, aby byly rozstřižené?

Jestliže body C a D byly původně jediným bodem, který jsme rozstřihli, jak takový bod vypadá? A jak vypadá rozstřižením nově vzniklý bod?

Otázky mají navodit takový kontext, který by odhalil slabiny stávající znalosti – představě o bodu a úsečce a tak nejen upozornil na možnou překážku, ale ukázal směr, jak ji překonat.

5 Závěr

Tento příspěvek měl přiblížit pojem překážky, jakožto nástroje pro popis porozumění nekonečnu. Pozornost je věnována konkrétním znalostem o bodu a přímce souvisejícím s jevem nekonečna. Pokusili jsme se předpovědět, jaké znalosti by mohly hrát roli překážky, a formulovali jsme několik problémových otázek, které mohou posloužit jednak jako diagnostický nástroj, ale také jako prostředek k překonání překážek. Jev nekonečno byl vybrán proto, že jsme přesvědčeni, že nabízí

bohaté možnosti pro rozvoj myšlení jedince. Geometrický kontext byl vybrán proto, že se s ním dítě ve škole setkává již na prvním stupni, i když se zde vyskytuje nekonečno zpočátku implicitně. Proto lze dobře sledovat možné překážky, které mají tendenci se v čase opakovat.

Na závěr zdůrazněme, že cílem těchto úloh není, aby žák uspokojivě odpovídal na uvedené otázky, ale aby konfrontoval své znalosti a představy. Tedy jediným cílem je, aby přemýšlel a tím se rozvíjel. Zcela by naše snažení pozbylo smyslu, kdybychom mu odpovědi prozradili. Pak by překážka nemohla být překonána, pravděpodobně by se projevila později znovu.

Literatura

[1] BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Eds. Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., Warfield, V. Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] EUKLIDES. *Základy (Elementa).* Překlad Servít, F. Praha : JČMF, 1907.

[3] EISENMANN, P. *Propedeutika infinitesimálního počtu.* Ústí n. L. : Acta Universitatis Purkynianae, 2002.

[4] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* Praha : PedF UK, 1999.

[5] JIROTKOVÁ, D. Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 43, 4, 1998, s. 326–334.

[6] NOVOTNÁ, J., PELANTOVÁ, A., HRABÁKOVÁ, H., KRÁTKÁ, M. Příprava výukových situací. In Krátká, M. (ed.) *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let.* Sborník příspěvků. Plzeň : Vydavatelský servis, 2006, str. 151–173.

[7] PROKOPOVÁ, M. Students' Conception of a Point and its Relation to a Straight Line: A Comparison of Phylogenesis and Ontogenesis. In *Prace Naukove, Wyzsa Sokola Pedagogiczna, Matematyka IX.* Czestochowa : Wydawnictwo WSP, 2003, pp. 179–185.

[8] VOPĚNKA, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.* Praha : Práh, 2001.

Školní vzdělávací program nestačí jen napsat

Marie Kubínová

Abstrakt

Autorka příspěvku se dlouhodobě v teoretické i praktické rovině zabývá uplatňováním žákovských projektů ve vyučování matematice. V příspěvku popisuje v kontextu současné kurikulární reformy uplatňování žákovských projektů jako jednu z možných vzdělávacích strategií, které by mohly být aplikovány při realizaci školních vzdělávacích programů v praxi.

1 Proměna tradiční školy

Podle *Bílé knihy* [4, s. 10–12] znamená zavedení *konceptu celoživotního učení pro všechny* hlubokou proměnu vzdělávacího systému, která je, pokud by byla realizována v předpokládané šíři, stejně radikální, jako bylo před dvěma sty lety zavádění povinné školní docházky v počátcích průmyslové revoluce. Tato proměna se týká jak vztahu *jedinec – vzdělávací systém*, tak vztahu *vzdělávací systém – společnost*. Spočívá na několika hlavních principech. Jedním z nich je princip **proměny tradiční školy**. Kurikulární reforma by měla vést k takové změně celkového klimatu školy, aby se hlavním úkolem školy stalo vytvoření pevných základů pro celoživotní učení jejích žáků. Přitom se očekává, že **každá škola bude mít svůj vlastní školní vzdělávací program** (dál jen ŠVP), který jí umožní s přihlédnutím k jejím konkrétním podmínkám vybavit své žáky nezbytnými nástroji pro to, aby byli schopni realizovat v praxi takto pojaté učení a aby byli k takovému učení **soustavně motivováni**, což:

- znamená, že ŠVP by měl být sestaven tak, aby vzdělání mělo pro všechny žáky dané školy smysl a osobní význam,
- vyžaduje nejen *změny obsahu vzdělávání, metod a forem výuky*, ale i *změnu klimatu a prostředí školy*, které se projeví na více úrovních: v charakteru vztahu mezi učitelem a žákem, který by měl být založen na partnerství a vzájemném respektu, v důrazu na výchovnou funkci školy a rozvíjení interpersonálních a sociálních vztahů, v rozšíření příležitostí k aktivní a tvořivé činnosti, v utváření školní komunity jako modelu demokratické společnosti.

Z povahy matematiky jako vědy zřejmě vyplývá obecně přijímaný názor, že v matematice je více než v jiných vyučovacích předmětech (vzdělávacích oblastech) školní vzdělávání „objektivizujícím předáváním toho, co je v učebnicích a osnovách“ [1, s. 37]. Na tom je založen přístup k motivaci, osvojování poznatků a hodnocení ve vyučování matematice. Ty jsou vesměs chápány pouze z pozice žáka, který má jediný úkol – naučit se tomu, co je mu „v dobré víře“ (podloženo platnými pedagogickými dokumenty, v budoucnu tedy mezi ně může patřit i ŠVP, a osobní zkušeností učitele) předkládáno. Základními znaky takto pojatého přístupu k vyučování jsou:

- *formálnost* – učitel se přímo nebo prostřednictvím učebnice (nebo v budoucnu ŠVP) odvolává na význam matematiky pro žáka a pro nejrůznější lidské činnosti, aniž k tomu poskytuje žákovi přijatelné důkazy (např. proč nejde jen o konstatování stavu věcí nebo proč je právě tento postup pro žáka nejvýhodnější),
- *nátlakovost* – je jen na zodpovědnosti žáka, jak se bude učit tomu, co bylo pro něj ve škole interpretováno z matematických poznatků transformovaných do učebních osnov (ŠVP) a učebnic,
- *jednostrannost* – veškeré motivační a hodnotící snahy jsou soustředěny především na vnější motivaci žáka.

Obecně je pro naši současnou školu podle některých našich šetření (např. [2]) stále charakteristická **dominance poznatkové složky kurikula** a **absence složek zaměřených na rozvoj klíčových kompetencí žáků včetně kompetencí sociálních a komunikativních**, což podle našeho názoru nevytváří příliš dobré vstupní podmínky pro uvádění ŠVP do praxe.

To se při aplikaci kurikula do podmínek konkrétní školy při tradičně vedeném vyučování matematice projevuje jako:

- **dominance** poznatkové složky založená na odosobněném předávání matematických poznatků a dovedností v sevřené a vypreparované podobě pouček, vzorců, příkladů a cvičení (vycházející z mechanického uplatňování kurikula a učebnice, popř. metodických příruček pro učitele a pracovních sešitů pro žáky, v budoucnu by to mohly být různé vzorové ŠVP a metodické příručky pro práci se ŠVP ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace),
- **absence** složek zaměřených na rozvoj klíčových kompetencí, které jsou součástí celkové vzdělanosti žáků (např. osvojování metod, jak se učit (matematice), jak zpracovávat informace a měnit je ve znalosti a aplikovat) a na rozvoj sociálních a komunikativních kompetencí (např. kooperace nebo schopnost řešit problémy a jednat s větší autonomií na základě samostatného úsudku).

2 Uplatňování žákovských projektů jako vzdělávací strategie

Realizace kurikulární reformy je založena na tom, že učitelé budou ve vyučování využívat takové metody, prostředky a formy práce, které jim poskytnou dostatečný prostor pro aktivizaci žáků, pro rozvoj jejich kompetencí a kapacit. Rámcové vzdělávací programy předpokládají uplatňování interdisciplinárních vztahů i aplikaci průřezových témat. Pokud ale všechno zůstane pouze v úrovni proklamací a **učitelé nepřijmou školní vzdělávací program své školy za svůj** (bez zřetele na to, zda se na jeho přípravě podíleli nebo ne), potom ani sebelépe sestavený ŠVP žádoucí změny nezajistí.

Naše dlouhodobé výzkumy i zkušenosti z přímého vyučování, ukazují, že jednou z metod, která výše uvedené požadavky splňuje, je *projektová metoda* založená na využití *žákovských projektů* ve vyučování. Pozitivní výsledky v aktivizaci našich žáků se staly hlavním důvodem, proč jsme se začali před více než patnácti lety (bez ohledu na institucionální zabezpečení) otázkami projektů a projektového vyučování zabývat hlouběji včetně konstrukce nových projektů. Radost ze společné práce na projektech, pocity úspěchu, které přitom zažívali i velmi slabí žáci, a později také celkové zlepšení školních výsledků našich žáků, nás přivedly k tomu, abychom se soustředili na *uplatňování žákovských projektů ve vyučování* jako na *vzdělávací strategii*, která vyhovuje požadavkům moderní doby na vzdělávání.

Vycházíme-li z toho, že současná reforma naší školy (založená na konstrukci školních vzdělávacích programů) by měla z našich škol **odstranit tradiční receptivní učení** odtržené od žáka a **hromadění extrémního množství poznatků**, pak můžeme na žákovské projekty nahlížet jako na jednu *z možných vzdělávacích strategií uplatňovaných při této reformě*. Tuto volbu mohou podle našich zkušeností podpořit následující důvody:

- kvalitně připravené žákovské projekty umožňují propojovat jednotlivé vzdělávací oblasti, pěstovat přirozenou cestou interdisciplinární vztahy a aplikovat průřezová témata,

- východiska pro konstrukci žákovských projektů je možno orientovat na zkušenosti žáka, žák si v průběhu práce na projektu neosvojuje již hotové předem uspořádané poznatky, ale je uváděn do situací, které umožňují, aby poznatky v jemu známých souvislostech konstruoval,

- vyučování prostřednictvím žákovských projektů je činnostní, vychází z předpokladu, že nelze od sebe odtrhávat poznání a činnost, svým badatelsko-výzkumným charakterem umožňuje učit žáky metodám poznávání, což je přinejmenším stejně důležité jako samo osvojování poznatků a podporuje významně koncept celoživotního vzdělávání,

- řešení žákovských projektů má silný motivační charakter, protože svou podstatou dovoluje žákům, aby šli za svými cíli svými vlastními cestami a aby výsledky své práce prezentovali na nejrůznějších úrovních,
- práce na projektech dovoluje žákům spojit poznání s prožitkem a smyslovým vnímáním, poznání skutečnosti se děje přirozenou cestou a na základě autonomní zkušenosti žáka,
- žákovské projekty jsou významným prostředkem pro utváření sebepojetí žáka, působí pozitivně na utváření jeho osobnosti.

Naplňování takových cílů vyžaduje [5, s. 5–6] podnětné a tvůrčí školní prostředí, které by mělo stimulovat nejschopnější žáky, povzbuzovat méně nadané, chránit i podporovat žáky nejslabší a zajistit, aby se každý žák prostřednictvím výuky přizpůsobené jeho individuálním potřebám uspokojivě vyvíjel vlastním způsobem. Přátelská a vstřícná atmosféra by měla vybízet žáky ke studiu, práci i činnostem podle jejich zájmu a poskytnout jim prostor a čas k aktivnímu učení a k plnému rozvinutí jejich osobnosti. Hodnocení výkonů a pracovních výsledků žáků by mělo být postaveno na plnění konkrétních a splnitelných úkolů, na posuzování individuálních změn žáka a pozitivně laděných hodnotících soudech. Žákům by měla být dána možnost zažívat úspěch, nebát se chyb a pracovat s nimi. To všechno práce žáků na projektech a její hodnocení v bohaté míře dovoluje, v obecné rovině to nikdo nepopírá, ale v konkrétní školní praxi se s tím setkáváme velmi málo. Žákovské projekty bývají vnímány jako doplněk nikoli jako organická součást vyučování. Uplatňují se především ve vyučovacích předmětech humanitního zaměření. Matematických poznatků je používáno zejména v aplikační rovině při zpracování dat. Výjimečně jsou žákovské projekty ve vyučování matematice užívány jako nástroj motivační, expoziční nebo diagnostický.

3 Jiný pohled na hodnocení žákovských výkonů

Mají-li se uskutečnit výše popsané změny v pojetí vyučování na druhém stupni základní školy, znamená to podle *Bílé knihy* [4, s. 34] především důsledný posun od *předávání „hotových“ poznatků* (systémů, přehledů a hodnot) ke *způsobům jejich hledání a nalézání*, posun od převažující *dominantní* role učitele jako zprostředkovatele učiva k využití *přirozené aktivity* žáků daného věku a jejich mimoškolních zájmů a znalostí a k vypracovávání *vlastních rozsáhlejších projektů a prací na základě vyhledávání a třídění informací.* Takového posunu však nebude možno dosáhnout, pokud nedojde ve škole k zásadní změně v přístupu k hodnocení žáků.

Podle našich zkušeností ale převažuje v současné době ve vyučování matematice na druhém stupni základní školy hodnocení žáka podle jeho okamžitého výkonu, přičemž formu prezentace (nejčastěji různě dlouhé písemné práce a ústní zkoušení u tabule) a čas určuje učitel. Běžné školní vyučování dává žákovi velmi

málo času a prostoru na to, aby mohl prezentovat výsledky své práce v situaci, která je pro něj příznivá, a formou, která mu vyhovuje. Kvalitu prezentace výsledků žákovy práce v běžném školním vyučování a následně i její hodnocení významně ovlivňuje:

- izolovanost v čase i prostoru (nejčastěji jsou předkládány dílčí výsledky práce v jednotlivých vyučovacích hodinách matematiky bez vzájemné vazby),
- formálnost (jako kvalitní bývá velmi často hodnocena prezentace výsledků v nacvičených schématech formou odpovědí na předem položené otázky),
- anonymita (jen ve výjimečných případech jsou výsledky školní práce žáků prezentovány jinde než před kolektivem vlastní třídy),
- restrikce na prezentaci konečných výsledků práce žáků bez poskytnutí prostoru žákovi, aby ukázal, jakých dílčích úspěchů dosáhl, v čem se zlepšil, čemu se naučil mimo povinné kurikulum apod.

Takovému přístupu k vyučování dobře odpovídá hodnocení žákovy práce „známkou“. V matematice se tato alternativa nabízí o to více, že je takové hodnocení (formativní i sumativní) považováno tradičně za objektivní a snadno kontrolovatelné. To vše pak podle našeho názoru výrazně poznamenává postoj mnoha učitelů matematiky k slovnímu hodnocení žáků, které se v těchto souvislostech jeví jako nadbytečné. V běžné vyučovací hodině vyslovují učitelé jen málo hodnotících soudů, které nejsou pouze identifikací chyby, které se žák dopustil. Neprobíhá dialog mezi učitelem a žákem (žáky) a nejsou připravovány podmínky pro sumativní slovní hodnocení. Má-li se budoucnu ve vyučování matematice více uplatnit slovní hodnocení žáků, znamená to podle našeho názoru změnu klimatu, ve kterém se vyučování matematice odehrává, směrem k větší otevřenosti a důrazu na proces nabývání vědomostí a dovedností.

Naše zkušenosti s uplatňováním žákovských projektů ukazují, že je **nejen možné, ale i nutné** ve vyučování matematice využívat sumativní slovní hodnocení jako kvalifikovanou výpověď (se všemi prvky, které k tomu patří) o tom, jak hodnocený žák:

- získává nové zkušenosti, poznatky a schopnosti (včetně schopnosti učit se matematice) pomocí různých prostředků a různými cestami, které ne vždy musí vést přímo k cíli, ale které mu dovolují konstruovat si své vlastní poznání (tj. hodnotíme to, jakými cestami žák matematické pojmy, jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi, postupy, ... „objevil“, nikoli jak důkladně umí mentorovat jejich definice),
- vyrovnává se s reálným problémem prostřednictvím dostupných prostředků, kterými ale nejsou „hotové“ poznatky z povinného kurikula, ale především jeho stále se rozvíjející učební schopnosti a dovednosti (tj. zda se

žák učí nejen nasloucháním a čtením textu, ale zda řeší problémy, modeluje, experimentuje, zobecňuje atd. sám nebo v kooperaci, zda si přitom osvojuje různé metody, jak se učit, jak pracovat s informacemi, jak měnit informace ve znalosti a jak je aplikovat),

- využívá zpětné vazby ke korekci práce ve vazbě na překážky, které se při řešení problému (úlohy) vyskytnou, zda otevřeně komunikuje s ostatními, jak zvládá konflikty a respektuje odlišné názory na postup řešení daného problému (úlohy), zda pracuje samostatně i ve skupinách různého typu, zda si uvědomuje osobní odpovědnost za postup řešení problému a umí kriticky hodnotit výsledky své práce v prostředí, kde je korektnost vztahů dána podstatou matematiky jako vědy,
- přistupuje k pojmům, dovednostem, ... mimo okruh povinného kurikula (tj. zda tak činí z vlastní vůle a přirozenou cestou, např. objevováním dalších vlastností objektů, kterými se zabýval v povinném kurikulu, nebo zkoumáním problémů, které vyplynuly jako původně neplánovaný výsledek řešení úlohy),
- aktivně se střetává se světem mimo školu i za cenu prvotních neúspěchů a jak je schopen propojovat tento svět se světem školy, integrovat ve svém poznávání školní a mimoškolní svět (tj. zda se matematika stává pro žáka účinným nástrojem řešení reálných problémů a přestává být světem sama pro sebe),
- umí uplatnit své individuální zvláštnosti (tj. zda je žák schopen postupovat svým tempem a své handicapy v některé oblasti kompenzovat svými přednostmi v jiné oblasti).

4 Reformu nedělají programy, ale učitelé

Vše, co bylo výše řečeno, můžeme doložit mnoha, jak se dnes často říká, **příklady dobré praxe**. Naše první úspěchy se však nedostavily hned. Žáci i učitelé všechny proměny akceptovali postupně a pomalu. Významnou roli přitom hrálo celkové klima školy, vzájemné vztahy mezi jednotlivými učiteli i přístup vedení školy. Naše zkušenosti (např. katalog projektů v [2] nebo úlohy v [3]) ale mohou být pouze inspirací. A sebelépe sestavený ŠVP může zůstat pouze institucionálním zabezpečením proměny konkrétní školy, která se ve skutečnosti vůbec nebude konat, protože se učitelé s takovou proměnou neztotožnili nebo tak učinili pouze formálně.

Proto je nezbytně nutné vybavovat učitele matematiky příklady dobré praxe i kvalitními materiály, posilovat jejich sebedůvěru i přesvědčení o nezbytnosti změn a využít všech možností (takovýchto setkání, dalšího vzdělávání učitelů, písemných materiálů, ...) k jejich přípravě na to, aby převzali svůj díl zodpovědnosti za realizaci ŠVP na svých školách.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu GAČR 406/05/2444.

Literatura

[1] HELUS, Z. Čtyři teze k tématu „změna školy“. *Pedagogika*, 2001, roč. 51, č. 1.

[2] KUBÍNOVÁ, M. *Projekty (ve vyučování matematice) – cesta k tvořivosti a samostatnosti.* 1. vyd. Praha : Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, 2002.

[3] KUBÍNOVÁ, M. *Klíč k matematice (Přijdu na to sám).* 1. vyd. Praha : Albatros, 2005.

[4] MŠMT. *Národní program vzdělávání v ČR. Bílá kniha.* Praha : Tauris, 2001.

[5] RVP ZŠ

Možnosti využití počítače k podpoře výuky geometrie na technických fakultách

Miroslav Lávička, Jaromír Dobrý

Abstrakt

V příspěvku je diskutováno zařazení variační geometrie do výuky na technických fakultách Západočeské univerzity (ZČU) v Plzni. Využití programu Cabri *do výuky na základních a středních školách je dnes již poměrně běžné. Při citlivém výběru úloh se však tento planimetrický software dá úspěšně využít i při modelování složitějších konstrukcí na technických vysokých školách. V druhé části příspěvku je prezentován program* 3D Geometrie *sloužící k nácviku algoritmizace stereometrických úloh.*

1 Úvodem

V uplynulých letech proběhlo na Západočeské univerzitě v Plzni významné zvýšení podílu elektronické podpory výuky geometrických předmětů, u nichž buďto došlo ke snížení kontaktních hodin, anebo jejichž elektronickou podporu si vyžádalo zařazení do učebních plánů studentů kombinovaného (distančního) studia. Na serveru oddělení geometrie katedry matematiky FAV ZČU v Plzni (http://geometrie.kma.zcu.cz) lze nalézt elektronickou podporu téměř všech předmětů geometrického kurikula nabízených studentům Fakulty aplikovaných věd, Fakulty pedagogické, Fakulty strojní a Ústavu umění a designu – hlavní náplň se nachází v sekci *Materiály pro studenty* a *Zajímavé odkazy.* Jako příklad modernizace výuky uvedeme v tomto článku zařazení počítače do standardního kurzu geometrie na Fakultě strojní – předměty *Geometrie pro FST 1* a *Geometrie pro FST 2* (podrobné sylaby na http://stag.zcu.cz).

2 Zařazení variační geometrie do výuky

Programy jako Cabri, Sketchpad či Cinderella představují produkty dynamické *planimetrie* a nejsou tedy primárně určené pro modelování konstrukcí v trojrozměrném prostoru. Pochopitelně i zde můžeme bez problémů aplikovat známé metody deskriptivní geometrie a provádět stereometrické konstrukce s využitím průmětů. Výhoda zařazení výše uvedených programů do výuky se však naplno

projevuje až při řešení složitějších úloh a zejména pak při opakovaném provádění elementárních konstrukcí (např. bodové konstrukce meridiánů rotačních a šroubových ploch, sestrojování charakteristik obalových ploch, konstrukce průniků těles, řezy na plochách apod.).

Na Západočeské univerzitě v Plzni se v řadě geometrických předmětů s úspěchem využívá software dynamické geometrie Cabri Geometry II Plus, jehož výhody již dnes snad ani není nutné vyjmenovávat, neboť jde o produkt všeobecně známý a na školách poměrně rozšířený. Pouze připomeňme, že velkým kladem programu je tvorba makrokonstrukcí (program lze doplňovat o další konstrukce složené z konstrukcí elementárních) a dále funkce `Množina`, pomocí níž lze generovat množiny objektů určené pohybem bodu po jiném objektu. A této funkce lze s úspěchem využit právě u bodových konstrukcí objektů, kdy volbou *jednoho* bodu na zadaném objektu sestrojíme jeden bod hledaného objektu a následně místo několikerého (a pro studenty z jejich pohledu nezajímavého) opakování stejné konstrukce použijeme zmiňovanou funkci `Množina`, čímž se vykreslí celý hledaný objekt.

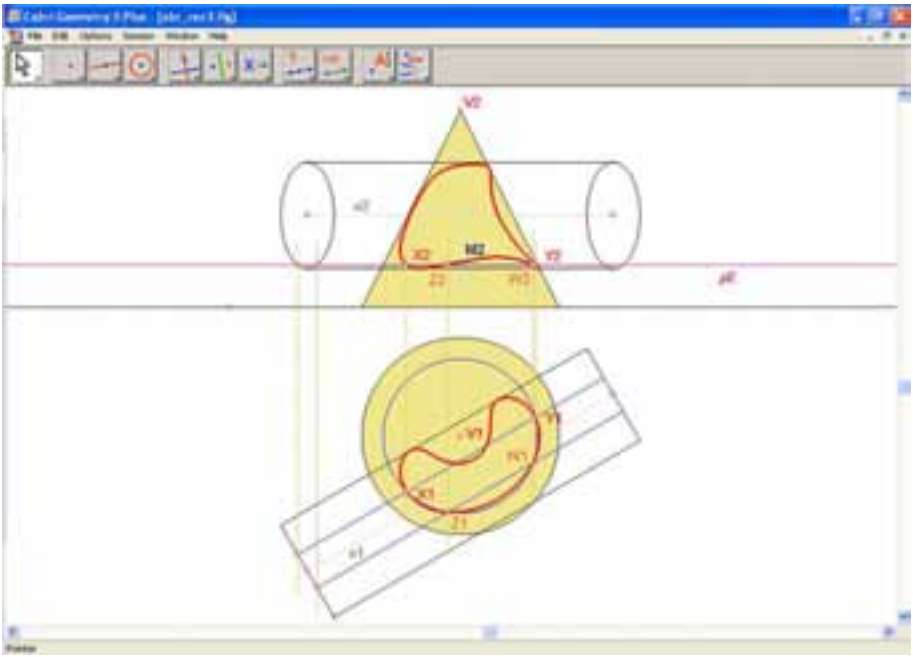
3 Když CABRI pomáhá i vysokoškolským studentům

Oblíbenost CABRI na školách základních a středních je známá. Není však důvod nevyužít výhod dynamické geometrie při vizualizaci geometrických konstrukcí i na školách vysokých. Následující úlohy zastupují konkrétní typy úloh, s nimiž se studenti Fakulty strojní ZČU v Plzni setkávají v rámci povinných geometrických předmětů KMA/GS1 (1. semestr, rozsah $2 + 2$) a KMA/GS2 (2. semestr, rozsah $2 + 1$). Celý proces výuky probíhá tak, že na cvičení je úloha prováděna jednak klasicky cvičícím na tabuli a studenty do předtisků a dále je navíc souběžně promítáno krokování úlohy řešené v Cabri. Výhoda je zřejmá – v případě, že se některý student v postupu ztratí, stačí se vrátit (bez mazání, škrtání či zakrývání) o krok zpět a problematickou část konstrukce tápájícímu studentovi znovu vysvětlit. Všechny vyřešené úlohy (tj. Cabri soubory *.fig) jsou pochopitelně vystaveny na webovských stránkách katedry a studenti se k nim kdykoliv mohou vrátit a konstrukce si znovu v klidu „přehrát“.

Úloha 1. Sestrojte průnik rotačního válce a rotačního kužele, jejichž osy jsou mimoběžné a kolmé.

Princip řešení. Úloha je lokalizována tak, že podstava kužele leží v půdorysně. Na ose kužele zvolíme bod M, kterým vedeme pomocnou rovinu ϱ rovnoběžnou s půdorysnou. Tato rovina protíná rotační kuželovou plochu v rovnoběžkové kružnici a válec v obdélníku. Společné body získané kružnice a obdélníku (je jich max. 8 – označme X, Y, Z, W, ...) náležejí průsečné křivce obou zadaných ploch. Volbou dalšího bodu M a opakováním následných konstrukčních kroků získáváme další body průsečné křivky.

Řešení v CABRI. Úlohy, jejichž řešení jsou založena na bodových konstrukcích, tj. algoritmy typu „*... opakováním kroků x až y dostáváme jednotlivé body řezu (popř. meridiánu, charakteristiky apod.)...*“ jsou z principu velmi vhodné pro zpracování v programech dynamické geometrie. Pomocí těchto programů lze totiž velmi snadno a velmi přesvědčivě (funkce `Množina`) demonstrovat opakující se konstrukce založené na témže konstrukčním postupu, přičemž výsledný efekt je zpravidla mnohem větší než při provedení konečného počtu kroků standardní cestou – na obr. 1 je vidět řešení uvedené úlohy v programu CABRI (bod M na ose kužele je základním bodem *množinové konstrukce*; vykreslená průniková křivka je generována body X, Y, Z, W, ...).



Obr. 1 Řešení stereometrické úlohy v CABRI

4 O rozměr více – 3D Geometrie

Přestože řešení stereometrických úloh prostředky dynamické planimetrie je možné za pomoci metod deskriptivní geometrie, není to úplně vhodné k výkladu použitých metod a principu konstrukce. V dvourozměrném případě řešení dílčích problémů zobrazovacích metod zakrývá skutečnou myšlenku postupu. Je tedy vhodné pro potřeby výuky deskriptivní geometrie najít podobný nástroj,

který by ale oproti Cabri umožnil přehledně zpracovávat prostorové konstrukce. Přestože existuje varianta Cabri 3D, ukázalo se, že pro naše účely bude nejlepší vytvořit zcela novou aplikaci nazvanou *3D Geometrie*. Základními požadavky na program 3D Geometrie byly:

Jednoduchost ovládání – Co nejméně ovládacích prvků, pokud možno jasný význam. Student se nemá učit specializovaný software, ale pochopit problém.

Přehlednost zobrazení – Program má sloužit k pochopení problému, je tedy třeba se zamyslet nad tím, aby konstrukce byla zobrazena co nejpřehledněji. Je také bezpodmínečně nutné, aby konstrukci bylo možné krokovat, podobně jako je tomu v Cabri.

1 : 1 se základními úlohami Mongeovy projekce – Pokud má program sloužit k nácviku algoritmizace, je nutné, aby si student zvykl na fakt, že má k dispozici určitou omezenou množinu konstrukcí, které smí použít k řešení problému. Pouze tato omezená množina je mu zpřístupněna. Tak se snažíme docílit toho, aby student nevymýšlel postupy, které jsou založeny pouze na jeho, často chybné, intuici.

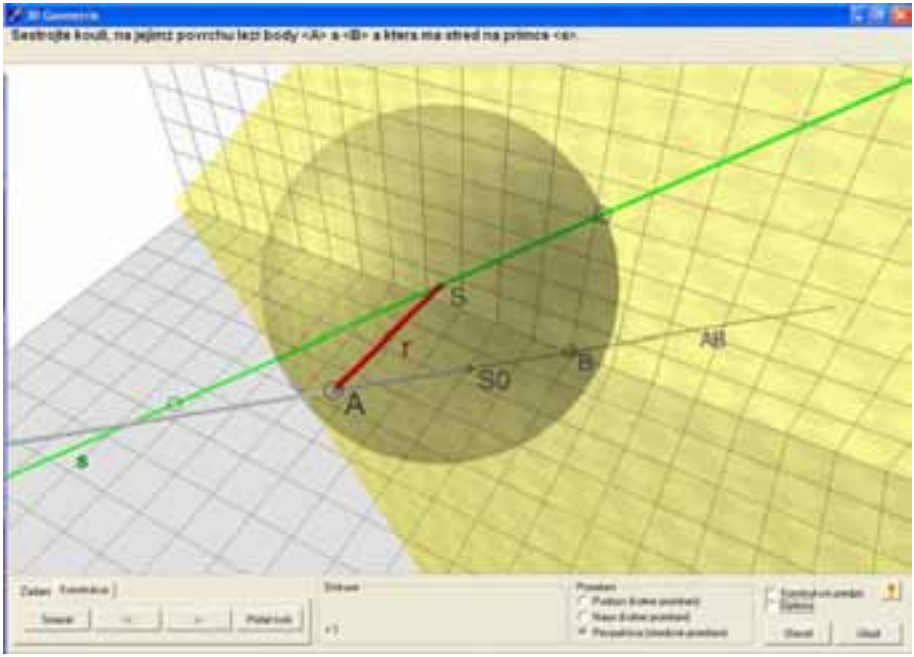
Variační geometrie – Možnost měnit zadání a sledovat, jak se v důsledku těchto změn bude chovat celá konstrukce. Tato vlastnost je klíčová pro to, aby student mohl okamžitě zavrhnout nesmyslný postup, který náhodou funguje pro jednu konfiguraci zadání, ale obecně ne. Zkracuje se tím doba, za kterou se dozví, že udělal chybu. Dříve se tento fakt student měl šanci dozvědět až na konzultaci, v horším případě dokonce až u zkoušky.

Východiskem se tedy zdá být jednoduchá aplikace, která zobrazí konstrukci přímo ve 3D, např. v perspektivní projekci, jež byla zvolena z důvodu její názornosti. Nutností je pochopitelně možnost pohybovat kamerou, dále též možnost měnit zadání úlohy, čímž uspokojíme požadavek variační geometrie. Nejsou potřeba žádné numerické vstupy, které by v tomto případě pouze zvyšovaly počet ovládacích prvků. Krokování konstrukce je prováděno dvěma tlačítky (dopředu, zpět) tak, jak očekáváme. Vše se tedy orientuje na jednoduchost použití. Typické použití programu lze demonstrovat na následující jednoduché stereometrické úloze.

Úloha 2. V prostoru je dána přímka s a body A, B. Sestrojte kulovou plochu κ, která prochází body A, B a jejíž střed leží na přímce s.

Princip řešení. Kulová plocha κ se středem S a poloměrem r je množina všech bodů prostoru, které mají od bodu S stejnou vzdálenost r. Speciálně tedy $|AS| = |BS|$, neboli bod S leží v osové rovině ϱ úsečky AB. Sestrojíme tedy ϱ, dále průsečík $S \in s \cap \varrho$, což je střed kulové plochy κ. Zbytek je zřejmý.

Řešení v programu 3D geometrie. Vlastní konstrukci je možné v programu 3D Geometrie editovat jako posloupnost kroků, přičemž každý krok má několik vstupů a výsledek. Výsledek pak může být vstupem do jiného kroku konstrukce. Takto je vytvořen jednoduchý objektový model konstrukce. Do budoucna se počítá s určitými rozšířeními, např. možnost bodové konstrukce apod.

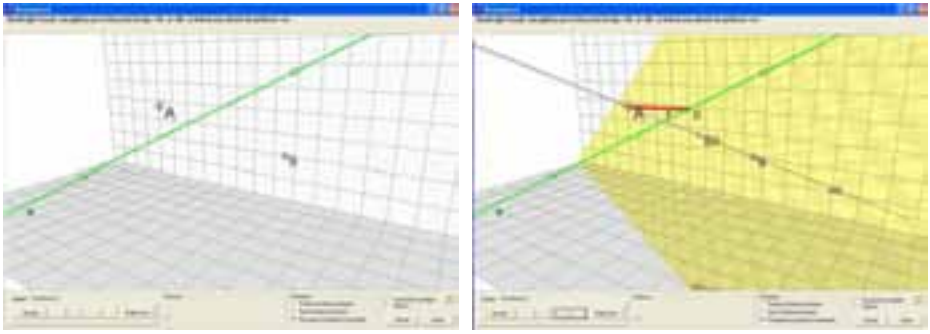


Obr. 2 Řešení v programu 3D Geometrie

Na obr. 3 vidíme jednotlivé kroky řešení úlohy. Výsledné řešení je na obr. 2. Princip variační geometrie zde přináší ještě zajímavější a názornější pohled, než je tomu v případě použití pouze dvourozměrného Cabri.

5 Závěrem

Zatímco výstupní požadavky na znalosti vysokoškolských studentů matematických a technických disciplín se stále stupňují, vstupní předpoklady díky redukci učiva geometrie a deskriptivní geometrie na středních školách silně zaostávají. Použití variační geometrie v základních geometrických kurzech na technických fakultách přináší nové možnosti v pojetí těchto předmětů. Ohlasy ze studentských anket, které se na Západočeské univerzitě konají pravidelně po skončení semestru, ukazují, že navržený způsob výuky je studenty vítán a i pohled ze strany



Obr. 3 Jednotlivé kroky řešení úlohy

vyučujících ukazuje na znatelné zlepšení v pochopení látky. Hlavním smyslem zmiňované modernizace je pak změna v přístupu – student se nepotýká s vlastním technickým provedením konstrukce, ale opravdu řeší zadaný problém.

Literatura

[1] http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/210/

[2] http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/67/

[3] VRBA, A. Oživlá geometrie. *Matematika, fyzika, informatika*, 2000, č. 2 a 3.

[4] ŠTAUBEROVÁ, Z. *Axonometrie, křivky, plochy.* Plzeň : ZČU v Plzni, 2006.

Máme rádi matematiku

Ludmila Machačová, Libor Koudela

Abstrakt

V příspěvku jsou shrnuty zkušenosti s pořádáním cyklu přednášek „Máme rádi matematiku“, který na Univerzitě Pardubice probíhá již druhým rokem. Pozornost je věnována výhledům do příštího akademického roku a snaze o větší zapojení studentů.

1 Úvod

Pardubická pobočka JČMF ve spolupráci s Ústavem matematiky Univerzity Pardubice pořádá od března roku 2005 přednášky určené studentům, učitelům, členům Jednoty a všem, kdo mají zájem o matematiku. Hlavním motivem pro organizování těchto setkání byla snaha přivést zejména studenty k většímu zájmu o matematiku, vytvářet příležitosti pro neformální setkávání amatérských i profesionálních matematiků z Pardubic a okolí, poskytnout prostor pro prezentaci výsledků práce zejména mladších kolegů a v neposlední řadě i nabídnout zájemcům možnost setkat se na půdě pardubické univerzity s předními českými matematiky.

Na žádné z fakult Univerzity Pardubice není matematika samostatným studijním oborem. Základní kurs analýzy, lineární algebry a analytické geometrie probíhá většinou v rámci prvních dvou semestrů studia. Částečně i pod vlivem skutečnosti, že matematika je nepopulární předmět a je většinou chápána pouze jako nutné zlo, byla jako jednotící název pro tato setkání zvolena věta „Máme rádi matematiku“.

2 Přehled uskutečněných setkání

V roce 2005 se uskutečnily čtyři přednášky, od února 2006 jsme připravovali každý měsíc jedno setkání.

22. 3. 2005 Doc. RNDr. Ludmila Machačová, CSc. (Univerzita Pardubice):
Co to je pevný bod? (Přístupy k řešení rovnice $f(x) = 0$)

17. 5. 2005 Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (MFF UK):
Jak zacházet s řadami, které divergují

25. 10. 2005	Mgr. Libor Koudela (Univerzita Pardubice): *Příběh cykloidy, zvané Helena geometrů*
14. 12. 2005	Prof. RNDr. Bohuslav Sekerka, CSc. (Univerzita Pardubice): *Agregace a desagregace v lineárních modelech*
23. 2. 2006	Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (MFF UK): *Soustavy lineárních rovnic a determinanty v běhu věků*
23. 3. 2006	Doc. RNDr. Bohdan Linda, CSc. (Univerzita Pardubice): *Metody Monte Carlo*
20. 4. 2006	RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D. (FD ČVUT): *Matematika kolektivního rozhodování*
18. 5. 2006	RNDr. Josef Kubát (Gymnázium Pardubice): *Zlatý poměr*
8. 6. 2006	RNDr. Pavel Trojovský, Ph.D. (Univerzita Pardubice a Univerzita Hradec Králové): *O některých problémech vedoucích na Fibonacciova čísla*

Některé přednášky v letním semestru 2005/2006 se po domluvě s doc. Bečvářem staly součástí celostátního semináře z dějin matematiky, který nyní probíhá v Praze, Brně, Plzni a Pardubicích.

Počet posluchačů se pohyboval mezi 10 a 30, větší zájem byl o hosty z Matematicko-fyzikální fakulty UK. Mezi posluchači převažovali kolegové z Ústavu matematiky a několika dalších pracovišť Univerzity Pardubice, víceméně pravidelně chodilo i několik studentů, pro které je matematika koníčkem.

3 Výhledy do budoucna

Dosud jsme se při výběru přednášejících snažili řídit pravidlem střídání pracovníků Ústavu matematiky a hostů z jiných pracovišť. Volba tématu byla ponechána na přednášejícím, ale snahou bylo, aby přednášky byly z větší části srozumitelné i studentům prvního ročníku univerzity. Naším cílem bylo mimo jiné i nabídnout studentům možnost vidět témata, která probírají při výuce, v širším kontextu a v jiné perspektivě.

Ve výhledech do příštího akademického roku myslíme i na aktivnější zapojení studentů. Východiskem je zkušenost s dobrovolnými semestrálními pracemi v předmětu Matematika II na Fakultě chemicko-technologické, v nichž student staví na získaných matematických poznatcích, aby dospěl k řešení úloh formulovaných zpravidla pro potřeby chemie a fyziky. Cílem je posilovat samostatnost studentů, schopnost hledat poučení v literatuře i schopnost překonávat překážky. Počet řešitelů zatím není vysoký, i když obhájení práce studentovi obvykle nahradí standardní semestrální zkoušku.

Doufáme, že náš přednáškový cyklus přispěje k tomu, že počet těch, kdo mají rádi matematiku, se bude zvyšovat.

Mé šťastné číslo

Jarmila Novotná, Marie Hofmannová

Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na propojení vědomostí a dovedností budoucích učitelů matematiky s profesionálními dovednostmi tento předmět vyučovat. Aktivity, které jsou představeny, nabízejí jak možnost navození situací, které mohou nastat ve třídě, tak příležitost, při níž studenti mohou zvažovat své postoje (k nimž dospěli více či méně vědomě) k matematice a způsobu, jak ji mají vyučovat. K ilustraci je použita aktivita nazvaná Mé šťastné číslo.

1 Úvod

Jedním z hlavních problémů přípravy budoucích učitelů je stanovení rovnovážné polohy mezi jejich teoretickými a praktickými znalostmi a dovednostmi. Na toto téma probíhají neustále diskuse, jsou porovnávány různé modely a zkoumány jejich výsledky. Nalezení optimálního řešení je však prozatím stále v nedohlednu. Na čem se všechny studie v zásadě shodují, je seznam základních složek vzdělání budoucího učitele matematiky. Rámcově lze říci, že jimi jsou:

- Specifické znalosti, mezi něž patří:
  - znalosti z matematiky (matematické pojmy a postupy, vztahy k dalším oblastem atd.)
  - znalosti z psychologie a pedagogiky (obecné aspekty vyučovacího procesu, poznání žáků, organizace vyučování, tvorba kurikula, otázky kontextu atd.)
  - znalosti z didaktiky matematiky (strategie výuky/učení se pro jednotlivá témata, kurikulární a pedagogické materiály atd.)
- Znalosti, přesvědčení a postoje k matematice
- Praktické dovednosti

Studenti učitelství matematiky, kteří přicházejí na fakulty připravující učitele, prošli kurzy matematiky na základních a středních školách. Přinášejí si s sebou nejen různě rozsáhlé a různě hluboké znalosti pojmů a dovedností z matematiky, ale také zkušenost z toho, jak byli sami matematice vyučováni. Předchozí zkušenosti učitele mohou výrazně ovlivnit schopnost jeho vcítění se do poznávacích procesů žáka, který se setkává s novými, často pro něho překvapivými pojmy, jejich vlastnostmi a vztahy. Podrobněji viz např. (Novotná, 1999).

Vycházíme ze zkušeností, které dlouhodobě sbíráme v kurzu Content and Language Integrated learning (CLIL) – Výuka matematiky v angličtině na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy [4]. I když jsou aktivity v kurzu uplatňovány při přípravě studentů pro vyučování matematice v cizím jazyce, zkušenosti z přípravy učitelů a z diskusí se studenty a učiteli z praxe potvrzují, že jejich význam není omezen jen na tuto oblast.

Nové vzdělávací materiály kladou velký důraz na experimentování, záznam dat, pozorování, odhalování zákonitostí, zobecňování, testování hypotéz včetně jejich ověřování. Takové přístupy současně podporují individualizaci vyučovacího procesu a zohlednění různých učebních stylů žáků. [3] Na jedné aktivitě, kterou nazýváme Mé šťastné číslo, zde ilustrujeme přístup, který chceme v pracovní dílně s účastníky sledovat a rozvíjet.

2 Časový plán zařazení aktivity do přípravy učitelů

V následujícím rámcovém rozpisu označujeme „jedním týdnem“ jednu 45minutovou lekci.

1. týden:
Studenti

- si vyberou jeden z nabídnutých problémů
- řeší problém jednotlivě a následně porovnávají různé možnosti řešení
- diskutují o vědomostech a dovednostech nezbytných pro úspěšné řešení problému (z hlediska žáků)
- porovnají své návrhy a analýzou a priori, kterou připravili autoři problému.

Domácí úkol: dvojice studentů si připraví rámcový plán hodiny pro týmové vrstevnické vyučování.

2. týden:
Studenti

- provedou týmové vrstevnické vyučování podle svých příprav (zkráceně)
- společně s vyučujícími provedou kritickou analýzu ukázek hodin
- navrhnou změny.

Domácí úkol: studenti společně dopracují jednu vybranou přípravu na hodinu a připraví výukové materiály a pomůcky.

3. týden:
Vyučující

- zkontrolují a se studenty prodiskutují poslední verzi přípravy na hodinu a příslušné materiály a pomůcky
- po dohodě se studenty vyberou dva z nich, kteří hodinu odučí ve fakultní škole.

4. týden:
Na 2. st. ZŠ nebo SŠ

- dva studenti učí 45 minut – matematika v Aj. Ostatní studenti a vyučující sledují hodinu, dělají si poznámky a pořídí videozáznam vyučovací hodiny.

Po hodině:

- studenti, kteří vedli hodinu, požádají o zpětnou vazbu své žáky (asi 5 minut)
- společně s vyučujícími a ostatními kolegy krátce zhodnotí průběh hodiny (asi 10 minut).

5. týden:
Vyučující a studenti

- sledují videozáznam vyučovací hodiny
- diskutují a rozebírají průběh hodiny z metodického hlediska.

Vyučující zhodnotí studenty podle materiálu určeného pro hodnocení studentů na pedagogické praxi.

Vyučující, kteří se rozhodnou začlenit tyto materiály do kursu pro přípravu budoucích učitelů 2. stupně ZŠ a SŠ, mohou využít tento rámcový metodický list, který byl vypracován pro potřebu pregraduálního kursu CLIL.

Uvedený rámcový plán aktivity byl realizován pro různé úlohy. V dalším textu ukážeme stručně případ aktivity Mé šťastné číslo.

3 Mé šťastné číslo

Zadání základní úlohy se týká oblasti aritmetiky a použití algoritmů pro žáky ve věku 12 až 13 let. Cílem je zefektivnění řešení úloh pomocí objevování pravidelností, procvičování sčítání a násobení přirozených čísel.

Zadání: Definujme šťastné číslo takto (převzato z Bastow):
Zvolte si číslo. Každou jeho číslici umocněte na druhou a získané druhé mocniny sečtěte. Tím vytvoříte druhé číslo posloupnosti. Umocněte na druhou číslice druhého čísla a sečtěte získané druhé mocniny. Tím vytvoříte třetí číslo posloupnosti. Stejně postupujte dál. Jestliže v posloupnosti získáte číslo 1, nazveme původní zvolené číslo šťastné. V opačném případě hovoříme o smutném čísle.

Zkoumejte.

Cíl zařazení aktivity do přípravy učitelů

- zkoumání strategií řešení/učení
- vypracování přípravy na hodinu
- tvorba vlastních materiálů pro výuku
- simulace výukové jednotky (týmové vrstevnické vyučování)
- výuka ve třídě

Otázky pro studenty učitelství

1. Jaké předchozí znalosti jsou potřeba pro řešení úlohy?
2. Volte různá vstupní čísla pro posloupnost. Jaké různé situace mohou nastat? Kolik různých typů posloupností můžete získat?
3. Hledejte způsoby, kterými můžete využít posloupnosti, které jste už vytvořili, pro dokončení dalších posloupností.
4. Pokuste se znázornit graficky, jak spolu čísla souvisí.
5. Můžete předpovědět, zda číslo bude šťastné/smutné?
6. Jakou vlastnost mají čísla, která vytvoří posloupnosti, lišící se jen v prvním číslu?
7. Vyzkoušejte situaci pro několik tří- a čtyřciferných čísel.
8. V jakém poměru je počet šťastných a počet smutných čísel mezi čísly 1 až 50?
9. Je šťastným číslem častěji liché nebo sudé číslo?
10. Zkoumejte situaci, kdy místo druhých mocnin budete používat třetí mocniny číslic.
11. Uvažujte zadanou matematickou úlohu z pohledu učitele.
12. Diskutujte o první a třetí otázce. Jak nejlépe byste organizovali skupinovou práci?
13. Co by měl podle vašeho názoru říkat učitel?

14. Jaký je poměr mezi prací žáků a učitele?
15. Jaké je optimální časové rozvržení této aktivity?
16. Uvažujte organizační stránku z pohledu žáka, tj. systematičnost, poměr ústní/písemná práce, rozdělení úloh.
17. Matematika vyučovaná v cizím jazyce: Přeložte zadání.

Jak je vidět z otázek, je první skupina otázek zaměřena na matematický obsah aktivity, druhá na didaktickou stránku.

Uvedené zadání a otázky byly použity pro přípravu didaktické situace pro použití ve třídě včetně jejího vyzkoušení.

Průběh sekvence se studenty učitelství

1. Studenti nejprve samostatně řeší zadání pro žáky (možno zadat i jako domácí práci).
2. Po vyřešení studenti pracují ve dvojicích. Porovnávají svá řešení a diskutují alternativy z pohledu žáka
3. Dvojice studentů se spojí po dvou, pak se spojí čtveřice atd. (pyramidová skupina). Úkol:
   a) Rychle porovnat předchozí „řešení žáka“
   b) Změnit úhel pohledu (práce učitele) – příprava hodiny a strategie zadávání úkolu
4. Zástupce každé čtveřice předloží rozpracované návrhy na strategie učení před celou skupinou
5. Celá skupina společně diskutuje o každém návrhu zvlášť a vybere strategii k realizaci (včetně rozdělení rolí: učitel, různé typy žáků, hospitující učitel, ředitel apod.)
6. Studenti připraví jednotlivé prezentace (písemná příprava učitele, výukové materiály apod.) – domácí příprava
7. Studenti realizují (dvě až tři) vybrané strategie formou simulace výukové jednotky (část hodiny matematiky) přímo v semináři (vrstevnické vyučování)
8. Analýza
   a) Sebereflexe učitele
   b) Názory pozorovatelů
   c) Předpokládané postoje a pocity žáků
   d) Shrnutí (vedoucí semináře)

9. Doplňující didaktické rozpracování jednotlivých příprav tak, aby bylo možno realizovat jednotky ve škole
10. V případě možnosti realizace ve škole s následnou diskusí a porovnáním s plánovaným průběhem

4 Závěrečné poznámky

Jeden z hlavních problémů, před nimiž stojí vysokoškolský učitel v průběhu pregraduální přípravy budoucích učitelů matematiky, je spojit vědomosti a dovednosti daného předmětu s profesionálními dovednostmi tento předmět vyučovat. Je dobře známo, jak důležité jsou v praxi pro učitele představy o matematickém obsahu, o tom, jako tento obsah učit, o roli matematiky ve škole i v běžném životě, o vztazích mezi učitelem a žáky apod. Aktivity, které představujeme v tomto příspěvku, nabízejí jak možnost navození situací, které mohou nastat ve třídě, tak příležitost, při níž studenti mohou zvažovat své postoje (k nimž dospěli více či méně vědomě) k matematice a způsobu, jak ji mají vyučovat.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu Socrates Comenius LOSSTT-IN-MATH (LOSSTT-IN-MATH – LOwer Secondary School Teacher Training IN MATHematics. Project reference: 112318-CP-1-2003-1-IT-COMENIUS-C21).

Literatura

[1] BASTOW, B., et al. *40 Mathematical Investigations.* The Mathematical Association of Western Australia.

[2] NOVOTNÁ, J. Učitel v roli žáka – součást profesní přípravy učitele. *Pedagogická orientace*, 1999, č. 3, s. 28–32. ISSN 1211-4669.

[3] NOVOTNÁ, J. Objevujeme v matematice. Pracovní dílna. In Jirotková, D., Stehlíková, N. *Dva dny s didaktikou matematiky 2000.* Praha : Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta 2000, s. 49–53. ISBN 80-7920-023-4.

[4] NOVOTNÁ, J., HOFMANNOVÁ, M. Nový vzdělávací přístup – CLIL. Integrace jazykové a odborné aprobace v pregraduální přípravě učitelů. In Kubínová, M. *Sborník z Celostátního setkání kateder připravujících učitele matematiky.* Praha : Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2002, s. 59–63.

$1 + 1 = 10$

Čti „jedna a jedna jsou dvě“

Karel Otruba

Abstrakt

Příspěvek se dotýká některých otázek výuky matematiky a fyziky v maturitních ročnících (zvláště na gymnáziích), upozorňuje na její shrnující a završující charakter a na těsnou provázanost s látkou ročníků nižších. I zdánlivě triviální skutečnosti se ukazují být opěrnými body učiva, které středoškolskou matematiku uzavírá. Lehce úsměvný charakter textu souvisí s jubilejním počtem uskutečněných „Setkání. . . “.

Přiznám se, že mám tak trochu slavnostní náladu, nechci-li už mluvit přímo o jistém stupni dojetí, které se asi zcela přirozeně zmocňuje každého z nás ve významných chvílích jubilejních příležitostí. Při psaní tohoto článku se opravdu těším na již desáté „Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol“, jak to říká oficielní název. Pro mě ovšem to je především již desáté setkání s přáteli a kamarády, s lidmi, mezi nimiž si opravdu uvědomuji a prožívám silné pouto duševní spřízněnosti, a to v oblasti nikoli bezvýznamné, ale přímo v oboru, kterému jsem – vlastně jsme – zasvětili hlavní náplň našeho života. Nevím, ale doufám, že snad na „Setkání“ zazní i pár oficielních slavnostních vět z povolaných úst. Bylo by to na místě. Snad si najdeme i chvilku zklidnění, ve které trochu zavzpomínáme a zazvoníme skleničkami. . .

Těšíval jsem se vždycky na podzimní „Mariánky“, na jejich zvláštní atmosféru, na barevné listí parků a zahrad; mělo to v sobě kus nálady poslední pozdní sklizně a jakési „přehlídky úrody“ s výhledy do budoucna. Tak jsem to alespoň vnímal ještě za svých mladších let, kdy jsem se v tom velkém společenství kolegů objevil poprvé a neomylně tam zakotvil. Poznal jsem zcela bezpečně, že společné setkávání spřízněných duší je hlavním zdrojem našeho odhodlání, občerstvující studánkou na cestě někdy neutěšené a vyprahlé. Povzbudilo mě, že i moje myšlenky a představy jsou vlídně a vážně přijímány, že mohu nejen čerpat, ale také sám nabízet.

Ano, „Mariánky“ (a později Prachatice a Srní) mi daly mnoho. Už vymizela ta trochu pohádková atmosféra hotelu Krakonoš, ale nálada zůstává. Hodně jsem přemýšlel, jakým tématem bych přispěl na tomto mimořádném desátém setkání.

Snad mě inspiroval předpokládaný nadpis jeho sborníku. Nevím, čí to byl vtipný nápad (poprvé v roce 2000, mezinárodním roce matematiky), ale tentokrát se prohlášení $1+1 = 10$ dá využít k myšlenkám, které mají také tak trochu shrnující náladu sklizně. A snad nebude vadit, když můj příspěvek bude laděn i poněkud poeticky.

Předně bych měl uvést, že v posledních letech bývám nasazován především do septim a oktáv našeho gymnázia, často dokonce nejen na M a F, ale i jako třídní. To třídnictví se sice někdy neobejde bez problémů, neboť lavírování v zátočinách současných školských paragrafů přináší občas situace vpravdě kuriózní, ale už jsem docela přivykl možnosti působení na mladé lidi především „oktávovou“ matematikou a fyzikou právě v „oktávové“ době, kdy je jejich mysl dost otevřená k přijímání netradičních a někdy až provokativních skutečností. Ano, myslím především na kvantovou fyziku a speciální teorii relativity. Tyhle myšlenky mladí lidé sledují vždycky se značnou dávkou pozornosti. Především ve třídách matematicky zaměřených, kde lze mnohé věci podepřít „košatějším“ výpočtem, ale i v ostatních, jejichž studenti inklinují spíš ke slovním popisům a filozofickým interpretacím těchto disciplín.

A matematika nezůstává stranou. Ani v náznaku se zde nechci dotknout diskutování o tom, zda infinitezimální počet na střední školu patří či ne, jsem přesvědčen, že jednoznačně ano. Zdá se mi čím dál jasněji, že existuje schůdná a efektivní cesta, a snad budu mít možnost se k tomu dostatečně vyjádřit na jiném místě. Alespoň částečné navození představ opírající se o pojem „limita“ zcela obdobně „rozšiřuje svobodu myšlení“ (jak to rád nazývám), jako základní myšlenky kvantové fyziky nebo speciální teorie relativity. S některými kolegy říkáváme, že tahle disciplína jsou vlastně „žně“. Skutečně, taková náplň matematiky v maturitní třídě se naprosto neobejde bez důkladného celkového shrnutí celé látky předchozích let. Říkávám studentům na konci septimy, chce-li se někdo připravovat na matematiku v oktávě, ať si opakuje především téma „Funkce“, ale jinak úplně cokoliv, neboť není nic, co by se mu nakonec v oktávě nehodilo.

A v této atmosféře sklizně začíná náhle probleskovat na zdánlivě nečekaných místech a se značnou naléhavostí, že „jedna a jedna jsou dvě“. Pojďme se tentokrát trochu podívat na okolnosti a souvislosti. Zdá se mi, že toto triviální sdělení nám může být dobrým průvodcem na předmaturitních toulkách matematikou, i když na první pohled patří docela jinam, snad na úplný začátek matematického vzdělávání, někam do první třídy, mám chuť říct spíš do počítání než do matematiky. „Tak už víš, kolik je jedna a jedna?“ ptáme se žertem prvňáčků. Takhle to asi hodně lidí vnímá. Zmíněné prohlášení bývá chápáno jako lapidární vyjádření příslovečně nevývratné pravdy. Pořekadla typu „dát (nebo nedat) si jedna a jedna dohromady...“ se najdou myslím v mnoha jazycích. Ale pak mě to zasáhlo někdy kolem páté obecné. Jeden spolužák kdesi vyšťáral, že to prý vůbec žádná samozřejmost není a že důkaz tohoto tvrzení je prý jeden z nejtěžších. Byli jsme tehdy hodně překvapeni a samozřejmě jsme tomu nerozuměli

ani za mák, i když dodnes nevím, co vlastně ten kamarád kde viděl nebo slyšel. Potom to přišlo z té humornější stránky, $1+1=10$. To už jsme jako mladí olympionici trochu něco věděli o dvojkové soustavě a tenkrát v mém dětství to byl vůbec velký hit. První informace (čtené většinou na stránkách časopisu ABC) o „samočinných počítačích“ (zabírajících velké místnosti...) a principech jejich činnosti nás plnily překvapením a úžasem. Bylo v tom tehdy něco málem verneovského. Mám dojem, že dnes při výuce informatiky si studenti už tolik nehrají s číselnými soustavami, jejich teorie patří spíš do matematiky, ale ani tam už je skoro nenajdeme... Zápis $1+1=10$, který jsme ve své klukovské fantazii vnímali skoro jako symbol a heslo (dnes bychom řekli „logo“) nové kosmické epochy, dnes už tento význam dávno nemá.

Potom přišla algebra a s ní tvrzení, že $1+1=1$ nebo taky $1+1=0$. To bylo další „uvolňování svobody myšlení“. Poznali jsme, že tyto a podobné zápisy mohou stručně popisovat nějaké obecnější skutečnosti, než je pouhé dávání jablíček nebo hruštiček dohromady. Třeba síť s vypínači: zapnuto–vypnuto, proud–neproud, ale to všichni přece známe. Začalo především jít o to znaménko, o to „a“, „+“. Zde musím vzpomenout na jednoho svého silně filozoficky zaměřeného a matematice se tak trochu vysmívajícího přítele. Často se mě ptával: „Vy matematici říkáte, že jedna a jedna jsou dvě. Ale co to je vůbec ‚jedna‘? To vy právě nevíte... tak jak s tím můžete pracovat?“ Dnes už bohužel není mezi námi a tohle je jen jedna z mnoha úsměvných vzpomínek. Tehdy jsem se mu snažil vysvětlit, že tvrzení $1+1=2$ naznačuje spíš význam toho znaménka, té operace. Když tam je dvojka, jde o shromažďování jablek nebo oveček. Kdyby šlo třeba o vypínače, mohlo by tam být úplně klidně něco docela jiného. A když vidím nápis $1+1=7$, jedná se o sborník našeho sedmého setkání v roce 2000... Nevím, zda se s tím tenkrát beze zbytku vyrovnal.

Četl jsem občas mnoho variací na toto téma, třeba sčítání úhlů přes 360° nebo dokonce připomenutí relativistického skládání rychlostí... Ale to už jsou variace poněkud odtažité.

Oktavánské variace můžeme uvést matematickým vtipem (všimli jste si, že matematické a hudební vtipy jsou velmi zvláštní?), který jistě znáte. Matematik okamžitě ohlásí počet ovcí pasoucího se stáda a podotkne, že je vůbec nepočítal. Spočítal prostě nohy a výsledek vydělil čtyřmi. Jenže tenhle „kameňák“ má v matematice velmi závažné paralely. V běžném hovoru by se to dalo naznačit takto: když neumíme něco spočítat, spočítáme to dvakrát a výsledek vydělíme dvěma. Tady jistě čekáte příhodu s malým žáčkem Gaussem a součtem členů konečné aritmetické posloupnosti. Ano, tohle u žáků spolehlivě zabírá. Jenže je dost překvapí sdělení, že to vlastně už dávno znají. Jen pár lidí ve třídě si rychle uvědomí, že takhle už dávno počítají obsah trojúhelníka. Tady stojí za to připomenout, že vlastně „neumíme“ počítat obsahy žádných jiných rovinných útvarů než obdélníků a všechno ostatní na ně převádíme. Ano, $S = a \cdot b$, ale i obsah kruhu je vlastně obsah obdélníka o stranách $\pi \cdot r$ a r. Obsah „plochy pod

křivkou“ se také počítá pomocí obsahů obdélníků a vůbec neškodí, když s touto základní ideou Riemannova integrálu studenty přiměřeně seznámíme. Ostatně ono vynásobení dvou délek stran se buduje už v dětství (jako tolik jiných věcí) při sestavování kostek s pohádkovými obrázky.

Zůstaňme ještě chvíli u integrálů. Obsah obrazce omezeného sinusoidou a osou x od nuly do π je roven 2. Když tohle počítáme pomocí Newtonova integrálu, dostaneme tu dvojku skutečně jako součet $1 + 1 = 2$. Mimochodem – ve sborníku $1 + 1 = 8$ (rok 2002) je v moc důležitém článku Petra Vopěnky konstatováno (na str. 45), že tenhle výpočet je „čtvrtým triumfálním úspěchem matematiky kalkulací“. Člověk neznalý infinitezimálního kalkulu tuto skutečnost není vůbec schopen nahlédnout (volně citováno). Ten článek si pozorně přečtěte, já z něj čtu ve třídě vhodné úryvky ve vhodných chvílích... taky je tam najdete. A tuhle skutečnost o obsahu zmíněného obrazce nechte opravdu dostatečně vyznít. Ať si studenti dobře promyslí a prožijí, že bez infinitezimálního počtu není vůbec šance tenhle obsah spočítat, maximálně jen mlhavě odhadnout; že výsledek je nečekaně šokující („kdo by řekl, že tak netriviální křivka, ještě k tomu na intervalu s transcendentní mezí π, dá tak prachobyčejné celé číslo“), jakým triumfem lidského ducha je pojem „limita“ a jak tak mocný nástroj – infinitezimální počet – nám mnohdy připomene poznatky z dětství.

A to není v oblasti integrálů všechno. Značný úspěch u studentské obce sklízí výpočet primitivní funkce k funkci $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ metodou per partes. Tam se dostaneme k zacyklení celého procesu a tím zdánlivě do slepé uličky. Je dobré nechat třídu tenhle „kolaps“ dostatečně vychutnat a nasadit i trochu učitelského herectví. Tím působivější bude rozuzlení. Integrál spočítat neumíme, dva ano. Tak spočítáme dva... a výsledek vydělíme dvěma. Málem bych zapomněl – je tam „převedení výrazu na druhou stranu rovnice s opačným znaménkem“. Rovněž pravidlo známé už z dětství... Tohle všechno se objeví i při hledání mnoha dalších primitivních funkcí, pak se dokonce dělí taky třemi, čtyřmi, obecně číslem n... však ty příklady dobře znáte.

Při probírání tématu Posloupnosti a řady se můžeme zabývat slavným problémem s řadou

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ in inf.}$$

(já tuhle poznámku důsledně píšu, často ve zkratce „ii“). Jednou možností „řešení“ je ukázka neoprávněné aplikace vzorečku pro součet geometrické řady (zde s kvocientem -1). Vyjde $\frac{1}{2}$. Čitatel je roven 1 a ve jmenovateli máme zase $1 + 1 = 2$. Ostatně je dobré upozornit i na další neoprávněné manipulace s touto řadou a jejich „výsledky“.

Úplně prostinký je příklad se zobrazením v C: $f(z) = -z + 2s$. Středová symetrie se středem v počátku a pak posunutí o dvojnásobek vektoru s. Proč o dvojnásobek? Užijeme-li vztahu $1 + 1 = 2$, dostaneme: $f(z) = -z + s + s$, tedy

$f(z) = -(z - s) + s$. Je to středová symetrie se středem s. Takových případů je mnoho a uvádím pouze jeden za hodně dalších, které objevíte sami.

Ve finitní matematice je velmi slavný příklad se součtem kombinačních čísel „n nad k od nuly do n“. Výsledek je 2^n. Dostaneme jej dosazením jedniček za a, b do vztahu $(a + b)^n = \ldots$ atd., zkrátka binomická věta. (Mnozí z nás si snad ještě vzpomenou na rovněž slavného Hlustvisiháka, že?). Opět $1 + 1 = 2$. Máme zde několik dalších variant, ale ty už pak nejsou tak oslňující, když se princip triku prozradí.

Abych nezapomněl na fyziku. Zobrazovací rovnice nám říká, že obraz předmětu umístěného ve dvojnásobné ohniskové vzdálenosti je rovněž ve dvojnásobné ohniskové vzdálenosti. Když si to napíšete, zjistíte, že opět nejde o nic jiného, než o vztah $1 + 1 = 2$:

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{2f} = \frac{2}{2f} = \frac{1}{f}$$

Uvedenými příklady jsem naznačenou problematiku jistě nevyčerpal. Smysl mého příspěvku je dvojí: Jednak nabídnutí možnosti oživení hodin matematiky skutečnostmi, které se pohybují na tenké hranici skoro žertovné triviality a hluboké závažnosti. Věk oktavánů je na tohle bezpečně zralý a jejich směrování k dalšímu studiu tímto způsobem má značnou účinnost. Je skutečně zajímavé sledovat a zkoumat zdánlivě nesouvisející partie látky pomocí nějaké červené nitě, která se jimi táhne. Můj první příspěvek na „Setkání...“ se jmenoval „Maturita nad Labem“ a v něm jsem tuto myšlenku poprvé uvedl jako svou novou zkušenost. Při skutečné maturitě ve Dvoře Králové nad Labem, kde jsem tento přístup poprvé použil v r. 1995, uvedl předseda zkušební komise v závěrečné řeči paralelu, jak by to mohlo podobně vypadat v češtině a jiných předmětech, ale jeho slova jsem si bohužel přesně nezapamatoval.

Ale především doufám, že můj příspěvek bude vnímán jako oslava významné skutečnosti, že se totiž naše „obec matematická“ už dlouho a dlouho takhle schází a že si máme stále co říci. Nevím, kolik je to už let, možná kolem čtvrtiny století... A ta desítka v záhlaví je jistě hodně významná. Určitě si připijeme na mnoho dalších „Setkání...“ a opět vytvoříme konkrétní úlohu o počtu zazvonění skleniček při přípitcích. Jde o počet neuspořádaných dvojic skleniček n účastníků... tedy n nad dvěma.

AD MULTOS ANNOS!

Představy čísla u dětí prvního ročníku

Šárka Pěchoučková

Abstrakt

V průběhu celého školního roku probíhala v prvním ročníku základní školy řada na sebe navazujících experimentů, které se mimo jiné zabývaly představami dětí o čísle. Experimenty využívaly manipulativní činnost žáků a ukázaly, že u některých dětí dochází k interferenci mezi číselnými představami.

1 Vytváření číselných představ

Prvotní číselné představy se ve vědomí dítěte začínají objevovat kolem druhého roku jeho života na základě životních zkušeností. Dítě se potkává s čísly v běžném životě. Na domě, ve kterém bydlí, vidí na cedulce číslo, pokud jde s maminkou na nákup, může pozorovat cenovky opatřené čísly, u pokladny slyší slova, která čísla označují. Hovoříme o tom, že se Svět čísel vynořuje z Reálného světa. Reálný svět malého dítěte tvoří jeho představy o věcech, událostech, vztazích okolního světa (rodiče, kostky). Svět čísel je tvořen představami o číslech a číselných vztazích.

Proces vynořování Světa čísel z Reálného světa má dvě složky – verbální a sémantickou. Verbální složka se týká slov – číslovek. Dítě pochopí, že zvuky – slova „jedna“, „dva“, „tři“ patří k sobě, ale neumí je správně používat. Sémantická složka se týká významu číslovek.

Při vynořování Světa čísel z Reálného světa hrají důležitou roli rytmy [3]. Říkanka „Jedna, dvě, Honza jde“ obsahuje dvě vědomosti, ustálenou posloupnost slov a rytmus. Všechny aktivity, které rozvíjejí u dítěte rytmus, tedy synchronizaci zvuků a pohybů, připravují aritmetické myšlení. Máme na mysli dětská rozpočitadla, dětské říkanky. Děti, které neměly možnost prožít takovéto hry, mohou mít zpomalený rozvoj aritmetického myšlení. Rytmus je pro dítě důležitý i z hlediska vytváření pocitu klidu a bezpečí [2]. Pokud dítě samo použije číselnou říkanku „Jedna, dva, tři“ pro zjištění počtu předmětů, začíná proces vynořování Světa čísel z Reálného světa, dítě tím opouští pojem „pár“ a poznává číslo tři.

Zpočátku je číslo tři vázáno na konkrétní předměty. Dítě zatím neví, co je tři, ale chápe toto číslo ve spojení například s autíčky či panenkami – tedy ví, co

jsou to tři autíčka nebo tři panenky. Autíčka nebo panenky jsou ukotvením čísla tři. Svět čísel tedy leží uvnitř Reálného světa, zatím se nezačal osamostatňovat.

Později dítě zjistí, že číselné vztahy nejsou vázány na konkrétní předměty. Situace pět autíček a pět panenek představují stejný počet předmětů. Dítě tedy chápe neukotvené číslo, Svět čísel se začíná osamostatňovat od Reálného světa.

Samostatnost Světa čísel však nesmíme nesprávně interpretovat jako jeho izolovanost. To by vedlo k tomu, že žák sice umí s čísly pracovat, ale pouze formálně, neumí je používat v životě nebo při řešení praktické situace. Pro chápání dalších pojmů aritmetiky i algebry (zlomek, celé číslo, sudé číslo, rovnice) je propojení Světa čísel a Reálného světa nutné. Tuto vazbu bychom měli mít vždy na paměti při vyučování matematiky.

Existuje více podob ukotvení čísla v Reálném světě. Číslo lze chápat jako identifikátor, mnohost nebo operátor [1].

Tabulka 1 na následující stránce uvádí třídění číselných představ. Číslo jako identifikátor pomáhá při označování objektů. Pokud je strukturovaný soubor objektů označen čísly tak, že mezi strukturou objektů a strukturou číselných znaků není žádná souvislost, číslo má funkci jména. Tramvaj číslo 4 označuje určitou tramvajovou linku bez souvislosti s pořadím či počtem těchto linek. Jestliže mezi strukturou objektů a strukturou číselných znaků existuje přesně daná souvislost, hovoříme o čísle jako adrese. Adresy mohou být buď lineární, postupují stále vpřed, nebo cyklické, čísla jdou dokola. Byt číslo 4 představuje čtvrtý byt v posloupnosti bytů v domě, čísla bytů tvoří strukturu, jedná se o lineární adresu. Květen je pátý měsíc roku. Zde je číslo 5 ukotvené jako cyklická adresa.

Tabulka 1 Třídění číselných představ

Třída	Podtřída		Ilustrace
Identifikátor	jméno		tramvaj číslo 4
	adresa		byt číslo 4
Mnohost	počet		4 kostky
	veličina		4 l vody
Operátor	porovnávání	aditivní	o 4 m delší
		multiplikativní	čtyřnásobek hmotnosti
	změny	aditivní	o 4 roky více
		multiplikativní	zvýší se čtyřnásobně
	části	multiplikativní	čtvrtina koláče

Chápeme-li číslo jako mnohost, uplatňuje se jeho schopnost popisovat kvantitativní jevy. Počet je množství, jehož jednotkou je kus. Pokud dítě porozumí počtu, vytváří si svůj svět čísel. Veličina je množství, které má jinou jednotku než kus.

Číslo ve funkci operátoru vypovídá o porovnávání, změně nebo části.

2 Experimenty na základní škole

V průběhu celého školního roku probíhala v prvním ročníku základní školy řada na sebe navazujících experimentů.

Experimentátorka pracovala s každým žákem odděleně od ostatních žáků v kabinetu v sousedství třídy. Na pracovním stole měl žák připravené karty s čísly otočené lícem dolů a modifikované či originální Cuisenairovy hranolky. Hranolky se od sebe lišily délkou a reprezentovaly přirozené číslo 1 (jednotkové hranolky), přirozené číslo 2 (dvojkové hranolky), přirozené číslo 3 (trojkové hranolky). Byly použity proto, aby byl při manipulaci odstraněn vliv jemné motoriky dítěte. Žáci měli tedy zadanou symbolickou reprezentaci čísel a jejich úkolem bylo provést enaktivní reprezentaci těchto čísel.

V následujícím textu jsou uvedeny ukázky, na kterých jsou demonstrovány výše popsané fenomény.

Anička

Evidence: Anička otočí kartu s číslem 4. Potichu přečte číslo. Přemýšlí – těká očima po jednotlivých hromádkách hranolků, pak se zaměří na hromádky s jednotkovými a dvojkovými hranolky, natahuje po jednom jednotkovém hranolku levou ruku, stáhne ji, přejde ke dvojkovým hranolkům, nakonec se vrátí k jednotkovým hranolkům a levou rukou z nich jeden vybere (20 s) a položí na kartu s číslem (3 s). Poté postupuje zleva doprava po jednotlivých hromádkách a levou rukou vybere vždy jeden hranolek a dá na kartu – dvojkový (6 s), trojkový (4 s), po váhání (6 s) přidá jeden jednotkový (3 s). Všechny hranolky dívka uspořádá oběma rukama do tvaru s půdorysem obdélníka. Stejný postup volí Anička pro číslo 6, přečte číslo a pracuje opět levou rukou: jednotkový hranolek, dvojkový, trojkový, jednotkový, dvojkový, po jednom hranolky přepočítá, ukazuje si na ně levou rukou a přidá trojkový hranolek (15 s). Hranolky oběma rukama umístí do tvaru s půdorysem obdélníka. Po odkrytí karty s číslem 5, číslo potichu přečte, sáhne pravou rukou nejdříve na hromádku s dvojkovými hranolky, ale ruku přemístí k hromádce s jednotkovými hranolky a postupuje známým způsobem: jednotkový hranolek, dvojkový hranolek, trojkový hranolek, jednotkový hranolek, dvojkový hranolek (16 s).

Komentář: U Aničky se projevuje fenomén interference mezi mnohostí (počtem) a adresou, z hlediska jazykového se jedná o interferenci mezi číslovkou základní a číslovkou řadovou. Interpretace úlohy se tvoří v průběhu prvních pohybů a dochází k vytěsnění jedné podmínky podmínkou druhou. Anička provádí taktilní dokumentaci. Toto první seznámení zabere mnoho energie a zbylá energie nestačí na vlastní počítání. Jednotkovým hranolkem dívka začíná proto, že je první zleva a je to zároveň nejmenší prvek ze všech nabízených prvků. Všechna čísla byla nesprávně ukotvena jako cyklické adresy. Při práci Aničky

je důležitý také rytmus, opakování stejné posloupnosti hranolků. Toto se projevilo zejména při reprezentaci čísla 6 a čísla 5, kdy Anička tvořila posloupnost hranolků: jednotkový, dvojkový, trojkový, jednotkový, dvojkový, trojkový resp. jednotkový, dvojkový, trojkový, jednotkový, dvojkový. Tento rytmus neporušila ani po kontrole přepočítáním hranolků po jednom při reprezentaci čísla 6. Anička si zpočátku s úkolem nevěděla rady, o čemž svědčí i poměrně dlouhá doba přemýšlení před vlastní manipulací s hranolky. Rytmus pro ni znamená určitý pocit klidu a bezpečí, které při řešení úkolu potřebuje. Při reprezentaci čísla 5 nejdříve rytmus poruší, velmi rychle si toto uvědomí a vrací se k němu.

Barunka

Evidence:
B01: (Barunka otočí pravou rukou kartu s číslem 4, prohlíží si ji, 5 s). To nevim.
E01: Tak co je to za číslo?
B02: Čtyři.
E02: Polož si to na stůl a zkus to zaplatit.
B03: (Pravou ruku natáhne ke hromádce trojkových hranolků. Po jedné odpočítá čtyři tyto hranolky, 7 s.) Čtyři. (Hranolky položí na kartu.)
B04: (Otočí kartu s číslem 6. Pravou rukou odpočítá po jednom šest trojkových hranolků a položí je na kartu, 9 s) Šest.
B05: (Otočí kartu s číslem 5. Pravou rukou odpočítá po jednom pět trojkových hranolků a položí je na kartu, 8 s) Pět.

Komentář: U Barunky se projevuje fenomén interference mezi mnohostí (počtem) a číselnou hodnotou, kterou hranolek reprezentuje. Barunka upřednostňuje počet. Trojkový hranolek volí proto, že je to největší z nabízených hranolků. Důvodem může být i hledisko vzdálenosti, trojkové hranolky byly nejblíže její pravé ruce. Cuisenairovy hranolky jsou geometrickou reprezentací čísla, hranolek o určité délce reprezentuje přesně dané přirozené číslo. Opět tedy došlo k nesprávnému ukotvení čísla. Barunka neuvažuje číselnou hodnotu hranolku, důležitý pro ni je pouze počet hranolků.

3 Závěr

Nesprávné ukotvení čísla se objevuje i u dětí prvního ročníku. Tento fenomén se vyskytuje v situacích, kdy žák pracuje s jiným generickým modelem čísla, než byl dosud zvyklý, nemá tedy s tímto modelem dostatečné zkušenosti.

Pokud dítě nezískalo dostatečný vhled do problému, je důležitý pro něho také rytmus. Ten se může projevovat také během manipulativní činnosti dítěte a vyvolává pocit klidu a bezpečí.

V průběhu matematického vyučování je třeba alespoň při zavádění nových pojmů umožnit dětem pracovat s ukotvením těchto pojmů v Reálném světě a dovolit jim, aby mohly využívat rytmy.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí.* 1. vyd. Praha : Pedagogická fakulta UK, 1999.

[2] GRUSZCZYK-KOLCZYNSKA, E., ZIELINSKA, E. *Edukacja matematetyczna dzieci.* 1. vyd. Warszawa : Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1997.

[3] KOLLÁRIKOVÁ, Z., PUPALA, B.*Předškolní a primární pedagogika.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

Mentální manipulace se sítí tělesa

Jaroslav Perný

Abstrakt

Příspěvek se týká některých možností rozvíjení prostorové představivosti žáků jako významné kompetence, kterou je možno přispět při výuce matematiky k rozvoji osobnosti žáků. Jedná se o úlohy, ve kterých se uplatňuje prostorová představivost při mentální manipulaci s objekty, kdy žák hravou formou ze sítě tělesa v představě utváří těleso.

1 Úvod

V ČR je v současnosti na školách nově zaváděn Rámcový vzdělávací program, kde jsou za základní považovány klíčové kompetence žáka. Domnívám se, že pro získání některých je nejpříhodnějším prostředím školská matematika. Jednou z těchto významných kompetencí důležitou i pro životní praxi člověka je geometrická a zejména prostorová představivost. Její úroveň je možno záměrně rozvíjet právě při výuce matematiky, a to na všech stupních škol.

2 Hlavní část

Snažím se zjišťovat a experimentálně ověřovat, jaké typy úloh pro rozvoj prostorové představivosti je možno využívat u žáků ZŠ, a to již v mladším věku. Měly by to být úlohy, které nevyžadují znalost zobrazovacích metod, ale využívají aktivní prostorovou orientaci žáků a mentální manipulaci s objekty. Jde o úlohy, které lze bez větší návaznosti na učivo volně zařazovat i do negeometrického vyučování jako rozcvičky či relaxační činnosti. [3]

2.1 První úlohová situace

Jednou z možností je úlohová situace, kdy žák pouze v představě manipuluje se sítí a skládá z ní příslušné těleso. V našem případě jde o neúplnou síť tělesa („vnitřku“, bez jedné stěny), která je představena jako síť pokoje ve tvaru krychle nebo kvádru, do kterého se díváme chybějící stěnou, a snažíme se v představě síť orientovat, tj. určit, která stěna je nahoře, která dole, atd. Jako jediný orientační výchozí bod je nákres dveří na jedné ze stěn sítě. Žák má doplnit

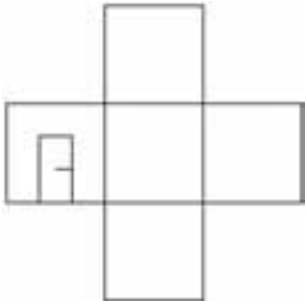
na další stěny sítě „stropní světlo“, „koberec na podlahu“, „okno“ a „skříň“ na bočních stěnách. [2]

Vysvětlení a nácvik:

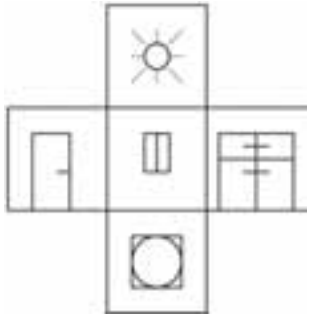
Žák má na neúplnou síť krychle bez jedné stěny, kde jsou nakreslené pouze dveře, doplnit obrázky objektů tak, aby po složení sítě do pokoje v něm byly správně umístěny. Přitom žák musí síť skládat pouze v představě mentální manipulací. Po dokreslení obrázků do sítě se může složením modelu tělesa přesvědčit o správnosti.

Umístěte do sítě pokoje:

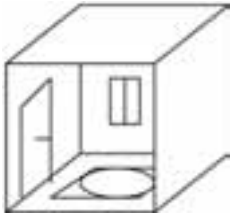
Na podlaze je koberec,
na stropě je světlo,
na bočních stěnách postupně
jsou dveře, okno a skříň.



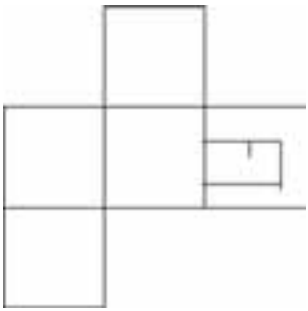
Např.:

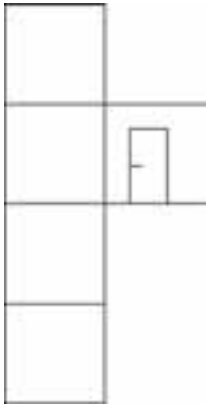


odpovídá:

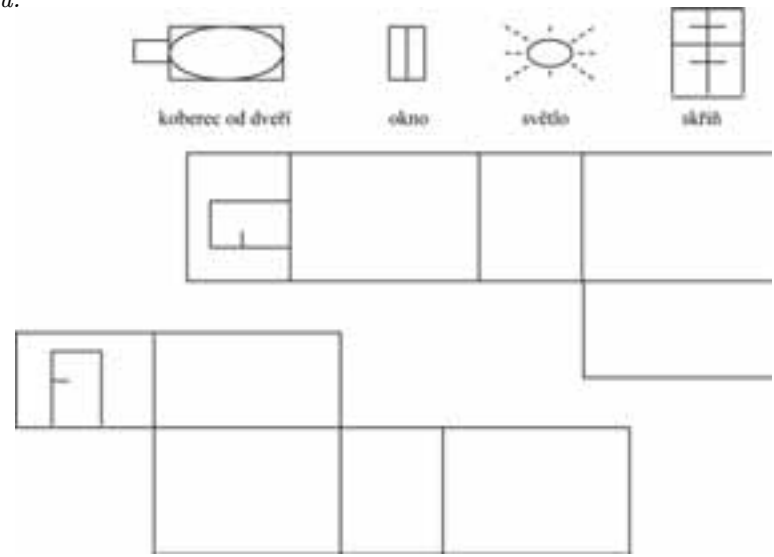


Ukázky zadaných neúplných sítí:





V případě sítě kvádru je možno vyžadovat orientaci většího počtu obrázků objektů:

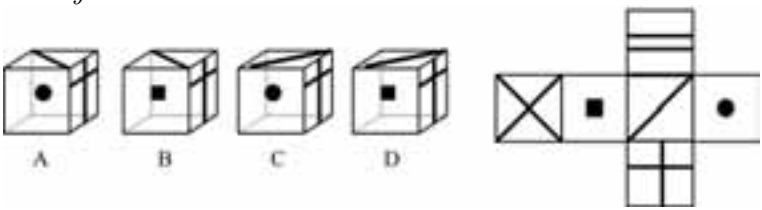


2.2 Druhá úlohová situace

Jinou možností je úlohová situace, kdy žák pouze v představě vytváří model tělesa z předložené sítě, na které mají „vnější“ stěny odlišné symboly, a přiřazuje této síti jedno ze zobrazených či vymodelovaných těles. Protože byl tento soubor zadán i nejmladším žákům, byly kvůli motivaci místo geometrických těles použity i sítě a modely domečků. Snahou je síť orientovat a určit, které ze stěn těles vidíme vpředu, vpravo, vlevo. [3]

Vysvětlení a nácvik:

Kterou krychli můžeš sestavit z této sítě?



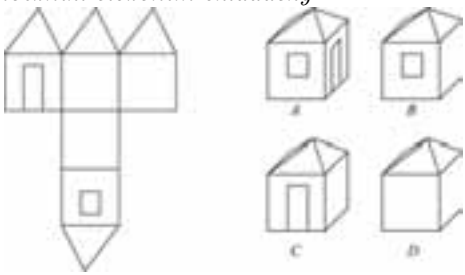
Řešení: B

Žáci pak řeší úlohy různé obtížnosti přiřazování domečků dané síti.

Úlohy sledují, jak žák zvládá „myšlenkové“ složení sítě tělesa, tj. mentální manipulaci se sítí, jak rychle a jak správně vyloučí nebo určí z nabízených těles to správné. Po zapsání řešení úlohy nebo úloh se žák může přesvědčit o správnosti svých představ. [1]

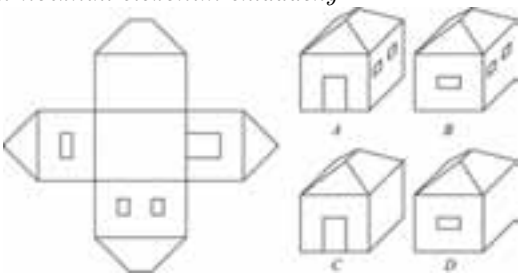
Ukázky úloh:

Který domeček nevznikl složením skládačky?



Řešení: B

Který domeček nevznikl složením skládačky?



Řešení: B a *C*

3 Závěr

Šetření potvrzují, že žáci základní školy mohou vhodným způsobem rozvíjet svou prostorovou představivost a že s rozvíjením prostorové představivosti je možno přiměřeným způsobem začít již u žáků primární školy [3]. Ukazuje se, že je vhodné takovéto úlohy zařazovat do vyučovacích hodin matematiky, i když není přímo probíráno geometrické učivo.

Je žádoucí, aby se budoucí učitelé matematiky i elementárních škol v co největší míře setkávali s obdobnými úlohami a náměty, které mohou rozvíjení prostorové představivosti napomoci.

Literatura

[1] KOPECKÁ, H. *Rozvíjení prostorové představivosti hrou.* Liberec : Diplomová práce, Technická univerzita v Liberci, 2004.

[2] MICHNOVÁ, J. Krychlové hlavolamy. In *Sborník Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK Praha, 2005.

[3] PERNÝ, J. *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Liberec : Technická univerzita, 2004.

Co zkoušet z matematiky na vysoké škole technického a ekonomického zaměření?

Otakar Prachař

Abstrakt

Příspěvek vychází z neuspokojivých znalostí matematiky u současných absolventů středních škol a zabývá se pojetím zkoušky z matematiky v bakalářské formě studia na vysokých školách technického a ekonomického zaměření.

1 Úvod

V posledních letech stále ve větší míře přicházejí na vysoké školy technického zaměření absolventi středních škol neuspokojivě připraveni z matematiky. Výsledky přijímacích zkoušek z matematiky, jakož i průběžné sledování a výsledky kontrolních testů ukazují na rozdílnou připravenost studentů z různých typů středních škol a celkově na nižší úroveň znalostí středoškolské matematiky. Absolventi středních škol nemají trvalé znalosti základních pojmů, mají obtíže při uplatňování různorodých matematických metod i pří řešení slovních úloh. Nejsnáze se vyrovnávají s jednoduchými úlohami, které lze řešit mechanicky podle známých algoritmů. Tyto nedostatky potvrzují i výsledky sond Maturant.

2 Problémy v matematice na vysoké škole

Závažným nedostatkem je, že u většiny absolventů střední školy není rozvinuta schopnost efektivně se učit z učebnice, číst s porozuměním matematický text, samostatně řešit úlohy a matematicky formulovat řešení jednoduchých problémů. Jejich studijní styl je málo účinný, samostatné studium jim činí nepřekonatelné potíže. O připravenosti k tvořivé činnosti nemůže být ani řeči. Chybí jim vytrvalost a volní vlastnosti k překonávání překážek.

Práci na vysokých školách stěžují nejen neuspokojivé znalosti studentů ze středoškolské matematiky, ale i okolnost, že nejsou zvyklí soustavně studovat a neumějí racionálně studovat, což se projevuje v dosahovaných studijních výsledcích. U čtvrtiny studentů není výjimkou pouze 20% úspěšnost v písemných kontrolních pracích. Přípravu uchazečů o vysokoškolské studium je třeba zlepšit, aby bylo možno neustále zkvalitňovat úroveň vzdělávání na vysokých školách.

3 Cesta k nápravě

Z uvedených důvodů byl od akademického roku 2003/2004 zařazen do studijních plánů 1. ročníku všech studijních programů na Fakultě ekonomicko.správní Univerzity Pardubice povinný předmět Matematický seminář v rozsahu jedné hodiny týdně v zimním semestru. Cílem předmětu je prověřit znalosti ze středoškolské matematiky a přimět studenty, kteří je neovládají v dostatečné míře, aby si je převážně samostatným studiem doplnili a upevnili.

Studenti v průběhu semestru postupně píší zápočtové práce, které obsahují 10 úloh z různých okruhů středoškolské matematiky. Výběr tematických okruhů byl volen tak, aby byl v souladu s obsahovou náplní navazujících předmětů Matematika I a Matematika II. Doba na vypracování této práce byla stanovena na 45 minut. Řešením každé dílčí úlohy bylo možno získat maximálně 10 bodů. Zápočtová práce byla považována za úspěšnou, když student z maximálně možného počtu 100 bodů získal alespoň 60 bodů. Každý student měl možnost získat zápočet ve třech řádných termínech a v dalším náhradním.

Zápočet získalo celkem 70,5 % řádně zapsaných studentů 1. ročníku. Při prvním pokusu 32,6 %, na dva pokusy 12,8 %, na tři pokusy 9,3 % a na 4 pokusy 15,8 % studentů. Na závěr lze konstatovat, že zavedený předmět plní svůj účel. Schopní studenti, kteří uspějí hned při prvním pokusu, pocítí hned úspěch při studiu na vysoké škole a jsou pozitivně stimulováni ke studiu navazujících předmětů. Studenti, kteří nedosahují požadovaného stupně znalostí a dovedností, jsou motivováni k samostatnému studiu, kterým odstraní své mezery ve vědomostech. Studenti, kteří mají značné nedostatky a nejsou schopni je odstranit, nezískají zápočet a nemohou přistoupit ke zkoušce z navazujícího předmětu Matematika I, v němž by s vysokou pravděpodobností prokazovali opakovaně neúspěšné výsledky.

4 Pojetí zkoušky z matematiky

Vzhledem k neuspokojivé připravenosti absolventů středních škol z matematiky dochází nutně i na vysokých školách postupně ke snižování nároků. Často se vysokoškolští učitelé spokojují u zkoušek jen s mechanickým řešením algoritmických úloh podle vzoru, nekladou potřebný důraz na porozumění teoretickým základům matematické disciplíny, neověřují ve větší míře schopnost aplikace znalostí v oboru i mimo obor, schopnost studenta v tvořivé činnosti.

Nikdo jistě nepochybuje o tom, že se v matematice nelze spokojit s namemorovanými vědomostmi ze studovaných tematických okruhů, ale že je třeba pěstovat dovednosti, rozvíjet schopnost aplikace osvojených vědomostí a dovedností při řešení různých problémů, schopnost přenosu (transferu) znalostí do jiných oblastí společenské praxe. Student má znát nejen definice a matematické věty, ale má umět je s porozuměním užívat při řešení úloh, porozumět vztahům

a souvislostem mezi jednotlivými tématy, matematizovat reálné situace a řešit různé problémy, užívat geometrickou představivost v konkrétních situacích.

Předmět Matematika I tvoří tři tematické okruhy. Prvním je tradiční úvod do matematické analýzy, v němž je obecný pojem zobrazení rozvíjen jak směrem k diskrétním formám (posloupnosti reálných čísel), tak směrem k formám spojitým (funkce jedné reálné proměnné). Druhý okruh tvoří základy diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné. Třetím okruhem jsou základní poznatky z nekonečných číselných a mocninných řad.Písemná a ústní zkouška je integrovanou zkouškou, při níž zjišťujeme u studenta kvalitu výkonu ve všech tematických okruzích. Do celkového hodnocení výsledků studia předmětu se započítává jednak dosažený počet bodů v řešení úloh písemné zkoušky (max. 100 bodů) a jednak dosažený počet bodů v teoretické části písemné zkoušky (max. 50 bodů). Podmínkou úspěšného hodnocení výsledků studia je však dosažení minimálně 40 bodů v řešení úloh a 20 bodů v teoretické části písemné zkoušky. Celkový součet dosažených bodů určí klasifikační stupeň pro celkové hodnocení prospěchu v předmětu.

V programu výuky jsou požadavky ke zkoušce vymezeny souborem studijních cílů ve čtyřech kategoriích:

1. v kategorii V (vědomosti, fakta, terminologie, symbolika, matematické značky) se vyžaduje znalost definic, objasňování matematických vět, zákonů, pravidel, principů a vzorců, zapisování definic a matematických vět pomocí kvantifikátorů. Otázky a úlohy jsou uváděny slovesnou vazbou: definovat, vyslovit, zapsat, vybrat, pojmenovat;

2. v kategorii D (dovednosti, metody, algoritmy) jde o porozumění a zvládnutí matematických činností, dokazování matematických vět, užívání algoritmů, zvládnutí výpočtů, řešení úloh, zvládnutí grafického znázornění matematických objektů. Užívané slovesné vazby: objasnit, vysvětlit, dokázat, řešit, vypočítat, graficky znázornit;

3. v kategorii T (aplikace poznatků a činností při řešení problémů, transfer znalostí do jiných vědních oborů a oblastí společenské praxe) se jedná o dovednost sestavení pracovního postupu, dovednost aplikovat matematické poznatky, metody a činnosti k řešení matematických problémů i problémů jiných vědních oborů a společenské praxe. Užívané slovesné vazby: aplikovat, použít,odvodit, prokázat, navrhnout, řešit;

4. v kategorii K (tvořivá činnost, schopnost logického myšlení) se předpokládá schopnost vyhledávat nové problémy, formulovat hypotézy a ověřovat jejich správnost, schopnost objevovat pro studenta nové poznatky a postupy, schopnost matematizace reálných situací, ovládnutí myšlenkových operací abstrakce, generalizace, konkretizace, specifikace, analogie, ovládnutí indukce, dedukce, verifikace, schopnost analýzy a syntézy, schopnost

porovnávání a rozlišování (rozdělování, komparace, diskriminace), rozvíjení matematického myšlení a jeho specifických forem (funkční, pravděpodobnostní, kombinatorické, stochastické).

Užívané slovesné vazby: analyzovat, provést rozbor, navrhnout, specifikovat, porovnat, rozlišit, modifikovat, modelovat, verifikovat, rozhodnout, vyvodit obecné závěry.

Ukažme formulace kontrolních otázek a úloh k zjišťování kvalitativní úrovně výkonu studenta v jednotlivých kategoriích předmětu Matematika I.

Kategorie V

1. Jak je pomocí zobrazení definována posloupnost reálných čísel?

   Zapište definici limity posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Napište definici cyklometrické funkce $f\colon y = \arcsin x$ a uveďte její charakteristické vlastnosti. Načrtněte její graf.

3. Formulujte jako pravdivou implikaci nutnou podmínku konvergence nekonečné číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Kategorie D

1. Užitím definice derivace funkce v bodě vypočítejte derivaci $f'(2)$ pro funkci $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

2. Ze znalosti grafu funkce $f\colon y = \log_2 x$ načrtněte graf funkce $g\colon y = 3 + \log_2(x+1)$. Vyjádřete definiční obor $D(g)$ a určete souřadnice průsečíků grafu funkce g se souřadnicovými osami kartézské soustavy souřadnic.

3. Sestavte Taylorův mnohočlen $T_3(x)$ funkce $f(x) = \sin^3 x$ v bodě $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

4. Najděte intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body funkce $f(x) = (x+2)\cdot \mathrm{e}^{4x}$.

Kategorie T

1. Vypočtěte přibližně hodnotu Eulerova čísla e užitím $T_6(x)$ a odhadněte absolutní chybu.

2. S jakou procentuální chybou je třeba změřit poloměr koule r, aby při výpočtu objemu koule byla chyba menší než 1 %?

3. Dešťová kapka, jejíž počáteční hmotnost je m_0, padá účinkem gravitační síly g ve vakuu, přičemž se rovnoměrně vypařuje. Úbytek hmotnosti m_0 je přitom úměrný času t (koeficient úměrnosti k). Po kolika sekundách od začátku padání bude kinetická energie kapky E_k maximální a jak bude veliká?

KATEGORIE K

1. Uveďte nutnou podmínku existence lokálního extrému funkce $f(x)$ v bodě x_0 ve tvaru pravdivé implikace. Může mít funkce $f(x) = 2x^3 + x$ lokální extrémy?

2. Načrtněte graf libovolné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle 0; 3\rangle$, jestliže víte, že $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$, $y(2) = 1$.

3. Traktor se má přemístit z místa A na silnici do místa B v polích. V kterém místě má odbočit ze silnice do polí, aby byl v místě B co nejdříve, jede-li po silnici rychlostí v_1 km/hod., v polích rychlostí v_2 km/hod., kde $v_1 > v_2$.

5 VÝSLEDKY PEDAGOGICKÉHO EXPERIMENTU

V akademickém roce 2005/2006 byl realizován pedagogický experiment, jehož cílem bylo zjistit úspěšnost studentů v řešení teoretických i praktických úkolů v jednotlivých kategoriích. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 Úspěšnost studentů v řešení úloh jednotlivých kategorií

Varianta	Kategorie				Úlohy	Úlohy
	V	D	T	K	T	celkem
A	23,0	46,0	54,8	31,2	14,8	44,6
B	35,3	26,2	18,6	17,4	15,2	24,4
C	35,3	43,8	30,1	31,3	8,6	24,2
D	25,2	58,9	32,2	29,3	14,6	26,5
E	56,0	45,3	32,1	28,3	14,8	44,6
F	48,2	45,3	31,0	34,9	12,6	36,2

Z tabulky je zřejmé, že v teoretické části zkoušky jsou studenti nejúspěšnější v úkolech kategorie D, v nichž se ověřují dovednosti a zvládnutí metod. Naopak studenti zaostávají při řešení úkolů kategorie K, u nichž se předpokládá tvořivá činnost a schopnost logického myšlení. V praktické části zkoušky studentům činí potíže řešení úloh kategorie T, v nichž mají aplikovat osvojené vědomosti a dovednosti při řešení problémů.

6 Závěr

Z rozboru pedagogického experimentu vyplývá, že ve výuce i při zkouškách je třeba omezovat pouhé reprodukování osvojených poznatků, ale naopak klást větší důraz na rozvíjení schopnosti aplikace osvojených vědomostí a dovedností při řešení problémů studovaného oboru. Dále je žádoucí se zaměřit na rozvoj logického myšlení a na ověřování schopností samostatného uvažování a tvoření.

Literatura

[1] PRACHAŘ, O. Zamyšlení nad hodnocením výkonů studenta a klasifikací studijních výsledků v matematice na vysoké škole. In *Scientific Papers of the University of Pardubice, Series D Faculty of Economics and Administration 9 (2004).* Pardubice : Univerzita Pardubice, 2004.

[2] PRACHAŘ, O. Pojetí a didaktická koncepce vyučování matematice ve strukturovaném studiu na vysoké škole technického zaměření. *Matematika v inženýrském vzdělávání – Sborník 27. mezinárodní konference O matematice na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských, Hejnice 2002.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2002.

[3] ZAHRÁDKA, J. Jak znají studenti 1. ročníku FES matematiku? In *Scientific Papers of the University of Pardubice, Series D Faculty of Economics and Administration (2004).* Pardubice : Univerzita Pardubice, 2006.

Zkušenosti s výukou matematiky a fyziky v bakalářské formě studia na DFJP Univerzity Pardubice

Ludvík Prouza

Abstrakt

Příspěvek stručně hodnotí zkušenosti, získané na Dopravní fakultě Jana Pernera z prvních čtyř let výuky v tříletém bakalářském stupni strukturovaného studia a z prvního roku výuky v dvouletém magisterském stupni navazujícím na stupeň bakalářský. Přibližuje problémy výuky matematiky a fyziky v kontextu s celkovou koncepcí studijních programů a jejich jednotlivých oborů.

1 Úvod

Na Dopravní fakultě Jana Pernera přistoupili loni ke státním závěrečným zkouškám první studenti, kteří absolvovali tři roky výuky podle nových studijních plánů strukturovaného studia. Letos se k těmto zkouškám připravuje již druhý závěrečný ročník. Téměř všichni absolventi loňského závěrečného ročníku, kteří složili státní zkoušku v řádném termínu, pokračují v navazujícím magisterském stupni studia. Nemůžeme proto objektivně hodnotit jejich úspěšnost při shánění zaměstnání, nejvýš snad jejich předpokládané šance a pozice na trhu práce. Přesto se již dnes můžeme zamyslet nad uplynulými čtyřmi roky a zkusit posoudit z našich profesních, ale i obecnějších pozic účinnost pedagogického působení při výchově budoucích bakalářů a inženýrů. Můžeme na základě uplynulých čtyř let především přesněji pojmenovat některé problémy ve skladbě studijních plánů a pokusit se nastínit možná řešení, průchodná v současné ekonomické a personální situaci fakulty.

Své úvahy rozdělíme do dvou rovin, roviny posluchačů, jejich připravenosti na vysokoškolský způsob práce v bakalářském stupni studia, úrovně jejich znalostí a motivace a do roviny studijních plánů, jejich skladby, náročnosti a naplnění pedagogickými výkony.

2 Posluchači

Skladba přijatých uchazečů o studium v bakalářském stupni studia na Dopravní fakultě Jana Pernera se v několika posledních letech nijak výrazně nemění. Pohled do tabulky 1 to jasně dokumentuje na údajích z minulých čtyř roků, které jsou uvedeny v procentech. Nemění se ani úroveň znalostí prokazovaných při přijímacích zkouškách z matematiky a z fyziky, jak dokládají každoročně zveřejňované závěrečné zprávy. V kontextu s avizovanými změnami ve výuce matematiky na základních a středních školách můžeme nejspíš toto konstatování považovat za pozitivní.

Tabulka 1 Struktura přijatých posluchačů (%)

Rok	Gymnázia	SPŠ	SOŠ	ISŠ	OA	SOU
2003	21,3	42,5	13,3	8,9	2,1	11,9
2004	22,2	43,3	12,5	8,7	1,6	11,7
2005	21,8	41,1	13,1	10,0	2,4	11,6
2006	21,2	42,1	14,1	9,7	2,6	10,3

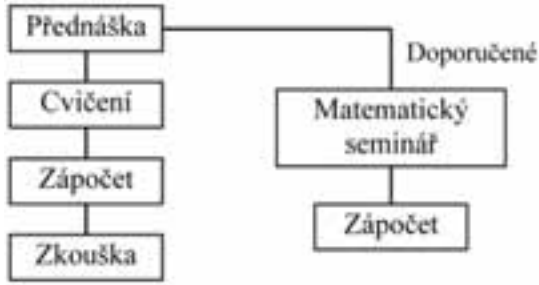
Uvědomíme si snadno, že výchozí pozice pro výuku matematiky a fyziky v bakalářském stupni studia není jednoduchá. I když časová dotace na výuku je relativně solidní, jak uvedu níže, zůstává základní díl práce na studentech samotných, na jejich schopnosti a ochotě sebevzdělávat se i mimo pravidelnou výuku.

Zásadní otázkou, která před naší fakultou, tak jako před dalšími technickými školami a fakultami stojí, je otázka, zda a jak rychle se podaří již v prvních semestrech jejich bakalářského stupně studia komplexním působením všech zainteresovaných subjektů, tj. především také oborových kateder, nastolit při výuce přírodovědných předmětů takovou pracovní atmosféru, která by studenty motivovala k cílevědomé přípravě na budoucí aplikace matematických a fyzikálních znalostí a matematického způsobu uvažování v odborných předmětech specializací a posléze také v samostatné praxi.

V této oblasti není na DFJP stále situace uspokojivá. Její částečné řešení bude možné po připravované reakreditaci bakalářského studijního programu v letošním roce.

Výuka základní matematiky v prvním ročníku probíhá v současné době podle tradičního schématu, které je na obr. 1. Vychází z převážně teoretické přednášky, na které je uvedeno několik ilustrativních a motivačních příkladů k probírané látce. Ta se pak procvičuje v menších skupinách pod vedením cvičících – matematiků. Základním cílem cvičení je získání praktických početních dovedností. Poměr hodin přednáška – cvičení je 3/3 v obou semestrech 1. ročníku.

Přednáška je společná pro všechny obory, cvičení ale probíhají ve studijních skupinách, které jsou vytvářeny podle oborů, resp. studijních zaměření. Stále



Obr. 1

tedy existuje reálná šance odlišit alespoň do určité míry konkrétní náplň cvičení podle studovaného oboru a zařadit některé speciální „oborové“ motivační příklady.

Zájem studentů o Matematický seminář, který se v posledních třech letech znovu otevíral, je poměrně slušný. K výuce se hlásilo téměř 200 posluchačů prezenční formy studia prvního ročníku, ve kterém bylo zapsáno cca 450 nových studentů.

Do druhého ročníku po složení zkoušek z předmětů Matematika I a Matematika II úspěšně postoupilo cca 150 studentů, z nich asi 40 % těch, kteří absolvovali Matematický seminář. Podle jejich subjektivního hodnocení byla pro ně účast v semináři významným usnadněním práce v průběhu semestru.

Na výuku základní matematiky navazuje ve druhém ročníku výuka předmětů Teorie pravděpodobnosti a statistika, Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika a Operační výzkum. Ani studium těchto předmětů se neobejde bez problémů, ale projevuje se již vyšší schopnost studentů ukáznit se a cílevědomě se připravovat na zkoušky. Proto neúspěšnost v „matematických“ předmětech a v „odborných“ předmětech jednotlivých oborů se už nijak významně neliší. Významně se ale v technických oborech projevuje nepříznivá situace ve výuce fyziky. Předmět Fyzika II, který absolvují posluchači oboru Dopravní infrastruktura a oboru Provozní spolehlivost dopravních prostředků a infrastruktury, působí studentům takové problémy, že nemalá část z nich volí již jen pod dojmem budoucích obtíží po prvním ročníku přestup na některý z technologicko-ekonomických oborů, ve kterých absolvují předmět Základy fyziky.

Ve třetím ročníku mají posluchači aplikovat nabyté vědomosti při získávání své konkrétní specializace. V odborných předmětech oborů tomu tak v drtivé většině skutečně je, což nás jistě nemůže překvapit. Otázka je, zda to není příliš pozdě a zda by to nemohlo být již dříve. Několik poznatků a námětů uvedu v následujícím odstavci.

Letos jsme již získali první zkušenosti s výukou v magisterském studijním programu navazujícím na bakalářský program. V úvodním ročníku absolvovali

studenti předmět Aplikovaná matematika, jehož cílem je prohloubení a částečné rozšíření vědomostí získaných v bakalářském programu. Při výuce se projevil očekávaným způsobem odstup od výuky matematiky v bakalářském studiu. Některé partie bylo třeba zopakovat a připomenout. To pochopitelně spotřebovalo část výukového času, který měl být věnován výše jmenovaným účelům. Zvlášť výrazně se tato situace projevila u studijního oboru Technologie a řízení dopravy, kde je ve druhém semestru prvního ročníku navazujícího magisterského studia zařazen předmět Stochastické modely operačního výzkumu. Ten navazuje na předmět Teorie pravděpodobnosti a statistika, který studenti absolvovali ve druhém ročníku bakalářského studia. Je třeba konstatovat, že řada z nich absolvovala tento předmět TPS s nemalými obtížemi a to se nyní projevilo i v rozvíjejícím předmětu SMOV.

3 Studijní plány

Studijní plány bakalářského strukturovaného studia vznikaly v nedávné době v našem prostředí jako novinka. Zásadním problémem při jejich tvorbě byla naprostá absence celospolečenské poptávky po jejich absolventech. Tato situace se ve skutečnosti nijak výrazně nezměnila ještě ani nyní, i když si i domácí zaměstnavatelé a instituce už pomalu na titul Bc. začínají zvykat. V počátcích bakalářského studia měly ovšem nejasnosti kolem uplatnění absolventů často nepříznivý dopad na skladbu studijních plánů, což se do jisté míry projevilo i na studijních plánech DFJP. Tato skutečnost se prokázala především loni, kdy první posluchači dospěli do třetího ročníku a měli studium ukončit státní závěrečnou zkouškou.

Při tvorbě studijního plánu oboru bychom měli zřejmě vycházet z profilu absolventa. Tento profil pak rozhodujícím způsobem ovlivňuje předpokládané uplatnění absolventa v praxi. Pokud ovšem není toto uplatnění jasně definováno (a vyloučíme možnost takový obor vůbec nerealizovat), je třeba odvodit toto uplatnění z dostupných a známých informací o předpokládaném cílovém prostředí absolventů. To může ale vést k některým nesprávným závěrům, které se projeví až při praktické realizaci studijního plánu. Některé tyto problémy se nevyhnuly ani Dopravní fakultě Jana Pernera.

V akademické veřejnosti jsou dobře známy počáteční nejasnosti kolem bakalářských studijních plánů. Bakalář „pro praxi“, bakalář jako „předstupeň“ magistra, bakalář jako obojí, bakalářské studium jako „nižší stupeň“ vysokoškolského studia. Při tvorbě studijních plánů bakalářského studia na DFJP byla přijata varianta bakaláře pro další studium i pro praxi. S první částí uplatnění nebyl zásadní problém, pokračování v navazujícím studiu je možné a o prostupnosti jednotlivých plánů nebudeme uvažovat. Bylo proto třeba se soustředit na druhou část, uplatnění v praxi. Tam byla ale pro úvahy o absolventech k dispozici jen místa inženýrská. Kromě několika zahraničních firem, které bakaláře znaly

ze svých domovských zemí, neexistovaly bakalářské pracovní pozice ve firmách, které tradičně zaměstnávají absolventy DFJP. Důsledek byl pro tvorbu studijních plánů poněkud nepříznivý. Ve snaze vyprofilovat kvalitního bakaláře, který je schopen se uplatnit na existujících pracovních pozicích s požadovanou vysokoškolskou kvalifikací, zařadily některé oborové rady do tříletého bakalářského plánu i několik předmětů z vyšších ročníků původního pětiletého magisterského studia. Přitom společný studijní plán pro všechny studenty prvního ročníku se téměř nezměnil. Zato přibyla povinnost sepsat ve druhém semestru třetího ročníku bakalářskou práci a absolvovat její obhajobu a státní závěrečnou zkoušku před komisí. Tak se stalo, že v některých oborech měli studenti v posledním semestru bakalářského studia ještě i pět klasifikovaných povinností. Mělo-li být ukončení studia pro většinu posluchačů reálné, musely být státní zkoušky až v září, což je principiálně nevhodné.

Řešení bylo třeba hledat při plánované reakreditaci v roce 2006. Kromě jistého snížení celkového objemu učiva bylo třeba „posunout odbornost“ směrem k nižším ročníkům. Tak se v prvním ročníku kromě obecných předmětů s dopravní tématikou objevily i předměty základů jednotlivých oborů. To se jistě mohlo nepříznivě dotknout i počtu hodin výuky matematiky a fyziky. Vzhledem k racionálnímu přístupu garantů jednotlivých oborů se tak nestalo. Současná vcelku příznivá situace v počtu hodin matematických předmětů se nezměnila k horšímu, jak tomu již na nejedné vysoké škole bylo.

V příspěvku [1] jsem před třemi roky naznačil některé způsoby organizace výuky matematiky ve spolupráci s odbornými katedrami. Doposud realizace naráží na personální a legislativní obtíže. V posledních letech vytrvale klesá počet interních doktorandů. Jejich studijní řád jim předepisuje nutný počet hodin pedagogického působení, který tito doktorandi beze zbytku vyčerpají při výuce odborných předmětů kateder. Zapojení doktorandů do výuky obecných předmětů teoretického základu je v brzké době nereálné. Jistá možnost se naskýtá po výběru předmětů daného oboru do nižších ročníků, speciálně do ročníku prvního. Vhodnou volbou těchto předmětů bude alespoň v některých oborech do jisté míry možné koordinovat výuku oborového předmětu s výukou matematiky a fyziky tak, aby studenti získali příslušné teoretické poznatky i příklady praktických aplikací v přímé součinnosti pedagogů obou disciplín. To je náš nejbližší cíl.

4 Závěr

I z velmi stručného rozboru situace na DFJP po uplynutí kompletního tříletého období bakalářského studia a prvního ročníku navazujícího magisterského studia je zřejmé, že před oborovými radami fakulty stál v nedávné minulosti vážný úkol. Reakreditace studijních programů nebyla pouhým potvrzením současných studijních plánů. Učivo bylo třeba částečně nově vhodným způsobem rozložit

do jednotlivých ročníků a semestrů, v některých případech i přesunout v rámci obou studijních programů. To se však nikterak nepříznivě nedotklo počtu hodin výuky matematiky a fyziky v bakalářském studijním programu. Podle signálů ze středních škol očekáváme, že se v nedaleké budoucnosti úroveň vstupních znalostí studentů ještě mírně sníží. Jsme připraveni na to reagovat hned v prvním ročníku bakalářského studia v oblasti volitelných předmětů.

Literatura

[1] PROUZA, L. Integrovaná výuka matematiky ve strukturovaném studiu na DFJP UPa. In *3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách.* Brno : 2003.

Prostorová představivost a její uplatnění v chemii

Jana Příhonská, Jan Grégr

Abstrakt

Příspěvek se zabývá problémem prostorové představivosti v chemii. Pozornost je věnována využití různých matematických prostředků pro prostorové vnímání struktury molekul: geometrických modelů, geometrických operací, drátěných modelů či uzlových grafů. Dále je nastíněna možnost matematického popisu pomocí bodových grup.

1 Úvod

Albert Einstein kdysi řekl, že *‚představivost je důležitější než znalosti‘*. Pro výuku chemie nestačí znát jen informace o látkách, ale je potřeba mít určitou míru představ, co se skrývá za chemickými značkami a vzorci. Jednou z prvních podmínek je prostorové vnímání molekul. Prostorovou představivost prvotně rozvíjí u žáků a studentů matematické vědy. Chceme-li u žáků zakotvit hluboké znalosti spolu s dokonalými představami, musíme navazovat na didaktické poznatky matematiků a dále je rozvíjet na speciálních případech i ve výuce chemie.

Vzorce chemických látek nemůžeme tedy psát jen značkami a symboly, ale na určité úrovni základních znalostí potřebujeme ukázat, že tyto vzorce vyjadřují určité prostorové útvary. Nabízí se možnost využití počítačové vizualizace molekul. Výhodou této možnosti je celkem jednoduché ovládání programů a manipulace s virtuálními modely, avšak je zde i značná nevýhoda např. v obtížném nastavování pohledů na molekulu, práce pouze s jedinou molekulární strukturou a často příliš jednoduchá grafika (málo barev). Nabízí se proto několik dalších možností, jak u žáků vytvářet prostorové představy o struktuře molekul:

1. Využití plošných obrazců známých molekul v pohledech pootočených o 90° – tedy pohledy „čelně“, zprava, zleva, zezadu, zepředu, shora a zespoda. Způsob je vhodný pro zdatnější v geometrii, pro ty, kdo základy prostorové imaginace v matematice nezvládli, zůstávají jen téměř nic neříkajícími ilustracemi.

2. Využití mechanických modelů – atomy = kuličky, vazby = spojovací tyčinky. Výhody: každý žák si může sám tvořit modely, otáčet s nimi, pozorovat je. Nevýhody: ne všechny molekuly lze správně vytvořit, obtížnější kontrola správnosti modelů.

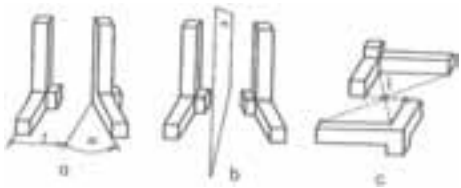
Z matematického hlediska se pak nabízejí následující možnosti:

3. Využití symetrie v krystalech a následně geometrických operací pro vytvoření základního motivu.
4. Využití geometrických modelů
5. Matematický popis struktury pomocí bodových grup
6. Využití uzlového grafu

2 Symetrie v krystalech

Prostorové uspořádání atomů v molekulách je popsatelné na základě symetrie, kterou daná molekula vykazuje. Nauka o symetrii je jádrem krystalografie. Pravidelný trojrozměrný útvar (vzor) lze vytvořit ze základního motivu operacemi **opakování**: translací (tj. posunutím), otáčením, zrcadlením, inverzí anebo operacemi složenými z těchto operací.

Operace opakování jsou uvedeny na obr. 1.



Obr. 1 Operace opakování: a) translace a otáčení, b) zrcadlení, c) inverze (m značí rovinu symetrie a $\bar{1}$ bod středové souměrnosti)

Pravidelný vzor vytvořený těmito operacemi opakování je pak **symetrický** (tj. přechází sám v sebe operacemi symetrie), neboli je symetrický vůči určitým prvkům symetrie a jejich kombinací.

3 Geometrické modely

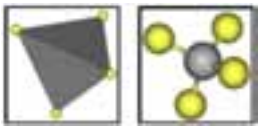
V rámci studia chemie je nutno pochopit na různých úrovních několik základních pojmů:

1. Geometrické tvary molekul – pravidelné rozdělení prostoru okolo centrálního atomu pro 4 a více ekvivalentních vazeb k dalším atomům

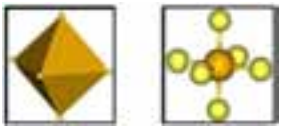
a) tetraedrické uspořádání
b) oktaedrické uspořádání
c) další možnosti: trigonální bipyramida pro 5 připojených atomů, krychle pro 8 připojených atomů

2. Deformace pravidelných geometrických tvarů změnou atomu ve sloučenině
3. Spojování základních geometrických útvarů
4. Geometrická isomerie chemických sloučenin

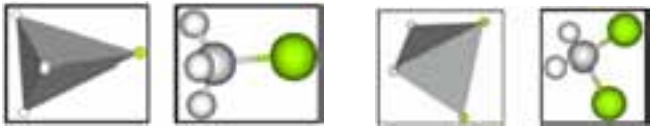
Jednou z možností, jak pochopit prostorové uspořádání atomů v molekulách sloučenin je „vsazení“, čili umístění molekuly do prostorového útvaru (tělesa), jak ukazují následující obrázky (Obr. 2–6):



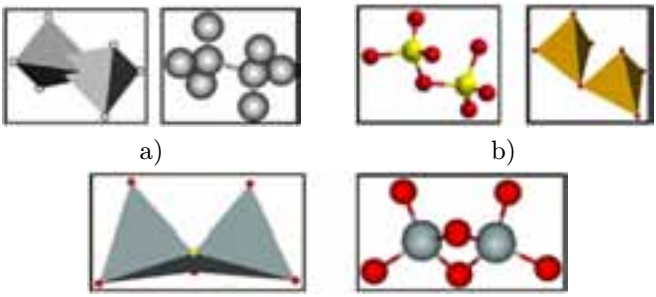
Obr. 2 Tetraedrické uspořádání



Obr. 3 Oktaedrické uspořádání



Obr. 4 Deformace pravidelných geometrických tvarů změnou atomu ve sloučenině



Obr. 5 Spojování základních geometrických útvarů
a) přes střed tetraedru, b) přes rohy (navázané atomy nebo částice) c) přes hranu (přes dva navázané atomy nebo částice)

a) b)

Obr. 6 Geometrická isomerie chemických sloučenin cis-trans dvojice stejných částic; a) vedle sebe, b) napříč přes střed struktury

Čtenář si jistě všimne, že obrazy jsou ve většině případů zavádějící a zkreslující. Středové atomy, kolem nichž jsou rozmístěny další molekuly (Obr. 2–4) jsou zcela zakryty a bez příslušného modelu dané molekuly není vůbec zřejmé, jak molekula ve skutečnosti vypadá. Jistý vhled do dané situace s sebou přinášejí **drátěné modely** a jejich geometrická znázornění.

Další důležitý fakt, který nesmíme opominout, je různobarevnost atomů v příslušných molekulách. V případě zachování barev je např. model na obr. 2 či 4 zcela zavádějící. Zákonitě se vynořují následující otázky:

- Jsou atomy/částice všechny stejně velké?
- Mají všechny atomy/částice stejnou vzdálenost od centrálního atomu?
- Je nutné dodržet barevnou různorodost?

4 Bodové grupy

Na základě předchozích úvah a doplněním vizuálních zobrazení drátěnými modely se nabízí další možnost, jak je možné všechny uvedené modely popsat pomocí **bodových grup** symetrií [1], případně využít barevných grup v souvislosti se zachováním různobarevného označení částic/atomů.

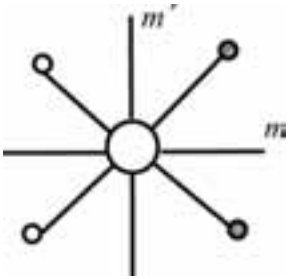
Bodovou grupou rozumíme kombinace operací symetrie, které ponechávají alespoň jeden bod v prostoru nepohyblivý. Operace symetrie (obr. 1) – zrcadlení a inverze – mají jednoduché prvky symetrie, nazývané

- **Rovina zrcadlení** (označení m od anglického slova *mirror – zrcadlo*)
- **Inverze** nebo **střed inverze** nebo **střed symetrie** (označení $\bar{1}$)

Je-li struktura symetrická vůči otáčení kolem nějaké osy A o úhel α a jeho celistvé násobky (viz obr. 1), pak je tato osa **rotační osa** symetrie. Kdybychom tuto operaci prováděli opakovaně, pak se struktura po n otočeních dostane do výchozí polohy.

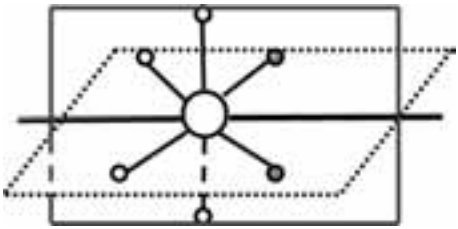
Uvažujeme-li ještě **inverzní osy**, pak máme na mysli složené prvky symetrie, jejichž operace symetrie sestává z otáčení a inverze. Nezáleží na pořadí těchto operací. Tato složená operace se však opakuje jako celek, tj. nelze např. provést řadu otáčení a po nich inverzi (nebo řadu inverzí).

Uveďme jednu z možností, jak danou symetrii popsat. Prostorový model chemické sloučeniny na Obr. 6a, b – geometrická isomerie cis-trans je možné znázornit rovinně či prostorově (obr. 7a, b) se zobrazením příslušných rovin symetrie a středu inverze.



a)

případně



při prostorovém zobrazení

b)

Obr. 7 Grupa symetrie $(m', m, \bar{1})$ či (m', m, m)

5 Závěr

Příspěvek upozorňuje na problémy vnímání prostorového uspořádání atomů v molekulách v rámci učiva chemie. Upozorňuje na problematiku prostorového vnímání a s tím související problematiku rozvoje prostorové představivosti. Nastiňuje možnosti, jak využít různých prostředků z matematické teorie pro rozvoj vnímání prostorového uspořádání molekul. Stojí za úvahu, jak by bylo možno využít grafického znázornění užitím **uzlového grafu** [2], který umožňuje rovinné znázornění prostorového útvaru za předem definovaných podmínek. Tuto možnost považujeme za námět pro další rozpracování. Jistě se poté nabízí možnost porovnání všech uvedených možností. Při jejich souběžném použití by bylo jistě snazší pochopit zákonitosti prostorového uspořádání atomů molekul. Rozpracování jednotlivých nabízených metod je předmětem dalšího výzkumného zaměření.

Poděkování

Poděkování patří prof. Janě Přívratské za podnětné připomínky a náměty k dalšímu přístupu k dané problematice.

Literatura

[1] KALVODA, V., POLCAROVÁ, M., LUKÁČ, P. *Základy strukturní analýzy.* Praha : Univerzita Karlova, 1992.

[2] POLSTER, B. *A Geometrical Picture Book.* New York : Springer-Verlag, 1998.

Současné trendy ve vzdělávání učitelů matematiky

Jarmila Robová

Abstrakt

Příspěvek se zabývá změnami, kterými prochází vzdělávání učitelů matematiky pod vlivem informačních a komunikačních technologií. V centru pozornosti je internet a možnosti jeho využití ve vyučování matematiky na střední škole. Součástí příspěvku jsou ukázky webových stránek vytvořených studenty učitelství matematiky na katedře didaktiky matematiky MFF UK, které jsou určeny pro výuku různých tematických okruhů.

1 Úvod

Změny, kterými české školství prochází v posledních letech, přinášejí především postupnou decentralizaci vzdělávacího systému. Rámcové vzdělávací plány a jejich rozpracování na jednotlivých školách ovlivňují nejen pojetí vyučovaných předmětů, ale především práci samotných učitelů. Učitel se stává stále významnějším činitelem ve vzdělávacím procesu, neboť se aktivně spolupodílí na formování cílů, učiva i metod „svého“ předmětu. Schopnost učitele reagovat na měnící se požadavky společnosti na vzdělání a jeho připravenost tyto požadavky vhodným způsobem začlenit do výuky významně ovlivňuje úroveň vyučování.

Učitelé matematiky, kteří dnes vstupují do praxe, v průběhu následujících čtyřiceti let svého působení na žáky nevystačí jen s vědomostmi, které získali během přípravy na toto povolání. Změnami tak neprochází jen vyučování matematiky na základních a středních školách, ale i samotné vzdělávání učitelů. V současné době jsou řešeny různé rozvojové projekty, jejichž cílem je příprava a realizace systému celoživotního vzdělávání učitelů, a to nejen matematiky (např. projekt „Modulární systém dalšího vzdělávání učitelů základních a středních škol v Praze“, „Program dalšího profesního vzdělávání učitelů na Univerzitě Karlově v Praze“, projekt „Heuréka III – rozvoj aktivizujících forem vzdělávání učitelů fyziky a matematiky“, aj.).

Přeměnou prochází také studium budoucích učitelů matematiky. Cílem současné vysokoškolské přípravy je vychovat učitele, kteří nebudou jen předávat systémy poznatků, ale kteří povedou své žáky k samostatnému myšlení a objevování souvislostí.

2 Webové stránky ve vyučování matematiky

Vedle současného trendu ve vzdělávání učitelů matematiky, kterým bezpochyby je nezbytnost jejich celoživotního vzdělávání, se ve vysokoškolské přípravě budoucích učitelů stále výrazněji prosazuje výpočetní technika. Běžně dnes hovoříme o vyučování matematiky za podpory informačních a komunikačních technologií (ICT). Rozvoj uživatelsky příjemného softwaru, kterým je například Cabri, přináší změny do výuky především z pohledu vyučovacích metod. Používání softwaru typu Computer Algebra System (CAS), ke kterému patří programy Derive a TI InterActive, pak vyvolává otázky, které výpočetní algoritmy lze z učiva matematiky vynechat.

Dalším prostředkem ICT, který se využívá ve vyučování, je internet. Na internetu lze dnes nalézt řadu informací a programů, které souvisejí s vyučováním matematiky. Kromě historických poznámek či přehledů matematických vzorců může uživatel webových stránek stahovat různé matematické programy, seznamovat se s matematickými vztahy prostřednictvím různých appletů či skriptů, které tyto vztahy dynamicky demonstrují.

Vzhledem k tomu, že studenti středních škol i žáci druhého stupně základních škol dnes internet běžně používají jako zdroj informací, nevyžaduje zařazení tohoto prostředku do vyučování další časovou dotaci pro zvládnutí základů práce s tímto prostředkem. Využívání internetu v hodinách matematiky či domácí přípravě studentů má však také svá úskalí. Pro běžného uživatele, který nezná různé matematické stránky, je vyhledání stránek s požadovaným obsahem zdlouhavou záležitostí; často také dochází k tomu, že konkrétní stránky po určité době zaniknou. Nejzávažnějším úskalím je však skutečnost, že není obecně zajištěna věcná správnost matematických informací (obr. 1), které zde uživatel může nalézt. Jedná se především o stránky vytvářené samotnými studenty v rámci jejich vlastních aktivit.

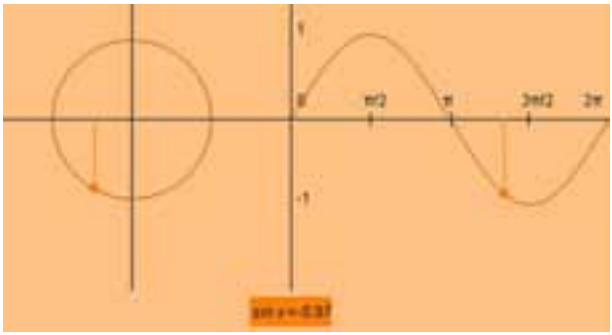
Obr. 1 Část webové stránky s chybami

V posledních letech je na katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze uskutečňován projekt, jehož cílem je vytvoření souboru webových stránek určených pro výuku matematiky. Tyto stránky mohou využívat učitelé a žáci středních i základních škol. Stránky vytvářejí studenti učitelství matematiky v rámci svých diplomových a bakalářských prací. Kvalitní práce jsou po jejich úspěšné obhajobě zveřejněny na stránkách katedry www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm. Na této adrese je uveden odkaz „Ukázky studentských prací“, kde jsou tyto práce k dispozici.

V současné době jsou již vypracovány stránky, které se zabývají tématy

- posloupnosti a řady,
- úvod do diferenciálního počtu,
- planimetrie,
- goniometrie a trigonometrie,
- komplexní čísla.

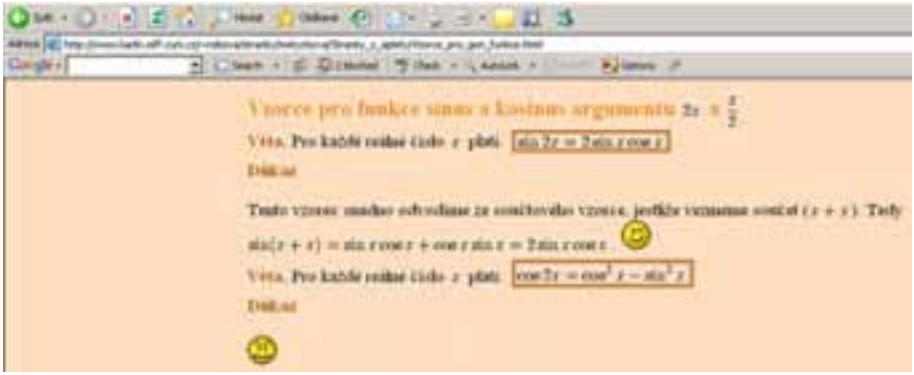
Připravují se další práce z tématu „Výroková logika“, „Kombinatorika“, „Funkce“ a „Rovnice a nerovnice“. Všechny uvedené práce jsou koncipovány tak, aby přístupnou formou přiblížily středoškolským studentům dané téma; výklad je obohacen o dynamické prvky (obr. 2), které výrazně zvyšují názornost výkladu.



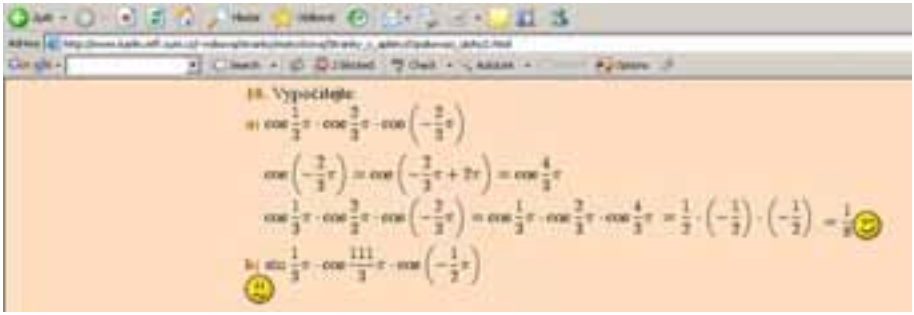
Obr. 2 Applet na konstrukci sinusoidy pomocí jednotkové kružnice

Kromě výkladu daného tématu obsahují stránky vysvětlující poznámky, důkazy uvedených vět a řešené příklady. Důkazy i poznámky jsou skryty pod ikonami smajlíků, aby nebyla rušena hlavní linie výkladu, a uživateli se zobrazí až po kliknutí na ikonu (obr. 3).

Stránky obsahují také příklady, jejichž prostřednictvím si studenti mohou ověřit pochopení látky. Uživatel může řešit příklady zcela samostatně nebo s využitím nápovědy a postupně rozkrývaným řešením (obr. 4).



Obr. 3 Odkrývání důkazů



Obr. 4 Krokování řešení příkladu

Poněkud odlišnou koncepci má práce [1], která nemá formu webových stránek. Jedná se o program pro výuku funkcí doplněný manuálem a zájemci si jej mohou stáhnout ze stránek katedry didaktiky matematiky.

3 Závěr

I když jsou prostředky ICT stále častěji využívány ve vyučování matematiky, je to především učitel, jeho schopnosti, vědomosti a pedagogické dovednosti, které hrají zásadní roli ve vyučovacím procesu. Nelze se domnívat, že využívání počítačů a internetu samo o sobě zvýší efektivitu vyučování.

Zařazení výpočetní techniky včetně internetu do hodin matematiky je výrazně aktivizujícím prvkem, který napomáhá zvýšení úrovně vyučování. Studenti si lépe zapamatují poznatky, ke kterým dospěli prostřednictvím vlastní činnosti. Říká se, že člověk si pamatuje přibližně deset procent toho, co čte, až šedesát procent toho, co vidí, a přibližně devadesát procent informací, které byly získány interaktivní formou.

Literatura

[1] MÍČA, D. *Program pro výuku funkcí ve středoškolské matematice.* Diplomová práce. Praha : UK MFF, 2005.

[2] MOTYČKOVÁ, M. *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole.* Diplomová práce. Praha : UK MFF, 2006.

[3] ROBOVÁ, J. Výukové programy z matematiky na internetu. In Řehout, V., a kol. *Pedagogický software.* 1. vyd. České Budějovice : Scientific Pedagogical Publishing, 2004.

[4] ROBOVÁ, J. Vliv ICT na školskou matematiku. In Lengyelfalusy, T., Horváth, P. *3. žilinská didaktická konferencia.* 1. vyd. Žilina : Žilinská univerzita, 2006.

Dělitelnost a číselné soustavy demonstrační program

Michal Roháček, Pavel Tlustý

Abstrakt

Obsahem příspěvku je informace o programu, který napomáhá nejen při výuce matematiky na ZŠ. Program umožňuje uživateli převody mezi desítkovou soustavou a soustavami o jiném základu, pracovat s počitadlem, zobrazovat zápis čísla podle Egypťanů, Babyloňanů a Mayů nebo ověřovat dělitelnost čísla. Dále ukazuje na některé praktické aplikace dělitelnosti v každodenním životě.

1 Úvod

Proč vlastně tento program vznikl? Měl by doplňovat výuku matematiky a informatiky na ZŠ, kde se nyní začínají rozjíždět a definovat rámcově vzdělávací programy. Dosud se totiž učitelé skoro vůbec nevěnovali číselným soustavám o jiném základu než 10, teď mají možnost začít, neboť nejsou tolik svazováni osnovami a také mohou například propojit dějepis s matematikou či informatikou apod.

Cílem práce je přiblížit dělitelnost žákům na ZŠ, ukázat jim řadu usnadňujících kritérií a nebo jim ukázat jiný systém soustavy než desítkový a také na něm například definovat principy aritmetických operací. Program by měl v některých otázkách napomoci. Prostředí se neustále vyvíjí, je laděno a upravováno na základě připomínek uživatelů či při zjištění chyb.

Program je uložen jako exe-soubor, nevyžaduje tedy žádný nákup nového softwaru. Uživatel si ho může stáhnout na stránkách PF JU pod katedrou matematiky či obdržet e-mailem, kontakt `miro81@seznam.cz`.

2 Prostředí

Program je vytvořen v prostředí Imagine Logo, který vznikl v roce 2001 a je nepřímým následovníkem Comenius Loga. Imagine je nová generace prostředí a programovacího jazyka Logo. Byl vyvinut pro žáky, studenty a učitele, kteří chtějí provádět aktivity širokého rozsahu, jako kreslení a animování, prezentace svých projektů na Internetu, tvorba multimediálních aplikací, modelování, vyvíjení projektů a mikrosvětů pro matematiku. Imagine má objektově orientovanou

strukturu, podporuje hierarchii objektů a chování a paralelní nezávislé procesy. Hlavním cílem prostředí Imagine je poskytnout studentům, učitelům a tvůrcům pedagogických aplikací lákavý a silný nástroj pro učení (se). Prostředí je kompletně lokalizováno do českého jazyka.

Program vznikl při tvorbě diplomové práce a mohl by se definovat jako kalkulačka. Uživatel se zde může opřít o nápovědu, která mu „zajistí“ správný chod programu, správné zobrazování. Pomocí myši a poklepání se pohybuje mezi jednotlivými stránkami a vykonává jednotlivé příkazy. Čísla do textových polí zadává na numerické klávesnici.

3 Využití programu

Podle programu může učitel matematiky vykládat látku a nemusí veškeré převody čísel z jednotlivých soustav převádět ručně, názorně ukazovat piktogramy čísel starých národů, nemusí složitě malovat na tabuli (případně ukazovat na lavici) princip počitadla. Pokud má tedy učebnu podporující výuku na PC. Dále může sloužit učitelům informatiky při výkladu nejenom dvojkové soustavy v počítačích.

Žák program ocení k rychlému zobrazování (převodu) čísel, stačí zadat jen číslo, které chce převádět a držet se nápovědy, která je součástí. Hlavně mu přehledně ukáže, že číslo v naší (desítkové) soustavě má „různou podobu“ nebo naopak, že dvě stejně vypadající čísla mají jinou hodnotu v desítkové soustavě. Také si uživatel snadno ověří, jestli zadané rodné číslo je dělitelné jedenácti a nebo jestli zadané bankovní číslo je platné. Program zatím žákovi slouží jako jakási kalkulačka.

4 Dosavadní možnosti programu

Uživatel například zadá číslo v desítkové soustavě a program zobrazí číslo ve dvojkové či jiné číselné soustavě (obr. 1). Oproti tomu na další stránce (obr. 2), přepínání modrým puntíkem, zadá číslo například v soustavě o základu pět a to se zobrazí jak v desítkové soustavě, tak ještě v soustavě o základu, který si sám zvolil (oranžové pole).

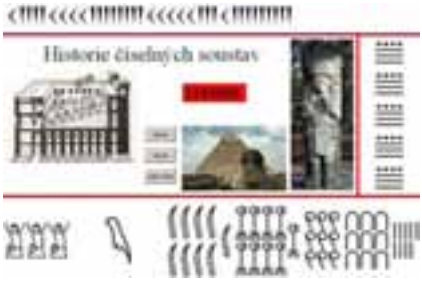
Obr. 1

Obr. 2

Tematice číselných soustav se zpravidla učitelé základních škol věnují jen okrajově nebo vůbec a raději pracují jen v soustavě o základu 10. Práce s jinými soustavami a počítání v nich však vedou právě k dokonalému pochopení vlastností přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě, což je jeden z hlavních úkolů v hodinách matematiky na základní škole. Program by měl žákům ukázat pohled na číslo trochu jinak. Takový, aby si uvědomil, že zápis čísla 10 může mít několik vlastností, nejenom, že jde o „desítku“. Program v této fázi je nástrojem pro rychlé převody čísel v různých číselných soustavách. Na podrobnější problematiku soustav odkažme čtenáře na [1] či [2].

Lepšího porozumění naší numerační soustavě se docílí pomocí počitadel. Jsou to velmi staré učební pomůcky, kterých se odedávna užívalo ve školách i při praktickém počítání. Proto je dále v programu naznačen princip počitadla (obr. 3), které pomáhá s převodem čísla (počet kamenů) do soustav o základu dvě, tři, čtyři a pět. Díky tomu se žáci názorně dozvědí, jak se vlastně převádí číslo z desítkové soustavy do soustavy o jiném základu. Počitadlo by mělo napomoci porozumět žákům, že pro úkol zapsat počet rozhozených předmětů v pozičních soustavách není rozhodující základ soustavy. Toto téma je velice pěkně rozebráno v [1].

Obr. 3



Obr. 4

Rozvoj číselných soustav a symbolický zápis čísel pomocí znaků spolu úzce souvisí. Člověk brzy zpozoroval, že tvořením nových a nových znaků by ztrácel přehled o číslech. A proto by žáci měli vědět, že odloučení od množství předmětů je projevem vyššího stupně vývoje matematického myšlení. Program obsahuje databáze obrázků, díky kterým uživatel pozná vyjádření čísel tak, jak to dělali staří Egypťané, Mayové či Babyloňané (obr. 4). Žák po zadání čísla dostane odpověď nejen ve formě zobrazení historického zápisu, ale dozví se také v jaké soustavě příslušný národ počítal a jaká měl pravidla pro psaní čísel. Základní text k historii soustav najde čtenář kupř. na [2].

Pro připomenutí program poskytuje obecně známá kritéria dělitelnosti. Uživatel zadá číslo a po ověření se zobrazí zda je či není číslo dělitelné příslušným číslem.

Poslední stránka programu naznačuje užití dělitelnosti v každodenním životě. Mnoho lidí si myslí, že teorie dělitelnosti, prvočísla a kongruence mají jen velmi malý praktický význam, opak je pravdou. K systematickému zpracování údajů o osobách, výrobcích, firmách atd. se k jejich identifikaci používá číselných kódů. Při praktickém použití takových kódů se ukazuje, že splnění podmínek – každý objekt má přiřazen právě jeden číselný kód a každé dva různé objekty mají různé kódy – nestačí. Je třeba počítat i s lidským faktorem, tj. při zadávání kódů se přepíšeme nebo čtecí zařízení nesprávně přečte číselný kód atd. Z tohoto důvodu se zpravidla přidává k danému kódu ještě kontrolní číslo tak, aby výsledný kód splňoval určitou „matematickou“ podmínku – do hry vstupuje algebra.

Program se zatím zabývá rodným číslem a bankovními účty, ale nelze zapomenout například na Evropské číslo zboží, tzv. EAN13 kód; International Standard Book Number – ISBN, identifikace knižních vydání; identifikační číslo přidělované fyzickým či právnickým osobám a ostatním ekonomickým subjektům atd. Více informací o praktické aplikaci dělitelnosti nalezne čtenář v [5].

5 Závěr

Program je zatím koncipován jako zvláštní kalkulačka, která přehledně zobrazuje čísla v různých číselných soustavách, dostatečně ukazuje historické psaní čísla, ukazuje princip počitadla. Prozatím nedává žákům příliš velký prostor pro samostatný tvořivý přístup. Program se dále rozšiřuje, poslední verze je rozšířena o podkapitolu Číselné soustavy – Aritmetické operace, kde již žák bude moci otestovat své znalosti sčítání, odčítání, násobení a dělení. Ani u této části nebude chybět kalkulačka.

Literatura

[1] JELÍNEK, M. *Numerační soustavy.* Praha : SPN, 1974.

[2] ROHÁČEK, M. *Dělitelnost a číselné soustavy.* diplomová práce, České Budějovice : PF JU katedra matematiky, duben 2006.

[3] SVATOKRIZNY, P. *Aritmetika a algebra pro pedagogické fakulty II.* Bratislava : SPN, 1978.

[4] TLUSTÝ, P. *Příklady z algebry pro II. ročník.* České Budějovice : Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1999.

[5] TLUSTÝ, P. *Obecná algebra pro učitele.* České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2006.

Některé problémy v komunikaci učitel–žák

Filip Roubíček

Abstrakt

Komunikace ve vyučování matematice je uskutečňována prostřednictvím různých jazyků, znakových systémů reprezentace. Jejich správné osvojení hraje důležitou roli nejen v komunikaci, ale také v kognitivních procesech. Mezi hlavní příčiny problémů v komunikaci mezi učitelem a žákem patří rozdílnost jejich mentálních reprezentací, nerozlišování kontextů komunikace, nepřijetí konvenčních forem zápisu řešení úloh žáky, nedostatečné seznámení žáků s pravidly pro užití znakových systémů a alternativními formami matematických zápisů.

1 Úvod

Užití různých znakových systémů je pro matematiku nejen charakteristické, ale také nezbytné, neboť nám umožňuje komunikaci a poznávání matematických zákonitostí. Znaky nám pomáhají uchopit a pochopit abstraktní matematické objekty a vztahy mezi nimi. Znaky zde rozumíme nejen matematické symboly, ale vše, co používáme pro reprezentování (tj. zastupování) objektů a vztahů v matematice, tedy i slova, obrázky, diagramy apod. V didaktice matematiky běžně hovoříme o reprezentacích (i když význam tohoto pojmu je širší). Pro komunikaci ve vyučování matematice je důležité seznámit žáky nejen s různými formami reprezentace matematických poznatků, ale také s pravidly, jak je správně tvořit, interpretovat a používat.

2 Komunikativní kompetence

Přestože komunikativní kompetence jsou doménou zejména jazykového vzdělávání a vzdělávání v informačních a komunikačních technologiích, příležitosti k jejich rozvíjení nabízí také matematické vzdělávání. Autoři Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání [5, s. 22] uvádějí, že matematické vzdělávání „vede žáka k přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu“. Může se zdát, že žáci dosáhnou této

úrovně komunikativní kompetence uplatňováním zmíněných postupů automaticky. Praxe však ukazuje, že není-li matematický jazyk rozvíjen ve všech jeho úrovních a jsou-li rozbory a zápisy řešení úloh prováděny pouze formálně, objevuje se v komunikaci řada problémů.

Hejný a Kuřina [4] upozorňují na školní konformizmus, který vzniká právě tím, že učitelé vedou žáky k osvojování hotových formulací, aniž by brali v úvahu jejich spontánní formy komunikace. V důsledku toho si žáci nevytvářejí žádnou reprezentaci poznatků, ale pouze napodobují to, co provádí učitel. Bertrand [1, s. 85] poukazuje na to, že „většina žáků, kteří mají na základní škole problémy s matematikou, si nevytváří žádný typ reprezentací problémů, které jsou jim ukládány. ... dojem pochopení problému nezíská žák z učitelova vysvětlování, ale na základě transformace, kterou při poslechu učitele provádí.“

Ve škole se setkáváme také se situací, kdy se žáci osvojením si komunikačních forem, které používá učitel, stávají úspěšnými, přestože při řešení úloh vyžadujících tvořivější přístup selhávají. Naopak žáci, kteří uplatňují vlastní myšlenkové postupy a používají osobité formy komunikace, nebývají tak úspěšní. Při řešení úloh se často dostávají k podstatě problému, ale mívají problémy sdělit své myšlenkové postupy tak, aby jim ostatní porozuměli. Přijetí určitých konvencí je pro komunikaci nezbytné. Zároveň je ale důležité, aby učitel vysvětlil žákům smysl těchto konvencí a ukázal jim, že používání jednotné terminologie a symboliky a určitých forem zápisu je i v jejich zájmu, neboť jim usnadňuje komunikaci s ostatními.

Otevřená komunikace ve třídě, například diskuse žáků k řešení úlohy, a používání různých jazyků matematiky hrají v rozvíjení komunikativních kompetencí žáků významnou roli. Hejný a Kuřina [4, s. 161], kteří uvádějí tyto atributy vyučování matematice jako jednu z deseti zásad didaktického konstruktivismu, poukazují také na to, že „dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je třeba systematicky pěstovat.“ Transmisivní vyučování, založené na předávání hotových poznatků, nebo instruktivní vyučování, zaměřené na předávání návodů, poskytují málo příležitostí k rozvíjení těchto dovedností.

3 Jazyk matematiky

Devlin [3, s. 12] v úvodu své knihy Jazyk matematiky píše, že „pro různé druhy abstraktních, formálních modelů a abstraktních struktur poskytuje nejvhodnější prostředky k popisu a analýze právě matematika, protože disponuje vhodnými pojmy, procedurami a symbolikou.“ Vyučovací praxe však ukazuje, že právě matematická terminologie a symbolika bývá pro některé žáky překážkou v porozumění matematice. Problém nebývá v termínech a symbolech samotných, ale ve způsobech, jimiž jsou ve vyučování matematice zaváděny a používány. Při zavádění matematické symboliky je třeba žáky seznámit nejen s podobou jednotlivých symbolů, ale také s pravidly pro vytváření přípustných kombinací

symbolů (tzv. syntaxí), jejich významy a užitím v různých kontextech. Pokud žáci tato pravidla neznají, stávají se pro ně zápisy pomocí symbolů v lepším případě formální záležitostí, v horším případě komunikační a kognitivní překážkou.

Přívlastky, jimiž Sternberg [6] charakterizuje jazyk, platí i pro jazyk matematiky. Jazyk matematiky je komunikativní, přestože žákům, kteří používané matematické terminologii a symbolice plně nerozumějí, takový někdy nepřipadá. Je arbitrárně symbolický, neboť význam slov a symbolů není dán na základě vnější podobnosti s tím, co zastupují, ale na základě vzájemné dohody jejich uživatelů. Dohoda v otázkách jazyka je nezbytná i mezi učitelem a žáky, protože usnadňuje vzájemnou komunikaci. Jazyk matematiky má strukturu, pravidla pro uspořádání a užití symbolů. Říkáme, že je strukturalizován v úrovni syntaktické, sémantické a pragmatické. Znalost těchto pravidel je pro porozumění matematickým zápisům klíčová, neboť různá uspořádání symbolů mají odlišné významy. Jazyk matematiky je produktivní a dynamický, neustále se vyvíjí. Prohlédneme-li si učebnice matematiky, podle nichž se učilo před padesáti, sto lety, objevíme v nich řadu termínů i symbolů, které dnes již nepoužíváme, přestože matematický obsah se téměř nezměnil.

4 Rozdílnost představ a kontextů

Každá lidská komunikace je ovlivněna mentálními reprezentacemi účastníků, kontextem komunikace a sebepojetím jednotlivých účastníků (Vybíral, 2000). Rozdílnost představ (mentálních reprezentací) a kontextů bývá v komunikaci učitel–žák jednou z nejčastějších příčin nedorozumění. Rozdílnost představ učitele a žáka je zcela přirozená; vychází totiž z odlišné úrovně jejich poznání. Proto je především na učiteli tuto skutečnost v komunikaci zohledňovat a vhodnou volbou jazykových prostředků nedorozumění eliminovat. Mluva učitele by se měla vyznačovat sociometričností, tj. orientací na mentální struktury žáka (říci to takovým způsobem, aby žák učiteli rozuměl). Čáp a Mareš [2] upozorňují na to, že učitel může žákům znesnadňovat porozumění a vytvoření adekvátních poznatkových struktur právě tím, jak s nimi komunikuje. Jsou-li jeho vyjádření sice odborně přesná, ale pro žáky nesrozumitelná, je vzájemná komunikace znemožněna. Společný jazyk, kdy užívané pojmy mají pro učitele a žáky velmi blízký obsah a slova jim v mysli konotují obdobné významy, je pro komunikaci velmi důležitý. Občas je třeba část jazyka vymezit, vysvětlit ho jeden druhému a dohodnout se na něm.

V komunikaci se opíráme o poznatky, které jsme přijali za správné. Nové poznatky se snažíme začlenit do stávající poznatkové struktury. Jsou-li dva poznatky nekompatibilní, vzniká napětí, které se snaží jedinec odstranit změnou jednoho z těchto poznatků nebo integrací obou. Důležitou úlohu v komunikaci učitel–žák sehrávají žákovské *prekoncepce*, tj. žákovská pojetí, která se vyznačují určitou nezralostí, nedokonalostí, předběžností, provizorností. Čáp a Ma-

reš [2, s. 425–426] uvádějí, že „žák své názory na svět nerad mění, a proto se často stává, že i při kvalitním výkladu nového tématu dosavadní prekoncepce nemizí. Vytváří s novým učivem určitou symbiózu, v níž je část nově vzniklých poznatků odborně správných, část školních poznatků se propojí s původní prekoncepcí (vzniká neústrojný hybrid) a část původních žákových představ zůstává nezměněna a narušuje další učení. Výsledkem této specifické interference bývá žákovo neúplné porozumění, chybné pochopení určitých pojmů a vztahů, přehlédnutí důležitých souvislostí nebo zvýraznění nepodstatných znaků. Tato nesprávná, mylná koncepce učiva se také označuje jako *miskoncepce* učiva. Při běžném zkoušení se na žákovo chybné chápání učiva často nepřijde, neboť žák formálně reprodukuje to, co slyšel od učitele nebo si přečetl v učebnici. Odhalení žákovských miskoncepcí vyžaduje speciální diagnostické úsilí.“ Rozdílnost představ a kontextů je snáze postřehnutelná v ústní komunikaci, ale určité indicie neporozumění může učitel zaznamenat i na základě spontánního písemného projevu žáka (například reflexe formou volného psaní).

Významnou roli v interpretaci slov a symbolů hraje kontext. Kontext je aktuální vztažný rámec, ve kterém se naše komunikace uskutečňuje a v němž je důležité s kým, kde, kdy, o čem, jak, proč a s jakým účinkem komunikujeme [7]. Komunikační kontext je dvojí: vnitřní (mentální) a vnější (fyzický). V mentálním kontextu každého komunikujícího je přítomno množství představ a kategorií, které ovlivňují jeho chápání a používání komunikačních nástrojů. Vnitřní kontext neustále přetváříme a doplňujeme novými zkušenostmi, spontánními asociacemi a emocemi. K vnějšímu kontextu patří nejen aktuální sociální a fyzický (věcný) kontext, ale i ustálený kontext kulturní, zvykový, jazykový. Kulturní kontext zahrnuje například způsob zápisu arabských číslic nebo značení pravého úhlu. Znalost jazykového kontextu je důležitá pro správnou interpretaci znaku; například znak „**N**“ může v matematice označovat množinu přirozených čísel (symbol) nebo vrchol geometrického obrazce (index) anebo může být nahlížen jako středově souměrný obrazec (ikon).

5 Řešení úloh

Slovní úlohy a geometrické konstrukce tvoří stěžejní část učiva matematiky na druhém stupni základní školy. Představují prostředky, jimiž u žáků rozvíjíme kompetence, jako jsou provádění rozboru problému, volba postupu řešení, vyhodnocování správnosti řešení a mnohé další. Řešení úloh provází řada problémů, zejména v souvislosti s prováděním zápisů.

V žákovských zápisech výpočtu hodnoty výrazu s více operacemi se často setkáváme s chybným zápisem rovnosti, kdy žák postupně připisuje části výrazu k dílčímu výsledku a používá rovnítko bez ohledu na skutečnou hodnotu výrazů; např. $2(3+4)-5=7\cdot 2=14-5=9$. Z analýzy dalších situací vyplývá, že rovnítko je pro řadu žáků multifunkčním symbolem, který označuje téměř

jakýkoliv vztah mezi údaji; v žákovských řešeních se objevují například zápisy 3 kg = 24 Kč, 10 % = 250 Kč, 1 cm = 2 km, *krychle* = 5 cm. Chyby tohoto druhu, jejichž reedukace nebývá snadnou záležitostí, jsou podle mého názoru zapříčiněny neprofesionálním přístupem učitelů. Žák, který se seznamuje s určitým znakovým systémem, si nebývá zpravidla své chyby vědom, proto je na učiteli, aby žáka v používání systému opravoval. Pokud tak učitel nečiní, dává žáku najevo, že systém používá korektně, což může v důsledku znamenat nesprávné osvojení pravidel znakového systému.

Jiný zlozvyk, s kterým se často setkáváme při řešení slovních úloh, je tzv. *iksománie* – nesmyslné používání neznámé x v zápisech. Písmeno x je používáno pro označení neznámého údaje, přestože ve výpočtu se vůbec neobjeví, nebo označuje několik různých neznámých či dílčích výsledků. Například:

šířka... 2,5 m	20 % *navíc*
délka... 3,8 m	350 Kč *za* m^2
obsah... x	*celkem*... x Kč
$S = a \cdot b$	$x = 1{,}2 \cdot 9{,}5 = 11{,}4$
$S = 2{,}5 \cdot 3{,}8 = 9{,}5\,\mathrm{m}^2$	$x = 11{,}4 \cdot 350 = 3\,990$ Kč

Pochybení je opět na straně učitelů, kteří žáky s těmito formami zápisu seznamovali. Je třeba si uvědomit, že vzorový zápis nebo postup řešení pomocí neznámé uvedený v učebnici není vždy jediný správný, že existují i jiné možnosti a je na učiteli, aby s nimi žáky seznámil. Slovní úlohy lze řešit nejen rovnicí, ale také úsudkem, tabulkou, obrázkem. V zápisu se tedy nemusí vyskytovat žádná neznámá. Ze zápisu musí být však zřejmé, co a jak žák počítal (nebo jak uvažoval) a k jakému řešení dospěl.

Při řešení konstrukčních úloh u některých žáků pozorujeme, že nepřijímají standardní postup obsahující rozbor a popis konstrukce, ale že se pokoušejí nejprve útvar narýsovat. Přitom útvar nekonstruují, ale jen rýsují (často nestandardním způsobem). Pokud by se jednalo o jiný způsob provedení rozboru, nelze samozřejmě nic namítat, ale mnozí žáci takové počínání považují za řešení úlohy. Hlavním smyslem geometrických konstrukcí na druhém stupni ovšem není rýsování geometrických objektů daných vlastností, přestože zdokonalování grafického projevu je žádoucí, ale hledání postupů konstrukce a jejich zobecňování (vedoucí k diskusím o řešitelnosti úlohy). Řešení konstrukčních úloh rýsováním má své opodstatnění na prvním stupni; nemělo by se však zvrhnout k pouhému rýsování podle návodu. Běžnou součástí řešení konstrukční úlohy by měl být náčrt. Náčrt pomáhá žákům ujasnit si, co budou rýsovat, a promyslet postup. Nepřesnost náčrtu je do určité míry tolerována, musí ovšem zpodobňovat zadaný útvar; například načrtnout pravoúhlý trojúhelník jako rovnostranný je nepřípustné.

Při řešení konstrukčních úloh rýsováním by měl učitel pokládat žákům otázky typu *Jak jsi postupoval?* nebo *Jak jinak bys mohl postupovat?*, aby jimi žáky postupně vedl k provádění rozboru a popisu konstrukce. V žákovských odpovědích

na tyto otázky se často setkáme s formulacemi typu „Vzal jsem do kružítka čtyři centimetry, zabodnul ho do bodu S a udělal kružnici k.“ Procesuální popis (sled konkrétních činností) je typický pro mladší žáky, jejichž představa daného útvaru je spojena s určitou činností (v tomto případě s manipulací s kružítkem). Stejným způsobem se však vyjadřují i žáci na druhém stupni, u kterých očekáváme již konceptuální přístup, tedy formulace typu „Sestrojil jsem kružnici k se středem v bodě S a poloměrem čtyři centimetry.“ Může se někomu zdát, že lpění na takových maličkostech, jako jsou vžité formulace v rozborech a popisech konstrukcí, je pouhé školometství. Nezapomínejme však, že kulturu matematického vzdělávání tvoří i matematická mluva a že v době, kdy všeobecně upadá jazyková úroveň komunikace, je důležité, abychom kultivaci žákova projevu věnovali náležitou pozornost.

6 Závěr

Cílem příspěvku bylo poukázat na některé problémy v komunikaci učitel–žák, se kterými se na základní škole setkáváme, a naznačit jejich řešení; ukázat, že mnohé problémy v komunikaci jsou zapříčiněny samotnými učiteli uplatňováním nevhodných postupů a že je třeba je řešit systémově. Tvorba školních vzdělávacích programů je jedinečnou příležitostí pro hledání těchto řešení. Je na učitelích matematiky, aby při zpracovávání učebních osnov prodiskutovali, které stránky matematického vzdělávání v rámci jejich školy je třeba posílit, a domluvili se s ostatními učiteli na postupech, které budou ve vyučování matematice společně uplatňovat.

Poděkování

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR č. 406/05/2444 a výzkumného záměru AV0Z10190503.

Literatura

[1] BERTRAND, Y. *Soudobé teorie vzdělávání.* 1. vyd. Praha : Portál, 1998.

[2] ČÁP, J., MAREŠ, J. *Psychologie pro učitele.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

[3] DEVLIN, K. *Jazyk matematiky. Jak zviditelnit neviditelné.* 1. vyd. Praha : Dokořán, 2003.

[4] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* 1. vyd. Praha : VÚP, Infra, 2004.

[6] STERNBERG, R. J. *Kognitivní psychologie.* 1. vyd. Praha : Portál, 2002.

[7] VYBÍRAL, Z. *Psychologie lidské komunikace.* 1. vyd. Praha : Portál, 2000.

Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let

Jana Slezáková

Abstrakt

Výzkum zaměřený na otevírání světa matematiky dětem je vedený M. Hejným a je dělen na proud konceptuálního a proud procesuálního myšlení. V tomto článku prezentujeme druhý z uvedených proudů. Pomocí úloh, jež lze gradovat od 1. ročníku ZŠ, je představeno prostředí Krokování, které je základem pro procesuální porozumění kladným a později i záporným číslům, porozumění číselné ose a některým dalším základním pojmům aritmetiky.

1 Úvod

Jak je uvedeno v příspěvku [1], tento článek pojednává o té části výzkumu, která je zaměřena na rozvoj procesuálního myšlení u dětí ve věku 5 až 8 let a na implementaci těchto výsledků do školní praxe. Paralelní výzkum zaměřený na konceptuální myšlení prezentuje D. Jirotková [2]. Jedním z prostředí, které k rozvoji procesuálního myšlení používáme, je Krokování.

2 Prostředí Krokování

Původně jsme toto prostředí nazvali Pohyb, protože ho výrazně využívá a ukazuje vázanost tohoto prostředí na tělesnou výchovu. Pohyb je pro dítě něco přirozeného, s čím se setkává od narození – např. maminka houpe dítě v kočárku; dítě hopsá v sedátku; dítě chodí, skáče apod. Některé pohyby jsou uskutečňovány v rytmech, které jsou též přítomny v říkankách. Domníváme se, že je vhodné provázet říkanky rytmickými pohyby, aby bylo dosaženo synchronu zvuku a pohybu. Tento synchron hraje klíčovou roli pro zvládnutí algoritmu počítání. Říkanky mohou být nahrazeny například tleskáním, hudbou apod.

Z hlediska didakticko-matematického je prostředí Krokování zaměřeno na pojmy a schopnosti, jako jsou: číslo, číselná osa, algoritmus, organizace, orientace a jazyk.

3 Ilustrace

Pomocí několika miniscének ukážeme, jak jsou formulovány a řešeny úlohy o krokování.

Ilustrace 1. Učitel určí žáka – figuranta. Dá mu povel *Pět kroků udělej, teď!* Žák pochoduje a třída počítá do rytmu *Jeden, dva, tři, čtyři, pět.*

Cílem aktivity je propojit ve vědomí žáků rytmus zvukový a pohybový. Tato synchronizace je základem aritmetického myšlení.

Ilustrace 2. Učitel určí dva figuranty Adama a Evu a postaví je vedle sebe. Nejdřív pochoduje Adam. Učitel velí *Adame, tři kroky, pak dva kroky, začni, teď!* Třída počítá *jedna, dva, tři; jeden, dva.* Teď se učitel ptá třídy, jaký povel máme dát Evě, aby opět stála vedle Adama. Žáci dávají různé rady a učitel zvolí například tu, která je dobrým řešením úlohy. Autor této rady velí *Evo, pět kroků, začni, teď!*

Cílem aktivity je zapojovat větší počet žáků do dramatizace. Představením získávají žáci zkušenost o schématu $3 + 2 = 5$ v operátorové a procesuální reprezentaci.

Ilustrace 3. Učitel napíše na tabuli šipkový zápis $\rightarrow\rightarrow \mid \leftarrow\leftarrow\leftarrow \mid \rightarrow\rightarrow$ a určí velitele a dva figuranty. Figuranti se postaví vedle sebe a velitel velí *Martine, dva kroky dopředu, pak tři kroky dozadu, pak dva kroky dopředu, začni, teď!* Martin krokuje, třída již jeho kroky nepočítá. Žáci již sami oznamují výsledek úlohy, tj. povel *Lenko, jeden krok, začni, teď!*

Cílem těchto úloh je objevení jazyka šipek, kterými lze proces zapsat. Je velice dobré, když tento jazyk objeví sami žáci.

Ilustrace 4. Na podlaze jsou na lístcích číslice $\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{8}$ uspořádány jako na číselné ose. Žáci si sami doma připravili úlohy na krokování a určený žák napíše na tabuli svoji úlohu:

$\boxed{\mid \rightarrow\rightarrow\rightarrow \mid 6}$. Úlohu přečte *Na které číslo se mám postavit, abych po třech krocích byl na čísle 6?* Spolužáci úlohu řeší hádáním. Učitel vybere nejprve žáka se špatným řešením, například takového, který radí postavit se na číslo 2. Krokováním se zjistí, že řešení je špatné, a již skoro všichni žáci vidí správné řešení: 3.

Cílem těchto úloh je reprezentovat schéma $3 + 3 = 6$ v procesuálně-konceptuálním kontextu. Koncept je zde přítomen v adresách, jimiž jsou výstupní číslo 6 a neznámé vstupní číslo, které bude zjištěno jako 3. Proces je zde přítomen v operátoru změny, který je znázorněn trojicí šipek. Navíc obtíž této úlohy spočívá v tom, že neznámé číslo je hned na začátku. Kdyby neznámým číslem bylo koncové číslo, úloha by byla výrazně snazší, a kdyby byly dány adresy vstupní 3 a výstupní 6 a neznámým by byl operátor, který 3 mění na 6, byla by úloha složitější, ale stále poměrně jednoduchá. Základní schéma $A + B = C$, které jsme dříve viděli v čistě procesuální reprezentaci, je zde v reprezentaci konceptuálně-procesuální. I když na první pohled se nám jeví jako uchopování operace sčítání, je to de facto sčítání pouze v případě, že neznámou je C. V obou dalších případech, kdy je neznámou A nebo B, se jedná o operaci odčítání.

Ilustrace 5. Na podlaze jsou na lístcích číslice $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ..., $\boxed{12}$ uspořádány jako na číselné ose. Pověřený žák hodí dvěma hracími kostkami, červenou a modrou. Počet ok, která padnou na červené kostce, označuje adresu, na kterou se postaví figurant. Počet ok, která padnou na modré kostce, označuje počet kroků, které figurant udělá. Například padne-li na červené čtyřka a na modré dvojka, vznikne úloha $\boxed{4 \mid \rightarrow\rightarrow \mid \ldots}$. Učitel jenom mimoděk vyzve žáky, aby si typovali, na kterém poli figurant skončí.

Cílem aktivity je propedeutika teorie pravděpodobnosti. Žáci poměrně rychle objeví, že pole 0 a 1 je nemožné a že pole 2 a 12 nastávají velice zřídka.

4 Matematické fenomény v Krokování

V ilustraci 1 bylo ukázáno, že krokování je úzce propojeno na vstupní jev světa aritmetiky, tj. na říkanku: Jedna, dva, tři, ... Brzy se prostředí posune dále k základnímu jevu aritmetiky 1. ročníku, tj. schématu triády, o němž pojednává [1]. Specifikem tohoto prostředí je, že triádu $A \pm B = C$ prezentuje ve dvou sémanticky výrazně odlišných typech. Je to typ $A \pm Oz = A$ a $Oz \pm Oz = Oz$ (A adresa, Oz operátor změny). Uvedený rozdíl je zcela zásadní. Například schéma $3+3=6$ (ilustrace 4) je u typu $A + Oz = A$ vnímáno žákem zcela jinak než u typu $Oz + Oz = Oz$. U tohoto posledního typu jsou obě trojky téže sémantické podstaty. U předešlého typu je jejich podstata různá. Kdybychom uvažovali o schématech $2+3=5$ a $3+2=5$, která vypovídají o komutitativitě, pak by byla v případě typu $Oz + Oz = Oz$ dobře pochopitelná, ale v případě typu $A \pm Oz = A$ by byla zastřená.

Již v článku [1] bylo zdůrazněno, že typ $Oz \pm Oz = Oz$ patří k nejnáročnějším typům triády. To, že v prostředí Krokování je tento typ žákům dobře srozumitelný, má důležité developmentální vlivy. Jak se ukazuje z výzkumu J. Ruppeldtové [3], úlohy, které dělají žákům vyšších ročníků značné potíže, budou, jak věříme, pro žáky se zkušeností s krokováním dobře dostupné.

Dalším důležitým fenoménem přítomným v prostředí Krokování je otevírání světa záporných čísel. V tradičním vyučování je pro žáka 1. ročníku úloha $2-3+2$ neřešitelná. Ilustrace 3 ukázala, že tato úloha nepřináší v prostředí Krokování pro žáky žádné problémy. V budoucnu, až se krokování přesune na číselnou osu, žáci při řešení této úlohy nepocítí zásadní nemožnost řešení, ale budou se dožadovat prodloužení číselné osy i za nulu. V našich experimentech někteří žáci dokonce již mluvili o „mínus jedničce“. Je to zřejmě vliv kalkulaček, protože ve stejných experimentech v 80. letech minulého století žáci M. Hejného mluvili spíše o číslech červených nebo jinak barevně odlišených od čísel přirozených. Důležité zde ale není zavedení znaku jako takového, ale vybudování představy, co takový znak představuje a jaká je jeho role ve světě jiných matematických znaků.

Úvahy zakončíme sepsáním seznamu těch fenoménů, k nimž musí přihlížet učitel (nebo autor učebnice), když si připravuje koncepci pro implementaci prostředí Krokování ve třídě.

Přehled fenoménů přítomných ve schématu triády $A \pm B = C$ a následných operací

a) Propedeutická úroveň – pouze krokování dopředu (bez operace sčítání nebo odčítání), provázené počítáním: Jedna, dva, tři, ... Rozlišujeme typy na prosté (1) – 2dílné (2) – 3dílné (3) – až $n$dílné (n). Číslo v závorce označuje kód daného typu.

b) Rozšíření směru krokování o směr dozadu.

c) Zavedení jazyka šipek: směr dopředu ($\rightarrow$) – dozadu ($\leftarrow$) – obousměrně ($\leftrightarrow$).

d) Triáda $A \pm B = C$ v operátorovém kontextu krokování.

e) Řešení úlohy $A + B = C$ v operátorovém kontextu. Rozlišujeme tři typy podle toho, které z čísel triády je neznámou; kódujeme je znaky: (A), (B), (C).

f) Řešení úlohy $A - B = C$ v operátorovém kontextu. Rozlišujeme tři typy podle toho, které z čísel triády je neznámou; kódujeme je znaky: (A), (B), (C).

g) Prvky A, C dané triády jsou adresy, B je operátor změny.

h) Jazyk uvedený v ilustraci 4 na zápis triády, přičemž první a poslední prvek triády je adresa.

i) Řešení úlohy $A + B = C$ v kontextu A, C jsou adresy. Rozlišujeme tři typy podle toho, které z čísel triády je neznámou; kódujeme je znaky: (A), (B), (C).

j) Řešení úlohy $A - B = C$ v kontextu A, C jsou adresy. Rozlišujeme tři typy podle toho, které z čísel triády je neznámou; kódujeme je znaky: (A), (B), (C).

V uvedeném seznamu se omezujeme na schéma triády $A \pm B = C$. Každý fenomén, který o této triádě vypovídá, může být obohacen rozšířením triády na složitější schéma: $A \pm B \pm C = D$, $A \pm B \pm C \pm D = E$, atd.

5 Organizační fenomény v Krokování

Již v ilustracích jsme ukázali, že žáci v úlohách o krokování mohou zastávat různé role. Naše základní zkušenost, která se týká nejenom krokování, ale všech situací s dramatizací, ukazuje na potřebu zapojit co možná největší počet žáků přímo do předváděné produkce. Žáci, kteří participují na hře, mívají větší motivační impuls, v důsledku čeho je přínos hry pro jejich poznávací i meta-poznávací

procesy vyšší. I zde je značným přínosem jak v kognitivní, tak i sociální oblasti diskuse vzešlá z různosti názorů žáků. Vyšší efekt diskuse přichází v tom případě, kdy učitel zcela potlačí své matematické znalosti a omezí se pouze na práci organizátora diskuse a ujasňování nepřesných formulací. V závěru článku bude takový případ popsán.

Masivnější zapojení žáků do představení bývá náročné na organizaci celé třídy a je potenciální hrozbou pro chaos ve třídě. Proto za rozumnou edukační strategii považujeme postupné přenášení jednotlivých rolí a daných odpovědností z učitele na žáky. Nejprve všechny funkce realizuje sám učitel, pak krok za krokem svěřuje žákům další a další role. Zkušený učitel dobře ví, že ne každou roli může svěřit každému žákovi, a ví, kterým ze svých žáků může svěřit role nejodpovědnější. Tato realizace je výlučně právem a povinností učitele. Pomocníkem může být následující seznam organizačních fenoménů. Podobně jako výše i zde v závorkách u každého typu uvádíme jeho kód.

Přehled organizačních fenoménů

a) Režisérem celého představení je učitel (U) – žák (Ž).

b) Autor úlohy nebo činnosti je učitel (U) – žák (Ž) – autor učebnice (A) – náhoda (N).

c) Prezentace úlohy je grafická (G) – akustická (A) – přepisová (P).

d) Velitelem představení je učitel (U) – žák (Ž) – nikdo (–).

e) Figurantem je učitel (U) – žák (Ž) – 2 žáci (2Ž) – n žáků (nŽ) – eventuálně bez krokování (?) – bez krokování (–).

f) Výstupem je krokování (K) – řešení úlohy (Ř) a to písemné (p), nebo slovní (s).

g) Počítá – třída (T) – učitel (U) – nikdo (–).

Legenda: Typ „náhoda“ v případě b) je realizován například hracími kostkami, viz ilustrace 5. Typem „přepisová prezentace“ v případě c) rozumíme úlohu, která je zapsána pouze pomocí čísel, například úloha z ilustrace 4 je zapsána $_ + 3 = 6$. Žák tento zápis nejprve převede na zápis: $\boxed{| \rightarrow\rightarrow\rightarrow |6.}$ a pak úlohu řeší. Typ „nikdo“ v případě d) mluví o úlohách, v nichž nedochází k povelům. Například úloha je zapsána graficky v učebnici. Typem „eventuálně bez krokování“ v případě e) rozumíme situaci, kdy učitel podle stavu ve třídě buď volí krokování, nebo od něj upustí.

6 Zajímavý postřeh z experimentálního vyučování

Na první hodině učitel udělal pět kroků a zeptal se třídy, kolik kroků udělal. Anička řekla, že učitel udělal šest kroků, Boris namítal, že to není pravda, že bylo uděláno pět kroků. Anička počítala závěrečné přinožení nohy jako šestý krok.

Mezi dětmi vznikly spory, zda má pravdu Anička, nebo Boris. Třídu nakonec přesvědčil Borisův argument „Přišoupnutí nohy není krok, protože se nedostanu dál“.

7 Závěr

Naše dosavadní výzkumy byly převážně zaměřeny na předškolní a ranně školní věk. V příštím roce výzkumy prodloužíme na starší žáky a v prostředí Krokování rozpracujeme některé další matematické myšlenky. Bude to otázka statistiky a pravděpodobnosti, které jsme se stručně dotkli v ilustraci 5, dále rozvíjení matematických jazyků, zejména prostřednictvím transformací situace z jednoho jazyka do jiného (viz přepisová prezentace z bodu c) v přehledu organizačních fenoménů), a konečně propedeutika vektoru jako příkazu k pohybu po čtverečkové síti. Popsané prostředí Krokování je provázeno jiným prostředím procesuálního charakteru, které nese název Autobus. Výsledky získané v tomto prostředí budou prezentovány v nejbližším roce.

Úvahy v tomto článku se omezily na některé výsledky výzkumu a několik myšlenek o implementaci těchto výsledků. Dvě další oblasti zde zatím zmiňovány nebyly. Jednou je možnost využít získané poznatky pro tvorbu diagnostických nástrojů pro porozumění schématu žákem. Druhou je nabídka pro tvořivého učitele, který v tomto vícevrstvovém bohatém prostředí může tvořit vlastní úlohy, vlastní scénáře hodin nebo dokonce realizovat vlastní experimentální činnost. V tomto směru se domníváme, že krokování může přispět ke komplexnější realizaci RVP.

Poděkování

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu FRVŠ 476/2006. Navazuje na příspěvek M. Hejného a je svou tématikou propojen na příspěvek D. Jirotkové. V těchto příspěvcích je částečně popsán náš výzkum, který probíhá ve spolupráci s některými učiteli 1. stupně ZŠ. Autorka děkuje Mgr. K. Nejedlé ze Základní školy Vodičkova v Praze 1, která se již druhým rokem na této spolupráci podílí.

Literatura

[1] HEJNÝ, M. Prostředí, která otevírají svět čísel. (zde ve sborníku)

[2] JIROTKOVÁ, D. Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let. (zde ve sborníku)

[3] RUPPELDTOVÁ, J. Interpretačná dominanta riešenia slovnej úlohy. In *Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Olomouc : 2006, s. 212–217. ISBN 80-244-1311-6.

Výuka nejen matematiky na SOŠ a SOU

Miroslav Staněk

Abstrakt

Mathematics lessons of three-year/technical study programmes were reduced and as a result it did not enable students to develope their mathematical competences.

Today mathematics is becoming second-rate subject of secondary education. Emphasis rests on learning subject needed in practice; while we ignore academic and integrated aspects. Motivation of students goes down. Adequate compulsory state maturita exam is absent in Czech school system.

Motto:
„Nezatěžuj svoje děti tím, že jim děláš život lehký.“
R. A. Heinlein

1 Úvod

Po roce 1989 došlo k nárůstu počtu středních škol. Zvláště těch, které poskytují maturitní vzdělání. Přineslo to jednak vyšší dostupnost maturitního vzdělání pro nejširší vrstvy obyvatelstva, ale také pokles kvality studentů.

Stačí se zamyslet nad rozdělením IQ v populaci.

extrémně nízká inteligence	0,2 %
velmi nízká inteligence	2,1 %
nízká inteligence	16,6 %
podprůměrná inteligence	34,1 %
nadprůměrná inteligence	34,1 %
vysoká inteligence	16,6 %
velmi vysoká inteligence	2,1 %
extrémně vysoká inteligence	0,2 %

Pak je zřejmá souvislost mezi množstvím maturantů a jejich kvalitou.

Další nezanedbatelný vliv má pokles počtu žáků ve školách.To se projevilo nejen na maturitních, ale i na učebních oborech.

Nejchytřejší a nejpracovitější žáci jsou přijati na osmiletá gymnázia. Ostatní mohou jít po ukončení základní školy na čtyřletá gymnázia, střední odborné školy, obchodní akademie, studovat maturitní obory na středních odborných učilištích.

Slabší žáci pak jdou na učební obory. Tam mají ti lepší z nich možnost po třech letech pokračovat v nástavbovém studiu, a tak po pěti letech studia získat maturitu.

Vyučení mají další možnost získat maturitu v tříletém dálkovém studiu při zaměstnání.

Téměř zanikly dvouleté učební obory a s nimi spojená učiliště. K tomu přispěl i fakt, že žáci, kteří nedokončili základní školu, nebo ukončili zvláštní školu a dříve byli odkázáni jen na dvouleté obory, mohou nyní jít bez problémů na tříleté učební obory.

Toto všechno vede k poklesu úrovně nejen maturitního vzdělávání.

Úroveň žáků se posunula. Někteří maturanti jsou na úrovni dřívějších učňů. A řada učňů není schopna po vyučení vykonat víc užitku než škody. Na učební obory se hlásí málo šikovných dětí. S tím souvisí velká poptávka firem po řemeslnících, zvláště v oborech, které se dají obtížně zautomatizovat (stavebnictví, některé strojařské obory).

Úroveň výuky musí vyučující většiny škol přizpůsobovat úrovni žáků. Luxus výběru kvalitních studentů si mohou dovolit jen některá gymnázia a pak některé SOŠ a SOU a to jen na lukrativní obory. Těchto šťastných škol je rok od roku méně. Školy berou na učební obory každého, protože každý žák jim přináší peníze a umožňuje jim přežít.

S tím souvisí i množství žáků, kteří mohou propadnout, nebo nedej bože dokonce odejít ze školy. Žáka je třeba udržet na škole za každou cenu. Ekonomické důvody jsou jasné. Jak kdysi bylo někde řečeno „Pamatujte že 7 vyhozených žáků je jeden pracovní úvazek.“

Tohle všechno má vliv i na výuku matematiky.

2 Postavení matematiky na SOŠ a SOU

Nejen učitelé matematiky jsou nuceni přizpůsobovat učivo i styl výuky žákům. Velmi často se objevují otázky typu „K čemu to budeme potřebovat?“ nebo „Proč musím umět počítat, když mám kalkulačku?“

U tříletých oborů je to snažší. Při současné úrovni učňů je kalkulačka nutností. Učitel je nucen zaměřovat se na praktické úlohy, které stejně řada učňů není schopna zvládnout.

Výklad, jako nejrozšířenější metoda výuky (podle ČŠI) si mohou dovolit jen tam, kde jsou k tomu vhodní žáci, kteří se chtějí učit. Na tříletých oborech výklad v matematice znamená dříve či později kantorskou sebevraždu. Učitel velice rychle narazí na nezájem a odpor učňů.

U maturantů je to jiné. Algoritmus je důležitější než výsledek. Matematika to není jen počítání, ale především je to způsob myšlení. Způsob racionálního myšlení, které je nutné pro pokrok, pro řešení problémů každodenní praxe.

Matematika by měla být jedním z nejdůležitějších předmětů ve škole, spolu s mateřským jazykem. Jazyk umožňuje komunikaci a matematika myšlení.

Paměť si mohou studenti cvičit i v jiných předmětech, a tak by v matematice nemělo jít jen o učení se faktů, ale především o schopnosti a dovednosti s těmito fakty pracovat.

Uvědomme si, že matematika je v současnosti jediný předmět, který cíleně rozvíjí logické myšlení lidí. Myšlení sice někdy bolí, ale potřebují ho všichni, co chtějí něco tvořit (včetně právníků, filozofů i hudebníků).

Jaký prostor měla a má matematika v učebních plánech na SOŠ a SOU?

Na konci 80. let měli 3leté učební obory dotaci matematiky 4–2–2 resp. 4–2–1.

Objevily se důležitější předměty a tak v 90. letech klesla dotace tříletých učebních oborů na 2–2–1 (zedník, malíř), 2–1–1 (autoobory) nebo dokonce 1–1–1 (prodavač, zámečník, opravář zemědělských strojů).

Před několika lety si matematika trochu polepšila na dotace 2,5–1,5–1 (automechanik), 2,5–1,5–2 (autoelektrikář), 2–2–2 (obráběč kovů), 2–1–1 (klempíř, opravář zemědělských strojů).

Počty hodin vycházejí z mylné filozofie, že žáci méně náročných oborů potřebují méně matematiky a tedy jim na to stačí méně hodin. Tento názor narušuje fakt, že na učební obory přichází většina žáků, kteří neovládají ani učivo základní školy. Mnozí mají problémy s násobilkou. To pak při dotaci 2–1–1 je problém to „nic“ v jejich hlavách udržet, natož tam něco přidat.

Otázkou je, zda by větší hodinová dotace něco vyřešila. Učitele při představě, že by měli v některých třídách trávit více hodin, jímá hrůza. Jediné pozitivum je, že některé tyto třídy mají při současném demografickém vývoji často menší počet žáků.

Na maturitních oborech je kvalita studentů o něco lepší. Ale už teď se objevují studenti s chabými dovednostmi a znalostmi ze základní školy.

Co se týká dotací hodin, nejlépe jsou na tom technické lyceum (14 hodin), elektronické počítačové systémy (15 hodin) a digitální a telekomunikační technika (16 hodin). Z nových zatím zveřejněných RVP má nejvíc technické lyceum a to 12 hodin za studium. Jistě, je tam možnost disponibilních hodin, ale co si budeme nalhávat. Kolik ředitelů škol posílí matematiku, zvláště v případě, že z ní žáci nebudou muset maturovat. No a o cvičeních z matematiky, v současných ekonomických podmínkách, snad nemá smysl ani uvažovat.

V minulém roce jsem měl možnost navštívit dvě střední školy v zahraničí. V obou je na tom matematika lépe než u nás.

V Itálii na Istituto Tecnico Industriale Statale „E. Majorana“ v Martina Franca (http://www.majorana.martina-franca.ta.it/index.php), kde mají studijní obory v prvních dvou společných letech dotaci 5 (z toho 2 h. cvičení na PC) – 5(2) a v dalších třech letech obor informatika 6(2)–5(2)–4(2), vědecko-technologické lyceum (Liceo scientifico tecnologico) 4(1)–4(1)–4(1) a obor elektronika a ko-

munikace a obor elektrotechnika a automatizace 4–3–3. Ve cvičeních pracují na počítači. Nejprve s programem Derive a pak s Cabri.

V pátém ročníku končí informatici nehomogenními diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Studium ukončují testy.

Přístup k žákům v italské škole byl velice podobný přístupu u nás.

Ve Spojených státech v Lahser High School v Bloomfield Hills v Michiganu (http://lahser.bloomfield.org/) mají 4 roky každý rok 5 hodin matematiky týdně (celkem 247 min tj. v pondělí 95 min ve středu 57 min a ve čtvrtek 95 min). Za každý rok matematiky je 1 kredit. Student musí získat za 4 roky studia minimálně 5 kreditů za matematiku a science. Z toho musí být minimálně 2 za matematiku a 2 za science.

Vrcholem učiva je statistika a diferenciální počet.

Žáci končí školu testy SAT (http://www.testprepreview.com/sat_practice.htm) a ACT (http://www.testprepreview.com/act_practice.htm), které jsou dost odlišné od naší maturity na nečisto.

V americké škole se mnohem větší důraz klade na osobní odpovědnost žáka. Učitel má také víc času věnovat se učení a podle toho jsou tu kladeny větší nároky na jeho práci. O pracovní disciplíně a s tím souvisejícím finančním ohodnocení ani nemluvě.

3 Závěr

Obrovským problémem našeho současného školství je motivace žáků. A čím dál větším problémem se stává i motivace učitelů.

Studentů, kterým stačí čtyřky, je čím dál víc. Pokud nemají potřebu jít na lukrativní obor na vysoké škole, kde je výběr, ale stačí jim „obyčejná“ vysoká škola, tak jim čtyřky stačí. Navíc někteří lenošní čtyřkaři se dostanou přes test všeobecných studijních předpokladů lépe než mnozí dvojkaři či jedničkáři. Jestli se na vysoké škole udrží, to je jiná otázka. Na SOU a SOŠ je tento problém o to větší, že na vysokou školu spousta maturantů jít nechce.

Situaci by měly zachránit projekty ve výuce, ale to je běh na dlouhou trať. Navíc nevyřeší všechno a ne všude fungují. Než se podaří převychovat současnou a vychovat novou učitelskou generaci, bude už pozdě. Vzdělávání je práce s lidmi a tam neexistují snadná řešení.

Stále více chybí jasná kritéria, zajišťující jistou úroveň vzdělání. Z výučních listů a maturitních vysvědčení se stávají nic neříkající cáry papíru.

Rodiče chtějí, aby jejich děti měly co nejlepší vzdělání. Politici chtějí, aby děti jejich voličů měli co nejlepší vzdělání. A tak počty vzdělaných utěšeně rostou a my se můžeme těšit na světlé zítřky. Alespoň do okamžiku, kdy budeme potřebovat takto vzdělaného elektrikáře nebo lékaře.

Před čtyřmi lety jsem se v Prachaticích spíše klonil k nepovinné maturitě z matematiky, ale po vývoji kvality žactva, vývoji v českém školství a čekání na

státní maturitu se stávám přívržencem povinné státní maturity z matematiky. V rozumném splnitelném rozsahu, odpovídajícímu určité minimální hodinové dotaci.

Život je plný zkoušek. Škola má připravovat pro život. A tedy několik zkoušek během školního vzdělávání by nemělo být na závadu.

Literatura

[1] *Učební osnovy pro tříleté učební obory středních odborných učilišť.* 1. vyd. Praha : ministerstvo školství ČSSR, 1986.

Využití videozáznamů v dalším vzdělávání učitelů matematiky

Naďa Stehlíková

Abstrakt

Článek se zabývá jednou z možností organizace vzdělávacího kurzu pro učitele na základě rozborů videozáznamů vyučování. Videozáznamy jsou prostředkem seznámení učitelů s principy konstruktivistických přístupů. Autorčina interpretace těchto přístupů je stručně charakterizována a některé techniky použití videozáznamů v DVU jsou popsány.

1 Úvod

Vyučování je velmi složitý proces a může být studováno z různých hledisek. V tomto článku se zaměřím na učitele a popíši jednu z možností jeho dalšího vzdělávání. Konkrétně jde o modul „Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe“, který je připravován v rámci projektu ESF „Podíl učitele matematiky na tvorbě ŠVP“ (viz http://www.suma.jcmf.cz a [6]).

1.1 Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

O konstruktivizmu a jeho přednostech pro vyučování se v didaktice matematiky mluví asi od 80. let minulého století, jeho principy však zůstávají spíše v rovině teoretické než praktické. Konstruktivizmus není jasně vymezenou teorií, ale skládá se z mnoha proudů a neustále se vyvíjí. Také dostává celou řadu přívlastků podle toho, jaké aspekty poznání a výuky akcentuje (radikální, sociální, didaktický apod.). Jsem přesvědčena, že samo pochopení konstruktivistických přístupů je *individuálním konstruktem učitele*. Proto nejdříve zformuluji své chápání těchto přístupů, které je do značné míry založeno na tzv. *didaktickém konstruktivizmu* Hejného a Kuřiny [2] a jejich desateru konstruktivismu.

Pro konstruktivistické přístupy k vyučování je příznačné [3] „aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé.“ Zásadní roli hraje motivace, neboť bez motivace lze těžko očekávat od žáka či studenta aktivitu. Motivačně by měly působit i samy otázky a problémy, které jsou žákům předkládány, případně které sami navrhnou.

F. Kuřina [3] mluví o tzv. *realistickém konstruktivizmu*, který zdůrazňuje také možnost transmise určitých partií, ovšem stále v intencích základního principu konstruktivizmu, tj. vytváření matematiky v mysli poznávajícího jedince. Vždyť ne všechno se dá vymyslet, k učení potřebujeme i informace. Například musíme žákům sdělit, že procento označujeme %, ovšem hlubší poznání, co je to procento a k čemu je procento užitečné, by však už mělo vznikat v žákově vědomí jeho vlastní konstrukcí.

1.2 Podnětné vyučování

Z výše řečeného je jasné, že moje pojetí konstruktivizmu není radikální. Lze ho do jisté míry charakterizovat pěti tezemi, které jsou formulovány z pozice učitele a jeho činností ve výuce [6]:

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.
3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.
4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

V tomto textu budeme vyučování, které zahrnuje prvky konstruktivistických přístupů k vyučování, pro jednoduchost nazývat *podnětné vyučování*.

2 Příklady z praxe v dalším vzdělávání učitelů (DVU)

Jak tedy můžeme učitele co neefektivněji seznámit s výukou, kterou zde nazýváme podnětnou? Zkušenosti ukazují, že nestačí předložit pedagogický dokument či učebnici. Jedna z cest spočívá v analýzách videozáznamů z výuky.

Analýza videí je běžně využívána v DVU i v přípravě učitelů v mnoha zemích (např. [1, 5]) i u nás [4, 8]. Záznam vyučování je realistický a na rozdíl od hospitací je možné se k zajímavému úseku hodiny opakovaně vracet a analyzovat ho z různých hledisek. Konkrétní ukázky z reálné výuky mohou překlenout propast, která většinou zeje mezi obecně formulovanými zásadami a jejich aplikací v praxi. S mnohými zásadami se učitel proklamativně ztotožní, avšak v praxi je neuplatňuje, nebo neví, jak je uplatnit. Ilustrace mu pomůže uvědomit si právě toto praktické uplatnění. Jedna ilustrace může vyjádřit víc než celé stránky obecných výkladů.

Video také zaznamenává vyučovací jednotku komplexněji a na rozdíl od popisu výuky nechává interpretaci na každém jedinci. Pokud zaznamenáváme hodinu písemně, už tím, na co se zaměřujeme a co vynecháváme, provádíme určitou interpretaci. Video je tedy autentičtější.

Analýzy vyučovacích hodin přináši učiteli i budoucímu učiteli[1] inspiraci pro jeho vlastní práci, ale zejména se jimi učí *reflexi vyučování a sebereflexi*, která by měla být nedílnou součástí každodenní praxe [4, 8]. Tato reflexe se může rozvíjet různým způsobem, např. individuální analýzou vlastních výstupů, kolektivní analýzou společně připravené výuky či analýzou výuky někoho jiného. Právě poslední způsob je využíván ve výběrovém kurzu z didaktiky matematiky na PedF UK i ve výše navrhovaném kurzu DVU. Jeho hlavním cílem je zlepšovat schopnost učitele reflektovat vyučování jiných učitelů i jeho vlastní a zvyšovat jeho citlivost na ty aspekty vyučování, které jsou vyjádřeny pěti tezemi výše.

2.1 Analýza vyučovacích jednotek

K analýze je možné využít např. videa, která byla pořízena v rámci TIMSS Video Study v roce 1999. Jedná se vždy o čtyři vyučovací hodiny matematiky ze sedmi zemí (včetně ČR), které jsou opatřeny titulky a komentáři učitele a výzkumníka. Zkušenosti z práce s budoucími učiteli matematiky však ukazují, že rozborům vyučovacího procesu se posluchači musí učit. Většinou se zpočátku soustředí jen na to, zda je hodina „pěkná“ nebo „špatná“, a všímají si zejména pedagogických aspektů. Ty jsou samozřejmě velmi důležité, ale nesmíme zapomínat na to, že máme na mysli vyučování matematice. Je tedy nutné všímat si také toho, jakým způsobem se rozvíjí matematické znalosti dětí, jakou představu o matematice jim učitel buduje, jak reaguje na jejich případné chyby a nepochopení apod. Pět výše uvedených tezí je využito k nasměrování pozornosti posluchačů právě tímto směrem. K tomu můžeme využít další techniky:

- Před vlastní ukázkou jsou posluchači požádáni, aby si napsali tři věci, které by v matematické hodině neradi viděli a které by naopak přivítali. Následný rozbor videa je dělán z tohoto hlediska.
- Posluchači jsou předem rozděleni na různé skupiny. Jedna se má soustředit na negativní aspekty výuky, jiná na pozitivní, další na učitelovu práci s matematickými úlohami, práci studentů, reakci na chyby apod.
- K ukázce jsou předem připraveny určité doplňující otázky. Např. video se v určitém místě zastaví a posluchači mají zapsat, jak asi bude učitel reagovat, jak by reagovali oni, jaká otázka by měla zaznít apod.
- Posluchači jsou předem požádáni, aby si rozmysleli matematické téma, které bude představeno v ukázce. Např. si mají zapsat, jak toto téma učí (chtěli učit), jaké problémy se často objevují v porozumění žáků apod.
- Posluchači jsou rozděleni do dvojic a mají se nejdříve dohodnout na tom, jaký je nejdůležitější aspekt (poselství) předvedené ukázky. Tyto aspekty jsou pak prodiskutovány ve skupině.

Ne všechny hodiny matematiky jsou vhodné na rozbor. Je nutné předem připravit kratší úryvky, u nichž je potenciál, že budou vést k bohaté diskusi a že

[1] V dalším textu budu studenty i učitele označovat posluchači.

budou ilustrovat aspekt, který chceme zdůraznit. Je také vhodné úryvek hodiny doplnit dalšími informacemi – např. přehledem toho, co žáci dělali v minulé hodině, kopií příprav učitele, sebereflexí učitele, informacemi o třídě a škole, kopií úloh zadaných v hodině, kopií některých žákovských prací apod.

2.2 Ilustrace

Podívejme se teď na příklad dvou úryvků z výuky, které mohou do určité míry sloužit jako protiklady a ilustrují zejména druhou tezi (učitel předkládá podnětné úlohy žákům a *vhodně* s nimi pracuje).

Ilustrace 1: Součet úhlů v mnohoúhelníku [7, s. 45]

Žáci měli doma změřit úhly v konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ a sečíst jejich velikost. Druhý den se učitel zeptal, zda všichni získali výsledek blízký 720 stupňům. Pak pokračoval:
U: „Kdybych vzal ten úhel D a přesunul ho sem dolů, změní se ten součet?“
S: „Ne.“
U: „Neměl by, že? Proč? Stále mám kolik úhlů?“
S: „Stále máte šest.“

Učitel zde značně návodnou otázkou vede žáky k odpovědi. Ovšem žáci ještě nevědí, že počet vnitřních úhlů v mnohoúhelníku je klíčovou informací pro zjištění součtu úhlů a že změníme-li tvar šestiúhelníku, součet velikostí úhlů se nemění! Hodina pokračuje.

U: „Stále mám šest úhlů. Existuje vzorec a budeme se ho učit po jarních prázdninách, ale dám vám teď aspoň nápovědu. Když vezmu počet stran a odečtu dva a vynásobím to číslo 180 stupni, tak dostanu, kolik je součet úhlů. Kolik stran má tento útvar?“ (Pauza.) „Šest. Ano? Počet stran mínus dva mi dá co?“
S: „Čtyři.“
U: „Čtyři. Kolik je čtyřikrát 180 stupňů?“
S: „720.“
U: „A mělo to být 720, že? Kolik stupňů by mělo být u pětiúhelníka?“ (Pauza.) „Vezměte si vzorec, počet stran je pět ... odečtěte dva a násobte 180 stupni.“
S: „590?“
U: „540 stupňů. Všechny pětiúhelníky obsahují 540 stupňů.“

Zamyslíme-li se nad tím, co dělali žáci v této ukázce, vidíme, že nemuseli vůbec přemýšlet, v podstatě ani dosadit do vzorce, protože stačilo odpovídat na otázky náročnosti prvního stupně základní školy. Učitel změnil potenciálně problémovou úlohu na rutinní záležitost. Nabízí se otázka, jakou představu o matematice v žácích posiluje. V podstatě jim říká, že matematika je o zapamatování vzorečků a k úspěchu stačí do nich dosazovat.[2]

[2] Zde samozřejmě značně zjednodušuji, protože úryvek je vytržen z kontextu dalšího vyučování, je možné, že tento přístup učitel nepoužívá systematicky.

S posluchači je možné diskutovat o všech pěti výše uvedených tezích a také o problémovém použití této úlohy. To je poměrně jednoduché. Znají-li žáci součet úhlů v trojúhelníku, mohou pak rozdělit mnohoúhelníky pomocí úhlopříček na trojúhelníky a doplňovat tabulku, v níž budou evidovat počet stran, počet trojúhelníků a součet vnitřních úhlů. Je pravděpodobné, že k zobecnění se samostatně propracují jen někteří. Nicméně i ti ostatní budou zřejmě schopni vyplnit konkrétní hodnoty tabulky. Učitel může přistupovat k dětem individuálně podle toho, jakou pomoc vyžadují. Některým poradí, např. jak si mají mnohoúhelník rozdělit na trojúhelníky, jiné upozorní na hledání souvislosti mezi číslem, kterým násobíme 180 stupňů, a počtem stran, jiné nechá zcela bez nápovědy. Rozhodně mají dostat dostatek času na začátku, aby se pokusily najít strategii řešení samy.

Ilustrace 2: Pythagorova věta v E^3 (TIMSS Video Study, švýcarská hodina)

Žáci již znali Pythagorovu větu u rovinných útvarů a měli objevit její použití v prostoru. Učitelka přinesla krabice různých velikostí, které se používají pro posílání balíčků poštou. Děti pracovaly ve skupinách po třech a po čtyřech. Každá skupina dostala kromě krabice též několik dlouhých brček reprezentujících předmět, který děti chtějí poslat poštou. Jejich úkolem bylo najít nejdelší objekt, který se vejde do jejich krabice (z matematického hlediska tedy zjistit, že nejdelší úhlopříčka je tělesová), změřit jej a své měření ověřit výpočtem. Z videozáznamu bylo vidět, že žáci jsou na skupinovou práci zvyklí a skutečně aktivně pracovali v průběhu celé hodiny. Učitelka procházela třídou a reagovala na dotazy. Přitom však téměř nic neprozradila. Např. skupině, která brčko ustřihla ve velikosti stěnové úhlopříčky, řekla: „Záleží pak na tom, jak vysokou máme krabici? Nestačila by pak nějaká mělčí?“ Tím je upozornila, aby vzali v úvahu také třetí rozměr krabice, což skupina po dalším experimentování udělala.

Po několika minutách se třída značně rozvrstvila. Některé skupiny již přemýšlely nad výpočtem, jiné ještě experimentovaly s brčkem, další si modelovaly brčky pravoúhlý trojúhelník, který vzniká z hrany a tělesové a stěnové úhlopříčky (což je už přirozeně navedlo na Pythagorovou větu). To je jeden z nejvýraznějších rysů konstruktivistických přístupů – tempo práce žáků je značně indiviudální. Ovšem domnívám se, že tato fáze, kdy si žáci uvědomují, která úhlopříčka v kvádru je nejdelší a jaký pravoúhlý trojúhelník tam vzniká, nejde urychlit. Učitelka si s tímto problémem poradila dobře. Když některé skupiny udělaly výpočet délky tělesové úhlopříčky, požádala je, aby přemýšlely nad tím, jak to celé napsat jediným výpočtem. Ostatní zatím zůstaly na úrovni postupného výpočtu – nejprve stěnové a pak tělesové úhlopříčky. Do vyučovací hodiny se vešlo i nějaké procvičování používání Pythagorovy věty v prostoru.

Je těžké popsat celou vyučovací hodinu. Zde se ukazuje výhodnost videa zcela zřetelně. Vyzkoušela jsem tuto hodinu již několikrát a opakovaně se ukázalo, že je pro rozbor vhodná. Posluchači si všímají zejména reakcí učitelky a jejího nenásilného vedení hodiny. Na rozdíl od předchozího úryvku se učitelka snaží

v žácích vyvolat představu, že pochopení matematiky si vytvářejí do určité míry sami. Zařazuje i objevitelské aktivity, ale nepodceňuje procvičování.

3 Závěr

Není překvapivé, že se názory učitelů i studentů na videozáznamy z vyučovacích hodin různí, vždyť vyučování je nesmírně složitý systém. Domnívám se, že kdyby existoval jeden správný způsob, jak vyučovat, už bychom jej dávno používali. Je nutné zdůraznit, že při rozboru hodin nejde v žádném případě o kritiku výuky jiného učitele. Vždy vycházíme z toho, že co učitel v hodině dělá, dělá v dobré víře. Jde spíše o to uvědomit si alternativy, podívat se na výuku s odstupem (který nám při vlastní výuce chybí) a zamyslet se nad tím, co by se dalo změnit, aby se jak žáci, tak učitelé v hodinách cítili dobře a současně se naučili matematiku a oblíbili si ji. Nejsem zastáncem náhlých a radikálních změn. Spíše si myslím, že je nutné jít cestou reflexe vlastní výuky a postupného zlepšování toho, co je identifikováno jako nedostatečné. Domnívám se, že rozbor videí může ke schopnosti reflexe významně přispět.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu GA ČR 406/05/2444.

Literatura

[1] BECK, R. J., KING, A., MARSHALL, S. K. Effects of videocase construction on preservice teachers' observations of teaching. *The Journal of Experimental Education*, 2002, 70(4), p. 345–361.

[2] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha : Portál, 2001.

[3] KUŘINA, F. O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, 2002, roč. 31, č. 1, s. 1–8.

[4] MAZÁČOVÁ, N. Činnostní příprava studentů učitelství. *Učitelské listy 2005/2006*, č. 8, s. 4–5.

[5] MOELLER, B., a kol. *Designing digital video case resources for mathematics teacher education.* March 2005, [on-line] http://www2.edc.org/cct/

[6] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe.* Pracovní materiál pro kurzy ESF, SUMA JČMF, 2006, 28 s.

[7] STIGLER, J. W., HIEBERT, J. *Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom.* Free Press, 1999.

[8] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. Kolektivní reflexe, cesta ke zdokonalování kompetencí učitele. In *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005.* Bratislava : JSMF, EXAM, 2005.

Reforma vyučování matematice v USA

David Stein

Abstrakt

Článek obsahuje stručný popis reformy vyučování matematice v USA. Popsány jsou jak cíle, principy a metody reformátorů, tak i potíže, odpor a kritika, s níž se uskutečňování reformy setkalo.

1 Úvod[1]

Ve Spojených státech probíhá již značnou dobu pokus o dalekosáhlou reformu vyučování matematice na základních a středních školách. Zavádění této reformy ale narazilo na silný odpor a kritiku, zvláště z řad matematiků, a vedlo k tak bouřlivým sporům, že se jim začalo říkat *Matematické války* a dodnes se řeší otázka, jak najít cestu ke smíru.

Za počátek reformy je považován rok 1989, kdy Národní rada pro výzkum vydala soubor reformních doporučení pro vyučování matematice (viz [7]) a Národní rada učitelů matematiky (NCTM) publikovala pravidla, jimiž by se měla řídit tvorba a hodnocení osnov, učebních plánů a školních programů (viz [5]). Na obou dokumentech se jako autoři podíleli hlavně didaktici z amerických vysokých škol; právě mezi pracovníky v oblasti didaktického výzkumu byla a je podpora reformy nejsilnější.

Reforma je těsně spjata s NCTM a jejími standardy. NCTM je mohutná organizace, jejímiž členy jsou povětšinou učitelé základních a středních škol, ale v jejímž vedení je vždy mnoho didaktiků (ne však matematiků). Osud reformy do velké míry závisí na stanoviskách NCTM a naopak reputace NCTM je do velké míry závislá na úspěchu či neúspěchu reformy.

[1] Vzhledem k omezenému prostoru tohoto článku a obsáhlému tématu, jímž se zabývá, tu bude možno poskytnout jenom ty nejzákladnější informace. Více podrobností a údajů poskytnu ve článku *Matematické války v USA*, který bude publikován na stránkách Společnosti učitelů matematiky (viz http://www.suma.jcmf.cz). V tomto článku mi též nezbývá místo k tomu, abych se mohl zabývat souvislosti mezi reformou v USA a problematikou českého školství. Věřím ale, že čtenář, který je obeznámen s RVP, si mnohých souvislostí všimne sám.

2 Reformní cíle a doporučení

Reformátoři si kladou za cíl zpřístupnit matematiku co nejširší vrstvě studentů, přizpůsobit školní matematiku novým potřebám společnosti, využít moderní technologie a pedagogické postupy a změnit zažité názory na povahu a užitečnost matematiky. Reformátoři dávají tradiční výuce za vinu, že velké množství studentů – zejména z určitých etnických menšin a v menší míře též mezi dívkami – ve studiu matematiky nedojde dostatečně daleko, protože se jim nedaří plnit požadavky, jež jsou na ně ve školní matematice kladeny, a protože obsah i forma vyučování matematice je od dalšího studia odrazuje. Reformátoři chtějí, aby školní matematika ve studentech vypěstovala k matematice kladný vztah a přesvědčení o její užitečnosti v životě. Nutnost změn spatřují též v přechodu ze společnosti průmyslové na společnost informační a v nárocích, jež klade na občany odpovědný život ve vyspělé demokracii.

K dosažení těchto cílů doporučují reformátoři oslabit následující aspekty vyučování matematice: učení se nazpaměť, procvičování a písemné počítání; rutinní dovednosti; předepsané postupy a pravidla; formální logické důkazy a abstraktní teorie; přednášení a využívání učitelů a učebnic jako hlavních zdrojů znalostí; rozdělování studentů do různých tříd podle domnělého talentu či výkonu; individualismus a soutěžení; standardizované testy.

Naopak následující aspekty vyučování chtějí reformátoři posílit: uvažování a porozumění; objevování a tvoření; empirické zkoumání, formování hypotéz, nalézání protipříkladů; využívání témat, jež jsou pro žáky relevantní, poutavé a smysluplné; zadávání úloh těžících inspiraci z běžného života žáků; rozvíjení všeobecných schopností a řešení nestandardních problémů; nalézání souvislostí mezi různými matematickými tématy a dovednostmi; odhalování pravidelností; používání názorných pomůcek; využívání počítačů a hojné používání kalkulátorů (již od prvních ročníků ZŠ); odhadování výpočtů; zadávání projektů a referátů, vedení deníků a budování portfolií; přihlížení k etnickým a kulturním okolnostem při vyučování a hodnocení; formování a hodnocení vlastností žáka a jeho postojů k matematice. Žáci by měli být vedeni ke spolupráci (zejména v malých skupinách) a k vzájemné komunikaci. Reformní třídy by měly být pokud možno heterogenní a základní osnovy by měly být pro všechny studenty stejné. Algebra a geometrie by na SŠ měly být vyučovány jako jeden „integrovaný“ předmět. V osnovách by měla získat více místa užitá matematika (zvláště ze společenských věd), diskrétní matematika, statistika a teorie pravděpodobnosti.

Výše uvedený výčet není vyčerpávající a navíc zmiňuje jen ta doporučení, jež byla vyhlášena v publikacích určených širší veřejnosti (vycházím tu hlavně z [5, 7]). Reforma však byla ovlivněna i myšlenkami, jež se objevovaly především ve článcích určených učitelům a dalším pedagogickým pracovníkům – například názory, že ve výuce není třeba nijak upřednostňovat standardní aritmetické algoritmy.

Reforma je též spjata s konstruktivismem, širokým myšlenkovým proudem, jemuž je společným stanoviskem tvrzení, že „poznatky jsou konstruované“ a jehož *radikální formy* nahrazují objektivní realitu (včetně matematických „pravd“) osobními poznatky nebo společenskou dohodou. V pedagogice se vliv konstruktivismu může projevovat od preferování aktivních způsobů učení a věnování zvýšené pozornosti myšlenkovým postupům studentů (v ČR viz [2, 9]) až po zamítání možnosti účinného předávání vědomostí a upřednostňování subjektivních poznatků a názorů. V časopisech, jež NCTM vydává pro učitele, se o konstruktivismu jako teoretickém podkladu reformy píše často, ve Standardech NCTM ale zmínka o konstruktivismu není žádná.

Vytvoření konkrétní představy o požadavcích reformátorů stěžuje neurčitost mnoha jejich doporučení, nejasnost některých pojmů a skutečnost, že určité názory jsou dané jen nepřímo a že jsou opomenuta důležitá témata.[2] Obecně platí, že reformní dokumenty udávají v mnoha didaktických otázkách jasný směr změn, ne však již *jak daleko zajít*. Umožňují tedy i výklad, jenž by vedl k drastickým změnám.

3 Zavádění reformy

Standardy NCTM se setkaly s podporou učitelů matematiky, není však jisté, do jaké míry vedly ke změnám v metodách vyučování. Na jedné straně je otázkou, zda učitelé neuplatňují mnohá reformní doporučení jen povrchně, a na druhé je důvod k obavám, že v některých případech učitelé výrazně překračují původní záměry reformistů – např. tím, že na středních školách přestávají učit matematickým důkazům a dalším tématům (více viz [1]).

Značným úspěchem reformy byl její vliv na nové verze standardů a rámcových programů téměř všech států USA. Reformní předpisy jednotlivých států a vydatná finanční podpora Národní nadace pro vědy (NSF) pak vedly ke vzniku a k šíření reformních učebnic a programů, jež se od naprosté většiny dosavadních zásadně lišily.[3] Méně úspěšná byla reforma v oblasti hodnocení; měla sice určitý

[2] Uvedu několik příkladů. Ve Standardech NCTM mnohdy chybí vysvětlení, do jaké míry by měly být určité aspekty vyučování – např. učení se nazpaměť či přednášení – potlačeny. Jsou v nich častá varování proti „osamoceným“ tématům a dovednostem, není však jasné, zda tu jde o varování jen před nepřirozenou odloučeností nebo zda je tím míněno jakékoliv delší studování či procvičování zaměřené na jednotlivé téma či dovednost. V [7] se mluví o nutnosti vyučovat a hodnotit „přemýšlení vyššího řádu“ (*higher-order thinking*), aniž by bylo vysvětleno, co je tím míněno a jak to lze učit a hodnotit. Ze Standardů NCTM nepřímo vyplývá, že není třeba žáky učit písemně zvládat úkony, které mohou provést rychleji na kalkulátoru – přímo to však řečeno není. Standardy též budí dojem, ale neříkají přímo, že studentům není nikdy možno používání kalkulátorů zakazovat. Důležité téma, které Standardy téměř úplně opomíjejí, je problematika známkování.

[3] Více informací o 13 reformních kurikulárních programech vytvořených za podpory NSF lze najít na stránkách, na něž směřují odkazy na adrese
http://www.mathematicallycorrect.com/links/nsfprojects.asp.

vliv na formu a obsah standardizovaných testů, nepodařilo se jí ale snížit jejich roli či vytvořit a prosadit skutečně reformní alternativy (jako třeba celostátní hodnocení žákovských portfolií).

K tomu, aby se dala posoudit míra rozšíření reformy, scházejí potřebná data a informace – např. o tom, co se skutečně děje v amerických třídách při vyučování matematice, ale i o tom, jak často a jakým způsobem jsou používány reformní učebnice a kurikula. NCTM navíc odmítá rozhodovat, které učebnice a zkoušky odpovídají reformním představám, takže v tomto ohledu není pří výše zmíněné neurčitosti reformních doporučení dostatečně jasno. Jisté je, že reforma na jedné straně pronikla do mnoha amerických škol a vyučování matematice v USA zásadně ovlivnila, ale na druhé straně nedocílila dominantního postavení či úspěchu ve všech svých hlavních úmyslech.

4 Odpor a kritika

Reforma narazila na větší odpor teprve poté, co se do škol dostaly reformní učebnice. Rodiče si začali stěžovat, že se jejich děti nenaučily dostatečně dobře počítat ani zpaměti, ani písemně, že probírání učební látky postupuje příliš pomalu a navíc je příliš povrchní a že důležitá témata jsou vynechávána. Mnoho rodičů začalo mít obavy, že se jejich děti v reformních třídách nenaučí matematiku dostatečně dobře k tomu, aby mohly studovat obory, jež vyžadují zvládání vyšší matematiky.

V některých školních okresech přerostly stížnosti rodičů do vzpour a vedly k peticím požadujícím pro žáky možnost volby nereformních tříd matematiky. Silná ohniska vzdoru se objevila poblíž elitních univerzit (např. Princeton, Stanford, Harvard, NYU). Vznikla uskupení, jež odpor proti reformě začala organizovat: *Mathematically Correct* (*Matematicky správně*) z jižní Kalifornie (viz http://mathematicallycorrect.com), *HOLD* ze Silicon Valley v severní Kalifornii, a později též *NYC HOLD* z města New York (viz http://nychold.com).[4] Těmto organizacím se podařilo získat spojence mezi matematiky a upoutat na sebe pozornost sdělovacích prostředků zvláště v těch státech USA, ve kterých reforma ovlivnila podmínky pro schvalování učebnic či obsah a formu celostátních testů a maturitních zkoušek. (Více o počátcích matematických válek viz [3].)

Matematici se obávají, že by reforma mohla zdecimovat příští generaci matematiků a vědců a že o matematice vytváří mylný dojem tím, že přehlíží nutnost přesnosti a skutečných důkazů. Stěžují si též na vágnost reformních standardů v mnoha státech USA a na matematické chyby a nepřesnosti v reformních učebnicích, zkouškách a dokumentech. Navíc se domnívají, že reforma přehlíží snad

[4] Protivníkem těchto organizací je uskupení *Mathematically Sane* (viz http://mathematicallysane.com), jež reformu hájí.

nejpalčivější problém výuky matematiky v USA – nedostatečnou znalost a porozumění matematice mezi učiteli na základních a středních školách (více viz např. [8, 10]).

5 „Válka“ a hledání smíru

Právě matematici se stali úhlavními odpůrci reformy. V Kalifornii, ve které reforma došla v polovině 90. let nejdále a vyprovokovala nejsilnější bouři nevole, se mnozí matematici zapojili do protireformního hnutí. V roce 1997 Kalifornie za pomocí matematiků přepsala své standardy, při čemž potlačila či přímo odmítla mnohé reformní požadavky. Více než sto Kalifornských matematiků se pak za tyto nové státní standardy veřejně postavilo. Konflikt v Kalifornii se brzy rozšířil na celonárodní úroveň. V roce 1999 téměř 200 amerických matematiků zveřejnilo otevřený dopis, jímž protestovalo proti podpoře, kterou reformním programům poskytlo federální ministerstvo školství (více viz [4]).

Již přes deset let nyní trvají boje ohledně reformy a s nimi související spor mezi didaktiky (z valné části reformu podporujících) a matematiky (z valné části reformu, pokud o ní vědí, odmítajících). Určitou naději na ukončení tohoto rozkolu slibovalo v roce 2000 vydání nové verze Standardů NCTM, nazvané *Principy a standardy školní matematiky* (viz [6]). Při práci na této revizi si NCTM vyžádala názory několika předních sdružení matematiků a do určité míry se pokusila jejich názory vyslyšet. Odpůrci reformy toto úsilí ocenili a někteří z nich prohlásili nové standardy za víceméně přijatelné či alespoň výrazně lepší než ty z roku 1989. K zásadním změnám v obsahu již existujících reformních učebnic a osnov však tyto nové standardy nevedly. Přispěla k tomu i samotná NCTM tím, že zdůrazňovala spíše návaznost a spřízněnost starých a nových standardů než jejich rozdílnost. Spor tedy pokračoval.

Výzkumy, snažící se zjistit výsledky vlivu reformy na znalosti a dovednosti studentů, zatím žádné rozuzlení nepřinesly, zčásti proto, že podmínky pro výzkum jsou nesmírně komplikované, a zčásti proto, že mnohý výzkum trpí zásadními nedostatky. Zastánci a odpůrci reformy se navíc neshodují na tom, které znalosti, dovednosti, vlastnosti a postoje studentů jsou nejdůležitější.

Mnozí matematici a didaktici matematiky se poslední dobou alespoň snaží mezi sebou komunikovat a hledat základní body, ve kterých by se shodli a které by otevřely cestu ke smíru. Je otázkou, zda tato snaha bude úspěšná a zda se podaří oba znepřátelené tábory usmířit – a jaké to bude mít následky, pokud se to podaří, pro samotnou reformu.

6 Závěr

Reforma sice není poražena (reformní standardy jsou stále platné ve většině států USA a mnoho školních okresů nadále používá reformní učebnice a učební materiály) a brzký pád reformy je nepravděpodobný (na to má příliš mnoho

vlivných stoupenců ve školství a na univerzitách), budoucnost reformy je ale vzhledem k vlivu jejích odpůrců a k porážkám v několika státech USA nejistá. Situace se zatím jeví jako patová.

Literatura

[1] CUOCO, A. Teaching Mathematics in the United States. *Notices of the AMS*, 2003, roč. 50, č. 7, s. 777–787.

[2] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* 1. vyd. Praha : Portál, 2001.

[3] JACKSON, A. The Math Wars: Parts I and II. *Notices of the AMS*, 1997, roč. 44, č. 6 a 7, s. 695–702 a 817–823.

[4] JACKSON, A. Open Letter on Mathematics Curricula Ignites Debate. *Notices of the AMS*, 2000, roč. 47, č. 2, s. 248–249.

[5] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* 1. vyd. Reston, USA : NCTM, 1989.

[6] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standards of School Mathematics.* 1. vyd. Reston, USA : NCTM, 2000.

[7] NATIONAL RESEARCH COUNCIL. *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* 1. vyd. Washington, USA : National Academies Press, 1989.

[8] RAIMI, R., BRADEN, L. State Mathematics Standards: An Appraisal of Math Standards in 46 States, the District of Columbia, and Japan. *Fordham Report*, 1998, roč. 2, č. 3, s. 1–70.

[9] STEHLÍKOVÁ, N. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In M. Krátká (ed.) *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let?* Plzeň : Vydavatelský servis, 2006.

[10] WU, H. The Mathematics Education Reform: Why you should be concerned and what you can do. *American Mathematical Monthly*, 1997, roč. 104, č. 10, s. 946–954.

Trojrozměrná geometrie v praxi

Veronika Svobodová

Abstrakt

Příspěvek se zabývá využitím pravidelných mnohostěnů jako přirozeného prostředku k chápání prostorových vztahů. Poukazuje na důležitost rozvoje prostorové představivosti jako aparátu použitelného při efektivnějším řešení konkrétních problémů. Obsahuje ukázky praktických hodin se studenty.

1 Úvod

Domnívám se, že v současné době na našich základních a středních školách převažuje v matematice trend, který byl vždy klasickou vzdělávací formou na školách vysokých. Vůdčí je snaha o naprostou systematizaci, o budování matematických teorií od základů, které se bez nadhledu a hlubšího porozumění stávají samoúčelnými.

Stejně je tomu i ve výuce prostorové geometrie. Studenti od počátku pracují s abstraktními pojmy jako jsou bod, přímka, rovina a prostor. Nejprve hledají vzájemné polohové vlastnosti mezi těmito objekty, posléze se zabývají jejich metrickými vztahy. Většina studentů však ve chvíli, kdy má projevit schopnost konkrétní prostorové představy, selže. Domnívám se, že k budování matematické teorie na střední škole je nutné, aby studenti měli intuitivní představu toho, čemu se učí. Proto by hodinám stereometrie měly předcházet hodiny, které budou přirozeným způsobem rozvíjet prostorovou představivost. V následujících odstavcích se pokusím nastínit, co by mohlo být jejich náplní.

Zabýváme-li se tím, jak co nejlépe učit zmiňovanou problematiku, měli bychom také nahlédnout, jak se sama v historii utvářela. Tvorba teorií se často řídí intuicí, a proto se nemusí jednat vždy o nejkratší proces, naopak často může obsahovat slepé odbočky. Proto se domnívám, že právě zde je třeba hledat cestu, po které by se měla výuka ubírat. Student sledující myšlenky, které vedly k utváření teorií, bude rozumět zaváděným pojmům.

Základem prostorové geometrie ve starověku byly pravidelné mnohostěny, na nichž se daly popisovat vzájemné prostorové vztahy. Eukleides jim ve svých *Základech* věnoval celou třináctou knihu (někteří matematici tvrdí, že *Základy*

byly napsány právě kvůli této poslední knize a že tedy všechny předcházející knihy jsou jen nutným úvodem k pochopení prostorové pasáže).

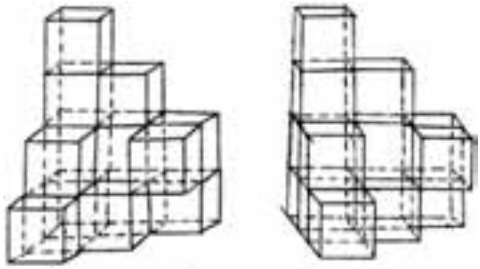
Pravidelné mnohostěny by proto mohly být branou k pochopení prostoru. Studentům je důvěrně známá krychle, se kterou si většina z nich v dětství hrála, a všechna další pravidelná tělesa s krychlí úzce souvisí. Na pravidelných mnohostěnech můžeme nejen jednoduše demonstrovat prostorové vztahy – každý student je může mít před sebou – ale také procvičovat představivost jejich různými úpravami (průniky, osekáváním, prodlužováním stěn, ...), odvozovat vzorce pro výpočty povrchů a objemů a v neposlední řadě interpretovat prostor do roviny. Je velkým rozdílem, zda student vidí na obrázku osmistěn nebo zda ho drží v ruce a sám převede jeho obraz do roviny.

Ukazuje se, že studenti, kteří mají prostorovou představivost, jsou schopni efektivněji řešit konkrétní problémy než ti, co ji nemají. A nejedná se pouze o abstraktní geometrické úlohy, ale také o úlohy každodenního života, ve kterých prostorové řešení svou jednoduchostí vítězí. Příkladem může být optimální rozmístění nábytku nebo hledání vztahů mezi zadanými skutečnostmi, přičemž rovinné propojení by bylo příliš chaotické.

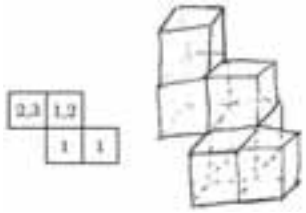
2 Úlohy pro studenty nižšího gymnázia

Na nižším gymnáziu začínám výuku prostorové geometrie na kostkách. Každý student si má donést sadu krychliček, se kterými několik následujících hodin pracuje. Nejprve z nich staví stavby, které se učí načrtnout v nějakém pohledu volného rovnoběžného promítání. Za zmínku stojí, že už v tomto věku převládá preference pravého nadhledu (a není tedy způsobena zvykem). Nadhled je pochopitelný, vždyť většinu věcí každodenního života vidíme pohledem „shora“. Zajímavá je však preference pravého pohledu. Na obrázku (obr. 1) jsou stavby, které nakreslila Jana. Věděla, že v obou náčrtcích má kolmé úsečky zobrazovat pod úhlem 45° a zkracovat jejich velikost na polovinu. U pravého pohledu se jí to vcelku podařilo, s levým měla problémy. Nejedná se o ojedinělý případ, proto jsem hledala důvody, které by mohly být příčinou. Většina studentů postupuje při náčrtku tak, že nejprve kreslí přední stěny. Potom tedy musí nakreslit hrany „ubíhající“ dozadu, což je buď šikmo doprava nebo šikmo doleva. Pravákovi přirozeně půjde lépe nakreslit hrana směřující doprava, levákovi doleva. Každý z nás má tedy dispozice k určitému pohledu. S rostoucím počtem nakreslených staveb se však i nepreferovaný pohled postupně zlepšuje. Provést náčrtek v libovolném pohledu volného rovnoběžného promítání pokládám za velmi důležité, znamená to, že student má o tělese správnou prostorovou představu a dokáže s ní pomyslně otáčet.

Další kostkové úlohy používají známých diagramů, jako jednoduché rovinné interpretace prostorové stavby. Jde o to nejprve správně diagram chápat, tzn. být schopen z něj těleso postavit a naopak vytvořit k tělesu příslušný diagram



Obr. 1 Pravý a levý nadhled



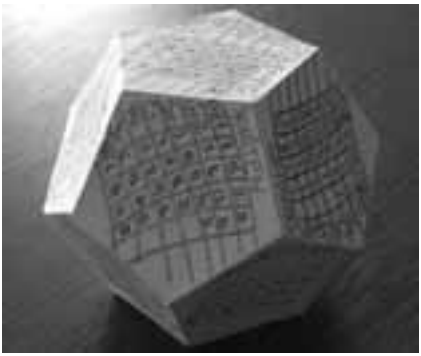
Obr. 2 Diagram

(obr. 2). Po tomto seznámení přichází na řadu samotné cvičení představivosti. Bez možnosti postavit si stavbu z kostek, ji musí studenti být schopni nakreslit pouze ze znalosti příslušného diagramu. Úspěšnost studentů v této úloze se s rostoucím počtem pokusů zvyšuje. Začínají prostor v rovině vidět. Mezi další klasické úlohy patří určování obrázku, který je na skryté stěně kostky, ze znalosti některých konkrétních poloh, nebo pomyslné kutálení kostky s představou, kde se v dané chvíli nachází ta která stěna. Velmi se mi také osvědčilo modelování těles požadovaných vlastností z plastelíny. Nejednalo se sice o pravidelné mnohostěny, ale studenti tímto dokázali, že jejich původní představa o nemožnosti splnění zadaného úkolu je mylná. Snadno například vymodelovali těleso, které je současně schopno těsně „projít“ otvorem tvaru kruhu a obdélníku – brzy přišli na to, že příkladem může být válec. Přidáním podmínky, aby těleso těsně prošlo současně třeba trojúhelníkovým otvorem, byli všichni přesvědčeni o nemožnosti provedení tohoto úkolu. Do konce hodiny však byla většina studentů schopná těleso požadovaných vlastností vymodelovat a nakreslit.

V závěru školního roku jsme se studenty sekundy gymnázia podrobili zkoumání pravidelný dvanáctistěn. Využili jsme toho, že má stejný počet stěn jako rok měsíců a každý student si tak vyrobil domů kalendář ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu z tvrdého papíru na další rok (obr. 3). Studenti se díky tomu naučili narýsovat pravidelný pětiúhelník a sestrojit síť tělesa, které viděli před sebou. Naučili se nad sítí přemýšlet, když uvažovali, kam umístí záložky na lepení a hlavně byli postaveni před praktický problém: „Slep mi toto těleso, které držím v ruce.“

3 Úlohy pro studenty vyššího gymnázia

V rámci výuky stereometrie v sextě gymnázia (tedy druhého ročníku) dostali studenti úkol během čtvrt roku slepit model nějakého konkrétního mnohostěnu, který si sami z nabízené množiny vybrali. Barevnost a materiál modelu jsem ponechala na invenci studentů, pouze byli upozorněni, že je třeba, aby těleso bylo

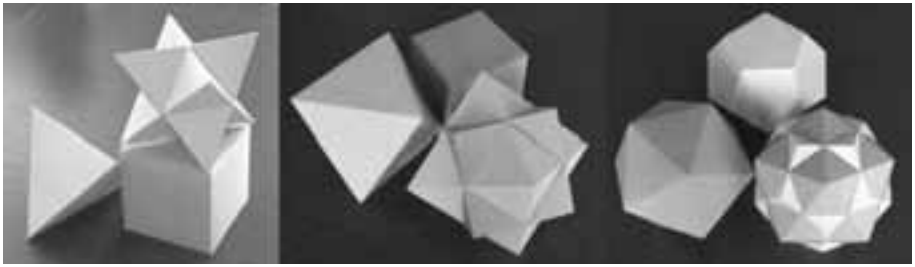


Obr. 3 Kalendář

Obr. 4 Pohled do třídy

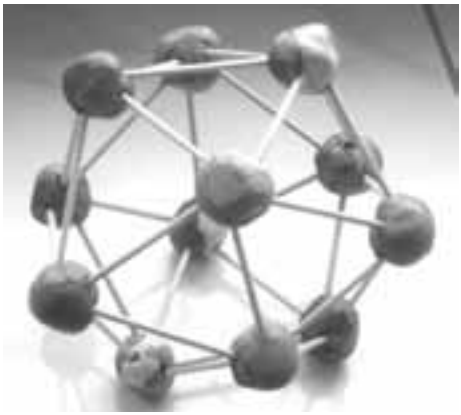
pevné a něco vydrželo. Ty modely, které byly dostatečně velké, jsme v závěru školního roku zavěsili u stropu učebny (obr. 4), ostatní jsme instalovali do vitríny.

Další možností využití modelů pravidelných mnohostěnů je hledání jejich vzájemných prostorových vztahů – všech pět pravidelných těles spolu úzce souvisí, což se dá poměrně jednoduše ukázat. Začneme-li např. u krychle, která je pro představu nejlepší, tak vhodným výběrem čtyř z jejích osmi vrcholů získáme vrcholy pravidelného čtyřstěnu (obr. 5). Osmistěn můžeme ze zadané krychle získat třeba tak, že řekneme, že jeho vrcholy jsou ve středech stěn krychle. Dvanáctistěn potom s krychlí souvisí následovně: vybereme-li z dvaceti vrcholů dvanáctistěnu vhodně osm vrcholů, budou to právě vrcholy krychle. Poslední pravidelný mnohostěn – dvacetistěn, získáme třeba opět vepsáním, tentokrát do dvanáctistěnu (související mnohostěny jsou vyobrazeny na obrázku 5, pouze osmistěn, resp. dvacetistěn jsou zvětšeny tak, aby byly vidět, tedy tak, aby se jejich hrany půlily s hranami krychle, resp. dvanáctistěnu).



Obr. 5 Souvislosti mezi pravidelnými mnohostěny

Další možností, jak vyrobit model tělesa, je použití modelovací hmoty a špejlí nebo párátek (obr. 6). Na závěr zmíním úlohu o zaplnění prostoru beze zbytku stejnými tělesy. Jistě si každý dokáže představit, že tuto vlastnost má krychle. Co už ale není přímo zřejmé, je to, že prostor můžeme beze zbytku zaplnit také kosočtverečnými dvanáctistěny, což jsou tělesa, která získáme např. jako konvexní obaly průniku pravidelného osmistěnu a šestistěnu. Vyrobí-li každý student jeden kosočtverečný dvanáctistěn, zaplnění prostoru můžeme názorně demonstrovat.



Obr. 6 Model pravidelného dvacetistěnu

4 Závěr

Chtěla bych na tomto místě velmi doporučit zařazení práce s modely do výuky matematiky. Neztratíme tím čas, protože studenti budou po absolvování praktických úkolů schopni řešit další stereometrické úlohy snáze.

Literatura

[1] COXETER, H. S. M. *Regular Polytopes.* 1. vyd. London : Methuen & Co., LTD., 1948.

[2] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* 1. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1990.

[3] KUŘINA, F. *Problémové vyučování v geometrii.* 1. vyd. Praha : SPN, 1976.

[4] KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice.* 1. vyd. Praha : SPN, 1990.

Projekty dalšího vzdělávání učitelů matematiky ve vztahu k tvorbě školních vzdělávacích programů

Václav Sýkora

Abstrakt

Důležitým předpokladem úspěchu kurikulární reformy probíhající v českém školství je příprava učitelů matematiky ke změně postojů v jejich práci. Systém dalšího vzdělávání učitelů u nás v současné době neexistuje, vysoké školy nebyly do přípravy reformy začleněny s dostatečným předstihem tak, aby mohly přípravu učitelů ovlivnit. Jednota českých matematiků a fyziků realizuje dva významné projekty, které mohou pozitivně přispět k řešení této situace. Současně je nezbytné zabývat se koncepční přípravou dalších projektů, stanovit priority dalšího vzdělávání učitelů matematiky a hledat nástroje k jejich realizaci.

V současné době stojí před učiteli matematiky nový úkol, na který nejsou odpovídajícím způsobem připraveni. Mají zpracovat nový typ dokumentu – školní vzdělávací program a pracovat při tom s pojmy a postupy, které jsou pro ně zcela nové. Vzniká, mezi jinými, i otázka, zda je taková práce pro učitele základních i středních škol výhodná, jaké šance přináší jim a školské matematice a jak pro tuto práci učitele matematiky připravit?

Nový úkol poskytuje především **historickou šanci** umožňující učiteli matematiky podstatně ovlivňovat vlastní práci zejména z hlediska obsahu a didaktické interpretace učiva. Nově vznikající volnost není absolutní, je limitována rámcovým vzdělávacím programem, počty hodin učebního plánu, nezbytností připravit žáky k přijímacím zkouškám, horizontální prostupností škol apod. Asi být úplně volná ani nemůže. Zkušenost Velké Británie s úplným uvolněním školních kurikulí vedla nakonec stejně k přijetí minimálního *národního kurikula* závazného pro všechny školy. Taková výzva je nicméně pro učitele matematiky nová a přínosná v tom smyslu, že mohou ve své práci mnohem výrazněji vycházet ze svých zkušeností, zájmové orientace, vědomostí a poznatků.

Druhou významnou šanci představuje možnost postupně reformovat vyučování matematice u nás v souladu s jeho vývojem v současném světě, který prochází velmi rychlým technickým rozvojem. Během posledních sta let nedoznala

školská matematika podstatných změn (na rozdíl od matematiky jako vědecké disciplíny). Ojedinělý pokus o změnu obsahu školské matematiky, představovaný množinovou modernizací, sice vedl k nebývalému rozvoji teorie vyučování matematice, běžné školní praxe se však podstatně nedotkl. Berme však v úvahu, že školská matematika patrně projde v časově blízkém horizontu podstatnými změnami. Příčinou je především razantní nástup výpočetní techniky, která radikálně mění využití matematických poznatků v každodenní praxi. Budeme si muset přiznat, že běžný občan potřebuje už dnes, tedy na začátku nastupujícího jednadvacátého století, k úspěšnému profesnímu i soukromému životu méně osvojených konkrétních matematických poznatků než v předcházející době. Rozvoj civilizace se sice ve stále větší míře opírá o výsledky matematiky a dalších vědeckých disciplín, pro praktickou potřebu jsou však tyto poznatky předem zpracovávány v softwarových programech počítačů k profesnímu i soukromému využití. To se týká i vysokoškolsky vzdělaných lidí jako jsou techničtí a ekonomičtí inženýři nebo pracovníci výzkumné sféry. Výzkumy ukazují, že běžný občan se ve svém praktickém životě spokojí s aritmetikou přirozených čísel a desetinných čísel zaokrouhlených na jedno nebo dvě desetinná místa. Řekli bychom, že prioritní ve škole by měla být geometrizace reálného světa (všichni žijeme obklopeni zákonitostmi euklidovského trojrozměrného prostoru). Víme však, že geometrie (zejména stereometrie) je ve škole popelkou a nikoho to nijak zvlášť netrápí.

Na druhé straně stále více všichni *pracujeme s daty* a informacemi znázorněnými grafy, diagramy nebo tabulkami, všichni *měříme* a přepočítáváme jednotky, všichni hledáme pro nás výhodné *strategie řešení* nejrůznějších (i nematematizovaných) problémů, všichni se potřebujeme *orientovat* v čase a prostoru, všichni pracujeme s *obrazy* trojrozměrných těles na dvojrozměrném papíru nebo monitoru. Nikdo dnes nekontroluje do halíře účet u pokladny v obchodu, pohledem na něj se ale snažíme *odhadnout*, zda jsme nebyli ošizeni. Zdá se, že mnohem důležitější než konkrétní matematické poznatky a fakta jsou pro běžného občana některé obecné dovednosti, které školská matematika rozvíjí. V oblasti vzdělávací politiky se už řadu let pracuje s pojmem *kompetence* a zdá se, že jeho rozpracování v didaktice matematiky by mohlo přispět k nalezení východiska z řady našich problémů.

Pro očekávané změny je třeba učitele matematiky připravit. Kurikulární reforma reprezentovaná rámcovým vzdělávacím programem a tvorbou školních vzdělávacích programů může pro podobný záměr vytvořit využitelné prostředí. Vysoké školy nebyly do přípravy reformy zapojeny v dostatečné míře a nelze proto očekávat mohutný příliv absolventů fakult připravených na nové pojetí práce ve škole. Soustava dalšího vzdělávání učitelů byla u nás zrušena před patnácti lety a existující nepřehledné množství vzdělávacích pracovišť neposkytuje učitelům systematickou přípravu. Vzniká tedy otázka jakým způsobem dosáhnout toho, aby se výše uvedené představy prosadily v praxi. Ptejme se tedy, co je učitele matematiky zapotřebí naučit v první řadě?

Zásadní změna týkající se práce učitele spočívá v novém přístupu k **projektování učiva**, který byl využit při přípravě rámcových vzdělávacích programů a který se liší od přístupu, jenž byl v předcházející době uplatňován při přípravě učebních dokumentů. Učební dokumenty včetně učeních osnov byly dosud zpracovávány především z hlediska formulování obsahu. Definovaly tedy to, co má být ve výuce probráno. Rámcový vzdělávací program se snaží vymezit v první řadě výsledky vzdělávání, tedy to, co má žák po ukončení vzdělávání skutečně umět. Na prvním místě tedy stojí co nejpřesnější vymezení „cíle cesty“, kterou učitel a žák při vyučování matematice procházejí. Teprve na druhém místě je hledání optimální cesty – tedy obsahu, metod, forem či prostředků vyučování. Hned se nabízí konstatování, že stejného výsledku může být dosaženo různými cestami.

Tento přístup k projektování pedagogických dokumentů vytváří na české poměry nezvykle široký prostor jak pro tvořivý přístup ke zpracování dokumentu, tak zejména pro jeho praktickou realizaci. Současně však zaručuje určitou – předen stanovenou – úroveň vzdělání.

Předpokládáme, že podobný způsob projektování učiva bude využíván také při přípravě školního vzdělávacího programu. V první řadě by tedy mělo jít o promyšlení a rozpracování vzdělávacích výstupů. To by také mělo tvořit **první** ze dvou hlavních částí přípravy učitelů v současné době. Zpracovat systém konkrétních, konzistentních a kontrolovatelných výstupů v jednotlivých ročnících není tak jednoduché, jak se na první pohled zdá a důležitým předpokladem úspěchu je vzájemná spolupráce učitelského kolektivu. Formální úprava školních vzdělávacích programů může být odlišná a porovnávání různých podob programů a zkušeností s nimi by v blízké budoucnosti mělo rovněž tvořit součást akcí dalšího vzdělávání.

Druhou ze dvou hlavních částí přípravy učitelů matematiky v současné době vidím v rozvoji profesní kompetence učitelů *motivovat žáky zdůvodňováním užitečnosti matematiky ve všeobecně vzdělávacím kurikulu.* Máme řadu poznatků o poklesu úrovně matematického vzdělání. Na našich základních školách je ověření těchto poznatků poměrně snadné například díky sbírce úloh dr. Františka Bělouna, která u nás po dlouhá léta představovala standard matematického vzdělání na základní škole. Pokles úrovně není jen naším problémem, poukazují na něj didaktici matematiky na celém světě. Není cílem tohoto příspěvku rozebírat širší společenské souvislosti vedoucí k tomuto jevu, jisté však je, že učitelé matematiky musí vyvíjet značné úsilí k tomu, aby dokázali – i jinak než výlučně autoritativně – reagovat na množící se otázky žáků: „K čemu mi to bude?“ Musíme počítat s tím, že podobné otázky nebudou kladeny jen žáky, ale budou (nebo už jsou) kladeny i v rámci diskusí v pedagogických sborech při zpracování učebních plánů školy a rozhodování o hodinových dotacích pro jednotlivé předměty. Učitelé matematiky se musí naučit konkrétně a přesvědčivě argumentovat ve prospěch matematického vzdělávání. Musí umět přesvědčovat žáky i rodiče, že

matematika má být všeobecně vzdělávacím předmětem, protože rozvíjí (hlouběji a kvalitněji) některé (konkrétně formulované) kompetence potřebné pro profesní i osobní život každého z nás.

Měli bychom se v této souvislosti zamyslet nad obsahovými úpravami školské matematiky a pospíšit si s urychleným začleněním některých motivačně vysoce efektivních matematických témat, která jsou ale v současné době ve škole nedostatečně akcentována. Mám na mysli například matematické nebo matematice blízké hry. O podílu *sudoku* na rozvíjení kombinatorického myšlení nebo dovednosti hledat vhodnou strategii řešení problému nikdo nepochybuje. Proč tedy nevyužít módní zájem o něj pro cíle matematického vzdělání? Dalším příkladem podobných úprav může být širší a didakticky hlouběji propracované využití poznatků z historického vývoje matematiky. Ve škole je opomíjíme nebo jen stručně připomínáme v rámci tzv. historických poznámek. Přitom didaktika matematiky má pro tento záměr zdůvodnění opírající se o racionální hypotézu (*genetická paralela*). Historický vývoj matematiky je ukázkovým příkladem *multikulturních* postojů tolik zdůrazňovaných v dnešní době. V dějinách evropské matematiky můžeme velmi názorně sledovat vlivy a vklady kultury antické, čínské, indické nebo arabské. Matematická kultura Mayů předstihla o mnoho století naše evropské poznání. Co jiného je historický vývoj matematiky než motivačně vysoce efektivní a nezpochybnitelná brilantní ukázka rozvoje myšlení v evropských i globálních souvislostech?

Výše uvedené úvahy vedly ke zpracování projektu přípravy učitelů matematiky, který předložila JČMF zadavatelům programů OPRLZ a JPD3 v rámci Evropského sociálního programu. Uvědomovali jsme si zřetelně nebezpečí, které kurikulární reformě u nás hrozí. Může totiž dojít k tomu, že převáží byrokratický přístup při její realizaci, učitelé budou považovat zpracování školních vzdělávacích programů jen za slohové cvičení, jímž je reforma nejen zahájena, ale také ukončena. Všichni však dobře víme, že reforma bude úspěšná pouze tehdy, jestliže pronikne do práce učitele ve třídě, jestliže se projeví změnou jeho profesních postojů.

Kladu si proto klást otázku, jak budeme tyto postoje měnit? Současná školská realita nám mnoho příležitostí neposkytuje. Učitelé jsou demotivováni, chybí finanční prostředky. Pokud úspěšně dovršíme zmíněné projekty, ovlivníme 1 500 učitelů matematiky základních škol 45 hodinovým kurzem a 800 stránkami textů obsahujících konkrétní a bezprostředně využitelné návody pro vyučování matematice z hlediska nových přístupů. Budeme podávat návrhy na další podobné projekty. Významným nástrojem by se měl stát internetový portál SUMy (Společnosti učitelů matematiky JČMF). Portál je v provozu, postupně ho chceme upravit tak, aby na něm mohly probíhat diskuse k zásadním otázkám vyučování matematice. Osobně však považuji za nejpotřebnější vytvořit postupně ze SUMy racionálně řízenou a plně funkční profesní organizaci učitelů matematiky. Máme pro to předpoklady, i když se někteří tradicionalisté cítí povzneseni nad

takovým „přízemním“ záměrem. Zkušenosti z rozvinutých zemí ukazují, že nezávislá a silná organizace učitelů je schopná prosazovat i požadavky na jejich další vzdělávání a zásadně tak přispívat k rozvoji vyučování matematice v nových podmínkách globální společnosti.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za podpory projektu ESF OPRLZ CZ.04.1.03/3.1.15.1/0237

LITERATURA

[1] BĚLOUN, F. *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ.* Praha : SPN, 1992. ISBN 80-04-26365-8.

[2] VÚP PRAHA *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* 2004. http://www.vuppraha.cz.

[3] STRAKOVÁ, J., a kol. *Vědomosti a dovednosti pro život.* Praha : UIV, 2002. ISBN 80-211-0411-2.

Metoda trojkroku v hodině matematiky

Zdeněk Šíma

Abstrakt

Cílem příspěvku je seznámit účastníky konference s další výukovou metodou. Metoda obsahuje fáze **Já – Ty – My**. *Autory metody jsou švýcarští učitelé matematiky a německého jazyka P. Gallin a U. Ruf. Zpracovali metodu pro 1. a 2. ročník, 3. a 4. ročník, 5. a 6. ročník, 7. a 8. ročník základní školy. Osobně jsem se seznámil s metodou na Univerzitě v Bayreuthu na katedře matematiky a didaktiky matematiky, vedené profesorem Baptistem.*

1 Úvod

Celý příspěvek jsem rozdělil do tří částí: úvod, učební metoda trojkroku a závěr.

Aby se mohl učitel správně rozhodnout, jakou vyučovací metodu zvolí, aby pružně reagoval a mohl při plánování výuky využít většího množství činností, musí vědět:

- jaké vyučovací metody má k dispozici,
- jaké jsou přednosti a nedostatky jednotlivých metod,
- k jakým účelům mu každá z nich může sloužit,
- jak každou z nich užívat v praxi.

Neexistuje odpověď na otázku „Která učební metoda je nejlepší?“ Vyučovací metody vybíráme na základě účelu. Učitel si proto musí nejprve ujasnit účel hodiny a v souladu s ním pak zvolit vhodnou činnost.

Kvalitní školní vzdělávací program musí mít čtyři základní kameny, kterými jsou vhodné metodické materiály, kvalifikovaní učitelé, správně zvolená metoda a vhodně motivovaný žák.

Vhodnost metody není určována pouze jedním zřetelem. Cílem je něčemu žáka naučit. Záleží na tom, jak se k cíli dojde, zda volíme metodu konvergentní či divergentní. Kromě toho závisí volba metody na tom, jaké je stáří žáků, jaké jsou schopnosti žáků, kolik máme času, jaké používáme pomůcky. I když dva učitelé pracují stejnou metodou, může se průběh práce i její výsledky diametrálně lišit. Každý člověk vkládá do své práce svoji individualitu. Charakter osobnosti

se promítá do stylu práce. V každé metodě jde především o její základní a charakteristické rysy, o myšlenkový směr, který je třeba zachovat, i když se způsoby provedení liší. Ani nejlepší metoda a propracovaný systém učiteli nepomohou, pokud nemá konkrétní představu o cíli své práce a o průběhu jeho realizace. O své práci musí mít jasnou představu jak žák, tak učitel.

2 Metoda trojkroku

Jedná se o metodu objevování, kdy se od žáků očekává, že na principy, podstatu problematiky budou postupně přicházet sami. V žádném případě nespočívá metoda pouze na tom, že se žáci snaží vyčíst určité informace z knih.

Když je metoda objevování dobře naplánována a provedena, představuje náročný, ale zvládnutelný a zábavný úkol. Žák s její pomocí porozumí rychle učivu. Metoda trojkroku motivuje všechny žáky kromě těch lhostejných.

Zásady pro práci metodou trojkroku:

- Žák musí být vhodně motivován pro práci.
- Musí mít dostatek času na objevování.
- Žák musí mít jasnou představu o tom, co se od něj žádá.
- Práce žáků se musí pozorně sledovat a nenechat žáky zbytečně dlouho ubírat se nesprávným směrem.
- Ukládáme úkoly tak, aby je byla schopna vyřešit většina žáků třídy.
- Žáci musí být na práci připraveni, mít podstatné základní znalosti a dovednosti.
- Nezadávat úkoly, kde je pravděpodobné, že budou znát žáci odpověď předem.
- Dbát na to, aby spolupráce žáků v průběhu druhé fáze metody byla prospěšná oběma žákům.

V principu se u metody trojkroku jedná o zvláštní formu skupinové práce, kdy žáci nejprve pracují zcela samostatně a pak ve dvojicích či čtveřicích. Práce ve skupinách je aktivní, umožňuje dvojicím, aby si připomněli potřebná pravidla, procvičili komunikaci, přiměli se k aktivitě a snažili se dokonale zvládnout danou problematiku. Vysvětlováním učiva spolužáku pomůže k ujasnění a dokonalému pochopení učiva žáku samotnému.

Fáze **Já**: samostatná individuální práce, každý žák pracuje svým tempem na problému, seznamuje se s ním, vyvozuje vztah ke svému já a hledá vlastní postup řešení.

Fáze **Ty**: učení se spolužákem, vzájemná výměna poznatků, vysvětlování své ideje, porovnávání svého postupu s postupem spolužáka, spolupráce v duchu snahy o společné vyřešení problému, příprava prezentace.

Fáze **My**: komunikace s ostatními spolužáky třídy, prezentace vlastních výsledků práce, plodná diskuse, rozpracování poznatků, podložená argumentace.

2.1 Co musí vědět žák

Fáze **Já**: musím si zvolit samostatně cestu a hledat řešení. Nesmím spěchat, musím si kontrolovat správnost postupu. Jestliže nejsem schopen najít samostatně postup, mám možnost požádat o radu učitele.

Fáze **Ty**: k dokonalému zvládnutí problematiky je nutná spolupráce se spolužákem. Je potřebné provést porovnání vlastních závěrů se závěry spolužáka, provést výměnu názorů, umět obhájit správnost či vyvrátit chybný závěr. Umět společně připravit prezentaci.

Fáze **My**: teprve v okamžiku, kdy jsi seznámen s řadou různých přístupů k řešení úkolu a jsi schopen pochopit opodstatněnost dalších způsobů řešení, můžeš si být jist, že jsi problematiku pochopil správně.

2.2 Co musí vědět učitel

Má-li být strategie řízení dvojice (malé skupiny) účinná, musí vycházet z pochopení sil působících ve skupině. Skupinovou dynamiku vytvářejí psychologické síly a procesy působící v rámci skupiny a které určují sociologické rysy skupiny a ovlivňují chování jednotlivých členů skupiny. V učebním prostředí se odehrávají i jiné činnosti než učební, proto je nutné vytvořit ve třídě tzv. „podnikatelskou atmosféru“. Jedná se o učební prostředí, kde se žáci i učitel chovají tak, jako kdyby dosažení konkrétního cíle bylo důležitější než vše ostatní.

Podnikatelskou atmosféru vytvoříme:

- pečlivou a konkrétní přípravou a organizací výuky
- vytvořením optimálních podmínek pro spolupráci
- používání stylu komunikace, který podporuje příjemné pracovní prostředí
- jasným stanovením požadavků na žáky

2.3 Jak využívat metodu

a) přímo v hodině matematiky všechny tři části (poměrně náročné na čas),
b) uložit fázi Já za domácí cvičení, ve škole přejdeme rovnou k dalším fázím,
c) kombinovat metodu s diferencovanými pracovními listy,
d) přímo v hodině s tím, že vymezíme čas na jednotlivé fáze,
e) společný postup s žáky, opírající se o zkušenosti jedinců, aktivitu dvojic posuzovat ve vztahu k otázce potřeby pomoci ze strany učitele.

Na konci každé vyučovací hodiny musí být žák schopen zodpovědět otázky:

1. Jaké důležité poznatky jsem si v hodině osvojil?
2. Které otázky, partie učiva jsou mi ještě nejasné?

Co jsem vypozoroval díky této metodě práce, (zlepšil se):

- vztah ke spolužákům,
- vztah ke spolupráci,

- vzrostla rozhodnost u jednotlivců,
- vzrostla vytrvalost při práci,
- zlepšila se sebedůvěra jednotlivců,
- zlepšilo se sebeovládání u jednotlivců,
- došlo k nárůstu kolektivního cítění,
- zlepšila se úroveň prezentace.

3 Závěr

V procesu výuky musí učitel hledat odpověď na základní otázku „Čím naučit?“, avšak v nezbytném kontextu s dalšími otázkami „Co má být naučeno?“, „K čemu má učení směřovat?“, „Kdo se učí?“, „Jak naučit?“, „Za jakých okolností bude učení probíhat?“.

Bruner vidí v učení tři současně probíhající procesy:

- osvojování nových dovedností,
- začlenění dovedností do dosavadního systému,
- zjištění, zda výsledek odpovídá zadanému cíli.

Na základě svých zkušeností s používáním metody trojkroku mohu prohlásit, že její vhodné zařazování do vyučovacího procesu je žákům prospěšné. Skutečnost dokladují dosahované výsledky žáků v porovnání s výsledky jiné třídy, kde jsem záměrně metodu nepoužíval. Velice účinnou pomůckou mi jsou Dynamické pracovní listy, kde si žáci mají možnost ověřit řadu důležitých skutečností. Pro domácí práci si žáci zvolí úkoly na www.mojeskola.cz a www.did.mat.uni-bayreuth.de/smart. Žáci procvičují probíranou látku pomocí zde zadaných úloh a vypracované úlohy mi odevzdávají. Já je oboduji a zařadím každému do jeho složky. Na závěr učební látky převádím body na klasifikační stupeň, a každý žák má tak možnost spolupodílet se na svém hodnocení.

Literatura

[1] GALLIN, P. *Dialogischer Mathematikunterricht.* Zürich : 1999.

[2] *Praxis Schule 5–10.* Braunschweig, roč. 2002.

[3] BRUNER, J. *Vzdělávací proces.* Praha : SPN, 1995.

Reflexe a profesionalizace práce učitele

Marie Tichá

Abstrakt

Potřeba profesionalizace práce učitele roste. Proto je třeba kultivovat především oborově didaktické kompetence učitelů. To zahrnuje nejen zvládnutí matematického jádra vyučovacího předmětu a jeho didaktického zpracování, ale i způsobilost vytvořit tvůrčí sociální klima pro poznávání žáků. Jednou z cest je realizování kvalifikované pedagogické reflexe.

1 Úvodní poznámka

Tento článek navazuje na příspěvek *Kompetence učitele a akční výzkum ve vyučování matematice* přednesený na 9. setkání v roce 2004 [14].

2 Kompetence a reflexe

V centru úvah při vytváření školních vzdělávacích programů jsou otázky utváření a rozvíjení souboru kompetencí žáků. Jsme přesvědčeni, že kompetentního žáka může vychovat jen kompetentní učitel. Roste tedy potřeba zkvalitňovat a kultivovat úroveň profesních kompetencí učitele [8, 2]. Pod označením profesní kompetence máme na mysli komplex dispozic, kvalifikací a zdatností potřebných pro úspěšné vykonávání práce. Zvláště významná pro učitelskou profesi je oborově didaktická kompetence. Zahrnuje znalost obsahu i didaktických přístupů k němu a také umění kvalifikovaně reagovat na projevy žáků ve vyučování a schopnost využít je jako přínos pro vyučování. Shulman, jehož myšlenky o „poznatkové bázi učitelství“ jsou často v této souvislosti citovány, mluví v obdobném smyslu o „didaktické znalosti obsahu“ [7].

Za jeden z podstatných znaků profesionality učitele je považována kompetence kvalifikované pedagogické reflexe [1, 4]. Například Scherer a Steinbring [8] zdůrazňují vysokou náročnost práce učitele matematiky a odtud plynoucí potřebu přejít ke kvalifikované společné reflexi každodenních vyučovacích aktivit. Kvalifikovaná pedagogická reflexe obsahuje popis a rozbor klíčových prvků a jevů i vlastních zkušeností, jejich hodnocení a uspořádávání, hledání příčin určitého konkrétního jednání i možností rozhodování o jiné strategii [11]. Zahrnuje úvahy

o cíli a obsahu vyučování, metodách práce a jejich realizaci. Reflexi nechápeme jenom jako zpětný pohled na to, co už se událo. Podle našeho názoru reflexe prostupuje přípravu, realizaci i posuzování uskutečňovaného vyučování.

Reflexi chápeme jednak jako jednu z kompetencí, jednak jako jednu z možných cest, jak kultivovat kompetence. „Reflexi spojenou s interpretací učebních situací můžeme pokládat za nejlepší způsob jak rozvíjet profesní myšlení učitelů a jak ukazovat funkčnost didaktické teorie pro praxi.“ [10] Reflexe vytváří prostor k přechodu od intuitivního k vědomému a zdůvodněnému jednání. Je tedy klíčovým prvkem v profesním rozvoji studentů učitelství i učitelů působících v praxi. Systematické provádění kvalifikované reflexe jim umožní hlubší pohled na vlastní práci a některým dokonce přechod do pozice začínajícího výzkumníka. Reflexe je důležitý aspekt „akčního výzkumu“, jehož hlavními aktéry jsou učitelé [4, 6, 9].

Podle našich zkušeností nestačí zůstat jen u sebereflexe. Je třeba vlastní pohled konfrontovat s pohledy jiných osob. Je třeba umožnit učiteli „pohled zvenčí“, umožnit mu sledovat své vlastní činnosti ve vyučování z odstupu. Proto jsme začali realizovat individuální a společnou reflexi. Individuální reflexi provádí (a) učitel, který vyučoval, případně (b) učitel nebo výzkumník, který sledoval vyučování přímo nebo má k dispozici videozáznam a podrobný přepis komunikace, která ve vyučování proběhla. Společnou reflexi provádí (a) skupina učitelů, případně (b) skupina, jejímiž členy jsou učitelé i výzkumníci.

3 Provádění reflexí a jeho výsledky

V týmu učitelů a výzkumníků jsme uskutečnili několik vyučovacích experimentů, jejichž realizace zahrnovala (a) společnou přípravu na vyučování, (b) vzájemné hospitace, (c) pořizování videozáznamu a (d) společnou reflexi didakticky zajímavých částí videozáznamu.

Jako výsledek systematického provádění reflexe zaměřeného na rozvíjení kompetencí učitelů, jsme evidovali změny zúčastněných učitelek v posuzování vlastních kompetencí a zvláště snahu o prohloubení vlastních didaktických znalostí obsahu [13]. Zaznamenali jsme, že si učitelky uvědomily potřebu (a) zkvalitnit vlastní znalost matematického obsahu, (b) rozvíjet svou schopnost zpracovat obsah jak ze strany nároků oboru, tak s ohledem na nároky žáka, (c) formovat si citlivější přístupy k žákovským způsobům myšlení a schopnost uvědomit si ve vyučování momenty hodnotné z hlediska žákova poznávání.

Charakter reflexí se postupně měnil od jednoduchých intuitivních postřehů typu „líbí/nelíbí se mi to“ k hlubokému posouzení cíle, obsahu a metod vyučování. To vedlo až k realizaci vlastních vyučovacích experimentů. Základem pro výběr tématu experimentu byla vždy úvaha učitelky o tom, které části učiva je třeba se věnovat, tedy reakce na problémy, které přináší jejich praxe.

3.1 Příklad experimentu navrženého učitelkou

Na základě experimentů navržených učitelkami a jejich realizace můžeme posuzovat úroveň oborově didaktické kompetence těchto učitelek. Potvrdila to i realizace experimentu, který se uskutečnil ve 2. ročníku a pokračoval v následujícím školním roce. Proběhl v době, kdy žáci nacvičovali odčítání jednociferného čísla od dvojciferného s přechodem přes základ (desítku); cílem bylo zjistit, zda žáci rozumí. Učitelka se ptala žáků, zda výpočet „$63 - 8 = 60 - 5 = \ldots$“ zapsaný na tabuli je správně nebo ne a jak asi uvažoval ten, kdo ho psal. Uvedeme ukázku jednoho rozhovoru:

Maruška Já jsem to teďka zjistila. Ta Jana si to $63 - 8$ (*ukazuje před číslo* 63) tak trošku rozložila. A od těch osmi...

Učitelka Můžeš si to také rozložit. Máš tam křídu, nebo cokoliv chceš dělat, tak nám říkej, ukazuj, piš si.

Maruška A od těch osmi (*ukazuje na číslici* 8) ubrala 3.

Učitelka Ukaž je, jaké 3?

Maruška Tyhle (*ukazuje na číslici* 3 *v čísle* 63).

Učitelka Aha. ... Od těch osmi.

Maruška Od týhle osmičky (*ukazuje na číslici* 8) ubrala 3 (*ukazuje na číslici* 3). To se rovná 5 (*ukazuje na číslici* 5).

Učitelka Čili, když uberu, tak se to rovná 5?

Maruška Ne (*smích*). Od osmi. Osm minus tři se rovná pět.

3.2 Co naznačila reflexe vyučovacího experimentu

Uvedená část rozhovoru učitelky s žákyní byla rozebírána na setkání učitelek a výzkumníků. Jedna z učitelek upozornila, že Maruška si zřejmě uvědomila, že $63 - 8$ se rovná $60 - 5$, neboli fakt, že $a - b = (a - x) - (b - x)$. Řekla: *„Pro děti je těžké vysvětlit postup. ... Na Marušce je vidět, že tomu rozumí. Těžko to vysvětluje, ale rozumí tomu. ... Já si myslím, že Maruška si řekla, že když ubere tři od 63, tak u tý osmičky musí taky ubrat tři. ... Oni se učili rozklady, ale ona to vysvětlila jinak. Je schopná překonat stereotypy v myšlení. ... Myslíte, že ostatní děti pochopily Maruščino vysvětlení jako zmenšení menšence i menšitele?“*

Vyučující učitelka takové vysvětlení zřejmě neočekávala a nebyla na ně připravena a pravděpodobně zápis „$63 - 8 = 60 - 5 = \ldots$“ chápala jinak než Maruška. Očekávala, že žáci budou zdůvodňovat naznačený výpočet jako zápis jedné fáze počítání s rozkladem. Zřejmě proto se příliš „nezapojovala“ do projevu Marušky. Vzhledem k tomu, že tento mimořádně cenný vklad žákyně komentovala jen konstatováním *„tak počítala podle tebe dobře“*, můžeme přepokládat, že si v průběhu diskuse jeho velký význam neuvědomila. V případě očekávaného zdůvodňování byla její reakce odlišná; opakovala vyjádření žáků a pomáhala jim se zápisem.

3.3 Posun ve znalosti obsahu

V polovině 3. ročníku zadala stejná učitelka stejným žákům obdobnou úlohu. Měli posoudit a vysvětlit výpočet „$63 - 28 = 60 - 25 = \ldots$“. Ukažme si opět část jednoho z rozhovorů, ve kterém žák vysvětluje postup výpočtu.

Učitelka Proč asi ubrala 3?
Tomáš Aby se jí to líp počítalo.
Učitelka A proč se jí to líp počítá, když ubere 3?
Tomáš No, protože bude počítat... bude pak počítat od tý desítky.
Učitelka Aha. Takže od celé desítky.
Tomáš $60 - 25 = 35$ (*ukazuje na tabuli*).
Učitelka Aha, tak to jí vyjde. A víš, co mi nesedí. Vidím, že 60 dostala protože ubrala 3. Ale kde vzala těch 25?
Tomáš Protože... mínus 25... mínus 28. Ale ona ubrala tu trojku. A to je 5. Takže 25.

Srovnáme-li reakce učitelky v obou uvedených epizodách, vidíme, že reagovala ve velmi podobné situaci jinak. Z přepisu části diskuse je vidět, že zlepšená kompetence, znalost matematického jádra, umožnila učitelce bezprostředně reagovat na tvrzení žáků. Byla schopna modifikovat postup, který předpokládala při své přípravě na vyučování a využít neočekávanou odpověď žáka jako nový impuls a výchozí bod pro diskusi.

Je zřejmé, že ji společná reflexe první epizody dovedla k hlubšímu porozumění matematickému obsahu. Potvrzuje to i její vyjádření: *„Díky spolupráci a diskusím jsem měla možnost vidět hlouběji do vyučování matematice. ... Každý chceme něco dělat proti stereotypu a tradičním postupům ve vyučování. Sama o sobě se ale v některých věcech nedokážu změnit, i když chci. Řadu věcí si ani neuvědomím, nenapadnou mě. Někdy mě ani nenapadne hledat jiný způsob.“* Je patrné, že si uvědomila, že znalost obsahu je nutná a usilovala o její zkvalitnění.

4 Cesta do hlubin reflexí

Rozhodli jsme se, že bude užitečné porovnat naše reflexe s reflexemi jiných učitelů i dalších pracovníků. Předpokládali jsme, že se tak výrazněji projeví charakteristické rysy reflexí. Očekávali jsme rozdíly, které „... jsou způsobeny odlišnými poznatky, zkušenostmi a osobnostními dispozicemi jednotlivců, nestejnou kvalitou interpretací, zvláštnostmi kauzálních atribucí... to vše má vliv na intuitivní výběr a použití posuzovacích kritérií...“ [11] Požádali jsme proto o individuální reflexi jedné vyučovací epizody kolegyně a kolegy – učitele z různých stupňů škol. Poskytli jsme jim stejný materiál, který jsme měli k dispozici my (videonahrávku a přepis) a požádali je o vyjádření a jeho písemné zpracování (podrobněji [5]).

Co jsme zjistili? Projevila se nezkušenost učitelů pracovat s videozáznamem a přepisem rozhovorů. Učitelé si neuvědomili potřebu (a) sledovat videozáznam několikrát, (b) vybrat episody, které jsou z jejich hlediska zajímavé a několi-

krát je potom sledovat. Byli zřejmě bezradní nad tím, jak popsat, analyzovat a uspořádat pedagogickou zkušenost z reálné školní praxe. Písemné výpovědi této skupiny učitelů měly vesměs negativní charakter. Lze je charakterizovat jako záznam momentů, nestrukturovaný souhrn postřehů z vyučování. Potvrdila se tak náročnost provádění reflexe na (a) profesní znalosti učitele, na zvládnutí matematického obsahu a jeho didaktického zpracování, (b) na pochopení funkce kolektivní reflexe (učitelé považovali za účel své práce hodnocení učitele; zdá se, že si neuvědomovali, že jde především o kultivaci kompetencí učitele a tím o zkvalitnění vyučování, jehož výsledkem bude hlubší porozumění a znalosti žáků).

Po přečtení individuálních reflexí učitelů jsme se s jejich autory setkali. Pokusili jsme se o společnou reflexi. Charakteristické v naší diskusi s učiteli bylo, že každý z nich setrvával u svého pohledu. Naše snaha „posunout“ ohnisko jejich zájmu, změnit úhel pohledu, připomenout další důležité otázky a zjistit nazírání těchto učitelů na ně zpravidla zůstávala bez odezvy. Učitelé se vraceli ke svému prvotnímu zájmu. Ukázalo se, že učitelé zvláště sledují: (a) dodržování tradičních zvyklostí „jak má být postavena“ vyučovací hodina po formální stránce, (b) výrazné, ale z hlediska záměru učitelky často podružné, momenty, (c) obecné didaktické (metodické) otázky, (d) co lze považovat za „chyby učitele“, (e) zda učitel udělal vše, co oni sami považují za potřebné. Naproti tomu opomíjejí: (a) matematické jádro, (b) záměr učitele a jeho realizaci, (c) možné alternativy vyučování, (d) pohled do hloubky na méně zřetelné, ale pro vývoj hodiny podstatné, momenty, (e) důvody, proč učitel učinil krok, který oni eventuálně považují za chybný, (f) zda a jak žáci reagují na výpovědi spolužáků.

Zcela jasně se ukázalo, že učitelé potřebují pomoc, jak reflektovat pedagogické situace. Učitelé i studenti učitelství by měli být na reflektování vyučování systematicky připravováni a seznamováni s příslušnou literaturou (například [12]).

Zajímavé pro nás byly také bezprostřední reakce matematiků a didaktiků matematiky na videozáznam a přepis rozhovorů. Nejprve se soustředili jednak na evidenci chyb a nedostatků žáků i učitelů (podle svého výzkumného zájmu), jednak na návrhy, co by se mělo vylepšit a jak. Otázku proč učitelka zařadila určité činnosti, jednala jinak než by to udělali oni, pokládali až s odstupem.

5 Přínos reflexe

Snaha o provádění společné kvalifikované pedagogické reflexe je přínosná pro všechny zúčastněné – učitele, žáky i výzkumníky. Učitelům přinesla posun v chápání a posuzování (a) jejich vlastní role, (b) toho, co je podstatné pro jejich práci, (c) vlastních kompetencí, (d) významu provádění reflexe. Pro výzkumníky znamenala (a) prohloubení chápání procesů, které probíhají při vyučování matematice, (b) zkvalitnění posuzování vývoje kompetencí učitelů (od intuice k začínajícímu výzkumníkovi), (c) možnost ovlivnit kompetence učitelů, (d) zkvalitnění

didaktického výzkumu. Z toho, co reflexe přinášejí učitelům a výzkumníkům pak samozřejmě mají užitek i žáci.

Poděkování

Článek vznikl s podporou grantů GAČR 406/05/2444 a AV ČR, výzkumný záměr AV0Z10190503.

Literatura

[1] HELUS, Z. Čtyři teze k tématu „změna školy“. *Pedagogika,* 2001, r. 51, č. 1, s. 25–41.

[2] HOŠPESOVÁ, A., TICHÁ, M. Developing mathematics teachers' competence. In *Proceedings of CERME–4.* 2005. http://cerme4.crm.es

[3] JANÍK, T. *Znalost jako klíčová kategorie učitelského vzdělávání.* Brno : Paido, 2005.

[4] JAWORSKI, B. Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development. *Educational Studies in Mathematics,* 2003, r. 54, č. 2–3, s. 249–282.

[5] MACHÁČKOVÁ, J., TICHÁ, M. Po stopách rozvíjení kompetencí učitelů: pohledy zevnitř i zvenku. In M. Uhlířová (ed.) *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Olomouc : Univerzita Palackého, pedagogická fakulta, 2006, s. 140–144.

[6] NEZVALOVÁ, L. Akční výzkum ve škole. *Pedagogika,* 2003, r. 53, č. 3, s. 300–308.

[7] SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 1986, r. 15, s. 4–14.

[8] SCHERER, P., STEINBRING, H. The professionalisation of mathematics teachers' knowledge. In *Proceedings of CERME–3.* Pisa : Edizioni Plus, CD ROM, 2004.

[9] SCHŇN, D. A. *The reflective practitioner.* London : Teple Smith, 1983.

[10] SLAVÍK, J. Profesionální reflexe a interpretace výuky jako prostředník mezi teorií a praxí. In *Oborové didaktiky v pregraduálním učitelském studiu.* Brno : PdF MUNI, 2004.

[11] SLAVÍK, J., SIŇOR, S. Kompetence učitele v reflektování výuky. *Pedagogika,* 1993, r. 43, č. 2, s. 155–164.

[12] ŠVEC, V. *Pedagogické znalosti učitele: teorie a praxe.* Praha : ASPI, 2005.

[13] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. Učíme se z praxe. In M. Uhlířová (ed.) *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* Olomouc : Univerzita Palackého, pedagogická fakulta, 2004, s. 23–33.

[14] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A., MACHÁČKOVÁ, J. Kompetence učitele a akční výzkum ve vyučování matematice. In M. Ausbergerová, J. Novotná (ed.) *9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Plzeň : Vydavatelský servis, 2004, s. 315–322.

Modelování jednoduchých mechanismů v prostředí dynamické geometrie

Jiří Vaníček

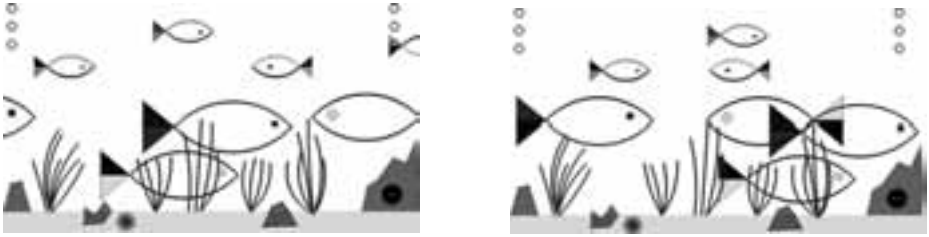
Abstrakt

Článek pojednává o projektu výuky budoucích učitelů matematiky formou tvorby pohyblivých modelů reálných objektů, např. jednoduchých strojů, pohybu osob a dopravních prostředků. Cílem projektu používajícího prostředí dynamické geometrie jako mikrosvět, v němž studenti vytvářejí grafiku užitím geometrických znalostí, je seznámit studenty s novými formami výuky (úlohy s otevřeným koncem, výuka pomocí počítače).

Úvod

Počítačové prostředí dynamické geometrie nastupuje v současné době cestu do českých škol, a s tím nese očekávání, zda přivede žáky zpátky ke geometrii, která ztrácí své pozice ve školském kurikulu již po desetiletí. Atraktivita počítače sama o sobě však nemusí přinést očekávaný efekt. Současné pokusy naroubovat výuku standardních témat, standardních úloh, které se vyučovaly pomocí tužky a papíru, na počítačové aplikace, mohou po krátké vlně módního zájmu mezi učiteli upadnout v zapomnění, pokud nebudou orientovány na trénink kompetencí (např. hledání matematických vzorků v reálném světě), namísto orientace na poznatky matematiky jako vědní disciplíny (např. použití algoritmů).

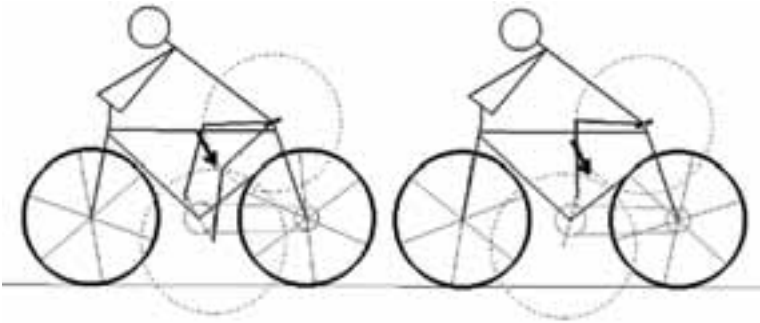
Hledání nových postupů, jak zpřístupnit žákům geometrické dovednosti a jejich aplikaci, vede ke snahám o používání výukových projektů a úloh s otevřeným koncem. Projektová výuka, která si hledá cesty i v tradiční výuce matematiky, však naráží na vcelku pochopitelný odpor učitelů, kteří v daném projektu nenacházejí konkrétní aplikace nebo trénink naučených matematických poznatků nebo dovedností, připadá jim, že projekty nerozvíjejí u žáků matematický pohled na svět.



Obr. 1 Akvárium s plovoucími rybami, projekt vytvořený čtrnáctiletým žákem základní školy

Dynamické obrázky

V prostředích dynamické geometrie mohou žáci vytvářet grafiku bez znalosti příkazů nějakého „programovacího“ jazyka, pouze za použití geometrických znalostí. Žáci se snaží z geometrických objektů vytvářet obrázky, které se mohou rozhýbat. Na rozdíl od jiných počítačových prostředí, která umožňují vytvářet animovanou grafiku, ať již se jedná o grafické editory (GIF Animator) nebo dětská programovací prostředí (Logo), dynamická geometrie využívá dovedností, které se žáci naučili v klasické geometrii a rozšířili v geometrii rýsované pomocí počítače. Získané dovednosti mohou aplikovat při vytváření interaktivních pohyblivých modelů reálných těles, jako jsou jednoduché stroje, pohyb osob, dopravní prostředky.



Obr. 2 Koleno cyklisty jako průsečík dvou kružnic (viz šipka) svou existencí ovlivňuje viditelnost cyklistovy nohy. Záměrné využití existence objektů je důležitou konstrukční technikou

Dynamické obrázky na rozdíl od pohyblivých konstrukcí tradičních geometrických figur více připomínají reálný svět, tím pádem kladou jednoznačný požadavek na podobnost pohybu takového modelu s reálným objektem. Při tvorbě

Obr. 3 Model kyvadla hodin v CabriJava. Věrný pohyb kyvadla je simulován převodem rovnoměrného pohybu bodu po kružnici

dynamických obrázků žáci více či méně vědomě využívají vlastních znalostí z geometrie a trénují svoji geometrickou představivost a inteligenci nevědomým hledáním invariantů při pohybu a geometrických zobrazení v reálném světě. Např. u modelu jedoucího jízdního kola musí rovnoběžné dráty výpletu předního a zadního kola stále zachovávat rovnoběžnost, jsou-li kola stejně velká. Potom zadní kolo může být obrazem předního kola v posunutí, protože posunutí zachovává rovnoběžnost. Naopak mají-li se dvě kola otáčet opačným směrem, mohou být sestrojena pomocí osové souměrnosti.

Jednoduché mechanismy jsou vhodnými objekty pro tvorbu dynamických obrázků, protože se jejich pohyb řídí několika jednoduchými a snadno rozeznatelnými pravidly. Úlohy z dynamické geometrie lze převést na úlohy o množinách bodů dané vlastnosti. Např. konstrukce pohybu pístu spalovacího motoru vychází z poznatku, že ojnice motoru má neměnnou délku, takže úsečka, která ojnici modeluje, musí mít stále stejnou délku. Střed pístu tedy musí být stále stejně vzdálen od druhého konce ojnice, množinou středů pístu bude kružnice o poloměru rovném délce ojnice, procházející druhým koncem ojnice.

Programy dynamické geometrie vytvářejí mikrosvět, proto při tvorbě dynamických konstrukcí je vhodné využít učících strategií, které jsou úspěšné při práci v prostředí mikrosvěta. Žáci nejlépe reagují, pokud mohou své první animované obrázky vytvářet přesně podle návodu zkušenějšího uživatele, např. učitele. Později vytvářejí své vlastní obrázky pomocí analogie, a to nejen konstrukční, ale také tématické. Teprve až získají dostatek zkušeností, dostanou také odvahu pustit se do dobrodružství tvorby úplně vlastního obrázku. Většinou pak mají

málo praktických dovedností k dokončení svého záměru. Zde je velice důležitá přítomnost zručného učitele, který dokáže žákovi pomoci radou a dovede pomoci realizovat žákovy nápady přímo v dynamické konstrukci.

Motivačním faktorem pro vytváření dynamických geometrických modelů je jejich univerzálnost sdílení v Internetu: ve formě apletu se tyto obrázky mohou stát součástí webové stránky a obsah apletu tak zobrazí kterýkoliv webový prohlížeč (s nainstalovanou podporou Javy). Eventualita snadného zveřejnění studentovy práce na Internetu je dalším motivujícím faktorem, vedoucím k jeho větší zodpovědnosti.

Úrovně obtížnosti konstrukcí

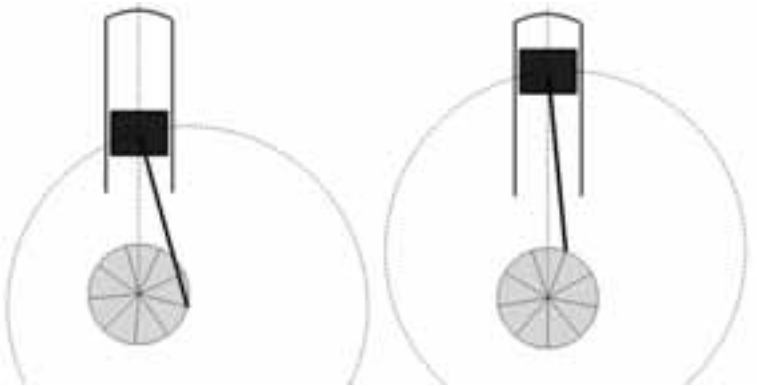
Můžeme rozlišit několik úrovní dynamických konstrukcí podle úrovně závislosti pohybujících se objektů:

1. objekty se jednoduše pohybují po jednoduchých drahách (přímkách, kružnicích), často se různé objekty pohybují nezávisle
2. existuje jeden objekt, který řídí pohyb ostatních, všechny další pohyblivé objekty jsou sestrojeny geometrickou konstrukcí (kolmice, obraz v souměrnosti nebo v posunutí)
3. pohyblivé objekty jsou vytvářeny pomocí množin bodů a jako průsečíky, mají tedy možnost skrývat se a objevovat (jako průsečíky dočasně se překrývajících objektů).
4. programy dynamické geometrie dokáží animovat body pouze rovnoměrným pohybem; speciálním druhem úlohy je potom najít takový konstrukční postup, který bude pohyb zrychlovat či zpomalovat (např. pohyb kyvadla, padajících objektů)

Je zajímavé, že úroveň pohybu v dynamických konstrukcích, která závisí na matematických dovednostech, nesouvisí s mírou tvořivosti autorů jednotlivých obrázků, často vznikají nápadité živé obrazy s velmi jednoduchým pohybem objektů. Řada autorů realizuje svůj tvořivý potenciál spíše v dokreslení nepohyblivých částí obrázku a jejich vybarvení.

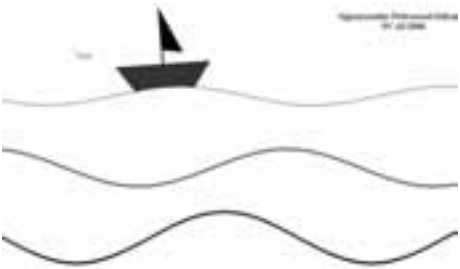
Zkušenosti s přípravou učitelů

Jestliže mají žáci být schopni vytvářet dynamické obrázky, musí mít připravené učitele. Hlavním cílem projektu, který probíhá na JU, je připravit budoucí učitele matematiky. Po 9 let probíhá výuka předmětu Počítačem podporovaná výuka matematiky, v němž studenti mohou vytvářet pohyblivé geometriké obrázky jako své seminární práce. Naše zkušenosti ukazují, že jen menšina z nich se dokáže pro tuto činnost dostatečně motivovat.



Obr. 4 Model spalovacího motoru v Cabri, typický příklad převodu úlohy na dynamiku v úlohu o množinách bodů dané vlastnosti (střed pístu leží na kružnici o pevném poloměru se středem pohybujícím se po malé kružnici)

Obr. 5 Volejbal – hledání invariantů při pohybu. Střed míče pohybujícího se po oblouku ovládá pohyb celé dynamické konstrukce. Paže dětí leží na rovnoběžkách s průvodičem míče



Obr. 6 Loďka na rozbouřených sinusoidálních vlnách, studentská práce

Ukazuje se také, že budoucí učitelé z velké části nejsou schopni automaticky pracovat tvůrčím způsobem, musíme je k této práci přemlouvat. Bezezbytku zde platí postup uvedený výše pro žáky: také studenti pedagogické fakulty si nejprve nedokáží představit, jakými postupy lze docílit pěkných animovaných obrázků. Úspěšnější zde bývají ne vždy nejbystřejší studenti, ale studenti, kteří umí a jsou ochotni komunikovat s učitelem, protože řadu dovedností získají odpozorováním.

Studenti vysoké školy jsou také více úzkostliví než žáci základní školy. Velmi málokdy jsou ochotni pustit se do konstrukce obrázku, aniž by předem přesně věděli, jak některý pohyb sestrojit. Na druhou stranu, žáci málokdy realizují projekt úrovně 3 nebo 4, protože objevit tyto geometrické konstrukce je pro ně příliš složité.

U obou skupin je pak pozorovatelná stejná radost až pýcha z vytvořeného díla, pokud vzniká z vlastního nápadu. Tvorba projektu z dynamické geometrie může být tou zlomovou aktivitou, která přitáhne studenta k tvořivé činnosti, k zapálení pro tvořivou práci s počítačem i k uvědomění si šíře a mnohosti forem matematického vzdělávání v jeho pestrých formách, které ne vždy dokáže školní matematika žákům předvést.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava : SPN, 1990.

[2] BLAHO, A., KALAŠ, I. *Imagine Logo, primary workbook.* Cambridge : Logotron, 2003.

[3] HENN, H. W., JOCK, W. *Arbeitsbuch Cabri Géomètre.* Bonn : Ferd. Dümmlers Verlag, 1993.

[4] VRBA, A. Oživlá geometrie. *Matematika, fyzika, informatika,* 2000, No. 2, 3.

[5] LABORDE, C. Geometry as a modelling tool for simple mechanisms. In *Geometry for the world.* Texas Instruments Incorporated, 1996.

[6] VANÍČEK, J. The module P-MAT: how to teach math using computer. In Mechlová, E. (ed.) *Proceedings of ICTE '04.* Ostrava : Ostravská univerzita, 2004, p. 246–249.

[7] *Cabri web, Český internetový portál pro podporu výuky geometrie pomocí počítače.* České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2003. http://www.pf.jcu.cz/cabri

Výuka kombinatoriky na středních školách

Zuzana Voglová

Abstrakt

Příspěvek se věnuje výuce kombinatoriky na středních školách, zejména pak vyhodnocení dotazníku, který byl v dubnu 2006 rozeslán učitelům gymnázií a středních odborných škol. V článku jsou uvedeny názory mnoha učitelů středních škol na výuku kombinatoriky, její (ne)oblíbenost, úskalí, ale i výhody této části matematiky.

1 Úvod

Kombinatorika se na gymnáziích a středních odborných školách vyučuje většinou na konci druhého ročníku. K zvládnutí tohoto učiva žáci nepotřebují téměř žádné předchozí vědomosti, postačí jim základní algebraické znalosti, dobré logické myšlení a často také zdravý selský rozum. Přesto (nebo možná právě proto) patří kombinatorika k obtížnějším částem matematiky, se kterou mívají problém i jinak dobří studenti. Kombinatorika se od ostatních matematických disciplín liší v několika základních bodech, má hned několik předností, ale i nevýhod.

Jednou ze základních odlišností je, že studentům nemůžeme dát přesný a univerzální návod, jak úlohy řešit. Některým žákům vyhovuje, že se nemusí učit nazpaměť žádné postupy a vzorečky. Ostatní žáci si však se samostatným řešením úloh, které vyžaduje především jejich logické uvažování, neví rady. Nevýhodou kombinatoriky je určitě i to, že u velké části příkladů není možná zkouška. Student je často odkázán jen na svůj vlastní odhad a dobrý úsudek.

Už na základní škole se žáci setkávají s úlohami, které vyžadují tzv. kombinatorické myšlení. Zadané úlohy řeší mnohdy vypisováním všech možností. Proto je dobré i na střední škole začít těmi příklady, kdy je možné vypsat všechny možnosti. Pro některé žáky je tento postup vhodnou zkouškou jejich řešení, pro jiné je samotným řešením, při němž si cvičí kombinatorický způsob uvažování. Zjistí, že se jim při výčtu všech možností vyplatí postupovat systematicky, uvědomí si spoustu zákonitostí a možná i objeví vztahy, které by jim učitelé jinak předložili jako daný fakt. Navíc se jim tento způsob později bude hodit i u složitějších příkladů, při jejichž řešení je často nejefektivnější částečné vypsání některých možností.

Je dobré u studentů také trénovat správný odhad. I to jim může sloužit pro částečnou kontrolu výsledku.Vzhledem k nemožnosti zkoušky u kombinatoriky více než kde jinde platí, že cvičení dělá mistra.

Kombinatorika má však také spoustu již zmiňovaných kladných stránek, na které bychom měli studenty upozornit. Motivující pro studenty může být také to, že se v kombinatorice setkávají s příklady, které jsou často zábavné a praktické a je v nich vidět konkrétní spojení s reálným životem.

2 Dotazník

Zajímalo mě, jaký názor mají na kombinatoriku středoškolští učitelé, které části kombinatoriky učí a jaké metody používají, či zda kombinatorika dělá studentům větší problémy než jiné části matematiky. Proto jsem vytvořila dotazník, který jsem v dubnu 2006 rozeslala na střední školy (gymnázia i střední odborné školy) po celé České republice. Dotazník vyplnilo a zpátky zaslalo 133 učitelů, z toho 87 z gymnázií a 46 ze středních odborných škol. Dotazník obsahoval následujících 13 otázek, ke každé otázce bylo na výběr 2 až 9 odpovědí.

1. Jaký máte postoj ke kombinatorice?
2. Jaký mají podle vašich zkušeností žáci zájem o kombinatoriku?
3. Kolik vyučovacích hodin věnujete výuce kombinatoriky?
4. Prošli jste na vysoké škole kurzem kombinatoriky (diskrétní matematiky)?
5. Máte pocit, že v kombinatorice vynikají jiní žáci než obvykle?
6. Zaškrtněte, které kapitoly v rámci kombinatoriky probíráte.
7. Používáte při výuce matematiky počítače?
8. Používáte počítač při přípravě na výuku?
9. Jaké materiály používáte při přípravě na výuku?
10. Uvítali byste multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky?
11. Pohlaví
12. Věk
13. Na jakém typu střední školy učíte?

Učitelé mohli zodpovědět libovolné otázky, mohli zvolit i několik odpovědí na jednu otázku současně. Toho často využívali, pokud se nemohli rozhodnout mezi dvěma možnostmi. Velká část učitelů do dotazníku dopisovala různé poznámky a postřehy k výuce kombinatoriky, které získali během své učitelské praxe. Mnoho učitelů také vyjádřilo zájem o výsledky tohoto dotazníku.

3 Vyhodnocení dotazníku

Spíš než procentuální vyhodnocení jednotlivých odpovědí bylo zajímavé sledovat každý dotazník zvlášť a souvislosti mezi jednotlivými odpověďmi. Projevily se zde některé očekávané i méně předpokládané skutečnosti.

Učitelé věnují kombinatorice 9–50(!) vyučovacích hodin. Na gymnáziích je to v průměru 21 hodin, na středních odborných školách jen 15 hodin. Na některých školách, kde je matematice věnována větší pozornost, bývá kombinatorika navíc zařazována i do matematických seminářů. Zároveň však učitelé přiznávají, že vzhledem k tomu, že je kombinatorika zařazena až na konec školního roku, ne vždy (díky jiným školním aktivitám souvisejícím právě s koncem roku) je možné dodržet daný počet hodit a probrat beze zbytku všechnu naplánovanou látku.

59 % učitelů odpovědělo, že učí kombinatoriku rádi. Zbylých 41 % přiznává, že kombinatorika není jejich oblíbené téma, popřípadě ji učí vyloženě neradi. Tento výsledek není nijak zvlášť překvapující, neboť v každé části matematiky se najdou učitelé, kteří dané téma nemají rádi. Zajímavější je sledovat důvody neoblíbenosti a další souvislosti. Polovina učitelů, kteří v dotazníku odpověděli, že kombinatoriku učí neradi, jsou učitelé, kteří na vysoké škole neprošli kurzem kombinatoriky či diskrétní matematiky. Je přirozené, že pokud učitel nemá v dané problematice dostatečný nadhled a nebyl na ni na vysoké škole dostatečně připraven, není pro něj příjemné toto téma učit.

62 % všech učitelů, kteří neprošli kurzem kombinatoriky, jsou učitelé z nejstarší věkové kategorie (nad 46 let), pouze 7 % jsou učitelé mladší 35 let. Z toho se dá usuzovat, že kombinatorika a diskrétní matematika nebyla v 60. a 70. letech do výuky na vysokých školách vůbec zařazována.

Očekávaná byla také vazba mezi učiteli a žáky, je však těžší určit její směr. Z dotazníku vyplynulo, že pokud učitelé neučí kombinatoriku rádi, ani žáci potom nemají o toto téma větší zájem. Učitel by měl žáky motivovat mnoha způsoby a jedním z důležitých způsobů motivace je určitě i to, že učitel projevuje o dané téma zájem a učí je rád. Na druhé straně také učitelé potřebují vidět zpětnou vazbu od žáků.

Samotná látka mne celkem baví, ale protože vím, že pro studenty je náročná, netěším se na ni.

Každý rok doufám, že zaujmu více studentů. Komu to jde, tak ho to samozřejmě baví.

Zajímavé bylo také hodnocení studentů. Asi 42 % učitelů sice tvrdí, že prospívají stejní žáci jako obvykle, nicméně 46 % učitelů odpovědělo, že v kombinatorice dobře prospívají i jinak nepříliš úspěšní studenti. Naopak 32 % dotazovaných říká, že kombinatorika je pro některé dobré studenty náročnější než ostatní učivo. Důvody jsou zřejmé, kombinatorika vyžaduje jiný způsob uvažování než řešení úloh z jiných oblastí matematiky. Žáci, kteří doposud prospívali hlavně díky naučeným postupům, mají v kombinatorice problémy. Zde totiž není možné

studentům předložit univerzální návod, s jehož pomocí by mohli řešit všechny úlohy. Naopak líní studenti, kterým bylo dříve zatěžko naučit se něco nazpaměť, mají šanci, pokud mají dobré logické myšlení a jistý kombinatorický talent. K řešení velké řady kombinatorických úloh totiž nepotřebují znát prakticky nic kromě základních algebraických operací.

Úspěch nekoreluje zcela se známkou z jiných partií. Tak je to ale i např. u stereometrie.

Záleží zejména na přístupu jednotlivých studentů a jejich „kombinatorických“ vlohách – někteří slabí studenti se v kombinatorice náhle výrazně zlepší, naopak některým jinak zdatným dělá kombinatorika (zejm. slovní úlohy) nečekané potíže.

Řekla bych, že úspěšnost při řešení kombinatorických úloh a tím také jejich oblíbenost je velmi rozdílná, úspěšní bývají někdy právě žáci, kteří mají s jinými tématy problémy, ale vykazují určitou „kombinatorickou“ představivost. Úspěšnější bývají chlapci než děvčata.

Studenti (ti, kteří nepřemýšlejí) mi vyčítají, že je nedokážu kombinatoriku naučit. „Řekněte nám návod, jak se to počítá...“

V otázce číslo 6 měli učitelé zaškrtnout, které kapitoly v rámci kombinatoriky probírají. Na všech středních školách jsou dle očekávání probírána kombinační čísla, faktoriály a práce s nimi, všichni se také zabývají variacemi, kombinacemi a permutacemi bez opakování, téměř všichni projdou také binomickou větu a variace s opakováním. Permutace s opakováním probírá pouze 79 % učitelů, kombinace s opakováním už jen 68 %. Princip inkluze a exkluze je vyučován jen v 16 % případů a Dirichletův princip jen ve 14 %. To je škoda, protože se jedná o pravidla velmi jednoduchá (s nejjednodušší verzí principu inkuze a exkluze se setkáváme už v první třídě základní školy), použitelná a užitečná v každodenním životě a při řešení celé řady zajímavých a zábavných úloh. Určitě by stálo za to, věnovat jim alespoň trochu pozornosti. Je zarážející, že ne všichni učitelé uvedli, že probírají pravidlo součtu a součinu. Přitom jsou to nejdůležitější a nejužitečnější pravidla používaná v kombinatorice. Na základě jejich znalosti lze vyřešit velkou část všech středoškolských příkladů. Dokonce pomocí nich lze vysvětlit příklady, jejichž řešení by jinak vedlo na užití vztahů pro variace a permutace bez i s opakováním. Používání těchto pravidel vede studenty k přemýšlení a ne jen k bezduchému odhadování, zda se v daném případě jedná o variace či kombinace. Lze předpokládat, že mezi 11 % učitelů, kteří v dotazníku nezaškrtli pravidlo součtu a součinu, je většina těch, kteří je považují za naprosto samozřejmá a uvádějí je pouze bez jejich názvů jako součást „kombinatorického myšlení“. Doufejme, že mezi nimi není žádný učitel, který by chtěl kombinatorické úlohy řešit bez jejich znalosti a užití, pouze s pomocí vztahů pro jednotlivé skupiny prvků.

Pro celou třídu beru nenáročný základ, aby je to bavilo a to se mi daří. Permutace a kombinace s opakováním prozradím jen maturantům. Snažím se o přemýšlení, vzorce jen kde jsou nezbytně nutné.

Nejčastěji používají učitelé při přípravě na výuku učebnice a vlastní poznámky. Z učebnic jsou to nejčastěji: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika autorů Caldy a Dupače, Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 4. část (Petránek, a kol.), Matematika (Petáková). Hojně také učitelé využívají příklady z Matematické olympiády, Klokana, materiály z různých seminářů a konferencí, příklady z přijímacích zkoušek na vysoké školy, vysokoškolská skripta a úlohy rekreační matematiky. Nicméně 96 % všech učitelů by uvítalo multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky, dvě třetiny z nich by ji rádi zařadili i do výuky.

Úlohy lze najít v nejrůznějších učebnicích, ale nejlépe je najít vlastní úlohy z každodenní praxe – prostě chodit nějaký čas po světě s myšlenkami na kombinatoriku!

Těším se na novou sbírku, či jinou obsahově zajímavou pomůcku pro výuku kombinatoriky.

Cokoliv, co mi pomůže vylepšit výuku kombinatoriky, uvítám. Multimediální výuka naráží na problém celé třídy ve výuce a počítačové učebny pro polovinu třídy.

Poslední reakcí jsme se dostali k další důležité otázce a tou je využití počítačů ve výuce matematiky. Drtivá většina učitelů nevyužívá počítač ve výuce nikdy. Počítač sice při výuce matematiky nemůže nahradit tabuli a křídu, ale přece jen existují části matematiky, kde se využití počítačů přímo nabízí. Také v kombinatorice by bylo možné počítače využít a to zejména díky různým appletům a programům, které ukazují vztahy mezi kombinačními čísly a počty kombinací, variací či permutací po zadávání různých „vstupních údajů“. Navíc v naší počítačové době má multimediální učebnice větší šanci zaujmout studenty než učebnice klasická. Užití počítačů přímo ve výuce však často není školou umožněno, počítačové učebny jsou malé a bývají využívány především k výuce výpočetní techniky. Dalším problémem může být nepřipravenost učitelů na tento způsob výuky.

Na dotazník odpovědělo 86 žen a 47 mužů. Nejvíce odpovědí zaslali učitelé z nejstarší věkové skupiny, nejméně potom učitelé nejmladší.

4 Závěr

Z dotazníku vyplynulo, že kombinatorika sice není nejoblíbenějším tématem žáků a často ani učitelů, je však příjemnou změnou a má šanci zaujmout i žáky, kteří předtím o matematiku neprojevovali větší zájem. Neoblíbenost této části matematiky spočívá především v její obtížnosti a odlišnosti od jiných témat.

Je tedy jen na nás, jak dokážeme studenty zaujmout, motivovat, s jakým nadšením jim budeme matematické znalosti předávat a jak jim pomůžeme tuto náročnější část matematiky zvládnout.

Literatura

[1] CALDA, E., DUPAČ, V. *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 3. vyd. Praha : Prometheus, 1993.

Multimediální cvičebnice kombinatoriky a teorie grafů

Zuzana Voglová, Pavla Zagorová

Abstrakt

Cvičebnice je určena studentům učitelství matematiky, středoškolským učitelům a některé pasáže i pro studenty středních škol. Bude složena ze dvou částí – kombinatoriky a teorie grafů. Každá část, členěná do kapitol, bude obsahovat stručný výklad, příklady k procvičování, historické poznámky, zajímavosti a biografie, testy a interaktivní materiály. Pro snazší orientaci v anglicky psané literatuře je zařazen interaktivní slovníček pojmů. Součástí bude generátor příkladů dle témat a stupně obtížnosti.

1 O diskrétní matematice

Diskrétní matematika je zajímavá a důležitá matematická disciplína, která se však nesetkává s příznivým ohlasem u studentů a často ani učitelů. Zvláště na střední škole kombinatorika rozhodně nepatří mezi oblíbená témata.

Od ostatních matematických disciplín se liší hlavně tím, že u příkladů není možná zkouška. Student je při kontrole odkázán jen na svůj vlastní úsudek. Vzhledem k nemožnosti zkoušky tady platí více než kde jinde, že cvičení dělá mistra. Kombinatorika má také spoustu kladných stránek, na které bychom měli studenty upozornit. Velkou výhodou je, že v této části matematiky dostávají šanci i studenti, jejichž výsledky v matematice nebyly zatím nijak oslňující. Pro studium kombinatoriky na střední škole není třeba téměř žádných předchozích znalostí. Šanci dostávají ti žáci, kteří mají dobré logické myšlení, představivost a schopnost abstrakce. Často zde také vítězí zdravý selský rozum nad matematickým aparátem. V kombinatorice i teorii grafů řeší studenti spoustu zajímavých a zábavných úloh ze života. Obě tyto matematické disciplíny nacházejí uplatnění v celé řadě dalších oborů.

Problémem je, že samotní učitelé mnohdy nebývají na kombinatoriku dobře připraveni z vysoké školy a tudíž ji i neradi učí. Na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity jsou předměty Kombinatorika a Teorie grafů standardní součástí akreditovaného programu Matematika. Studenti mají k dispozici běžný

učební text, prozatím však nebyl vytvořen žádný, který by využíval výhody dostupné výpočetní techniky a tím zlepšil výuku diskrétní matematiky.

Pro studium diskrétní matematiky mají studenti k dispozici několik učebnic, sbírek a skript. Doposud však nebyla vytvořena žádná cvičebnice využívající výhody výpočetní techniky. Proto jsme v rámci Fondu rozvoje vysokých škol přihlásily projekt, který by měl tuto mezeru zaplnit. V rámci tohoto projektu bude vypracována multimediální cvičebnice z diskrétní matematiky.

2 Rozvržení cvičebnice

Cvičebnice je složena ze dvou hlavních částí – kombinatoriky a teorie grafů. Každá část je dělena na kapitoly a podkapitoly podle jednotlivých témat. Každá kapitola je členěna na několik oddílů – teorie (záložka Výklad), příklady k procvičování (záložka Příklady), historie – souvislosti, zajímavosti a biografie osobností spojených se zpracovávanou tematikou (záložka Historie), klikací tematický česko-anglický slovníček pro usnadnění orientace v anglicky psané odborné literatuře (jednotný pro všechny kapitoly) (záložka Slovník), mnohovýběrové testy (záložka Testy) a interaktivní materiály k prohloubení znalostí a lepšímu pochopení problematiky (záložka Vyzkoušejte si).

Obr. 1

Z obrázku 1 je zřejmé rozvržení cvičebnice. Položky postranního menu tvoří jednotlivé kapitoly kombinatoriky, resp. teorie grafů. Jednou z položek je obsah. Po kliknutí na něj se zobrazuje i rozdělení textu do jednotlivých podkapitol. V menu se odkazy na jednotlivé podkapitoly zobrazí jako rozbalovací podmenu najetím myši na název příslušné kapitoly. Všechny položky obsahu jsou samozřejmě aktivní. Po kliknutí na některou z podkapitol text automaticky roluje

na příslušný nadpis. Kliknutí na logo uživatele vždy vrátí na úvodní stránku. Tlačítka další a předchozí slouží k snadnému procházení textu po kapitolách.

2.1 Výklad

V teoretické části (záložka Výklad) je vždy stručně popsáno téma dané kapitoly, jsou zde uvedeny základní definice a vztahy potřebné k samostatnému řešení úloh.

2.2 Příklady

V záložce Příklady je dlouhá řada příkladů řazených podle obtížnosti. Pod každým příkladem jsou tři ikonky – nápověda, řešení a výsledek. Po kliknutí na tlačítko nápověda se otevře okno s krátkou nápovědou, která studentovi poskytne první pomoc při řešení příslušného příkladu. Při kliknutí na tlačítko řešení, se otevře okno s podrobným řešením celého příkladu. Pod ikonkou výsledek najde student pouze číselný výsledek. Student má tedy možnost u každého příkladu zvolit pouze takovou nápovědu, jakou potřebuje.

2.3 Historie

V historické části (záložka Historie) jsou klíčové pojmy popsány v historických souvislostech, jsou zde uvedeny zajímavé příklady ze starších matematických textů a zmínky o matematicích, kteří se zabývali daným tématem. Text je odrážkami členěn do tří kategorií – zajímavosti, historické souvislosti a biografie. Každá z nich je přehledně označena ikonou. Po celou dobu je k dispozici Historické okénko, ve kterém se formou upoutávek zobrazují zajímavosti, historické souvislosti a biografie vztahující se k dané kapitole. Historické okénko má za cíl nejen upozorňovat studenty na historické souvislosti a doplňovat, kdo se zabýval danou oblastí, ale také zvyšovat zájem a povědomí studentů o historii oboru. Kliknutím na „více“ se zobrazí záložka historie v cvičebnici.

2.4 Testy

V záložce Testy budou mnohovýběrové testy s online vyhodnocováním shrnující látku příslušné kapitoly. Ke každé otázce bude několik odpovědí, správně nemusí být žádná odpověď, ale mohou být v pořádku také všechny nabízené odpovědi. V případě, že student označí jako správné méně nebo více odpovědí, bude otázka vyhodnocena jako nesprávně zodpovězená.

2.5 Vyzkoušejte si

Konečně v záložce Vyzkoušejte si budou umístěny různé interaktivní applety a prográmky či grafy provázané s textem určené k samostatnému experimentování studentů a objevování souvislostí v daném tématu. Bude je také možno využít pro názornou ilustraci či zpestření výkladu látky ve škole. Dále pak drobné

programy ke stažení či odkazy na stránky, které podrobněji popisují danou problematiku nebo nabízejí relevantní interaktivní prvek.

2.6 Další součásti

Neustále je k dispozici také okénko Najít, které slouží k vyhledávání zadaných slov či témat a odkáže uživatele na ta místa sbírky, kde je dané téma probíráno. Zadaný dotaz se přesměruje na zvolený vyhledávač (Google, Jyxo, ...) a vyhledá se primárně v rámci cvičebnice.

Součástí sbírky bude také generátor písemek, který umožní učitelům snadné vytváření různých testů z kombinatoriky a teorie grafů. Do okna generátoru je možné zadat počet příkladů, vybraná témata a také stupeň obtížnosti jednotlivých příkladů. Podle zadaných údajů potom počítač vygeneruje požadovanou sadu příkladů a případně i vzorová řešení. Generátor může sloužit také studentům pro samostatné procvičování a experimentování v probrané látce.

3 Technická realizace

Připravovaný multimediální text bude naprogramován s využitím PHP, XML, HTML, CSS a Java Scriptu. Zdrojová data budou uložena ve formátu XML a z nich bude pomocí PHP, XML parseru a Java Scriptu vybírán příslušný obsah dle požadavků uživatele. Výsledná podoba textu bude zapsána v HTML. Stránky budou optimalizovány pro většinu běžných prohlížečů.

4 Závěr

Výsledný text bude vystaven na webových stránkách matematické sekce Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity. Bude sloužit pro samostudium studentům učitelského i odborného studia matematiky a současně bude vhodnou e-learningovou cvičebnicí pro další formy studia. Některé kapitoly budou vhodné také pro středoškolské studenty a jejich učitele a další zájemce o matematiku.

Literatura

[1] CALDA, E., DUPAČ, V. *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Praha : Prometheus, 1993.

[2] FUCHS, E. *CD Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele.* Brno : MU, 2000.

[3] KOLEKTIV AUTORŮ. *PHP Programujeme profesionálně.* Brno : Computer Press, 2001.

[4] KUČERA, R., ŠIMŠA, J., HERMAN, J. *Metody řešení matematických úloh II.* Brno : MU, 1991.

[5] VILENKIN, N. *Kombinatorika.* Praha : SNTL, 1977.

Korespondenční seminář jako podpora výuky matematiky

Jaroslav Zhouf

Abstrakt

Korespondenční seminář je jedna ze soutěží pořádaná pro žáky všech stupňů a typů škol. Tato forma by mohla být též vhodným výukovým prostředkem na každé škole, aby zvýšila v současné době poněkud zmenšený zájem žáků o studium matematiky. Příspěvek má poukázat na možnost zařazení korespondenční formy výuky do připravovaných Školních vzdělávacích programů.

Úvod

Termíny Rámcový vzdělávací program a Školní vzdělávací program jsou v současné době něco jako zaklínadla. Každá škola a řada jednotlivců v ní hledá pro tyto programy ty správné kompetence, metody výuky a mezipředmětové vztahy.

Velmi důležitou součástí těchto reforem je hledání nových forem výuky, které by oživily klasický výukový proces, a vedly tak ke zvýšení zájmu o získávání nových poznatků. V matematice jsou takové podněcující metody obzvláště důležité, neboť zájem o ni po změně politického režimu poněkud poklesl. Vinu na tom má orientace žáků a rodičů na jiné obory, v nichž do té doby uplatnění nebylo možné.

Charakteristika korespondenčního semináře

Velice vhodným způsobem osvěžení výuky matematiky by mohly být různé soutěživé prvky, které lze využít na všech typech a stupních škol. K tomu účelu existují dlouhodobě v naší republice nejrůznější buď centrálně nebo regionálně organizované soutěže. Mezi nejznámější matematické soutěže patří matematická olympiáda a Matematický klokan, soutěže, kterých se každoročně účastní mnoho žáků. Mezi méně známou formu soutěže patří tzv. korespondenční seminář. Kromě zvýšení zájmu o matematiku slouží matematické soutěže k vyhledávání a rozvoji talentovaných žáků v matematice, což je možná jejich vůbec nejdůležitějším posláním. O této jejich funkci zde ale mluvit nebudeme. Půjde nám

o to upozornit, jak např. posledně jmenovanou soutěž by bylo možné zapojit do výuky v jakékoli třídě.

Soutěž ve formě korespondenčního semináře sestává ze zasílání úloh žákům domů, kteří je vyřešené zasílají zpět organizátorům soutěže. Ti úlohy opraví a opravené je zašlou řešitelům zpět. S nimi zasílají nové úlohy k řešení. A tento proces se opakuje několikrát za rok.

Po každé sérii se tvoří výsledková listina a nakonec také výsledková listina celého ročníku soutěže. Právě tento hodnotící prvek je velice motivující a pomáhá udržovat zájem žáků po celý rok.

Korespondenční seminář jako soutěž pro talentovanější žáky

V České republice jsou organizátory korespondenčních seminářů většinou studenti některé střední nebo vysoké školy pod vedením učitelů. Pořádají ho pro žáky základních nebo středních škol, které se nacházejí v daném regionu. V naší republice existuje několik těchto seminářů. Každý z nich má svůj název a svá specifika. Liší se v určenosti pro jistou věkovou skupinu, v počtu kol, tzv. sérií, v počtu úloh v jednotlivých sériích, v obtížnosti úloh, ve formě kontaktu mezi organizátory a řešiteli (klasickou poštou, elektronicky), ve způsobu vyhodnocování a zveřejňování výsledků, odměňování řešitelů (knihy, závěrečná soustředění), ve financování soutěže atd.

Tato forma soutěže pro žáky základních škol vznikla v 80. letech minulého století. Její forma se postupně měnila. Hlavní změnou bylo to, že původní zadávání izolovaných úloh v sériích se kvůli větší atraktivitě upravilo do podoby literárních příběhů, jejichž součástí jsou více či méně nenásilně vložené matematické úlohy. Tato literární podoba soutěže by měla mít za úkol přiblížit ji co nejširšímu okruhu žáků základních a středních škol.

Ukázku takových seminářů je možné najít v publikacích [2] až [6]. Ročenky [2] jsou sbírkou problémů pro studenty středních škol, kniha [4] je určena žákům prvního stupně základní školy a knihy [3, 5, 6] jsou určeny žákům druhého stupně základní školy. Na konci knihy [6] se najdou informace o organizátorech těch korespondenčních seminářů, které tam mají uvedený svůj příběh. Je možné tam získat kontakt na organizátory, a tím se do semináře zapojit. Je však nutné připomenout, že existuje ještě několik dalších podobných seminářů. Je možné o nich získat informace na školách v tom regionu, pro které jsou semináře určeny. Mnoho informací je možné najít také na internetu, neboť téměř všichni organizátoři mají své webové stránky. Stačí např. ve vyhledavači napsat „korespondenční seminář“ nebo „Pikomat“ apod.

Vedoucí korespondenčních seminářů se pravidelně setkávají na semináři MAKOS, kde si předávají zkušenosti a získávají pro tuto práci další učitele a studenty – viz publikace [1].

V příloze je uvedena jedna série jednoho příběhu s úlohami korespondenčního semináře Pikomat pořádaného v Praze na průmyslové škole Panská pro žáky druhého stupně základních škol.

Korespondenční seminář jako prvek výuky

Doposud se korespondenční seminář používá jako soutěž pro talentovanější žáky v tom kterém regionu. Tento příspěvek by chtěl upozornit na to, že forma této soutěže by mohla být využita na kterékoli škole jen pro žáky té školy. A mohla by tudíž být součástí Školního vzdělávacího programu.

Celé by to mohlo fungovat tak, že by žáci z vyšších ročníků s pomocí svého učitele matematiky mohli vytvářet problémy pro žáky v nižších ročnících. Ti by je doma řešili a po nějaké době by je odevzdali. Starší žáci by je opravili a předložili by další problémy. Takto by to mohlo proběhnout několikrát do roka.

Celá školní minisoutěž by byla prospěšná pro obě skupiny žáků, a to pro ty, kteří úlohy řeší, čímž se zábavnou formou učí matematiku, ale i pro organizátory, a to ze dvou hlavních důvodů. Jednak příprava úloh v sobě nese vyšší úroveň vhledu do matematiky, jednak opravou úloh si „osahají“ problém ze všech stran a mohou mu dokonaleji porozumět.

Škola, která by chtěla tuto formu výuky na škole realizovat, by si mohla vzít za vzor právě prezentované publikace. A dokonce by z nich mohla čerpat celou řadu těch jednodušších problémů. Jde např. o úlohy 1, 2, 3 z následující přílohy.

Ze své dlouholeté zkušenosti doporučuji tuto formu výuky na škole určitě vyzkoušet.

Příloha

Putování lorda Edwarda

1. série Plavba za pokladem

Když nemocný strýček lorda Edwarda cítil, že se blíží jeho konec, sepsal poslední vůli. Lord Edward, jako jediný příbuzný starého pána, měl zdědit celé jeho jmění. Musel však slíbit, že se vydá na dalekou cestu.

Strýček býval kapitánem na lodi Viktoria a při jedné ze svých posledních plaveb našel starou mapu vedoucí k velkému pirátskému pokladu. Kvůli své nemoci už ale cestu neuskutečnil.

Lord Edward se jako nový kapitán začal připravovat na cestu. Strýčkova Viktoria ještě kotvila v přístavu a lordu Edwardovi stačilo najmout posádku.

Úloha 1

Když se rozkřiklo, že Edward potřebuje námořníky, přihlásilo se jich jen o něco méně než 1 500. Dvě devítiny tvořili důstojníci, dvě pětiny lodníci, sedminu kuchaři a zbytek byli plavčíci. Přijata z nich byla čtyřicetina důstojníků, osmina

lodníků a devítina kuchařů. Zbytek, který tvořila třetina všech přijatých, byli plavčíci. Kolik mužů Edward přijal?

Posádka už byla téměř kompletní. Chyběl jen kormidelník, kterým se měl stát Philip, Edwardův přítel z dětství. Toho ale musel nejprve Edward vykoupit z vězení pro dlužníky.

Úloha 2
Philip byl právě odsouzen na 12 měsíců a splácení dluhu mu bylo vyměřeno tak, že každý měsíc měl zaplatit polovinu ze zbytku dluhu a 1 libru. Edward chtěl zaplatit celou částku najednou, a tím Philipa vykoupit. Soudce však dal za prominutí trestu podmínku, že Edward musí zaplatit takovou částku, která odpovídá stejnému způsobu splácení jen s tím rozdílem, že místo 1 libry navíc zaplatí každý měsíc 2 libry. O kolik liber celkem zaplatil Edward víc oproti skutečnému Philipovu dluhu?

Philip byl tedy vykoupen z vězení. Viktoria byla prohlédnuta a připravena k vyplutí. Námořníci se loučili s rodinami a užívali si poslední dny na pevné zemi. Zbývalo už jen naložit zásoby a mohly se zvednout kotvy. Edward poslal námořníky do skladu, aby vyzvedli bedny s potravinami.

Úloha 3
Ve skladu už byla téměř tma a nápisy na bednách nebyly vidět. Námořníci věděli jen, že ve skladu je 60 beden, z toho v 16 bednách je sušené maso, v 7 bednách ryby, v 17 bednách brambory, v 11 bednách jablka a v 9 bednách mouka. Měli odnést více beden s masem než s rybami a více beden s bramborami než s jablky. Také chtěli, aby počet beden se sušeným masem nebo bramborami byl aspoň takový jako počet beden s ostatními potravinami. Kolik beden museli námořníci odnést, aby splnili svůj úkol?

Bedny byly přineseny na loď a plavčíci je začali rovnat do podpalubí. Nejprve však bylo třeba bedny pečlivě zabalit do plátěných plachet.

Úloha 4
Bedny byly krychlové s délkou hrany 1 m. K dispozici byly jen plachty o rozměrech 3 m × 3 m. Bylo možné zabalit bedny do plachet bez jejich nastavování?

Loď se s velkou slávou vydala na cestu. Vidina pokladu zpočátku námořníky poháněla a byla hlavním tématem jejich rozhovorů. Později se ale posádka začala nudit. Lord Edward, aby udržel dobrou náladu na lodi, uspořádal pro námořníky soutěž. Tomu, kdo splní jeho úkol, slíbil vyplatit vysokou odměnu.

Úloha 5
Na šachovnici o rozměrech 4×8 polí stál kůň. Bylo třeba s ním uskutečnit 32 tahů tak, aby prošel všechna pole šachovnice a aby se posledním tahem vrátil

tam, kde začal. Nikomu z posádky se to na první pokus nepodařilo. Bylo vůbec možné splnit tento úkol?

Plavba dlouho probíhala bez problémů, čtyřicátý den plavby se však na moři rozpoutala bouře, která způsobila značné škody. Dva stěžně musely být podepřeny, aby se nepřelomily. Také na pravoboku vznikla velká prasklina a trvalo celý den, než se to námořníkům podařilo opravit. Nejvíce ale utrpěla hlavní plachta, která se na mnoha místech roztrhla.

Úloha 6
Na vyspravení potrhané plachty bylo třeba beze zbytku rozřezat jinou plachtu na nejvýše osm záplat. Náhradní plachta byla čtvercová a všechny záplaty měly mít tvar ostroúhlých trojúhelníků. Jak se tedy musela náhradní plachta rozřezat?

Po dvou měsících namáhavé plavby se na obzoru konečně objevil ostrov kapitána Jeffa, na kterém měl být podle mapy uložen poklad. Loď zakotvila nedaleko břehu a na hladinu byl spuštěn člun, do kterého nastoupili Edward, Philip, doktor Dickens, první důstojník Malvin a čtyři veslaři. Nechali naložit také zásoby jídla na dva týdny a vyrazili ke břehu.

Literatura

[1] KOLEKTIV AUTORŮ. *MAKOS, n-tý ročník, Sborník příspěvků z podzimní školy péče o talenty v matematice.* tiskové středisko organizující VŠ, rok m.

[2] KOLEKTIV AUTORŮ. *Matematický korespondenční seminář, n-tý ročník.* Praha : MFF UK Praha, rok m.

[3] KOLEKTIV AUTORŮ. *PIKOMAT MFF UK, n-tý ročník.* Praha : MFF UK Praha, rok m.

[4] VAŇKOVÁ, J., LIŠKOVÁ, H. *Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipa, Matýska.* Praha : Prometheus, 2005.

[5] ZHOUF, J., LANĚ, F., HRADEČNÁ, J. *10 (+1) let korespondenčního semináře PIKOMAT v Praze.* Praha : Gymnázium Ch. Dopplera a JČMF, 1999.

[6] ZHOUF, J., a kol. *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Praha : Prometheus, 2006.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Ausbergerová Marie KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	377 320 866
Bastl Bohumír KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	377 632 655 bastl@kma.zcu.cz
Bečvář Jindřich KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	221 913 251 becvar@karlin.mff.cuni.cz
Benedikt Jiří KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	benedikt@kma.zcu.cz
Benediktová Marie Katedra logiky FF UK, nám. J. Palacha 2 Praha 1, 116 38	marie.benediktova@ff.cuni.cz
Binterová Helena PF JU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 087 hbinter@pf.jcu.cz
Bittnerová Daniela Technická univerzita v Liberci, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 310 daniela.bittnerova@tul.cz
Boucník Pavel Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše 14 Brno, 658 70	608 751 364 boucnik@jaroska.cz
Brabenec Milan Gymnázium Karla Čapka Dobříš, Školní 1530 Dobříš, 263 01	776 123 247 milanbr@seznam.cz
Brandner Marek KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	377 632 625 brandner@kma.zcu.cz
Brejcha Miloš Vydavatelský servis, Republikánská 28 Plzeň, 312 00	604 731 803 brejcha@vydavatelskyservis.cz
Bušek Ivan Vyšší obchodní podnikatelská škola, Masná 13 Praha 1, 110 00	605 938 823 busek.ivan@vops-praha.cz
Cakl Ondřej Prodos spol. s r. o., Kollárovo nám. 7 Olomouc, 772 00	585 556 247 o.cakl@prodos-cz.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Calda Emil KDM Mff UK, Sokolovská 83 Praha 8-Karlín, 186 00	257 711 210 ecalda@volny.cz
Ciglerová Ludmila gymnázium, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	274 817 655 ciglerova@gymvod.cz
Coufalová Jana KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 306 14	377 636 007 coufalov@kmt.zcu.cz
Cutychová Jana Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	604 813 317 cutychova@gymjat.cz
Čechurová Milana SPN – pedagog. nakladatelství, a. s., Ostrovní 30 Praha 1, 110 00	224 930 066 cechurova@spn.cz
Daněček Josef VUT v Brně, FAST, Žižkova 17 Brno, 612 00	541 147 614 danecek.j@fce.vutbr.cz
Daněk Tomáš Gymnázium a SOŠ ekonomická, Pivovarská 69 Vimperk, 385 01	388 411 039 kolben@oag.cz
Davidová Eva Gymnázium, Čs. exilu 669 Ostrava-Poruba, 708 00	606 260 050 davidova@gym669ova.cz
Dittrich Jiří Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	776 084 224 jiri.dittrich@atlas.cz
Divoká Jaroslava SPŠS, škola hl. m. Prahy, Betlémská 4/287 Praha1-Staré Město, 110 00	723 415 545 j.divoka@quick.cz
Dlouhý Oldřich VUT v Brně, Žižkova 17 Brno, 602 00	541 147 612 dlouhy.o@fce.vutbr.cz
Dobiáš Václav PF JČU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 370 01	602 430 456 obludicka@yahoo.com
Drábek Pavel KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	377 632 648 pdrabek@kma.zcu.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Drahotský Petr Gymnázium Boženy Němcové, Pospíšilova 324 Hradec Králové, 500 03	737 513 733 drahotsky@gybon.cz
Dvořák Jan VIC FSv ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	 jan.dvorak@fsv.cvut.cz
Dvořáková Ivana Gymnázium PdC Tábor, nám. F. Křižíka 860 Tábor, 390 30	720 365 734 idvorako@gymta.cz
Dvořáková Ivana Obchodní akademie, Komenského 1534 Lysá nad Labem, 289 22	325 553 021 ivdvor@centrum.cz
Eliášová Lada VŠE, Ekonomická 957 Praha, 148 00	604 719 082 eliasova@vse.cz
Fantová Ivana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	605 182 617 fantova@gbn.cz
Fenclová Věra Základní škola, nám. Jiřího z Lobkovic 22 Praha 3, 130 00	737 541 113 verafen@seznam.cz
Filipová Olga SPŠ stavební, Kollárova 2 Havířov, 736 01	596 413 334 o.filipova@atlas.cz
Formánek Jiří SOU a SOŠ stavební, Bydlinského 2474 Tábor, 390 02	 formanek.tabor@seznam.cz
Fořtová Ilona Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	732 500 203 fortova@prometheus-nakl.cz
Fridrichová Alena Spec. školy pro sluch. postižené, Ječná 27 Praha 2, 120 00	758 841 861 fridrichova@post.cz
Fuchs Eduard KMA PřF MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 602 00	549 493 858 fuchs@math.muni.cz
Gabrielová Jitka Gymnázium, Žitavská 2969 Česká Lípa, 470 01	604 109 300 gabrielova.jitka@gym-cl.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Gazárková Dana, Střední průmyslová škola stavební, Kudelova 8 Brno, 662 51	545 321 210 gazarkova@spsstavbrno.cz
Girg Petr KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 312 17	 pgirg@kma.zcu.cz
Hejný Milan KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 250 milan.hejny@pedf.cuni.cz
Herberová Veronika Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše 14 Brno, 658 70	777 963 005 herberova@jaroska.cz
Herman Jiří Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše 14 Brno, 621 00	545 577 371 herman@jaroska.cz
Hlaváčková Jitka Katedra matematiky PF UJEP, Hoření 13 Ústí nad Labem, 400 96	777 176 526 hlavackova@pf.ujep.cz
Hofmanová Hana VOS a SPSD, Masna 18 Praha 1, 110 00	272 934 681 hofmanova@post.cz
Holečková Helena VOŠS a SPŠS arch. J. Letzela, Pražská 931 Náchod, 547 01	739 093 126 Holeckova@voss-na.cz
Horák Karel Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	606 728 516 horakk@math.cas.cz
Hozová Jana Gymnázium a SOŠ pro ZPM, Radlická 115 Praha, 158 00	235 521 214 hozova@goa.braillnet.cz
Hricz Miroslav ZŠ a MŠ, U Santošky 1/1007 Praha 5, 150 00	732 572 717 miroslav.hricz@santoska.cz
Hrkalová Jana Gymnázium Oty Pavla, Loučanská 520 Praha 5-Radotín, 153 00	605 900 488 jana.hrkalova@gymn-radotin.cz
Hrubá Miluše Gymnázium Jevíčko, A. K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	461 327 805 hruba@gymjev.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Hrubý Dag Gymnázium Jevíčko, A. K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	461 327 805 hruby@gymjev.cz
Hudcová Milada VOŠ, VZŠ, SOŠ a SOU, Hybešova 53 Boskovice, 680 01	516 454 044 hudcova@abba.cz
Jančařík Antonín KMDM PeDF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 252 Antonin.Jancarik@pedf.cuni.cz
Jančaříková Anna ZŠ a MŠ Kladno, Jiráskova 457 Kladno-Švermov, 273 09	602 682 284 anca_janca@centrum.cz
Janečková Jana GSG Přípotoční, Přípotoční 1337 Praha 10, 101 30	 janajan@email.cz
Jehlička Vladimír Univerzita Pardubice, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 018 vladimir.jehlicka@uhk.cz
Jexová Soňa VOŠZ a SZŠ, Alšovo nábř. 6 Praha 1, 110 00	222 321 793, kabinet 20 jexova@szspraha1.cz
Jindrová Pavla Univerzita Pardubice, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 018 pavla.jindrova@upce.cz
Jirotková Darina KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 252 darina.jirotkova@pedf.cuni.cz
Jirovská Yveta Gymnázium Oty Pavla, Loučanská 520 Praha 5-Radotín, 153 00	606 365 491 yveta.jirovska@gymn-radotin.cz
Jirsa Michael Základní škola Radotín, Loučanská 1112 Praha, 153 00	603 455 903 michaeljirsa@seznam.cz
Jungmannová Jana VOS, SPgŠaOA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	775 976 007 janicka.j@post.cz
Kačerová Hana Gymnasium Voděradská, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	607 669 676 hana.kacerova@seznam.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Kadlčík Vojtěch Gymnázium, Dr. E. Beneše 449/II Soběslav, 392 11	381 503 911 kadlcik@gym-so.cz
Kafková Marika Přf MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	603 576 061 maja.k@email.cz
Kalová Jana Gymnázium České Budějovice, Jírovcova 8 České Budějovice, 371 61	775 111 861 kalova@volny.cz
Kašpar Jan KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8-Karlín, 110 00	221 913 234 kaspar@karlin.mff.cuni.cz
Kašpar Jaromír Gymnázium Luďka Pika, Opavská 21 Plzeň, 312 00	377 267 048 kaspar@gop.pilsedu.cz
Kašpárek Ladislav Střední průmyslová škola, Legionářů 3 Jihlava, 586 01	777 022 334 kasparek@sps-jia.cz
Kesslerová Vendulka VOŠZ a SZŠ, Alšovo nábřeží 6 Praha 1, 110 00	222 321 793, kabinet 20 kesslerova@szspraha1.cz
Klierová Květuše Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	475 240 157 klierova@gymjat.cz
Knorová Jitka Gymnázium Z. Wintra, nám. J. Žižky 186 Rakovník, 269 19	737 879 626 knorova@gzw.cz
Kohout Václav KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 306 14	377 636 278 vkohout@kmt.zcu.cz
Kommová Helena Gymnázium Jana Keplera, Parléřova 2 Praha 6, 169 00	776 237 713 kommova@gjk.cz
Kopáčková Alena KMDM, Fakulta pedagogická TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 307 alena.kopackova@tul.cz
Kopecká Ilona Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	602 720 395 ellen1@seznam.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Kopecký František Gymnázium Jana Nerudy, Hellichova 3 Praha 1, 118 00	257 404 812 kopecky@gjn.cz
Košťáková Marta VOŠ, OA a SPgŠ, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	 kostakova@centrum.cz
Kotlík Josef ISSŠaU Jihlava, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	567 578 560 jkotlik@isss-ji.cz
Koudela Libor Univerzita Pardubice, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 451 libor.koudela@upce.cz
Králová Květuše SŠOSP, Kněžskodvorská 33/A České Budějovice, 370 04	387 438 925 ekonom@ss-osp.cz
Krása Michal, ELKAN, spol. s r.o., V Tůních 12 Praha 2, 120 00	224 999 119 michal.krasa@elkan.cz
Krátká Magdalena KM PřF UJEP, České mládeže Ústí nad Labem, 400 96	475 283 362 kratka@sci.ujep.cz
Krupka Petr Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše 14 Brno, 658 70	545 211 186 krupka@jaroska.cz
Kubáček Zbyněk FMFI Univerzity Komenského, Mlynská dolina Bratislava, SK842 48	 kubacek@fmph.uniba.sk
Kubáčková Dana SŠ a VOŠ právní, s.r.o., Dr. M. Horákové 447/60 Liberec, 460 01	724 857 617 dana.kubackova@seznam.cz
Kubát Josef Gymnázium Pardubice, Dašická 1083 Pardubice, 530 03	604 155 448 gy_svobodova@supce.cz
Kubeš Josef Gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí 23 Plzeň, 326 00	604 593 962 josef.kubes@mikulasske.cz
Kubešová Naděžda Gymnázium L. Pika, Opavská 21 Plzeň, 312 00	732 369 494 kubesova@gop.pilsedu.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Kubíková Taťjana SPŠ, Na Třebešíně 2299 Praha 10, 108 00	605 262 937 kubikova@trebesin.cz
Kubínová Marie KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 462 marie.kubinova@pedf.cuni.cz
Kuřina František Univerzita Hradec Králové, Rokitanského 62 Hradec Králové, 500 03	495 061 153 Frantisek.kurina@uhk.cz
Lakomá Hana Katedra matematiky FSv ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	 lakoma@mat.fsv.cvut.cz
Lávička Miroslav KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	377 632 619 lavicka@kma.zcu.cz
Ledvinová Zuzana SZŠ a VOŠ Zdravotnická, Poděbradská 2 Karlovy Vary, 360 01	776 009 875 zuzana.vitovcova@email.cz
Lesáková Eva CERMAT, Jeruzalémská 957/12 Praha 1, 110 00	224 507 412 lesakova@cermat.cz
Lišková Hana VOŠP a SPgŠ, Komenského nám. 22 Litomyšl, 570 12	461 613 563 liskova@lit.cz
Machačová Ludmila Univerzita Pardubice, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 019 ludmila.machacova@upce.cz
Maňásek Luděk Gymnázium Ladislava Jaroše, Palackého 524 Holešov, 769 01	573 394 522 ludekm@centrum.cz
Mannheimová Dagmar Gymnázium, Komenského 713 Třinec, 739 61	607 141 893 Dagmar.Mannheimova@gymtri.cz
Mareš Václav VOŠZ a SZŠ, Alšovo nábřeží 6 Praha 1, 110 00	222 321 793, kabinet 10a mares@szspraha1.cz
Matásková Ľubica SPŠ strojnická, Klatovská 109 Plzeň, 320 57	724 102 190 mataskova@spstrplz.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Matoušková Marie SŠ gastronomie a služeb, Palachova 711/2 Most, 434 01	606 532 131 MMZM@post.cz
Melicharová Stanislava SPŠ stavební, Kudelova 8 Brno, 662 51	728 753 562 melicharova@spsstavbrno.cz
Mudruňková Jitka VOŠZ a SZŠ, Alšovo nábřeží 6 Praha 1, 110 00	222 321 793, kabinet 20 mudrunkova@szspraha1.cz
Nečasová Eva Gymnázium Jana Nerudy, Hellichova 3 Praha 1, 118 00	274 773 032 e.necasova@centrum.cz
Neubauerová Danuše SZŠ a VOŠZ, Karlovarská 99 Plzeň, 323 00	602 441 507 neubauerova@zdravka-plzen.cz
Nevřalová Jana, SŠ-COPT, Nábělkova 539 Kroměříž, 767 01	 nevralova@coptkm.cz
Niedermayer Luděk Česká národní banka, Na Příkopě 28 Praha 3, 115 03	224 411 111
Nováková Marie Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	606 721 810 novakova@prometheus-nakl.cz
Novotná Jarmila KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	603 578 360 jarmila.novotna@pedf.cuni.cz
Odvárko Oldřich KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	602 800 155 odvarko@karlin.mff.cuni.cz
Otruba Karel CMSPgŠaG, Lerchova 63 Brno, 602 00	543 423 751 otruba@cmsps.cz
Pavlíčková Helena OA a ISŠ obchodu a služeb, Bratříků 851 Havlíčkův Brod, 580 01	607 219 673 hellenka@centrum.cz
Pelikánová Hana Obchodní akademie, Pařížská 15 Ústí nad Labem, 400 01	736 461 769 hanka.pelikanova@oaulpar.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Perný Jaroslav KMD FP TU v Liberci, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 285 jaroslav.perny@tul.cz
Petrbok Václav Akermann electronic Praha, Moskevská 86 Praha 10, 101 00	271 746 247 vaclav@akermann.cz
Pěchoučková Šárka KMT PFE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 306 14	377 636 274 pechouck@kmt.zcu.cz
Plíšková Jana ZŠ Pardubice, Josefa Ressla 2258 Pardubice, 530 02	724 510 222 pliskova.jana@seznam.cz
Podlešáková Jana SOŠ Blatná, V Jezárkách 745 Blatná, 388 17	383 412 211 skola@blek.cz
Polová Alenka Základní škola, Jiráskovy sady 273 Příbram II, 261 01	602 136 517 alenapb@seznam.cz
Pomykalová Eva Gymnázium – Lesní čtvrť, Lesní čtvrť 1364 Zlín, 760 01	777 026 493 pomykal@sendme.cz
Prachař Otakar Ústav matematiky FES UP, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 014 otakar.prachar@upce.cz
Procházka František SPŠS a VOŠ, Čáslavská 973 Chrudim, 537 01	469 688 623 prochazka@spss-cr.cz
Procházková Martina Gymnázium, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	274 817 655 prochazkova@gymvod.cz
Prouza Ludvík Univerzita Pardubice, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 093 ludvik.prouza@upce.cz
Přibylová Štěpánka Obchodní akademie, Pařížská 15 Ústí nad Labem, 400 01	603 204 095 stepanka.pribylova@oaulpar.cz
Příhonská Jana KMD FP TU v Liberci, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 370 jana.prihonska@tul.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Rendlová Miloslava SPŠ dopravní, Karlovarská 99 Plzeň, 323 00	603 963 801 miloslava.rendlova@seznam.cz
Rezek Jan SOU gastronomie, U Krbu 521 Praha 10, 108 00	774 194 230 dr.rezek@seznam.cz
Robová Jarmila KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	221 913 355 robova@karlin.mff.cuni.cz
Rollinger Antonín VOŠ, SPgŠ a OA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	777 301 274 finrol@centrum.cz
Roubíček Filip Matematický ústav AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	222 090 750 roubicek@math.cas.cz
Řezáčová Růžena VOS a SPŠS, Dušní 17 Praha 1, 110 00	724 094 065 rezacova@spsdusni.cz
Řídká Eva CERMAT, Jeruzalémská 957/12 Praha 1, 110 00	224 507 413 ridka@cermat.cz
Samková Soňa SPN – pedagog. nakladatelství, a. s., Ostrovní 30 Praha 1, 110 00	224 930 066 samkova@spn.cz
Saxl Ivan Matematický ústav AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 62	222 090 729 saxl@math.cas.cz
Slezáková Jana KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 176 jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz
Smíšková Jaroslava Obchodní akademie, Dušní 7 Praha 1, 110 00	251 815 950 sezam788@vol.cz
Souchová Marie Gymnázium, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	 souchova@gymvod.cz
Staněk Miroslav SOŠ a SOU A. Citroëna, Náměstí 9. května 2a Boskovice, 680 01	516 453 041 stanek@soubce.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Stehlíková Lenka Základní škola, Pohraniční stráže 95 Velká Hleďsebe, 354 71	354 622 534 zsvh@quick.cz
Stehlíková Naďa KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	 nada.stehlikova@pedf.cuni.cz
Stein David , ,	604 729 962 david.stein@seznam.cz
Stejskalová Blanka Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	723 184 559 stejskalova@gymjat.cz
Svobodová Veronika Cyrilometodějské gymnázium, Lerchova 63 Brno, 602 00	 schneck@email.cz
Sýkora Václav KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 110 00	777 837 588 vaclav.sykora@pedf.cuni.cz
Šarounová Alena KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	221 913 235 sarounov@karlin.mff.cuni.cz
Šedivý Jan Gymnázium J. Nerudy, Komenského nám. 400/9 Praha 3, 130 00	221 434 764 gjn.hud@seznam.cz
Šíma František SSOŠ a SOU Prachatice, s. r. o., Zlatá stezka 240 Prachatice, 383 01	388 314 112 frantisek.sima@soa.cz
Šíma Zdeněk Gymnázium a SOŠ, Hlavní 106 Aš, 352 01	354 525 585 zdenek.sima@gymsos.com
Šobrová Libuše Gymnázium Omská, Omská 1300 Praha 10, 100 00	608 740 777 libuse.sobrova@omska.cz
Šolcová Alena Katedra matematiky, FSv ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	224 354 388 solcova@mbox.cesnet.cz
Šteffl Ondřej www.scio.cz, s. r. o., Pobřežní 34 Praha 8, 186 00	603 251 274 osteffl@scio.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Štěpánková Jiřina 16. Základní škola, Albrechtická 414 Most, 434 01	723 784 832 stepji@atlas.cz
Šupinová Eva Obchodní akademie, Smetanovo nábřeží 17 Břeclav, 690 28	724 825 856 supinova@cmail.cz
Šváchová Jana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	317 784 071 svachova@gbn.cz
Tauerová Tereza Euroškola Litvínov SOŠ, Sklářská 81 Litvínov 8, 435 42	602 171 506 ttau@centrum.cz
Tichá Irina SPŠ a VOŠ, Školní 50 Chomutov, 430 01	603 195 259 ticha@spscv.cz
Tichá Marie Matematický ústav AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	222 090 726 ticha@math.cas.cz
Tlustý Pavel katedra matematiky, PF JČU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 370 10	 tlusty@pf.jcu.cz
Trejbalová Lucie SZŠ a VOŠZ, Karlovarská 99 Plzeň, 323 00	377 221 249 trejbalova@zdravka-plzen.cz
Vacka Milan Vyšší odborná škola, Okružní 10 České Budějovice, 370 21	387 842 199 vacka@voscb.cz
Vaníček Jiří PF JČU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	 vanicek@pf.jcu.cz
Váňová Monika gymnázium, Žitavská 2969 Česká Lípa, 470 01	487 834 528 vanova.monika@gym-cl.cz
Vavroš Michal Gymnázium, Čs. exilu 669 Ostrava, 708 00	603 879 790 vavros@gym669ova.cz
Vlášková Jana Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	606 728 519 vlaskova@prometheus-nakl.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Voglová Zuzana KMA PřF MU, Janáčkovo náměstí 2a Brno, 602 00	605 952 355 zuzana.voglova@foxis.cz
Vysoká Jana VOŠ, Okružní 10 České Budějovice, 370 21	723 305 132 jana.vysoka@seznam.cz
Wasyliw Vladimír ISŠT Mělník, K Učilišti 2566 Mělník, 276 01	605 256 056 wasyliw@seznam.cz
Wirth Michal Gymnázium, Ruská 355 Mariánské Lázně, 353 01	 mwirth@atlas.cz
Wirthová Hana Základní škola, Pohraniční stráže 95 Velká Hleďsebe, 354 71	 zsvh@quick.cz
Zagorová Pavla Katedra matematiky, Janáčkovo nám. 2 Brno, 602 00	 xzagorov@centrum.cz
Zámorská Petra Střední škola hotelová Zlín, Dřevnická 1788 Zlín, 760 01	603 879 708 pea@avonet.cz
Zapomělová Marie ISSSaU, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	567 578 560 mzapomelova@isss-ji.cz
Zárubová Věra VOŠ, OA a SPgŠ, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	 zarubova-vosoa@wms.cz
Zárubová Lenka Střední průmyslová škola, 28. října 1598 Frýdek-Místek, 738 01	558 406 217 zaruboval@spsfm.cz
Zhouf Jaroslav KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	 jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Zrostlík Petr Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 326 00	 petr.zrostlik@mikulasske.cz
Zychova Soreya SPŠ, Na Třebešíně 2299 Praha 10, 108 00	603 991 926 zychova@trebesin.cz

příjmení a jméno adresa	telefon e-mail
Žák Václav ELKAN, spol. s r.o., V Tůních 12 Praha 2, 120 00	224 999 100 vzak@elkan.cz
Žůrková Jana SPŠ stavební, Kollárova 2 Havířov-Podlesí, 736 01	 j.zurkova@centrum.cz

Vydavatelský servis
občanské sdružení
Republikánská 28
312 00 Plzeň
servis@vydavatelskyservis.cz

Zajišťujeme:

- Vydávání odborné literatury
- Vydavatelské práce
- Sazbu publikací
- Grafické práce

Přehled evaluovaného výukového software
distribuovaného firmou ELKAN, spol. s r. o.

Mathematica představuje programový systém pro provádění numerických i symbolických výpočtů a vizualizaci dat. Silnou stránkou tohoto systému je vlastní programovací jazyk na bázi jazyků umělé inteligence. Díky tomu *Mathematica* nachází široké uplatnění v praxi zejména v oblastech vědecko-technických výpočtů, statistickém zpracování dat, finančním managementu atd. Jednotná koncepce systému umožňuje studovat závislost matematických modelů reálných systémů na parametrech jak symbolicky (parametry jsou reprezentovány např. písmeny) tak numericky (pro konkrétní číselné hodnoty parametrů). Tím se *Mathematica* stává nejen mocným nástrojem pro výzkum a vývoj, ale též názornou pomůckou pro výuku matematiky a fyziky na všech stupních škol.

Z hlediska učitele střední školy dokáže poskytnout podporu pro výklad obtížnějších partií, jako je například diskuse řešení rovnic a nerovnic závislých na parametru, rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami, logaritmické, exponenciální a lineární lomené funkce, rovnice a nerovnice, analytická geometrie, kombinatorika, úvod do diferenciálního a integrálního počtu a základy statistiky. Ve středoškolské fyzice lze například sledovat závislost trajektorie šikmého vrhu na úhlu a počáteční rychlosti, zobrazovat závislost rychlostí těles po srážce v závislosti na poměru jejich hmotností, prostřednictví animace lze také lépe vysvětlit kmitavý pohyb a další jevy. Jednoduše modelovatelné jsou i aplikace v elektřině a magnetizmu. V rámci samostatné práce studenti mohou snadno statisticky vyhodnocovat výsledky svých měření z fyzikálního praktika. Vzhledem k tomu, že systém *Mathematica* podporuje následující programovací techniky: procedurální (jako např. C, FORTRAN, nebo Pascal), funkcionální (jako např. Lisp) a logické programování (jako např. Prolog), je také vhodný pro výuku programování. Úvodní kurz programování je veden v jazyce systému *Mathematica* např. na ETH v Curychu (Švýcarsko) a Illinoisské univerzitě v Champaign-Urbana (USA). Učitelé schopnosti a možnosti programování ocení zejména při vytváření hromadných zadání domácích úkolů a písemných prací (lze například generovat individuální zadání každému studentovi, aby se zabránilo opisování, a zároveň pro učitele generovat řešení pro snadnou opravu).

Jazyk systému Mathematica je navržen tak, že umožňuje velmi snadnou manipulaci s grafickými objekty. Využití možností grafického programování vede k lepší prezentaci probraného učiva. Lze velmi jednoduše vytvářet animace např. u funkčních závislostí grafu funkce a změny parametru.

Nad jádrem systému *Mathematica* existuje několik nadstaveb lišících se cílovou skupinou uživatelů a cenou. Každý z níže uvedených produktů zvyšuje efektivitu a pestrost výuky a je vhodný pro všechny typy škol. Vzhledem k tomu, že software *Mathematica* je přítomen na většině univerzit a vysokých škol v České republice (a samozřejmě též v řadě jiných podniků), uplatní vaši studenti získané zkušenosti s používáním tohoto software i při dalším studiu a v práci.

Stručný popis jednotlivých produktů

Mathematica for the Classroom

Software je určen k výuce matematiky, fyziky, chemie, ekonomie, základů programování a teorie počítačů, základů kybernetiky a mnoha dalších předmětů. Zvládá symbolické i numerické výpočty, dvou a trojrozměrnou vizualizaci dat a skýtá kompletní programovací prostředí. Stejně jako u softwaru *Mathematica* ji lze využít pro výklad obtížnějších partií středoškolské matematiky.

Software *Mathematica* lze také použít k vytváření strukturovaných dokumentů zvaných zápisníky (*The Mathematica Notebook*) obsahujících speciální matematické symboly a grafiku včetně animací. Protože systém *Mathematica* lze instalovat pod operačními systémy Windows, Linux, Unix, McIntosh atd., je struktura těchto dokumentů navržena tak, že tyto dokumenty jsou nezávislé na platformě a může je sdílet více studentů, učitelů či kolegů (např. dokument napsaný v *Mathematice* doma pod systémem Linux lze v práci otevřít a editovat v *Mathematice* pod systémem Windows a studenti si jej mohou doma otevřít a editovat třeba v *Mathematice* pod systémem McIntosh). Zápisníky se osvědčují při prezentaci seminářů, přednášek a názorných ukázek (animace). Protože zobrazují tradiční matematický zápis, hodí se dobře k sestavování sylabů, testů a úloh, které se mohou buď tisknout, promítat dataprojektorem nebo rozesílat e-mailem. Dále se tyto úlohy dají řešit a sbírat elektronicky. Pokud studenti doma nedisponují sw *Mathematica*, mohou použít prohlížeč zápisníků *MathReader*, který lze volně získat z webových stránek firmy Wolfram; tento prohlížeč umožňuje editaci textu a příkazů, ale neumožňuje tyto příkazy zpracovávat.

S *Mathematica* for the Classroom lze vizuálně zvýraznit důležité pojmy za pomoci barevné grafiky a interaktivních cvičení vytvářených pomocí palet. Palety představují intuitivní způsob vytváření dokumentů a seminářů.

Vzhledem k tomu, že program je plně interaktivní, vede k aktivnímu přístupu ke studiu. Budete-li mít *Mathematica* for the Classroom k dispozici ve vaší počítačové laboratoři, vaši studenti získají prostředek zkoumání v oblasti matematiky, fyziky a také technických a ekonomických předmětů. *Mathematica* for

the Classroom prohlubuje proces výuky způsobem, jakým učebnice nedisponují. **Je to nejlépe obsáhlá verze software *Mathematica* určená středním školám.**

Mathematica CalcCenter

Je samostatný produkt určený učitelům i žákům. Je jakousi zjednodušenou verzí softwaru *Mathematica* (dal by se nazvat jakousi „*Mathematicou* Light“). Slouží jako numerická a částečně symbolická kalkulačka, jako soubor nástrojů pro provádění operací s vektory a maticemi, statistickou analýzu dat a grafického zobrazení průběhů funkcí a vizualizaci naměřených dat. Dále jej lze použít k psaní matematických a technických textů se speciálními matematickými symboly. Lze v něm omezeně programovat v rámci procedurálního a funkcionálního programování. Nejsilnější stránka softwaru *Mathematica*, což je logické programování a tzv. pattern-matching, je u tohoto produktu zablokována. Grafické možnosti jsou též částečně omezeny.

Mathematica CalcCenter je velmi snadno ovladatelný prostřednictvím palet (uživatel se naučí software ovládat během 10 minut), což ocení především počítačově méně zběhlí studenti a učitelé... Samozřejmě, že jisté matematické znalosti jsou podmínkou, nicméně znalost jazyka *Mathematica* podmínkou není. Celý produkt je dobře didakticky postaven.

Za zmínku stojí pěkně provedený převodník jednotek mezi systémem SI, britským a americkým systémem měr a různými historickými či exotickými měrovými systémy. Produkt je mimo jiné celkově vhodný pro výuku technických předmětů na učilištích a průmyslových školách.

The Mathematical Explorer

Je samostatný software pro ty, jimž je matematika koníčkem a zároveň fascinující vědou a výzvou.

Je to v podstatě interaktivní učebnice zabývající se do hloubky některými nejdůležitějšími matematickými pojmy a slučuje v sobě text, grafiku a vzorce ve formátu zápisník (*The Mathematica Notebook*, viz výše). Tato interaktivní učebnice je psána velmi poutavou formou a student v ní nalezne souvislosti mezi matematikou a běžným životem, jako například souvislost mezi teorií čísel a ochranou dat v internetu, čísly kreditních karet, ISBN (celosvětová identifikace knižních titulů) a VIN (celosvětová identifikace aut); mezi Hilbertovou křivkou beze zbytku vyplňující čtverec (na první pohled zcela neužitečná matematická konstrukce), problémem obchodního cestujícího a poštovní doručovací službou (nebo optimálním plánováním trasy na dovolenou); mezi matematikou a jinými vědami, jako například mezi diferenciálním počtem a archeologií.

Díky schopnostem jádra software *Mathematica*, *The Mathematical Explorer* umožňuje změnu parametrů v prezentovaných modelech a tím vede k aktivnímu studiu. Implementované Mathematica jádro umožní také realizovat mnohé

numerické a symbolické operace stejně, jako u produktu *Mathematica* for the Clasroom. Dále umožňuje práci se zvukem (tvorba, editace a přehrávání), animovanými sekvencemi (tvorba animovaných grafů apod.). Jednotlivé lekce pokrývají širokou škálu témat a obsahují podrobné informace, včetně velmi pěkně zpracovaného historického úvodu k jednotlivým oblastem matematiky a biografie význačných matematiků. Vhodný pro samostatné studenty, ale i pro učitele a zájemce o netradiční pohled na matematiku.

Calculus WIZ

Je samostatný produkt určený pedagogům i studentům. Obsahuje materiál pro standardní vyučování matematiky, semináře a cvičení, zejména vzorové příklady pro přípravu i řešení, která pokrývají většinu středoškolských témat; mimo jiné například: kuželosečky, polární souřadnice, parametrické rovnice, posloupnosti a řady, funkce jedné reálné proměnné a jejich grafy, limity, diferenciální a integrální počet, větu o střední hodnotě a její aplikace, nevlastní integrály, diferenciální rovnice (a mnoho dalších). Pro tato témata obsahuje nástroje umožňující automatický rozpis postupu řešení (jemnost rozpisu jednotlivých kroků závisí na tématu). Obsahuje také vzorové ukázky pro vyučující, jak tyto nástroje pro automatický rozpis řešení vytvářet. Podle těchto návodů si vyučující snadno vytvoří své vlastní nástroje pro generování postupu svých vlastních typových příkladů, případně si přizpůsobí míru detailů, do které chce v rozpise řešení zacházet.

Matematické koncepce oživuje trojrozměrnou grafikou a diagramy, které pomáhají lépe pochopit řešené problémy. Poskytuje pružná interaktivní řešení, která dovolují pouze zapsat problém a získat potřebnou odpověď po několika kliknutích, což umožňuje osvětlit i obtížnější problémy bez nutnosti provádět složité výpočty.

Student může program využívat jak pro opakování výkladu, tak i pro procvičování. Součástí programu je i sada úloh (dají se i editovat), které může student sám řešit a následně si nechat své řešení zkontrolovat počítačem. Obsahuje velice obsáhlou nápovědu, kde veškeré funkce jsou podrobně vysvětleny na řadě příkladů. Uživatel i s minimální jazykovou výbavou (angličtina) je schopen díky těmto ukázkám snadno pochopit ovládání programu. Celý produkt je dobře didakticky postaven.

Mathematica for Students

Je určen pouze studentům pro použití na jejich osobním počítači. Nová tlačítka a palety příkazů systému poskytují rychlý přístup k tisícům funkcí, vzorců a matematických symbolů pouhým najetím kurzoru a kliknutím. *Mathematica for Students* je ideální při studiu jakéhokoli oboru, který vyžaduje numerické a symbolické výpočty. Škola nemůže pořídit tento software pro své studenty. Tento software si mohou zakoupit studenti pouze ze svých prostředků.

Srovnání produktů firmy Wolfram Research

	Mathematica	*CalcCenter*	*Calculus Wiz*	*Math. Explorer*
Procedurální progr.	Ano	Ano	Ano	Ano
Funkcionální progr.	Ano	Ano	Ano	Ano
Deklaratívní progr.	Ano	Ne	Ano	Ano
Aritmetika	F, AP, Z, Q, Int	F, Z, Q (přichytávání)	F, AP, Z, Q, Int	F, AP, Z, Q, Int
Kontrola přesnosti	Ano	Ne	Ne	Ano
Řešení rovnic	Ano	Ano	Ano	Ano
Dif. Počet	Ano	Ano	Ano	Ano
Int. Počet	Ano	Ano	Ano	Ano
Dif. Rovnice	Ano	Ano	Ano	Ano
Lineární algebra	Ano	Ano	Ne	Ano
Num. kvadratura	Ano F, AP	Ano F	Ano F	Ano F, AP
Num. dif. Rovnice	Ano F, AP	Ano F	Ne	Ano F, AP
Num. lineární algebra	Ano	Ano F	Ne	Ano
Num. řeš rovnic	Ano	Ano F	Ano kromě AP	Ano
Num. optimalizace	Ano	Ano F	Ne	Ne
Diskrétní matematika	Ano	Ne	Ne	Ano – omezeně
Zpracování dat	Ano	Ano	m. nejm. čtverců	Ne
Statistika	Ano	Ano F	Ne	Ne

Vysvětlivky

Procedurální programování je programovací styl jako v jazycích FORTRAN, Pascal, C.

Funkcionální programování je programovací styl jako v jazyce LISP.

Deklaratívní programovací styl je styl v němž programátor nepíše program ve formě algoritmu, ale ve formě přepisovacích pravidel, která jsou aplikována na výrazy.

Tento způsob programování je vhodný pro realizaci symbolických výpočtů na počítači.

Příklad: zapíšeme-li v programu *Mathematica* tento program
`f[x+y]+1+Sin[x+2y]/.Sin[a_+b_]:> Sin[a]Cos[b]+Cos[a] Sin[b]`
dostaneme jako výsledek `f[x+y]+1+Sin[x]Cos[2y]+Cos[x]Sin[2y]`.
Použili jsme přepisovací pravidlo `Sin[a_+b_]:> Sin[a]Cos[b]+Cos[a]Sin[b]` na výraz `f[x+y]+1+Sin[x+2y]`. Zde `Sin[a_+b_]` je tzv. vzorek (Pattern), jemuž

ve výraze vyhovuje podvýraz `Sin[x+2y]`, kde `a=x`, `b=2y`, a dojde k přepisu tohoto podvýrazu výše uvedeným pravidlem. Tento způsob psaní programů je ideální prostředek pro provádění substituticí ve výrazech a úpravy výrazů. Shoda vzorku s podvýrazem je testována na základě syntaktické shody s přihlédnutím např. ke komutativitě sčítání. Kurz programování v systému *Mathematica* klade důraz na zvládnutí deklaratívního programovacího stylu.

Pojmem „přichytávání“ v programu CalcCenter rozumíme automatickou konverzi čísel dostatečně blízkých k nějaké matematické konstantě na symbol této konstanty, např. 3.141 592 653 589 793 se konvertuje na *Pi*. Totéž platí pro zlomky.

Aritmetika:	F	... IEEE Floating Point Arithmetics, závisí na procesoru
	AP	... sw ošetřená aritmetika nezávislá na hw
	Z	... celá čísla
	Q	... racionální čísla
	Int	... intervalová aritmetika

Ano X ... Operace jsou podporovány, ale pouze v aritmetice X z {F, AP, Z, Q, Int}.

Evaluace

Všechny výše uvedené sw produkty úspěšně prošly procesem evaluace a jsou zařazeny a **registrovány MŠMT ČR v Seznamu výukového a vzdělávacího software.**

Na evaluovaný výukový software lze **použít účelově vázané finanční prostředky MŠMT (SIPVZ).** Ověření o evaluaci naleznete na stránkách MŠMT ČR http://web26.e-gram.cz.

Akreditované vzdělávací kurzy

Pro komplexnost naší nabídky evaluovaného software pořádáme také v rámci DVPP akreditované vzdělávací kurzy pro učitele matematiky na středních školách, které jsou zaměřeny na využití software *Mathematica* s ohledem na obsah učiva v předmětu matematika na různých typech středních škol.

Aktuální termíny kurzů se pravidelně zveřejňují na webové adrese

http://www.mathematica.cz./akce.php,

kde se lze přihlásit on-line. V současné době pořádáme tyto kurzy:

***Mathematica* – základy práce s programovým systémem**
Úvodní kurz

***Mathematica* – programování v systému**
Předpokládá absolvování úvodního kurzu nebo znalost programového systému *Mathematica*

***Mathematica* – grafické možnosti programového systému**
Předpokládá absolvování kurzu programování nebo dobrou znalost programování v systému *Mathematica*

Využití sw *Mathematica* ve výuce
Tento kurz je věnován pouze software *Mathematica* CalcCenter

Dodavatel:

ELKAN, spol. s r. o.
V Tůních 12
120 00 Praha 2
Tel.: 221 999 100
Fax: 224 999 101
E-mail: vzak@elkan.cz
www.mathematica.cz

Výrobce:

WOLFRAMRESEARCH
www.wolfram.com

Wolfram Mathematica CalcCenter 3™

Výkon Mathematiky, jednoduchost kalkulátoru

Mathematica CalcCenter 3 v sobě spojuje oceněné rozhraní, se kterým se uživatel naučí pracovat během 10 minut, s klíčovými prvky systému *Mathematica*® Professional, který je jedničkou v oblasti počítačové algebry. Program umožňuje zpracování velkého množství dat, provádí analýzu dat, statistiku, má rozsáhlé grafické možnosti a podporuje psaní technických zpráv.

Mathematica CalcCenter je ideální nástroj pro techniky, vědce, učitele, studenty nebo skupiny, které potřebují rychlá a spolehlivá řešení obtížných technických problémů.

Jedno prostředí, jeden dokument – a jeden systém – vyřeší každý vážný problém na pár kliknutí.

Mathematica CalcCenter kombinuje výpočetní sílu se snadným ovládáním.

HLAVNÍ PŘEDNOSTI

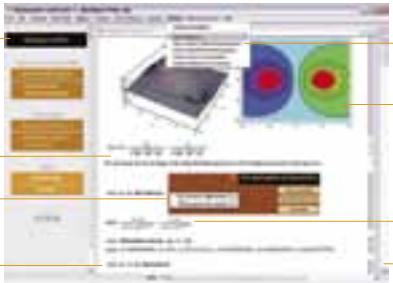
- InstantCalculators™ pro 500 druhů bezprostředních výpočtů.
- SmartPlot automaticky upraví měřítko Vašich os a vybere nejvhodnější typ zobrazení.
- Používá stejné osvědčené algoritmy jako *Mathematika* Professional.
- Kompatibilní s *Mathematikou* Professional.
- Text, grafika, vstupy, výstupy a matematické vzorce v jednom dokumentu.

Více informací najdete na www.mathematica.cz/produkty/calccenter

Wolfram *Mathematica* *CalcCenter*™ 3

Výkon Mathematiky, jednoduchost kalkulátoru

Pracovní prostor *Mathematiky CalcCenter*



Možnost přizpůsobení každé funkce dle přání uživatele.

Interpretuje vstupy ve formě tradičního matematického zápisu.

Unikátní okamžité kalkulátory (InstantCalculators™) používají srozumitelnou angličtinu, pomocí které Vás provedou Vašimi výpočty.

Práce s reálnými nebo komplexními čísly.

V menu hledá funkce, které potřebujete.

Generuje 2D a 3D grafiku a animace.

Produkuje editovatelnou sazbu.

Vytváří interaktivní technické zprávy, které může sdílet více lidí on-line nebo je možné je vytisknout.

Charakteristiky *Mathematiky CalcCenter*

Základní matematika
Aritmetické, logaritmické a exponenciální funkce ▪ Trigonometrické a hyperbolické funkce ▪ Komplexní čísla ▪ Besselovy funkce ▪ Chybové funkce ▪ Čísla ▪ Kombinatorické funkce

Algebra
Manipulace s výrazy ▪ Trigonometricko-exponenciální konverze ▪ Zjednodušení výrazů

Kalkulus
Numerické a symbolické integrování a derivování ▪ Součty a součiny ▪ Rozšiřování mocninových řad

Operace s maticemi a daty
Operace s daty ▪ Import/export dat ▪ Standardní maticové typy ▪ Regrese ▪ Nástroje pro manipulaci s daty ▪ Interpolace ▪ Rychlá Fourierova transformace (FFT) ▪ Vlastní vektory a vlastní hodnoty ▪ Výpočet frekvencí

Grafika
Grafy ▪ Grafy v logaritmickém měřítku ▪ Vrstevnicové grafy ▪ 3D grafy ▪ Sloupcové diagramy ▪ Koláčové diagramy ▪ Grafy hustot ▪ Grafy v polárních souřadnicích ▪ Zobrazování nerovností

Statistika
Diskrétní rozložení ▪ Spojitá rozložení ▪ Hustoty ▪ Náhodná čísla

Nástroje pro řešení rovnic
Řešení algebraických, lineárních a diferenciálních rovnic ▪ Hledání kořenů ▪ Hledání minima (optimalizace)

Uživatelské definice
Flexibilní definice ▪ Cykly ▪ Podmíněné příkazy ▪ Knihovny funkcí

Jednotky a konstanty
Konverze mezi libovolnými složenými jednotkami ▪ Konverze na SI nebo základní jednotky

Charakteristiky rozhraní a nápovědy
SmartPlot ▪ Prohlížeč nápovědy ▪ InstantCalculators™ ▪ Ovládání funkcí ▪ Poznámky k definicím ▪ Automatická korekce vstupů

Charakteristiky dokumentu
Textové styly ▪ Tiskové předlohy ▪ Tradiční matematické vstupy a výstupy ▪ Uzamčené oblasti ▪ Animace ▪ Sázení matematických textů ▪ Speciální znaky

Všeobecné charakteristiky

Numerické a symbolické výpočty a manipulace s maticemi

Menu a tlačítkové rozhraní

Použití nejrychlejších a nejpřesnějších numerických matematických knihoven *Mathematiky*

Obsahuje více než 500 funkčních šablon ve srozumitelné angličtině, které můžete vyplnit a ihned obdržet výsledek

SmartPlot automaticky poskytne nejlepší zobrazení pro Vaše funkce nebo data

Automatická korekce vstupů – pokud *Mathematica CalcCenter* neporozumí Vámi zadanému vstupu, sám navrhne vhodnou možnost

Rozhraní notebooku *Mathematiky* Vám umožní zdokumentovat Vaši práci tak, jak probíhá, včetně sázení matematických textů, grafiky…

Zabudovaná kontrola pravopisu

Technické požadavky

Mathematica CalcCenter je k dispozici pro Windows 98 a novější a pro Mac OS X.

Více informací najdete na **www.mathematica.cz/produkty/calccenter**

WOLFRAMRESEARCH

ELKAN

ELKAN, spol. s r.o.
Výhradní distributor pro Českou republiku a Slovenskou republiku
V Tůních 12 ▪ 120 00 Praha 2 ▪
Tel.: +420 224 999 100 ▪ Fax: +420 224 999 101
www.elkan.cz ▪ vzak@elkan.cz

© 2005 Wolfram Research, Inc. *Mathematica*® je registrovaná obchodní značka a *CalcCenter* a InstantCalculator jsou obchodní značky firmy Wolfram Research, Inc. Všechny ostatní obchodní značky jsou vlastnictvím příslušných vlastníků. *Mathematica* nemá žádnou spojitost s Mathematica Policy Research, Inc. ani s MathTech, Inc.

MKT2023 321502 0605.jas

10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol

Editoři: Miroslav Lávička, Bohumír Bastl, Marie Ausbergerová, 2006

Sazba: Miloš Brejcha, Vydavatelský servis
Sazba v LaTeXu z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$-font

Vydavatel: Vydavatelský servis,
Republikánská 28, Plzeň

1. vydání

Plzeň 2006

1983: 1+1= Mariánské Lázně

1985: 1+1= Mariánské Lázně

1988: 1+1= Mariánské Lázně

1992: 1+1= Žinkovy

1995: 1+1= Mariánské Lázně

1998: 1+1= Mariánské Lázně

2000: 1+1= Mariánské Lázně

2002: 1+1= Prachatice

2004: 1+1= Srní

2006: 1+1= Srní

200?: 1+1= ?

PLZEŇ 2006