9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol

Pořadatelé konference:

JČMF – matematická pedagogická sekce
Česká matematická společnost, sekce JČMF
JČMF – pobočka Plzeň
Katedra matematiky FAV ZČU

11.–13. listopadu 2004
Srní

Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň
Editoři: Marie Ausbergerová, Jarmila Novotná, 2004
ISBN 80-86843-01-7

Obsah

Předmluva 9

Plenární přednášky 11

Pavel Drábek
Úroveň vzdělanosti aneb Stav výchovy studentů v Česku 13

Jiří Holenda
Hodnocení kvality řízení univerzit z pohledu EUA 23

Jiří Sgall
Pravděpodobnostní algoritmy 33

Příspěvky v sekcích 35

Iva Berčíková
Jak hodnotit skupinové vyučování 37

Helena Binterová
Počítačem podporovaná výuka a zpětná vazba 39

Daniela Bittnerová
Anglická výuka matematiky na UNisa (Porovnávací studie) .. 43

Emil Calda
Šestačtyřicet let před tabulí 49

Jana Coufalová
Rámcové vzdělávací programy a integrace v přípravě učitelů . 55

Jaroslav Černý
Matematika a studium technických oborů 61

Petr Dvořák
Použití počítačů na ZvŠ 67

Eduard Fuchs, Helena Binterová
O jednom multimediálním textu 69

Petr Girg
PUMA – nástroj pro náročné vědecko-technické výpočty i výuku na dosah ruky (s mobilem) 73

Jana Horodyská
Warming-up aktivity v hodině matematiky 77

Jaroslav Hora
Eliminace kvantifikátorů v reálně uzavřených tělesech 83

Alena Hošpesová
Experimentování v matematickém vyučování a tabulkové procesory 89

Antonín Jančařík
Algoritmy ve výuce matematiky 95

Vladimír Jehlička, Pavla Jindrová, David Zapletal
Využití ICT ve výuce matematiky pro bakaláře 99

Marika Kafková, Pavel Tlustý
Testování a matematika 107

Michaela Kaslová
Komunikace na 1. stupni ZŠ – úlohy přejaté ze zahraničí a jejich úskalí 111

Jan Kašpar
Grafické kalkulačky ve výuce matematiky, program TI InterActive! 119

Renata Klufová
E-learningový systém e-Task ve výuce matematických základů geoinformatiky 125

Milada Kočandrlová, Hana Lakomá
Projekt – samostatná práce studenta 133

Alena Kopáčková
Úlohy posilující funkční myšlení 139

Lilla Koreňová
Niektoré modely využitia ClassPadu v vyučovaní stredoškolskej matematiky 147

Monika Kováčová
Programový systém MATHEMATICA vo výuke matematiky, alebo niekoľko pohľadov na konkrétne aplikácie 153

Jan Krtička
Modelování řezů geometrických těles v programu DesignCAD Pro 2000 159

Josef Kubeš
Užití výpočetní techniky v hodinách matematiky na gymnáziu 163

Marie Kubínová
Jak připravit učitele matematiky na změny v jeho edukačním stylu 167

František Kuřina
Budoucnost vyučování matematice a současná reforma 175

Miroslav Lávička
CAGT aneb Počítačová podpora výuky geometrie na ZČU v Plzni 183

Pavel Leischner
Příprava budoucích učitelů na využívání Cabri geometrie při výuce matematiky 191

Josef Molnár
Ke klíčovým kompetencím v učebnicích matematiky pro ZŠ . 197

Jarmila Novotná, Marie Hofmannová
Strategie učení při výuce metodou CLIL 203

Jan Ostravský
Tvorba a evaluace přijímací zkoušky z matematiky na FaME ve Zlíně 209

Karel Otruba
Kamínky a balvany 217

Karel Pecka
Matematika čtená u počítače 223

Alena Pelantová, Jarmila Novotná
Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh? 229

Jaroslav Perný
K dalšímu vzdělávání učitelů matematiky 237

Šárka Pěchoučková
Prvňáčci a matematika 243

Jiří Potůček
Stručná historie přípravy učitelů matematiky v českých zemích 249

Otakar Prachař
Hodnocení studijních výsledků v matematice na vysoké škole 255

Magdalena Prokopová
Konstruktivistické přístupy ve výuce algebry budoucích učitelů 259

Ludvík Prouza
Některé zkušenosti s výukou matematiky ve strukturovaném studiu na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice 267

Jarmila Robová
Aplikace počítačů ve výuce geometrie 275

Filip Roubíček
Geometrické kompetence a jejich hodnocení ve vyučování matematice 281

Jan Složil, Šárka Cviková, Šárka Švábová, Zdeňka Šimonová
Praha plná čísel (matematika, kde byste ji nečekali) Ukázka využití projektu ve vyučování matematice (v cizím jazyce) . . 285

Kristína Sotáková
Skúsenosti s počítačom podporovanej výučby geometrie na základnej škole 293

Miroslav Staněk
Testy – informace pro každého 301

Marek Šulista, Vivian Baravalle
Implementace CLIL ve výuce finanční a pojistné matematiky 309

Marie Tichá, Alena Hošpesová, Jana Macháčková
Kompetence učitele a akční výzkum ve vyučování matematice 315

Vladislav Tomášek
Vyučování matematice v sedmi zemích – videozáznamy 323

Dana Tržilová
Úvod do finanční matematiky prostřednictvím Excelu 329

Marek Vaďura
Maple ve výuce matematiky a jeho využití při řešení obyčejných diferenciálních rovnic 335

Jiří Vaníček
Zkušenosti ze školení učitelů v používání počítače při výuce matematiky 343

Jaroslav Zhouf, Naďa Stehlíková
Budoucí učitelé matematiky a souvislá pedagogická praxe . . . 349

Seznam účastníků 359

Předmluva

Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol představuje pro nás vrcholné diskusní fórum, kterého se účastní lidé bytostně zainteresovaní na řešení problémů spojených s vyučováním matematice a obecně i s předáváním matematických poznatků novým generacím. Toto fórum je ojedinělé, nevím o tom, že by v jiné zemi existovala podobná periodicky organizovaná reprezentativní konference zabývající se vyučováním matematice. Předkládaný sborník je věnován Setkání v pořadí již devátému. To samo svědčí o jeho životnosti, potvrzuje to i skutečnost, že z původního čtyřletého intervalu mezi jednotlivými Setkáními jsme přešli na dvouletou periodu. Zájem je stále neutuchající, počet účastníků IX. Setkání se blíží dvěma stovkám, to je prakticky dvojnásobek vzhledem k prvním ročníkům. Měli jsme před několika lety obavy z toho, že se nám nepodaří překonat potíže související s financováním Setkání. Je pravda, že na pobyt v Mariánských Lázních, v nichž Setkání zpočátku probíhalo, už nedosáhneme. Ceny pobytu rostou exponenciálně, zatímco platy učitelů a dotace do školství připomínají spíše funkci konstantní. Zájem o Setkání to však nijak nezmenšilo, účastníci se těší víc na odborný program než na atraktivní prostředí.

Jsme rádi, že se Setkání účastní pravidelně i zástupci Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy jako vrcholného orgánu státní správy ve školství. Potvrzují tak svůj zájem na růstu úrovně matematického vzdělání v českých školách. Učitelé a didaktici matematiky mají na druhé straně možnost vyjasnit si některé otázky spojené s jejich prací. V současné době jsou podobné konfrontace názorů a zkušeností nezbytné především z toho důvodu, že vstupujeme do období reforem, které by vyučování matematice měly zasáhnout velmi citelně. Základní a střední školy se připravují na zavedení Rámcových vzdělávacích programů, vysoké školy připravují strukturované učební plány, které přispějí k řešení otázek vysokoškolské přípravy ve sjednocené Evropě. Zvlášť náročná bude reforma týkající se základních a středních škol. Jejím hlavním cílem je totiž úsilí o změnu postojů učitelů. Tvorba Školních vzdělávacích programů a možnost osobně se spolupodílet na pojetí práce školy i na prosazování vlastních představ a zkušeností v hodinách matematiky by měla, podle našeho názoru, aktivizovat předmětové komise matematiky i jednotlivé učitele k hledání a zavádění nových cest ve své práci. Pokud se toto nepodaří, půjde jen o další státní peníze vyhozené oknem.

Základním předpokladem, po kterém voláme, je ale jednak důkladná a kvalifikovaná příprava učitelů, jednak dostatečná zásoba výzkumem prověřených doporučení, návodů, metodických pokynů, sbírek úloh, diagnostických nástrojů a dalších zdrojů poučení. Připomeňme jenom internetové portály, které můžeme sledovat v jiných evropských zemích. Ještě jeden předpoklad bych rád připomněl, opírá se o moje konkrétní zkušenosti ze setkání s učiteli: Cílem nemůže být sepsání několika desítek stran Školního vzdělávacího programu, cílem musí být vytvoření podmínek pro to, aby učitelé na škole *diskutovali o své práci* a měli o to zájem, protože budou vidět uplatnění výsledků této diskuse. Jestliže neosvícený ředitel školy bez diskuse nařídí jednotnou formu hodnocení žáků a prosadí si poslušnost celého sboru, pak je konec s učitelovou tvořivostí, konec s reformními snahami usilujícími o změnu učitelových profesních postojů.

Jsem přesvědčen, že IX. Setkání přispěje k řešení problémů, z nichž některé jsem krátce popsal, a že bude představovat důstojné vyvrcholení celé řady akcí pořádaných každoročně Jednotou českých matematiků a fyziků ve prospěch vyučování matematice v naší zemi.

RNDr. Václav Sýkora, CSc.

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Naše školy v evropském vzdělávacím prostředí

Úroveň vzdělanosti aneb Stav výchovy studentů v Česku

Pavel Drábek

Po téměř třiceti letech pedagogického působení na vysoké škole cítím nutnost vyjádřit se k jevům, které se při výchově studentů v dnešní době vyskytují a podle mého názoru mají neblahý vliv na celkovou úroveň vzdělanosti. Úvodem chci zdůraznit, že toto vystoupení vyjadřuje můj osobní pohled a zkušenosti. V některých případech jsou moje názory stejné jako názory řady mých kolegů a kolegyň, některé se pokusím doložit fakty. Připouštím, že v jistých věcech se mohu mýlit.

Vnějšího pozorovatele naší společnosti by mohly překvapit některé *zdánlivé paradoxy*, které je možné zformulovat například takto:

- Přestože se zejména před volbami objevuje stále více proklamací a prohlášení politických subjektů o prioritách školství, zdá se, že tím méně peněz do školství plyne, tím více jsou pedagogické sbory přestárlé a tím více „mladých mozků“ odchází do zahraničí.
- Přestože pedagogické fakulty vychovávají stále více absolventů – kvalifikovaných učitelů, zdá se, že dělat tuto práci chce stále méně mladých lidí a učí řada důchodců a nekvalifikovaných sil.
- Čím více se přibližujeme k zemím západní Evropy a ostatním „rozvinutým zemím“ světa, zdá se, že tím je průměrná úroveň absolventů středních a vysokých škol nižší.
- Čím je „dokonalejší“ náš vzdělávací systém a čím jsou „flexibilnější“ naše studijní programy, zdá se, že tím menší jsou odborné znalosti našich studentů.
- Čím větší máme procento vysokoškolsky vzdělaných lidí, zdá se, že tím nižší je úroveň vzdělanosti populace.
- Čím více možností uplatnění se nabízí absolventům vysokých škol, zdá se, že tím méně studentů je ochotno na sobě tvrdě pracovat a naopak hledají „cestu nejmenšího odporu“.

- Přestože se do prvních ročníků vysokých škol přijímá mnohonásobně více studentů než dříve, zdá se, že počet úspěšných absolventů zdaleka tak rychle nenarůstá.
- Čím „dokonalejší“ je vybavení našich poslucháren, čím více techniky a výukových pomůcek je k dispozici a čím jsou posluchárny větší, zdá se, že tím méně si z nich studenti odnášejí, tím méně jsou v posluchárnách soustředěni na výklad a tím menší mají kontakt s učitelem.
- Čím více je dostupné literatury, zdá se, že tím méně studentů literaturu používá a pracuje s ní.
- Čím větším množstvím informací jsou studenti obklopeni a čím snáze je mohou získat, zdá se, že tím méně jsou schopni je smysluplně třídit a vybírat si pro sebe ty podstatné.
- Čím je naše společnost technologicky vyspělejší, zdá se, že tím menší je zájem o exaktní a teoretické obory.

Otázka zní: „Jedná se skutečně o paradoxy? Nebo jsou výše uvedená pozorování logickým a přirozeným důsledkem našeho počínání?“ Jsem bohužel přesvědčen o tom, že nejde o žádné záhady a že pokud se radikálně nezmění postoj společnosti a zejména její politické reprezentace k vědě a vzdělávání, budou se problémy nadále prohlubovat a vyostřovat.

Myslím, že základem pro východisko ze současné nedobré situace je popis problémů, a pokud možno pravdivé *konstatování stavu*. Podle mého názoru se na něm podepsala řada faktorů, z nichž některé mají kořeny hlouběji v minulosti, jiné jsou produktem posledních deseti až patnácti let. Pokusím se popsat některé z nich.

Jako první faktor bych zmínil *necitlivou aplikaci principu tržního chování* ve školství. Přestože základní myšlenka podpořit školy, o které je zájem, je dobrá, současný stav není dobrý a důvody tohoto nedobrého stavu spočívají mimo jiné v následujících skutečnostech:

- Výkon školy se počítá mimo jiné pomocí koeficientu „počet studentů na jednoho učitele“.
- Koncentrace přednášek do stále větších poslucháren.
- Snaha škol získávat studenty „za každou cenu“ a udržet je na škole i za cenu snižování požadavků na jejich znalosti.
- Zřizování „filiálek“ různých fakult mimo univerzitní centra.

Ze své zkušenosti považuji v procesu učení za nejdůležitější *osobní kontakt učitele se studentem.* Možnosti, které nabízí v současné době rozvoj informační společnosti, hrají nesporně důležitou úlohu, nicméně osobní kontakt s učitelem je podle mne nezastupitelný. Proto s koeficientem počtu studentů na učitele musíme zacházet velmi opatrně a při překročení jisté kritické hranice se zamyslet nad tím, zda je kvalita výuky ještě únosná.

Jistě také jinde než u nás, na Západočeské univerzitě, mají posluchárny pro 300 a více studentů, vybavené moderní audiovizuální technikou, posuvnými tabulemi atd. Podle mého názoru jsou takové posluchárny vhodné k pořádání nejrůznějších shromáždění, prezentací firem, školení nebo přednášek, u kterých není nutné příliš psát na tabuli. Na druhou stranu však přednášející zvyklý přednášet „tvůrčím způsobem“, který si vyžaduje neustálý kontakt se studenty, je odsouzen do potupné role „promítače“ a „moderátora“. O kontaktu se studenty nemůže být ani řeč, posluchači v tomto počtu mají pocit, že mohou kdykoli do posluchárny přijít a zase z ní odejít, volně se mezi sebou při přednášce bavit a podobně. Je to proto, že taková posluchárna se pro uvedený způsob přednášení nehodí, *množství studentů je nad kritickou hranicí.*

Současný způsob financování vysokých a jiných typů škol má za následek ještě jeden nedobrý jev, který může mít v budoucnosti neblahé důsledky. Školy se snaží získat co nejvíce studentů, přesněji „posluchačů“, kteří jsou ke studiu zapsáni. A ve snaze docílit také co největšího počtu absolventů dochází zcela přirozeně ke snižování požadavků na znalosti a tím i k celkovému poklesu vzdělanosti nových absolventů. Tzv. „boj proti propadovosti“, který zažili starší z nás, byl v sedmdesátých a osmdesátých letech motivován politickými důvody. (Jen aby nám, proboha, nepropadl student s „dobrým“ kádrovým profilem!) Dnes se s tímto jevem setkáváme znovu, je však motivován čistě ekonomicky. (Jen aby nám, proboha, nepropadlo moc studentů, kteří nesou škole finance!) Držet jistou úroveň si dnes mohou dovolit jen fakulty, které mají zajištěn přísun jiných finančních prostředků, např. na vědu a výzkum. Jak dlouho však toto bude možné při současném stavu podfinancování vědy a výzkumu na vysokých školách?

Co bylo výše řečeno, platí v plné míře i pro soukromé školy. Škola, která ekonomicky závisí na tom, kolik studentů na ni studuje a kolik má absolventů, nemůže být zároveň dostatečně náročná a nevěřím tomu, že

vychová absolventy vysoké odborné úrovně. Vždyť učitel, který by vyhodil studenta ze školy, by si zároveň tímto krokem snižoval plat. Ba co více, snižoval by zisk také svým nadřízeným, a to by mu jistě neprošlo, i kdyby nakrásně, veden svým svědomím, k takovému kroku sám sáhl. Nemám valného mínění o většině současných soukromých škol v ČR. Jejich zaměření se mi zdá příliš poplatné módním trendům a zdá se mi, že hlavním cílem není naučit studenty vnímat široké souvislosti daného oboru, ale za každou cenu je dovést k diplomu, na kterém je uveden obor, který obvykle v názvu obsahuje klíčová slova jako „byznys“, „management“, „řízení“ atd. a který je příslibem rychlého získání výnosného a dobře placeného místa. Na rozdíl od amerických soukromých univerzit, jejichž způsob financování je diametrálně odlišný a které si mohou dovolit vychovávat jenom málo vysoce kvalifikovaných absolventů, nepovažuji současné soukromé univerzity v ČR za přínos k úrovni vzdělanosti populace.

Nejnovějším „hitem“ se v důsledku boje o posluchače stalo zřizování tzv. „filiálek“ (poboček) fakult některých univerzit, které jsou zakládány mimo univerzitní centra. Místní orgány, zastupující většinou okresní město, tyto aktivity z pochopitelných důvodů podporují a fakulty argumentují takto: „Když tam filiálku nezřídíme my, zřídí ji fakulta z jiné univerzity a my tak přijdeme o studenty a potenciální absolventy.“ (A potažmo i o peníze.) Toto však není ten nejšťastnější způsob, kterým by měla univerzita přispívat k rozvoji regionu. Místo, kde filiálka vznikne, jistě získá tím, že se v něm udrží mladí lidé. Jak to ale vypadá s důsledky pro úroveň vzdělanosti? Podle mého názoru velmi špatně. V tomto případě sice nejde o velké skupiny posluchačů, z mých zkušeností jde vždy řádově o cca 50 lidí. Jejich výuka je však koncentrována do bloků a tak například jeden den v týdnu musí posluchači absolvovat 6 až 7 hodin matematiky, přednášek a cvičení dohromady, jiný den zase jiný předmět atd. Jak asi vypadá efektivita takového učení? Vědomosti se nedají do hlavy nalít jako benzín do nádrže auta!

Sledování krátkodobých ekonomických cílů nás tak žene do pasti. Nelze se divit tomu, že univerzity budují velké posluchárny, katedry do nich koncentrují výuku a fakulty zakládají filiálky v okresních městech. Na tom všem totiž v konečném důsledku závisí platy jejich učitelů, které jsou v dlouhodobě podfinancovaném školství v ČR, jak dobře známo, neslavné.

Dalším faktorem, o kterém chci hovořit, je *profesní příprava učitelů* a s tím související úroveň přípravy studentů a žáků. Jaké je současné *postavení učitele* (nejen vysokoškolského) ve společnosti? Jsem přesvědčen o tom, že v našem školství dlouhodobě ubývá osobností a přibývá „tlumočníků osnov“. (Tento výrok neznamená, že tlumočníkem osnov je dnes každý učitel!) Současný stav má svoje kořeny hluboko v minulosti a jeho důsledkem je, že učitel živoří na okraji společnosti, která jeho práci hodnotí podprůměrně. Na základní a střední škole je vystaven tlaku rodičů a žáků na jedné straně a někdy i libovůli ředitele, který v mnoha případech představuje doslova jeho „chlebodárce“, na straně druhé. Veřejnost, zejména rodiče, mají většinou zájem o místní školu, podporují její rozvoj a vytvářejí pozitivní tlak. Někteří rodiče však mají často svérázné a zkreslené představy o poslání školy a pokud je navíc ředitel zbabělec, jehož jediným kritériem je neztratit jejich přízeň a nepřijít tak o přísun dalších žáků, není třeba dále komentovat, v jakých podmínkách mnozí učitelé pracují. Připočteme-li k tomu zvyšující se agresivitu žáků a kriminální chování některých z nich, je s podivem, že toto povolání ještě vůbec někdo vykonává. Obávám se, že právě na to hřeší politická reprezentace a svým laxním přístupem k věci tak vyhrocuje problém do krajnosti.

Když pedagogické fakulty „plošně“ dostaly právo vychovávat středoškolské učitele, což se stalo někdy před 25 lety, začalo posléze docházet ke snižování úrovně znalostí uchazečů o studium na vysoké škole. Za nedostatek považuji to, že budoucí učitel na střední a někdy i na vysoké škole tak po dobu svého studia vůbec nepřichází ve svém oboru do styku s prostředím, ve kterém se v dané oblasti tvůrčím způsobem pracuje. Je velký rozdíl mezi tím jistý předmět pouze učit, nebo v něm i vědecky bádat. Ten, kdo nepoznal, co to znamená posunout laťku poznání o malý kousek dopředu, kdo neví, kolikrát je třeba se zmýlit, abychom konečně našli pravdu, nemůže přesvědčivě a s přehledem studenty pro svůj předmět plně získat. Takový učitel se bude vždy dožadovat podrobných osnov, protože bez nich se bude cítit bezradný. A to je špatně!

Již dlouhou řadu let se na pedagogické fakulty hlásí studenti ne proto, aby po absolvování fakulty vykonávali učitelskou profesi, nýbrž proto, aby získali vysokoškolský titul, který jim usnadní cestu za jejich kariérou v jiné oblasti. V řadě případů jde „o cestu menšího odporu“, neboť vystudovat podobný obor jinde může být náročnější a pracnější. Tato slova nejsou útokem na pedagogické fakulty. Nejde ani o plošné zobecňo-

vání, které by se mělo týkat všech fakult, značné rozdíly jsou jednak mezi nimi i mezi jednotlivými katedrami na nich. Jde pouze o konstatování (smutné) skutečnosti.

Logickým důsledkem výše uvedeného je fakt, že *příprava studentů* ze základní a střední školy je na *stále nižší úrovni.* Toto osobní pozorování mám potvrzeno nejen od svých nejbližších kolegů matematiků, ale i od jiných kolegů napříč různými obory. To se týká jak všeobecného vzdělání, tak základů slušného vychování. Je zřejmé, že v posledních několika dekádách ve *výchově mladé generace selhala rodina.* To, co bylo pro mladé lidi dříve samozřejmostí, dnes již zdaleka není, neboť při jejich výchově jim nikdo nevštípil do hlavy někdy i ta nejzákladnější pravidla společenského chování. Připadá mi krajně nedůstojné, až trapné, když musím na první přednášce studenty na univerzitě upozorňovat na to, že když se svobodně rozhodnou na přednášku přijít, budou se pak podle toho i chovat, to znamená, že nebudou v posluchárně pít, jíst, bavit se mezi sebou a telefonovat. Některým studentům chybí základní slušnost a jsem si jist, že v takové míře jako dnes se to dříve neprojevovalo. Mám vážné obavy, že zavedení školného by tyto problémy ještě více prohloubilo. Mnozí studenti by si mysleli, že když si „zaplatí za studium“, mohou si dělat ve škole, co chtějí, a učitel je povinen skákat tak, jak oni budou pískat. Dovednosti žáků a studentů na tom nejsou o nic lépe než výše zmíněné vychování. Studenti se neumí ústně ani písemně vyjadřovat. Ve školách všech typů převažuje výuka faktografie a jako způsob učení dominuje memorování. To je, mimo jiné, způsobeno trvalým poklesem odborné úrovně mnohých učitelů. Učit fakta a zkoušet fakta je mnohem snazší a pohodlnější, než učit souvislosti a zkoušet myšlenkové postupy. Jsem přesvědčen o tom, že existují učitelé, kteří pořádně svému oboru ani nerozumějí a studenty a žáky, kteří přicházejí s originálními řešeními problémů v horším případě trestají, v lepším případě ignorují. Studentům pak chybí základní dovedosti a návyky, schopnost rozeznat podstatné od nepodstatného a schopnost umět se učit. Často bloudí v množství informací jako australští domorodci mezi benzínovými pumpami a nejsou schopni se dobře orientovat. Z tohoto hlediska mi je jich líto, neboť jsou produktem systému, jehož parametry byly nastaveny před mnoha lety a nyní sklízíme jeho hořké plody. Na druhou stranu však mi jich přestává být líto v okamžiku, kdy přijdou na zkoušku zcela nepřipraveni a kdy zjišťuji, že nebyli ochotni si přečíst a naučit se i ty nejzákladnější věci, zdůrazňované na přednášce i ve skriptech. Čím dále tím častěji

chodí více studentů na řádný a první opravný termín zcela nepřipraveno, pouze „zkouší projít“ předmětem. Myslím, že na místě je otázka, zda dva opravné termíny pro každou zkoušku není příliš velkým přepychem. V zahraničí jsem se s tím setkal málokde! Ke snižování úrovně znalostí studentů přispívá také fakt, že z nedostatku času a financí postupně „odbouráváme“ ústní zkoušení a více zavádíme zkoušení písemné, resp. zkoušení formou testů. Kdysi jsme si od této formy zkoušky slibovali větší objektivitu. S jistým časovým odstupem si však myslím, že to není pravda, naopak jsem přesvědčen, že pro studenty to žádná výhoda není. Vím, že pro řadu mých studentů v minulosti byla zkouška poslední možností se něco naučit, někdy se právě u zkoušky studentovi v hlavě propojily klíčové souvislosti, což bylo „nad hodiny strávené samostatně se skripty“. To, že dnes si takovou péči o studenta nemůžeme z výše uvedených důvodů dovolit, je velká škoda.

Asi nejsilnějším faktorem, který nás přivedl k současnému stavu, je faktor *celospolečenský*. Proč by měli studenti na sobě tvrdě pracovat, připravovat se ke zkouškám a snažit se ve škole co nejvíce se naučit? Vždyť dnes a denně se přesvědčujeme o tom, že tvrdá a poctivá práce v naší společnosti není tou „správnou cestou“ k prosperitě a bohatství. A ten, kdo si to ještě myslí, je pokládán přinejmenším za podivína. O získání výnosného místa po absolvování školy nerozhodují výsledky studia. Ani všechny školy dohromady samy „nenarovnají“ pokřivený žebříček hodnot, který je nyní ve společnosti nastaven. Mohou zcela jistě přispět tím, že na jejich půdě nebude místo pro korupci, hodnocení studentů bude v maximální míře spravedlivé a bude odpovídat odvedené práci. Podfinancování vysokých škol však má (mimo jiné) za následek také skutečnost, že prospěchové stipendium je nízké na to, aby bylo pro studenty dostatečně silnou motivací k větší snaze dosahovat lepších výsledků.

Dalším faktorem, o kterém chci mluvit, je současný *stav vysokého školství v Česku*. Na úrovni vzdělanosti se jistě v budoucnosti projeví *masová implementace bakalářského studia*. V současné době sjednocování Evropy asi nebylo možné odmítnout tzv. „bolognskou deklaraci“ a budovat systém vysokého školství, který není kompatibilní se systémem v okolních zemích. Z našeho hlediska jde zřejmě o nezvratný proces a nemá smysl se mu bránit tím, že bychom zůstávali stranou od ostatních. Je však třeba vidět a jasně pojmenovat důsledky tohoto kroku kom-

plexně. Kromě těch pozitivních bude mít i negativní dopady. Je třeba si otevřeně přiznat, že dochází k posunu v úrovni znalostí absolventů. Tento posuv můžeme lapidárně vyjádřit například následujícím způsobem. Tzv. „vysokoškolák“ bude průměrně vzdělán tak, jako byl v minulosti tzv. „průmyslovák“. Je však třeba podotknout, že na řadě průmyslovek prošli absolventi také jistou praktickou průpravou, což o mnohých vysokoškolácích říci nelze. Nemám z této změny dobrý pocit a zdá se mi, že o něco přicházíme, že bychom mohli být v něčem první, kdyby... Je docela možné, že za nějakých deset let budeme po vzoru Němců nebo Francouzů zavádět zpátky to, co nyní opouštíme, neboť oni mezi tím přijdou na to, že cestou k prosperitě a rozvoji nejsou pouze „příznivé“ statistiky vysokoškolsky vzdělané populace, ale efektivní vzdělávací systém, produkující možná méně, ale o to lépe vzdělaných lidí.

Úroveň univerzity je dána především *úrovní habilitačních řízení, řízení ke jmenování profesorem a doktorského studia.* Současný stav, kdy o jmenování profesorem rozhodují vědecké rady jednotlivých univerzit, má za následek, že tato úroveň je značně rozdílná. Zatímco pedagogické schopnosti uchazeče může docela dobře zhodnotit komise na úrovni té které univerzity, s posouzením odborných schopností je to horší. Nelíbí se mi nejrůznější bodovací tabulky, které jsou v mnoha případech zavádějící. Pětičlenné habilitační a jmenovací komise mohou být zvoleny tak, že objektivita hodnocení odborné úrovně uchazeče je diskutabilní. Jisté pochybnosti jsou odůvodněné opět způsobem financování. Přepočet profesorů a docentů na celkový počet akademických pracovníků je jedním z faktorů, který „žene“ fakulty a univerzity k tomu, aby prosadily co nejvíce habilitací i za cenu jejich nižší kvality. S tím souvisí i řada habilitací některých kolegů na vysokých školách v zahraničí, jejichž renomé není dostatečnou garancí odpovídající kvality těchto habilitačních řízení. U profesora by měla být zaručena objektivita jeho odborné způsobilosti na celostátní úrovni. Může k tomu přispět znovuzavedení vědeckého titulu „doktor věd“, který je možné získat obhajobou disertační práce před některou z komisí, které byly zřízeny při Akademii věd ČR. Obávám se však, že některé univerzity budou tuto možnost zvýšení kvalifikace svých pracovníků ignorovat. Důvodů pro to budou uvádět několik: komise působí při Akademii věd, jejich existence není zakotvena v Zákonu o vysokých školách, nepokrývají potřebné spektrum oborů atd. Univerzitní pracoviště, která se dívají dále do budoucnosti však jistě této možnosti využijí.

Každé „správné“ vystoupení tohoto typu by mělo po kritice nabízet východiska nebo řešení. Obávám se, že v tomto případě to není tak jednoduché. Není to v rozsahu takové přednášky ani možné a kdybych se o to pokusil, zařadil bych se mezi ty, kteří svými „zaručenými recepty“ podstatnou měrou přispěli k současnému nedobrému stavu. Jak je patrné z mého předcházejícího vystoupení, současný stav je výsledkem dlouhodobého vývoje společnosti a v posuvu žebříčku jejich hodnot. Z této skutečnosti musí vycházet naše případné snahy o nápravu, navrhované změny či reformy. Zatím se mi zdá, že převážná většina nabízených východisek spočívala v „negaci minulého“. To není dobrý přístup. Vezměme například rušení osnov ve školách. Konečně skončit s memorováním a s přehnanou výukou faktografie je jistě velmi dobrá myšlenka. Je však zrušení osnov promyšleným krokem v době, kdy jsme po více jak 25 letech docílili toho, že na školách ubylo osobností a přibylo tlumočníků osnov? Co se změní ve výchově učitelů v souvislosti s takovým krokem? Nemělo by se začít trochu z jiného konce? To je příkladem toho, že věc není tak jednoduchá. Mám vážné obavy, že změny ve školství nejsou dostatečně promyšlené, přicházejí často ukvapeně a jsou nástrojem politického boje. Ve svém důsledku jsou tyto politické motivy stejně škodlivé jako krátkodobé ekonomické cíle.

Jako *moudrý postup* při hledání efektivnější vzdělávací soustavy u nás si představuji proces, který se bude řídit některými základními pravidly „selského rozumu“, která nejsou ani přinejmenším nová:

- Postupovat raději pomalu než rychle. Připomenul bych zde známý citát J. A. Komenského: „... veškeré to kvaltování toliko jen pro hovado dobré jest.“
- Méně znamená více. To se týká prováděných změn, kterých ať je raději méně, ale jsou více promyšlené. To se ale týká i výchovy studentů a absolventů, kterých ať je raději méně, ale ať jsou o to kvalitnější.
- Zlepšovat jen to, co bylo špatné. Pokrokem je i zachování dobré tradice a nikoli jen negace minulého.
- Otevřít se světu, ale spoléhat více na svůj přístup a „nekopírovat od sousedů“ to, co vede ke snížení naší kvality.
- Nedovolit, aby se experimentování se vzdělávací soustavou stalo prostředkem k uspokojování osobních a politických cílů.

- Nedovolit, aby byl učitel zatížen administrativou, umožnit mu celoživotně se vzdělávat a zabezpečit jeho jasný kariérní řád, který by vedl k důstojnému ohodnocení jeho kvalifikované práce.
- Když to nejde po dobrém, dát o sobě razantněji vědět, aby si společnost uvědomila, že prosperita v budoucnosti závisí na kvalitě naší práce dnes.

Na závěr bych si dovolil předložit několik drobných námětů na to, o co bychom mohli začít usilovat hned. Zmíním se o matematice, ale myslím, že totéž platí i pro řadu jiných oborů.

Za prvé bychom se měli pokusit o vymezení základních dovedností, které by měl žák základní školy po jejím absolvování v matematice ovládat. Stejně tak bychom měli vymezit základní dovednosti, které by měl ovládat absolvent střední školy, ale zde bychom se měli ještě zaměřit na základní myšlenkové postupy. To považuji za velmi důležité zejména proto, abychom skoncovali s představou, že matematika je souborem vzorečků a pouček, které je třeba se učit zpaměti a které spolu vzájemně nesouvisí. Svobodu škol pak vidím v tom, že záleží na jejich učitelích a zvolených metodách, jak těchto cílů dosáhnout.

Za druhé bychom měli seriózně zvážit, jak vychovávat učitele, kteří by tyto cíle úspěšně realizovali. S tím úzce souvisí vypracování promyšleného systému celoživotního vzdělávání učitelů, jejich postgraduálního studia a kariérního řádu.

Za třetí bychom měli na univerzitách více pozornosti věnovat smysluplné koncepci bakalářského studia. Zatím mám pocit, že bakaláře považujeme pouze za mezistupeň mezi magistrem nebo inženýrem a jejich odborný profil je na řadě škol dost nejasný. Z vlastní zkušenosti však vím, že vytvořit takovou koncepci není snadným úkolem.

Je jistě řada dalších věcí, které je možné dělat hned. Protože jsem notorický optimista, věřím tomu, že se brzy „odrazíme ode dna“ a ve vzdělávání populace budeme dosahovat lepších výsledků.

Hodnocení kvality řízení univerzit z pohledu EUA

Jiří Holenda

„Časy se mění a my s nimi.“

1 Úvod

Časy se mění a my s nimi. Jen si nejsem jist zda my pedagogové se měníme dostatečně rychle. Letos je tomu 10 let od vzniku institucionálního evaluačního programu Asociace evropských univerzit (EUA). Brzy pro vzniku tohoto programu (viz kapitola III) jsem se stal členem evaluačních týmů a postupně jsem navštívil univerzity v Lisabonu, Brusselu, Eichstädtu, Patrasu, Záhřebu, Wroclavi, Bratislavě, Tuzle a Bihači. Pravidelně jsem každý podzim absolvoval semináře v Leuven, připravující evaluaci univerzit na příští rok. Zde se také vytvářely čtyřčlenné týmy expertů s tím, že člen týmu nesměl být ze země sídla „hodnocené“ univerzity a žádná dvojice expertů nesměla být ze stejné země. Složení čtveřic se každý rok měnilo, čímž jsem se seznámil s názory na problematiku kvality univerzit řady odborníků – praktiků, teoretiků z různých zemí Evropy. To mne částečně opravňuje k mému vystoupení na našem setkání. Protože převážná většina jednání je v EUA vedena v angličtině (popř. francouzštině), rozhodl jsem se některé části předloženého textu publikovat v originální podobě, abych je překladem nezatemnil.

Část týkající se evropského vzdělávacího prostoru zařazuji především z toho důvodu, že Boloňský proces není jen přechod na strukturované studium, jak si mnozí – podle mého soudu – myslí. Stav Boloňského procesu v Evropě se snaží postihnout publikace EUA – Trend 2003, o které se zmíním při svém vystoupení na 9. Setkání.

2 Univerzity nerozvíjejí svoji činnost ve vzduchoprázdnu

Univerzitní prostředí v 21. století velmi výstižně charakterizoval – z pohledu globalizace světa – Dr. Magrath na Salzburském semináři (leden 1999). Uvedl následujících osm faktorů, které ovlivňují univerzity bez ohledu na místo, tradice, běžně uplatňovanou praxi, případně záměry:

1. **Ekonomická provázanost mezi národy:** ekonomika každé země je stále více ovlivňována, ne-li přímo svázána s ekonomikami zemí celého světa. Velmi dramatickou ilustrací této skutečnosti je rychlý růst multinárodních korporací, jejichž loajalita je svěřována na akcionáře a ne na národy; jejich ekonomický vliv je nadnárodní.
2. **Směřování k demokracii** a zvláště pak k tržnímu mechanismu jako protikladu k direktivnímu řízení.
3. **Zdůrazňování zákaznictví**. Ve Spojených státech tak i po celém světě existuje trend uspokojování potřeb a naplňování zájmů „zákazníků“, ať jde o zboží či služby státní správy. Operativní filozofie zdůrazňuje – na prvním místě je zákazník. To platí stejně i v oblasti vzdělávání. Univerzity musí postupně stále více vycházet vstříc potřebám i požadavkům svých studentů – zákazníků, a to bez ohledu na zájmy pracovních univerzit.
4. **Významná restrukturalizace** světových (národních i mezinárodních) organizací i vládních systémů charakterizovaná decentralizací. Ta je ve shodě s obecným posuvem k tržnímu mechanismu, zákaznictví a šíření demokratických systémů.
5. **Jasný trend uvnitř organizací směrem k otevřenější méně hierarchické organizační struktuře.** Snaha je dát jednotlivcům a malým skupinám více nezávislosti a důvěry v plnění poslání jejich organizace.
6. **Fyzické a biologické prostředí.** To je globální ekologický problém přesahující národní hranice, ale právě tak i meze jednotlivých přednášených vědních oborů.
7. **Chápání multikulturních hodnot.** Mnoho částí světa je rozštěpeno etnickým a rasovým napětím. Existuje však i zcela opačný trend. Hlubší chápání kulturního bohatství reprezentovaného etnickými skupinami, jazyky a rasovým dědictvím světové populace.

8. **Digitální věk charakterizovaný internetem a WWW.** Nové informační technologie přinesly revoluční změny ve způsobu výroby i prodeje zboží, ve výměně idejí a jednoduše v komunikaci.

3 Evropský prostor vysokoškolského vzdělávání

V Boloni dne 19. června 1999 podepsali ministři z 29 evropských zemí deklaraci, ve které vytyčili velmi hrubý rámec evropského prostoru vysokoškolského vzdělávání a „Evropu znalostí".

V šesti bodech je formulován cíl, který má být dosažen do roku 2100. Jedná se ve zkratce o:

1. Přijetí systému srozumitelných a srovnatelných stupňů vysokoškolského vzdělání.
2. Přijetí systému založeného v zásadě na dvou základních cyklech.
3. Vypracování systému kreditů.
4. Podporu mobilitě.
5. Podporu evropské spolupráce v hodnocení kvality (Quality assurance).
6. Integrované programy studia a výzkumu.

9. května 2001 se sešlo v Praze 32 ministrů evropských zemí odpovědných za vzdělávání aby podepsali dokument

Towards the European Higher Education Area.

Vzali na vědomí výsledky jednání a doporučení následujících konferencí a institucí:

Convention of European Higher Education Institution Area (Salamanca 29.–30. 3. 2001),

Convention of European Students (Goteborg 24.–25. 3. 2001),

European University Association (EUA),

National Unions Students in Europe (ESIB).

Kromě opětného zdůraznění šesti bodů z Boloňské deklarace zdůraznili význam dalších bodů při vytváření evropského vysokoškolského prostoru, a to:

7. celoživotního vzdělávání
8. aktivní roli universit a jejich studentů

9. přitažlivosti a soutěže schopnosti univerzit
10. pokračující trvalé spolupráce při naplňování cílů „Boloňského procesu“.

Po pražském summitu ministrů následovala celá řada konferencí, seminářů a deklarací. Za obsahově nejdůležitější považuji 3 materiály:

(i) Sdělení generálního sekretáře Evropské Komise generálnímu sekretáři Evropské unie nazvané

„The role of the universities in the Europe of knowledge“
[com (2001)].

(ii) Graz Declaration 2003

Forward from Berlin: The role of the universities. EUA-Leuven, 4 July 2003 (http://www.unige.ch/EUA)

Protože se jedná o dokument EUA nejde o přímou odpověď Evropské Komisi, ale o propracovaný program přijatelný evropským univerzitám. Řeč je formální a hodně diplomatická

(iii) Trends 2003 – Progress towards the European Higher Education Area

A report prepared for the European University Association. July 2003.

Materiál je zajímavý dotazníkovou metodou sledování pokroku „Boloňského procesu“. Dotazník vyplnila i ZČU (víte jak?).

19. září 2003 se sešlo 33 ministrů odpovědných za vzdělávání v evropských zemích a podepsali dokument

„Realising the European Higher Education Area“

Z posunů v jednotlivých již zmíněných 10 bodech je asi nejvýznamnější souhlas týkající se Quality assurance. Cituji: „By 2005 national quality assurance systems should include

- A definition of the responsibilities of the bodies and institutions involved
- Evaluation of programmes or institutions, including internal essesment, external review, participation of students and the publications of results.

- E system of accreditation, certification or comparable procedures.
- International participation, co-operation and networking.“

Na setkání v Berlíně ministři vyhlásili Evropský vysokoškolský prostor vzdělávání a Evropský vědecký prostor za dva pilíře: „Two pillars of the knowledge based society.“ Dále pověřili tzv. „follow – up group“ sledováním pokroku „Boloňského procesu“. Prioritami na další dva roky jsou:

- Quality assurance
- Two – cycle system
- Recognition of degrees and periods of studies

4 Cíle institucionálního evaluačního programu

Dlouhodobý cíl institucionálního evaluačního programu (IEP) je posílení institucionální autonomie a podpora institucionální změny univerzit. Cílem není posuzování kvality vyuočvání nebo výzkumu. Institucionální evaluace vrcholí závěrečnou zprávou ústní (na konci druhé návštěvy) a později písemnou, kde jsou podrobně vypsány závěry, ke kterým evaluační tým dospěl.

Zhruba řečeno se týkají:

- možností univerzity ke zlepšení vlastního výkonu,
- mechanismů a vnitřních procesů zajišťujících sledování „kvality“ aktivit.

Evaluační tým zaznamenává pozitivní aktivity, poukazuje na problémy a doporučuje praktická zlepšení.

5 Vlastní evaluační proces

Evaluační proces organizovaný asociací evropských univerzit má tyto části:

1. **Registrace.**
   Proces je dobrovolný a k programu institucionálního hodnocení se univerzita musí sama přihlásit. Musí požádat ústřední EUA o hodnocení.

2. **Self-evaluation (interní evaluace).**
   Prvním krokem procesu je vypracování „sebe-hodnotící zprávy“, kterou připravuje rektorem ustanovaný tým univerzity, která o hodnocení požádala. „Sebe-hodnotící zprávu“ připravuje tým podle návodu (jakéhosi zpovědního zrcadla) vypracovaného skupinou expertů EUA.

   V „sebe-hodnotící zprávě“ je mimo jiné obsažena též „SWOT“ analýza hodnocené univerzity.
3. **Externí evaluace.**
   Po obdržení „sebe-hodnotící zprávy“ vyšle EUA čtyřčlený tým složený z rektorů, emeritních rektorů, odborníků specializovaných na problémy zajišťování kvality univerzit na dvě návštěvy hodnocené univerzity, a to:

   - předběžnou návštěvu, zdůrazňující především vzájemné porozumění z jedné strany smyslu celého procesu a z druhé strany obsahu „sebe-hodnotící zprávy“,
   - hlavní návštěvu zaměřenou především na hledání odpovědí na čtyři stěžejní otázky základního významu:
     a) Co se snaží univerzita dělat?
     b) Jakým způsobem se to univerzita snaží dělat?
     c) Jak vůbec ví, že to funguje? (Jak je zde zaveden systém zpětné vazby?)
     d) Je univerzita schopna změn? (Má základní předpoklady vyrovnat se s nutností změn, které jsou vyvolány vnějším prostředím?)

   Evaluační tým se snaží srovnat skutečnost se „sebe-hodnotící zprávou“, vytvořenou pracovníky příslušné univerzity. Tým zkoumá řadu ukazatelů výkonu z předem připraveného seznamu a klade doplňující otázky ke každé specifické problematice.
4. **Hodnotící zpráva.**
   Hodnotící tým sepisuje zprávu v rozsahu zpravidla o dvaceti stranách, kterou zasílá rektorovi hodnocené univerzity, k myslitelným opravám. Po vyslovení souhlasu je zpráva považována za definitivní. EUA ji však nepublikuje, ale doporučuje univerzitě ji zveřejnit. Hlavní smysl zprávy spočívá v tom, že poskytuje univerzitě

písemný dokument zachycující její současný stav a zároveň tvoří základ pro další možný rozvoj a zlepšení.

5. **Další kroky.**
   Po doručení konečné verze evaluační zprávy objednaný institucionální evaluační proces končí. V současné době však EUA nabízí další tři typy možného pokračování:

   - univerzita si může okamžitě vyžádat jednoho až dva experty, kteří by mohli pomoci s vybranými problémy,
   - „klub absolventů“ univerzit, které se zúčastnily institucionálního programu: klub se schází jedenkrát do roka a má napomáhat spolupráci univerzit uvnitř EUA,
   - pokračování evaluace, která je zpravidla vyžadována během několika let po evaluaci počáteční.

6 Řízení vysokoškolských institucí z pohledu EUA

Podle závěrečných zpráv z provedených auditů evropských univerzit, u nás to bylo pouze ČVUT, lze usuzovat na jisté doporučované trendy rozvoje vysokoškolských institucí. Pro informaci vybírám některé žádoucí zásady a upozorňuji na doporučení auditorů.

1. Univerzita má být integrovaný celek a nikoliv pouhá federace zcela samostatných fakult. Doporučuje se svěřování kompetencí a povinností shora dolů.
2. Akademická obec (zaměstnanci i studenti) má v nejširší možné míře participovat na naplňování abstraktně formulovaného poslání univerzity. Doporučují se akce (konference, semináře, setkávání), na kterých by se o poslání univerzity jako celku vůbec hovořilo. Při auditu se sleduje, jak dalece se vedení daří přenášet vizi rozvoje univerzity na akademickou obec a do jaké míry vedení akceptuje iniciativy zdola.
3. Každá univerzita má mít vypracovaný vlastní strategický záměr s uvedením profilu fakult, s naznačením cílového řešení, jasně stanovenými prioritami rozvoje.

   Doporučuje se aby:

   - tvorbě strategického záměru předcházela podrobná SWOT analýza typu WIN-WIN všech složek univerzity,

- prací na analýze i navazujícího výhledu do budoucnosti se zúčastnila co možná největší část všech zaměstnanců i studentů univerzity,
- hotový záměr byl oponován zvenku.

4. Vnitřní uspořádání (struktura) je specifickou záležitostí každé univerzity, vázanou pouze příslušnými právními normami.

   Doporučuje se, aby:

   - bylo flexibilní a efektivní (musí umožňovat okamžitou nutnou i vhodnou reakci na rychlé změny ve společnosti),
   - v jeho rámci byly jednoznačně definovány vazby mezi jednotlivými částmi celku,
   - v jeho rámci byly jasně stanoveny povinnosti a z nich vyplývající práva všech zaměstnanců i studentů,
   - zaručovalo vzájemnou informovanost a průhledné toky financí a materiálních zdrojů,
   - umožňovalo žádoucí iniciativu zdola,
   - zaručovalo určitou vyváženost hlavních částí.

5. Aktivity by měly být úměrné možnostem univerzity a měly by odpovídat potřebám doby a zároveň i spádové oblasti, ve které univerzity působí. Poznámka: audit nesleduje (ani nemůže) úroveň aktivit, ale zjišťuje, do jaké míry vedení instituce připravuje jejich rozvoj, vytváří mechanismy zjišťování jejich kvality. Sleduje se rovněž, jak dalece vedení promýšlí možnost absolventů – v současné době strukturální nezaměstnanosti – integrovat se do společnosti.

   Doporučuje se:

   a) diverzifikovat vzdělávací aktivity:
      - úrovní (bakalářská, magisterská, doktorandská),
      - obsahem (širší nabídkou studijních programů),
      - formami (řádné, distanční, celoživotní, příležitostné),
      - absolvování (využíváním kreditního systému trávit část studia v zahraničí);

b) provádět (nikoliv předstírat) výzkum:
   - základní, kde jsou k tomu podmínky – kapacity lidské i materiální,
   - cílený – při získání grantu,
   - aplikovaný – hrazený z mimorozpočtových zdrojů,
   - v rámci mezinárodní spolupráce participací na projektech,
   - mezioborově orientovaný;

c) podílet se aktivně na životě a rozvoji spádové oblasti podle daných specifických podmínek, a to těsnou spoluprací s vybranými institucemi;

d) více využívat mezinárodních styků i mimo rámec vzdělávacích a výzkumných aktivit;

e) prodávat výsledky práce zaměstnanců.

6. V zajišťování všech činností (investiční, správní, vytváření materiálních i personálních podmínek dalšího rozvoje, propagační, vydavatelské, poradenství studentů, marketingové, informační ap.) se sleduje efektivita využívání zpětné vazby a důsledná kontrola tam, kde má smysl.

   Doporučuje se:
   - posilovat vědomí zaměstnanců, že smyslem jejich práce je plné „uspokojování zákazníků“ jak v čase, tak v kvalitě,
   - vytváření účelových motivačních fondů,
   - rovnoměrné rozvržení náplně práce všech zaměstnanců,
   - přiměřené zapojení studentů,
   - získávání podpory univerzitního „okolí“.

7 Doslov

Na jedné straně všechny uvedené ukazatele kvality zastiňuje podle mého názoru úroveň zaměstnanců, které jsem dělil a dělím do tří skupin na:

- tažné,
- chovné,
- škodné

a na druhé straně rozložení uchazečů o studium, které dělím na:

- studenty,
- posluchače,
- zapsané.

Studentům pak tažní věnují tu péči, kterou vystihuje následující text:

The Student

The student is not an outsider to our business,
He is part of our business.

He is not an interruption of our work,
He is the purpose of it.

The student is not dependent on us,
We are dependent upon him.

The student is not a cold statistic,
he is a flesh and blood human being with
feeling and emotions like our own,
and with biases and prejudices.

He is the most important visitor ever
in our office; whether he comes in person,
or by mail, or over the telephone.

We are not doing him a favor by serving him,
he is providing us with a job by giving us
the opportunity to do so.

„Časy se mění a my s nimi“; bohužel se mi zdá, že přibývá škodných a zapsaných.

Pravděpodobnostní algoritmy

Jiří Sgall

V této přednášce se budeme zabývat použitím náhodnosti v algoritmech. Náhodnost umožňuje řešit některé úlohy, které jsou bez jejího použití neřešitelné nebo řešitelné méně efektivně. V posledním období zažívá tento obor velký rozvoj, a lze říct, že použití náhodnosti patří mezi standardní metody při návrhu algoritmů. Na jednoduchých příkladech předvedeme některé základní myšlenky a metody.

Jednou z prvních oblastí, kde se ukázala přímo nezbytnost použití náhodnosti, je teorie her studovaná von Neumannem v polovině minulého století. Jedná se o hry dvou hráčů typu papír – kámen – nůžky. Použití tzv. čisté strategie, tj. vybírání jediné možnosti, evidentně nevede k dobrým výsledkům. Naopak použití tzv. smíšené strategie, tj. vybírání možnosti náhodně s určitou pravděpodobností, vede k optimálním strategiím.

Jinou oblastí, kde použití náhodnosti vede k dokazatelně lepším výsledkům než použití deterministických algoritmů, jsou tzv. *online algoritmy*. Ty se studují v situaci, kdy není předem znám celý vstup. Motivací jsou systémy a situace, kdy je třeba okamžitě reagovat na jednotlivé požadavky uživatelů, bez znalosti budoucích vstupů. V takové situaci samozřejmě není možné dosáhnout optimálního výsledku, cílem online algoritmu je co nejvíce se optimu přiblížit. Ocitneme-li se v situaci, kdy pro každou ze dvou možných akcí algoritmu existuje (budoucí) vstup, který vede k velmi špatnému výsledku, může být nejlepší minimalizovat riziko tím, že akci algoritmu vybereme náhodně.

Bez použití náhodnosti je nemyslitelná moderní kryptografie. Nejedná se jen o kódování a dekódování zpráv, kdy již z definice vyplývá, že zakódovaná zpráva musí vypadat „náhodně“. Jiným příkladem jsou tzv. *zero-knowledge* interaktivního výpočtu, kdy několik hráčů společně spočítá jednoduchou funkci, aniž by kdokoliv odhalil dodatečnou informaci o svém vstupu.

V poslední části přednášky se budeme věnovat takzvané PCP větě (z anglického *Probabilistically Checkable Proofs*) dokázané v r. 1992.

Úlohy patřící do třídy NP (jako třeba test, zda daná soustava rovnic je řešitelná) mají tu vlastnost, že kladnou odpověď je možné prokázat krátkým důkazem (v daném příkladu řešením soustavy rovnic). PCP věta říká, že pro každou úlohu v NP existuje dokonce způsob, jak kladnou odpověď prokázat čtením několika náhodně vybraných bitů z celého důkazu, přičemž pravděpodobnost chyby je malá konstanta. Čtených bitů důkazu je pouze konstantně mnoho (stačí dokonce 3), bez ohledu na velikost daného vstupu.

Důkaz PCP věty spočívá v návrhu poměrně složitých pravděpodobnostních interaktivních protokolů. Patří k nejdůležitějším výsledkům teoretické informatiky v poslední době zejména díky dalekosáhlým důsledkům o obtížnosti i přibližného řešení NP-úplných úloh. Použití pravděpodobnostních algoritmů tedy nakonec vede i k základním výsledkům v oblasti, která se jimi přímo nezabývá – i to svědčí o důležitosti tohoto oboru.

Jako literaturu lze doporučit anglicky psané učebnice [2, 1, 3], případně poznámky z přednášek o PCP větě [4], vše s bohatými odkazy na další literaturu.

Literatura

[1] Borodin A., El-Yaniv R.: *Online Computation and Competitive Analysis.* Cambridge University Press, 1998.

[2] Motwani R., Raghavan P.: *Randomized Algorithms.* Cambridge University Press, 1997.

[3] Papadimitriou C.: *Computational Complexity.* Addison Wesley, 1994.

[4] Sgall J.: *Probabilistic proofs and NP-completeness (A course on the PCP theorem and its consequences).* Technical Report ITI Series 2002-088, Charles University, Prague 2002.

PŘÍSPĚVKY V SEKCÍCH

Poznámka editorů

Editoři považují za užitečné upozornit čtenáře na skutečnost, že příspěvky v následující části sborníku neprošli recenzí. Příspěvky byly až na drobné redakční úpravy otištěny tak, jak je autoři dodali. Autoři plně zodpovídají za úroveň obsahu i formy příspěvků.

Jsme si plně vědomi nesourodosti článků i toho, že souvislost s tématem konference není vždy zřejmá. Ve sborníku jsou články, které obsahují původní myšlenky, ale i takové, které jsou zřejmou kompilací běžně dostupných a již publikovaných materiálů. Za závažný nedostatek považujeme to, že řada autorů neuvádí použitou literaturu a tím znesnadňují čtenáři získání podrobnějších informací z dané oblasti

V zájmu zkvalitnění eventuálních dalších sborníků považujeme za užitečné promyslet a stanovit jasné podmínky pro uveřejnění příspěvku ve sborníku.

Editoři

Jak hodnotit skupinové vyučování

Iva Berčíková

Nevím jak vy, ale já jsem si dlouho neuměla přestavit, jak smysluplně zařadit skupinové vyučování do výuky matematiky, jakou zvolit náplň a především jak ho hodnotit.

Až jednou... Měla jsem třídu, se kterou bylo těžké pořízení. A aby toho nebylo málo, organizačními přesuny se po prvním ročníku ještě zvýšil počet žáků o dalších šest. Ty, které přišly (samé dívky), byly velmi snaživé (ale bohužel nepříliš schopné) a já jsem byla z hodin v této třídě zcela vyčerpaná. Největší krize přicházela páteční šestou vyučovací hodinu. Tak jsem si řekla, že horší to už být nemůže a že zkusím experimentovat.

Nejdřív jsem vymyslela rozdělení do skupin. Na tabuli jsem napsala: „Miluji matematiku“, „Mám rád matematiku“, „Snáším matematiku“ a „Nesnáším matematiku“ a vyzvala studenty, aby se do jedné ze skupin zapsali. Bylo to docela vyrovnané, stačilo provést malé korekce podle prospěchu a skupiny byly stejně velké. Každá skupina pak postupně přicházela ke katedře a losovala z osmi písmen. Tak vzniklo osm pracovních skupin o třech až čtyřech členech, jejichž úroveň byla srovnatelná.

Moje představa byla takováto: Učivo rozdělit do tříhodinových bloků. První hodinu probrat novou látku a vzorové příklady, druhou řešit ve skupinách namnožené příklady podle vlastního výběru s mojí případnou pomocí a třetí hodinu tyto příklady projít společně jeden po druhém.

Přestože šlo o nápad z nouze, překvapivě fungoval a funguje dodnes. Sice se také celou hodinu nezastavím, ale mám dobrý pocit, že se do práce zapojuje většina třídy.

Studenti jsou hodnoceni takto: Nejúspěšnější skupina (což je dáno počtem vyřešených příkladů krát dva minus počet mých nápověd) dostane 8 bodů, další 7 a nejslabší 1 bod. Tyto body si potom skupina rozdělí mezi sebe. Ze začátku mívají studenti „rovnostářský“ přístup a mají problém, pokud počet bodů nelze rozdělit „spravedlivě“, časem se ale ti schopnější nestydí přihlásit i o většinu bodů.

A k čemu jim jsou takto získané body dobré?

Už jako studentka jsem vnímala zkoušení z matematiky u tabule jako ztrátu času. Proto jsem vymýšlela různé způsoby hodnocení, až jsem skončila u bodového systému. V jeho rámci se snažím každou hodinu motivovat studenty k činnosti. Mohou získat jeden až dva body za každou hodinu. První bod získají ti, kteří úspěšně a rychle vyřeší či dořeší zadané příklady (nejčastěji první čtyři). Takto může získat bod většina třídy, protože časem dojde i na ty pomalejší. Druhý bod získá ten, který byl úspěšný celou hodinu. Další body získávají studenti z práce ve skupinách (viz výše) a také pomocí bodů snižuji hořkost špatné známky, pokud studentovi chybí pár desetin bodu, případně jimi odměňuji výjimečné výkony. Každé čtvrtletí tyto body sečtu a převedu na známku, která hodnotí práci v hodině a většinou vylepšuje známky z písemek.

Možná někomu přijde bodový systém dětinský (přiznávám inspiraci „foglarovkou“ „Když duben přichází“), ale moje zkušenost je většinou pozitivní. S věkem se sice aktivita ztrácí, ale i čtvrťáci se hlásí o své „plusíky“ a jsou ochotni se pro ně angažovat.

Počítačem podporovaná výuka a zpětná vazba

Helena Binterová

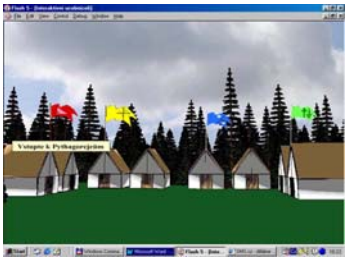
Současná škola řeší nelehký problém, související s přechodem „industrializované“ společnosti ke společnosti „informační“. Jak se mění potřeby společnosti, mění se i způsob výuky ve školách. Použití moderních technologií se stává nezbytnou součástí vyučovacího procesu, jsou součástí každodenního života, takže nám nezbývá než tuto skutečnost akceptovat i ve vyučování matematice.

Jak odpovědět na hlasy volající po zavádění nových postupů, nových učebnic, a nových technologií? Jak vytvořit nový didaktický materiál. Jaký didaktický materiál bude pro žáky zajímavý. Na všechny tyto otázky není snadné nalézt odpověď a jejich zkoumání je předmětem diskusí, výzkumů, vědeckých prací.

Didaktický materiál je prostředník mezi cíli matematického vyučování, jeho výsledky a mezi žáky vzdělávanými v matematice. Jako pokus o vytvoření určitého didaktického materiálu bychom mohli nazvat multimediální učební text, který vznikl jako diplomová práce z didaktiky matematiky studentek pátého ročníku učitelství pro ZŠ oboru M-VT. Jde o první podobu textu toho druhu, který jsme se pokusily vytvořit, který je jistě silnou motivací pro další práci a diskuse. Cesta k vytvoření multimediální učebnice je jistě dlouhodobý proces a teprve čas, prověřování a opravy přinesou materiál, který bude představovat ne náhradu tištěných „klasických“ učebnic, ale jejich alternativu, doplněk.

Činnosti učitelů a žáků jsou určeny tím, co bývá nazýváno „přístup ke každodennímu životu“, nebo také „kognitivní styly každodenního života“. [3] Je zřejmé, že každodenní rutina matematického vyučování musí být v souladu s každodenností života, musí odrážet jeho realitu tak, aby byly v souladu. Matematika ve škole, jako předmět vyučování, může být konstruována jako abstraktní věda, ale pouze za předpokladu, že právě tuto jeho každodennost odráží, přičemž musí být současně brán na zřetel fakt, že proces výuky a učení je proces velmi individuální.

Motivací žáků jistě je (i podle jejich vlastních odpovědí) prostředí *Matematického tábora*, do kterého je „vyučování“ situováno. Každé procvičované téma – Pythagorova věta, funkce, úměrnost, procenta – je umístěno do jednoho stanu. V každém stanu je v nočním stolku přichystáno několik zásuvek s teorií, úkoly, zajímavostmi a příklady k procvičení.



Obr. 1 Hlavní prostředí Matematického tábora

Obr. 2 Prostředí ve stanu – volba

Výukové prostředí, které vzniklo, je flexibilní podle různých hledisek. Slouží k výuce ve třídě, stejně jako k samostatné práci doma. Je velice motivujícím prostředím pro řešení úloh, které řeší situace z každodenního života. Může být používáno jako celek nebo jako jeho části. Rozsah použití může být redukován vzhledem k potřebám učitele, žáka, vzhledem k jeho znalostem, schopnostem apod. Celé prostředí je spojeno souborem úloh, který studentky nazvaly projekt. Ten mají žáci řešit, jestliže zvládnou témata zastoupená v tomto multimediálním textu. Projekt sám o sobě může být modifikován. Takové úpravy může provést buď učitel, nebo samotní žáci.

Studentky si při vytváření tohoto didaktického materiálu vytyčily tyto cíle:

- *Jak již bylo řečeno v úvodu, hlavním cílem projektu je procvičit se žáky matematické dovednosti. Dětem jsou úkoly předloženy projektově, úkoly jsou na sobě závislé, a děti tudíž mohou vidět, že jednotlivá matematická témata na sebe navazují a prolínají se.*
- *Prakticky si děti vyzkouší práci s počítačem, který jim v budoucnu bude velice pomáhat při studiu nebo v zaměstnání. Je jednoduché naučit se ovládat Internet, ale umět jej využít při práci je mnohdy nesnadné. Týká se to zejména zpracování dat, která musí žáci sami*

vyhledat, vytřídit to důležité a dále prezentovat do té formy, ve které data sami potřebují.

- *Motivací při učení se na projektu je práce s počítačem. Není to tedy klasický styl výuky, na jaký jsou žáci zvyklí v lavicích. Přestože žáci pracují samostatně (nejsou tak závislí na učiteli), je při práci na projektu důležitá kooperace kolektivu, další zkušenost do budoucího zaměstnání.*

Didaktický materiál, který vznikl, studentky vyzkoušely na několika základních školách. Závěry z těchto hodin jsou následující:

- *Multimediální text je velice silnou motivací pro práci žáků v hodinách matematiky.*
- *Práce s „učebnicí“ se žákům líbila, kladně hodnotili hlavně systém příkladů na procvičení se zpětnou vazbou formou nápovědy.*
- *Při řešení projektu bylo přínosem, kromě motivujícího prostředí, že žáci se učili nebo zdokonalili ve vyhledávání na Internetu, poznali nové užitečné adresy například pro vyhledávání spojů, historických památek, cen potravin.*
- *Žáci si museli práci sami organizovat, samostatně přemýšlet.*

Takové multimediální CD je pouhým začátkem problému vytvořit, nebo spíše jak vytvořit nový didaktický materiál, který by reagoval na potřeby současné školy, vyučování matematice. Materiál, který by byl finálním produktem diskusí, prací, aktivit učitelů, žáků, didaktiků, který by reagoval na požadavky ohledně obsahu, témat, úpravy.

Jednou z diskutovaných otázek by jistě mohla být možnost zpětné vazby a její využití při vyučování matematice. V tomto ohledu je možná právě tento text takovým prostředím, které by právě možnost zpětné vazby využívalo. Stany jsou podle řešených témat nazvány: Pythagorejci, Funkcionáři, Úměrníci a Procentníci. Ve stanu Procentíků najdete příklady, které máte řešit, pokud si ale nevíte rady, můžete se vrátit k teorii v jiné zásuvce pomocí tlačítka Zpět, nebo si zkontrolovat výsledky pomocí tlačítka Výsledky. Na základě zkušeností z práce žáků s tímto textem se podařilo, i když zatím jen v právě v tomto stanu, zpracovat příklady tak, aby při řešení úloh mohl každý kdykoliv zvolit možnost „**KONTROLA VÝSLEDKŮ**“, která umožní právě zpětnou vazbu a provede okamžitou kontrolu toho, co žák považuje za výsledek. Dále je na něm, jestli chce přemýšlet dál sám, opravit svou chybu

(v případě špatného výsledku) a nebo si rozkryje řešení stiskem tlačítka Nápověda. Další možností je použít již zmíněné tlačítko zobrazující výsledky zadaných úloh. Je bezesporu zajímavé sledovat jednotlivé žáky, jakým způsobem úlohy řeší, v jaké fázi „už“ použijí nápovědu, nebo se „nevzdávají“ a studují TEORII v jiné zásuvce. Tímto způsobem jsou schopni pracovat i bez učitele a samostatným „zkoumáním“ a řešením nalézt správnou odpověď. Odměnou jim přitom bývá ten známý pocit uspokojení z OBJEVENÍ správného řešení. Myslíme si, že práce s takovým textem bude silnou motivací zejména pro žáky, kteří prozatím nenašli v matematice to správné zalíbení.

Obr. 3 Okno s výsledky

Práce na této „učebnici“ nám přinesla mnoho zajímavých postřehů, několikrát jsme změnily způsob, uspořádání, náplň jednotlivých stránek. V žádném případě ji nepovažujeme za hotovou. Jedná se o první, nesmělý pokus, jak postupným zlepšováním, ověřováním v praxi a spoluprací s učiteli a žáky vytvořit text, který by byl smysluplně použitelný ať už při vyučování ve škole, nebo při samostatné přípravě doma.

Literatura

[1] Ahmed A.: *How can teaching aids improve the quality of mathematics education?*, Plenaires CIEAEM 55, Plock, Poland 2003.

[2] Gellert U.: *Friction: students and teachers using didactic materials*, Plenaires CIEAEM 55, Plock, Poland 2003.

[3] Fuchs E., Binterová H.: *Teorie chaosu – multimediální text.* Boh. Dept. Math. Rep., ser. 10, 2003.

[4] Hošpesová A., Binterová H.: *Objevování v matematickém vyučování podporované Excelem.* Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep., ser. 10, 2003.

[5] Mandíková D., Palečková J., Tomášek V.: *TIMSS – Praktické úlohy.* Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 1996.

Anglická výuka matematiky na UNisa (Porovnávací studie)

Daniela Bittnerová

Abstrakt

Článek obsahuje informaci o nové možnosti bakalářského studia ekonomického zaměření v anglickém jazyce, kdy jde o mezinárodní projekt, jehož se kromě TUL účastní i dvě vysoké školy zahraniční (polská a německá). Studenti studují každý rok v jiném státě. Na počátku dvou posledních po sobě jdoucích akademických roků byl se studenty prvního ročníku tohoto oboru proveden průzkum úrovně znalostí ze středoškolské matematiky a výsledky porovnány.

Jedním ze základních středoškolských matematických témat, která mají studenti ovládat před začátkem studia vysokoškolské matematiky, jsou základní vlastnosti reálných funkcí. Znalosti studentů přicházejících z různých typů škol bývají velmi rozdílné. Na Technické univerzitě v Liberci je již třetí rok otevřeno velice speciální mezinárodní bakalářské studium ekonomického zaměření, jejž absolvují společně studenti tří států – České republiky, Německa a Polska. Pro tento bakalářský program s oficiálním názvem „Informační a komunikační management“ se vžilo pracovní označení „Univerzita Nisa“ (krátce UNisa), protože studenti pocházejí z Euroregionu Nisa. Studium probíhá postupně ve všech třech státech, vyučovacím jazykem je angličtina. První rok studují na Technické univerzitě v Liberci, druhý rok na Technické univerzitě ve Wroclawi a studium zakončí v Německu na Hochschule Zittaw/Görlitz. Vzhledem k tomu, že na naší univerzitě jsou posluchači prvního ročníku, měli jsme možnost porovnat, zda je úroveň vstupních znalostí z matematiky českých studentů stejná či podobná jako u studentů v sousedních

Publikováno v rámci výzkumného záměru MSM 24100302 „Diskrétní matematika a její aplikace“.

státech. Cílem však nebylo pouze porovnat znalosti studentů z různých států. Chtěli jsme si také ověřit, zda studenti správně chápou jeden ze základních pojmů, které potřebují ke studiu vysokoškolské matematiky, a to pojem funkce. Výzkum byl rozdělen do tří částí.

Na začátku přípravného kurzu dostali studenti test, který prověřil jejich znalosti elementárních středoškolských matematických pojmů a jejich vlastností. Druhá a třetí část se týkala funkcí a řešení jednoduchých exponenciálních a logaritmických rovnic.

V průběhu jednoho cvičení matematiky na začátku zimního semestru posluchači nejprve vyplnili dotazník, v němž jsme zjišťovali jednak základní údaje – stát, typ střední školy, rok jejího absolvování atd., jednak jsme se snažili zjistit, jak sami studenti hodnotí své znalosti z matematiky a úroveň angličtiny. Také nás zajímalo, jak mnoho a zda vůbec studenti čtou odbornou literaturu i beletrii, a to jak ve svém mateřském jazyce, tak i cizím jazyce. Vyplnění dotazníku spolu s vysvětlením trvalo necelých deset minut. V následujících deseti minutách studenti řešili sedm jednoduchých (základních) úloh týkajících se exponenciálních a logaritmických funkcí a rovnic.

Někteří studenti odevzdávali testy ještě před uplynutím časového limitu. Z testu vyplynulo, že studenti jsou schopni mechanicky aplikovat známé jednoduché postupy na řešení exponenciálních rovnic, ale úlohy obsahující logaritmy jim činily potíže. Většina studentů je vůbec neřešila.

Po té byli rozděleni podle států do tří skupin. S každou skupinou jeden vyučující v samostatné učebně provedl další část průzkumu. Studenti postupně odpovídali na stejné (odborné) otázky.

Test

1. Solve these equations with respect to x: a) $3^x = 81$
   b) $5^x = 1$
2. Evaluate: a) $\left(\frac{49}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} =$
   b) $(64)^{-\frac{1}{3}} =$
   c) $\log_3 9 =$
3. Express in terms of $\log p$, $\log q$, and $\log r$: a) $\log\left(p^2 q\right) =$
   b) $\log\sqrt{\frac{q}{r}} =$

Rozhovory byly zaznamenány pomocí diktafonů. Rozhovor s každým studentem nesměl být delší než šest minut. Pokud tedy student neuměl odpovědět, ihned se pokládala další otázka. Znění otázek i případné pomocné otázky byly předem připraveny, aby průzkum byl co nejvíce objektivní. Studenti, kteří se momentálně neúčastnili rozhovoru, studovali anglické znění článku o matematických pohádkách.

Interview

1. What does the function $f(x) = a^x$ mean to you?
   What do you think of when you see this function?
2. Is $5^{6\,789}$ an even or an odd number?
   Why?
3. Is $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ an increasing function or a decreasing function?
   Your reasons?
   Why?
4. Suppose you didn‘ t have a calculator. How would you go about computing $\log_5 78\,125$?

Ukázalo se, že studenti měli pouze vágní představu, co to je exponenciální či logaritmická funkce, a že většinou nebyli schopni správně tyto pojmy vysvětlit nebo zdůvodnit svá řešení. Například správnou odpověď na otázku, proč je funkce ve třetím případě rostoucí, kdy bylo třeba pochopit celý proces jednoduchých úvah, jsme dostali pouze od pěti procent studentů. Největší potíže činila poslední (čtvrtá) otázka. Studenti sice převážně věděli, že „*musíme* najít x tak, aby platilo $5^x = 78\,125$“, ale neuměli vysvětlit, *jak* toto číslo najít. Celkově tedy lze říci, že zkoumaní studenti měli pouze částečné znalosti dané problematiky a převážně nebyli schopni správně argumentovat a formulovat své odpovědi. Rozbor této části včetně grafů byl proveden v článcích [1] a [2].

Ve třetí části výzkumu jsme zjišťovali, zda studenti správně pochopili pojem funkce. Test obsahoval 12 obrázků křivek a studenti měli rozhodnout, která křivka je či není funkce (viz příloha). V této části byli všichni velmi úspěšní, polští studenti dokonce stoprocentně. Celkově se však neprojevily výrazné rozdíly ve znalostech studentů z jednotlivých států, jak se dalo očekávat.

Vzhledem k omezenému rozsahu tohoto příspěvku nelze uvést podrobnější rozbor. Domníváme se však, že informace o tomto netradičním oboru, který celý probíhá v anglickém jazyce, může být zajímavá. Ve druhé a třetí části jsme navázali na zkušenosti z výzkumu amerických (viz [4]) a řeckých kolegů (viz [5]).

Literatura

[1] Bittnerová D., Vild J.: *Exponenciální a logaritmické funkce na Univerzitě Nisa*, In: *Sborník mezinárodní konference – Prezentace matematiky.* 2. díl, Liberec 2003.

[2] Bittnerová D.: *Exponential and Logarithmic Functions.* Prace Naukowe Wyzszej Szkoly Pedagogicznej w Czestochowie. Matematyka IX, 2003.

[3] Ehleman J., Vild J.: *The Three Levels of Cooperation in the „University Neisse“.* Karlsruhe 2004.

[4] Weber K.: *Students' understanding of exponential and logarithmic functions.* ISCM, Crete 2002.

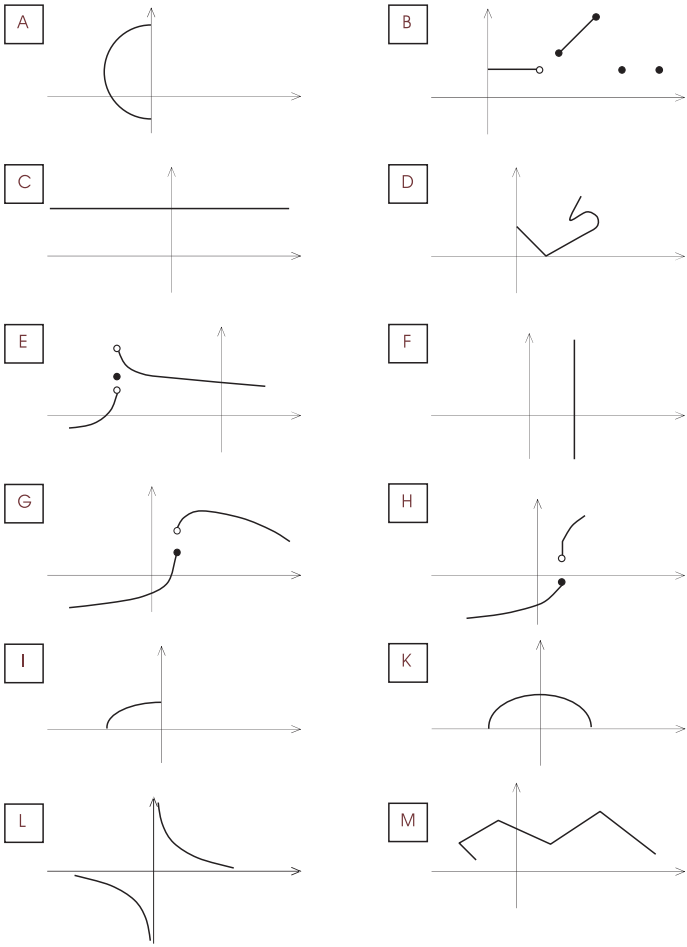
[5] Zachariades T., Christou C., Papageorgiou E.: *The Difficulties and Reasoning of Undergraduate Mathematics Students in the Identification of Functions.* ISCM, Crete 2002.

Příloha

Please ***indicate*** whether the graphical representation corresponds (×) or not to a **function**.

Yes	No
×	

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M



Šestačtyřicet let před tabulí

Emil Calda

Učitel matematiky – to zní hrdě!

Tímto počtem let svého učitelování se nechlubím – je to pouhé konstatování faktu, se kterým jsem se smířil, protože mi nic jiného nezbývá. Změnit se sice nedá, ale možná se dá využít k vyprávění o tom, jaké to bylo, když většina účastníků tohoto setkání ještě nebyla.

Prvních patnáct let z uvedené doby jsem učil ve stejné školní budově, na které se během mého působení – kromě ředitelů – střídaly pouze tabulky s označením: 14. Jedenáctiletá střední škola, Střední všeobecně vzdělávací škola, Gymnázium, Gymnázium W. Piecka. Učil jsem tam matematiku a fyziku, jednou dokonce i deskriptivní geometrii, ale pak, když mě vzali na matematicko-fyzikální fakultu, jsem učil budoucí učitele už jenom matematiku. Činím tak v menší míře i dnes, kdy jsem to vlastní pílí a díky pochopení státních orgánů dotáhl do důchodu. Připočteme-li k rokům, které jsem strávil před tabulí jako pedagog, ještě dobu, kterou jsem před ní strávil co žák nebo student, dostaneme třiašedesát let, což je doba z kosmického hlediska sice zanedbatelná, ale z hlediska lidského poměrně dlouhá.

Lidé, kteří delší dobu žijí a pracují v určitém prostředí, získávají po čase dojem, že už problematiku, se kterou se denně setkávají, zvládli a pociťují nutkání se k ní vyjadřovat. A když jim to doma nedovolí manželka, tak to ve svých vystoupeních na různých konferencích sdělují veřejnosti, což tímto činím i já. Hodlám totiž mluvit o odvěkých otázkách, které souvisejí s vyučováním matematiky na školách středních a na školách vzdělávajících v tomto směru budoucí učitele, k čemuž mě počet let strávených před tabulí nepochybně opravňuje. Zdůrazňuji ale, že budu mluvit pouze o otázkách, protože k odpovědím na ně jsem se dosud nedobral; navíc jsou účastníkům tohoto setkání nepochybně známy.

1 Vědí dnešní žáci a studenti z matematiky méně než ti včerejší?

Od počátku své pedagogické dráhy jsem na všelikých konferencích, sjezdech a setkáních slýchával, že s matematickými znalostmi mládeže je to na pováženou, že studenti nic neumějí a že za onoho času to bylo úplně jinačí. Připustíme-li, že tato tvrzení jsou pravdivá, pak největší znalosti měli žáci a studenti kolem roku 1958, tj. v době, kdy jsem na pedagogickou dráhu vstoupil; od této doby se začaly zmenšovat a tento trend pokračuje dodnes. Přemýšlel jsem nad tím, jestli se jedná o shodu okolností nebo zda je to skutečně moje vina, ale rozmluvami s kolegy ještě staršími než já a také studiem materiálů z minulého a předminulého století jsem zjistil, že k úbytku matematických vědomostí mládeže docházelo už tenkrát. Mám dokonce podezření, že nejvíce matematických znalostí měla mládež za časů Pythagora a že od této doby to jde valem z kopce. Je mi proto divné, jak při trvalém úbytku matematických znalostí mládeže mohla vzniknout současná společnost, jejíž existence na matematických poznatcích do značné míry závisí. Zdá se mi, že dnešní středoškoláci toho z matematiky nevědí méně než jejich předchůdci – nevědí-li totiž něco z toho, co se požadovalo před osmdesáti lety, vědí zase něco jiného, o čem ti dřívější nemohli mít vůbec tušení. Nahlédneme-li např. do učebnice geometrie pro VII. třídu škol středních vydané v roce 1924 nákladem Jednoty čs. matematiků a fyziků, zjistíme, že kuželosečky byly tehdy probírány v míře, o které si dnešní geometři mohou nechat jenom zdát. Ví dnes některý středoškolák, že polára bodu vzhledem ke kuželosečce „jest geometrické místo bodů harmonických s bodem tím vzhledem k průsečíkům kuželosečky se všemi přímkami tím bodem vedenými“? Věděl ale tehdejší septimán něco o množinách a vektorech?

2 Je všechno, co vykládáme, důležité?

Další problém, který se po celou dobu mého působení neustále řešil a řeší se dodnes, spočívá v tom, že si nejsme jisti, co vlastně z matematiky učit, co je více a co je méně důležité a proč by se mělo učit tamto a ne tohle. Nerad bych tento problém podceňoval, ale trošičku ve mně hlodá podezření, že jeho řešení by nemuselo být příliš složité, pokud bychom se ovšem dokázali dohodnout. Stačí v podstatě přihlédnout

k tomu, kolik vyučovacích hodin máme k dispozici, zda zvolené téma je přiměřené věku žáků a studentů, zda pro ně může být zajímavé a zda odpovídá – řečeno poněkud frázovitě – společenským potřebám. Dalo by se také s nadsázkou pouze mírnou říci, že na tom, co v hodinách vykládáme, příliš nezáleží – ve vyučování matematice můžeme rozvíjet samostatné, kritické a tvůrčí myšlení studentů na jakémkoli tématu, které odpovídá stupni jejich matematických znalostí. Všiml jsem si také, že ve školské matematice není mezi poučkami, větami a vzorci žádná hierarchie – velmi důležité jsou úplně všechny. Tímto přílišným zdůrazňováním důležitosti všech matematických pouček nakonec dosáhneme toho, že žactvo nebude za důležitou považovat žádnou. Jen si vzpomeňte – tak dlouho u nás patřilo všechno všem, až nakonec nepatřilo nikomu nic.

3 Mají studenti umět důkazy?

To, že matematika své poznatky – na rozdíl od ostatních věd – dokazuje, by se před středoškoláky nemělo skrývat. Domnívám se ale, že záleží na „matematickém stavu“ třídy, ve které učíme, u jakých vět se odhodláme k důkazu a u kterých se spokojíme s názorným zdůvodněním; žádná by však neměla spadnout z nebe a být předložena k věření. V dobách svého středoškolského působení jsem se odvažoval požadovat, aby studenti uměli dokázat poznatky známé již více než dva tisíce let – větu Pythagorovu a Thaletovu, větu o součtu úhlů v trojúhelníku, větu o obvodových a středových úhlech – a kromě nich i některé elementární věty další. Připadá mi ale užitečné, aby studenti dokazovali, resp. zdůvodňovali všelijaká tvrzení i z oblastí nematematických, i když se důkazové úlohy tohoto typu vyskytují v učebnicích velice zřídka. Jaké úlohy mám na mysli je patrné z následující ukázky:

Dokažte, že není možné, aby jezdec na šachovnici 8×8 *prošel všemi políčky této šachovnice tak, že začne v levém dolním rohu, na každé zbývající políčko skočí právě jednou a skončí na políčku vpravo nahoře.*

Cvičit se v důkazových úlohách je užitečné i pro nás – může se nám podařit něco dokázat aspoň v matematice, když se nám to nepovedlo v životě (Pedagogické zásady a termíny ve výuce M&F, str. 24).

4 Má se od studentů vyžadovat přesné vyjadřování?

Podle publikace zmíněné o pár řádků výše „Přesné vyjadřování je vyjadřování, které používáme, když chceme, aby nám nikdo nerozuměl“ (str. 26). Tato nadsázka nemění nic na tom, že přesnost je jednou z vlastností, které činí matematiku matematikou, ale přimlouvám se za to, abychom od studentů vyžadovali spíše porozumění. Přesnost bez porozumění je k ničemu. Rozumí-li student nějaké větě, dovede její obsah srozumitelně formulovat – obrácená implikace přitom platit nemusí. Osvědčilo se mi, že jsem od studentů požadoval, aby výsledek, ke kterému při řešení úlohy došli, formulovali slovy. Podařilo se mi tak časem nejen vymýtit nesmyslné formulace „Rovnice $2x = 2$ má řešení pro $x = 1$“, ale dosáhnout i toho, že místo výroku „Řešením nerovnice $2x > 2$ jsou $x > 1$“ říkali, že jejím řešením jsou **právě všechna** $x > 1$. Vysvětlíte-li žákovskému publiku, proč trváte na přesných, resp. jednoznačných formulacích, pochopí to a nebudou to brát jako jeden z vašich četných vrtochů. A když to budete vyžadovat, zvyknou si také na to, že se nedělí dvěmi a nenásobí třema, i když jim to v důsledku častého sledování televize bude připadat poněkud nezvyklé.

Vzpomínám si na jednu paní učitelku, kterou rozhorlilo, že v televizním **matematickém** pořadu Matematika převážně vážně, který běžel v osmdesátých letech, jsme používali nematematický termín „kolečko“. Vysvětlovali jsme tenkrát s kolegou Odvárkem sčítání modulo čtyři a používali jsme k tomu černé buřinky, na nichž byla namalována bílá kolečka. Paní učitelka poslala do redakce dopis, ve kterém se pozastavovala nad tím, že se mluví o kolečkách místo o kruzích a že ona u svých svěřenců – patrně na rozdíl od nás – o přesné vyjadřování dbá. Trochu jsme to chápali – tenkrát byla v plném proudu modernizace školské matematiky a nedivili jsem se proto, že někteří učitelé jí byli zasaženi poněkud více. Ve své odpovědi jsme se pokusili vysvětlit, že bílá kolečka na buřinkách nejsou kruhy, protože kruh je útvar rovinný, zatímco kolečka leží na „buřinkové ploše“, která je spíše plochou válcovou než rovinnou, takže kruhem být nemohou. Omluvili jsme se, že jsme nenalezli vhodnější termín a skončili jsme větou, kterou si pamatuju dodnes: Ve známé písni „Udělej kolečko, moje galánečko“ je také požadováno, aby galánečka udělala kolečko a ne aby kolem galána opsala kružnici.

5 K ČEMU MI MATEMATIKA BUDE?

S touto otázkou jsme se v různých podobách setkali asi všichni a často jsme pracně vysvětlovali, k čemu všemu se matematika může někdy hodit. Člověk si ale po čase všimne, že uvedenou otázku kladou většinou žáci, kteří s matematikou příliš nekamarádí, kteří si jsou jisti, že ji nikdy potřebovat nebudou, a ptají se jen proto, aby nás naštvali. Takovým jsem většinou říkával něco v následujícím smyslu: „K čemu ti matematika bude, záleží jen na tobě. Možná že k ničemu, když tě nezajímá a nebaví. Kdyby ses ale aspoň trochu snažil, možná bys někdy později uměl lépe zápolit s něčím jiným.“ – Nemějte obavy, nebudu na tomto shromáždění vysvětlovat, proč se ve školách učí matematika; už proto, že jsem to poměrně obsáhle popsal v úvodu gymnaziální učebnice Základní poznatky z matematiky, takže se nebudu opakovat.

Jak bylo řečeno na začátku, prožil jsem před tabulí – často popsanou matematickými vzorci a symboly a skoro vždy nepořádně smazanou – šestačtyřicet let a mohu více méně zodpovědně prohlásit, že bych si to rád, kdyby to bylo možné, zopakoval.

Rámcové vzdělávací programy a integrace v přípravě učitelů

Jana Coufalová

Zavedení rámcových vzdělávacích programů klade na učitele nové požadavky. Období přípravy RVP, čas věnovaný veřejné diskusi i náročný legislativní proces vedoucí k jejich schválení se zdají být příliš zdlouhavé, ale na druhé straně vytvořily fakultám připravujícím učitele prostor pro odpovídající změny. Řada jednání (například Asociace děkanů pedagogických fakult) však ukazuje, že fakulty teprve hledají, jak změnit přípravu učitelů.

V čem spočívá úloha fakult připravujících učitele při zavádění RVP do škol? Co by měl v souvislosti s RVP umět absolvent studia učitelství? Kde jsou dosud rezervy? Dát vyčerpávající odpověď na tyto otázky je bezesporu úkol pro tým odborníků různého zaměření. Pokusíme se proto vymezit pouze některé úkoly, které ze zavedení RVP pro fakulty připravující učitele vyplývají.

Seznámení učitelů fakult s RVP

Na fakultách připravujících učitele se otázkami souvisejícími se zavedením RVP do škol nemůže zabývat pouze vedení fakulty nebo členové katedry pedagogiky. Není to ani úkol výhradně pro didaktiky. Každý vysokoškolský učitel nemusí znát detailně všechny materiály, ale měl by mít představu o tom, co je cílem RVP a jaké jsou jejich dopady do vzdělávání učitelů, jaké kompetence by měl budoucí učitel získat. Domnívám se, že se požadavky na budoucí učitele z pohledu RVP dají zjednodušeně shrnout do následujících bodů:

- umět tvořit školní RVP,
- umět učit podle RVP.

V těchto dvou oblastech má prostor pro působení na studenty každý vysokoškolský učitel. Pro učitele matematických disciplín to znamená zamyslet se nad svým předmětem, hledat možnosti pro vytváření kompetencí učitele, ať již jde o předmět odborně, či didakticky orientovaný. Často to zároveň znamená zcela přehodnotit vlastní způsob výuky, ne-

zaměřovat se na množství osvojených poznatků, ale na výsledný profil absolventa vyjádřený příslušnými kompetencemi.

Zpracování nových studijních oborů a jejich akreditace

Rámcový vzdělávací program předpokládá, že mnohdy izolované znalosti žáků budou začleňovány do větších učebních celků, které jsou strukturovány a propojovány vzájemnými souvislostmi a vztahy. Tradiční předmětové kurikulum je nahrazováno integrovaným kurikulem, založeným na integraci obsahu vzdělávacích předmětů do tzv. vzdělávacích oblastí (Člověk a technika, Člověk a společnost, Člověk a příroda, Člověk a svět, ...). Uvedené snahy jsou reakcí na to, že s postupující globalizací světa klesá význam konkrétních vědeckých poznatků a dovedností a roste potřeba orientovat se v množství informací, usouvztažňovat je do vzájemných vazeb a souvislostí, formulovat a obhajovat názory, pracovat v týmu, volit strategie řešení problémů apod.

Vyvstává tedy otázka, zda uvedeným tendencím odpovídá samotná struktura studijních oborů založená na dvouoborovém vzdělávání učitelů, ve které zpravidla každý obor tvoří izolovaný celek. RVP vyžadují učitele s širším pohledem na danou problematiku, se schopností hledat vazby mezi jednotlivými vědními obory, s dovedností řešit problémy z různých úhlů pohledu a různými nástroji. Připravit jakéhosi „multioborového“ učitele stejně kvalitně v každém oboru je zřejmě utopií. Lze však zachovat hlubší vzdělání v jednom nebo dvou oborech a zároveň poskytnout širší obecný základ.

Takový model přípravy učitelů ověřuje Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni, která bude v příštím akademickém roce přijímat první studenty do nově akreditovaného studijního programu Přírodovědná studia. Jedná se o bakalářský neučitelský studijní program, ve kterém student nejprve získá společný teoretický základ celé skupiny oborů (matematika, fyzika, biologie, chemie, geografie, informatika) a teprve později volí svoji kurikulární cestu. Může se rozhodnout pro další studium dvou oborů doplněné volitelným pedagogicko-psychologickým modulem a vytvořit si tak předpoklady pro vstup do navazujícího učitelského magisterského studia nebo se věnovat hlubšímu studiu jednoho oboru a pokračovat ve studiu neučitelského magisterského oboru na jiné fakultě. V obou případech mu prostor vytvořený pro volitelné předměty umožňuje zapisovat předměty nebo moduly jiných vědních oborů. Konstrukce programu tak odpovídá principům rámcového vzdělávacího programu.

Obsahová inovace stávajících studijních plánů

RVP přinášejí řadu podnětů i pro změnu stávajících studijních plánů „tradičních“ oborů. Za zásadní problém fakult lze považovat malou schopnost kooperace mezi jednotlivými katedrami. Studijní plány potom nevytvářejí organický celek, ale soubor izolovaných modulů nebo předmětů. Tento stav je pokračováním situace, se kterou se student setkal na základní i střední škole. Z hlediska efektivnosti výuky doslova plýtváme časem, když student slyší totéž nebo téměř totéž v různých předmětech. Není právě zde časová rezerva pro rozvoj samostatného myšlení, pro tvořivost, pro spolupráci? Místo soupeření o hodiny a kredity bychom se měli společně zamýšlet nad tím, kde jsou styčné body jednotlivých oborů a kde se obory prolínají. Neplatí to jenom pro katedry garantující studované oborové zaměření, ale i pro katedry pedagogiky a psychologie.

Aby byla příprava budoucích učitelů maximálně efektivní, je třeba těsněji propojit předmětové didaktiky s pedagogickými a psychologickými disciplínami. V pregraduální přípravě to znamená:

- Podrobně analyzovat obsah učiva jednotlivých disciplín a vytvořit systém, ve kterém pedagogicko-psychologické disciplíny vytvoří základ, jejž budou předmětové didaktiky rozvíjet a konkretizovat, ne opakovat.
- Rozšířit spolupráci mezi odbornými katedrami a katedrami pedagogiky a psychologie při výuce odborných didaktik.

Pro studenty učitelství je mimořádně přínosné, jestliže se například na průběhu seminářů podílí několik kateder. To umožní zkoumat danou problematiku z více pohledů. Seminář může být organizován tak, že v učebně jsou současně přítomni učitelé různých odborností. Například v tématu Řešení slovních úloh studenti objevují s učitelem matematiky různé matematické postupy a zároveň pod vedením psychologa a pedagoga provádějí jejich rozbor z hlediska myšlení žáka, z hlediska vhodnosti pro různé typy žáků se specifickými potřebami apod. Příprava takového semináře je samozřejmě velmi náročná. První pokusy v tomto směru jsme již prováděli. Bohužel byly postavené jen na nadšení několika jedinců a narážely na řadu organizačních problémů. Přesto se domnívám, že v uvedeném způsobu práce je cesta k učiteli, jehož profil odpovídá rámcovému vzdělávacímu programu.

Organizačně jednodušší je spolupráce na výuce jednoho předmětu formou rozdělení výukového času. V rámci jednoho předmětu se studenti po-

stupně setkávají s odborníky z různých oblastí schopnými uchopit dané téma z různých pohledů. Takto postupujeme například v předmětu Multimédia ve výuce na 1. stupni. Budoucí učitelé 1. stupně se učí využívat multimediální prostředky ve vyučování matematiky, českého jazyka, prvouky a vlastivědy. Poznávají společné možnosti těchto prostředků, obecné zásady pro jejich využití i specifika uplatnění v jednotlivých předmětech.

Obě popsané formy výuky vedou vysokoškolské učitele k vzájemné komunikaci a týmové práci, kterou přirozeně přenášejí i na studenty.

- Umožnit studentům zažít již během studia „na vlastní kůži“ zrušení hranic mezi jednotlivými předměty, rozšířit vzájemnou spolupráci odborných kateder.

Potřeba spolupráce více kateder vzniká například při použití projektové metody. Můžeme ji uplatnit jak v odborné přípravě studentů, tak jako metodu práce se žáky v rámci didaktické přípravy. Společné hledání řešení problému skupinou studentů vyžaduje získávání informací i z oblastí, které nejsou jejich studijním oborem, zveřejnění výsledků práce skupiny zvyšuje pocit zodpovědnosti. Na fakultě zatím nevyužíváme tuto metodu příliš často. Více zkušeností máme s realizací projektů na základní škole. Po několika přednáškách o projektovém vyučování studenti ve skupinách připravují jednodenní až týdenní projekty, které ověřují v praxi. Na přípravě projektu spolupracují s didaktiky z různých kateder (především z katedry matematiky, biologie, pedagogiky a českého jazyka).

Nově koncipované učební celky v RVP vyžadují i vznik netradičních předmětů v pregraduální přípravě studentů. Všichni studenti učitelství by například měli absolvovat nové předměty nebo předmětové moduly zaměřené na výchovu ke zdraví. Jsou tak vytvářeny předpoklady pro nalézání vazeb s vlastním oborem a možností didakticky účelné integrace.

Od akademického roku 2004–05 bude do všech studijních plánů učitelských programů na FPE v Plzni implementován předmět Člověk a zdraví. Tento předmět je zařazen jako povinný do studijního plánu oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ, jako povinně volitelný do modulu společného základu studijního plánu programu Učitelství pro ZŠ a Učitelství pro SŠ.

Změny v pojetí jednotlivých předmětů

Jedním z cílů základní školy je „podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů“ [RVP pro základní vzdělávání,

část C]. K naplnění tohoto cíle by měl mít každý žák podle svých individuálních potřeb dostatek prostoru a času k aktivnímu osvojení učiva.

Studenti učitelství však sami většinou poznali jen školu, ve které byly poznatky předávány žákům frontálně, bez ohledu na jejich individuální potřeby a možnosti. Matematické vzdělávání chápou často jako přijetí daných pojmů a algoritmů a nácvik jejich užití v typizovaných situacích. Je známé, že dosud poznaný a osobně prožitý edukační styl silně ovlivňuje pojetí vlastní výuky. Změnit chápání matematiky u těch, kdo budou matematiku učit, považuji za klíčový a zároveň nejobtížnější úkol fakult připravujících učitele. Vysokoškolské studium je často poslední možností, jak „přetvořit“ učitele matematiky a jeho prostřednictvím změnit matematické vzdělávání na základních školách.

Kritériem kvality studijního programu by nemělo být množství odpřednášené látky, postižení všech matematických disciplín v co největším rozsahu, ale možnosti, které dává studium studentům pro pochopení myšlenkových postupů, pojmů a vztahů charakteristických pro matematiku. Studenti se musí učit hledat různé modely reálných situací, argumentovat při řešení konkrétních matematických problémů, pracovat v týmu. Pokud sami neprojdou takovou zkušeností, jenom obtížně budou principy RVP uplatňovat v praxi.

Aby byl absolvent schopen aktivně se podílet na tvorbě školního RVP, musí pochopit poznatkovou strukturu učiva, podstatu početních algoritmů apod. Odpověď i na zdánlivě triviální otázky typu: „Co musí žák umět, aby mohl zpaměti vypočítat $23 + 37$*?“ není pro učitele tak jednoduchá, jak se může zdát na první pohled.*

Část RVP vymezující vzdělávací oblast matematiky zdůrazňuje využívání výpočetní techniky jako prostředku, který zpřístupňuje matematiku všem žákům, tj. i žákům se specifickými potřebami. I na tuto oblast bychom se měli v přípravě učitelů zaměřit. Prakticky všichni studenti jsou dnes uživateli výpočetní techniky, to ale neznamená, že ji budou umět využívat ve vyučování. Do jednotlivých předmětů, včetně didaktických, je proto třeba zavést konkrétní ukázky využití vhodného softwaru.

Změny v pojetí předmětů se mohou odrazit i ve změně podoby zkoušky. V dosavadním vysokoškolském studiu je zkouška často jednorázovým izolovaným aktem, při kterém je student zkoušen více z toho, jakou má paměť, než z pochopení podstaty učiva, schopnosti aplikace. U zkoušky je většinou sám, nemá možnost prokázat schopnost práce v týmu, spo-

lupráce je dokonce chápána jako něco nežádoucího. Jenom ojediněle je uplatňován odlišný způsob zkoušky, například formou přednášky studenta na předem zadané téma, odborné diskuse skupiny studentů, odpovědí na konkrétní problém s využitím vlastních poznámek a odborné literatury apod.

Celoživotní vzdělávání

Zatím jsme se zabývali reakcí fakult na RVP v rámci pregraduální přípravy učitelů. Svoji roli by však měly fakulty sehrát i ve vzdělávání učitelů, kteří již působí v pedagogické praxi. Jejich situace může být do jisté míry náročnější než u „čerstvých“ absolventů. Mají zažité a „osvědčené“ postupy, budou muset změnit stereotyp práce. Vysokoškolská pracoviště by se měla podílet na přípravě materiálů pro vzdělávání učitelů, na vlastní realizaci tohoto vzdělávání i na jeho evaluaci.

Tvorba učebnic a dalších materiálů

Nový charakter vyučování vyplývající ze zásad RVP, vznik nových učebních celků a nových předmětů bude vyžadovat také vznik jinak koncipovaných učebnic a metodických materiálů. Takovou náročnou a zodpovědnou práci nemůže zvládnout ani velmi erudovaný jednotlivec. Je to výzva pro vznik týmů sestavených z učitelů základních a středních škol, z vysokoškolských učitelů i dalších odborných pracovníků.

Úspěšnost rámcových vzdělávacích programů bude záviset na učitelích. Z uvedených úvah vyplývá, že vysoké školy mohou do značné míry zavádění RVP do praxe ovlivnit. Uvědomíme-li si však, že učitelské studium trvá 4–5 let, musíme přiznat, že fakulty připravující učitele zůstaly požadavkům praxe zatím hodně dlužny.

Literatura

[1] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* VÚP, Praha 2003.

[2] Hejný M., Kuřina F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

[3] Coufalová J.: *Možnosti vyučování matematiky v integraci předmětů 1. stupně.* In: *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* Univerzita Palackého, Olomouc 2004.

Matematika a studium technických oborů

Jaroslav Černý

Abstrakt

Změny struktury oblasti terciárního vzdělávání, Boloňská deklarace a její důsledky, připravované změny v charakteru základního i středního vzdělávání ovlivňují i výuku jednotlivých předmětů ve studiu technických oborů. Práce se snaží prezentovat některé aspekty k pochopení probíhajících procesů.

1 Několik obecných deklarací

Chceme-li vyslovovat prognózy či vize v nějaké oblasti, měli bychom znát podmínky (aspoň ty zásadní), které jsou pro danou oblast důležité. Naší oblastí je vzdělávání techniků. Následujících pět podmínek považuji za důležité.

Vývoj populace. Tabulka 1, jejímž zdrojem je Statistická ročenka 2002, ukazuje na vývoj populace v letech 1975–1999. Čísla vztažená k roku jsou počty narozených dětí v ČR.

Tabulka 1

1975	1980	1985	1990
191 798	**153 801**	**135 881**	**130 554**
1991	1992	1993	1994
129 354	**121 705**	**121 025**	**106 597**
1996	1997	1998	1999
90 448	**90 657**	**90 536**	**89 471**

Potřeby společnosti a praxe v technických oborech. Meziroční nárůsty výkonů ve většině průmyslových odvětví, částečné otevření evropského pracovního trhu, rychlé uplatnění absolventů v praxi jsou pozitivní faktory pro rozvoj studií technických oborů.

Boloňská deklarace. Politické rozhodnutí související se vstupem do EU, které změnilo strukturu převážné většiny technických studijních programů. Program také souvisí s politickým rozhodnutím o navýšení procenta populace, které se bude ucházet a může získat vysokoškolské vzdělání. V bakalářském stupni studií došlo k významnému zvýšení počtu studentů v úvodu studia.

Bílá kniha a rámcové vzdělávací programy. Analýza stavu českého školství a její důsledky, které z pohledu terciárního vzdělávání a technického vysokého školství mohou přinést protichůdné stavy. Pozitivní jev v možném aktivnějším přístupu studentů k poznání, negativní je další možná nehomogenita ve vstupních znalostech a dovednostech.
Požadavky (např. OECD) **na vyšší počet vysokoškolsky vzdělaných.** Prudký nárůst počtu soukromých vysokých škol, kterých je dne více než škol státních a veřejných. Stále nedostatečný počet vysokoškolsky graduovaných ve srovnání s vyspělými zeměmi.

Některé důsledky v oblasti vzdělávání v technických studijních programech:

- Změny v pojetí a struktuře technických studijních programů mění charakter tohoto studia na studium obecné, popisné, s přiměřenou (ve srovnání s minulostí nižší) úrovní matematické přípravy. Je otázka, jak se projeví relace zvyšování počtu studentů, deklarace o zachování úrovně studia a prudce klesající populační křivka.
- Matematika ve většině studijních programů v bakalářském stupni studia bude orientována na seznámení se základními matematickými pojmy, jejich symbolikou (bohužel často stále rozdílnou od inženýrské symboliky), s nimi spojenými početními rutinami a možnými aplikacemi.
- Zvyšující se počty studentů a nezvyšující se počty učitelů (*Pozn. Tento stav je však vyvažován klesajícím počtem výukových hodin*) vedou k hledání nových organizačních forem a nových schémat výuky a učení. Jedním z důsledků je odosobnění výuky (−), užívání počítačových podpor výuky i v testování znalostí a přesun váhy studia do samostatné práce (+).
- Skoro všechny fakulty (např. na ČVUT je jedinou výjimkou fakulta architektury) přijímají studenty bez přijímací zkoušky za splnění jistých podmínek. Přibližně čtvrtina přihlášených uchazečů tyto podmínky splňuje.
- Studijní bakalářské programy jsou na většině českých technických univerzit koncipovány široce, např. fakulta strojní ČVUT má jediný program, elektrotechnická 2 a stavební 3 (Geodézie a kartografie 130, Architektura a stavitelství 300, Stavební inženýrství 1300, jedná se o přibližné počty po zápisu studentů). Důsledkem jsou opět změny v organizaci výuky.

Předcházející údaje by neměly vést k pesimistickým závěrům. Matematika na technice se vždy pohybovala v rámci, který jí vývoj a stav technického oboru vymezil. Paradoxem jen je, že čím více skryté matematiky technika potřebuje, tím méně ji poskytuje svému uživateli (to by možná až tak nevadilo), ale i tvůrci (to je systémový problém, který potřebuje najít rychle účinné řešení).

Podobné úvahy najdeme v analogických statích již více než 150 let a naznačená řešení směřují vždy k jedinému a to diferenciaci ve výuce. Ať již diferenciaci přirozené (na nadanější, bystřejší a pracovitější klaďme náročnější úkoly a veďme je k touze po poznání), tak řízené (vzdělávejme výše uvedené jinak). Obě cesty již byly vyzkoušeny a mají svá úskalí. Musíme se o ně pokoušet stále (např. http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari).

2 Počítače

Fenomén, který „ovládá“ výuku na technice, matematiku však ve velké většině míjí. Aby mi bylo rozuměno: existuje velké množství pokusů (úspěšných pokusů) o užití počítačů ve výuce matematiky. Ať již jde o užití počítačových algebraických systémů, grafických kalkulátorů či užití počítačů při testování znalostí nebo jako výukového média. Ve velké většině případů se však výuka realizuje standardními metodami (přednáška, cvičení, křída, tabule, skripta, učebnice). Existuje celá řada důvodů proč výuku podporovanou počítačem realizovat nelze, najdeme i popis pokusů ukazujících snahu o užití. Konferencí a seminářů na toto téma je stále více, např. [1, 2].

Ukažme si možné použití počítačů, kdy počítač je prostředkem při prezentaci výukové studijní opory. Před dvěma lety jsme prezentovali cvičné online testování pro přijímací zkoušky z matematiky na ČVUT, http://mat.fsv.cvut.cz/entrance. Systémy testování znalostí mají i díky distančnímu vzdělávání stále sofistikovanější podobu. Existují specializované instituce, které se těmito problémy zabývají, např. Institute for Learning and Research Technology (http://www.ilrt.bris.ac.uk/), systém TAL (**T**est **A**nd **L**earn), http://www.tal.bris.ac.uk, Computer Assisted Assessment Centre, http://www.caacentre.ac.uk/ nebo centrum MLSC na univerzitě v Loughborough, http://learn.lboro.ac.uk/sci/ma/mlsc. Různé formy testů lze použít k různým účelům. Nejjednodušší formu mají MCQ testy (Multiple Choice Question).

Byť „testoskepticismus“ matematiků je přirozený, přesto jsme MCQ testy na fakultě stavební ČVUT v Praze zavedli v prvních dvou se-

mestrech. Důvodem byly i podmínky popsané v první části: organizační výhody a fakt, že se testují základní rutiny. Dalším důvodem byla možnost cvičného testování, http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari a hlavně přímého testování na počítačích a jednotnost podmínek testování pro velké množství studentů. Studentovi se při testování vygeneruje test, student po vyřešení zadá do systému výsledky. Okamžitě má dostupný výsledek testování (počet dosažených bodů), tento údaj i všechny výsledky testování má k dispozici i učitel. Student by mohl testování absolvovat i mimo výuku, organizační schéma této varianty hledáme. Testy v 1. semestru představují jistým způsobem „prodloužené přijímací řízení“, při nezískání 25 bodů ze všech testů (maximum je 100, špatné odpovědi jsou penalizovány) nezíská student zápočet a předmět musí opakovat. Detailní údaje naleznete na poslední webové adrese uvedené výše. V roce 2003/04 byly testy realizovány písemnou formou. Student nesmí při řešení testů od akademického roku 2004/05 používat kalkulačku. Problémem při realizaci na počítači je nutnost zamezení přístupu na internet a do matematických programů. Zkouška z matematiky je koncipována standardně s otevřenými úlohami, probíhá také pouze písemně.

Testy jsou prostředkem průběžné kontroly studia v obou semestrech prvního roku studia. Pokud konstrukce testových příkladů z látky 1. semestru nebyla obtížná (základy diferenciálního počtu, základy lineární algebry, analytická geometrie v prostoru), pak formulace testových úloh pro 2. semestr (integrální počet funkce jedné proměnné, základy funkce dvou proměnných a základy obyčejných diferenciálních rovnic) byla obtížnější. Diskuse o finální podobě systému probíhá, jsou hodnoceny zkušenosti z prvního roku použití tohoto systému. Její definitivní podoba pro všechny kurzy matematiky pro bakaláře bude známa přibližně za rok. Navazující články najdeme ve [2, 3].

3 Geometrie (deskriptivní)

Jak se dotkly změny v koncepcích studia výuky deskriptivní či konstruktivní geometrie? Obecně lze říci, že se jí tak dramaticky na většině českých technických škol, kde byla vyučována, nedotkly. V některých případech předmět vůbec hodinově omezen nebyl (např. stavební fakulta ČVUT v Praze, 1. semestr, $2 + 2$). To často bylo i důvodem, že v jeho obsahu nedošlo či nedojde k žádným dramatickým změnám.

Provedeme-li analýzu obsahu kurzu geometrie na jednotlivých fakultách, dostaneme zhruba obraz dvou typů kurzů:

- Standardní kurz deskriptivní geometrie, mnohdy se snahou o užití počítače k realizaci standardních konstrukcí (např. FAST VUT Brno).
- Kurz, který spojuje základy klasické deskriptivní geometrie s prostředky lineární algebry a analytické a diferenciální geometrie (se snahou o užití počítačů).

Jsem přesvědčen, že druhý typ kurzu je vhodnější. Na fakultě stavební ČVUT v Praze se snažíme o jeho realizaci. Je otázka, jak se při příští reformě projeví „evropské tendence“, kdy na řadě renomovaných škol, i s dlouholetou tradicí výuky deskriptivní geometrie, byl tento předmět zrušen (např. TU Vídeň).

Následující příklad ukáže, jak vhodné použití jednoduchých analytických prostředků pomůže odhalit syntetické vlastnosti objektu s rozsáhlými aplikacemi ve stavební praxi. Tímto objektem je hyperbolický paraboloid. Zavedeme jej jako translační plochu, která vznikne posouváním jedné paraboly po druhé. Student potřebuje pouze znát rovnici roviny a analytické vyjádření přímky (látka 1. semestru kurzu matematika) a analytický popis křivek, který je předmětem přednášek kurzu konstruktivní geometrie, které tématu předcházejí.

Uvažujme dvě paraboly P: $X(u) = [u, 0, a^2u^2]$, $a \neq 0$, Q: $X(u) = [0, v, -b^2v^2]$, $b \neq 0$, translační plocha vznikne „translací“, princip ukazuje obrázek 1. Je-li

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (0, v, -b^2v^2), \\ X(u,v) &= X(u) + \mathbf{v} = [u, 0, a^2u^2] + (0, v, -b^2v^2) = [u, v, a^2u^2 - b^2v^2] \\ z &= a^2x^2 - b^2y^2. \end{aligned}$$

Ukážeme, že plocha je přímková, a odvodíme si její základní vlastnosti. Pravou stranu poslední rovnice rozložíme na součin lineárních dvojčlenů

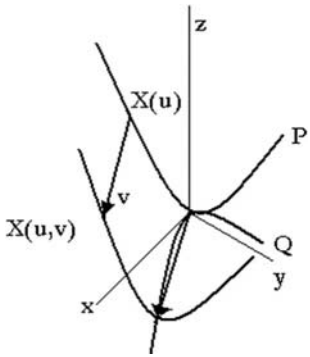
$$z = (ax - by)(ax + by).$$

Položíme $(ax - by) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Poslední rovnice popisují pro každé c rovinu, všechny tyto roviny jsou navzájem rovnoběžné. Jejich řezy plochou $z = a^2x^2 - b^2y^2$ jsou přímky

$$p\colon ax - by = c, \quad z = c(ax + by).$$

Podobně, je-li $(ax + by) = c$, $c \in \mathbb{R}$, jsou řezy těmito rovinami plochou přímky

$$q\colon ax + by = c, \quad z = c(ax - by).$$



Obr. 1

Student může řešit následující úlohy sám nebo úlohy prezentuje učitel:

1) Vyšetřete vzájemnou polohu libovolných dvou přímek p, resp. q, a vzájemnou polohu libovolné dvojice p, q.

2) Označme ρ^p rovinu $(ax - by) = 0$. Tuto rovinu nazveme řídicí rovinou plochy. Najděte algoritmus konstrukce přímek p plochy, známe-li tuto řídicí rovinu a dvojici přímek q.

3) Každé dvě dvojice přímek p a q určují tzv. zborcený čtyřúhelník. Narýsujte nějaký zborcený čtyřúhelník pro plochu danou rovnicí $z = x^2 - y^2$.

4) Ukažte, že hyperbolický paraboloid je jednoznačně určen libovolným zborceným čtyřúhelníkem. Najděte algoritmus pro sestrojování přímek p i q.

5) Odvoďte rovnici plochy, je-li zadána zborceným čtyřúhelníkem.

6) Určete řez plochy $z = x^2 - y^2$, resp. $z = a^2x^2 - b^2y^2$, rovinou $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

7) Co je řezem plochy rovinou, která není rovnoběžná s osou z?

8) Nakreslete vrstevnice plochy $z = x^2 - y^2$ a plochy $z = 2xy$?

9) Jak spolu obě plochy souvisejí, určete řídicí roviny druhé plochy.

10) Jak je určena tečná rovina plochy v jejím libovolném bodě? Je-li plocha zadána zborceným čtyřúhelníkem, určete tečnou rovinu, narýsujte a napište její rovnici.

Studenti mohou touto cestou sami objevit základní vlastnosti hyperbolického paraboloidu jako přímkové plochy, zároveň si procvičí základy analytické geometrie v prostoru.

Literatura

[1] *Sborník 22. mez. Kolokvium.* Vyškov 2004.

[2] *Sborník Pedagogický software.* Č. Budějovice 2004.

[3] *Sborník 28. konference matematika v inženýrském vzdělávání.* Rožňava 2004, v tisku.

Použití počítačů na ZvŠ

Petr Dvořák

Jedním ze specifik zvláštní školy je předmět s názvem Rýsování. Nejedná se o součást hodin matematiky, ale o samostatný předmět, který reflektuje budoucí potřeby žáků řemeslných oborů jako jsou truhlář, zedník, opravář s různými specializacemi, ale také obor šička apod. Kromě evidentního zaměření na schopnosti nakreslit náčrt, narýsovat a hlavně přečíst plán má tento předmět i řekněme skryté ambice. Například, jako jeden z mála vyučovaných předmětů, stále a systematicky rozvíjí (nebo alespoň pravidelným „tréninkem“ udržuje) jemnou motoriku rukou. Dále formuje umění vidět a číst obrázek, tedy zpracovat informace, které nám obrázek dává. Žáci se zde učí pečlivosti a trpělivosti. Budují se zde pracovní návyky, které můžeme využít v jakémkoliv oboru lidské činnosti.

Ve své práci se zaměřuji na použití počítačů při výuce matematiky, potažmo rýsování. Zde bych rád představil jeden z experimentů, který právě probíhá. Součástí předmětu rýsování je v devátém ročníku (v rámci celého jednoho pololetí) pravoúhlé promítání. Žáci by po absolvování této látky měli být schopni narýsovat nárys, bokorys a půdorys poupravených základních geometrických těles (například krychle s centrálně umístněným válcovým otvorem). Dále by měli být schopni rozpoznat o jaký útvar se jedná v případě čtení obrázku.

Jednou z didaktických pomůcek na tyto hodiny je promítací kout a sada krychliček. Promítací kout je složen ze tří k sobě kolmo připojených čtvercových stěn z tvrdého kartonu, které jsou pro usnadnění potištěny čtvercovou sítí (shodné rozměry s příslušnými krychličkami). Jedná se o velmi dobře použitelnou pomůcku, jejíž použití naráží na určité obtíže. Jednou z nich je špatná manipulovatelnost s pomocí krychlí vymodelovaným objektem. Pozor, zde je nutné upozornit, že žákům ZvŠ triviální objev, že když nemohou hýbat s koutem, mohou se pohnout oni, trvá delší dobu a někteří to nedokáží přijmout vůbec (změna polohy těla = změna situace)! Totéž se pochopitelně týká i otáčení objektu samého. Tato obtíž je obecně známa. Fixace na určitý tvar je pozorovatelná u všech dětí (např. poloha tupoúhlého trojúhelníka tak, aby nejdelší

strana byla dole). Další problém při použití přináší nižší schopnost našich žáků přesné manipulace s krychličkami. Přes veškeré problémy se však jedná o jednu z nejlepších pomůcek sloužících při výuce rýsování.

Název článku však hovoří o možnostech využití moderních technologií. Na internetu je v současné době (zejména díky Flash a Java aplikacím) možno využívat mnoho dynamických aplikací. V našem případě používáme programy, které naleznete na internetové adrese

http://www.fi.uu.nl/wisweb/welcome_en.html.

Z bohaté nabídky se jedná zejména o aplikace:

- Building houses – žáci klikáním myší staví libovolné krychlové těleso a počítač sám generuje příslušné průměty.
- Building houses with side views – zde se žáci snaží zpětně vybudovat pomocí průmětů zadané krychlové těleso.

Krom výše uvedených aplikací lze využít, pro podporu rozvoje představ o výsledném průmětu tělesa, i dalších aplikací z těchto stránek (ale i jiných). Společným jmenovatelem všech aplikací je snadná ovladatelnost jen za pomoci myši. Dále je to dynamičnost zobrazovaných objektů. Každý útvar lze otáčet a prohlížet ze všech stran. První experimenty navíc ukazují, že zde například odpadá problém pohybu. Hýbe se totiž jen „obrázek“, nikoliv žák nebo reálný objekt.

V dalších experimentech bychom rádi dospěli k závěrům, jaké jsou výhody a nevýhody použití takovéhoto software. Zejména znalost negativ je zásadní pro kvalitní využití software a jeho implementaci do výuky. Nedílnou součástí také bude srovnání výsledků s výsledky žáků, kteří počítače využívat nebudou.

O JEDNOM MULTIMEDIÁLNÍM TEXTU

Eduard Fuchs, Helena Binterová

Na základní i střední školy v celé republice se definitivně dostala výpočetní technika a učitelé všech předmětů včetně matematiky stojí před úkolem, jak tuto techniku smysluplně využívat. Možností, alespoň teoreticky, se nabízí celá řada, například:

- využívání Internetu jako mocného informačního zdroje;
- podpora výuky pomocí programů, které usnadní učitelům i žákům provádění činností (například komplikovaných výpočtů), které odvádějí pozornost od vlastního smyslu studovaného problému;
- demonstrace situací (například v geometrii), které bez využití počítačů konstruovat nelze buďto vůbec nebo jen s mimořádným úsilím;
- tvorba učebních textů, které usnadní žákům pochopení probíraného učiva a usnadní jim samostatné studium.

Je přitom do značné míry absurdní, že nástup počítačů místo toho, aby posílil roli matematiky, často vede k „postmoderním“ úvahám, že výuka matematiky začíná být zbytečná, když „za nás přece počítají počítače“. Tato úvaha je oprávněná asi stejně jako kdybychom řekli, že je zbytečné učit se cizím jazykům, když jsou na světě slovníky, dnes už dokonce i elektronické. Na řadě příkladů lze snadno dokumentovat, proč je zmíněná téze naprosto nesmyslná a neodůvodněná. Jakmile však ve společnosti toto mínění zapustí kořeny, je velmi obtížné s ním polemizovat a bránit se mu. Účinnější než vyvracení těchto názorů tam, kde argumenty stejně vážnější roli nehrají, je ukazovat dětem, že matematika je v tom nejkrásnějším slova smyslu dobrodružstvím poznávání a že nespočívá jen v učení se formulkám a konstrukcím, jejichž smysl jim uniká.

V tomto příspěvku chceme ukázat na jednu z možností, jak dětem ukázat, že „příroda je popsána jazykem matematiky“, a nenásilnou formou jim předvést, že i standardní školská matematika jim umožní uvidět netušené skutečnosti. V připravovaném multimediálním textu na téma

chaos se snažíme ukázat, že počítače skýtají i jiné možnosti než ty, které jsme uvedli v úvodu tohoto příspěvku. Snažíme se, kromě jiného, poukázat na to, že výpočetní technika nám skýtá:

- nesčetné zdroje motivační, které mohou žákům základních i středních škol ukázat, jak jsou matematické metody užitečné při zkoumání oblastí, které na první pohled s matematikou nesouvisejí,
- možnost demonstrovat, že i standardní „školská“ matematika umožňuje netriviální, užitečné a nečekané aplikace,
- příležitost přispět k často požadované humanizaci vzdělání nikoliv omezováním matematiky, ale prokázáním její vazby s výtvarným uměním, hudbou apod.,
- možnosti poskytnout žákům nástroj kreativní činnosti, který spojí matematické znalosti a pohledy s esteticky účinnými výsledky, které žákům umožní nový pohled na zdánlivě nudnou teorii.

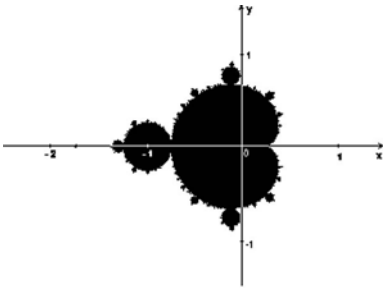
Motivace

Přes neustále se rozšiřující možnosti využití matematiky zůstávaly až do sklonku 20. století oblasti matematickými metodami zdánlivě nepopsatelné. Jejich společným jmenovatelem byl pojem *chaos*, který představoval náhodnou, nepředstavitelnou a nepředvídatelnou tvář přírody, vzpírající se kauzalitě a všem známým zákonitostem. Chaotické chování lze přitom sledovat v nejrůznějších situacích. Připomeňme za mnohé například jen *Brownův pohyb*, známý všem středoškolákům, *turbulence*, které představují vážné problémy pro konstruktéry letadel a ponorek, pro lékaře i atomové fyziky, či chování zvířecích populací, popisované obvykle známým modelem s názvem *dravec a kořist*.

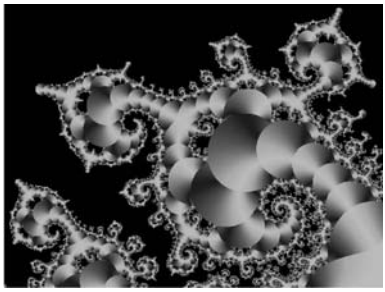
Ačkoliv se tyto procesy řídí stejnými zákonitostmi jako ostatní přírodní procesy, je jejich chování natolik složité a je podřízeno tolika faktorům, že teprve zhruba od poloviny dvacátého století se začalo pracovat na jejich modelech. Že je však tento vývoj deterministický, bylo samozřejmé a tak se zdálo, že zlepšování prognóz je jen otázkou dostatečně rychlého zpracování dostatečně přesných vstupních údajů.

Brzy se však mělo ukázat, jak naivní byly tyto představy.

Klíčovou osobností pro rozvoj teorie chaosu se stal matematik Benoit Mandelbrot, který překvapivě jednoduchým, avšak bez využití počítačů neuskutečnitelným způsobem ukázal, jak lze jednoduchými iteračními procesy modelovat struktury, které sám pojmenoval *fraktály*.



Obr. 1 Mandelbrotova množina



Obr. 2 Příklad fraktálu

Mandelbrotova množina (viz obr. 1), vznikne jednoduchým iteračním procesem, který lze bez problémů vysvětlit i středoškolákům. Její vlastnosti však odhalují složitost zdánlivě jednoduchých struktur a působivě demonstrují vlastnosti fraktálů.

Příslušná teorie se v posledních třech desetiletích intenzívně rozvíjela a umožnila popsat řadu jevů, které vzdorovaly klasické matematice. Stala se tak stala jedním z nejvýznamnějších výsledků moderní matematiky konce 20. století. Obrázky uměle vytvořených fraktálů jsou navíc neobyčejně esteticky působivé (viz obr. 2 – v barevném provedení je dojem samozřejmě nesrovnatelný s černobílou reprodukcí) a tak se začaly objevovat na obálkách knih, v kalendářích, reklamách a jinde, aniž si vůbec jejich tvůrci a diváci uvědomovali, že se dívají na matematické objekty.

Jaký text připravujeme

Připravovaný multimediální text bude koncipován tak, aby učitelům matematiky základních i středních škol poskytl materiály, které ve výše zmíněném duchu umožní ukázat žákům netradiční matematické aplikace a současně žákům samotným umožní experimentování s učivem, které znají (kvadratické funkce, posloupnosti apod.) Text bude členěn do několika navzájem propojených částí, z nichž uveďme alespoň některé.

Úvodní prezentace

Motivační přehled poskytne základní informaci o problematice. Ukáže matematické souvislosti zdánlivě nesouvisejících jevů a možnosti, jak matematika může tyto jevy popsat.

Galerie fraktálních struktur

Přehled působivých počítačově generovaných dvourozměrných i trojrozměrných fraktálních struktur (Juliovy množiny, modely krajin, rostlin apod.), videosekvence přibližující vnitřní struktury těchto objektů apod. Pomocí jednoduchých programů bude možná samostatná tvorba analogických objektů.

Programové vybavení

Některé velmi jednoduché programy, jako např. COMLOGO, jejichž základy zvládnou bez problémů i žáci základních škol, umožňují efektní tvorbu řady objektů, jako je např. Kochova křivka, Sierpinského koberec atd. Uživatelské prostředí bude ovšem uzpůsobeno tak, aby tvorba těchto objektů byla možná i bez znalostí programů samotných.

Experimenty s logistickou rovnicí apod.

Logistická rovnice popisuje chování některých systémů, například živočišných populací. K popisu vývoje těchto systémů v prvním přiblížení stačí provádět iterace kvadratických funkcí. Volbou příslušných parametrů lze názorně pozorovat rozdílná chování těchto systémů v závislosti na okolních podmínkách. Text bude obsahovat předchystané tabulky pro modelování takových procesů. Žáci budou moci „experimentovat“ s funkcemi, které ze školy znají a přitom pozorovat, jak chování těchto funkcí ovlivňuje vývoj složitých přírodních systémů.

Samozřejmou součástí textu budou komentáře pro vyučující, manuály pro práci s programy, podrobný popis všech studovaných procesů, odkazy na literaturu a na webové stránky atd.

Literatura

[1] Fuchs E., Binterová H.: *O jednom netradičním využití počítačů ve výuce matematiky*, Department of Mathematics Report Series **11**, no. 1 (2003), 223–230.

[2] Gleick J.: *Chaos.* Ando Publishing, Praha 1996.

[3] Mandelbrot B.: *Fraktály (Tvar, náhoda a dimenze).* Mladá fronta, Praha 2003.

[4] Prigogine I., Stengersová I.: *Řád z chaosu.* Mladá fronta, Praha 2001.

PUMA – NÁSTROJ PRO NÁROČNÉ VĚDECKO-TECHNICKÉ VÝPOČTY I VÝUKU NA DOSAH RUKY (S MOBILEM)

Petr Girg

Počítačové algebraické systémy (PAS) mají v České republice už více než desetiletou tradici a jejich využití ve výuce a výzkumu je čím dál intenzivnější, jak dokládá celá řada publikací, přednášek a grantů. Bohužel pořízení a správa profesionálních verzí těchto programových balíků vyžaduje nemalé náklady a ne každá organizace (např. škola, fakulta, ústav akademie věd apod.) si může dovolit jejich provoz. Z tohoto důvodu společnými silami ČVUT a ZČU vznikl projekt (v rámci programu zlepšení infrastruktury výzkumu financovaný Ministerstvem školství mládeže a tělovýchovy; označení 1N), jehož cílem je vytvořit a rozvíjet portál, na kterém budou široké technické veřejnosti a studentům dostupné vědecko-technické a výukové interaktivní materiály, aplikační worksheety uspořádané podle oborů resp. učebních předmětů. V rámci tohoto projektu jsou vytvářeny interaktivní webové stránky (technologie *webMathematica* a *MapleNet*) s jejichž pomocí lze přímo realizovat výpočty na našem serveru vzdáleným přístupem pouze prostřednictvím standardního webového prohlížeče. Uživatel tedy nemusí mít nainstalovány nákladné PAS programy *Mathematica* a *Maple*, na svém počítači a přesto v nich může realizovat výpočty. Samozřejmě se lze připojit libovolným zařízením podporujícím interaktívní stránky psané v JAVě. Palmtop nebo mobilní telefon se připojeny internetem k našemu serveru stávají mocným nástrojem, který uživateli provede zjednodušení algebraických výrazů, najde řešení (algebraických, obyčejných i parciálních diferenciálních, integrálních atd) rovnic, najde derivace nebo primitivní funkce, provede statistickou analýzu dat a podobně.

Hlavním příspěvkem Západočeské Univerzity v Plzni (ZČU) do společného projektu bude rozvoj distribuovaných výpočetních systémů pro náročné výpočty. Přesněji řečeno, cílovým stavem projektu bude vybudovaný výpočetní cluster PC pro rozsáhlé vědecko-technické výpočty

Palmtop připojený na internet umožňuje snadný přístup k vzdáleným výpočtům

Mobilní telefon jako „klávesnice“ kalkulačky s výpočetní silou clusteru

Obr. 1 Cluster s webovým přístupem je vždy a všude po ruce

a zpracování experimentálních dat s přístupem přes webové rozhraní, které se bude nacházet na portálu http://puma.feld.cvut.cz/, spravovaném na ČVUT. Přes toto rozhraní bude možné na clusteru spouštět např. numerické řešiče obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, symbolické řešiče diferenciálních i algebraických rovnic, integrátory, programy statistického zpracování dat a speciální programy testování hypotéz. Přes toto rozhraní budou rovněž do clusteru zasílána data úloh ke zpracování a zde zpětně uživatel obdrží výsledky výpočtu, a to buď např. grafickou formou (graf řešení apod.), textovou formou, pokud se bude jednat o symbolické výpočty, nebo např. webovým odkazem na soubor zpracovaných dat, který si bude moci stáhnout.

Výhoda navrhovaného řešení spočívá v tom, že umožní širokému spektru uživatelů – ne nutně odborníkům v numerické matematice a statistickém zpracování dat – z různých odvětví (např. chemie, biologie, technické vědy, sociální vědy apod.) snadný (snadno ovladatelný i pro neprofesionály v matematice) a levný přístup k nejmodernějším algo-

ritmům běžícím na výkonném clusteru. Proto zde uvedený způsob provádění rozsáhlých výpočtů tzv. web-computing zažívá celosvětový boom. V současné době je vedoucím softwareovým produktem v oblasti web-computingu program *webMathematica* firmy Wolfram Research, a to díky své univerzalitě a transparentnímu přístupu přes webové rozhraní k funkcím sw *Mathematica*.

Sw *webMathematica* je koncipován jako webová nadstavba sw *Mathematica*, který poskytuje numerické výpočty, symbolické výpočty a statistické zpracování rozsáhlých souborů dat. Dále je charakteristický svojí snadnou přenositelností programů, vytvořených ve vývojovém prostředí *Mathematica* mezi různými platformami (HP Unix, True64-Unix, Mac Os, Windows 95, 98, NT, 2000, XP atd.). Z toho vyplývá i možnost paralelizace na homogenních i heterogenních clusterech a distribuovaných systémech s různými platformami. *Mathematica* jako dosud jediný nespecializovaný software typu „Computer Algebra System“ umožňuje paralelizaci symbolických výpočtů. Z výše uvedených důvodů jsme se při budování clusteru pro web-computing orientovali na vývojové prostředí *Mathematica* a *webMathematica*.

V současné době je na katedře matematiky Fakulty aplikovaných věd ZČU vytvářena webová podpora výuky, ve které jsou postupně provazována hypertextová skripta se systémem *webMathematica*, což umožní studentům sledovat, jak se změní např. řešení dané diferenciální rovnice při změně parametrů dle jejich vlastního výběru. V tomto projektu jsou úspěšně zapojeni tři studenti, kteří se podílejí na vytváření uvedených webových stránek.

Při tvorbě a publikaci materiálů a aplikací počítáme s podporou pracovníků dalších vysokých škol, ústavů akademie ap. V případě zájmu vám poskytneme prostor pro zveřejnění vašich výsledků a zajistíme kvalitní výpočetní prostředí pro jejich další využití. Nabízíme i pomoc a konzultace s převodem do interaktivní formy. Řešitelem projektu na ČVUT je Aleš Němeček (nemecek@math.feld.cvut.cz), řešitelem projektu na ZČU je Petr Girg (pgirg@kma.zcu.cz).

Warming-up aktivity v hodině matematiky

Jana Horodyská

1 Warming-up aktivity a jejich zařazování do vyučování matematice

Warming-up aktivity (warm-up aktivity, warmers) jsou krátké 5–10 minutové aktivity určené pro začátek vyučovacích hodin. Obecně mají tyto aktivity za úkol žáky „probudit“ a motivovat k práci v hodině, ale také přivést ke společné práci celou třídu a udělat z ní dobrý „tým“. Cílem může být zároveň i zopakování látky, procvičování počítání zpaměti či rozvíjení různých dovedností. Můžeme pomocí nich ale také pouze navést příjemnou atmosféru ve třídě. Není nutné, aby warming-up aktivita vždy souvisela s probíranou látkou. Vhodné warming-up aktivity však mohou sloužit i jako motivační aktivity k následující vyučovací fázi. [1]

2 CLIL

CLIL (*Content and Language Integrated Learning*) je široký termín, který označuje výuku některého z nejazykových všeobecně vzdělávacích předmětů prostřednictvím cizího jazyka. CLIL je jednou z metod vedoucí k plurilingvismu (tj. zvládnutí aspoň tří jazyků Evropské unie), který Rada Evropy doporučuje ve svém programovém dokumentu o výchově a vzdělávání *Teaching and Learning Towards Learning Society* z roku 1996. [2]

Mé první setkání s CLIL bylo v kurzu „CLIL – Výuka matematiky v cizím jazyce“ na pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze, který jsem navštěvovala od třetího do pátého ročníku. Kurz je věnován teoretickým i praktickým otázkám výuky matematiky v anglickém jazyce na základní a střední škole. Již zde jsem se setkala s řadou aktivit, které

Práce je součástí řešení projektu *CLIL – kurs podle standardu EU, Matematika v angličtině.*

dnes při své praxi používám a rozšiřuji. Po ukončení fakulty jsem nastoupila na šestileté bilingvní Gymnázium v Olomouci-Hejčíně, kde vyučuji matematiku v angličtině.

Výuka CLIL může mít různé organizační formy. V České republice obvykle probíhá celé vyučování předmětu v cizím jazyce, tak jak to znám ze své praxe na Gymnáziu v Olomouci-Hejčíně. V zahraničí (např. Rakousko) se používají také modely, kdy je pouze část vyučovací hodiny odborného předmětu vyučována v cizím jazyce; jedná se o tzv. jazykové sprchy (*language showers*). Ty používám ve své praxi v prvním a druhém ročníku, kde ještě probíhá výuka matematiky v češtině. Za jazykové sprchy můžeme považovat krátké aktivity, jejichž hlavním cílem je umožnit žákům používání cizího jazyka. V teorii výuky anglického jazyka do této skupiny patří právě *warmers (warming-up aktivity)* nebo *fillers (aktivity vyplňující volné chvíle v hodině)*. [1]

Jazykové sprchy můžeme tedy úspěšně používat jako warming-up aktivity nezávisle na tom, zda přitom mluvíme anglicky, česky nebo částečně česky a částečně anglicky. Přidáme-li k nim ještě takové, které rozvíjejí více matematické než jazykové dovednosti (např. počítání zpaměti), dostáváme soubor aktivit plnících všechny funkce warming-up aktivity.

3 Cíle a popis pracovní dílny

Nápad začít se zabývat konkrétními aktivitami určenými pro začátek hodin matematiky se zrodil při mé výuce matematiky v angličtině na Gymnáziu v Olomouci-Hejčíně, kde se vyučuje šest všeobecně vzdělávacích předmětů v anglickém jazyce.

V dílně představím formou *peer teaching* (tj. ukázkové aktivity realizované ve skupině účastníků dílny) hry a aktivity ve formě, v níž je mohou učitelé přímo použít při vyučování matematice ve svých třídách. Pracovní dílna má dva základní cíle: upozornit na důležitost a potřebnost warming-up aktivit v hodinách matematiky a nabídnout účastníkům ukázky konkrétních, v praxi vyzkoušených aktivit k využití v jejich vyučovacích hodinách. Dílna, i když je součástí sekce „matematika v anglickém jazyce“, bude probíhat pouze v **češtině**. Otevřené dveře tak mají všichni učitelé, i ti, kteří nemluví anglicky.

V dalším textu popíši některé z aktivit, které budou do dílny zařazeny. Všechny jsou určené pro studenty nižších i vyšších gymnázií.

3.1 Loggy,log,log

- Aktivita je určena pro celou třídu společně. Jejím hlavním cílem je navození přívětivé atmosféry a přivedení celé třídy ke společné práci. Rozvíjí ale také soustředěnost a pohotové reakce studentů.
- Aktivitu učitel nevysvětluje, ale přímo demonstruje. Začíná tím, že postupně ukazuje na jednotlivé studenty a řekne „loggy, log, log“. Než toto dořekne, musí student, na kterého právě ukazuje, rychle říci „log“. Pokud to nestihne, střídá učitele. Když toto celá třída pochopí, přidává učitel další formulku. Tou je pouze „log“. Pokud tedy ukáže na studenta a řekne „log“, student musí mlčet. Nyní zkoušíme obě formulky dohromady. Když už to jde, přidáme třetí: „definiční obor“. Příslušný student musí pomocí rukou ukázat X a student za ním a před ním množinu, protože definiční obor je množina všech x. Čtvrtou formulkou je obor hodnot a příslušní studenti ukazují Y a množinu.
- Hra nakonec vypadá tak, že učitel ukazuje na jednotlivé studenty a říká libovolnou z formulek a student (v případě třetí a čtvrté formulky i studenti před a za ním) musí správně zareagovat, jinak střídají učitele v jeho roli.
- Formulky lze libovolně obměňovat podle fantazie učitele.

3.2 Řetězec

- Aktivita je vhodnější pro hodiny v půlené třídě. Hraje celá skupina společně. Cílem je procvičování rychlého počítání zpaměti.
- Každý student dostane kartičku. Na té je velkým písmem napsaná úloha(libovolně vytvořená učitelem podle toho, co potřebuje procvičit) a menším písmem výsledek úlohy z kartičky nějakého jiného studenta. Tedy např. student A má výsledek studenta K, student B výsledek studenta C, student C výsledek studenta M apod. Jde o zcela náhodné kombinace. Ale každá úloha a její výsledek se ve třídě vyskytují pouze jednou, tak, abychom dostali páry.
- Libovolný student přečte svou úlohu a student, který má na své kartičce její výsledek, příslušný výsledek přečte nahlas. Ostatní studenti kontrolují, zda je výsledek správný. Student se správně ohlášeným výsledkem pokračuje svou úlohou. Může se stát, že se řetězec zacyklí, tj. že student, který čte výsledek, již dříve přečetl

svou úlohu. V tom případě pokračuje libovolný student, který ještě svou úlohu nečetl. Hra končí ve chvíli, kdy již všichni přečetli své úlohy.

- V dílně budu ukazovat jako úlohy převody jednotek, ale ve škole tuto aktivitu používám na mnoho jiných oblastí školské matematiky a také na slovní zásobu a terminologii.
- Učitel nemá při této aktivitě žádnou speciální roli, proto je vhodné hrát společně se studenty.

3.3 „Still pictures“ (nehybné obrázky)

- Hraje se v týmech po čtyřech až pěti. Cílem je zopakování matematických pojmů a především ověření, zda byl daný pojem dobře pochopen.
- Každý tým si vylosuje matematický pojem, např. lineární funkce, jmenovatel, posloupnost a podobně. Tento pojem musí pak celý tým společně předvést jako obrázek z lidí, jako sochu, podle své fantazie. Nesmí přitom používat žádné okolní předměty, pouze těla členů týmu. Ostatní mají za úkol daný pojem uhodnout.

3.4 Kdo je rychlejší

- Hraje se ve dvojicích. Hra navozuje hravou atmosféru ve třídě a rozvíjí rychlé počítání zpaměti.
- Studenty rozdělíme na skupiny A a B jako při písemce. Každý student A (levý z dvojice) dá na lavici svoji pravou ruku a každý student B svoji levou ruku. Jejich ruce tak leží vedle sebe. Učitel říká pomalu nahlas různé úlohy. Je-li výsledek číslo sudé, student A může plácnout lehce studenta B po jeho ruce. Vypočítá-li ale student B rychleji, že výsledek je sudý, může rukou včas couvnout. Je-li výsledkem číslo liché, studenti si pochopitelně mění role.
- Za správnou reakci, tj. plácnutí, student získává bod, po couvnutí ruky nezískává bod nikdo a při chybné reakci student bod ztrácí.
- Hru není dobré hrát příliš dlouho, třída by pak ne příliš ochotně přecházela na jinou činnost. Trvá-li ale pouze 5 minut, je velice vtipná a studenty dobře naladí.

3.5 Nejlepší tým

- Aktivita je vhodná pro menší třídu, nejlépe 15–16 studentů. Hraje se v týmu po 4–5, v každém týmu by měl být stejný počet studentů. Cílem je kromě týmové práce a zopakování látky také ukázat studentům, že chyba je normální a nezbytnou součástí vyučovacího procesu.
- Každému týmu je zadáno šest úloh napsaných na samostatných papírcích. Úlohy kolují mezi studenty a oni je řeší samostatně, ale mohou si i vzájemně ústně radit. Nesmějí opisovat. Když skončí celý tým práci, oznámí to učiteli.
- Tým, který skončil jako první, dostává 15 bodů, druhý 14 a třetí 13. Poté se úlohy v celé třídě kontrolují. Každý tým ztrácí tolik bodů, kolik chybných výsledků je mezi členy týmu.
- Tým, který získá nejvíce bodů, vítězí.
- Při kontrole výsledků se záměrně vůbec nezajímáme, kdo chybu udělal. Naopak každé přiznání chyby učitel chválí, za žádnou chybu nekárá. Studenti se tak učí, že udělat chybu není ostuda, a vidí, že chybu nedělají sami a že ani ostatní se ji nestydí přiznat.
- K chybně vyřešené úloze se na konci mohou studenti vrátit a chybu opravit.

Pro účastníky dílny budou připraveny ještě další aktivity podle časových možností a bude probíhat krátká diskuse o možnostech obměn a variací těchto aktivit.

Literatura

[1] Faltová H.: *Language Showers na 2. stupni ZŠ.* Diplomová práce. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha 2004.

[2] Hofmannová M., Novotná J.: *CLIL – nový směr ve výuce.* Cizí jazyky, roč. 46, 2002/2003, s. 5–6.

Eliminace kvantifikátorů v reálně uzavřených tělesech

Jaroslav Hora

Rozšíření a růst výkonnosti počítačů ve spojení s pokrokem dosaženým v oblasti vývoje počítačového software mohou způsobit, že se z původně „nedostupných“ metod stane metoda, kterou můžeme využít při běžné práci. Pro počítač a odpovídající software se tak mohou stát dostupnými i ty oblasti matematiky, kde bychom jejich využití nepředpokládali.

To je i případ eliminace kvantifikátorů v tzv. elementární teorii reálně uzavřených těles (jedním z modelů této teorie je těleso reálných čísel $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$). Fakt, že zde je eliminace kvantifikátorů je možná, dokázal polský matematik a logik A. Tarski (viz [7, 8]). Nepůjde nám zde o teoretický rozbor tohoto problému (viz kupř. [6]), připomeňme jen, o jakou záležitost jde. Nechť $G = (Q_{m+1}x_{m+1}) \dots (Q_n x_n)\ F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je kvantifikovaná formule zapsaná v prenexním tvaru, v níž jsou proměnné $x_1, x_2, \dots, x_m$ volné a proměnné $x_{m+1}, \dots, x_n$ vázané (tj. Q_i, $i = m+1, \dots, n$ značí buďto existenční kvantifikátor $\exists$ nebo obecný kvantifikátor $\forall$). $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je přitom logickou kombinací polynomiálních rovnic a nerovnic celočíselnými koeficienty v proměnných $x_{m+1}, \dots, x_n$. Tarski dokázal, že pak vždy existuje formule H v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_m$, která již neobsahuje kvantifikátory a která je ekvivalentní formuli G.

Původní Tarského metoda měla veliký význam pro matematickou logiku, neboť ukázala, že teorie reálně uzavřených těles je úplná. Z pohledu výpočetní složitosti však jde o metodu naprosto neuspokojivou. To nezměnila ani vylepšení pocházející od Seidenberga a Cohena. V r. 1973 však G. Collins navrhl (a v r. 1975 publikoval) metodu válcové algebraické dekompozice (cylindrical algebraical decomposition, CAD). Tato metoda byla dále vylepšována Collinsem a Hongem (metoda částečné válcové dekompozice, r. 1991). Vznikl program QEPCAD, který je nyní

vylepšován Ch. Brownem. QEPCAD si lze stáhnout a provozovat pod operačním systémem Linux. Více informací lze nalézt na

http://www.cs.usna.edu/∼qepcad/B/QEPCAD.html.

Program Mathematica® ve verzi 5.0 je zřejmě prvním z „velkých“ komerčních programů, který uspokojivě využívá cylindrickou algebraickou dekompozici a realizuje eliminaci kvantifikátorů. Ty se zapisují `ForAll`, resp. `Exists`. Je zde zvýrazněna podpora pro určení oboru při symbolických výpočtech. Můžeme tak počítači sdělit, že některá či dokonce všechny proměnné, s nimiž v daném výpočtu má co do činění, jsou např. reálné. Pracovat lze nejen s polynomy, ale dokonce s algebraickými výrazy v proměnných, tj. s výrazy konstruovanými z $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a z racionálních čísel za užití sčítání, násobení, racionálních mocnin a funkce `Root`. Systém reálných algebraických rovnic a nerovnic v proměnných $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je pak logickou kombinací rovnic a nerovnic, jejichž obě strany jsou algebraickými výrazy v $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Nemůžeme tedy kupř. pracovat s goniometrickými funkcemi či exponenciální funkcí. Jde o logiku prvního řádu, tj. kvantifikovat lze jen individua (reálná čísla); nelze tedy pracovat např. s množinou všech přirozených čísel.

```
Reduce [Exists[{x,y}, y = = -x + m && x^2/20 + y^2/5 = = 1
&& x ∈ Reals && y ∈ Reals && m ∈ Reals]]
```

$-5 \leq m \leq 5$

Uveďme ještě několik příkladů dokumentujících možnosti eliminace kvantifikátorů v Mathematica®5.0.

```
Reduce[ForAll[{x,y},x^2+y^2 >= 0]]
```

True

```
Reduce[ForAll[{x,y},x^2+y^2 > 0]]
```

False

```
Reduce[ForAll[x, Exists[y, x^2 + y^2 ≥ a]]]
```

a ∈ Reals

Nikoho již nepřekvapí, že programy počítačové algebry uspívají při výpočtu (netriviálních) limit. Využívají např. Taylorovy polynomy, L'Hospitalovo pravidlo atd.

```
Limit[(x^2-16)/(2-Sqrt[x]), x → 4]
```

-32

```
Limit[(2-Sqrt[x-3])/(x^2-49), x → 7]
```

$-\dfrac{1}{56}$

Při zápisu odpovídajících tvrzení podle definice limity dostáváme formule obsahující kvantifikátory. Je zajímavé uplatnit eliminaci kvantifikátorů (povel `Resolve`). Výpočet teď probíhá naprosto nečekaným způsobem, s využitím výše zmíněných hlubokých výsledků matematické logiky. Uveďme několik ukázek.

```
Resolve [ForAll [ϵ, ϵ > 0, Exists [δ, δ > 0,
    ForAll [ x, 4 - δ < x < 4 + δ && x ≠ 4,
    7ϵ < (x^2 - 16)/(2 - Sqrt [x] ) + 32 < ϵ]]], Reals]
   True

Resolve [ForAll [ϵ, ϵ > 0, Exists [δ, δ > 0, ForAll [x, 7 -
δ < x < 7 +δ && x ≠7,
    -ϵ < ((2 - Sqrt [x-3])/(x^2-49))+1/56< ϵ]]], Reals]
   True

Resolve[ForAll[ϵ,ϵ > 0,Exists[δ,δ > 0&& δ ∈ Reals,
    ForAll[x, 1-δ < x < 1+δ && x ≠ 1,
        -ϵ < (x^(1/3)-1)/(Sqrt[x]-1)-2/3 < ϵ]]],Reals]
   True

Resolve[ForAll[ϵ,ϵ > 0,
    Exists[δ,δ > 0 && δ ∈ Reals,
        ForAll[x, -2-δ < x <-2+δ && x≠-2 && a ∈ Reals,
            -ϵ < (x^2+x-2)/(x^2+2*x)-a < ϵ]]],{a}]//Timing
```

$\{$ 0.55 Second, a== $\dfrac{3}{2}\}$

Cylindrická algebraická dekompozice je použitelná při řešení algebraických nerovnic a jejich soustav, při řešení úloh o nalézání extrémů funkce ve vymezené oblasti a mj. i při výpočtu vícerozměrných integrálů přes oblast vymezenou nerovnostmi (užití Fubiniovy věty).

Příklad: Vypočtěte míru množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ omezené křivkami $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ a $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Opět nikoho nepřekvapí, že v programech počítačové existují grafické utility, díky kterým si můžeme nechat integrační oblast znázornit. Pak již „my lidé“ snáze nalezneme integrační meze. Nové však je to, že „počítač umí v daném případě nalézt meze sám“!

```
CylindricalDecomposition[x^2/4 < y < 8/(x^2 +4), {x, y}]
```

$$-2 < x < 2 \;\&\&\; \frac{x^2}{4} < y < \frac{8}{4+x^2}$$

```
Integrate[1, {x, -2, 2},{ y, x^2 /4 , 8/ (4 +x^2)}]
```

$$-\frac{4}{3} + 2\pi$$

Počítač nalezl s využitím CAD integrační meze a pak vypočetl dvojný integrál. To je ve shodě s „lidským“ přístupem, půvabné však je, že počítač může vše zvládnout zcela sám. Jen je zapotřebí integrovat booleovskou funkci, nabývající tam, kde jsou dané nerovnosti splněny, hodnoty 1, jinde 0.

```
<< Calculus`Integration`
Integrate[Boole[x^2/4 < y < 8/(x^2+4)],{x,-∞,∞},{y,-∞,∞}]
```

$$-\frac{4}{3} + 2\pi$$

Závěrem poznamenejme, že výrazně zdokonalené povely, které jsou k dispozici ve verzi 5.0 programu Mathematica®, mohou být užity k dalším užitečným záležitostem, jakými jsou kupříkladu dokazování nerovností, resp. dokonce i „počítačové“ dokazování vět v geometrii (Automated Theorem Proving).

Literatura

[1] Collins G. E.: *Quantifier elimination for the elementary theory of real closed fields by cylindrical algebraic decomposition.* Lecture Notes on Computer Science, 33, (1975), 134–183.

[2] Ernestová M.: *Soustavy algebraických rovnic.* Učitel matematiky, roč. 10, číslo 4 (44), 2002, str. 193–208.

[3] Hora J., Pech P.: *Využití programu QEPCAD při řešení středoškolských úloh obsahujících parametry.* Učitel matematiky, roč. 12, číslo 1 (49), říjen 2003, str. 31–38.

[4] Mistra B.: *Algorithmic Algebra.* Springer-Verlag Inc., New York 1993.

[5] Strzebonski A.: *Solving algebraic inequalities.* The Mathematica Journal 7:4 (2000), 525–541.

[6] Švejdar V.: *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha 2002.

[7] Tarski A.: *The completness of elementary algebra and geometry.* Institut Blaise Pascal, Paris 1967, iv + 55 pp. Přetištěno podle stránkových korektur práce připravené k otištění v r. 1940 v nakladatelství

Hermann&Cie, která nebyla vydána vzhledem k vypuknutí 2. světové války.

[8] Tarski A.: *A decision method for elementary algebra and geometry* (prepared for publication by J. C. C. Mc Kinsey), U. S. Air Force Project RAND, R-109, the RAND Corporation, Santa Monica, California, (1948) iv + 60 pp.

[9] Winkler F.: *Polynomial Algorithms in Computer Algebra.* Springer Verlag, Wien 1996.

Experimentování v matematickém vyučování a tabulkové procesory

Alena Hošpesová

Úvodem

Rozšíření různých technických prostředků do praxe školní i mimoškolní vyvolává řadu otázek týkajících se vzdělávání. Zároveň se stále více prosazuje požadavek na změnu pozice žáka z objektu na aktéra vlastního procesu učení. Pozornost se zaměřuje méně na konkrétní učební obsahy a více na takové procesy získávání poznatků, které vedou k porozumění. Obecně je přijímána myšlenka, že poznání žáků by mělo respektovat genetickou paralelu [2], neboli postupovat cestami podobnými těm, kterými byly poznatky objevovány v historii. Více se tento přístup prosazuje při výběru a uspořádávání různých učebních obsahů, méně často ve vztahu k vyučovacím metodám.

Proces vytváření poznatků v matematice jako vědě si můžeme představit jako spirálu od pozorování rozličných příkladů, jejich vlastností a vztahů, přes indukcí a analogií odvozené domněnky a jejich důkazy k teorémům; pomocí teorému jsou pak řešeny nové příklady, které nás přivedou k dalším zobecněním a jejich důkazům [8, str. 107]. Zamyslíme-li se nad matematickým vyučováním, zjistíme, že žáci z tohoto procesu obvykle poznávají jen teorémy (na různé úrovni obecnosti) a řešení příkladů. Stalo se běžným vyučovat matematiku deduktivně tak, že se matematické vědomosti prezentují a požaduje se, aby se je studenti učili a používali je pro řešení matematických úloh. To je však v rozporu s psychologickou teorií, která považuje učení za induktivní proces, ve kterém hraje klíčovou roli experimentování. Proto Freudenthal žádal: „Neměli bychom učit žáky to, co mohou objevit sami.“ (Freudenthal in [8]).

Zatímco vědec získává podstatnou část vědomostí experimentováním, žák má „pokus“ a zejména „omyl“ povolen jen málokdy. To může být

Poznámka: Výzkum byl podporován grantovým projektem MSM 124100006.

jedním z důvodů, proč má takové množství žáků potíže s matematikou. Přirozeně nechceme, aby žák získal veškeré školní vědomosti jako výsledek svého experimentování. Experimentování by se mělo stát jednou z metod práce ve školské matematice, ne metodou jedinou. V rámci současného kurikula v ČR je experimentování v běžném školním vyučování ztěží možné. Důvodem, který uvádějí téměř všichni učitelé, je jeho časová náročnost a množství chyb. V čase a s prostředky, které jsou ve škole k dispozici, studenti mohou vyřešit jen malý počet příkladů, při nichž pozorují a objevují. Navíc může být značné množství z nich chybně vypočítaných. Např. při vyvozování pravidel dělitelnosti by bylo možné v některých případech vycházet z řad násobků a snažit odpozorovat a odvodit jejich vlastnosti. To ovšem není možné v případě, že zde budou chyby a čísel bude málo.

Mohou moderní technické prostředky pomoci tomu, aby žáci experimentovali alespoň v některých matematických tématech? Podle výsledků našich experimentů [6] počítač s vhodným programem může žákovi pomoci vyřešit řadu příkladů v krátkém čase a tím získat dostatečné množství výsledků, aby bylo možné formulovat domněnky dosti přesné na to, aby mohly být nějakým způsobem zobecněny. Technická podpora zaručuje správnost výsledků a tedy i věrohodnost domněnek.

Úlohy pro experimentování

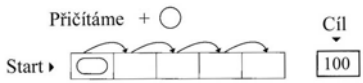
Zhruba od roku 1996 se zabýváme [10, 3, 4, 1, 6] použitím tabulkových procesorů, konkrétně Excelu, ve vyučování matematice na základní škole. Excel jsme vybrali pro jeho rozšíření ve školách i domácnostech i proto, že práce s ním je jednoduchá a i mladší žáci ji intuitivně zvládnou velmi rychle. V námi organizovaných vyučovacích experimentech jsme žáky před řešením úloh naučili jen orientovat se v tabulce a používat vzorce (zapisovat a „natahovat“). Základním východiskem všech uskutečněných sond bylo, že použití počítače není cílem experimentálního vyučování.

V tomto článku bych chtěla ukázat na přístupu k řešení hroznu problémů [7], jak mohou žáci využít počítač pro experimentování a následné zobecňování získaných výsledků.

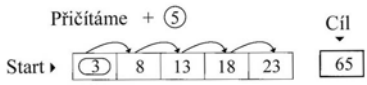
Úloha 1: *V následujícím schématu (obr. 1) můžeme volit libovolně číslo, které přičítáme, a číslo v prvním rámečku (start). Čísla v dalších čtyřech rámečcích jsou vypočítávána postupným přičítáním „přičítaného“ čísla*

k číslu startovnímu. Čísla ve všech pěti rámečcích jsou sečtena, aby dala konečných výsledek (cíl). [9, str. 65]

Která přirozená čísla mohou být přičítaným a startovním číslem, abychom získali cílové číslo 100? Kolik má úloha řešení v množině přirozených čísel? (V řešení na obr. 2 je vidět, že čísla 5 a 3 řešením úlohy nejsou.)



Obr. 1

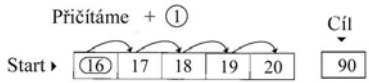


Obr. 2

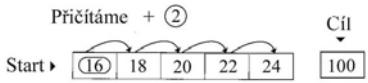
Zkušenosti z vyučování ukazují, že žáci jsou většinou schopni najít několik řešení úlohy 1 experimentováním. Vzhledem k tomu, že experimentování je zdlouhavé a žáci při něm obvykle nepostupují systematicky, najde všechna „přirozená“ řešení jen málo žáků. K zobecněním, např. že řešením této úlohy jsou jen ty řady, ve kterých je třetím číslem číslo 20, či že cílové číslo musí být násobkem 5, dojdou žáci jen výjimečně. Pokud si ale žák sestaví podobnou tabulku jako na obr. 3, bude postupovat systematicky a bude si výsledky pokusů zapisovat, je pravděpodobné, že najde všechna požadovaná řešení.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**Vzorec v buňkách A2–E2**	**Vzorec v buňce F2**	
1	1	1	1	1	1				
2	18	19	20	21	22	100	=A2+A1	= A1+A2+A3+A4	...
3									
4									

Obr. 3

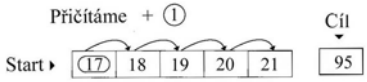


Obr. 4

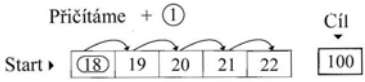


Obr. 5

Navíc při experimentování se zvětšováním přičítaného čísla o 1 může žák pozorovat, že se cílové číslo zvětšuje vždy o 10 (obr. 4 a 5). Zvětší-li se naopak o 1 startovní číslo, zvětší se cílové číslo o 5 (obr. 6 a 7). Postupně žák zjistí, že když zvětšuje přičítané číslo o 1, musí zmenšovat startovní číslo o 2 a najde všechna požadovaná řešení (obr. 8).



Obr. 6



Obr. 7

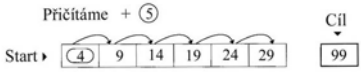
startovní číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
přičítané číslo	18	16	14	12	10	8	6	4	2

Obr. 8

Zobecnění získané experimentováním je pak možné „potvrdit“ algebraickým vyjádřením vztahů ve schématu: $s + s + p + s + 2p + s + 3p + s + 4p = 100$. Po úpravě zjistíme, že $s + 2p = 20$ (s je startovní číslo, p je číslo přičítané).

Zajímavou obměnou úlohy 1 je rozšíření schématu o jeden rámeček (obr. 9).

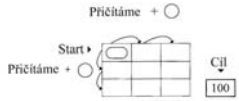
Obr. 9



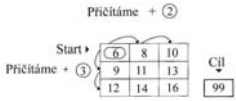
Obr. 10

Jestliže žák provede několik experimentů, dojde k výsledku, že úloha nemá řešení. Jako cílové číslo vychází jen čísla, která jsou násobkem čísla 3. Několik řešení bude mít úloha např. s cílovým číslem 99 (obr. 10).

Úloha 2: *Ve schématu na obr. 11 volíme dvě přičítaná čísla (pro řádky a sloupce) a číslo v prvním rámečku (start). Čísla v dalších osmi rámečcích jsou vypočítávána postupným přičítáním obou „přičítaných“ čísel k číslu startovnímu. Čísla ve všech devíti rámečcích jsou sečtena, aby dala konečných výsledek (cíl). Která přirozená čísla mohou být přičítanými čísly a číslem startovním, abychom získali cílové číslo 100?*

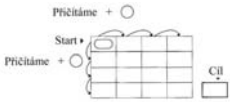


Obr. 11

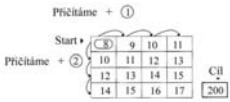


Obr. 12

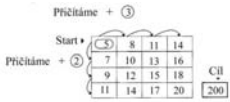
Při experimentování opět zjistíme, že úloha nemá pro cílové číslo 100 řešení, protože cílová čísla jsou vždy násobky čísla 9. Na cílové číslo nemá vliv, zda „přičítané“ číslo přidáváme v řádcích nebo ve sloupcích. Cílové číslo je vždy devítinásobek čísla ve středu schématu.



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

Při rozšíření schématu na čtyřikrát 4 políčka (obr. 13) zjistíme, že cílovým číslem mohou být jen násobky čísla 8. Experimentováním zjistíme, jak se součty mění zvětšováním startovního čísla a obou „přičítaných čísel“ (obr. 14 a 15).

Poznámka na konec

Je možné říci, že experimentování ve vyučování přispívá k plnění cílů matematického vyučování? V návrhu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání se kromě jiného uvádí, že v tematickém okruhu „*Závislosti, vztahy a práce s daty* žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles ... Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů.“ V obecnější rovině se má pěstovat „rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení

systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů“. Jakým způsobem budou školy vytvářet tyto kompetence žáků je závislé na jejich rozhodnutí. Práce s tabulkovými procesory je jednou z možností.

Literatura

[1] Binterová H.: *Výuka funkcí podporovaná počítačem.* In: *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* JČMF, Praha 2002, str. 57–62.

[2] Hejný M.: *Teória vyučovania 2.* SPN, Bratislava 1989.

[3] Hošpesová A.: *What brings use of spreadsheets in the classroom of 11-years olds?* In: J. Novotná (Ed.): *European Research in Mathematics Education II. Mariánské lázně 24.–27. 2. 2001. Proceedings.* Charles University, Faculty of Education, Praha 2002, str. 163–169.

[4] Hošpesová A.: *Are spreadsheets worthwhile for all?* In: L. Bazzini, C. W. Inchley: *Proceedings CIEAEM 53. Mathematical Literacy in the Digital Era.* Ghisetti e Corvii Editori, Milano 2002, str. 158–164.

[5] Hošpesová A.: *Používání Excelu v planimetrii na ZŠ.* In: M. Ausbergerová, J. Novotná, V. Sýkora (Eds.) *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* JČMF, Praha 2002, str. 127–131.

[6] Hošpesová A., Binterová H.: *Objevování v matematickém vyučování podporované Excelem.* In: P. Pech (Ed.) *Department of Mathematics Report Series.* **Vol 11.** Jihočeska univerzita, České Budějovice 2003, str. 267–273.

[7] Kopka J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.* UJEP, Ústi nad Labem 1999.

[8] Kutzler B.: *CAS jako Pedagogické prostředky ve vyučování a učení se matematice (1).* In: *Učitel matematiky*, 12 (2), str. 101–110.

[9] Müller G. N., Steinbring H., Wittmann E. Ch. (Eds.): *Arithmetik als Prozess.* Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 2004.

[10] Tržilová D., Hošpesová A.: *Použití tabulkových procesorů ve vyučování na 1. stupni ZŠ.* In: P. Tlustý (Ed.): *Department of Mathematics Report Series.* Vol 8 (2000), No. 10. Jihočeská univerzita, České Budějovice 2000, str. 93–100.

[11] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* http://www.vuppraha.cz/index.php?op=sections&sid=9

Algoritmy ve výuce matematiky

Antonín Jančařík

Úvodem bych rád popsal vývoj výuky algoritmů ve výuce předmětu „Počítače“ v posledních dvaceti letech.

V polovině osmdesátých letech došlo na některých školách k povinnému zavedení výuky předmětu „Počítače“. Hlavním obsahem tohoto předmětu byla, především v prvním desetiletí, algoritmizace – návrh a studium algoritmů a tvorba vývojových diagramů. S postupným vzrůstem výkonu dostupných počítačů docházelo při výuce k pozvolnému odklonu od teoretického studia k používání metody „try-and-see“. Tento programátorský styl dosáhl svého vrcholu v druhé polovině let devadesátých.

V současnosti je hlavním cílem předmětu „počítačů“ obsluha uživatelských aplikací a sítě Internet. Došlo tedy k obrovskému posunu zaměření celého předmětu, vždyť ještě na začátku devadesátých let byl tento cíl definován jako analýza, návrh a implementace algoritmů a obsluha operačního systému.

Tento posun je poměrně logický a zdravý, protože připravuje žáky a studenty na reálné a praktické využití výpočetní techniky v běžném životě. Na druhou stranu tento posun způsobil, že téma algoritmů, které leží na pomezí mezi matematikou a informatikou, že v současnosti je do výuky začleněno v menší míře, než v letech osmdesátých [4].

V současnosti se většina studentů v předmětu „Počítače“ seznámí s datovými strukturami, tvorbou algoritmů a s některými řadícími algoritmy a algoritmy z oblasti teorie grafů. Pouze nepatrná část studentů se při studiu na střední škole setká s takovými pojmy, jako je složitost algoritmu, nebo s algoritmy z teorie čísel či numerické matematiky.

Tato absence dříve běžně probíraných témat spolu se vzrůstajícím významem algoritmů v aplikované matematice (např. kryptologii) vzbuzuje otázku, zda by nebylo vhodné algoritmy ve větším rozsahu opětovně zařadit do výuky matematiky. Uvedená témata totiž úzce souvisejí s problémy, které jsou v současné době ve světě informatiky řešeny a napomáhají k porozumění a pochopení problémů z reálného života. Především

jde o pochopení omezení a hranic, kterými je svět výpočetní techniky svázán.

Pokusím se uvést dva příklady z pedagogické praxe, na kterých ukáži absenci některých vědomostí, a pokusím se navrhnout i rozšíření učiva matematiky tak, aby se podobným omylům v budoucnu přecházelo.

1) První příklad je motivován originálním studentským „řešením“ příkladu na dělitelnost: *Výpočtem na kalkulačce lze zjistit, že* $(41^{32} - 26^{25}) : 5 = 8{,}130\,428\,045 \cdot 10^{50}$*, a to je celé číslo. Proto platí, že 5 dělí* $41^{32} - 26^{25}$.

Toto řešení je roztomilé a úsměvné, bohužel se však jedná o řešení budoucího učitele matematiky ve třetím ročníku vysoké školy. Důvodem jeho chyby je naprosté nepochopení toho, jak kalkulačka počítá a zobrazuje výsledek. Kořeny omylu je však nutné hledat mnohem hlouběji, a to v předcházející výuce matematiky, kdy se uvedený student seznámil s použitím kalkulačky – nástroje pro výpočty, bez toho, že by byl nucen počítat s čísly, která se na displej kalkulačky nevejdou. Přitom existují postupy, jak i na kalkulačce, která má například pouze 8 míst, počítat přesně výsledky, jejichž „délka“ je mnohem větší např. 2ˆ35.

Na základě uvedené zkušenosti navrhuji výuku matematiky rozšířit o seznámení žáků s tím, jak kalkulačka pracuje s velkými čísly a ukázat, jak lze na kalkulačce přesně vypočítat i některé příklady, jejichž výsledek se již na displej nevejde.

2) Druhý příklad: *Studentka druhého ročníku VŠ navrhla řešit rozklad „velkého“ čísla na prvočísla prostým vyzkoušením všech dělitelů.*

Její chyba má mnohem hlubší kořeny, než chyba předcházející, je zapříčiněna celkovým přístupem k otázce dělitelnosti, soudělnosti a rozkladu čísla na prvočísla v učivu základních a středních škol. Nepředpokládám, že by algoritmy umožňující rozklad „velkých“ čísel bylo možné zařadit o učiva základních a středních škol, na druhou stranu považuji za možné a vhodné žáky seznámit s tím, že používaná metoda vyzkoušení možných dělitelů má silná omezení.

Současná praxe vypadá tak, že se žáci seznamují s otázkou dělitelnosti pouze na malých číslech a na příkladech, které „hezky“ vycházejí. Pracují s rozkladem na prvočísla jako se standardním a v mnohých případech i jediným nástrojem, který lze při řešení úloh použít. Zcela je tak opomíjen fakt, že faktorizace čísla je v praxi v takřka neřešitelný

problém, na jehož „neřešitelnosti“ stojí bezpečnost šifrovacích systémů s veřejným klíčem (např. RSA).

Volba „vhodných“ příkladů pak způsobuje i to, že studenti znají podmínky dělitelnosti prvočísly 2, 3, 5 a v některých případech i číslem 11. Pro ověření „složitějších čísel“, jako je např. 7, pak musejí použít kalkulačku. Přitom existují velmi jednoduché a rychlé postupy jak dělitelnost čísly jako 7, 13 či 17 ověřit i pro čísla, která se na displej kalkulačky nevejdou. Tyto postupy využívají různých vlastností dělitelnosti a tak probíranou látku prohlubují. Navrhuji tedy do kapitoly o dělitelnosti zařadit i ukázku ověření dělitelnosti čísla (např. 30 místného) číslem 7 s vysvětlením, jak takový postup funguje (např. [1]).

To, že jsou žákům předkládány pouze příklady s „hezkými“ čísly, způsobuje, že pomocí rozkladu na prvočísla jsou studenty řešeny i úlohy, u kterých je tento postup vyloženě nevhodný. Jedná se především o hledání největšího společného dělitele.

V celosvětovém měřítku je vedena mezi učiteli matematiky diskuse (např. [3]), kdy a jak zařadit Euklidův algoritmus do učiva matematik. Je pravdou, že se jedná o postup poměrně abstraktní, na druhou stranu umožňuje velmi efektivní výpočet největších společných dělitelů dvou „velkých“ (např. dvacetimístných) čísel. Rychlost výpočtu $\mathrm{NSD}(a, b)$ Euklidovým algoritmem je $\mathrm{O}((\ln(a))^3)$ (důkaz např. [2, str. 19]), což je s rozkladem na prvočísla neporovnatelné. Přikláním se k názoru, že Euklidův algoritmus je důležitou součástí matematiky a žáci by s tímto alternativním, vysoce efektivním nástrojem pro výpočet největšího společného dělitele měli být seznámeni.

Výpočetní technika zaujímá v dnešním moderním světě stále důležitější místo. Je tedy samozřejmé, že je a bude stále více využívána i ve výuce matematiky. Žáci a studenti by se měli seznamovat nejen s tím, jak úlohy řešit, ale i s tím, jak úlohy řešit za pomoci výpočetní techniky. Toto začlenění výpočetní techniky do výuky matematiky vyžaduje často i nový typ úloh, úlohy, které lze, a úlohy, které nelze, řešit pomocí kalkulačky, či počítače. Stejně důležité jako vědět, jak výpočetní techniku použít, je i vědět, kdy výpočetní techniku při řešení nelze použít a proč. S těmito omezeními se žáci původně seznamovali v hodinách „informatiky“. Vzhledem k tomu, že došlo ke změně obsahu výuky předmětu „Počítače“, je vhodné a dle mého názoru i nutné, aby se žáci s touto látkou seznamovali v hodinách matematiky. Na uvedených příkladech z praxe jsem se snažil ukázat, jak lze výuku matematiky právě tímto směrem rozšířit.

Literatura

[1] Artz J., Gaze E.: *The Artz algorithm and other divisibility tests for 7.* In: *Mathematics and computer education*, Vol. 38, No. 1, str. 11–18.

[2] Koblitz N.: *Acourse in Number Theory and Cryptography.* 2nd. ed., Springer-Verlag, New York 1997. ISBN 0-387-94293-9

[3] *The Math Forum@Drexler.*
Dostupné na Internetu: http://mathforum.org/epigone/math-learn

[4] Pittner T.: *Výuka programování na základních a středních školách.* Cyklus seminářů pro učitele informatiky, Masarykova univerzita, Fakulta informatiky, Brno 2000.

Využití ICT ve výuce matematiky pro bakaláře

Vladimír Jehlička, Pavla Jindrová, David Zapletal

Abstrakt

Předložený článek se zabývá možnostmi využití současných informačních a komunikačních technologií ve výuce matematiky. Je zaměřen především na přehled možností ve tvorbě elektronických studijních materiálů.

1 Současný model výuky

Tradiční model výuky matematiky na VŠ v presenční formě studia spočívá v přednáškách, cvičeních, samostatném studiu, konzultacích, zápočtových úkolech a zkoušení. V distančních formách výuky se jedná o samostatné studium s různým stupněm jeho řízení a v následném zkoušení. V kombinovaných formách studia dochází k určitému kompromisu mezi presenční a distanční formou studia. Základem je opět vhodným způsobem řízené samostudium s následným zkoušením. Teoreticky by samostatné studium mělo být doplněno konzultacemi, na kterých se studenti ptají pouze na určité dílčí kapitoly probírané látky, kterým při svém samostatném studiu neporozuměli. V praxi se ale zpravidla jedná o standardní přednášky, které jsou jenom okrajově doplněny konzultacemi.

Tradičními studijními materiály jsou učebnice, skripta, sbírky řešených nebo neřešených příkladů a poznámky studentů z přednášek a cvičení. Nové informační a komunikační technologie přinášejí další možnosti pro tvorbu netradičních studijních materiálů. Jedná se elektronické studijní materiály, které lze šířit prostřednictvím Internetu nebo distribucí na kompaktních diskách. Obsah a forma těchto materiálů je velice rozdílná. Tomu také odpovídá náročnost přípravy jednotlivých materiálů. Obecně ale platí, že příprava elektronických studijních materiálů je náročnější než příprava tradičních tištěných studijních materiálů.

2 Možnosti využití ICT ve výuce

Využití současných informačních a komunikačních technologií ve výuce lze rozdělit do tří základních oblastí:

- tvorba elektronických studijních materiálů,
- komunikace se studenty,
- testování a zkoušení.

2.1 Elektronické studijní materiály

Dříve než se začneme zabývat tvorbou elektronických studijních materiálů a jejich využití ve výuce, musíme si dobře promyslet důvody, které nás vedou k této nové tvorbě. Je tedy třeba odpovědět na následující otázky:

- Proč chceme vytvářet elektronické studijní materiály?
- Ve které fázi výuky budou elektronické studijní materiály nasazeny?
- Jaké očekáváme výsledky našeho snažení?

V nejjednodušší variantě jsou odpovědi na uvedené otázky následující:

- Elektronické studijní materiály vytváříme proto, že se o nich všude mluví, je to současný módní trend, vedení katedry, ústavu, fakulty, university to po nás chce.
- Nasazení do výuky je zcela libovolné, oni si s tím studenti nějak poradí.
- Vliv na efektivitu výuky nás nemusí moc zajímat. Pokud tyto materiály studenti použili, pak je zřejmé, že jsme je udělali kvalitně. Jestliže je nepoužili, pak to není dáno nízkou kvalitou vytvořených materiálů, ale ignorantstvím ze strany studentů. Takže hlavním výsledkem je splnění úkolu a očekávané odměny.

Zkusme se ale nad uvedenými otázkami zamyslet seriozně.

2.1.1 Proč chceme vytvářet elektronické studijní materiály?

Základem odpovědi by měla být myšlenka směřující ke zlepšení kvality výuky. Nejedná se jenom o usnadnění a zkvalitnění práce vyučujícího, ale současně o zefektivnění práce studenta. To znamená, že student získá potřebné znalosti a dovednosti v kratším čase než při studiu z tradičních studijních materiálů.

2.1.2 Ve které fázi výuky budou elektronické studijní materiály nasazeny?

Elektronické studijní materiály lze využít ve dvou základních fázích výuky:

- na přednáškách/konzultacích/cvičeních,
- při samostatném studiu.

Předpokladem pro využití elektronických studijních materiálů je potřebné technické zázemí pro výuku. Velké přednáškové sály na universitách jsou dnes již standardně vybaveny dataprojektorem, vizualizérem a počítačem připojeným na Internet. Toto vybavení ale nelze předpokládat ve všech učebnách, ve kterých probíhají cvičení. Přístup studentů k počítačům se každým rokem zlepšuje. University disponují počítačovými učebnami, které jsou mimo výuku přístupné studentům pro jejich vlastní práci. Kromě toho má dnes již nezanedbatelné procento studentů vlastní počítač.

Z uvedeného je zřejmé, že je třeba se zaměřit na studijní materiály, které přispějí ke zlepšení kvality přednášek/konzultací, případně budou studentům prospěšné v jejich samostatném studiu. Nemá smysl se zabývat tvorbou materiálů zaměřených výhradně na podporu výuky ve cvičeních.

2.1.3 Jaké očekáváme výsledky našeho snažení?

Základním výsledkem by mělo být zlepšení úrovně znalostí a dovedností studentů, které jsou ověřovány v rámci zkoušek.

2.2 Tvorba elektronických studijních materiálů

Elektronické studijní materiály je možno využívat jak v rámci přednášek, tak pro samostatné studium studentů.

2.2.1 Skenování stránek textu z učebnic a skript

Naprosto nejjednodušším a zároveň nejhorším způsobem tvorby elektronických studijních materiálů je prosté naskenování stránek textu z učebnic nebo skript. Je-li takovýto text vytištěn na folii a v rámci přednášky promítán zpětným projektorem, nebo je uložen do souboru a z počítače promítán dataprojektorem, pak nelze mluvit o žádném zlepšení výuky. Promítnutá písmena jsou malá, text je zpravidla nečitelný a nepřináší do výuky žádnou novou kvalitu.

2.2.2 Statické přednáškové texty

Standardní příprava vyučujících na přednášky spočívá ve vytvoření statického textu, který může být doplněn obrázky nebo grafy, je vytisknut na folii a je promítán zpětným projektorem. Případně se jedná o stejný text v elektronické podobě, který je promítán dataprojektorem. Z didaktického hlediska se zde, v porovnání s učebnicemi a skripty, jedná o novou kvalitu, která spočívá ve zhuštěné informaci a v zachycení toho nejpodstatnějšího. Pokud jsou takovéto materiály v elektronické podobě přístupny studentům, jsou jimi akceptovány, neboť speciálně ve zkouškovém období jim ulehčují studium a zkracují čas potřebný k přípravě ke zkoušce.

Elektronická forma těchto textů má proti klasické práci s foliemi řadu výhod. Především odpadá pracná manipulace s foliemi, zastiňování textů, které v daném okamžiku nemají být zobrazeny, ale budou promítnuty až v následující části přenášky. Toto lze velice elegantně vyřešit, jestliže je přednáška připravena na počítači např. v prostředí PowerPointu. Při práci s foliemi bývá dosti problematický návrat k předcházejícím textům. Toto je opět snadno řešitelné v elektronické formě, kdy si vyučující může pomocí hypertextových odkazů vytvořit libovolnou strukturu nelineárního textu. Jestliže přednáška je realizována s využitím počítače, který je připojen na Internet, pak není problém realizovat odkazy na další zdroje umístěné na Internetu. Nezanedbatelnou výhodou elektronických materiálů je jejich snadná editovatelnost.

2.2.3 Dynamické přednáškové texty

Jestliže přednášející využije možností vhodného animačního softwaru, pak může svoje přednášky obohatit o prvky, které nelze žádným jiným

způsobem studentům zpřístupnit. Jedná se např. o kreslení grafů funkcí, kdy lze názorně demonstrovat vliv jednotlivých parametrů funkcí na průběh jejich grafu. Při kreslení grafů funkcí dvou proměnných lze tyto grafy vykreslovat pod různými úhly pohledu. Ve složitých úlohách např. z deskriptivní geometrie je možno naprosto detailně rozfázovat složité konstrukce, které pak lze krokovat, a to jak dopředu, tak dozadu.

2.2.4 Využití matematického softwaru na přednáškách

Jestliže vyučující chce na přednášce demonstrovat na počítači určité výpočty, pak má k dispozici řadu různých programů, které tyto výpočty umožňují. Standardně může využít např. tabulkový procesor MS Excel nebo více či méně rozsáhlé programy zaměřené na určitou oblast výpočtů jako je např. Statistica. Případně může sáhnout po univerzálních programech typu Mathematica či Maple. Vždy by měl vyučující využívat pouze takové programy, které jsou v rámci dané university přístupny všem studentům.

2.2.5 Speciální animace

Existují jednoúčelové výukové programy, které pomocí různých animací přispívají k názornému výkladu dané matematické problematiky. Spektrum témat, které lze takto podpořit, je široké. Zpravidla se jedná o témata, která jsou vyučována na základních školách, ale vhodné animace mohou být využity i ve výuce na universitách.

Zvláštní kategorii animací představuje záznam dějů, které probíhají na obrazovce počítače. Tyto záznamy se pořizují především pro potřeby výuky práce na počítači. Záznam bývá doplněn nahráním mluveného komentáře. Vhodně připravené záznamy mohou sloužit např. pro samostatné studium využití speciálních matematických programů pro řešení konkrétní zadané problematiky.

2.2.6 Elektronický záznam přednášek

V současné době již na universitách existují technické možnosti pro elektronický záznam přednášek a jejich následnou distribuci. V podstatě se jedná o kameru, klopový mikrofon, počítač a server, na kterém budou takto získaná data uchovávána. Vyučující má možnost si zaznamenat

celou svoji přednášku a bez jakékoliv změny ji poskytnout studentům k dalšímu studiu. Případně může přednášku dodatečně upravit a vhodným střihem zachovat pouze to, co pokládá za podstatné.

Pro elektronický záznam přednášek se jeví jako naprosto nevhodné snímání plátna, na které je dataprojektorem promítán text z počítače. Dochází k výraznému zkreslení písma a snímaný text je pak těžko čitelný. V takovém případě je třeba přednášku podrobit kvalitnímu filmovému střihu. Místo původního záběru kamery je třeba do vhodných míst přímo vložit elektronický text, který byl promítán v průběhu přednášky.

Další možností je využití elektronické dotykové tabule a vložení textů, které byly pořizovány na této tabuli během přednášky, přímo do výsledné elektronické podoby přednášky.

2.3 Elektronické materiály pro samostatné studium

Všechny výše uvedené elektronické materiály, které vyučující využívá ve své přednášce, může následně předat studentům pro potřeby jejich samostatného studia, a to formou nahrávky na kompaktním disku, nebo zveřejněním pomocí Internetu.

Je zřejmé, že základem studia matematiky vždy bude samostatná práce studentů s využitím tištěných studijních materiálů, tužky a papíru. Proto by měl vyučující vždy zvážit, zda vytvořený elektronický studijní materiál je skutečně v něčem nový, zda přináší novou kvalitu do studia, nebo jestli to není jenom kopie tištěného textu.

2.4 Komunikace se studenty

Pro studenty v presenční formě studia je nejefektivnější přímá osobní komunikace studenta s vyučujícím. U studentů v kombinované nebo distanční formě studia je možná komunikace prostřednictvím Internetu. Pro tuto službu není dobré využívat klasickou e-mailovou schránku, která pak bývá nepřehledně zahlcena poštou. Zde je vhodné využít služeb speciálních výukových prostředí, jaký představuje např. WebCT. Vždy je ale třeba mít na paměti, že elektronická komunikace je v porovnání s osobní mnohem méně pružná a spotřebovává mnoho času studenta i vyučujícího. Vždy se jedná pouze o náhražku osobní komunikace.

2.5 Elektronické testování a zkoušení

Zkoušení v matematice je založeno především na řešení konkrétních příkladů v rámci písemných zkoušek. Často do těchto zkoušek bývají vklá-

dány doplňující teoretické otázky. V souvislosti s rozvojem miniaturizace výpočetní techniky je na zvážení zkoušejícího, co všechno studentům dovolí. Dnešní kalkulačky již umožňují vložení stovek vzorců a mnoha stránek textů. Na některých fakultách vyučující tuto problematiku řeší tak, že student může mít na zkoušce jenom tužku a papír.

Elektronické testy mohou být součástí materiálů pro samostatné studium studentů, kteří si tak nezávazně ověřují úroveň získaných znalostí. Těžko lze toto testování doporučit do zkoušení na vysoké škole.

3 Závěr

Současné informační a komunikační technologie umožňují vložit do výuky řadu nových prvků. Vždy však je třeba dobře rozmyslet účelnost jejich využití a nevkládat je násilně do výuky jenom proto, že se jedná o módní záležitost.

Testování a matematika

Marika Kafková, Pavel Tlustý

Jedním ze základních problémů, který učitel ve škole řeší, je „efektivní způsob“ kontroly vědomostí svých žáků. K průběžnému ověřování znalostí se ve stále větší míře používá testů, v nichž žák vybírá jednu správnou odpověď z několika nabízených. S těmito tzv. *multiple-choice* testy se můžeme setkat např. při přijímacích pohovorech na školu či do zaměstnání, v různých soutěžích apod.

Důvodem rostoucí obliby testů je snadná oprava a rychlé vyhodnocení. S využitím moderní techniky (počítač, scaner a příslušný software) vystupují tyto přednosti ještě více do popředí.

Přes tyto nesporné přednosti má „testování“ i své negativní stránky. Nelze totiž zcela vyloučit situace, že testem projde úspěšně i žák, který je zcela nepřipraven. Takový žák pak vybírá odpovědi zcela náhodně (hádá). V našem příspěvku budeme hledat odpovědi na následující otázky:

- Jak velká je šance úspěchu žáka, který odpovědi pouze hádá?
- Je známka za test věrohodná?
- Jak konstruovat test, aby riziko „náhodného úspěchu“ bylo minimální?

V [1] je diskutována situace, kdy pomocí testu „třídíme“ žáky na úspěšné a neúspěšné. Úspěšní žáci měli v testu aspoň (učitelem předem stanovený) minimální počet správných odpovědí. V tomto příspěvku budeme výsledek testu známkovat obvyklou školní stupnicí.

Příklad 1. Test obsahuje 12 otázek. Ke každé otázce jsou nabízeny tři odpovědi, z nichž právě jedna je správná. Klasifikace probíhá podle následující tabulky:

počet správných odpovědí	12, 11	10, 9	8, 7, 6, 5	4, 3	2, 1, 0
výsledná známka	1	2	3	4	5

Jaké jsou šance žáka, který není připraven na test a pouze hádá, že získá známku 1, 2, 3, 4 nebo 5?

Řešení: Chce-li žák získat hodnocení 1, musí aspoň 11krát odpovědět správně. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{12} + \binom{12}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}000\,047.$$

Analogicky pro pravděpodobnost získání známky 2 je

$$\binom{12}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{12}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = 0{,}003\,808.$$

Pravděpodobnost získání známky 3 je

$$\sum_{i=5}^{8} \binom{12}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-i} = 0{,}364\,624.$$

Pravděpodobnost získání známky 4 je

$$\sum_{i=3}^{4} \binom{12}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-i} = 0{,}450\,398.$$

Pravděpodobnost získání známky 5 je

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{12}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-i} = 0{,}181\,123.$$

Z uvedených výsledků vidíme, že šance získat v testu známku 1 nebo 2 bez patřičných znalostí je velmi malá (menší než 0,05). Lze tedy téměř vyloučit, že takový žák nebyl na test připraven.

Naproti tomu získat hodnocení 3 pouze hádáním je možné. Pravděpodobnost tohoto jevu je poměrně vysoká. V žádném případě nelze považovat takto získanou známku za věrohodnou.

Jednou z cest, jak „eliminovat“ hádání, je zvětšit počet nabízených odpovědí ke každé otázce. I tento přístup má však svá omezení. Přidávání dalších odpovědí nemusí vždy nutně vést ke ztížení situace, neboť není

vždy možné přidat „stejně dobré“ odpovědi. Je evidentní, že přidáváním „nesmyslných“ odpovědí žákům úlohu neztížíme.

Příklad 2. Test obsahuje 12 otázek. Ke každé otázce je nabízeno pět odpovědí, z nichž právě jedna je správná. Klasifikace probíhá podle stejné tabulky jako v příkladu 1.

Řešení: Chce-li žák získat hodnocení 1, musí tedy taktéž aspoň 11krát odpovědět správně. Pravděpodobnost tohoto jevu je rovna

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{12} + \binom{12}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}000\,000\,201.$$

Analogicky pro pravděpodobnost získání známky 2 je

$$\binom{12}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{2} + \binom{12}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{3} = 0{,}000\,061\,997.$$

Pravděpodobnost získání známky 3 je

$$\sum_{i=5}^{8}\binom{12}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}\left(\frac{2}{5}\right)^{12-i} = 0{,}072\,493\,302.$$

Pravděpodobnost získání známky 4 je

$$\sum_{i=3}^{4}\binom{12}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}\left(\frac{2}{5}\right)^{12-i} = 0{,}369\,098\,752.$$

Pravděpodobnost získání známky 5 je

$$\sum_{i=0}^{2}\binom{12}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}\left(\frac{2}{5}\right)^{12-i} = 0{,}558\,345\,748.$$

Není překvapivé, že šance získat známku 1 nebo 2 u nepřipraveného žáka je ještě menší než v předešlém příkladě (přidáním odpovědí ztěžujeme hádání). Samozřejmě, že klesne i pravděpobnost, že žák získá hádáním známku 3. Pravděpodobnost tohoto jevu je sice výrazně menší než v prvním příkladě, ale ne na tolik, abychom mohli považovat tento jev za prakticky nemožný. I v tomto případě nelze považovat známky 3 a 4 z hlediska statistiky za věrohodné.

Literatura

[1] Kafková M., Tlustý P.: *Statistické aspekty testového zkoušení.* Matematika-fyzika-informatika, roč. 13(6), 2004, str. 332–335.

Komunikace na 1. stupni ZŠ – úlohy přejaté ze zahraničí a jejich úskalí

Michaela Kaslová

Abstrakt

Školní matematika se jeví jako předmět nadnárodní. Překlady úloh (nejen pro mezinárodní matematické soutěže) a porovnání evropských učebnic ukázaly na některé specifické jevy ve školní matematice. Tyto jevy ovlivňují pohled žáka na matematiku i úspěšnost řešení a nemůžeme tudíž některé okruhy školní matematiky považovat za nadnárodní.

School mathematics appears to be supranational school subject. Translations of maths problems (made not only for internationals competitions) and comparison of European textboxes showed certain specific phenomena in school maths. This phenomena influence pupils' point of view to mathematics as well a successfulness of a solution and for that reason we can not accept some parts of school mathematics as a supranational.

Úvod

Práce vychází především z porovnávání zadání úloh pro soutěže Kangourou, RMT, částečně i MO a opírá se o dlouhodobé pozorování žáků prvního stupně, jejichž rodiče mluví jinak než česky. Sleduje několik rovin. Původním záměrem bylo vymezit pojem srovnatelnost obtížnosti[1]

[1] Kaslová – předneseno v diskusi na zasedání mezinárodní komise Kangourou, květen 1993 v Paříži

a tento pojem byl dále rozvíjen po roce 1996 ve spolupráci se členy výboru RMT[2]. Řešení těchto otázek je součástí řešení VZ J13/98: 114100004.

Pro práci s informací je významné, jak se s informacemi pracuje v té které zemi, respektive, jak se dbá na přesnost a úplnost ve vyjadřování, nebo do jaké míry se přechází ke školní hantýrce a pracuje se s náznakem. Nezanedbatelnou roli hrají tradice země, které se nepřímo promítají do úloh a ovlivňují žáka v procesu řešení.

Na celou problematiku se budeme dívat skrze dva pohledy: 1) překlad přejaté úlohy, 2) žák.

Žáka, pro kterého je čeština rodnou řečí, označme písmenem **R**, pokud je v domácím prostředí **Rd**, v cizím prostředí **Rc**. Žáka, jehož rodnou řečí je jiný jazyk než čeština, označme **Z, Zd** v domácím prostředí, **Zc** v cizím prostředí. Problematiku sledujme ve třech oblastech matematiky prvního stupně: aritmetice, geometrii a ve slovních úlohách.

1 Úlohy početní (aritmetické)

Zápisy pomocí matematické symboliky jsou ve většině evropských zemí tytéž (arabské číslice, $+$, $-$, $=$, $\neq$, $>$, $<$, ( ), $\wedge$, ...). Jiné mají modifikaci (násobení, dělení). Liší se především v tom, **jak jsou převáděny do mluvené podoby řeči**. Jsou jazyky, kde je dokódování jednoznačné (jediná možná forma přečtení zápisu), jinde je více možností, což je mimo jiné dáno i tím, zda má používaný jazyk pevný slovosled ve větě, či ne, zda připouští obě interpretace zápisu – konceptuální i procesuální.

Při **opačném kódování** – mluvené řeči do psané pomocí matematické symboliky – můžeme opět najít rozdíly u typů: zapište a vyřešte, myslím si číslo. Například: zápis $2 + 2 + 2 = 2 \cdot \mathbf{3}$ je dán pořádkem slov ve větě; použijme téměř doslovný překlad „dvě je tu třikrát“.

Při použití českého jazyka v popisu první části zápisu musíme praco-

[2]zasedání RMT – Berg 1998, Siena 1999
Pro žáky prvního stupně hrají roli **technické parametry** spojené se čtením a orientací na stránce i v úloze, délka textu, počet slov i počet slabik ve slovech, rozvržení textu, řádkování, velikost písma nebo obrázku, umístění obrázku na stránce i vzhledem k zadání, rozlišitelnost symbolů, zvýraznění, barevnost. Speciální skupinu **zapamatovatelnost informací**, která je ovlivněna i zkušenostmi žáka (známé–neznámé). Po stránce **lingvistické, zejména to, co ovlivňuje tvorbu představ**: pořadí slov, volba nástrojů pro orientaci v prostoru a v čase, prezentace nepřímé informace, užití signálů a antisignálů, shlukování slov se stejným počátečním písmenem, interpunkce, užití přímé řeči, způsob zadání (rozkaz, výzva, popis) atd.

vat s jiným slovosledem „je tu třikrát číslo dvě“, tudíž druhá část zápisu bude v českých textech vypadat jinak $\mathbf{3} \cdot 2$.

Operátor má v zápise specifickou pozici ovlivněnou používaným jazykem.

Schémata doprovázející postupy se mohou lišit proto, že matematika připouští více možností a záleží na volbě autora, jindy se liší proto, že je komunikace k postupu obtížná. Schéma pak má funkci lingvisticko-facilitační, kompenzuje to, co se v daném jazyce obtížně vyjadřuje.

U **početních operací** je nutné zvážit, zda opravdu použité znaménko signalizuje „tradiční operaci“ sčítání, odčítání, násobení, dělení. Jsou případy, kdy je nutné + či − interpretovat jako *dočítání*, což je jiná myšlenková procedura. V dekódování se používají jiná slova i jiné řazení slov než doposud. Například: místo $5 + 2 = _$ „pět a dvě je ...“ je v jiném kontextu změna v dekódování $5 + _ = 7$ ... „pět a kolik je sedm“; u písemného odčítání $345 - 201 = \ldots$ „jedna o kolik je pět“. Podobná situace je u násobení a dělení – použití *donásobení*. Překlady komentářů to někdy nerozlišují. Najdeme i takové úlohy, kde nejde o dělení nebo odčítání, znak pro dělení (odčítání) je užit, přesto pro takovou situaci nemáme v českém jazyce speciální pojmenování. Například $12 : _ = 4$ nebo $29 - _ = 26$. To pak provádíme opisem: „Čím bychom měli vydělit 12, abychom dostali (podíl) 4? Které číslo musíme odečíst, aby vyšlo 26?“ a podobně. Tentýž zápis lze převést na donásobení nebo dočítání tak, že budeme číst zápis zprava doleva s použitím záměny interpretace operačního znaménka za operaci inverzní, jako kdybychom prováděli zkoušku: „Čtyřikrát kolik je dvanáct? Dvacet šest a kolik je dvacet devět?“ Ne každá evropská učebnice takové úlohy zařazuje na první stupni a ne každá je interpretuje stejně.

Pokud je namísto prázdného místa (_ nebo okénka) použito písmeno, může být dekódování zápisu jiné a zde záleží na tom, jak to který systém zavádí a jak rychle směřuje k řešení **rovnic**. U nás je téma rovnice a jejich úpravy zařazeno na druhý stupeň a na prvním stupni se dítě pouze začíná adaptovat na použití písmene místo čísla. Přestože je zápis v učebnicích prvního stupně stejný například: $45 + 78 = x$, je dekódování na prvním stupni v evropských zemích různé. Někde se pouze uvede [iks] jinde se k němu přidává slovo výsledek, součet nebo číslo.

Slovo „**dosadit**“ ve vazbě co za co (představuje ..., zastupuje ..., místo toho paří ...) je někdy zapisováno pomocí =, jinde pomocí →, nebo i jinak (tabulkou, ...). Znaménko = je tedy často čteno stejně (je,

rovná se), ale má různé významy. To, že se jedná o dosazování, je v učebnicích některých zemí prezentováno cíleně, jinde (podobně jako u nás) jen tak mimochodem. Znamená to, že dítě nechápe plně významy jednotlivých matematických symbolů a hranice jejich použití, neumí je také pokaždé s jistotou převést do mluvené podoby řeči. Přejímání úloh zaměřených na dosazování může žákovi situaci ulehčit, nebo zkomplikovat také podle toho, jak je na takovou situaci připraven učitel.[3]

Rozdíly mezi Z a R jsou i v samotném vnitřním **verbalizování kalkulu**. Pokud se dítě naučí *počítat po jedné, sčítat, odčítat v libovolném jazyce* (rodném nebo cizím), počítá v daném jazyce v jakémkoli prostředí (domácím i cizím), což za jistých okolností představuje transformační proces (překlad) navíc. Do takové situace se mohou dostat v prvním ročníku děti, které se učily v mateřské škole cizímu jazyku včetně prvních kroků k aritmetice. Počítání v novém, nejen cizím prostředí, pro Rc, Zc znamená *prodloužení doby k odpovědi*, pokud je požadována ústně, nikoli písemně matematickou symbolikou. U žáků prvních tříd můžeme zaznamenat odpověď – uvedení čísla v cizím jazyce, místo v jazyce, ve kterém se v matematice komunikuje.

2 Úlohy geometrické (práce s modely, měření)

Geometrické úlohy určené jedné věkové skupině se v Evropě od sebe významně liší. Nejde pouze o obtížnost, o pojetí geometrie, charakter přípravné etapy, ale i pořadí a koncentraci úloh. Převzetí izolované úlohy nebo kapitoly je problematičtější i z dalších důvodů. Jde především o **zápisy**. Například ve Francii (Tunisu, Maroku) lze trojúhelník s vrcholy A, B, C pojmenovat ABC i ACB. Pro Z může být obojí správně, pro Rd je pouze jedno správné. V Evropě také není jednotný pohled na zápis **délek úseček a dekódování rovnítka** vedle toho, co již žáci znají: $|AB| = 3$ cm, $AB = 3$ cm, $AB = a$, $AB = c$.[4] Při přejímání úloh ze zahraničí bychom měli myslet na způsob kódování na 2. a 3. stupni.

Další oblastí je **terminologie**. Pojem *půdorys* a *pohled shora* někde splývají, jinde se to odlišuje podobně jako v architektuře. Pro překlad je tedy důležité pochopit úlohu, případně znát očekávané řešení.

[3] Marchini C., Kaslová M.: *Substitution at the primary school.* Přednáška SEMT, Praha 28. 8. 2003.

[4] Kaslová M.: *Transformace matematického kódu do mluvené řeči a naopak.*

Jsou situace, kdy je terminologie vzájemně jednoznačně přeložitelná, ale lingvistická analýza v každém z jazyků ukazuje na *jinou charakteristiku* pojmenovaného (čtyřúhelník ... čtyři úhly, il quadrilatero ... čtyři strany). Jiné jazyky například *nerozlišují* běžně číslo a číslice, kruh a kružnice a podobně, význam je dán kontextem, užitím nonverbální komunikace. K záměnám dochází v překladech do češtiny (např. Montessori).

Slovní zásoba u dětí není stejně široká. Slova, zejména týkající se *poloh v prostoru a změn* v něm (především předložky, příslovce a často i slovesa), nemají snadný překlad. Např. slovo „*přes*“ může asociovat různé představy jak dynamické, tak statické.[5] Slovní zásoba týkající se prostoru není snadno přeložitelná, závisí často na znalosti idiomů. Jsou situace, kde v jednom jazyce slova *chybí* a je třeba u Zc, Rc budovat slovní zásobu, podobně kdy daný jev je *nepopsatelný*, nebo je popsatelný *více slovy* než jediným (před, vyskočit, seběhnout, upažit). V řidších případech v Evropě se můžeme setkat se situací, kdy cizí jazyk rozlišuje jemněji než čeština a český ekvivalent neexistuje.

Slovo a pojem – v textu geometrické úlohy se v češtině slovem trojúhelník chápe na prvním stupni buď **jakýkoli** trojúhelník, nebo **jedinečný** – známý z kontextu, nebo takový, který je popsán, určen délkami stran nebo ten, který je vedle textu zakreslen (načrtnut nebo narýsován).[6] Pro rozlišení mezi trojúhelníkem obecně a trojúhelníkem specifickým se především v neslovanských jazycích používají členy (určitý nebo neurčitý, za jistých okolností je člen vynechán). Při interpretaci je na libovůli Rd, nebo se řeč zpřesňuje ukazovacím zájmenem, pojmenováním trojúhelníka, obrázkem. *Neexistence určitých a neurčitých členů* může R prodlužovat tvorbu a zpracování představ, komplikovat nejen pojmotvorný proces, ale i start ke konstrukčním úlohám. Pozorování v pátém ročníku (červen 2001) při prvním použití náčrtku: Rd náčrtek interpretuje jako zpřesnění dosavadních informací a náčrtek nechápe jako jakýkoli trojúhelník. V důsledku toho jeví podiv nad rozdílem mezi

[5]Podle kontextu „přes“ znamená křížení (přehodit nohu přes nohu), zakrytí (přehodila ubrus přes stůl), překonání překážky po pomyslném horním oblouku (přešel přes kopec) – dokonce bez dotyku (přeskočil přes hromádku), po pomyslné lince (přešel přes řeku, ulici), průchod (přes les, přes město), překážku (nevidím přes tebe), nesoulad, nepořádek (páté přes deváté) atp.

[6]Kaslová M.: *Problematika překladu matematických úloh.* Přednáška Universita di Parma květen 2001.

náčrtkem a trojúhelníkem zkonstruovaným. Projev nejistoty, zda je konstrukce správně, není ve třídě ojedinělý.

3 Slovní úlohy

Slovní úlohy představují problémy v několika směrech. Pro řešení záleží na dobrém **pochopení** čteného (slyšeného) víc než v hodinách čtení. Informace jsou značně zhuštěny a přitom v českém jazyce je poměrně volné *pořadí slov* ve větě (např. oproti angličtině). Pro Rc je potíž v tom, že pořadí slov je relativně stabilní a neskrývá v sobě nápovědu. Zc je na tom podobně, avšak proměnlivé pořadí slov necítí jako pomoc, zhoršuje se u něho porozumění.

K řešení jsou důležité nejen samotné **informace**, ale i facilitační či matoucí prostředky. Speciální případ tvoří tak zvané *nepřímé informace*. Dva týdny je u nás 14 dní, ve Francii se tomu říká 15 dní. Prázdniny je údaj, který pro české děti znamená nejméně 62 dní, pro švédské děti nejméně 61 dní, protože toto závisí na datu, kdy prázdniny začínají. [7]

Některá slova jsou *národní nápovědou*, jiná (částečně) evropskou: jsou to jména osob, druhy zvířat, povolání, role, prostředí, názvy jídel. Například: Matěj signalizuje, že jeho nápady, *postupy*, řešení nebudou ty nejlepší. Filip je symbolem bystrého úsudku. Král, princ v našem kontextu nemusí být moudrý, chytrý (na rozdíl od Fr). Představa o *hodnotě* se liší nejen v závislosti na používané měně, ale i například na tradici a na geografických podmínkách (čokoládový bonbón, brambory, dřevěné hračky) jsou v některých zemích symbolem bohatství, jinde standardu, nebo dokonce bídy.

V textu jsou slova, která asociují **odlišné číselné představy**: stařec (Albánie a ČR), daleko (Kanada, Švédsko a ČR), rodina (Romové, Albánci, Francouzi, Němci, Češi), rozkrájený dort je pro Středoevropany dort (ve tvaru válce) rozdělený na 12 nebo 16 stejných dílů.

Neporozumění textu může být vázána na zkušenosti. *Sousloví, náměty* jsou pro některé děti (Zc) nepochopitelné: nemocnost, školní výlet, škola v přírodě, dárky na Štědrý den. V rozporu se zkušeností mohou být i jiné *situace*, ale jsou jedné skupině známy například z národních písní, pohádek: spát na peci, jet s přívozníkem, rozdělat oheň v lese, živit se sběrem klestí, ... K jisté unifikaci představ žáků dochází prostřednictvím

[7] Německo má nejednotný nástup prázdnin, Kanada má posun prázdnin oproti ČR a tak podobně.

Tv programů pro děti. Nelze na to spoléhat. Dobrým **zdrojem pochopení rozdílů** v zadání úloh je cestování a především četba **národních pohádek**.

Proces řešení, stanovení podmínek je vázán na řadu specifik. Uveďme ta, která jsou podle mého frekventovanější na prvním stupni. Používaná čeština, na rozdíl od angličtiny, francouzštiny a dalších jazyků, mnohdy zařazuje spojku „*když*“ i ve významu **podmínky**, tedy volba spojky není nápovědou pro rozlišení časového určení a podmínky. Práce s podmínkou je pro Rd obtížnější. To potvrzují i učitelé cizích jazyků (časté chyby v překladech z Čj). Vynechání podmínky v řešení může mít u Rd příčiny i vně nepozornosti. Tomu odpovídají i výsledky v řešení úloh RMT 1998, 1999, 2000.[8]

Stanovení podmínek může být vázáno na *rod jména označujícího počítanou jednotku.* Český jazyk často nerozlišuje pohlaví: žáci znamená kluci i holčičky, podobně dvojčata mohou být jak dva kluci, tak dvě holčičky, tak i párek. Stejné zadání vede k odlišným výsledkům.

4 Didaktické problémy a překlady materiálů pro vyučování matematice na 1. stupni

Zahraniční publikace v překladu neřeší výše popsané obtíže. Knížky, pracovní sešity i didakticky laděné texty mají řadu úskalí a nezaručují, že nám pomohou pochopit a překonat žákovy problémy. Obsah učiva školní matematiky 1. stupně je v každé evropské zemi specifický a je dán mimo jiné i pojetím mateřské školy. Má-li nějaká knížka v podtitulu pro 1. stupeň (pro mateřskou školu), neznamená to, že je určena našim dětem stejné věkové skupiny. Popsané reakce cizích dětí se mohou od našich lišit. Úlohy, úkoly v některých z nich jsou pro naše žáky příliš snadné, ale častěji neřešitelné, což žáka přinejmenším odrazuje od matematiky, vzniká u něho pocit nedostatečnosti a podobný pohled na něho mohou mít i rodiče (např. publikace Co všechno musím vědět, než půjdu do školy). Překlady někdy používají odlišné znaky od našich, volí chybně terminologii a nebo tvoří, podle mé zkušenosti často zbytečně, nová slova počeštěním cizích.

U materiálů určených pro 1. stupeň **chybí úvod** naznačující, že cesta k danému problému je jen **jedna z více možných**, upozorňující nejen

[8] Kaslová M.: *Rozdíly v řešení úloh mezi českými a ostatními řešiteli.* Přednáška na Univerisita di Parma 2002.

na klady, ale i zápory, zdůrazňující charakteristiku skupiny žáků, se kterou se pracovalo. Je vždy reakcí na kontext, ve kterém vzniká, na situaci, kterou doplňuje, koriguje, rozvíjí, redukuje, obohacuje, inspiruje... Kterou z těchto funkcí v daném kontextu převážně plní, to nevíme, pokud kontext dobře neznáme. V našem kontextu může plnit funkci odlišnou – sloužit k zamyšlení, k obohacení, porovnání, ale i odmítnutí. Překladová literatura pro 1. stupeň většinou neprochází odbornou českou recenzí, ani korekturou terminologickou.

Grafické kalkulačky ve výuce matematiky, program TI InterActive!

Jan Kašpar

1 Grafické kalkulačky, novinky

Grafické kalkulačky patří už mnoho let mezi učební pomůcky, používané na našich školách ve výuce matematiky. Svými možnosti zejména zvýšily názornost výuky některých kapitol matematiky (např. výuku funkcí, posloupností, geometrie atd.) a výpočetními možnostmi, které jsou u nich stále rozšiřovány, umožnily v hodinách matematiky zrychlit rutinní výpočty, takže byl získán čas na řešení více aplikačních úloh. Mluvit o výpočetních možnostech současných kalkulaček je velmi problematické, protože to, co jsem uvedl v červnu do tohoto referátu už bude dost jistě v době konání konference „zastaralá informace“. Každopádně bych jen rád uvedl, že výpočetní možnosti kalkulaček různých producentů (na našem trhu jsou nejznámější CASIO a Texas Instruments) jsou naprosto srovnatelné, protože „průmyslová špionáž“ funguje spolehlivě a chvilkový náskok jednoho je konkurentem velmi brzy vyrovnán. Na toto téma si dovolím jen malou poznámku, vyplývající z kursů, pořádaných pro učitele. Jako koordinátor celosvětového vzdělávacího programu T^3 (Teachers Teaching with Technology) pro Českou republiku, plně podporovaného firmou Texas Instruments, vím, že technologický vývoj kalkulaček této firmy plně respektuje aktuální požadavky učitelů matematiky a přírodovědných předmětů. Tyto požadavky a podněty jsou pravidelně získávané zejména na každoroční celosvětové výroční konferenci tohoto programu, které se zúčastňuje pravidelně kolem 2 500 (!!!) učitelů z celého světa. Pro program T^3 (a tím i pro následný vývoj kalkulaček TI) je velmi podstatné, že je koordinován učiteli matematiky a hlavním motem programu je „Učitelé pro učitele“. Na setkáních s učiteli se tak dozvídám, že kalkulačky Texas Instruments „jsou pro práci učitele nejpříjemnější“. Na závěr kapitoly o grafických kalkulačkách se jen krátce zmíním o možnostech nejnovějších typů. Samozřejmostí je

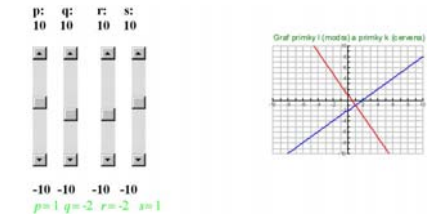
komunikace s PC včetně možnosti přenosu dat z Internetu, takže u kalkulaček TI je možný mj. „upgrade“ operačního systému, popř. doplnění nového software. Zde bych rád připomněl, že nejnovější typy grafických kalkulaček TI mají mj. zabudovanou CABRI geometrii a systém DERIVE. Protože o výpočetních možnostech grafických kalkulaček bylo již v minulosti referováno na mnoha konferencích, rozhodl jsem se seznámit vás dnes s poměrně novým a u nás dosud málo známým software, který byl firmou Texas Instruments vyvinut původně jako prostředek pro vytváření protokolů o úlohách řešených na grafických kalkulačkách.

2 Program TI InterActive!

Program TI InterActive! byl firmou TI dán k dispozici v roce 2002 a podle množství příspěvků na letošní výroční konferenci programu T^3, která se konala v březnu v New Orleans v USA, je zřejmé, že získává mezi učiteli velkou popularitu, a já mohu konstatovat, že oprávněně. Jedná se totiž o program, který umožňuje to, co zatím žádný program neumožňoval (popř. se omlouvám, že o takovém programu nevím). Pomocí programu TI InterActive! má uživatel možnost vytvořit o matematické úloze protokol, který může obsahovat volný text, matematické výpočty (prakticky shodné s výpočty, které je možné provádět na grafické kalkulačce; z výše zmíněných možností kalkulaček TI chybí pouze CABRI geometrie), tabulky dat a grafy funkcí. Vytváření protokolu je velmi snadné, program má charakter běžných editorů, vytvořené grafy jsou interaktivní a při provádění výpočtů je možné skrýt buď zadání, nebo výsledek (vhodné např. pro přípravu písemek, zadávání domácích úkolů apod.). V následujících velmi jednoduchých příkladech ukážu pouze základy práce s tímto programem jako inspiraci pro Vás.

Příklad 1: Dvě přímky jsou definované rovnicemi ve tvaru $y = k * x + q$. Jejich rovnice jsou uloženy pomocí editoru funkcí programu TIInterActive! a pro definování a následnou změnu koeficientů parametrů těchto rovnic jsou použité pohyblivé lišty, které program umožňuje do protokolu vložit. V příkladu jsou následně vypočtené souřadnice průsečíků obou přímek s osou x a jsou vypočtené souřadnice průsečíku daných přímek. Do protokolu je dále zakreslen graf s oběma přímkami. Graf je dynamický a uživatel má možnost pomocí pohyblivých lišt měnit polohu každé z přímek a zkoumat následně vliv koeficientů rovnic na vzájemnou polohu přímek.

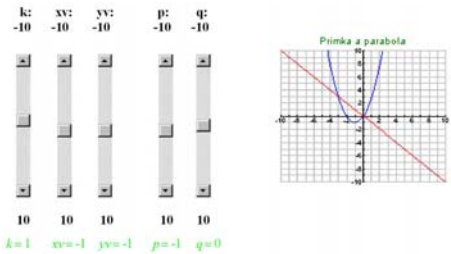
Protokol – priklad 1: Graf dvou primek, zadanych funkcemi tvaru $f(x) = a*x+b$, jejich vzajemna poloha a pruseciky s osou x (primka *l*: $y(x) := p \cdot x + q$, primka *k*: $z(x) := r \cdot x + s$)



rovnice primky *l*: $y(x) = x - 2$, **rovnice primky *k*:** $z(x) = 1 - 2x$
Prusecik: primky *l* s osou x: $x = 2$ **primky *k* s osou *x*:** $x = \frac{1}{2}$, **primky *l* a primky *k*: *xq*:** $x = 1$, ***yq*:** $x - 2 = -1$

Příklad 2: Přímka l je zadaná rovnici ve tvaru $y = k*x+q$ a parabola p je zadaná rovnici ve tvaru $y = k*(x+xc)^2 + yc$ (parabola s vrcholem $V = [xv, yv]$ a osou rovnoběžnou s osou y). Stejně jako v předchozím příkladě jsou rovnice obou objektů uloženy pomocí editoru funkcí a do protokolu jsou vložené posuvné lišty pro zadávání hodnot parametrů rovnic. Graf, vložený do protokolu, je opět dynamický a umožňuje uživateli sledovat vztah mezi hodnotami parametrů a vzájemnou polohou přímky a paraboly. Nakonec jsou v protokolu počítány průsečíky přímky a paraboly.

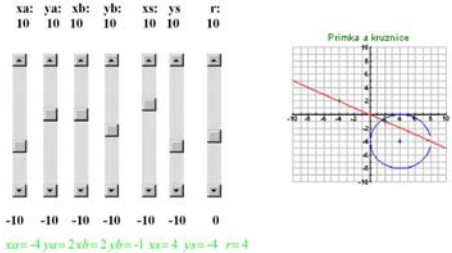
Protokol – priklad 2: Vzajemna poloha primky *l* ($y = k*x+q$) a paraboly *p* ($y = k*(x+xv)^2 + yv$)
parabola: $y(x) := k \cdot (x - xv)^{®} + yv$, **line:** $z(x) := p \cdot x + q$



Dana parabola *p*: $y(x) = x^2 + 2 \cdot x$ **a primka *l*** $z(x) = -x$, **Souradnice pruseciku: x:** $x = 0$ or $x = -3$

Příklad 3: Přímka je zadaná dvěma různými body na ni ležícími ($A = [xa, ya]$ a $B = [xb, yb]$) a kružnice je zadaná rovnici $(x - xs)^2 + (y - ys)^2 = r^2$ (kružnice se středem $S = [xs, ys]$ a poloměrem r). Pro přímku je odvozena rovnice ve směrnicovém tvaru $y(x) = k * x + q$ a pro kružnici jsou definované dvě rovnice (pro horní půlkružnici a pro dolní půlkružnici – toto je nutné pro nakresleni kružnice). Práce s rovnicemi, resp. funkcemi a s grafy je stejná jako v předchozích příkladech, průsečíky přímky a kružnice musíme počítat zvlášť pro každou půlkružnici.

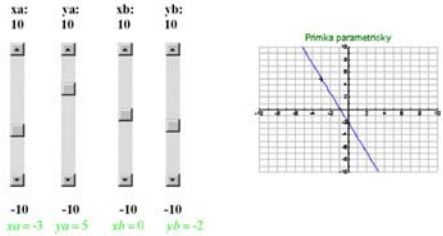
Protokol – priklad 3: Vzajemna poloha primky ($y = k * x + q$) a kruznice ($(x - xs)^2 + (y - ys)^2 = r^2$) (primka je urcena dvema ruznymi na ni lezicimi body $A = [xa, ya]$, $B = [xb, yb]$, kruznice stredem $S = [xs, ys]$ a polomerem r).
pulkruznice: horni: $y(x) := ys + \sqrt{(r^{®} - (x - xs)^{®})}$**, dolni:** $z(x) := ys - \sqrt{(r^{®} - (x - xs)^{®})}$**, primka:** $k := \dfrac{yb - ya}{xb - xa}$ $v(x) := k \cdot (x - xb) + yb$



Prusecik primky s horni pulkruznici: $x = 8$ or $x = \dfrac{8}{5}$ **Prusecik primky s dolni pulkruznici:** $x = 8$

Příklad 4: Přímka l je definovaná parametrickými rovnicemi $x(t) = xa + t(xb - xa)$; $y(t) = ya + t(yb - ya)$ ($A[xa, ya]$, $B[xb, yb]$ jsou dva různé body ležící na přímce l). V nabídce programu TIIA musíme zvolit ikonu pro graf parametrických rovnic. Parametrické rovnice přímky l pak musíme zapsat do nabídnutého dialogového okna. Pro zadávání hodnot xa, ya, xb, yb vložíme do protokolu opět pohyblivé lišty a uživatel má tak možnost měnit polohu bodů. V protokolu je dále výpočet průsečíku přímky l s osami x a y. Program TIIA umožňuje graf trasovat, což je, myslím si, velmi užitečné pro porozumění parametrickým rovnicím.

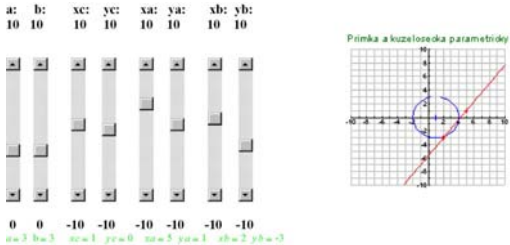
Protokol – priklad 4: Primka *l* je zadana parametrickymi rovnicemi: $x(t) = xa + t(xb - xa)$**;** $y(t) = ya + t(yb - ya)$ **(**$A[xa, ya]$**,** $B[xb, yb]$ **points of line *l*)**



Rovnice zadane primky *l*: $x(t) = 3 \cdot t - 3$ $y(t) = 5 - 7 \cdot t$
Hodnota parametru *t* pro prusecik primky *l* s osou *x*: $t = \dfrac{5}{7}$**, s osou *y*:** $t = 1$**, Prusecik primky *l* s osou *x*:** $3 \cdot t - 3 = \dfrac{-6}{7}$**, s osou *y*:** $5 - 7 \cdot t = -2$

Příklad 5: Přímka l je zadaná parametrickými rovnicemi $x(t) = xa + t(xb - xa)$; $y(t) = ya + t(yb - ya)$ ($A = [xa, ya]$, $B = [xb, yb]$ jsou dva různé body, ležící na přímce l). Kuželosečka je zadaná parametrickými rovnicemi $x(t) = a * cos(t) + xc$, $y(t) = b * sin(t) + yc$ (tyto rovnice popisují obecně elipsu se středem $C = [xc, yc]$, s osami rovnoběžnými se souřadnicovými osami a s poloosami délky a, b; pokud $a = b$, kuželosečka je kružnice). Stejně jako v příkladu 4 je třeba v nabídce TIIA zvolit graf parametrických rovnic a parametrické rovnice přímky l a kuželosečky musíme zapsat do nabídnutého dialogového okna. Opět jsou do protokolu vložené pohyblivé lišty pro zadávání hodnot xa, ya, xb, yb, xc, yc, a, b. Výsledný dynamický graf umožňuje uživateli zkoumat závislost vzájemné polohy přímky a kuželosečky na hodnotách xa, ya, xb, yb, xc, yc, a, b.

Protokol – priklad 5: Kuzelosecka (kruznice nebo elipsa urcena stredem $C = [xc, yc]$ **a velikosti poloos *a, b*) a primka (urcena dvema ruznymi na ni lezicimi body** $A = [xa, ya]$**,** $B = [xb, yb]$**) jsou zadane parametrickymi rovnicemi:**
kuzelosecka: $x(t) := a \cdot \cos(t) + xc$**;** $y(t) := b \cdot \sin(t) + yc$
primka: $u(t) := xa + (xb - xa) \cdot t$; $v(t) := ya + (yb - ya) \cdot t$



Rovnice dane kuzelosecky: $x(t) = 3 \cdot \cos(t) + 1$; $y(t) = 3 \cdot \sin(t)$
Rovnice dane primky: $u(t) = 5 - 3 \cdot t$; $v(t) = 1 - 4 \cdot t$

3 Závěr

Možnosti programu TIIA, které jsem demonstroval v uvedených příkladech, jsou jenom malou částí toho, co uživateli tento program poskytuje. Výpočetní možnosti, které program nabízí, jsou ekvivalentní s možnostmi nejnovějších modelů grafických kalkulaček TI, tzn. že je vlastně uživateli k dispozici systém DERIVE (jen stručně uvedu: základní algebraické výpočty, vektorový a maticový počet, základní výpočty diferenciálního a integrálního počtu), je možné pracovat se seznamy, statisticky vyhodnocovat data včetně dat „stažených“ z Internetu atd. Malou nevýhodou je, že neexistuje česká verze tohoto programu, ale domnívám se, že jeho přednosti tuto skutečnost převáží. Pokud se rozhodnete program ve své práci používat, jsem přesvědčen, že s ním budete velmi spokojeni.

Zájemce o aktuální informace odkazuji na adresu http://t3cz.cuni.cz nebo http://education.ti.com.

E-learningový systém e-Task ve výuce matematických základů geoinformatiky

Renata Klufová

Abstrakt

Hlavním cílem předkládaného příspěvku je poskytnout stručnou informaci o využití e-learningového systému e-Task na Zemědělské fakultě Jihočeské Univerzity v Českých Budějovicích. Systém je využíván nejen při výuce matematických předmětů, jeho nespornou výhodou je využitelnost pro celou řadu vědních disciplín – od matematiky, informatiky po výuku jazyků a různých ekonomických předmětů, ale i matematických základů geoinformatiky.

1 Úvod

Systém eTask je průběžně rozvíjen pracovníky katedry aplikované matematiky a informatiky ZF JU v Českých Budějovicích v rámci řešení grantu 1905/2003 FRVŠ MŠ ČR a je v souladu s hlavními prioritami stanovenými vedením univerzity jak pro nejbližší období, tak i pro dlouhodobý horizont.

Výchozí myšlenky při vzniku se týkaly filozofie celého záměru. Tu lze zjednodušeně charakterizovat představou, že student se nejvíce naučí při plnění konkrétních úkolů rozložených rovnoměrně do prostoru celého semestru. Například v matematických předmětech je takový náhled naprosto přirozený. Nezastupitelnou rolí pedagoga je pak takový „slalom“ úkolů připravit a studentův „průjezd slalomem“ kontrolovat, korigovat a dokonce být nějakým způsobem stále k dispozici.

Pro realizaci této filozofie bylo požadováno využití informačních vzdělávacích technologií jako vhodného nástroje. Cílem bylo vytvořit internetově přístupný produkt splňující řadu přirozených, ale velmi důležitých požadavků:

- sdílení libovolných dokumentů a souborů;
- vymezení uživatelských rolí (manager, tutor, teacher, student, anonymous);
- design oddělený od obsahu, příprava jazykových verzí, přizpůsobení uživateli;
- standardní autentizace (LDAP, ...), SSL;
- využití moderní technologie Zope, podpora přístupu do lib. databází, ...;
- sdílení centrální databáze na více serverech – rozložení zátěže;
- komunikace uživatelů v rámci kurzů;
- přístup k multimediálním produktům.

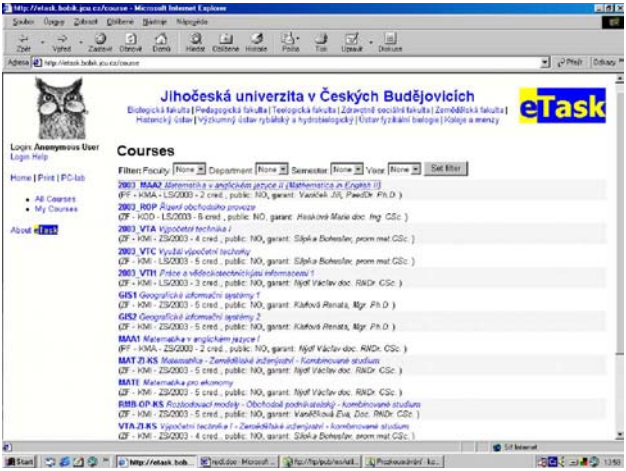
2 Materiál a metodika

Pro vlastní naprogramování bylo využito OpenSource technologie Zope (http://www.zope.org) a dalších standardních nástrojů. K zabezpečení přenosu informací je využit standardní protokol SSL. Veškeré programátorské práce provedli pracovníci katedry.

Počátkem roku 2003 byl na adrese http://etask.bobik.jcu.cz zprovozněn portál, který již od samého počátku splňuje řadu parametrů důležitých pro standardizované e-learningové systémy:

- sdílení dat, informací, znalostí,...;
- distribuovaná administrace;
- přizpůsobitelnost, nastavitelnost;
- autentizace/bezpečnost;
- podpora standardů/integrovatelnost;
- škálovatelnost;
- podpora komunikace;
- přímé využití multimediálních produktů.

Hlavním cílem, který autoři sledují v akademickém roce 2003/2004, je odzkoušení celého systému v praktické vysokoškolské výuce. Pokusně k tomu došlo již v letním semestru 2002/2003 na čtyřech předmětech (kurzech) vyučovaných na Zemědělské nebo Pedagogické fakultě JU.

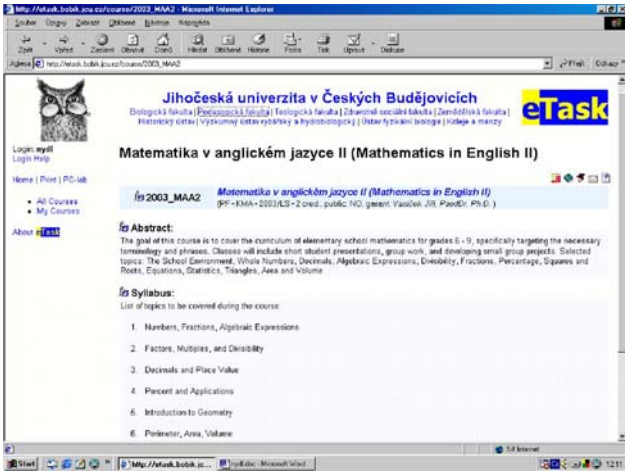


Obr. 1 Vstupní stránka do jednotlivých kurzů v systému eTask

V zimním semestru 2003/2004 se podařilo zařadit takových kurzů deset. Spadají ve většině do oblasti matematických a informatických předmětů. Výběr je založen pouze na zájmu a ochotě jednotlivých garantů předmětů a vyučujících.

Nyní stručně popíšeme filosofii systému eTask. Každý kurz (předmět) je v systému samostatnou jednotkou. Je přístupný pouze frekventantům kurzu (studentům předmětu) a tutorům (vyučujícím předmětu). Součástí „výbavy kurzu“ jsou základní osobní informace o jednotlivých studentech (e-mail, link na webovou stránku), které si může každý frekventant přímo v systému upravovat. Studentům jsou také přístupné informace o jednotlivých tutorech. Každý tutor může kromě managementu svých osobních informací také zařazovat další tutory a další studenty do kurzu.

Další nedílnou součástí „výbavy“ každého kurzu je abstrakt, který může být totožný s popisem kurzu v seznamu přednášek, a sylabus. Obě tyto položky operativně upravuje tutor. Na obrázku 2 je ukázka vstupní stránky do kurzu MAA2 vyučovaného v zimním semestru 2002/2003. Náplní kurzu je zejména anglické matematické názvosloví a frazeologie v matematice pro 2. stupeň ZŠ. Jednalo se o pilotní zavedení systému eTask – práce s malou skupinou studentů přinesla řadu výhod a jazy-



Obr. 2 Vstupní stránka předmětu MAA2 v systému e-Task

ková složka výuky umožnila uplatnit multimediální materiály a úkoly, ale i řešení (více viz např. [1]).

Na ukázkové vstupní stránce kurzu MAA2 vidíme typickou strukturu a design – tedy název a základní informace o předmětu, abstrakt a sylabus. Vpravo pod logem systému eTask je pět ikon vyjadřujících základní funkce (služby) systému. Jsou to zprava: Help, Nástěnka, Tutoři, Dokumenty, Mapa.

Nyní vysvětlíme funkce jednotlivých služeb nabízených kliknutím na jednotlivé ikony v systému eTask:

Help – nápověda k užívání jednotlivých nástrojů systému studenty i tutory

Nástěnka – slouží ke vzájemné komunikaci mezi studenty a mezi studenty a tutory

Tutoři – základní informace o tutorech; je možno poslat e-mail přímo tutorovi

Dokumenty – studijní materiály, audio a video materiály, záznamy přednášek, prezentace v PowerPointu

Mapa studentů – zadání jednotlivých úkolů (*tasks*) a přehled o jejich plnění; odpovědi jednotlivých studentů (*solutions*)

GIS1 *Geografické informační systémy 1*
(ZF - KMI - 2003/ZS - 5 cred., public: NO, garant: *Klufová Renata, RNDr. Ph.D.*)

Task solution (*View / Edit*)

Students (*View / Edit*)	T01	T02	T03	T04	T05	T06	T07	T08	T09	T10	T11
AMBROŽOVÁ Markéta	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BÁRTÍK Michal	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BARTŮŇKOVÁ Šárka	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BAŠATOVÁ Andrea	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BODNÁR Lukáš	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BUCHLOVÁ Jana	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CAIS Jan	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CENKOVÁ Jana	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CEPÁK Martin	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CRKVOVÁ Aneta	1	1 c	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EIBL Michal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obr. 3 Mapa studentů v kurzu GIS1 – část (letní semestr 2003/2004)

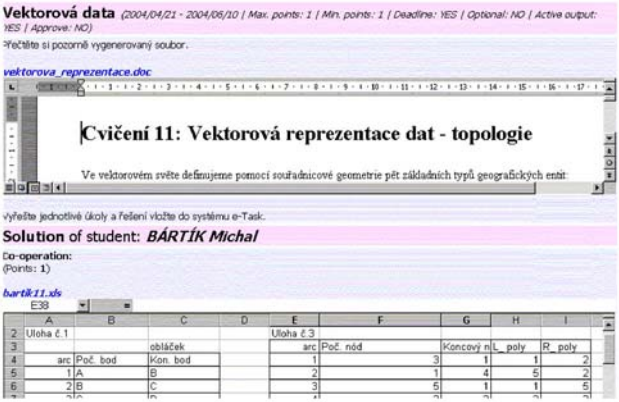
3 Výsledky a diskuse

Jak jsme již naznačili, základním pojmem celého systému je *úkol* (*task*). V ukázkové mapě studentů z kurzu GIS1 (obr. 3) vidíme, jak studenti plnili jednotlivé úkoly (0 značí nesplněný úkol). Každý sloupec tabulky odpovídá jednomu úkolu.

K přípravě a zadání jednotlivých úkolů je systém vybaven nástrojem **TaskManagement**. Tutor postupně zadává (vkládá) součásti úkolu – jeho název (**Title**), expozici (**Exposition** – vhled), tělo úkolu (**Task Body**) a otázku (**Question**). Ty jsou systémem spojeny do celistvého tvaru. Po kliknutí na číslo úkolu v záhlaví **Mapy** (např. T05) se studentovi zobrazí úkol jako celek.

Pro využití systému pro výuku matematických předmětů je důležité, že do těla úkolu je možno vložit soubory nejrůznějšího typu: počínaje typy *.txt, *.doc, *.xls, *.pdf, *.jpg, *.wav, *.avi až po např. Worksheet pro Maple V. Je tedy možno vložit jak libovolný matematický text (často jako *.pdf soubor vyexportovaný z LaTeXu), tak i multimediální produkt (např. matematický diktát či jiné zvukové zadání v anglickém jazyce).

Analogické možnosti má student po vypracování daného úkolu, když do systému vkládá řešení (**Solution**). Často je tvar řešení požadován tutorem (např. zvukový záznam ne delší než 1 minutu, nebo grafický soubor specifikovaného formátu).



Obr. 4 Ukázka úlohy na procvičení topologie vektorových dat v rámci předmětu GIS1 – každý student obdržel své vlastní zadání úlohy (zimní semestr 2003/2004)

Kliknutím na jméno studenta si může tutor prohlédnout všechna studentova řešení, vyhodnotit je a okomentovat přímo v systému eTask. Student nemůže vidět zadání ani řešení svých kolegů.

Systém e-Task se osvědčil mj. také jako výborná demonstrační pomůcka pro názorné nastínění matematických základů geoinformatiky. Do systému lze vkládat úkoly, umožňující studentům praktickým způsobem pochopit jednotlivé části matematické teorie, které slouží jako základ pro výstavbu teorie zpracování geografických dat – základy topologie, teorie grafů, teorie množin, relace a další.

4 Závěr

Po prvních zkušenostech již můžeme konstatovat, že vhodné užití systému e-Task může přinést výrazné zefektivnění studia nejen matematických předmětů. Přínos je jak pro učitele, tak pro studenta. Jejich vzájemná interakce není omezena vyučovacími či konzultačními hodinami. Studenti oceňují také vytvoření prostoru pro samostatnou práci na řešení jednotlivých úkolů a individualizaci činností i hodnocení výsledků. Velmi užitečným se systém stal při výuce matematiky v rámci kombinovaného studia. Jako významně pozitivní lze hodnotit využití systému

i v informatických předmětech, např. při výuce GIS, kdy vhodně zvolená kombinace úloh učiteli slouží jako nástroj pro lepší zvládnutí dovedností a základních principů práce s geografickými daty.

Při práci s malými skupinami studentů lze dosáhnout prakticky individuální organizaci vzdělávacího procesu. U velkých skupin je možno ovlivnit zejména intenzitu individuální průběžné práce studenta. Projekt pokračuje v letním semestru akademického roku 2003/2004.

Literatura

[1] Langé G.: *TIE – CLIL. Professional Development Course.* M.I.U.R., MILAN 2002, ISBN 88-9006649-1-2

[2] Kletečková M., Nýdl V., Milota J.: *Modernizace procesu výuky na ZF JU prostřednictvím informačních a komunikačních technologií.* Mezinárodní konference „Cestovní ruch, a regionální rozvoj a školství“. Tábor duben 2003.

[3] Milota J., Nýdl V.: *Studenti a multimédia – jak to vidíme my.* In: Alternativní metody výuky, p. 19, PřF UK Praha, 16. května 2003. ISBN: 80-5-465-5.

[4] Nýdl V., Baravalle V.: *Lecturing Mathematics in English.* In: Zborník prednášok z medzinárodnej vedeckej konferencie Nové trendy vo výučbe matematiky, Nitra, s. 11–14. ISBN 80-7137-953-0

Projekt – samostatná práce studenta

Milada Kočandrlová, Hana Lakomá

Jedním z hledisek, na které je třeba brát zřetel při výchově bakaláře, absolventa prvního stupně strukturovaného studia, je jeho příprava na magisterské studium. Zvláště pro výuku matematiky – souboru činností, vedoucích k utváření obecných struktur, vazeb a modelů řešení problémů – je toto hledisko velmi důležité. Vzhledem k tomu, že si matematické vzdělávání studentů magisterského stupně studia klade za cíl vést jeho studenty

- k osvojení investigativního způsobu řešení problémů,
- k rozvoji vlastností vedoucích ke schopnosti abstrakce, modifikace a aktualizace modelů a detekce interdisciplinárních vazeb,
- ke kvalitní organizaci zpracování a strukturování informací,

je třeba začít podporovat rozvoj některých těchto „magisterských“ schopností již u studentů stupně bakalářského. Maximální možnou měrou je ovšem přitom třeba mít na zřeteli individuální schopnosti a možnosti studenta.

Jednou z možností jak studenta, budoucího bakaláře, v rámci jeho studia matematických předmětů přiblížit k dosažení výše zmíněných cílů, je zařazení projektů a ročníkových prací do výuky. Strukturované studium přineslo snížení počtu kontaktních hodin matematiky a je tudíž nutné přenést část odpovědnosti za úroveň její znalosti směrem ke studentovi, určit mu míru samostatné práce a tuto práci organizovat.

Na základě dosavadních zkušeností s ročníkovými pracemi se nyní zabývejme tím, co si představujeme pod pojmem projekt a ročníková práce, jaká je koncepce jejich zadávání a jaké výsledky se očekávají od jejich zpracování a prezentování.

1 Projekt

Projektem rozumíme práci menšího rozsahu, skládající se z části přípravné a části aplikační. Přípravná část projektu je množina jednoduchých úloh (v průměru 15), testujících znalosti podmínek a postupů řešení základních, ale zároveň pro probíranou problematiku zásadních, otázek. V této části řeší všichni studenti stejné úlohy.

V aplikační části projektu řeší student jednu až tři komplexnější aplikované úlohy navržené tak, aby dílčí kroky řešení využívaly postupů z přípravné části projektu. Obecné téma dané aplikované úlohy vybírá student ze souboru úloh. Diferenciací různých parametrů úloh a individuálním nastavením okrajových či počátečních podmínek je docíleno toho, že každý student řeší své vlastní zadání v rámci autostudia.

Rozsah zadávání projektů ve druhém semestru je 10 projektů. Tento počet je shodný s počtem probíraných témat druhého semestru: Aproximace rovinného obrazce – motivace k definici určitého integrálu, Polynomy a integrace racionální funkce, Goniometrické vzorce – integrace goniometrické funkce, Určitý integrál v geometrii, Funkce 2 proměnných – kvadriky, Derivace funkce 2 proměnných, Lineární a kvadratická aproximace funkce 2 proměnných, Extrémy funkce 2 proměnných, Jednoduché diferenciální rovnice, Rungovy-Kuttovy metody jejich řešení. V dalších semestrech počítáme s postupným snižováním tohoto počtu na úkor náročnosti řešených aplikačních úloh.

2 Ročníková práce

Ve školních letech 2002–3 a 2003–4 studenti zapsaní do dvousemestrálního kurzu matematiky pro třetí ročník oboru Geodézie a kartografie na Fakultě stavební ČVUT zpracovávali ročníkovou práci. Hodnocení studenta v předmětu pak v podstatě odpovídalo hodnocení jeho ročníkové práce. Zkouška měla formu veřejné obhajoby předložené ročníkové práce. Studenti vytvořili dvoučlenné pracovní skupiny a zadání ročníkové práce si vybírali z předloženého souboru témat tak, aby stejné téma zpracovávaly nejvýše dvě skupiny.

3 Témata prací a ukázky jejich zadání

Témata ročníkových prací byla vybírána z učebnic a skript odborných předmětů příslušného oboru studia, odvozována z publikovaných pro-

blémů řešených současnou technickou praxí oboru. Pro projekty, které jsou zadávány ve 2. semestru, kdy student zatím neabsolvoval odborné předměty, jsou vybírány aplikované úlohy převážně z fyziky a aplikované optiky.

Vzhledem k individuálním možnostem a schopnostem studentů bylo při sestavování souboru témat dbáno na diferenciaci podle

- míry teoretického zaměření tématu,
- složitosti algoritmizace úlohy,
- rozsahu využití programovacích technik, matematického či jiného software.

Diferenciace témat je patrná při porovnání dvou následujících ukázek zadání ročníkové práce, které patří do souboru témat prací pro studenty třetího ročníku oboru Geodézie a kartografie.

Zadání 1: Kubická konformní transformace
Vysvětlete pojmy transformace, transformace n-tého řádu, konformní transformace. Popište vlastnosti kubické konformní transformace, proveďte odvození vzorců a názorné zobrazení. Zhodnoťte využití v geodézii a uveďte příklad.

Zadání 2: Izometrická šířka na referenčním elipsoidu
Vysvětlete pojmy referenční plocha, referenční elipsoid, zeměpisná šířka, izometrická šířka. Známý vzorec pro izometrickou šířku rozviňte v mocninnou řadu, odhadněte chybu. Na vhodných intervalech porovnejte hodnoty izometrické a zeměpisné šířky.

Se zadáním tématu jsou studentům vždy poskytnuty i informace o původu vzniku tématu a o odborných předmětech se zadaným tématem souvisejících.

4 Rozsah a plán zadávání samostatných prací

Rozsah ročníkové práce nebyl přesně stanoven, až na výjimky však počet stran neměl klesnout pod deset a neměl překročit třicet stran včetně obsahu, použité literatury a příloh. Rozsah práce je také přímo úměrný počtu studentem již úspěšně absolvovaných matematických předmětů, viz tabulka 1. Téma zadával učitel nebo si je student volil sám po konzultaci s učitelem.

Tabulka 1 Plán zadávání projektů a ročníkových prací

Předmět (semestr vzorového průchodu studiem)	Typ ročníkové práce
MA1 (1.)	Práce není požadována.
MA2 (2.)	10 projektů.
MA3 (3.)	3 projekty jako příprava na ročníkovou práci většího rozsahu.
MA4 (4.)	Zadání a odevzdání ročníkové práce.

5 Vlastní postup řešení a jeho prezentace

Téma práce souvisí se studovaným oborem studenta. Samotnému procesu řešení problému předchází tyto dva důležité kroky:

- Stručné zmapování současného stavu řešení problému.
- Vyhledání podkladů a pramenů k řešení v knihovnách, na internetu, u učitelů odborných předmětů apod.

Při procesu řešení problému potom student postupuje podle schematu:

- Sestaví matematický, či geometrický model problému.
- Navrhne analytické a numerické řešení problému.
- Zvolí vhodný matematický aparát.
- Vybere vhodný matematický nebo jiný software jako prostředek řešení.
- Provede znázornění řešení, či výsledku pomocí počítačového nebo fyzického modelu.

Zpracovaná práce je studentem prezentována jednak v tištěné formě a jednak formou veřejné obhajoby. Při obhajobě má student k dispozici prostředky moderní prezentační techniky a předem známý stanovený čas pro vystoupení.

6 Řízení samostatné práce

Podstatnou roli při zadávání, v průběhu řešení i při prezentaci výsledků ročníkových prací hraje učitel. Učitel se věnuje konzultacím ročníkových prací jak osobním kontaktem v konzultačních hodinách určených pouze

pro tuto činnost, tak distančně, užitím vhodných eLearningových prostředků. Momenty z průběhu řešení práce, doporučené ke kontrole a konzultaci po řadě, jsou

- zvolený matematický aparát,
- forma shrnutí a zhodnocení výsledků,
- koncepce prezentace při veřejné obhajobě.

Po samotné veřejné obhajobě je samozřejmě důležitý závěrečný komentář učitele poukazující na klady a zápory obsahu i formy studentova vystoupení a dávající tak studentovi možnost zpětné vazby.

Práce na projektu, na rozdíl od ročníkové práce, u které se předpokládá, že bude zpracovávána během semestru, má tři fáze v průběhu čtrnácti dnů:

- zadání a vlastní práce studenta,
- hromadná konzultace analogických úloh v rámci cvičení,
- kontrola a hodnocení.

7 Dosavadní zkušenosti s ročníkovými prácemi

Při závěrečném hodnocení ročníkových prací se ukázalo, že z hlediska obsahu dosáhly všechny práce až na výjimky vysoké úrovně. Studenti sami pochopili práci jako jakési vyvrcholení celého tříletého kurzu matematiky a původně doporučený matematický aparát, zakládající se na látce pátého a šestého semestru, sami rozšířili o další metody a postupy, probírané v semestrech předchozích. Ke zpracování stejných témat studenti přistoupili také profesionálně. Buď si skupiny mezi sebou předem rozdělily kompetence a každá se zaměřila na jinou část problému, nebo pracovaly od začátku do konce samostatně a při závěrečném vystoupení aktivně obhajovaly vlastní postupy.

Z hlediska formy prezentace výsledků se ukázalo, že zkušenosti studentů jsou velmi malé nebo žádné. Až na několik jednotlivců, s jedinou zkušeností veřejného vystoupení v rámci volitelného předmětu, studenti vystupovali veřejně s odbornou problematikou při obhajobě ročníkové práce z matematiky poprvé! Při tvorbě tištěné podoby práce se zase velmi obtížně vypořádávali zejména

- s logickým uspořádáním a členěním textu,
- s užitím křížových odkazů,

- s formulováním úvodu a závěru.

Sami studenti pak činnost na ročníkové práce dávali do souvislosti s činností na práci diplomové v blízké budoucnosti. Hodnotili pozitivně tyto přínosy:

- zorientování se v prostředcích a institucích poskytujících materiály, podklady, data, informace,
- získání zkušeností s precisní formulací myšlenek, postupů, závěrů,
- získání představ o rozsahu a způsobu tvorby veřejného vystoupení a odborného textu.

Učitelé podílející se na vedení ročníkových prací dospěli k jednoznačnému závěru, že odevzdané práce dosahují odborné úrovně ekvivalentní s očekávanou úrovní bakalářských prací s teoretickým základem. Na základě tohoto závěru lze říci, že ročníkové práce jako výstupní práce na ukončení kurzu matematiky pro bakaláře – poskytnou studentům cenné znalosti a zkušenosti, jež všichni zúročí při tvorbě závěrečné bakalářské práce a někteří i při dalším studiu předmětů teoretického základu magisterského stupně studia.

Literatura

[1] Černý J.: *Matematika v inženýrském vzdělávání.* In: Sborník 25. konference VŠTEZ, STU a JČMF, 1998.

[2] Zlatník J.: *Dvoustranné pojetí matematické výchovy inženýrů.* In: Sborník 25. konference VŠTEZ, STU a JČMF, 1998.

[3] Kočandrlová M.: *Jak proti průměrnosti.* In: Sborník 26. konference VŠTEZ, Univerzita Pardubice a JČMF, 2000.

[4] Černý J.: *Strukturované studium a matematika.* In: Sborník 26. konference VŠTEZ, Univerzita Pardubice a JČMF, 2000.

[5] Kočandrlová M.: *Dvoustupňové studium a užitečná matematika.* In: Sborník XIX. vědeckého kolokvia o řízení osvojovacího procesu, VVŠ PV Vyškov, 2001.

[6] Grepl R.: *Vzdělávání na technických univerzitách v Evropě a Boloňská deklarace 1999.* In: Sborník XIX. vědeckého kolokvia o řízení osvojovacího procesu, VVŠ PV Vyškov, 2001.

Úlohy posilující funkční myšlení

Alena Kopáčková

Úvod

Pojem funkce je dnes již tradiční součástí učiva školské matematiky. S definicí funkce se žáci poprvé setkávají zpravidla v deváté třídě základní školy či v kvartě gymnázia, k pojmu se matematika vrací na většině středních škol a i na vysokých školách, na nichž je matematika významnou součástí studia, je funkce znovu definována. Přístup k pojmu funkce není na všech typech škol totožný, na základní škole převažuje u nás v posledních desetiletích klasické pojetí funkce jako *předpisu*, zatímco na vysokých školách převládá množinové pojetí funkce jako *množiny uspořádaných dvojic* či *zobrazení* množiny do číselné množiny[1].

Zajímá nás, jaký vliv má způsob vymezení pojmu funkce na představy, které si žáci o funkci vytvářejí a zda prezentování definice funkce či dokonce její „naučení se“ garantuje u žáků vytváření obecnějších představ o funkci. Jde tedy o to, zda v kognitivním vývoji žáků dochází po „zvládnutí“[2] definice k přechodu od stadia *separovaných modelů* pojmu k *modelu univerzálnímu* a k jeho zařazení do *struktury* poznatků.

Výzkumy pojmotvorných procesů

Náš rozsáhlý výzkum prováděný na různých typech škol v posledních šesti letech ukázal, že představy žáků o funkcích jsou typem předložené definice ovlivňovány velmi málo a že žáci si své představy o funkcích na základě definice nevytvářejí. Toto zjištění se týká v různé míře všech typů škol.[3] Na základě mnoha experimentů jsme zjistili, že představy

[1] Často v hierarchii pojmů *kartézský součin – binární relace – zobrazení – funkce.*

[2] Výraz je v uvozovkách záměrně; chceme zdůraznit jeho relativnost. Byli jsme mnohokrát svědky toho, že žák, ač znal definici téměř doslovně, měl o funkci deformované představy, které s definicí byly v rozporu.

[3] Výzkum nezahrnoval studenty vysoce specializované na matematiku a fyziku, jakými jsou např. posluchači MFF UK (u nich popsané deformace nepředpokládáme), ale uváděná zjištění se týkají i posluchačů technických a ekonomických fakult, ale také fakulty pedagogické TUL připravující budoucí učitele matematiky.

žáků a studentů o funkcích jsou tvořeny více na základě konkrétních příkladů funkcí, s nimiž se žáci ve škole setkali, a že mezi těmito příklady některé dokonce hrají roli tzv. *typických příkladů* či *reprezentantů pojmu*. Tento poznatek není v kognitivní psychologii ničím převratným a je potvrzen mnoha výzkumy ze 70. a 80. let 20. století (Smith, Catlin, Cherniak, Mervis, Rosch – viz [1]). Někteří typičtí reprezentanti pojmu jsou pak povyšováni na tzv. *prototyp* pojmu, jehož vlastnosti, zpravidla nápadné či frekventované, jsou jedincem považovány za *vlastnosti* pro pojem *nutné*. Nemá-li předložený objekt tuto vlastnost, není zatříděn jako příklad pojmu; objekt je zatříděn jako příklad pojmu tehdy, je-li svými vlastnostmi dostatečně podobný s prototypem. Tuto tendenci žáků při kategorizaci pojmů můžeme doložit bohatým empirickým materiálem.

Naše zkoumání[4] poukázala na vlastnosti, které jsou zpravidla považovány za vlastnosti *pro funkci typické* a jejichž absence vede u žáků k odmítnutí předloženého příkladu jako příkladu funkce. Takovými vlastnostmi se ukázaly např. *spojitost*, určitá *pravidelnost* projevující se na grafu symetrií či periodicitou a *existence jediného funkčního předpisu* na definičním oboru funkce.

V jedné z částí výzkumu jsme se zaměřili na to, jak jsou interpretovány některé fenomény spojené s pojmem funkce, jako např. *spojitost*, *monotonie*, *hladkost*, setká-li se s nimi žák v přirozeném reálném kontextu v úlohách, v nichž se může opřít i o svou životní zkušenost. Nelze prohlásit, že by v takových úlohách dříve identifikované překážky pojmotvorného procesu zcela zmizely (obtíže přetrvávaly zejména při konfrontaci *diskrétní* × *spojitý* definiční obor), ale platí, že reálný kontext sám jako překážka nepůsobí a naopak žákům pomáhá se s abstraktními jevy lépe vyrovnat. Dobře to bylo vidět např. u úloh, kde žáci (a dokonce i ti, kteří se s obecnou definicí funkce a s jejími vlastnostmi ve škole ještě nesetkali) popisovali v reálném kontextu termografu graf funkce s nespojitostmi prvního druhu, kde nastává tzv. *skok funkce*.

Funkce s vlastnostmi definovanými po částech

Došli jsme k přesvědčení, že některé překážky pojmotvorného procesu pojmu funkce u žáků mohou být alespoň částečně redukovány, budou-li

[4] K závěrům jsme došli zejména po komparativní analýze žákovských prací i na základě rozhovorů s žáky.

se žákům všech stupňů škol častěji předkládat k řešení rozmanité nestandardní úlohy s reálným a věku žáka odpovídajícím kontextem, v nichž se ony „podezřelé“ a méně typické vlastnosti funkcí vyskytují zcela přirozeně, a sami jsme začali takové úlohy hledat.

Dvě úlohy, které jsme již předložili několika desítkám žáků základních a středních škol[5], zde uvádíme. Data v nich jsou reálná odpovídající situaci roku 2001, při zadání funkcí v úlohách je užito stejných tabulek, jaké jsou k dispozici v pojišťovně a na finančním úřadě.

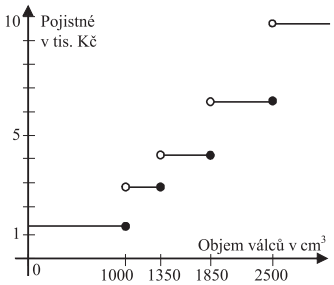
Úlohy mají tři **cíle**: **diagnostický**, **propedeutický** a **reedukační**. Lze pomocí nich jednak zjišťovat vliv reálného kontextu na pochopení a úspěšnost řešení problémů obsahujících fenomény, o nichž bylo prokázáno, že působí jako překážky v pojmotvorném procesu konceptu funkce, ale je možné je využít i k propedeutice těchto fenoménů, příp. k reedukaci zjištěných deformací. Základním fenoménem, který se ve funkcích v obou úlohách vyskytuje, je *fenomén vlastností definovaných po částech*. Při výzkumu vyšlo najevo, že tento jev je žáky často vnímán jako jev s funkcí neslučitelný, a to jak u žáků základní i střední školy. V úloze o povinném ručení se jedná o *funkci po částech konstantní* (obr. 1), kde se kromě výše uvedené vlastnosti vyskytuje i *jev nespojitosti* a *konstantnosti*. V úloze o dani z příjmu jde o spojitou *po částech lineární funkci*, jejímž grafem je lomená čára (obr. 2).[6]

Výsledky výzkumné sondy

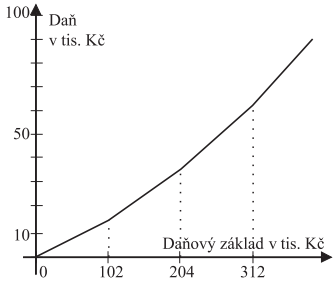
Jen malá část žáků (zejména žáků základní školy a kvart gymnázií) vyřešila všechny zadané úkoly správně. V úloze o povinném ručení zkonstruovalo graf funkce správně 23,7 % žáků a studentů (z toho 13,3 % žáků základní školy a kvart a 30,4 % studentů druhých ročníků čtyřletého gymnázia), v úloze o dani z příjmu byla úspěšnost vyšší; graf mělo správně 43,9 % všech zúčastněných (z toho 30,0 % patnáctiletých žáků a 55,6 % sedmnáctiletých gymnazistů). Při konstrukci grafu se jako obtížné pro mnoho žáků ukázalo již první rozhodnutí, jak umístit souřadni-

[5]Šlo o dvě věkové skupiny žáků: žáky patnáctileté z devátých ročníků základní školy a kvart víceletých gymnázií a žáky zhruba sedmnáctileté z druhých ročníků čtyřletého gymnázia.

[6]Nespojitost a „vlastnosti existující po částech“ byly matematiky v minulosti vnímány zpočátku jako něco patologického a je známo, že oba zmiňované fenomény spolu také těsně souvisely; např. Euler rozuměl funkcí spojitou na intervalu takovou funkci, kterou tam bylo možno popsat jediným vzorcem.



Obr. 1 Povinné ručení



Obr. 2 Daň z příjmu

cový systém na ploše papíru a jaká zvolit měřítka na jednotlivých osách. Žákům příliš nepomohly milimetrový papír ani naše nápověda v bodě 1) obou úloh. Mnozí žáci nerozuměli formulacím v zadání úloh a měli potíže i s běžnými českými slovy, jako jsou *včetně* v úloze o povinném ručení či vazba *„ze základu přesahujícího“* v úloze o dani z příjmu.

Ukázalo se, že žáci inklinují při řešení úloh ke stereotypu a snaží se opírat o známé modely. Projevilo se to např. tak, že i při správně zakreslených bodech $[x, f(x)]$ se žáci snažili těmito body proložit nějakou jim známou křivku, která však dané úloze neodpovídala.

Nejhorší výsledky jsme zaznamenali u úkolu 6) v úloze o dani z příjmu. Správnou formuli pro výši daně se podařilo sestavit jen 13,0 % sedmnáctiletých gymnazistů, ale žádnému žákovi ve věku 15 let (ať už ze základní školy či kvarty gymnázia).

Mnozí žáci, ač měli graf aspoň částečně správně, v úkolech 4) obou úloh uváděli, že se nejedná o graf funkce. Převažující překážkou se žákům jevilo to, že funkce byla definována po částech bez jediného analytického vyjádření platného pro celý definiční obor, což se na grafu projevilo právě onou „slepeností“. Výstižně to uvedli v úloze o dani z příjmu (viz obr. 2) dva studenti druhého ročníku gymnázia: *„Bereme-li graf jako celek, není grafem žádné funkce; rozložíme-li jej však na jednotlivé složky, je grafem spojeným z několika (resp. 4) grafů, které grafy funkce jsou.“*, popř.: *„Ne* (pozn. nejde o graf funkce)*, protože každá část grafu se vypočítává jinak (pomocí jiných čísel).“* Podobný základ mají i následující argumentace kvartánů v úloze o povinném ručení (viz obr. 1): *„Nejde o graf funkce,*

protože graf je nespojitý a závislost pojistného na objemu nelze v tomto případě vyjádřit žádnou funkcí.“ (zde je viditelnou překážkou nespojitost) či : *„Nevím, možná to není funkce, není zde žádná pravidelnost.“* V úloze o povinném ručení se jako významná překážka jevila konstantnost: *„Není funkce, několika hodnotám x přísluší vždy 1 hodnota y.“*, *„Není fce – pro 1 y vychází $n - x$.“* Někteří žáci zde zaměňovali závisle a nezávisle proměnnou a konstantnost funkce (po částech) jim splývala s nejednoznačností závisle proměnné.

Závěr

Experiment ukázal, že žáci obou zkoumaných věkových skupin mají málo zkušeností s řešením nestandardních úloh o funkcích. Kromě překážek, které běžně doprovázejí pojmotvorný proces konceptu funkce a k nimž existují paralely i ve fylogenezi tohoto pojmu, se příčinou neúspěchů jevilo i neporozumění slovnímu zadání, neschopnost rozšifrovat úřední jazyk. Sonda potvrdila, že ve školách všech stupňů by bylo třeba častěji zařazovat slovní úlohy s reálnými a aktuálními daty. Uvedené úlohy mohou sloužit jako propedeutika abstraktních fenoménů konceptu funkce, ale jejich řešení nevyžaduje složitý matematický aparát (stačí znalost lineární a konstantní funkce), a jsou tedy vhodné i pro žáky základní školy. Věříme, že častější zařazování úloh s reálným kontextem by přispělo nejen k většímu pochopení pojmu funkce a fenoménů s ním spojených, ale posílilo by i interdisciplinární vztahy ve výuce a pomohlo by dnešního žáka přesvědčit o smyslu a významu matematiky.

Zadání úloh

I. Úloha o povinném ručení

Roční sazby pojistného v „Povinném ručení“ pro rok 2001 u pojišťovny Kooperativa v tzv. variantě „Eurokonfort“ udává tabulka.

Osobní automobil se zdvihovým objemem válců	Roční výše pojistného
Do 1 000 cm^3 včetně	1 272 Kč
Nad 1 000 cm^3 do 1350 cm^3 včetně	2 880 Kč
Nad 1 350 cm^3 do 1850 cm^3 včetně	4 116 Kč
Nad 1 850 cm^3 do 2500 cm^3 včetně	6 372 Kč
Nad 2 500 cm^3	9 708 Kč

Pozn. Toto pojistné musí platit za každé své vozidlo u některé z pojišťoven každý majitel automobilu.

Tabulku si dobře prohlédněte a pak řešte následující úkoly.

1) *Do pravoúhlého souřadného systému, v němž si* předem *musíte na obou osách zvolit vhodné měřítko (na každé ose jiné), načrtněte graf závislosti výše pojistného na objemu válců automobilu. (Nápověda: Na vodorovné ose vyznačujte objem válců od 0 cm^3 do 2 800 cm^3, na svislé ose si vyznačte výši pojistného od 1 272 Kč do 9 708 Kč.)*
2) Na grafu *vyznačte*
   a) *objem válců automobilu, při němž se zaplatí pojistné ve výši 5 000 Kč,*
   b) *výši pojistného pro objem válců 2 000 cm^3,*
   c) *výši pojistného pro objem válců 500 cm^3.*
3) *Pokuste se graf pojmenovat a stručně charakterizovat podle vašich vlastních kritérií. Při popisu se zaměřte na vlastnosti podle vašeho názoru podstatné.*
4) *Jde o graf funkce? Svou odpověď* zdůvodněte.
5) *Myslíte si, že by graf nějaké jiné závislosti mohl vypadat podobně jako ten váš? Připomíná vám váš graf něco, s čím jste se již setkali? Zkuste nějakou takovou situaci či závislost z jakékoliv oblasti najít a několika slovy ji popsat.*

II. Úloha o dani z příjmu

Pozn. Úkoly 1)–5) byly analogické s úkoly 1)–5) předchozí úlohy. Navíc zde byl zadán úkol 6) *S použitím tabulky sestavte vzorec pro výpočet daně z příjmu, kde proměnnou x je základ daně v pásmu od 102 000 Kč do 204 000 Kč.*

Daňový základ od Kč	do Kč	Daň	ze základu přesahujícího
0	102 000	15 %	
102 000	204 000	15 300 Kč + 20 %	102 000 Kč
204 000	312 000	35 700 Kč + 25 %	204 000 Kč
312 000	a více	62 700 Kč + 32 %	312 000 Kč

Literatura

[1] Smith E. E.: *Concepts and thought.* In: The psychology of human thought. Cambridge University Press, Cambridge 1991.

[2] Kopáčková A.: *Pojetí funkce u českých žáků.* In: Sborník příspěvků ze 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. JČMF, Plzeň 2000, str. 123–129.

[3] Kopáčková A., Vild J.: *Funkce po částech afinní.* In: Sborník příspěvků mezinárodní konference $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Liberec 2001. ISBN 80-7083-580-X, str. 53–60.

[4] Kopáčková A.: *Fylogeneze pojmu funkce.* In: Matematika v proměnách věků II. Dějiny matematiky, sv. 16. Prometheus, Praha 2001. ISBN 80-7196-218-X, str. 46–80.

[5] Kopáčková A.: *Nejen žákovské představy o funkcích.* In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 2002, číslo 2. Prometheus, Praha 2002. CS-ISSN-0032-2423, str. 149–161.

[6] Kopáčková A.: *How not only the Czech students think about functions.* In: Sborník mezinárodního semináře doktorandů didaktiky matematiky. UK Praha, University of Warwick 2003. ISBN 80-7290-142-7, str. 47–52.

[7] Kopáčková A.: *Pojmotvorný proces konceptu funkce.* Disertační práce. UK Praha 2003.

Niektoré modely využitia ClassPadu v vyučovaní stredoškolskej matematiky

Lilla Koreňová

Matematika je taká stará, ako ľudstvo samé, tak ako aj snaha uľahčiť si prácu pri síce známych, ale pracných algoritmoch počítania. Matematika a jej technické pomôcky (Abakus, logaritmické pravítko, kalkulačka, počítač, ...) pôsobili na seba vždy interaktívne. Veda vytvárala teoretické zázemie i potrebu pre výrobu technických pomôcok a opačne, ich používanie ovplyvňovalo a obohacovalo matematickú vedu. Grafické kalkulačky, podobne ako PC a Internet patria do dnešnej doby, sú jednou z nových informačných a komunikačných technológií. Vo vyučovacom procese sa dajú efektívne využiť aj tzv. projekčné grafické kalkulačky, ktoré majú videovýstup (výstup môže trieda sledovať na televíznej obrazovke) alebo aj s LCD výstupom, ktorý sa dá prostredníctvom spätného projektora (meotaru) premietať na plátno, či bielu stenu.

Niekoľko príkladov využitia grafických kalkulačiek a ClassPadu v stredoškolskej matematike

Učivo o funkciách je obsiahlou a dôležitou časťou stredoškolskej matematiky. Žiaci často potrebujú vedieť niektoré vlastnosti danej funkcie, preto sú vypracované rôzne matematické postupy na znázornenie funkcií, hľadanie minima, maxima, definičného oboru a oboru funkčných hodnôt. Ak majú k dispozícii nástroj (matematický softvér alebo grafickú kalkulačku), ktorý vykreslí graf danej funkcie, ľahšie sa podarí určiť hľadané vlastnosti daných funkcií. Ba čo viac, žiak môže experimentovať, hľadať určité závislosti, zákonitosti medzi tvarom predpisu funkcie, jeho koeficientmi a tvarom grafu funkcie. Grafická kalkulačka umožní ľahko pracovať aj s takými funkciami (napríklad zloženými), s ktorými sa doteraz na strednej škole nezaoberalo. Na nasledujúcich niekoľkých príkladoch by som rada ukázala možnosti, aké sa učiteľovi naskytnú pri vyučovaní pomocou grafickej kalkulačky – ClassPadu.

Príklad 1: Pomocou ClassPadu nájdite definičný obor, obor hodnôt funkcie, zistite, či je párna – nepárna.

$$y = \frac{1}{(x^2+1)}$$

Riešenie: Jednoducho vykreslíme graf funkcie. Ak je graf príliš malý, môžeme si ho zväčšiť pomocou funkcie **Zoom**, alebo môžeme priamo nastaviť hranice sústavy súradníc (**Axes**). Už v tomto kroku má študent možnosť sa „pohrať“ s funkciou, pri rôznych funkciách potrebuje vytvoriť určitú stratégiu, kým zobrazí vhodne graf danej funkcie Študent z daného grafu vie odhadnúť, že definičný obor je pravdepodobne množina všetkých reálnych čísel a obor funkčných hodnôt je interval od 0 po maximum funkcie. Aby sme si overili vytvorenú hypotézu, skúsime „chodiť“ po grafe funkcie a sledovať súradnice, čo umožňuje funcia **Trace**. Takto môžeme zistiť pravdepodobnú hodnotu maxima funkcie – je to 1.

Ďalšia hypotéza vznikne, ak si všimneme, že graf funkcie je symetrický podľa y-ovej osi, preto bude funkcia asi párna. Aby sme vytvorené hypotézy aj dokázali, skúsme výpočtom zistiť definičný obor funkcie. Riešime teda $x^2 + 1 = 0$, rovnica nemá riešenie, teda neexistuje také reálne x, pre ktoré by výraz $\frac{1}{x^2+1}$ nemal zmysel, teda definičný obor je množina všetkých reálnych čísel.

ClassPad umožňuje žiakom vizualizáciou funkcie vytvoriť hypotézu a zároveň ju výpočtom overiť.

Ak sa chceme presvedčiť o správnosti našej hypotézy o maxime funkcie, môžeme tak urobiť niekoľkými spôsobmi:

Najjednoduchšie je vypočítať maximum funkcie príkazom **Action – Calculation – fMax**, $\mathrm{fMax}(\frac{1}{x^2+1}, x, -1\,000\,000, 1\,000\,000)$, tu ale ešte nemáme dôkaz, lebo ClassPadu musíme zadať konkrétne hodnoty, konkrétny interval, v ktorom počíta maximum.

Môžeme maximum hľadať aj pomocou tabuľky, kde budeme sledovať funkčné hodnoty, pritom s nastavením tabuľky sa môžeme „pohrať“, **Table**.

Aby sme mali naozajstný dôkaz, že funkcia nenadobúda funkčnú hodnotu väčšiu ako 1, riešime nerovnicu: **Equation/Inequality – solve**

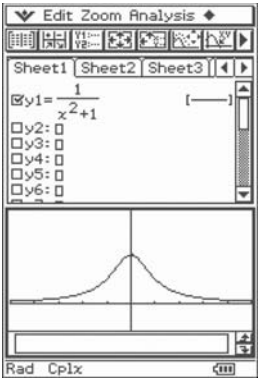
Teraz už máme dôkaz, že maximum funkcie je v bode 1.

Či je funkcia párna alebo nepárna vidíme z grafu, naša hypotéza je: je párna lebo graf je symetrický podľa y-ovej osi. Dôkaz však máme len

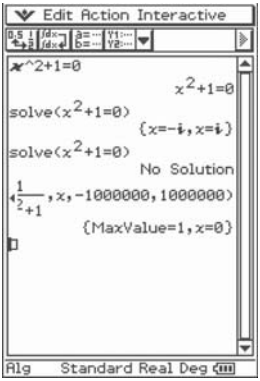
vtedy, ak platí, že pre všetky reálne x platí $f(-x) = f(x)$. Riešime teda

$$\frac{1}{(-x)^2+1} =$$

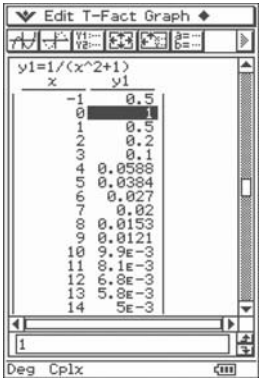
Teraz už je naša hypotéza o párnosti funkcie dokázaná!



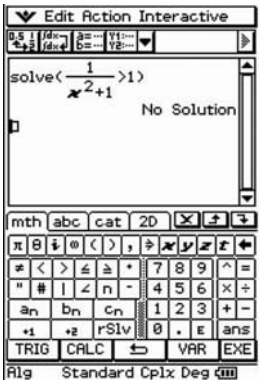
Obr. 1



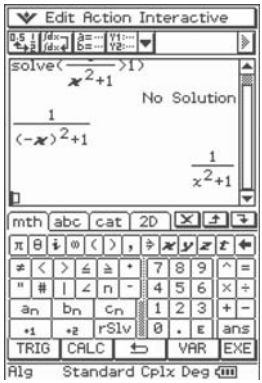
Obr. 2



Obr. 3



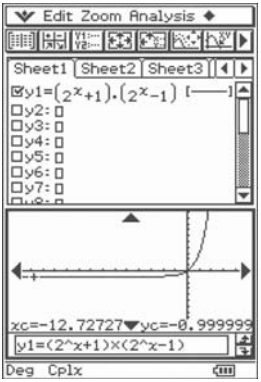
Obr. 4



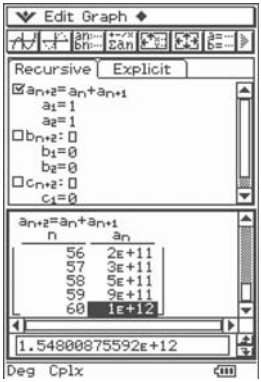
Obr. 5

Príklad 2: Nakreslite graf funkcie $y = (2^x + 1)(2^x - 1)$ a odhadnite (vytvorte hypotézu) k akej hodnote sa blíži y ak sa x blíži k $-\infty$.

Riešenie: Pomocou „trasovania“ si môžu žiaci vytvoriť hypotézu a výpočtom aj overiť.



Obr. 6



Obr. 7

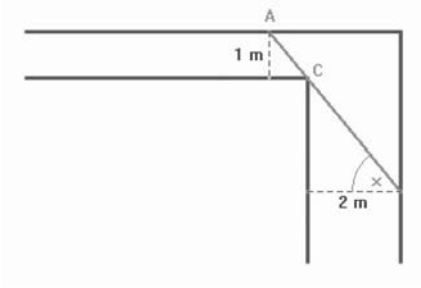
Príklad 3: Predpokladajme, že páru dospelých králikov sa každý mesiac narodí jeden ďalší pár králikov. Novonarodeným králikom trvá mesiac, kým dospejú. V uzavretom priestore umiestnime na začiatku roka jeden pár novonarodených králikov a ponecháme ich voľne bez toho, že by sme z priestoru králiky odoberali, alebo do neho králiky pridávali. Koľko párov králikov budeme mať na konci roka (na konci 2, 3, 4, 5 rokov), ak žiadny králik neuhynul? (Iste ste spoznali známu Fibonacciho postupnosť.)

Riešenie: Vieme si jednoducho odvodiť, že $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, kde symbol a_n označuje počet párov králikov po n mesiacoch, v ClassPade sa dá ľahko zostaviť tabuľka hodnôt pre túto postupnosť, kde sa dá vyčítať hodnota na konci prvého roka.

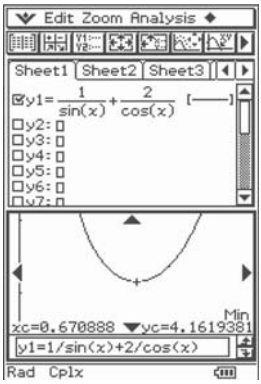
Príklad 4: Prejde 4 m dlhý rebrík lomenou chodbou znázornenou na obr. 8 (predpokladáme, že ho nesieme vodorovne)?

Riešenie: Maximálna dĺžka brvna, ktoré „vojde“ do lomenej chodby pri danom pootočení brvna (toto pootočenie možno vyjadriť uhlom x) je

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



Obr. 8



Obr. 9

Funkcia je zrejme na celom intervale kladná a na jeho koncoch neobmedzene rastie. Dá sa preto očakávať, že niekde vo vnútri intervalu bude mať minimum. Nakreslíme jej graf, nastavíme vhodne súradnicové osi a vyčítame minimum funkcie:

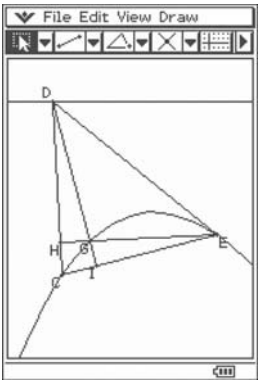
Vidíme, že pri ľubovolnom pootočení je maximálna dĺžka brvna ($y = 4{,}16$ m), ktorá ešte prejde lomenou chodbou väčšia ako 4 metre.

Príklad 5: Nájdite množinu všetkých ortocentier trojuholníka, ak jeden jej vrchol sa „pohybuje“ po priamke.

Riešenie: Pomocou dynamickej geometrie ClassPadu nakreslíme priamku, trojuholník, ktorého jeden vrchol sa môže pohybovať po danej priamke, potom zostrojíme priesečník výšok. Pomocou animácie trasovania ortocentra dostávame krivku – množinu všetkých ortocentier trojuholníka.

Záver

Uvedené príklady chceli len ilustrovať možnosti využitia IKT, konkrétne grafických kalkulačiek vo vyučovaní stredoškolskej matematiky. Žiaci takouto formou výučby majú možnosť viac experimentovať, vytvárať a overovať hypotézy, matematika sa pre nich stáva viac názornejšia a zaujímavejšia. Navyše žiaci aj v nižších ročníkoch dokážu riešiť aj také úlohy,



Obr. 10

ktoré sa bez týchto pomôcok nedali riešiť (alebo len v maturitnom ročníku). Verím, že pri inovácii cieľov a obsahu vyučovania stredoškolskej matematiky sa bude brať zreteľ aj na existenciu týchto nových IKT (PC, didaktického softvéru, grafických kalkulačiek).

Literatúra

[1] Černochová M., Komrska T., Novák J.: *Využití počítače při vyučování.* Portál, Praha 1998.

[2] Koreňová L.: *IKT vo vyučovaní matematiky.* MCMB Exnárova, Bratislava 1999.

[3] Koreňová L.: *Niektoré možnosti využitia internetu a didaktického softvéru vo vyučovaní matematiky ZŠ a SŠ.* Rigorózna práca, KZDM MFF UK, Bratislava 1999.

[4] Odvárko O. a kol.: *Funkce a rovnice s kalkulačkou CASIO.* Prometheus, Praha 2000.

[5] multimediálne CD: Koreňová L., Hrdinová D.: *Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky ZŠ a SŠ.* MCMB Exnárova, Bratislava 2000.

Programový systém MATHEMATICA® vo výuke matematiky, alebo niekoľko pohľadov na konkrétne aplikácie

Monika Kováčová

Abstrakt

V príspevku popíšeme niektoré možnosti využitia programového systému MATHEMATICA® pri výučbe na stredných školách na konkrétnych príkladoch učiva 1. ročníka SŠ a gymnázií. Upozorníme aj na niektoré klady a zápory takéhoto spôsobu výučby a navrhneme model, ako je možné výučbu realizovať aj napriek tomu, že nie je zaradená do osnov predmetu.

1 Úvod

Schopnosť tvorivo myslieť môžeme právom považovať za determinujúci faktor úspešnosti človeka v každej oblasti života. Bohužiaľ v poslednej dobe sa zdá, že táto schopnosť je u žiakov stredných škôl, ale aj u študentov, ktorí prichádzajú na vysoké školy, značne nízka. Príčiny tohoto stavu sú rôzne a určite nemožno nájsť „jedného konkrétneho vinníka“ tejto situácie. V tomto príspevku sa preto pokúsime skôr zamerať na otázku, ako túto schopnosť rozvíjať pri výučbe matematiky už na stredných školách. Je nesporné, že táto schopnosť je práve v matematike veľmi dôležitá, pretože umožňuje nájsť niekoľko rôznych prístupov na riešenie predloženého problému.

Myslíme si, že rozvoj tvorivého myslenia vo veľkej miere podporuje aj používanie počítačov vo výučbe. Táto formulácia je však veľmi všeobecná a nepresná vo svojom vyjadrení. V tomto príspevku sa nebudeme zaoberať geometriou a odvodenými disciplínami, pretože techniky používané

Táto práca vznikla s podporou grantovej agentúry KEGA v rámci riešenia projektu KEGA 3/100603.

na rozvoj tvorivého myslenia u študentov v tejto oblasti matematiky sú výrazne odlišné, od techník, ktoré je vhodné používať pre rozvoj tvorivého myslenia v oblastiach voľne označených ako „algebra a príbuzné disciplíny“ – teda v oblastiach, kde sú študenti stredných škôl nútení realizovať pomerne jednotvárne technické výpočty. Pod slovným spojením „použitie počítačov vo výučbe“ chápeme používanie programových systémov, označovaných aj ako PAS (systémy počítačovej algebry). Myslíme si totiž, že pri dnešnom stave a úrovni softwarových produktov je to jediná softwarová trieda, ktorá dokáže efektívne rozvíjať tvorivé myslenie študentov. Systémy PAS majú jednu spoločnú vlastnosť – vďaka schopnosti symbolicky realizovať výpočty umožňujú každú úlohu riešiť niekoľkými spôsobmi, od najjednoduchších – tzv. jednoriadkového programovania, po možnosť vytvorenia globálneho balíka, ktorý môže pripomínať samostatne existujúcu programovú entitu.

2 MATHEMATICA® a základy algebraických výpočtov

V tomto príspevku sa budeme podrobnejšie venovať niekoľkým ukážkam základného učiva a možnostiam, ako použiť pri výučbe týchto kapitol programový systém MATHEMATICA®. Uvedieme konkrétne príklady z algebry (1. ročník gymnázia). Ukážky prezentované v tomto príspevku sa môžu zdať na prvý pohľad triviálne, pre študentov sú však pútavé, najmä pre možnosť testovať schopnosti vlastné, ale aj schopnosti PAS systémov. Zároveň by sme ale radi upozornili čitateľa, že závery uvedené v tejto, aj v nasledujúcich častiach článku vychádzajú zo skúseností s použitím systému MATHEMATICA®. Podobné skúsenosti by sme mali aj pri použití systému MAPLE. Iné systémy PAS, predovšetkým DERIVE, nemajú symbolické možnosti tak bohaté a viaceré úlohy v tomto článku nie je možné pomocou nich realizovať.

3 Riešenie rovníc a nerovníc

Základný príkaz na riešenie rovníc s jednou neznámou v tvare `LS==PS`, ktorý systém MATHEMATICA® používa je príkaz `Solve`. Jeho štruktúra je nasledovná:

```
Solve[ LS==PS, neznama]
```

Množina, v ktorej program rovnice rieši, je množina komplexných čísel.

Tento príkaz vyrieši rovnicu, ak je možné počítať hodnoty koreňov pomocou vzorcov, t.j. výhodné je ho použiť na riešenie algebraických rovníc resp. rovníc, ktoré sa dajú upraviť na algebraické rovnice. Výsledky sú vyjadrené v tvare presných čísel; ak však niektoré číslo v rovnici je v tvare desatinného čísla, aj príkaz **Solve** dá numerické riešenie.

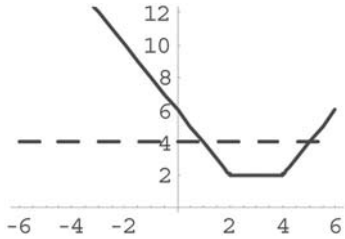
Táto informácia by sama o sebe nebola zaujímavá, nájdeme ju aj Helpe systému. Zaujímavejšie je pozrieť sa na konkrétne príklady rovníc preberaných v 1. ročníku. Na každú rovnicu sa môžeme pozrieť z niekoľkých pohľadov – grafického aj výpočtového.

Úloha: Riešte rovnicu obsahujúcu absolútnu hodnotu $|x-2|+|x-4| = 4$.

Prvý najjednoduchší spôsob, pomocou príkazu `Solve` neumožňuje výraznejšie uplatniť tvorivé myslenie. Pretože väčšinu preberaných rovníc dokáže MATHEMATICA® priamo riešiť, je tento spôsob skôr vhodný pre učiteľa, ktorý potrebuje v krátkom čase zostaviť väčšie množstvo príkladov a ich riešení napr. pre písomku.

In[1]:=
```
Solve[Abs[x-2]+Abs[x-4] ==4,x]
```
Out[1]=
```
{{x->1},{x->5}}
```
Oveľa zaujímavejší je grafický pohľad na riešenú rovnicu. Nakreslíme obe strany rovnice a spoločný prienik ich grafov je riešením rovnice.

In[2]:=
```
Plot[{Abs[x-2]+Abs[x-4],4},{x,-6,6}]
```
Out[2]=



–Graphics–

Na obrázku už študent priamo vidí, že rovnica má dva korene. Pre našich študentov bolo v takýchto prípadoch dôležité aj experimentálne zistiť, čo sa bude diať, keď budem zväčšovať interval, na ktorom grafy

funkcií kreslím, t.j. či náhodou nejaký koreň rovnice nestratím, ak zvolím príliš malý interval.

Podobné experimenty je možné uskutočňovať aj pre rovnice s neznámou v menovateli, alebo pod odmocninou. Pre študentov má význam aj urýchlenie kontroly správnosti výpočtu. Ak celú rovnicu vypočíta ručne, veľmi rád využije počítač, aby čo najrýchlejšie zistil, či je jeho vypočítaný výsledok správny. Použijeme dosadzovací operátor /. , Pred operátor umiestnime skúmaný výraz, za operátor hodnotu, ktorú chceme dosadiť. Vidíme to aj na nasledujúcom príklade. Odpoveď je veľmi ľahko čitateľná.

In[3]:=
```
Abs[x-2]+Abs[x-4] ==4 /. x->1
```
Out[3]=
```
True
```

Ďalší možný prístup ku tomuto typu rovníc je snaha upraviť výraz na ľavej strane. Význačné nulové body sú $x = 2$ a $x = 4$. Pozrime sa, ako MATHEMATICA® dokáže zjednodušiť výrazy za doplňujúcich podmienok. Zároveň upozorňujeme čitateľa, že iný PAS ekvivalent takejto možnosti neponúka.

In[4]:=
```
Simplify[Abs[x-2]+Abs[x-4],x <= 4]
```
Out[4]=
```
2 (-3+x)
```
In[5]:=
```
Simplify[Abs[x-2]+Abs[x-4], 2 <= x <= 4]
```
Out[5]=
```
-2
```

Zaujímavejšia je situácia, ak povolíme študentom experimentovať s riešením nerovníc

In[6]:=
```
<<Algebra`InequalitySolve`
```
In[7]:=
```
InequalitySolve[Abs[x-2]+Abs[x-4] >= 4,x]
```
Out[7]=

$x <= -1 || x >= 7$

Aj nerovnice môžeme riešiť graficky, pomocou príkazu `FilledPlot`. Pre nedostatok miesta však konkrétny príklad neuvedieme. Radi by sme

upozornili na niektoré iné „dobré“ vlastnosti systému MATHEMATICA®. Ak pri rovnici používame neekvivalentné úpravy, napríklad umocňovanie, alebo delenie výrazom obsahujúcim neznámu, systém MATHEMATICA® automaticky robí sám aj skúšku správnosti (ako jediný PAS) a vráti len skutočné riešenie rovnice. V nasledujúcom príklade výpočtom zistíme, že riešením rovnice by malo byť číslo $x = 4$, toto číslo však nepatrí do definičného oboru, MATHEMATICA® vráti ako výsledok prázdnu množinu.

In[8]:=

```
Solve[5+3/(3x-12)==(5-x)/(x-4),x]
```

Out[8]=

$\{\}$

Veľmi užitočná dokáže byť MATHEMATICA® aj pri riešení rovníc s parametrami. Dokáže poskytnúť (opäť ako jediná) kompletný rozbor riešeného príkladu. Pozrime sa na nasledujúci príklad.

In[8]:=

```
InequalitySolve[{(m-1)^2-(m-2)x+2m-1==0,0≤m≤ 8/7},{m,x}]
```

Out[8]=

$$m == 0 \&\& x == 1 \,||$$

$$0 < m < 1 \&\& \left(x == \frac{-2+m}{2(-1+m)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(-1+m)^2}} \,|| \right.$$

$$\left. x == \frac{-2+m}{2(-1+m)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(-1+m)^2}} \right) \,||\, m == 1 \&\& x == -1 \,||$$

$$1 < m < \frac{8}{7} \&\& \left(x == \frac{-2+m}{2(-1+m)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(-1+m)^2}} \,|| \right.$$

$$\left. x == \frac{-2+m}{2(-1+m)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m-7m^2}{(-1+m)^2}} \right) \,||\, m == \frac{8}{7} \&\& x == -3$$

4 Záver

Pre nedostatok miesta nie je možné uviesť viaceré príklady a ukážky, ako je možné rozvíjať tvorivé myslenie s podporou výučby pomocou počítačov. Viac inšpirácie môže čitateľ nájsť v prácach [1, 2, 3], aj keď ide väčšinou o časti vysokoškolského učiva. Kompletné výukové materiály sú dostupné na stránkach [4, 5, 6].

Záverom môžeme skonštatovať, že študenti, ktorí absolvovali nepovinné hodiny matematiky, v rámci ktorých sa zoznámili s programovým systémom MATHEMATICA®, tento spôsob výučby prijali veľmi kladne. Podľa našich skúseností je postačujúce zaradiť do osnov 5–6 hodín (týždeň) v prvom ročníku, ktoré by slúžili na zoznámenie sa s programovým systémom a objektovým programovacím jazykom, ktorý používa pre komunikáciu s užívateľom. Po absolvovaní takéhoto úvodu je postačujúce vždy na záver preberanej kapitoly zaradiť jednu – dve hodiny pri počítačoch, kde sa študenti zoznámia s ukážkami riešenia konkrétnych príkladov pomocou programových systémov.

Literatúra

[1] Kolesárová A., Kováčová M., Záhonová V.: *Matematika II, Návody na cvičenia s programovým systémom MATHEMATICA®*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2002.

[2] Kolesárová A., Kováčová M., Záhonová V.: *Matematika I, Návody na cvičenia s programovým systémom MATHEMATICA®*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2003.

[3] Omachelová M.: *Skúsenosti s výučbou v základnom kurze matematiky s podporou programového systému MATHEMATICA®*. In: Moderní metody v matematickém inzenýrstí, Ostrava 2001, str. 178–182.

[4] Web stránka katedry matematiky Strojníckej fakulty STU, v časti pedagogická činnosť http://www.km.sjf.stuba.sk/indexs.html

[5] Web stránka projektu MATEMATIKA – ON LINE: http://www.mathematica.sk

[6] Web stránka distribútora softwaru MATHEMATICA pre SR a ČR f. Elkan, s. r. o. http://www.mathematica.cz

Modelování řezů geometrických těles v programu DesignCAD Pro 2000

Jan Krtička

S neustále se zlepšujícím počítačovým vybavením škol a velice slušnou počítačovou gramotností současných středoškolských studentů získává na důležitosti využití vhodných programů pro výuku vybraných partií matematiky, zejména pak geometrie. Následující příspěvek je věnován nástinu možností, které poskytuje program *DesignCAD Pro 2000* při výuce stereometrie, zejména pak konstrukce řezů. Program samotný je určen zejména pro trojrozměrnou vizualizaci nejrůznějších prostorových objektů a jeho volba pro přiblížení konstrukce řezů základních, ale i složitějších těles, je velmi vhodná.

Po instalaci a spuštění programu se na obrazovce objeví základní stránka. Největší prostor je z důvodů názornosti logicky věnován axonometrickému pohledu, který tradičně doplňují tři kolmé průměty – půdorys, nárys a bokorys. První činností, které je vhodné věnovat nějaký čas, je vytvoření modelu zvoleného tělesa. Nabídka je poměrně bohatá. K dispozici jsou všechna základní tělesa (kvádr, jehlan, hranol, válec, kužel, koule), máme však možnost pracovat i s objekty složitějšími (komolá tělesa, polokoule, anuloid, dutý válec). Při tvorbě modelu tělesa pracujeme podle následujícího postupu. Z nabídky *Solids* v hlavním menu vybereme požadované těleso (například kvádr). Zadáním požadovaných parametrů pak vytvoříme konkrétní obraz. U již zmiňovaného kvádru určíme jeho rozměry definováním tělesové úhlopříčky. Umístíme pomocí myši kurzor postupně do míst, kde mají ležet protilehlé vrcholy tělesa a kliknutím potvrdíme zvolenou pozici. Nějaký čas zřejmě zabere zvyknutí si na způsob pohybu v prostoru: zatímco samotné myši využíváme k pohybům v rámci svislé roviny, pohyb dopředu a dozadu je umožněn pouze použitím kombinací kláves Ctrl+Home, resp. Ctrl+End, což zejména na začátku působí poněkud neohrabaně.

Poté, co sestrojíme zvolené těleso, je možné věnovat chvilku času prozkoumání různých pohledů na něj. Změna je umožněna pomocí tlačítka

Set View umístěného na horní pracovní liště. S využitím této funkce je potom možné s tělesem otáčet a prohlížet si ho tak z nejrůznějších stran a úhlů, což slouží zejména k vylepšení celkového prostorového vnímání dané situace. Dalším vhodným doplňkem umocňujícím představu trojrozměrnosti, je využití různých způsobů vlastního zobrazení tělesa. K dispozici jsou tři základní možnosti: všechny hrany tělesa jsou zobrazené plnou čarou (mohli bychom říci, že jde o jakýsi „drátěný“ průhledný model), zobrazeny jsou pouze viditelné hrany, viditelné stěny jsou vyplněny texturou. Tento poslední způsob asi nejlépe vystihuje zobrazované těleso, neboť uživatel získává velmi příjemný dojem „plastičnosti“. Mezi zmíněnými třemi způsoby zobrazení je možné podle libosti přepínat pomocí tlačítek v pracovní liště, samozřejmostí je použití libovolných barev čar i textur.

Přistupme nyní ke konstrukci samotného řezu. Nejprve si výše popsaným postupem opatříme model požadovaného tělesa. Z metodických důvodů je vhodné začínat krychlí, popřípadě kvádrem, protože toto těleso studenti velmi dobře znají z předchozích hodin stereometrie a získaný výsledek je tedy do značné míry známý a předvídatelný. Samotné určení roviny řezu se provádí výběrem položky *Slice* z nabídky *Solids* v hlavním menu. Rovinu určíme pomocí volby tří nekolineárních bodů, kterými má procházet. Body je přirozeně možné umísťovat v prostoru libovolně, nejsme žádným způsobem omezeni (například na hrany tělesa). Po umístění všech tří bodů do požadované polohy a stisknutí klávesy Enter dojde k sestrojení řezu a odstranění jedné části seříznutého tělesa. Zobrazena zůstává ta část tělesa, která leží ve stejném poloprostoru jako kurzor. V případě, že body určující rovinu řezu chceme umístit přímo na hrany tělesa, nabízí program velmi příjemné funkce *Gravity* a *Snap Line*, jejichž použitím není po stisknutí tlačítka myši volena aktuální poloha kurzoru, nýbrž nejbližší vrchol tělesa, resp. nejbližší bod na hraně tělesa. Tlačítka těchto funkcí jsou umístěna na levé liště a je nutné stisknout je před umístěním každého bodu znovu. Po sestrojení vlastního řezu můžeme opět využít různé možnosti zobrazení tělesa a libovolný pohled na seříznutou část.

Poté, co si dostatečně vyhrajeme s konstrukcí řezů kvádrů, je vhodné přejít k jiným typům těles. Dalšími v řadě jsou nejrůznější pravidelné hranoly (poznamenejme ještě, že model hranolu získáme tak, že z nabídky těles vybereme válec a zadáme požadovaný počet vrcholů podstavy, například 6). Na tomto typu těles je možné velmi dobře ilustrovat

ve stereometrii často používanou větu o řezech ve dvou navzájem rovnoběžných stěnách. Samostatnou kapitolou jsou potom řezy jehlanů, na nichž je možné velmi dobře ilustrovat, že řezy v „protějších“ stěnách nejsou rovnoběžné přímky, což je velmi častá chyba při manuální konstrukci řezu jehlanu.

Možnosti programu *DesignCAD* v oblasti rovinných řezů těles však tím zdaleka nejsou vyčerpány. Pokud studenty přestane bavit „řezat“ tělesa hranatá, mají možnost pustit se do experimentování s nejrůznějšími tělesy oblými, ať už zvolí pro začátek válec, kužel nebo třeba kouli, či později některé složitější těleso, například anuloid. Konstrukce vlastních řezů je u všech těles shodná, u složitějších z nich tedy můžeme velmi rychle a pohodlně dosáhnout poměrně zajímavých výsledků.

Samotné použití programu *DesignCAD* nebo některého jiného prostředku pro počítačové řešení stereometrických úloh nemůže dle mého názoru v žádném případě zcela nahradit „tradiční“ formu výuky. Jako mnohem efektivnější a asi i šťastnější vidím kombinaci klasického postupného výkladu jednotlivých partií stereometrie a ručního konstruování pravítkem a kružítkem s vhodně zařazenou ukázkou možností řešení obdobných úloh pomocí počítače.

Další možné (a velmi široké) využití zde zmiňovaného programu se nabízí v předmětu deskriptivní geometrie. Zde se mi v dnešní době zdá zařazení počítačového řešení některých úloh naprosto nezbytné a mělo by být nedílnou součástí učebního plánu.

Poznamenejme ještě na závěr, že samotný *DesignCAD Pro 2000* je (bohužel) programem komerčním a v případě zájmu o jeho používání je tedy nezbytné zakoupit licenci.

Užití výpočetní techniky v hodinách matematiky na gymnáziu

Josef Kubeš

Slovo počítač je velmi podobné slovu počítat, a tím se dostáváme již k matematice, tedy k předmětu, ve kterém se hodně počítá. Jak s tím vším souvisí počítač? Toto zařízení umožňuje provádět řadu operací za nás daleko přesněji a rychleji. V řadě oborů a lidských činností se počítač používá zcela běžně a nedokázali bychom si bez něj představit žádný projekční atelier, bankovní přepážku či kancelář. Otázkou zůstává, kde by se měl člověk naučit užívat ve své práci výpočetní techniku. Zcela logicky nás napadne odpovědět, že ve škole. Nyní se právě dostáváme k paradoxu. Ve škole je většinou výpočetní technika zastaralá (vzhledem k šestileté obnovovací periodě se není čemu divit) a hlavně je využívána ve výuce předmětu informatika. V ostatních předmětech se zařazuje velmi zřídka. Představuji si, že výpočetní technika bude součástí vyučovacích hodin. Bude-li učitel potřebovat demonstrovat jev, měl by mít možnost si vybrat příslušný program, encyklopedii či simulaci vedle klasických pomůcek. Podobně je žádoucí, aby výpočetní technika sloužila v hodinách pro skupinovou a frontální práci žáků. Bohužel často zůstává právě při představě. Programové vybavení je již dnes na dostatečné úrovni a jeho zvládnutí nedělá studentům vůbec žádné problémy. V dalším ukáži příklad řešený užitím programu DERIVE v hodině matematiky.

Příklad: Jsou dány body $A[2,-1,0]$, $B[-1,2,-3]$, $C[-2,-3,1]$. Určete obecnou rovnici roviny ABC.
$A := [2,-1,0]$, $B := [-1,2,-3]$, $C := [-2,-3,1]$

a) Užijeme vektorový součin vektorů AB a BC
CROSS$(B-A, C-A)$

$$[-3,15,18]$$

$$-x+5\cdot y+6\cdot z+d=0$$

$$-2+5\cdot(-1)+6\cdot 0+d=0$$

$$d-7=0$$

$$-x+5\cdot y+6\cdot z+7=0$$

Ukázka vychází přímo z výpočtu, který se běžně používá v hodinách matematiky. Student musí znát postup. Ulehčení nastává v numerickém počítání, tedy je odstraněna možná chyba při výpočtu vektorového součinu (příkaz CROSS).

b) Užujeme determinant

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} x & y & yz & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3\cdot(5\cdot y+6\cdot z+7)-3\cdot x$$
$$-3\cdot x+15\cdot y+18\cdot z+21$$

$$\frac{-3\cdot x+15\cdot y+18\cdot z+21}{3}$$

$$-x+5\cdot y+6\cdot z+7$$

$$-x+5\cdot y+6\cdot z+7=0$$

$$x-5\cdot y-6\cdot z-7=0$$

Velmi jednoduše se k rovnici roviny dostaneme použitím determinantu. Tento postup je vhodný spíše na seminář, ale ukazuje, jak za pomoci programu odstraníme namáhavý výpočet.

c) Dosadíme do obecné rovnice roviny

$x+e\cdot y+f\cdot z+g=0$
$2+e\cdot(-1)+f\cdot 0+g=0$
$-1+e\cdot 2+f\cdot(-3)+g=0$
$-2+e\cdot(-3)+f\cdot 1+g=0$

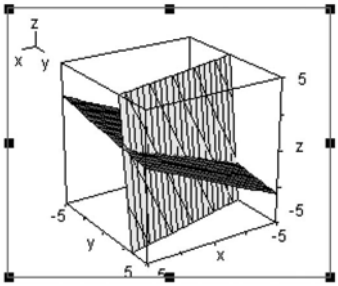
$$\mathrm{SOLVE}([2+e\cdot(-1)+f\cdot 0+g=0,-1+e\cdot 2+f\cdot(-3)+g=0,$$
$$-2+e\cdot(-3)+f\cdot 1+g=0],[e,f,g])$$
$$[e=-5\wedge f=-6\wedge g=-7]$$

$x-5\cdot y-6\cdot z-7=0$

Jedná se o velmi zajímavé řešení, které v plném rozsahu využije předností programu Derive. Opět podstata řešení zůstává na studentovi, program odstraní pouze numerické počítání.

Příklad Jsou dány roviny $2x-8y-z+12=0$ a $3x-y-7z-1=$ $=0$. Rozhodněte o vzájemné poloze, určete průsečnici, určete vzájemnou polohu průsečnice a roviny ABC.

$2\cdot x-8\cdot y-z+12=0$
$3\cdot -y-7\cdot z-1=0$



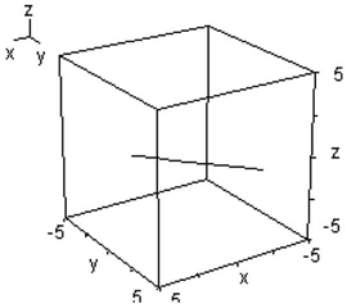
Pro rozhodování o vzájemné poloze rovin máme jasná pravidla a student přímo z normálových vektorů polohu určí. Velmi těžce se mu však povede udělat si představu o poloze rovin v soustavě souřadné. Pomocí programu si roviny namodelujeme a můžeme měnit také úhel pohledu.

V dalším pokračování řešení úlohy je předvedeno nalezení průsečnice a její zobrazení v soustavě souřadnic.

$$\text{SOLVE}([3\cdot 3x - y - 7\cdot z - 1 = 0, 2\cdot x - 8\cdot y - z + 12 = 0], [x, y])$$

$$\left[x = \frac{5\cdot(11\cdot z + 4)}{22} \wedge y = \frac{11\cdot z + 38}{22}\right]$$

$$\left[\frac{5\cdot(11\cdot z + 4)}{22}, \frac{11\cdot z + 38}{22}, z\right]$$



Vzájemnou polohu roviny ABC a nalezené průsečnice již určíme velmi snadno. Výsledek si zobrazíme graficky.

$$x - 5\cdot y - 6\cdot z - 7 = 0$$

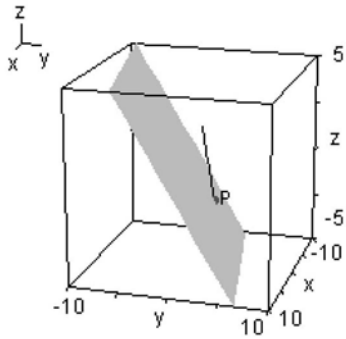
$$\frac{5\cdot(11\cdot z + 4)}{22} - 5\cdot\frac{11\cdot z + 38}{22} - 6\cdot z - 7 = 0$$

$$-6\cdot z - \frac{162}{11} = 0$$

$$\text{SOLVE}\left(-6\cdot z - \frac{162}{11} = 0, z\right)$$

$$\boxed{z = -\frac{27}{11}}$$

$$\left[-\frac{115}{22}, \frac{1}{2}, -\frac{27}{11}\right]$$



Z řešení příkladu je vidět, že citovaný program může pomoci odstranit numerické výpočty. Program neodstraní způsob řešení. Žák i učitel má k dispozici mocný nástroj, ale musí rozumět úloze a znát postup řešení.

Program používám běžně ve cvičení z matematiky a studenti mohou použít při řešení úloh tužku a papír, kalkulačku nebo počítač. Při řešení vynikne podstata úlohy, nezabředává se do oprav chyb při řešení rovnic a jejich soustav. Při nedostatku hodin matematiky, kterým trpíme všichni, mi právě zařazení počítače umožňuje více se soustředit na problematiku, kterou právě probírám, a např. v tématu analytická geometrie mohu vypočtené útvary spolu se zadáním vykreslit a tím dát rovnicím útvarů obsah.

V této souvislosti bych poukázal na odvážnější myšlenku, o které přemýšlím delší dobu. V hodinách matematiky se spíše snažíme se žáky zvládnout postupy při úpravách algebraických či goniometrických výrazů, řešení rovnic všech možných typů, které už žák často později neuvidí a nebude potřebovat. Většinu takových příkladů dnes výpočetní technika zvládne. Co však nezvládne, je zpracovat reálný problém, který vede např. k soustavě rovnic. Na takové úlohy se často ani nedostane. Do této oblasti bychom měli víc soustředit svoji pozornost a učit žáky spíše myslet při výběrů nástrojů, které budeme potřebovat, a ne vykládat postupy bez reálného odrazu.

Jak připravit učitele matematiky na změny v jeho edukačním stylu

Marie Kubínová

Jednou z nejsložitějších změn, které ještě očekávají naši školu, je *změna role* učitele ve vyučování, což mimo jiné předpokládá i změny edukačního stylu učitele. Po mnoha snahách o reformu naší školy přetrvává v každodenní školní praxi model vyučování založený na dominantní a explicitně vyjádřené pozici učitele, což umožňuje, jak jsme již uvedli dříve (např. [7]), i nadále:

- *fixaci* univerzálního schématu celého vyučovacího procesu a neměnné struktury jednotlivých vyučovacích hodin založenou na frontálních metodách práce,
- *eliminaci* aktivizujících metod výuky z důvodu jejich velké časové náročnosti a neefektivnosti ve vyučování[1].

Pro naši současnou školu je charakteristická dominance poznatkové složky kurikula a absence složek zaměřených na rozvoj průřezových kompetencí a na rozvoj sociálních a komunikativních kompetencí. Mají-li se uskutečnit plánované změny v pojetí vyučování na druhém stupni základního vzdělávání, znamená to podle návrhu MŠMT[2] především důsledný posun od *předávání „hotových“ poznatků* (systémů, přehledů a hodnot) ke *způsobům jejich hledání a nalézání*, posun od převažující *dominantní* role učitele jako zprostředkovatele učiva k využití *přirozené aktivity* žáků daného věku a jejich mimoškolních zájmů a znalostí *k vypracovávání vlastních rozsáhlejších projektů a prací na základě vyhledávání a třídění informací*, což v konečném důsledku opět předpokládá změny v edukačním stylu mnoha učitelů, učitele matematiky nevyjímaje.

[1] Vyučování matematice bývá v těchto souvislostech zmiňováno velice často, protože podle mnohých učitelů systém matematiky jako vědy přímo vyzývá k tomu, aby byl předáván v hotové struktuře a ne aby byli žáci ve vyučování zdržováni a zatěžováni slepými uličkami, o nichž se již dopředu ví, že nikam nevedou.

[2] Návrh Národního programu rozvoje vzdělávání v České republice, (2000, s. 34).

V praxi je dosud nedostatečně reflektována a anticipována měnící se profese učitele, jeho nové role a měnící se podmínky jeho pracovního výkonu. Mají-li fakulty připravující učitele kompetentně plnit svou základní funkci – *připravovat pro školní praxi kvalitní učitele* – musí se otázkami změn učitelské profese zabývat komplexně a systematicky. Prakticky realizovat tezi, že *podoba učitelské profese nemůže být dána jednou provždy, ale vyvíjí se*, přičemž určující roli nemá mít pouhé administrativní reagování na objevující se problémy.

Po roce 1989 se naskytla příležitost hledat různé přístupy ke vzdělávání učitelů a koncipovat různé systémy jejich pregraduální přípravy, kterými by se jednotlivé fakulty profilovaly. Této možnosti využila i Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. K nejvýraznějším změnám v tomto směru patřilo zařazení *specificky pojaté pedagogicko-psychologické praxe – klinického semestru* a zpracování učebního plánu formou modulů.

Přes všechny dobře míněné záměry změnit projekt přípravy budoucích učitelů zůstává jedním ze základních rysů celého učebního plánu *roztříštěnost obsahu vzdělávání do jednotlivých, navzájem izolovaných studijních oblastí* a v jejich rámci do jednotlivých, navzájem izolovaných studijních disciplin. Studijní disciplíny svou koncepcí vycházejí spíše ze systému vědních oborů než z analýzy profesních dovedností. Učební plány *nejsou dostatečně flexibilní a otevřené. Neumožňují* v procesu výuky provádět *aktuální úpravy odpovídající měnícím se potřebám školské praxe ani zájmům a potřebám studentů.* I tam, kde by tyto změny chtěli zapracovat katedry, neumožní jim to studijní řád fakulty, který nedovoluje přizpůsobovat projekty výuky rychleji, než jsou intervaly pro reakreditace.

Ze srovnání dostupných materiálů vyplývá, že *pregraduální příprava* musí být v současnosti (viz [9]) vnímána *jako první etapa v procesu celoživotního vzdělávání a profesního vývoje každého učitele.* Směřuje k posilování vazby mezi studiem a praktickými problémy škol. Analýza učitelských studijních programů však ukazuje, že stále ještě chybí mnohá témata, která by přípravu přiblížila praxi. Nebyly také vytvořeny předpoklady pro integraci předmětů mezi disciplinami společného základu a předměty odborné přípravy odpovídající zvolené aprobační skupině ani uvnitř obou uvedených skupin předmětů.

Z toho vyplývají oblasti, které by měly být v současné době v popředí zájmu fakult připravujících učitele, neboť zkvalitnění pregraduální

přípravy učitelů druhého stupně základních škol a škol středních je vnímáno jako jeden ze základních znaků strukturace[3] učitelských studijních programů. Jsou to:

- *dořešení koncepce učitelského vzdělávání jako celoživotního procesu, tzn. nejen jeho pregraduální části, ale i navazujícího dalšího vzdělávání učitelů,*
- *vymezení obsahu pedagogických a psychologických disciplín ve vztahu k novému pojetí profesní kompetence učitele a v souvislosti s tím promýšlení hlubší integrace pedagogicko - psychologické přípravy učitelů,*
- *vyřešení vztahu teoretické a praktické části přípravy v rámci celkové koncepce pregraduální přípravy učitelů,*
- *zpracování různých modelů pedagogicko-psychologické a didaktické praxe,*
- *stanovení optimální struktury proporcí různých forem studia a jejich časových nároků (přednášek, seminářů, cvičení, praxí, samostatného studia, výzkumných aktivit studentů apod.), která by směřovala k větší individualizaci studia,*
- *zjištění vhodného organizačního rámce pro nově navrhovanou koncepci přípravy.*

Strukturace studijních učitelských programů a nové pohledy na postavení a cíle vyučování matematice na základních a středních školách mají za následek i nezbytnost změn v přípravě budoucích učitelů matematiky. Např. je mezi odborníky diskutován názor (výzkum PISA), že školy předávají žákům stále stejným nezáživným způsobem soubor vědomostí, které nebudou nikdy potřebovat, a naopak je dostatečně nevybavují dovednostmi a vědomostmi nezbytnými pro dobré uplatnění na trhu práce a v osobním životě. Nový pohled na hodnocení výsledků vzdělávání v matematice se proto stále více orientuje na měření matematické gramotnosti žáků. Důraz je přitom kladen na nově formulovaný pojem *kompetence* ve smyslu obecných dovedností, které by měly být uplatněny při propojování reálného světa s matematikou, tedy zejména při řešení konkrétních (životních) problémů.

[3]Dělení studia na bakalářský a navazující magisterský stupeň.

Učební osnovy matematiky jsou doposud logicky členěny podle obsahových hesel, která reflektují historicky vzniklá odvětví matematického myšlení. V reálném světě však jevy vedoucí k aplikaci matematiky už nejsou uspořádány stejným způsobem. Problémy jen zřídka vznikají tak a v takovém kontextu, že by k jejich pochopení a řešení stačilo jen aplikovat znalosti z jednotlivého obsahového hesla. Ve zkoumání dalších aspektů rozvoje matematického vzdělávání se proto v současné době stále více užívají čtyři tematické okruhy (kvantita, prostor a čas, změna a vztahy, neurčitost), které splňují požadavky historického vývoje, pokrývají obor a reflektují hlavní kapitoly školního kurikula.

Dalším důležitým faktorem, který by měl iniciovat i odpovídající změnu učebních plánů vysokých škol připravujících budoucí učitele, je příprava a realizace Rámcových a Školních vzdělávacích programů (dále jen RVP a ŠVP) v jednotlivých vyučovacích předmětech, tedy také ve vyučovacím předmětu matematika. Rámcový program vzdělávání jako celek představuje dokument sjednocující českou školu v novém územně správním rozdělení. Návrh tohoto programu přitom předpokládá *razantní změnu „pedagogické“ osobnosti učitele.* Měl být proto být doplněn i přesnou úvahou o tom, jak s ním budou učitelé pracovat a jak budou na tuto práci připravováni. V opačném případě bude pravděpodobně docházet k tomu, že učitelé vezmou staré osnovy (nebo stávající vzdělávací programy) a prohlásí je za rozpracování předkládaného RVP. Školy vzdělávající učitele (Univerzitu Karlovu v Praze, Pedagogickou fakultu nevyjímaje) podle našich zjištění studenty učitelství na práci s RVP a ŠVP systematicky nepřipravují a jejich učební plány novou situaci nereflektují. Jsme proto přesvědčeni, že bez systematické přípravy a hlavně motivace učitelů bude RVP jenom neplodným pokusem o modernizaci našeho školství. Proto jsme se rozhodli zpracovat návrh nového modelu přípravy[4] učitelů matematiky na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě.

Připravovaný návrh má charakter *systémové změny* a bezprostředně souvisí se zaváděním strukturovaného studia učitelství matematiky a se zvyšováním kvality magisterského studijního programu učitelství matematiky pro střední školy. Týká se především *změny kvality* učebního

[4]Příprava byla v roce 2004 podpořena grantem MŠMT (Dynamický model učebního plánu studia učitelství matematiky na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě).

plánu oboru učitelství matematiky na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě. V dalších letech předpokládáme však i zpracování návrhu pro další vzdělávání našich absolventů (půjde o systém dalšího vzdělávání, který bude otevřen i dalším učitelům matematiky). Zároveň bezprostředně navazujeme na současnou problematiku řešenou školskou správou v oblasti realizace Rámcových vzdělávacích programů a Školních vzdělávacích programů v rámci plnění cílů školské politiky. Připomínáme, že nezbytnost rychlé reakce vysokých škol připravujících učitele na program decentralizace řízení školství a posílení tvořivých kompetencí učitele je *nesmírně aktuální*.

Návrh předpokládá *zcela zásadní změnu* učebního plánu studijního programu učitelství matematiky pro střední školy. Naší ambicí je vytvořit a později v praxi realizovat takový model přípravy učitelů matematiky, který připraví:

- *studenty učitelství na to, aby byli schopni v praktických situacích výkonu své profese profesionálně jednat a aktivně reagovat na potřeby školské politiky v regionu, kde budou působit,*
- *podmínky pro další vzdělávání učitelů matematiky.*

Chceme přitom využít zkušeností, které máme s inovacemi stávajícího konceptu přípravy učitelů na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě v následujících směrech:

- při vytváření *nových schémat transformace vědních disciplín*, které tvoří teoretický základ pedagogicko-psychologické složky pregraduální přípravy učitelů, a přitom
  - preferují osvojování klíčových poznatků v činnostech,
  - omezují transmisívní předávání hotových vědomostí a dovedností na minimum,
- při přechodu od současného *statického modelu*, kdy je příprava vedena převážně frontálním způsobem v prostředí fakulty, k *dynamickému modelu*, který je výrazně založen na konstruktivistických přístupech k osvojování poznatků a odehrává se v didaktické části podle potřeby v prostředí fakulty nebo v prostředí fakultní školy, přitom
  - dominantní jsou činnosti studenta, a to včetně posílení praktické složky přípravy realizované v prostředí fakultní školy,
  - evaluace těchto činností je prováděna s důrazem na řízenou reflexi a sebereflexi,

  - k racionalizaci je využíván mimo jiné i vhodný pedagogický software,

- příprava budoucích učitelů (po celou dobu studia) v konkrétních činnostech na uplatňování i jiných než tradičních forem didaktické interpretace (tj. postupů, kterých užívali v převážné míře jejich učitelé na základní a střední škole).

Dobré zkušenosti máme také s experimentálním ověřováním[5] povinně volitelného modulu „Didaktické inovace ve vyučování matematice“. Při přípravě návrhu tohoto modulu jsme vycházeli ze současných trendů chápajících vyučování matematice jako proces odehrávající se ve vzájemné interakci učitele a žáků. Jednotlivé kurzy modulu byly proto koncipovány tak, aby studentům učitelství (učitelům) nabídly *alternativní pohledy na inovativní přístupy k vyučování matematice v širším horizontu komplexní edukační péče o žáka* a umožnily jim aplikovat poznatky a zkušenosti, které získali při studiu didaktiky matematiky v povinných kurzech, a dále je rozvíjely a prohlubovaly. Za velice přínosné především ve vazbě na přípravu strukturovaných studií považujeme to, že modul „Didaktické inovace ve vyučování matematice“ byl připraven jako *otevřený* ve třech směrech:

- do modulu mohou být zařazovány kurzy vázané na různý matematický obsah (pro zařazení kurzu do modulu jsou rozhodující metody a formy práce v kurzu, nikoli jeho konkrétní obsahové zaměření),
- v jednotlivých kurzech mohou společně pracovat studenti oborového studia učitelství matematiky, kterým byla původně inovace určena, a také studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ nebo studenti studia speciální pedagogiky (nebo učitelé různých typů a stupňů škol),
- celý modul nebo jeho jednotlivé kurzy mohou být snadno upraveny pro potřeby dalšího vzdělávání učitelů.

Předpokládáme, že všechny výše uvedené zkušenosti nám umožní koncipovat přípravu učitelů matematiky tak, aby byli připravováni na možné změny svého edukačního stylu již v době svých studií. Některé

[5] Ve školním roce 2002–2003 s podporou grantu FRVŠ: Didaktické inovace ve vyučování matematice II.

další návrhy chceme ukázat v našem vystoupení, protože v té době už budeme moci prezentovat výsledky naší práce na řešení grantu MŠMT[6].

Literatura

[1] Helus Z.: *Čtyři teze k tématu „změna školy“.* In.: Pedagogika, č. 1, 2001, s. 25–41.

[2] Kubínová M.: *The Position of Didactics of Mathematics in the training of Mathematics teachers.* Psychology of Mathematical Education, 12 (1999). http://www.ex.ac.uk/∼PErnst/

[3] Kubínová M.: *Učební plány studia učitelství matematiky na Univerzitě Karlově v Praze – Pedagogické fakultě.* Setkání zástupců fakult připravujících učitele matematiky v České republice, Frýdlant nad Ostravicí 1999.

[4] Kubínová M., Novotná J.: *Didactics of mathematics – the influencing factor in mathematics teacher training in Universities.* ICME 9, WGA 05, Tokyo 2000.

[5] Kubínová M.: *Dynamický model pregraduální přípravy učitelů matematiky.* In: Sborník 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Mariánské Lázně 2000.

[6] Kubínová M.: *Improving teachers' beliefs about mathematical education.* In: Novotná J.: Proceedings of CERME 2001, Mariánské Lázně 2001. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2001. s. 595–596.

[7] Kubínová M.: *Projekty (ve vyučování matematice) – cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, Praha 2002, s. 256. ISBN 80-7290-088-9.

[8] Kubínová M.: *Boxing.* In: Classroom Contexts, Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School. Tecnoprint, Bologna 2003, s. 49–60. ISBN 88-371-1396-X.

[9] Mojžíšová J.: *Utváření učitelova pojetí výuky v rámci pregraduální přípravy.* Doktorská disertační práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2000.

[6]Grant MŠMT (Dynamický model učebního plánu studia učitelství matematiky na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě).

Budoucnost vyučování matematice a současná reforma

František Kuřina

Abstrakt

V příspěvku se hodnotí současná reforma vyučování z hlediska rozvíjení kompetencí, kvalifikace a gramotnosti.

1 Úvod

Termínem současná reforma vzdělávání označuji hnutí teoreticky odstartované Bílou knihou [1] a s různými výkyvy realizované v praxi současné školy v podmínkách ovlivněných tradicemi našeho vzdělávacího systému, přesvědčením masy učitelů o obsahu, metodách a cílech vzdělávání, společenským postavením učitelů, oceňováním významu vzdělávání společností, materiálním vybavením škol a školských zařízení, organizací a řízením škol a jejich hodnocením, ale i politickým, kulturním a ekonomickým prostředním rodiny, školy, obce či státu. Na teoretické úrovni bylo popsáno nepřeberné množství koncepcí a teorií, praxe školy se však řídí svými zákonitostmi a je pedagogicko-psychologickými teoriemi ovlivňována jen velmi pozvolna. Na možnost dívat se na společenské jevy očima přírodovědce upozorňuje např. *Stanislav Komárek* v pozoruhodné stati *Ekologická nika* [2], z níž zde ocitujeme několik myšlenek.

Pojem ekologické niky se stal v biologii posledních desetiletí samozřejmostí. Znamená asi tolik, že každý druh zaujímá v „přírodním hospodářství“ právě své určité místo, svou „ekologickou niku“, charakterizovanou jak prostorově, tak potravními, mikroklimatickými aj. nároky. … Zcela analogicky dochází v „biotopu“ tak komplikovaném, jakým je

Příspěvek byl připraven s podporou grantu GAČR 406/02/0829.

lidská společnost, k tvorbě „ekologických nik“ a k jejich obsazování těmi, kteří jsou k zaplňování preadaptováni. Preadaptace může být různé povahy a zahrnuje nejrůznější aspekty – příslušnost k určité vrstvě, typ výchovy a vzdělání, vlastnosti a nadání zakotvené dědičně, jakož i různé odchylky od nepatrných po zjevně patologické. ... Už k získání vzdělání, které umožňuje svému nositeli stát se společensky uznávaným specialistou (a jiné typy vzdělání nemají v dnešní době praktiky žádnou váhu ani veřejnou podporu), je nutné mít určitý soubor vlastností, které tento proces ulehčují.

Většina jevů spjatých se vzděláváním *je součástí naší každodenní reality a koření svým původem v samé podstatě společnosti, ve které žijeme ... Za žádoucí lze pokládat daleko spíše reflektování alespoň části těchto skutečností, než jejich radikální změnu – všechny dosud provedené pokusy „o nápravu zvenčí“ totiž selhaly* [2, s. 118]).

Kromě zmíněné Komárkovy stati ovlivnily úvahy formulované v příspěvku myšlenky klasika naší pedagogiky a psychologie *Václava Příhody* a současného spisovatele *Václava Jamka.*

Jsem přesvědčen, že škola, má-li plnit své poslání přípravy mládeže pro společnost, musí být pramenem poznávání a to nikoliv jen mechanického přebírání částí jednotlivých disciplín.

Pramenem poznání ... není organizující činitel rozumový, odtržený od zkušenosti, ani chaotická smyslová zkušenost, oddělená od výběrné strukturizace, ani čirá zkušenost, zamítající analysu faktů a spoléhající na bezprostřední pochopení podstaty jevu nebo problému, nýbrž experimentální zkušenost. Poznáváme jednáním jako hlavním pramenem zkušenosti a myšlení. Jeho výsledek nás poučuje, bylo-li poznání správné. Z tohoto hlediska je tedy poznání dlouhým pochodem množství pokusů a nezdarů, nikoli čirým aktem myšlení, jak předpokládá racionalismus, ani okamžitým vnuknutím rozumové nebo zkušenostní intuice. ([3, s. 99]).

Je takovéto o zkušenost opřené vzdělávání možné? Základem vyučování matematice jsou činnosti žáků, matematické aktivity nejrůznějšího druhu, nejdůležitějšími z nich je řešení úloh a problémů. To ovšem dobře věděli zkušení kantoři, kteří přípravě systémů úloh a rozboru žákovských nezdarů a omylů věnovali mimořádnou péči. Realita naší školy jako celku je ovšem tomuto ideálu velmi vzdálená. Systém výběrových odpovědí odvádí pozornost od podstaty matematického řešení úlohy a orientuje studenty i učitele na taktiku nalezení správné odpovědi, nikoliv na porozumění souvislostem.

Zkušenost bude patrně stále více a více spjata s manipulací se znaky. ... *Člověk může nakupovat, aniž vkročí do obchodu, aniž si zboží prohlédne a ohmatá, může získávat informace, organizovat daleké cesty, ba navazovat milostné známosti, aniž vytáhne paty ze svého pokoje, aniž musí materiálně a tělesně zdolávat časovou a prostorovou okolnost, která ho odděluje od výsledku ... i když na konci různě dlouhého operačního sledu nějaký předmět „vyplouvá“ (pizza, souprava nerezových hrnců, scenerie Kanárských ostrovů, trojrozměrný milostný partner), cesta k němu sestává pouze z abstraktních symbolů. Co bude tohle všechno znamenat pro naše prožívání a pro naši komunikaci s jinými lidmi?* ([4, s. 90]). Co bude znamenat toto zapojení formálních systémů do života člověka od útlého věku např. pro porozumění algebře nebo abstraktní matematice? Může přispět dlouhodobě pěstování syntaktických jemností ke kultivaci pozornosti, která byla potřebná při provádění výpočtů, dnes realizovaných stroji?

Dovolím si zde aplikovat myšlenky, které *Václav Jamek* vyslovil v úvaze o jazykové výchově: *Co by se mělo změnit, aby* matematická (v originále jazyková) *výuka nebyla pro dítě, přetěžované vědomostmi, další nadměrnou zátěží? Inu, změnit lze při takovém zadání jen jedno: ráz požadavků a způsob hodnocení, neboli práci učitelů. Nějakou dobu s tím jistě bude dřiny víc než dost – ale* ***vychovávat děti k samostatnému myšlení může jen samostatně myslící učitel*** ([4, s. 179]).

Tím se dostáváme k základní otázce – k otázce kompetencí. Naše současné reformní hnutí se orientuje, podle mého názoru zcela nesprávně, na tvorbu tzv. školních vzdělávacích programů. Podstatná otázka, otázka dosahování kompetencí, zůstává stranou pedagogického úsilí. Názor, který pro rozvíjení myšlení formuloval V. Jamek zcela zřetelně, platí pro rozvíjení veškerých kompetencí. Připomeňme zde pro konkrétnost jen malý výsek ze souboru kompetencí podle publikace [5]:

Na konci základního vzdělávání je žák způsobilý:

- *organizovat a řídit své učení, vybírat a využívat pro vlastní učení efektivní způsoby, metody a strategie,*
- *samostatně a kriticky myslet, samostatně se rozhodovat, zvažovat důsledky svého rozhodnutí a nést za ně odpovědnost,*
- *formulovat a vyjadřovat své myšlenky a názory v logickém sledu, vyjadřovat se výstižně, souvisle a kultivovaně v písemném a ústním projevu, zapojovat se do diskuse, obhajovat svůj názor, vystupovat na veřejnosti.*

Otázka, zda učitelům jsou vlastní kompetence, které mají mít absolventi základní školy, by měla být podrobena důkladnému studiu, neboť je podle mého názoru pro realizaci reformy podstatná. Taková studie patrně neexistuje, ze svých zkušeností však mohu potvrdit, že např. učitelské studium matematiky se rozvíjení kompetencí věnuje spíše okrajově a nesystematicky. Existují učitelé, kteří příslušné kompetence nemají. Podle publikace [6] je nemají ani mnozí učitelé pedagogických fakult, kteří jsou *nedochvilní, nespolehliví, ke studentům přezíraví a ješitní, nedrží se témat svých přednášek, nedodržují cíle svých zaměstnání, nedodržují čas a termíny, zadávají nesmyslné úkoly a zápočtové práce* ([6, s. 67]). *Pro mnoho našich učitelů jsou některé kompetence prakticky neviditelné. Na cílené rozvíjení mnoha dalších nebyli připravováni a sami je nemají* ([7, s. 93]).

2 Kompetence, gramotnost a kvalifikace

Považuji za výrazný klad připravované reformy vzdělávání její orientaci na kompetence, za vážný její nedostatek pak to, že věnuje malou pozornost otázkám kvalifikace. Pokusme se aspoň zčásti vymezit obsah pojmů připomenutých v názvu tohoto odstavce a formulovat jejich pozici ve vzdělávacím procesu.

Kompetencemi rozumíme způsobilosti (vědomosti, dovednosti, návyky a postoje), které jsou využitelné v různých učebních a praktických činnostech a situacích. *Kvalifikací* rozumíme přípravu pro konkrétní uplatnění člověka ve společnosti, tedy koneckonců na trhu práce. Vychovávat kvalifikované pracovníky je hlavní úkol profesně orientovaných škol, tedy především učilišť, středních odborných škol a škol vysokých. Kvalifikační roli by však měly hrát i školy zaměřené „všeobecně“, tedy školy základní a gymnázia. Základní školy by měly připravovat celou populaci na její občanskou roli, gymnázia by kromě přípravy na vysokou školu měla produkovat „vzdělané občany“. Vymezit kvalifikační obsah jednotlivých typů škol není patrně jednoduché, vzdát se však tohoto společensky důležitého úkolu ve prospěch tzv. školních vzdělávacích programů, jak se děje v naší reformě, je stěží rozumné. V důsledku tohoto, možná populisticky demokratického přístupu, se pak začíná uplatňovat tendence jiná: testování celé populace žáků. To vše vede k tomu, že učitel je společností tlačen ke sledování cílů, které nejsou pro rozvíjení dítěte podstatné. Učení se na testovací otázky je styl, který nevede k rozvíjení kompetence žáků, ale posiluje formální přístupy ke vzdělávání – na úkor

porozumění. Charakter školy jako instituce rozvíjející přizpůsobení se se tak výrazně zvyšuje.

Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter. K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy.

3 Budoucnost školské matematiky

Stěžejní otázku koncepce matematického vzdělání formulovat americký matematik *George Polya*: *Jak učit matematiku, aby kultivovala myšlení?* Tato otázka souvisí s charakterem matematiky. Z mnoha možných přístupů zde připomeneme dva: *Petr Vopěnka* zdůrazňuje chápání matematiky jako *metody předpovídání pomocí formálních kalkulů*, americký matematik *Paul Halmos* pak považuje za nejdůležitější rys matematiky *řešení problémů*.

Podle mého názoru odpověď na Polyovu otázku souvisí s přístupy k matematice formulovanými Vopěnkou a Halmosem. Matematika chápaná jako systém formálních dedukcí, jako systém definic, vět a důkazů nebo na elementární úrovni jako systém vzorců, není nejvýhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť skýtá mnoho příležitostí k formálnímu zvládání matematických poznatků. Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim rozuměli, tento soubor vědomostí lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k „osvojení si“ minima matematiky. Takováto matematika myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou často mnohageneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cesty k matematice je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Snaha porozumět věcem je doložitelná historicky a aplikovatelná i didakticky.

Pro matematiku základní školy, tedy pro matematickou kvalifikaci občana, je okruh matematických poznatků relativně malý (patrně menší

než požadují současné osnovy) a skládá se z poznání základních vlastností přirozených, celých a racionálních čísel, přičemž s tím související numerické výpočty se patrně v budoucnu budou opírat takřka výhradně o výpočetní techniku, poznání základních funkčních závislostí a geometrických vlastností prostoru, k nimž patří i rozvíjení představivosti. To vše ovšem nazíráno z hlediska jak aplikovat matematiku v realitě, jak poznat kvantitativní vztahy v přírodě a společnosti a na vhodné úrovni předpovídat jejich chování. S těmito otázkami velmi výrazně souvisí problémy rozvíjení jazykové gramotnosti, od umění porozumět textu běžného jazyka k umění manipulace se symboly a porozumění schématům a grafům. Porozumění světu a tedy i matematice souvisí s uměním vidět souvislosti, s uměním počítat (tedy předpovídat na základě formálních kalkulů) a s uměním uvažovat, které může být dovedeno až na úroveň argumentace a dokazování.

Na úrovni střední školy nejde o kvalitativně jiné přístupy k matematice. Podle mého názoru by však mělo jít prioritně o poznání kvantitativních vztahů reálného světa, z nich by se mělo vycházet, ne ze studia určitých matematických struktur. Podobně je tomu i v geometrii. Studium rovinné, prostorové, analytické a vektorové geometrie naznačuje prioritu strukturálního pohledu na školskou matematiku. Jsem přesvědčen, že budoucnost dá přednost pohledu „aplikačnímu“, tedy stručně řešeno studiu vlastností prostoru, které bude vyžadovat zvládnutí kalkulů určitého druhu.

I na úrovni střední školy bude účelné stanovit rozsah a hloubku matematických poznatků „vzdělaného občana“, která bude zvládnutelná a potřebná celé populaci.

Problém je v tom, že základní škola připravuje pro školu střední a střední škola pro vzdělávání vysokoškolské. Na obou z těchto úrovní je nutné jít „nad“ občanskou kvalifikaci. Základem pro tuto „nadstavbu“ nemohou být formální požadavky (prověřované např. systémem výběrových odpovědí), ale účinná forma rozvíjení myšlení formou řešení úloh a komunikace ve třídě – jak mezi studenty, tak i učitele se studenty. Takovouto koncepci vzdělávání se nepodaří realizovat, nebudou-li na ni připraveni učitelé. Smysl a charakter matematického vzdělávání učitelů by tedy měl být orientován na poznání cesty k matematice, nikoliv na poznávání hotových matematických struktur. Základem učitelského vzdělávání by tedy mělo být systematické rozvíjení kompetencí typu umění myslet, umění komunikovat, umění jednat, umění řešit úlohy. Skutečnost,

že tento styl není běžný na fakultách vzdělávajících učitele, zatěžuje můj příspěvek jistou dávkou pesimismu. Jsem přesvědčen, že bychom se měli snažit změnit *„školu přizpůsobení se“* na školu *maximálního rozvoje individualit.* Samozřejmě to je možné pouze v podmínkách zdravého rozvoje společnosti a tomu odpovídajícímu přesvědčení učitelů.

Matematické vzdělání by mělo sladit požadavky kvalifikační s požadavky na naplňování příslušných kompetencí prostřednictvím soustavného pěstování gramotnosti na příslušné věkové úrovni. Základem pro účinné vzdělávání je ovšem to, co jde nad kvalifikaci a gramotnost. To může být rozvíjeno pouze na základě zájmu, snahy a úsilí těch, kteří se učí. Otázka účinné motivace je základní otázkou vzdělávání na každé úrovni.

Literatura

[1] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* MŠMT, Praha 2001.

[2] Komárek S.: *Ekologická nika.* In: Sto esejů o přírodě a společnosti. Vesmír, Praha 1995.

[3] Příhoda V.: *Národní filosofie výchovy. Život a práce.* Praha 1948.

[4] Jamek V.: *O patřičnosti v jazyce.* Nakladatelství Franze Kafky, Praha 1998.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* VÚP, Praha 2002.

[6] Čapek R.: *Mají didaktické inovace zelenou při přípravě a pedagogické praxi studentů?* In: Didaktika – opora proměn výuky? Gaudeamus, Hradec Králové 2004.

[7] Botlík O., Souček D.: *Aby žáci uměli víc, musí být učiva méně.* Souvislosti, č. 1, 2000.

CAGT aneb Počítačová podpora výuky geometrie na ZČU v Plzni

Miroslav Lávička

1 Úvodní poznámky

Od doby, kdy začala být pomocí počítačů kromě textů a čísel produkována ve vyhovující kvalitě i grafika (tj. od druhé poloviny osmdesátých let), nacházíme silné uplatnění výpočetní techniky jak v geometrii, tak i ve vyučování geometrie. S nástupem počítačové éry se objevily programy, které umožnily uživatelům vytvářet na obrazovce nejen křivky a plochy, ale i složitější geometrické objekty. Tím se stejně jako v jiných oborech i v geometrii prosadila tzv. *CA koncepce*. *Computer Aided koncepcí* rozumíme uplatnění výpočetní techniky v určité oblasti lidské činnosti (v překladu se používá termín počítačová podpora). Pro konstruktéry byly vyvinuty dokonalé *CAD* (*Computer Aided Design*) systémy, ve výrobě se čím dál více začala prosazovat *CAM* (*Computer Aided Manufacturing*) koncepce a zkratek typu *CA??* dnes najdeme jistě celou řadu. Analogicky tedy můžeme zřejmě hovořit i o koncepci „*Computer Aided Geometry Teaching*“. Učitelé a studenti dostali k dispozici (dynamické) programy určené k podpoře výuky rovinné geometrie (např. Cabri géomètre, The Geometer‘s Sketchpad a řada dalších), do vyučovacích hodin se postupně prosazují i nejrůznější formy interaktivních prostorových 3D modelářů.

A v čem vlastně tkví kouzlo počítačové podpory geometrie a její výuky? Ve srovnání s klasickou metodou rýsování tužkou, pravítkem a kružítkem na papír s sebou počítačová podpora konstrukcí geometrických výkresů přinesla významný pokrok. Umožnila totiž jednou nakreslený obrázek snadno upravovat, formulovat a ověřovat hypotézy, měřit a provádět výpočty, vymazat část obrázku, překreslit vše od začátku, tisknout ve zvoleném měřítku apod. V hotovém obrázku lze navíc skrýt pomocné konstrukce, obarvit čáry a měnit jejich styl, připojovat doprovodný vysvětlující text atd. V neposlední řadě sehrává významnou roli i funkce

vizualizační, jež usnadňuje zpracování řady úkolů náročných na představivost. Účelné zařazení počítače a vhodného softwaru do výuky tak umožňuje modernizovat formy výuky geometrie a podporuje ve větší míře rozvoj samostatného a kreativního myšlení.

Další nespornou výhodou je, že vytvořený obrázek je u většiny programů připraven i ke sdílení v prostředí internetu, resp. jej lze vložit do jiného (např. prezentačního) dokumentu, a to se zachováním všech jeho dynamických a interaktivních funkcí. Zdůrazněme, že i v prostředí internetu je při modelování geometrických situací užitečné využívat interaktivní geometrické obrázky s dynamickými vazbami. Statické webovské stránky orientované na výuku geometrie totiž neplní o mnoho lepší roli než klasické tištěné učebnice (s výjimkou lepší dostupnosti, která je samozřejmou výhodou internetových učebnic). Statické obrázky by proto měly být zařazovány jen v nezbytných případech, popř. tam, kde pohyb není nutný k pochopení situace. U programů dynamické planimetrie (např. CabriJava, JavaSketchpad, Cinderella atd.) se většinou předpokládá využití Javy, pro 3D modelování geometrických objektů (např. Rhinoceros apod.) je výhodné užití jazyka VRML. Tím dochází ke zlepšení možností prezentace a sdílení výsledků geometricky orientovaných prací.

2 Konkrétní příklady využívaného softwaru

Plynulé zavádění ICT do výuky matematiky se na ZČU v Plzni stalo stejně jako na řadě ostatních škol tématem číslo jedna a v současné době jsou prakticky všechny matematické předměty (včetně geometrických) ve větší či menší míře vyučovány s využitím moderních informačních technologií. Kromě toho na většině fakult připravujících učitele matematiky byly vytvořeny speciální předměty, jejichž náplní je seznámení se softwarem určeným k počítačové podpoře výuky geometrie. Sylaby takovýchto předmětů – byť byly vytvořeny na různých školách – bývají zpravidla velmi podobné a většinou se v nich objevují produkty a témata, jež jsou diskutovány v dále uvedených odstavcích.

2.1 Dynamická geometrie

Princip programů **dynamické** (někdy též **interaktivní**) **geometrie** je následující:

- programy umožňují *vytvářet na obrazovce základní geometrické objekty* – a to body, přímky, polopřímky, úsečky, vektory, kružnice, kruhové oblouky a kuželosečky atd. – a *provádět s nimi základní geometrické konstrukce*;
- pohybujeme-li objekty, které mají neomezenou nebo částečně omezenou volnost, indukuje to pohyb objektů od nich odvozených; celá konstrukce se tak dynamicky překresluje, přičemž příslušné vztahy objektů zůstávají zachovány.

Nejpoužívanější programy:
- Cabri Geometry II
  http://www.cabri.net/index-e.html
  http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm
- The Geometer‘s Sketchpad
  http://www.keypress.com/sketchpad/
- Cinderella
  http://www.cinderella.de
- Geom, Felix, Dr. Geo, Geolog, Géoplan, Geometric Supposer, Geometry Inventor, Geonet, Thales, Euclides, Euklid,...

Některé *výhody*:
- jednoduché a uživatelsky příjemné (intuitivní) ovládání,
- vizualizace kinematických systémů,
- proces konstrukce krok za krokem (jednoduché animace),
- empirické „dokazování“,
- testování správného řešení – heuristika,
- podpora algoritmických návyků – tvorba jednoduchých programů (makrokonstrukcí),

⋮

Některé *nevýhody*:
- odosobnění výuky,
- možnost ztráty čistoty geometrického myšlení (dokazování a „prokazování“),
- geometrie přestává podporovat vlastní dovednost rýsování, a technického kreslení

⋮

2.2 Dynamická geometrie na internetu

Je několik řešení, jak využívat a sdílet dynamické obrázky pomocí internetu. Poznamenejme, že klasická webovská animace není pro tyto účely nejvhodnější – její tvorba je poměrně náročná a především pak dává minimální možnosti pro interaktivitu. A to nehovoříme o velikosti získaných souborů. Jinou formou je poučný hypertext vystavený na webovské stránce, který odkazuje na konkrétní dynamický obrázek (tj. soubor). Jakožto uživatelé si obrázek stáhneme z webovského serveru a otevřeme jej v lokálně instalovaném programu dynamické geometrie. I to s sebou však nese určitá úskalí – např. nutnost mít na svém počítači instalován příslušný software.

Přístupem, který v dnešní době v oblasti dynamické geometrie na internetu nejlépe vystihuje vlastnosti interaktivních obrázků, je využití **Javy**, což je na platformě nezávislý, objektově orientovaný programovací jazyk. Jazyk Java byl původně vyvinut pro jiné účely než použití na internetu (např. kabelová televize apod.), časem však výzkumníci přišli na to, že jej lze stejně dobře využít i pro metodu řízení multimediálního zobrazení dat. Do webovských stránek se vkládají tzv. **aplety**, jejichž parametry se získávají přímo z obrázků vytvořených pomocí nějakého programu dynamické geometrie. Soubor, vytvořený např. v Cabri, je tedy vlastním nositelem parametrů apletu. Koncový uživatel pak potřebuje pouze prohlížeč, který podporuje Javu. A těmi jsou dnes aktuální verze všech nejpoužívanějších prohlížečů.

U některých klasických programů dynamické planimetrie se tak objevily jejich „javovské“ nadstavby (*CabriJava*, *JavaSketchpad*). V jiných programem (*Cinderella*) je již Java přímo implementována v základní instalaci, a proto je součástí programu i nabídka přímého exportu do HTML se současným začleněním apletu – což je pochopitelně uživatelsky velmi příjemné.

2.3 Nástroje pro 3D modelování

Vzhledem k tomu, že programy jako Cabri, Sketchpad či Cinderella představují produkty dynamické *planimetrie*, není možné je přímo využít pro modelování konstrukcí v trojrozměrném prostoru. Samozřejmě můžeme aplikovat známé metody deskriptivní geometrie a v podstatě provádět stereometrické konstrukce s využitím různých průmětů. Vhodnější je však v těchto případech sáhnout po nějakém vhodnějším nástroji pro

3D modelování. Byť práce s 3D modeláři není plně srovnatelná s programy dynamické geometrie, lze konstatovat, že i u těchto produktů je splněna většina požadavků kladených na dynamičnost a interaktivitu. Co se týče výhod a nevýhod zařazení 3D modelářů do výuky, pak ty se prakticky shodují s již uvedenými u planimetrického softwaru. Hlavní důvod uplatnění 3D modelářů je však jasný a nezpochybnitelný – jde o nástroje, jež rozvíjejí představivost a kreativitu a především posilují vizualizaci prostorových situací.

Vzhledem k relativní cenové dostupnosti bývá ve výuce nejčastěji používán software Rhinoceros – http://www.cz.rhino.com. Jedná se o silný a moderní programový nástroj, jenž vychází z popisu křivek a ploch pomocí tzv. NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) reprezentací. Oproti dříve uvedeným programům však není Rhino určeno primárně na podporu výuky geometrie, nýbrž jde o sofware, který se stejně dobře uplatňuje i v libovolném procesu od návrhu průmyslového designu až po sériovou výrobu.

Vytvořené modely lze samozřejmě renderovat, animovat, analyzovat, dodatečně upravovat, podrobit je booleovským operacím nebo vytvořit jejich výkresovou dokumentaci. Výhodou je, že i osoba bez znalostí NURBS problematiky a bez zkušeností s 3D modelováním, může během krátké doby dosáhnout velmi dobrých profesionálních výsledků.

2.4 VRML – Virtual reality Modelling Language

VRML (**Virtual Reality Modelling Language**) je jazyk pro popis obsahu virtuálních světů a jejich chování. Zdůrazněme, že VRML definuje způsob zápisu virtuálních světů do textových souborů (na rozdíl od souborů pro zápis obrázků jako např. GIF, BMP, JPEG, ...; popř. pro zápis videa jako např. AVI, MPEG, ...). K prohlížení VRML souborů je nutné používat speciální prohlížeče, které převádějí textový zápis do obrazu virtuálního světa (většina dostupných VRML prohlížečů pracuje jako součást standardních prohlížečů WWW stránek. Takovými VRML prohlížeči jsou např. *Cortona* od firmy Parallel Graphics, *Cosmo Player* od firmy Silicon Graphics atd.

Účelné zařazení VRML souborů do výuky geometrie umožňuje sdílet na internetu prostorové modely geometrických objektů od pravidelných mnohostěnů až např. po složitější NURBS objekty. Navíc je třeba zdůraznit, že tvůrcem VRML obrázků (tj. 3D modelů) může být i ten, kdo jazyk VRML vůbec neovládá, neboť v dnešní době je v řadě aplikací

(např. výše uvedený program Rhinoceros) možno typ souboru konkrétního programu přímo exportovat do jazyka VRML.

Základní výhody jazyka VRML:

- virtuální světy jsou kombinovány s multimediálními prvky (obraz, zvuk, video),
- lze použít prvky zapsané lokálně i kdekoliv na síti,
- mezi jednotlivými světy lze plynule přecházet jako přecházíme mezi standardními webovskými stránkami,
- stejné prostředky lze použít pro popis statických i dynamických světů,
- součástí jazyka jsou definice pohybu uživatele (chůze, let, zkoumání objektů), automatická, navigace, teleportování,
- virtuální světy lze vkládat do WWW stránek,
- VRML umožňuje spolupráci s programovacími jazyky jako např. Java, Javascript,
- ačkoliv jde jen o textové soubory, lze jejich velikost ještě zmenšit pomocí programu gzip, aniž bychom se starali o zpětnou dekompresi,

⋮

3 Počítačová podpora výuky geometrie na ZČU

V souvislosti se strukturální a obsahovou inovací výuky geometrie na ZČU byl na oddělení geometrie řešen projekt (FRVŠ 1330/2004/B), jehož cílem bylo kromě jiného v souladu s přechodem výuky geometrie na Fakultě pedagogické pod oddělení geometrie Fakulty aplikovaných věd ZČU definovat novou pozici geometrických disciplín ve studiu učitelství matematiky. Základním východiskem byl předpoklad, že přirozené akcentování modernizace studia geometrie v učitelském studijním programu, vytváří dobrou pozici i pro následnou modernizaci výuky na základních a středních školách.

Jedním z výstupů projektu byla i definice nového obsahu předmětu KMA/ITG *Informační technologie ve vyučování geometrie*, který je v hodinové dotaci $1 + 2$ od roku 2003/2004 nabízen Katedrou matematiky FAV studentům ZČU. Předmět byl primárně vytvořen pro studenty učitelství matematiky Fakulty pedagogické, resp. Fakulty aplikovaných věd,

ale vzhledem k založení samostatného Ústavu umění a designu (UUD), který je předstupněm budoucí Fakulty umění a designu, je uvedený předmět nabízen i studentům nově vznikajících programů a oborů (např. Design, Mediální a didaktická ilustrace atd.).

TÝDEN	TÉMA VÝUKY
1.	Možnosti použití počítače ve vyučování matematiky. Modernizace výuky geometrie pomocí programů dynamické geometrie, JAVA apletů, VRML apod.
2.	Konkrétní příklady programů dynamické geometrie – obecné zásady vytváření dynamických interaktivních konstrukcí
3.	CABRI Geomètre – základní kurz I
4.	CABRI Geomètre – základní kurz II
5.	Tvorba interaktivních konstrukcí pomocí Cabri
6.	The Geometer‘s Sketchpad – základní seznámení
7.	Cinderella – základní seznámení
8.	Vytváření dynamických geometricky orientovaných webovských stránek, implementace JAVA apletů vytvořených pomocí SW Cabri/CabriJava, popř. Cinderella
9.	VRML – Virtual Reality Modelling Language (jazyk pro popis virtuální reality); základní seznámení a využití ve výuce geometrie
10.	Seznámení s programem pro NURBS 3D modelování Rhinoceros
11.	Modelování geometrických objektů pomocí SW Rhinoceros – praktický kurz ovládání I
12.	Rhinoceros – 3D modelář, praktický kurz ovládání II
13.	Prezentace studentských projektů

Tabulka 1 Harmonogram předmětu KMA/ITG (1+2)

Literatura

[1] Vrba A.: *Skripta ke kurzu TTT: Geometrie na počítači.* Praha 1999.

[2] Bainville E.: *CABRI II Plus (manuál).* (překlad A. Vrba 2003)

[3] Lávička M.: *CabriJava – dynamická geometrie na WWW.* Matematika – fyzika – Informatika, 10 (4). Praha 2000.

[4] Lávička M.: *Prezentace geometrického učiva pomocí CabriJavy.* In: *Sborník příspěvků. Mezinárodní konference kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky.* TU Liberec, Liberec 2000, s. 75–82.

[5] Žára J.: *VRML 97 Laskavý průvodce virtuálními světy.* Computer-Press, Praha 1999.

Příprava budoucích učitelů na využívání Cabri geometrie při výuce matematiky

Pavel Leischner

Abstrakt

Příspěvek informuje, jak jsou studenti učitelství pro ZŠ i SŠ na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity připravováni na využívání programu Cabri geometrie při výuce matematiky. Uvádí se některé zkušenosti z této práce a některé konkrétní příklady využití Cabri.

Studenti učitelství matematiky pro druhý stupeň ZŠ a učitelství pro SŠ se na Pedagogické fakultě JU setkávají s programem Cabri geometrie těchto předmětech:

- *Výpočetní technika pro matematiky* (0/2)[1], což je povinný předmět ve druhém ročníku zaměřený na základní seznámení s programy Maple, Derive, TEX, Cabri geometrie apod.
- *Didaktika matematiky I, II a III* (1/2, 1/1 a 1/2), povinný předmět ve třetím a čtvrtém ročníku.
- *Počítačem podporovaná výuka matematiky* (0/2), volitelný předmět ve třetím ročníku.
- *Metody řešení úloh – geometrie* (0/2), předmět vyučovaný v pátém ročníku, povinný pro studenty učitelství ZŠ a volitelný pro studenty učitelství SŠ.

Získané poznatky mohou navíc uplatňovat a rozvíjet ve svých diplomových pracích, pokud si vyberou některá z témat zaměřených na využití Cabri při výuce matematiky. V příspěvku uvedeme několik podrobnějších informací a zkušeností autora tohoto článku z práce v uvedených oblastech.

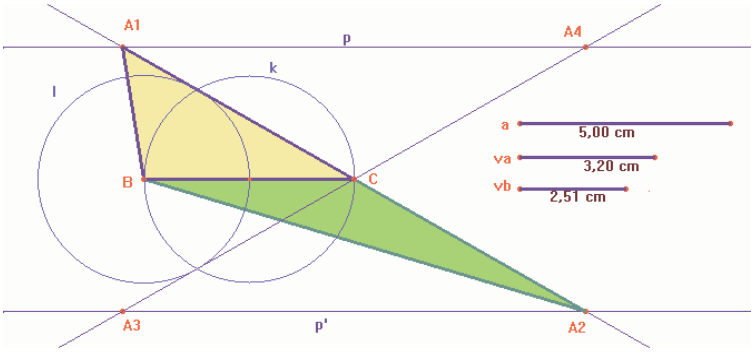
[1] V závorce je uvedena týdenní hodinová dotace (přednáška/cvičení).

Předmět *Výpočetní technika pro matematiky* má pro výuku Cabri geometrie vymezeny pouhé čtyři hodiny. Za tu dobu je možné jen spíše informativně seznámit studenty s prováděním základních operací v Cabri a pak jim k dalšímu rozšíření a procvičení získaných poznatků doporučit webové stránky

http://www.pf.jcu.cz/cabri nebo http://www.pf.jcu.cz/p-mat,

na nichž nalezne materiály vhodné k samostatnému studiu. Podmínkou zápočtu je vytvořit soubor s řešením jednoduché konstrukční úlohy v Cabri jako demonstrační pomůcku pro výuku na ZŠ nebo SŠ.

Obr. 1 představuje jednu takovou pomůcku. Úloha spočívala v sestrojení trojúhelníka ABC, bylo-li při běžném způsobu značení dáno: a, v_a, v_b. Soubor vytvořila M. Bláhová na jaře roku 2004, výsledný obrázek byl mírně upraven autorem článku. Metodický návod byl proveden jako samostatná příloha ve Wordu. Pomocí ovladačů v pravé části obrázku je možno měnit hodnoty zadaných prvků a tím i výsledek úlohy (tzn. tvar sestrojených trojúhelníků a jejich počet).



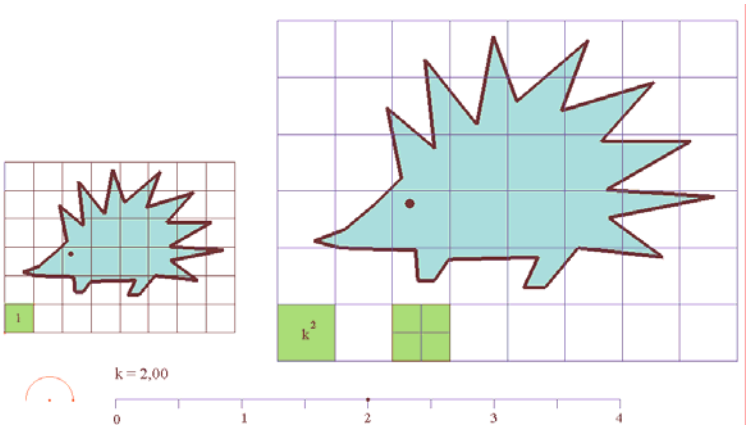
Obr. 1

Analogicky vypracovali své úkoly i ostatní studenti. Problémy byly konzultovány s vyučujícím osobně nebo elektronickou cestou. Při vypracovávání se vyskytlo mnoho chyb typických pro začátečníky v užívání Cabri, ale také mnoho chyb svědčících o neznalosti učiva planimetrie na ZŠ a SŠ[2], což svědčí o nevalné úrovni výuky planimetrie na školách. Celkově lze říci, že vypracování úlohy bylo pro řadu studentů velmi poučné.

[2]Studenti ještě neprošli příslušným kurzem geometrie a didaktiky na fakultě, byli tedy odkázáni jen na to, co si pamatují ze střední a základní školy

Zvládnutí Cabri na vyšší technické úrovni je cílem předmětu *Počítačem podporovaná výuka matematiky* a nebudeme je zde vzhledem k rozsahu příspěvku komentovat.

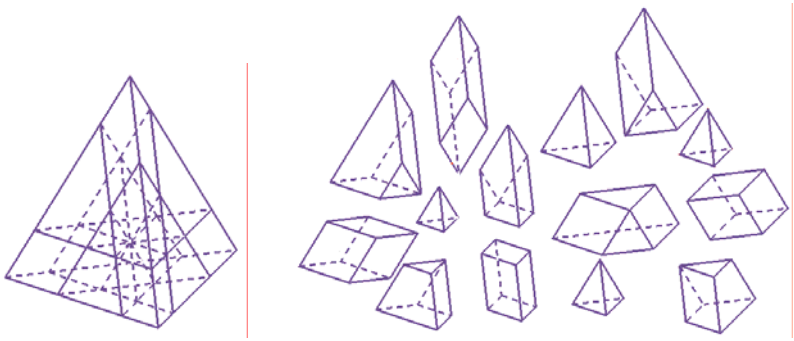
V předmětech *Didaktika matematiky* a *Metody řešení úloh* jsou studentům uváděny příklady použití Cabri ve vyučování. Většinou se jedná o ukázky pomůcek vyrobených na naší fakultě studenty i učiteli. Patří sem například soubor interaktivních obrázků těles a prostorových situací vypracovaný Karlem Kabelkou v diplomové práci [1], který byl podrobněji popsán v příspěvku [2] na 8. setkání v Prachaticích, resp. v časopise Matematika – fyzika – informatika [3]. Jiným příkladem je soubor pomůcek k učivu o obsazích rovinných útvarů a objemech těles [4]. Doplňme jej malou ukázkou na téma obsahy podobných útvarů (tento soubor autor článku nezařadil do citovaného zdroje).



Obr. 2

V souboru na obr. 2 je mnohoúhelník tvaru ježka umístěného v síti jednotkových čtverců a napravo od něj je obraz celého obrázku v podobnosti s koeficientem k. Pomocí ovladačů v dolní části obrázku můžeme měnit hodnotu k a otáčet čtvercovou sítí. Kromě demonstrace různých situací zvětšení a zmenšení, rozdílu mezi obrazy matematických čar a „čar reálného světa“ (Jak se liší obrazy ježka zvětšeného při téže hodnotě k na kopírce a v Cabri?) apod. můžeme pomocí této pomůcky názorně odvodit, že podíl obsahu obrazu útvaru a obsahu původního útvaru je k^2.

V předmětu *Metody řešení úloh* může být Cabri využívána při vizualizaci složitějších geometrických situací (Na obr. 3 vidíme příklad rozřezání čtyřstěnu podél čtyř rovin, jež procházejí zvoleným vnitřním bodem čtyřstěnu, a jeho „rozklad“ na tělesa, která rozřezáním vzniknou.) nebo modelování problémů. V posledním z právě uvedených případů lze studentovi připravit interaktivní problémovou situaci, kterou on pak zkoumá a na základě experimentů a pozorování vytvoří hypotézu a dokáže ji.

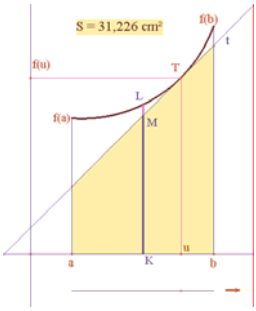


Obr. 3

Ukážeme si to na modifikaci úlohy převzaté od J. Kubeše z gymnázia Mikulášské nám. 23, Plzeň. Původně byla úloha pojata jako aplikace diferenciálního počtu ve třídách matematického zaměření. Její text zněl: *Je dán obrazec vymezený v kartézské soustavě souřadnic grafem funkce* $f(x) = x^2 + 1$ *a čarami* $y = 0, x = 0, x = 1$. *Ve kterém bodě funkce* f *musíme vést tečnu, aby z obrazce oddělila lichoběžník o maximálním obsahu?*

Výsledkem je bod $[0,5; 1,25]$, jehož x-ová souřadnice leží ve středu intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Úlohu je možno zobecnit na jakoukoliv spojitou a ryze konvexní funkci, která nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ kladných hodnot a vyřešit ji jen pomocí syntetické geometrie. K tomu pomůže interaktivní obrázek znázorněný na obr. 4: Pomocí ovladače lze nastavovat různé polohy dotykového bodu T. Přitom se zobrazují příslušné hodnoty obsahu vyznačeného lichoběžníka. Student by se měl dovtípit, že obsah lichoběžníka je

$$S = |KM| \cdot |b - a|$$



Obr. 4

a střední příčka KM je vždy podmnožinou úsečky KL. Obsah lichoběžníka je maximální jen pro $L = M$ a to nastane právě tehdy, když obraz čísla u leží uprostřed intervalu $\langle a, b\rangle$.

Literatura

[1] Kabelka K.: *Využití Cabri geometrie ve středoškolské stereometrii.* (diplomová práce), Pedagogická fakulta JU, České Budějovice 2000.

[2] Kabelka K.: *Využití programu Cabri geometrie v ZŠ a SŠ stereometrii.* In: 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Prachatice, 7.–9. listopadu 2002, JČMF, Praha 2002, str. 141–146.

[3] Kabelka K., Leischner P.: *Využití Cabri geometrie při výuce stereometrie.* Matematika – fyzika – informatika **10** (2000/2001), č. 10, Prometheus, Praha, str. 622–629.

[4] Leischner P.: *Obsahy a objemy.* http://www.pf.jcu.cz/p–mat/texty/LEISCH/obsahy.htm

Ke klíčovým kompetencím v učebnicích matematiky pro ZŠ

Josef Molnár

Motto:
„Dej člověku rybu a nakrmíš ho na celý den.
Nauč člověka rybařit a nakrmíš ho na celý zbytek života.“
(čínské přísloví)

Volba klíčových kompetencí je závislá na tom, co a kdo v dané situaci považuje za nejdůležitější pro úspěšný život jedince. Přesto v různých přehledech klíčových kompetencí (viz seznam literatury) nacházíme řadu společných znaků, z nichž jsme bez nároku na úplnost vybrali ty, které podle našeho názoru lze, a proto by měly být prostřednictvím učebnic matematiky rozvíjeny. Role učebnic matematiky z tohoto pohledu spočívá zejména v tvorbě a rozvoji následujících vědomostí, dovedností a postojů:

Vědomosti

Z učebnic matematiky by žáci měli získat matematické vědomosti předepsané příslušnými kurikulárními dokumenty, poznatky propedeutického charakteru, ale i informace z jiných oborů, které jednak rozšiřují a prohlubují znalosti žáků, jednak, a to především, v rámci mezipředmětových vztahů působí na formování vztahu žáků k matematice a jiným disciplínám a oblastem života.

Dovednosti

Užíváním učebnic matematiky by si žáci měli rozvíjet dovednost

- pracovat s matematickými pojmy
- aplikovat matematické poznatky
- objevovat a pracovat tvořivě

- logicky uvažovat
- dokazovat
- řešit problémy
- pracovat s daty a informacemi
- učit se
- pracovat v týmu
- komunikovat
- používat pomůcky

Postoje

Učebnice matematiky by měly pomoci formovat u žáků

- nezáporný vztah k matematice
- mezipředmětové vazby a vztahy k přírodovědným a technickým disciplínám
- potřebu znalosti cizích jazyků
- toleranci k jiným zemím, lidem a k jejich duchovním hodnotám
- respekt k tradicím a pochopení kontinuity minulosti a současnosti
- kladný postoj k umění, ke všem formám kulturních projevů
- potřebu chránit přírodu a životní prostředí
- touhu aktivně rozvíjet a chránit své zdraví
- pozitivní přístup k životu, schopnost projevovat pozitivní city

Výše uvedené klíčové kompetence z oblasti dovedností si charakterizujme podrobněji:

Pracovat s matematickými pojmy

Tento požadavek lze zařadit mezi hlavní cíle vyučování matematice a plněn je ve všech učebnicích matematiky průběžně.

Aplikovat matematické poznatky

Mezi složky této dovednosti, které lze efektivně rozvíjet v učebnicích matematiky, můžeme zařadit:

- matematické modelování a matematizaci reálné situace,
- aplikace matematiky v každodenních situacích, jako jsou zejména nakupování, cestování, volný čas, domácí rozpočet a bankovnictví,
- využití matematických vědomostí a dovedností v praktických činnostech, jako jsou měření, porovnávání a odhady délek a vzdáleností, čtení a tvorba plánků a map, užívání pomůcek aj.

Ve vyučování matematice, a tedy i v učebnicích matematiky, sehrávají v tomto ohledu nezastupitelnou roli slovní úlohy.

Objevovat a pracovat tvořivě

To mimo jiné obnáší dovednost pozorovat a experimentovat, dávat věci do souvislostí a organizovat poznatky různého druhu, formulovat hypotézy, odhadovat výsledek, jít mimo vyšlapané cesty, přijmout odlišné, nalézat nová řešení a nestandardní aplikace, být flexibilní a adaptibilní při změnách.

Logicky uvažovat

Rozvoj logického myšlení patří mezi obligátní cíle vyučování matematice, řadíme zde zejména exaktní abstraktní myšlení kombinatorické a funkční, ale i dokazování matematických tvrzeni. Rozvíjíme je v matematických soutěžích, při řešení zajímavých úloh, hlavolamů a hádanek různého typu i jinde.

Dokazovat

Dokazování matematických tvrzení je jedním z pilířů matematiky, jednou ze základních matematických technik. Faktorem příznivě působícím na formování vztahu k pravdě, k čestnosti je jednoznačný charakter matematických pojmů, operací, postupů, metod a výsledků. Žáci se postupně učí zdůvodňovat postup řešení úloh, diskutovat, obhajovat svůj názor, kriticky posuzovat získané výsledky,vyslovovat hypotézy, argumentovat, užívat podpůrné prostředky jako jsou schémata, diagramy, tabulky a grafy, chápat, reprodukovat a případně i dokazovat matematické věty, vyvracet tvrzení protipříkladem, používat pravidla formální

logiky. V učebnicích matematiky pro základní školu jde především o budování základů, k vlastnímu dokazování matematických tvrzení pomocí různých typů důkazů jsou připraveni teprve studenti středních škol.

Řešit problémy

Při řešení problémů je důležité být schopen vyrovnávat se s nejistotou a komplexností situací, pochopit problém, vyhledávat informace k jeho řešení, analyzovat a postupovat systematicky a plánovitě, vycházet ze zkušeností a analogie, uvědomovat si zodpovědnost za své rozhodnutí, hledat různé varianty řešení včetně neortodoxních, nenechat se odradit, nést odpovědnost za správnost získaných výsledků.

Pracovat s daty a informacemi

Cílem je stav, kdy žák dovede vyhledávat, zpracovávat a aplikovat data a informace.

Vyhledávat data a informace znamená zvažovat zdroje dat, získávat informace a sbírat data; při zpracovávání dat a informací je potřeba je analyzovat, třídit, rozlišovat jejich relevantnost, vytvářet a pořádat dokumentaci, poznávat souvislosti; při aplikování se vizualizuje (tvorba tabulek, diagramů, grafů), interpretuje a kriticky hodnotí (etika interpretace).

Učit se

Hlavním cílem je umožnit žákům osvojit si strategii učení a motivovat je pro celoživotní vzdělávání. Žák by měl být schopen vzít v úvahu zkušenosti, organizovat svůj učební proces, vyhledávat, zpracovávat a aplikovat data a informace (viz výše) a používat je při studiu a systematizaci poznatků, hodnotit sám sebe a přebírat odpovědnost za své učení, kriticky zhodnotit své učení z hlediska obsahu a cíle (úroveň a využitelnost vědomostí a dovedností), orientovat se v dostupných příležitostech k dalšímu vzdělávání.

Pracovat v týmu

Postupně u žáků rozvíjíme dovednost spolupracovat, respektovat práci a úspěchy druhých, řešit konflikty, radit se s lidmi, jednat asertivně, dodržovat pravidla slušného chování. Využíváme k tomu osvědčené metody jako je skupinová práce a projektové vyučování či objektivnosti výsledků matematických výpočtů a řešení problémových úloh.

Komunikovat

Prostřednictvím učebnic matematiky můžeme vést žáka k tomu, aby s porozuměním četl různé typy textů, vyjadřoval se efektivně, výstižně a kultivovaně v písemném projevu, formuloval myšlenky v logickém sledu, operoval s obecně užívanými termíny, znaky, symboly, rozuměl obrazovým materiálům, dovedl se vyjadřovat pomocí grafické komunikace, rozvíjel si geometrickou představivost.

Používat pomůcky

Žák by měl zručně, bezpečně a účinně používat jednodušší nářadí a nástroje, efektivně pracovat s literaturou a tabulkami, využívat výpočetní techniku i informační, komunikační a multimediální prostředky a chápat etiku práce s nimi.

(Konkrétní příklady a ukázky z učebnic matematiky jsou součástí prezentace.)

Literatura

[1] Belz H., Siegrist M.: *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení.* Portál, Praha 2001.

[2] *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia 1989.

[3] Fulghum R.: *Všechno, co opravdu potřebuju znát, jsem se naučil v mateřské školce.* Odeon, Praha 1994.

[4] Hučínová L.: *Trendy vzdělávání v Evropě.* http://www.vuppraha.cz, 2004.

[5] Kalhous Z., Obst O. a kol.: *Školní didaktika.* Portál, Praha 2002.

[6] *Key Competencies – A developing concept in general compulsory education.* (Survey 5), http://www.eurydice.org, 2003.

[7] Mertensen D.: *Schlüsselqualifikationen – Thesen zur Schulung für eine moderne Gesellschaft.* In: Mittteilungen aus der Arbeitsmarkt – und Berufsforschung, 7. Jahrgang, Nürnberg 1974.

[8] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* http://www.vuppraha.cz, 2004.

[9] *Standard základního vzdělávání.* In: Věstník MŠMT ČR, **LI** (1995), sešit 9.

[10] Sundberg N. D. a kol.: *Toward assesment of personal competence and incompetence in life situations.* Annual Review of Psychology, **29** (1978), s. 179–221.

[11] *Vzdělávací program ZÁKLADNÍ ŠKOLA*, Fortuna, Praha 1996.

[12] Walterová E., Ježková V.: *Žijeme v Evropě.* UK, Praha 2000.

Strategie učení při výuce metodou CLIL

Jarmila Novotná, Marie Hofmannová

1 Úvod

Ve výuce cizích jazyků můžeme dnes na českých školách pozorovat určité nové tendence. Jednou z nich je využití cizího jazyka jako nástroje k výuce nejazykového předmětu. V evropském školství se tento trend nazývá *Content and Language Integrated Learning* (CLIL). V zámoří má výuka v cizím jazyce delší tradici a je známa pod různými názvy, např. *immersion program*.

Evropské země experimentují s různými výukovými předměty, s různými jazyky, didaktickými přístupy a žáky různého věku. Na většině škol vede tato metoda k prohloubení spolupráce učitelů různých aprobací, k rozšíření kontaktů s partnerskými školami a k prohloubení mezinárodní spolupráce. Pokud jde o motivaci studentů a změnu jejich postojů k výuce, ukázaly dosavadní zkušenosti, že již 25 % výuky v cizím jazyce má pozitivní výsledky. CLIL představuje komplexní, pružné a intelektuálně podnětné, tedy *obohacené prostředí*, které umožňuje navodit přiměřenou úroveň duševní aktivity. [13]

Naves [7] uvádí ve prospěch integrace nejazykové výuky s cizím jazykem následující důvody:

- Integrace respektuje funkční využívání daného cizího jazyka. K nejefektivnějšímu osvojování dochází tehdy, je-li cílem komunikace ve smysluplných sociálních situacích.
- Čas strávený s cizím jazykem je až několikanásobně delší v porovnání s běžným jazykovým vyučováním. Učení je bezděčné, a tedy velmi efektivní, s dlouhodobými výsledky.
- Osvojování cizího jazyka jde ruku v ruce s kognitivním rozvojem žákovy osobnosti.

Práce je součástí řešení projektu GAČR 406/02/0809: Různé podoby jazyka a jejich vliv na formování poznávacích procesů.

Odborná literatura uvádí, že CLIL má své opodstatnění především v prostředí, které není samo o sobě dvojjazyčné. [5] Do českých škol se zavádění programu CLIL děje dvojím způsobem. Škola je zařazena do experimentální sítě škol řízených MŠMT ČR. Omezený počet studentů má tak příležitost studovat až šest předmětů v jednom z následujících cizích jazyků: němčina, francouzština, španělština, italština, angličtina. Na jiných školách rozhoduje o zařazení CLIL vedení školy v rámci volitelných předmětů. Naše zkušenosti ukazují, že zatímco studenti jsou vůči metodě CLIL otevření a vstřícní, řada pedagogů vyslovuje obavy a pochybnosti. [3] Podobné negativní postoje se objevily v počátcích zavádění CLIL do škol i v zahraničí (Holandsko), ale nejnovější statistky svědčí o vzrůstající popularitě metody. [6]

Nejčastější uváděné námitky proti metodě CLIL můžeme shrnout do otázky: Má bilingvismus pozitivní nebo negativní psycho-sociální vliv na rozvoj žákovy osobnosti? Paivio a Lambert [11, 4] rozlišují aditivní a subtraktivní bilingvismus. Také Cummins a Swain [1] uvádějí jak pozitivní, tak negativní asociace mezi bilingvismem a kognitivními funkcemi. Na jedné straně se zjistilo, že někteří bilingvní studenti mají handicap při verbálním subtestu inteligence, na druhé straně z lingvistických studií vyplývá, že „bilingvismus může podporovat analytickou orientaci ve vztahu k jazyku a zvyšuje metalingvistickou vnímavost žáků“.

2 Strategie učení

V rámci volitelného kurzu CLIL – Výuka matematiky v angličtině na Pedagogické fakultě univerzity Karlovy [8] probíhá pedagogická praxe studentů na bilingvních gymnáziích. Pořízená videodokumentace je podkladem pro rozbor hodiny i v následných seminářích. Při hodině, kterou jedna ze studentek vedla na Gymnáziu v Havlíčkové Brodě, jsme sledovali strategie učení, které žáci při tomto typu výuky nejvíce využívají. Třídu tvořily dvě skupiny studentů. Jejich výběr záležel na rozhodnutí učitelů matematiky a anglického jazyka. Proto jednu skupinu tvořili žáci, kteří vynikali v matematice, druhou ti, kteří vynikali v angličtině. Pro studenty i jejich profesory to bylo první seznámení s novou metodou CLIL. Pedagogický sbor předpokládal, že hodinu úspěšněji zvládnou dobří angličtináři. Praxe však ukázala opak. Daleko aktivněji reagovali studenti úspěšní v matematice, a to téměř nezávisle na jejich kompetencích v cizím jazyce. Není jisté, do jaké míry se na této skutečnosti podílel styl

výuky, kdy vyučující novou slovní zásobu zaváděla postupně, během výuky, tak jak studenti s novými výrazy přicházeli do styku. Odborná terminologie byla v průběhu celé hodiny k dispozici na samostatné části tabule. Domníváme se, že tento způsob výuky lépe umožnil sledovat, jaké strategie žáci volí s ohledem na dvojí cíl výuky: rozvoj matematického myšlení a rozvoj komunikativních dovedností v cizím jazyce.

Výběru strategií věnuje odborná literatura jen malou pozornost. [2] Práce publikované v posledních 20 letech strategie učení spíše definují a vysvětlují.

O' Malley a Chamot [9] uvádějí, že strategie učení jsou postupy, záměrné činnosti a přístupy, které žák využívá, aby si usnadnil učení. Aktivuje přitom informace jak z oblasti jazyka, tak i nejazykového předmětu.

V [12] se strategií učení rozumí „posloupnost činností při učení, promyšleně řazených tak, aby bylo možné dosáhnout učebního cíle. Pomocí ní žák rozhoduje, které dovednosti a v jakém pořadí použije."

Oxford [10] definuje strategie jako specifické aktivity, které žák volí, aby si proces učení zjednodušil, urychlil a zpříjemnil. Strategie jsou podle ní autonomní a žák je schopen aplikovat je i v nových situacích.

V typologii strategií převažuje rozdělení na strategie kognitivní, metakognitivní, sociální a afektivní. Mezi kognitivní strategie patří např. kontextualizace (*contextualisation*), využívání zdrojů (*resourcing*), zapracování nových informací do existující struktury znalostí (*elaboration*), transfer. Příkladem metakognitivních strategií je plánování, monitorování a management. Sociálními strategiemi rozumíme např. spolupráci žáků s učitelem nebo mezi sebou.

Vztahem kognitivních a komunikačních strategií se zabývá Ellis [2]. Kognitivní strategie pro využití cizího jazyka dělí na dvě skupiny: produktivní/receptivní procesy a strategie (tj. prostředky pro automatické využívání existujících zdrojů) a dále na komunikační strategie (tj. prostředky pro kompenzaci neúplných zdrojů).

Komunikační strategie mají odlišný význam pro žáky, kteří se cizí jazyk učí, než pro ty, kteří jím hovoří jako rodilí mluvčí. Teoreticky mají žáci v hodinách typu CLIL, např. při řešení matematické úlohy v cizím jazyce, možnost volit komunikační strategie dvojího druhu: strategie používané k tomu, aby se žák vyhnul problému (*reduction strategies*) a strategie pro úspěšné vyřešení úlohy (*achievement strategies*). Doufáme, že při vyučování jde především o druhý typ strategií.

3 Specifika pro CLIL

Zatímco kognitivní strategie v matematice jsou společné pro vyučování v mateřském jazyce i v cizím jazyce, při výuce formou CLIL se projevují rozdíly převážně v komunikačních strategiích. Další text ilustruje využívání kognitivních a komunikačních strategií na příkladu řešení slovních úloh.

Základem (školní) matematiky je řešení úloh. Slovní úlohy, ať je řešíme se žáky v mateřském jazyce nebo v cizím jazyce, vždy zahrnují tyto kognitivní strategie:

- **Kontextualizace:** zasazení „čistě matematické úlohy“ do kontextu, ať už z každodenního života, jiných vědeckých disciplín, ze světa fantazie, ale i z prostředí čistě matematického.
- **Využívání zdrojů:** Zadání je velmi flexibilní, od zadání obsahujících všechny údaje a s jediným správným řešením, po neřešitelné úlohy (aspoň na úrovni školské matematiky), mající více řešení, zadání s nadbytečnými údaji nebo naopak s některými údaji chybějícími. V případě slovních úloh jsou tak žáci nuceni rozhodovat, které údaje potřebují, v jakém pořadí je použijí, které údaje si musejí vyhledat ve vnějších zdrojích z oblasti kontextu úlohy.
- **Zapracování nových informací do existující struktury znalostí:** Slovní úlohy představují prostředí, v němž jsou předchozí zkušenosti propojovány s novými znalostmi a se zkušenostmi z mimomatematických oblastí. Použití předchozích úspěšných řešitelských strategií obvykle představuje návod k řešení analogických úloh se složitější strukturou.

Slovní ani jiné úlohy by nebylo možné řešit bez využití **metakognitivních strategií**. Identifikace ústředních informací, pochopení a vytváření podmínek, které pomáhají úspěšně vyřešit úlohu, verifikace a opravování chyb, jsou základními kroky v procesu řešení slovních úloh.

Použití spolupráce a mediace závisí na tom, jaká jsou konkrétní pravidla pro řešení úloh v řešitelském kolektivu. Zkušenosti ukazují, že čím větší je využití **sociálních strategií**, tím je větší šance na úspěšné vyřešení zadané slovní úlohy.

Schopnost úspěšně řešit slovní úlohy nelze oddělit od schopnosti číst text s porozuměním a od schopnosti sdělovat své myšlenky a výsledky ostatním. V tomto bodě je podstatné, v jakém jazyce výuka probíhá.

Z komunikačních strategií jsou pro úspěšné řešení úloh v cizím jazyce významné především tzv. **strategie kompenzační**. Mezi ně patří:

- Strategie založené na rozdílu mezi mateřským a cizím jazykem, např. přepínání mezi jazykovými kódy: (All of them see it under the ... zorný ... angle 30°. [*visual angle*]) nebo doslovný překlad (složený zlomek přeložen jako *compound fraction*, správný termín *complex fraction*).
- Strategie založené pouze na cizím jazyce, např. substituce: (*sphere* → *ball*), parafráze: (*A dice is a ...* →*like a square in space.*), novotvar: (*Fraction* → *One number on top of the other.*).
- Nejazykové strategie, např. využití symbolického/grafického vyjádření, gestikulace apod.
- Přímé a nepřímé kooperativní strategie – např. přímý dotaz na správný výraz nebo vysvětlení, anebo nepřímá žádost o pomoc – např. pauzou, pohledem, gestem.

4 Závěrečná poznámka

Úvahy o roli komunikačních strategií jsou nutně spekulativní povahy. Jedním z důvodů je skutečnost, že se výzkum může opírat jen o data založená na skutečných výrocích žáků při řešení úloh. Dostupné výsledky výzkumů nejsou konečné. Dají se shrnout spíše ve smyslu vlivu různých proměnných faktorů jako jsou např. vliv úrovně znalosti cizího jazyka, osobnost žáka, vliv prostředí, ve kterém se výuka odehrává, atd.

Literatura

[1] Cummins J., Swain M.: *Bilingualism in Education.* Longman, London 1986.

[2] Ellis R.: *Understanding Second Language Acquisition.* Oxford University Press, Oxford 1985.

[3] Hofmannová M., Novotná J.: *Attitudes Towards Teaching Mathematics In English in the Czech Republic.* In: 3rd *Mediterranean Conference on Mathematical Education.* Eds. Gagatsis A., Papastavridis S. Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society, Athens 2003, p. 371–375.

[4] Lambert W. E.: *Persistent Issues in Bilingualism.* In: *The Development of Second Language Proficiency.* Eds. Harley & al. CUP, Cambridge 1990, p. 201–218.

[5] Marsh D.: *Using languages to learn and learning to use languages.* Ed.: Marsh D., Langé G., University of Jyväskylä, Finland 2000.

[6] Musilová A.: *CLIL and Mathematics in the Netherlands.* Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha 2003.

[7] Naves T.: *What Are the Characteristics of Successful CLIL Programmes?* In: *TIE-CLIL Professional Development Course.* Ed.: Langé G. M.I.U.R., Milan 2002, p. 91–94.

[8] Novotná J., Hofmannová M.: *Nový vzdělávací přístup – CLIL. Integrace jazykové a odborné aprobace v pregraduální přípravě učitelů.* In: Sborník z Celostátního setkání kateder připravujících učitele matematiky, Chocerady, 24.–26. 9. 2001. Ed.: Kubínová M., Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha 2002, p. 59–63.

[9] O' Malley M., Chamot A. U.: *Learner Strategies in Second Language Acquisition.* Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[10] Oxford R. L.: *Language Learning Strategies: What Every Teacher Should Know.* Newbury House, 1990.

[11] Paivio A., Lambert W.: *Dual cosiny and bilingual memory.* In.: *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 34, 1981, p. 390–401.

[12] Průcha J., Walterová E., Mareš J.: *Pedagogický slovník.* Portál, Praha 1995.

[13] Wittmann E. Ch.: *Mathematics education as a „Design Science“. Educational Studies in Mathematics* 29, 1995, p. 355–374.

Tvorba a evaluace přijímací zkoušky z matematiky na FaME ve Zlíně

Jan Ostravský

Abstrakt

Příspěvek se zabývá tvorbou optimalizovaných ekvivalentních variant přijímacích testů z matematiky na FaME ve Zlíně. Popisuje se možnost využití standardizace testů ke stanovení kriterií pro přijetí ke studiu.

Problematika přijímacího řízení na vysoké školy je velmi složitý proces. Uvědomíme-li si, že v celé ČR chybí na VŠ zhruba 15 000 studijních míst z důvodů prostorových a lidských kapacit, musíme připustit, že přijímací řízení je na většinu VŠ v ČR nutné. Co rozumíme pod pojmem přijímací řízení na VŠ? Je to souhrn pravidel, způsobů a procedur jejichž prostřednictvím stanoví vláda a VŠ pravidla pro vstup na VŠ. Zejména VŠ by měly používat při přijímacím řízení takové postupy, aby korektnost přijímacího řízení byla co nejvyšší. Jak ale zajistit přijímací řízení, aby ti, od nichž se to očekává (studenti, učitelé, rodiče) respektovali výsledek zkoušky a takto koncipovanou zkoušku přijali za naprosto korektní? V tomto příspěvku popíši, jak je tvořena přijímací zkouška z matematiky na Fakultě managementu a ekonomiky (FaME) UTB ve Zlíně.

Každá zkouška by měla splňovat tato kritéria:
a) validitu, b) reliabilitu, c) objektivnost, d) praktičnost (úspornost), e) přijatelnost.

Uvedená kritéria vyžadují otevřenost a průhlednost s ohledem na obsah zkoušky a s ohledem k pravidlům určujících výsledek. Co vlastně přijímací zkouškou sledujeme? Měla by predikovat úspěšnost ve vysokoškolském studiu. Jaký nástroj k tomu použijeme? Nejvhodnější je tzv. **didaktický test**. P. Byčkovský definoval v [1] didaktický test jako nástroj systematického měření výsledků výuky. Didaktický test bývá doplněn

tzv. **testovými specifikacemi**. V roce 1998 jsem se zabýval především návrhem testové specifikace budoucího testu a jeho uvedením do praxe. Testová specifikace obsahuje tyto položky:
1) obsah testu, 2) druh testových úloh, 3) testovací čas, 4) počet testových úloh, 5) formu a počet variant testu, 6) způsob skórování, 7) stručný popis populace.

Zpočátku (1998) jsem se zaměřil pouze na **obsahovou validitu** testu, především z důvodu nepřipravenosti hardwarového (vhodný scaner s podavačem) a softwarového vybavení (vhodný program) pro počítačové vyhodnocování testů.

Obsahová validita testů byla vytvořena:

a) na základě konzultací s vedoucími oborových komisí matematiky na vybraných středních školách ve Zlíně. Uvedení pracovníci vytvořili specifikační tabulky upřesňující obsah probírané látky středoškolské matematiky na jejich škole. Navrhli svoji představu o skladbě úloh pro takovýto test.

b) na základě výsledků rozvojového projektu FRVŠ č. 1159/1998 „Přijímací zkouška z matematiky na ekonomických fakultách s ohledem na výuku na SŠ a potřeby VŠ“ řešeného pracovníky VŠE Praha pod vedením doc. RNDr. J. Henzlera, CSc..

Po provedení průniku specifikačních tabulek profesorů středních škol, mých představ o tom, co by měl umět student ze středoškolské matematiky, a výsledků projektu FRVŠ (viz výše) jsem zvolil „hrubý“ obsah přijímacího testu z matematiky na FaME UTB ve Zlíně. Tento obsah je uveden ve sbírce [3]. Dle Niemierkovy taxonomie výukových cílů jsem popsal v [3] podrobněji, jaké vědomosti a dovednosti jsou nutné k řešení testových úloh v uvedených kapitolách vytvořeného obsahu testu, a stanovil jsem bodové ohodnocení každé testové úlohy. Rozeberu nyní detailněji návrh testové specifikace mnou koncipovaných testů.

Druh testových úloh

- ovlivnilo použití výpočetní techniky pro skórování,
- testové úlohy objektivně skórovatelné,
- uzavřené testové úlohy s jedinou správnou odpovědí z pěti nabízených možností.

Počet testových úloh

- neexistuje žádné pravidlo určující minimální počet úloh zajišťující vysokou reliabilitu testu,
- dle navrženého obsahu jsme stanovili dvacet úloh jako optimální počet úloh.

Testovací čas

- 15 jednodušších úloh, čas pro řešení cca 2 minuty,
- 5 úloh obtížnějších, čas cca 6 minut,
- celkový čas 60 minut.

Formu a počet variant testů

- forma písemná,
- počet variant 6–8 (závisí na počtu přihlášených, prostorových možnostech, lidské kapacitě).

Popisy souborů testovaných

Porovnám-li soubory uchazečů o studium na FaME ve Zlíně z let 1999, 2001–2003 (rok 2000 jsem vynechal, neboť v tomto roce se nekonaly maturitní zkoušky na všech středních školách v České republice), mohu konstatovat, že poptávka po studiu na FaME se ustálila, jak je vidět z Tab. 1.

Tabulka 1

rok	přihlášeno	účast	muži	ženy	G	OA	OSŠ	SSŠ
1999	1 609	1 231	512	719	240	493	317	181
2001	1 639	1 255	423	828	273	571	263	126
2002	1 874	1 343	431	907	320	556	338	121
2003	1 682	1 174	335	811	341	434	269	103

G – studenti gymnázií,
OA – studenti obchodních akademií a všech středních škol ekonomického zaměření,
OSŠ – studenti ostatních středních škol (průmyslovky, integrované SŠ, učiliště atd.),
SSŠ – všechny typy soukromých středních škol, toto kritérium má nejvyšší prioritu.

Jak vyplývá z rozboru výsledků testů, lze za signifikantní znak z hlediska přijímací zkoušky z matematiky považovat i to, zda dotyčný uchazeč maturoval z matematiky a s jakým výsledkem. Ukazuje se, že i tento znak se příliš s rostoucími léty neměnil. Je to až překvapující, jak jsou všechny významné ukazatele (pohlaví, typ střední školy a maturita z matematiky) za poslední tři roky téměř shodné. Zřejmě je to dáno tím, že na FaME ve Zlíně se hlásí studenti ze Zlínského kraje, eventuelně z Moravskoslezského a Jihomoravského kraje. Protože v těchto krajích se prakticky nemění skladba středních škol a počet maturantů v posledních třech letech byl přibližně na stejné úrovni, vyplývá odtud i prakticky stejné složení studentů hlásících se ke studiu na FaME. Pro konstruktéra testu je to potěšující zjištění, protože skupiny testovaných jsou „skoro stejné“, a tudíž je možné vytvářet pro takové skupiny ekvivalentní standardizované testy, jak uvidíme v následujícím textu.

Má-li didaktický test plnit svoji základní funkci, tj. měřit, do jaké míry si jednotliví studenti osvojili učivo, měla by k tomu přispívat každá testová úloha. Proto jsem prováděl od roku 1999 položkovou analýzu každé testové úlohy:

Položková analýza obsahuje:

- **obtížnost úlohy**,
- **citlivost úlohy**,
- **diagnostický rozbor výsledků** (zvláště rozbor distraktorů – chybných odpovědí).

Vypočítal jsem koeficient obtížnosti a koeficient citlivosti každé úlohy. Index obtížnosti $P\,(0 \leq P \leq 100)$ testové úlohy je procento žáků ve skupině, kteří řešili úlohu správně. Je logické požadovat, aby každou testovou úlohu řešilo správně více „lepších“ než „horších“ studentů výsledného pořadí. Zda a jak dobře tento požadavek úloha plní, se vyjadřuje ukazatelem citlivosti úlohy $d\,(-1 \leq d \leq 1)$. Zvolil jsem nejjednodušší ukazatel citlivosti, tzv. koeficient ULI. Přesné definice a vztahy pro výpočet koeficientů obtížnosti a citlivosti jsou uvedeny v [2]. U každé podezřelé úlohy jsem provedl diagnostický rozbor nabízených distraktorů. Podezřelé a nevyhovující úlohy jsem z databanky úloh vyřadil. Tím jsem vytvořil databanku optimalizovaných testových úloh.

Výsledek testu je u každého jedince tvořen dvěma složkami:

- pevná složka (skutečné vědomosti nebo dovednosti),
- náhodná složka (okamžitá kondice, prostředí atd.).

Potlačíme-li vliv náhodné složky na minimum, říkáme, že test má vysokou reliabilitu. K zjištění reliabilty jednotlivých testových variant jsme použili známý Kuder-Richardsonův **koeficient reliability**. Je uveden např. ve [2]. Nabývá hodnoty 0 (naprostá nespolehlivost) až po hodnoty blízké 1 (pro případ dokonalé spolehlivosti).

Provedl jsem standardizaci svých testů. Smyslem standardizace je vytvoření testového standardu (testové normy), který umožní zařadit žáka podle dosaženého počtu bodů do určitého žebříčku (stupnice, škály). Ke každému dosaženému počtu bodů se přiřadí tzv. **percentilové pořadí**, které udává, kolik procent testovaných dosáhlo horšího výkonu.

Na FaME se používá pro přijímací řízení kombinace kompenzačního (kompenzace nedostatků v jednom předmětu) a konjunktivního modelu (dosažení minimální hranice) dvou prediktorů (test z matematiky a test z cizího jazyka). Vzhledem k tomu, že od roku 1999 známe obtížnost a citlivost každé testové úlohy, a vzhledem k tomu, že významné faktory (pohlaví, typ střední školy, maturita z matematiky), které by mohly ovlivnit průběh zkoušky, se u respondentů prakticky nemění, jsem schopen vytvořit téměř ekvivalentní varianty testů z matematiky pro přijímací řízení. V následující tabulce Tab. 2 je vidět, jak jsem tvořil varianty pro rok 2003 a jak to dopadlo.

Tabulka 2

2003 varianta	předpokládaná průměr. úspěšnost navrženého testu	předpokládaná průměr. citlivost navrženého testu	dosažená průměr. úspěšnost	dosažená průměr. citlivost
1	42,05	0,426	40,98	0.365
2	40,70	0,387	40,36	0,421
3	38,95	0,389	36,85	0,351
4	38,95	0,380	43,40	0,425
5	42,50	0,374	40,38	0,378
6	37,45	0,405	47,00	0,385

Detailním rozborem testovaných ve variantě 3 a 6 bych lehce vysvětlil rozdíl v dosažené průměrné úspěšnosti u těchto variant. Podívejme se na tabulku Tab. 3 uvádějící percentilové pořadí uchazečů. Podíváme-li se na výsledky přijímacího řízení za poslední 4 roky, vidíme, že průměrný výsledek ze všech testů se pohybuje okolo 20 bodů, tj. index obtížnosti

testu 40 %. Tedy **minimální hranice** pro úspěšně zvládnutí jednotlivých testů je stanovena na 20 bodů. Tato hranice je stanovena také s ohledem na to, že jí nedosáhne přibližně 50 % uchazečů, jak je vidět z Tab. 3, což byl požadavek vedení FaME, aby cca 50 % studentů u přijímací zkoušky neuspělo.

Chceme-li přijmout přibližně 20 % uchazečů, postačuje uchazeči získat z každého testu 30 bodů. Tedy celkem 60 bodů z obou testů (mat. + cizí jazyk) stačí jistě k přijetí a to je také **horní podmínka** (jistota) pro přijetí. Kdo ji splní, je určitě přijat.

Tuto hranici (30 bodů) potvrzuje i dosažený průměr přijatých studentů:

rok 2002 ..... 27,52 bodů,
rok 2003 ..... 31,37 bodů.

Z tabulky Tab. 3 vyplývá, že 20 % studentů této podmínky nedosahuje a tak pro přijetí v praxi stačí získat kolem 55 bodů. Bylo by tedy možné snížit horní hranici z 60 na 56 bodů.

Tabulka 3

2003 varianta	Počet bodů	Percentilové pořadí	Koeficinet reliability
1	20	53	
	30	81	0,994
2	20	53	
	28	81	0,997
3	20	65	
	24	81	0,980
4	20	51	
	30	80	0,991
5	20	53	
	30	80	0,985
6	20	40	
	32	78	0,992

Závěrem lze konstatovat, že počítačové zpracování testů umožňuje získat další zajímavé výsledky. Například zjišťujeme, že naše testy nezávisí na pohlaví uchazečů, že nejlepších výsledků dosahují samozřejmě

gymnazisté, jaké výsledky dosahují např. gymnazisté, kteří maturovali na výbornou z matematiky, jak zvládli různé kapitoly středoškolské matematiky studenti různých typů středních škol atd. Protože každá testová úloha představuje jistou kapitolu středoškolské látky, víme, jak tuto problematiku zvládly nejen různé skupiny uchazečů (pohlaví, typ střední školy, maturita z matematiky), ale i přijatí studenty. Výsledky přijímacího řízení lze proto využít i ve výuce matematiky v 1. a 2. ročníku. V 1. ročníku vyplňují studenti dotazník o svých subjektivních znalostech středoškolské matematiky. Je možné konstatovat, že jsou v těsné korelaci s mnou zjištěnými údaji.

Pochopitelně, že mne zajímaly názory studentů na přijímací řízení. A jak hodnotili přijatí studenti na FaME přijímací zkoušku z matematiky? Jedna z otázek mého dotazníku týkající se přijímacího řízení zní:

Celkově přijímací zkoušku z matematiky hodnotím jako (počty v %):

	a) velmi objektivní	b) drobné připomínky by se našly	c) neobjektivní
2002 (197 resp.)	36,1	58,1	5,8
2003 (175 resp.)	40,8	56,9	0

Literatura

[1] Byčkovský P.: *Základy měření výsledků výuky.* ČVUT, Praha 1983.

[2] Chráska M.: *Didaktické testy.* Paido, Brno 1999.

[3] Ostravský J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na FaME a FT ve Zlíně v letech 1999–2003.* Univerzita T. Bati ve Zlíně, Zlín 2003.

Kamínky a balvany

Karel Otruba

Motto:
„Bude-li každý z nás z křemene,
je celý národ z kvádrů!“
Jan Neruda

Mám trochu obavu, abych se příliš nezapletl do vysvětlování názvu a co nejdříve se dostal „in medias res“. Zase mě silně inspirovalo hlavní téma konference, tentokrát formulované velmi závažně. Budoucnost vyučování matematice v ČR... to je opravdu hozená rukavice... mimoděk se mi vybavil název mého příspěvku „Budeme mít dost příkladů na kuželosečky?“, který jsem postupně zkracoval až na „Budeme?“ [2]. Tenkrát jsem ještě spíše žertoval. Ale myslím, že už tehdy v Mariánských Lázních vyslovil bývalý ministr Petr Piťha obavu, aby to s postavením matematiky na střední škole nedopadlo přesně tak, jako s latinou. Říkalo se tomu myslím „Piťhova skepse“. A je zajímavé, že název tématu tohoto 9. setkání ve mně evokoval také spíš obavy, i když zvláště my starší jsme bývávali vedeni ke spojování slova „budoucnost...“ s představami výhradně optimistickými, že?! No, nějak to nezafungovalo... I když to slovo samo o sobě je zcela neutrální, tak přesto „...je obrostlé významy jako kámen mechem...“ [3]) a ptát se v současné době na budoucnost vyučování matematice v ČR, to opravdu vyvolává především smíšené pocity. Doporučuji každému, aby si přečetl velmi zdařilý a závažný text Petra Vopěnky „Smysl matematiky“ ve sborníku 8. Setkání učitelů matematiky v Prachaticích [4]. Ba dokonce spíše prosím (i s mírnou naléhavostí!) o studium a šíření toho článku. O mnohém informuje a ještě více naznačuje. Je v něm mimo jiné mnoho skrytých otázek, ale i mnoho odpovědí... Já jej studentům čtu.

V minulém školním roce jsem byl třídním oktávy a prožíval jsem s ní „maturitní nálady“ dost intenzivně, byla to první oktáva gymnázia, kde teď působím. A tak se mi při slově „Budoucnost...“ vybavil i Jan Neruda (skoro jako maturitní otázka!) a jeho „křemeny“ a „kvádry“. Tahle

myšlenka je v různých rovinách stále aktuální. A k tomu starost o zdárný průběh první maturity z matematiky. Snažil jsem se i nyní aplikovat své názory na maturitní zkoušku vůbec a z matematiky především, ty názory, které jsem i na „Setkáních“ často prezentoval a nabízel. Nebyla to třída studijně příliš silná. A stále se mi potvrzuje, že je lepší propracovávat a tříbit „kamínky“, než se pracně snažit prezentovat mnohdy jen kašírované „balvany“ gigantických příkladů. O tom jsem se ostatně již zmiňoval. Nevím, jak a zda vůbec Jan Neruda maturoval z matematiky, ale věřím, že si to myslel taky.

Chtěl bych v tomto příspěvku uvést příklad, zmiňovaný v jedné staré sbírce [5]. Nechali jsme se inspirovat. V předmaturitní přípravě jsme jej upravili a rozebrali tak, že na něm nezůstala „nit suchá“. Zkusím vám to předvést. Příklad (v doslovném znění): Rozměry rovnoběžnostěnu jsou kořeny rovnice $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, jejíž jeden kořen je dán $x_1 = 2$. Stanovte objem! (Upřímně řečeno – v této podobě mu moc nerozumím...) V té sbírce je to příklad řešený a na pouhých čtyřech řádcích je stručně proveden výpočet. Bylo mi to trochu líto, neboť z takového příkladu jde „vytáhnout“ daleko víc. Především jsme jej ještě trochu zjednodušili. Menší koeficienty budou vhodnější pro numerické manipulace a z rovnoběžnostěnu jsme pro jistotu udělali kvádr (!). Tím se naše možnosti rozšířily.

Příklad (upravené znění): Délky hran kvádru jsou kořeny rovnice $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

a) *Aniž rovnici řešíte, najděte jeho objem a povrch!*

Příklad na Viètovy vztahy. Nikdy jsem studentům netajil, že existují i pro rovnice vyšších stupňů. Připomenuli jsme jejich odvození, rozklad na kořenové činitele, normovaný tvar rovnice atd. a měli jsme jako na dlani objem 6 (jednotek objemových), povrch 22 (jednotek plošných).

b) *Všechny tři kořeny této rovnice jsou přirozená čísla, jeden z nich se dá snadno najít. Najděte všechny tři!*

Příležitost k opakování základních informací o algebraických rovnicích a jejich řešitelnosti. Snadno odhalitelný kořen $x_1 = 1$ potom odstartuje nasazení Hornerova schematu (nebo dělení dvojčlenem jinak provedené, ale počítání podle Hornerova schematu je u studentů velmi oblíbený proces!), na kvadratickou rovnici ze zdvořilosti jen zamáváme a jsou tu všechny tři kořeny: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. A jede se dál:

c) *Na základě znalostí o průběhu polynomických funkcí načrtněte graf funkce*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Studenti vědí, že graf polynomické funkce třetího (tedy lichého) stupně s kladným koeficientem u nejvyšší mocniny „přijde zleva zdola, možná se i zavlní a pak zmizí doprava nahoru“. Musí vědět, že tenhle graf se skutečně zavlní (třikrát protne osu x ale nedotkne se jí jako tečny, žádný kořen nemá totiž sudou násobnost), musí dále vědět, v jakém vztahu k našemu grafu je přímka $y = 11x - 6$ a na základě toho všeho se graf načrtne jaksi v prvním přiblížení. Ale: Co o něm ještě nevíme? Jak lze náčrt zpřesnit?

d) *Najděte tečny v průsečících grafu s osou x.*
A jsme v diferenciálním počtu. Úkol je snadný, jde o přímky

$$y = 2x - 2 \qquad y = 2x - 6 \qquad y = -x + 2.$$

e) *Najděte lokální extrémy této funkce a inflexní bod grafu.*
(Může ovšem předcházet dotaz:

ee) *Co můžete zatím odhadnout o lokálních extrémech této funkce, na kterých intervalech je očekáváte a kde asi je inflexní bod grafu?*
Studenti by totiž měli umět dokázat, že každá polynomická funkce třetího stupně musí mít inflexní bod (a žádná kvadratická funkce jej mít nemůže). Další rutinní úloha. Snadno vypočítáme, že v bodě $2-\sqrt{3}/3$ je lokální maximum, v bodě $2+\sqrt{3}/3$ je lokální minimum, inflexní bod grafu je $[2; 0]$. Ale teď se dostaneme (skoro nečekaně) do úplně jiné oblasti:

f) *Sestrojte euklidovskou konstrukcí v kartézské souřadné soustavě body, ve kterých jsou lokální extrémy.*
Tohle je reminiscence na „nižší gymnázium“ a příklady typu „Sestrojení úsečky dané délky“. Důležité je odhadnout optimální strategii konstrukce, začít v bodě 2 na ose x, sestrojit úsečku délky $\sqrt{3}$ tak, aby tam měla jeden krajní bod, potom ji šikovně rozdělit na třetiny a získanou délku přenést kružidlem nalevo i napravo od bodu 2. Může se také hovořit o racionálních a iracionálních číslech a jejich aproximacích desetinným rozvojem.

g) *Výpočet hodnot v bodech extrémů je numericky velmi nepohodlný, jde o druhé a třetí mocniny výrazů* $(2 \pm \sqrt{3}/3)$. *Jak lze tyto hodnoty extrémů zjistit daleko pohodlněji?*
Tady se musí asi napovědět. Mám na mysli posunutí grafu o 2 jednotky doleva tak, aby se inflexní bod přesunul do počátku souřadné soustavy. Tak se body extrémů „zbaví nepříjemné dvojky“ a přesunou se do bodů $\pm\sqrt{3}/3$. S těmito hodnotami se pak počítá daleko snadněji, hodnoty extrémů jsou $\pm 2\sqrt{3}/9$. Otázka transformace grafu funkce posunutím vede na výpočet

$$g(x) = f(x+2) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 11(x+2) - 6 = x^3 - x.$$

Touto transformací se ovšem posunou i nulové body funkce do bodů -1, 0, 1 (což je evidentní) a bylo by možno najít funkci

$$h(x) = (x+1) \cdot (x-0) \cdot (x-1) = x^3 - x$$

tímto rychlým způsobem (opakování vzorce „rozdíl čtverců“). Jenže není na první pohled jasné, jestli hodnoty extrémů funkce h jsou stejné jako u funkce f. Na tohle všechno by mohli a měli studenti přijít sami, ovšem vedeni cílenými otázkami.

h) *Ukažte, že graf funkce f (nebo funkce h) je středově souměrný podle svého inflexního bodu.*
Tady lze dobře připomenout kvantifikované výroky a jejich negace. Problém by měl být nejprve přesně formulován, třeba takto:

hh) *Ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:*
1. $2 + x \in D_f$, *potom i* $2 - x \in D_f$,
2. $f(2+x) = -f(2-x)$.

První bod je u naší funkce triviální, neboť $D_f = R$, ale je dobré jej připomenout i zde, rád se totiž (v pozměněné podobě) vytrácí u definice funkce sudé, liché či periodické. Ostatně funkce g je očividně lichá. Další postup je už jenom dosazení do funkčního předpisu a výpočet. Integrální počet se přímo nabízí:

i) *Vypočítejte velikost (konečné) plochy omezené křivkou grafu a osou x.*
Je možno počítat tuto plochu opět pro funkci g, navíc díky symetricitě

vzhledem k inflexnímu bodu lze vzít integrační meze pouze pro jednu „půlvlnu“ (zvláště pro tu „kladnou“) a připomenout, jak bychom snadno dostali nulu nebo záporné číslo pro nevhodně zvolené meze. Výsledek je myslím 1/2, pro jednu půlvlnu 1/4. A je čas přistoupit ke geometrii, pro začátek třeba k analytické.

j) *Umístěte kvádr vhodným způsobem do kartézského souřadného systému. Určete pak rovnice hran, úhlopříček, stěn, odchylky význačných přímek, rovin, délky význačných úseček...* a tak dále. Opět jednoduché. Kuželosečky? Prosím:

k) *Najděte excentricity elipsy, vepsané do některé ze stěn kvádru tak, že její osy jsou rovnoběžné se stranami příslušného obdélníka.*
Při vhodném zavedení souřadnic se dá napsat i rovnice této elipsy. Dále lze šikovně „vepisovat“ i paraboly a hyperboly. Nezapomínáme ani na kuželosečky singulární (starším českým názvem „zvrhlé“) a povšimneme si různoběžek, které představují třeba stěnové úhlopříčky, nebo rovnoběžek hran...

l) *Sestrojte řezy tohoto kvádru různými rovinami.*
Při těchto úlohách tělesa a řezy nejen rýsujeme, ale zkoušíme i modelovat v prostoru pomocí špejlí, plastelíny, nití a skřipců do vlasů v podobě motýlů, kteří jako usedají na přímky-špejle a představují tak zadané body. Zajímavé je i další pokračování, náhodou opět inspirované sbírkou [5].

m) *(Některou) hranou kvádru veďte rovinný řez tak, aby objemy obou vzniklých částí byly v předem daném poměru (např. $m : n$).*
Tato úloha nás opět trochu vrátí do planimetrie, ale je zároveň vhodným přechodem k dalším úlohám stereometrickým. Můžeme počítat povrchy a objemy těles, která vzniknou ořezáním hranolu jednou či více rovinami. Někdy tak dostaneme úlohy ne zrovna triviální. Upozorňuji zde ovšem na jednu zajímavost: Označíme-li vrcholy kvádru běžným způsobem A, B, C, D (spodní podstava) E, F, G, H (vrchní podstava) a necháme-li spočítat objem jehlanu $ABDK$, kde K leží třeba v polovině některé svislé hrany, máme sice úlohu snadnou, ale studentům činí většinou nečekané obtíže. Překvapilo mě to. Snaží se většinou původní kvádr (nebo krychli) nějak rozložit či vlastně poskládat se stejných útvarů, jejichž objem máme počítat a celkový objem pak vydělit jejich počtem.

V těchto úvahách udělají skoro na sto procent chybu, už proto, že tyhle představy v prostoru jsou obtížné. Zkrátka vzorec pro objem „špičatých těles“ (třetina součinu základny a výšky) se stále nějak nevžil. Výsledek studenty většinou velmi překvapí. Někteří mu dokonce nevěří a „argumentují“ svými nesprávnými představami o rozkladu tělesa.

Jistě by se dalo najít ještě mnoho dalších „kamínků“, na které bychom mohli rozebrat ten zprvu krátký příklad. Především je možné zadat za domácí procvičení zopakovat si tohle všechno s původní rovnicí ve sbírce [5]. A dá se v tomto duchu zacházet i s mnoha příklady dalšími. Mou stálou snahou je ukázat studentům, že bezpečné zvládnutí drobných, základních příkladů je klíčem k příkladům rozsáhlejším, kterým se pak už ani nehodí říkat „složité“, ale spíše „složené“.

A k otázce o budoucnosti vyučování matematiky v našem státě znovu výrazně připomínám ono Nerudovo „Bude-li každý z nás z křemene...“

Literatura

[1] Neruda J.: *Písně kosmické.* (zpěv 26.), Praha 1878.

[2] *Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech stupňu a typů škol.* JČMF, Praha 1998.

[3] Čapek K: *V zajetí slov.* Svoboda, Praha 1969.

[4] *Sborník 8. setkání učitelů matematiky všech stupňu a typů škol.* JČMF, Praha 2002.

[5] Maška O.: *Matematika v úlohách I.* 7. vydání, B&N, Brno 1948.

Matematika čtená u počítače

Karel Pecka

Abstrakt

Příspěvek je věnován možným souvislostem gymnaziální matematiky a výpočetní techniky. Spolu s těmito souvislostmi sleduje i vztah „Informatiky a výpočetní techniky“ (dále jen IVT) k „Informačním a komunikačním technologiím“ (dále jen ICT). Snaží se v principu navrhnout, jak je možno nejlépe prospět pochopení matematiky i prostřednictvím výpočetní techniky.

Úvod

Úvod začněme otázkami:

1. Jsou v současné gymnaziální praxi dostatečně vnímány vazby a souvislosti mezi matematikou a výpočetní technikou? Pravděpodobná odpověď zní ne.
2. Je tomu tak dobře či ne? Pravděpodobná odpověď zní ano či ne.
3. Jak spolu souvisejí minulá i současná IVT se současnými a budoucími ICT a jaký je vztah IVT a ICT k výuce matematiky? Pravděpodobné odpovědi budou velmi různorodé a rozporné. Pokusme se vyjádřit názor, s kterým není nutno souhlasit, ale o kterém je užitečné diskutovat.

Matematika a výpočetní technika na gymnáziu

Vzpomínám si na dobu, kdy se na jedné katedře matematiky objevil první osmibitový počítač, pracující v jazyku BASIC. Po prvním zvědavém okukování se osazenstvo katedry rychle rozpadlo na dva ostře vyhraněné tábory – na tábor nadšenců a na tábor odpůrců. Tábor nadšenců byl poměrně homogenní a jeho členové později počítačům ve větší či menší míře „propadli“. Tábor odpůrců již zdaleka tak homogenní nebyl, protože osciloval mezi spíše pohodlnickým názorem „já se to na stará

kolena učit nebudu“ a principiálním postojem „programování je pouhá rutina, nic tvůrčího, to není nic pro matematika“.

Podíváme-li se na dnešní výuku matematiky i informatiky a výpočetní techniky na gymnáziích, zdá se, že oba jmenované tábory existují stále. Nutně se tím otvírá otázka, zda různé postoje jsou dány oním pohodlnictvím, nebo zda jde o principiální a snad i správný postoj. Související otázkou pak je, co na tom mění přechod od IVT k ICT.

IVT versus ICT

Zkratka IVT vyjadřuje současný vyučovací předmět „Informatika a výpočetní technika“. Podle platných učebních osnov zde o informatiku moc nejde. Výpočetní technikou je pak tento předmět v tom smyslu, že se pracuje s počítači, nikoliv v tom smyslu, že se skutečně něco počítá. Stále více se tato oblast ve školské praxi podobá ICT.

Zkratka ICT vyjadřuje budoucí vzdělávací oblast „Informačních a komunikačních technologií“. Zkratka sama mi připadá poněkud úsměvná – něco ve stylu „skleněná sklenička“ nebo „servisní služba“. Jestliže za přívlastkem „informační“ vidíme informatiku, což bychom snad měli, pak není dobré zapomenout, že v definici informatiky je už implicitně obsažen onen „komunikační“ aspekt. V informační gramotnosti má prioritu internet, elektronická pošta a uživatelské programy kancelářského typu, případně prezentační programy nebo základy HTML. Otázka zní, zda to není v podmínkách gymnázia poněkud málo. Počítače přece vznikly primárně opravdu kvůli výpočtům, ať už šlo o atomovou bombu či o let na Měsíc. I dnes počítače především počítají, v našich školách to ale moc vidět není.

Rámcové vzdělávací plány gymnaziálního vzdělávání (RVP GV)

RVP GV mění matematiku na širší oblast „Matematika a její aplikace“, což je jistě chvályhodné, i když možná pro „čisté“ matematiky bolestné. IVT mizí a nastupují ICT. Posuzováno pouze podle zkratky či názvu, neubráníme se pocitu, že jde o zúžení tematiky. Naštěstí to tak není a i ICT obsahuje podoblast „Algoritmizace a programování“. Přes výrazně rozporné názory pedagogické veřejnosti na RVP GV se snažím v nich vidět spíše ruku podanou k volnosti a tvořivosti.

Podíváme-li se však podrobněji na vymezení obsahu obou jmenovaných oblastí, je vidět, že v matematice se zde příliš s využitím výpočetní techniky nepočítá (nanejvýš se zmiňují kalkulátory). Oblast ICT s vazbou na matematiku také příliš nepočítá, ale nic nebrání uplatnění této vazby ve zmíněné podoblasti „Algoritmizace a programování“.

M = MT + PST

Prof. Dr. Bernhard Kutzler (Univerzita Linec) přednesl „vzorec“, uvedený v nadpise, na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“ – tato konference se konala ve dnech 6.–8. listopadu 2003. Jejími pořadateli byly Katedra matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské university v Českých Budějovicích a Matematická pedagogická sekce Jednoty českých matematiků a fyziků.

Vystoupení Prof. Kutzlera bylo předneseno v angličtině, proto zmiňovaný vzorec vyjadřuje anglické zkratky:
M = mathematics = matematika
MT = mental training = duševní cvičení
PST = problem solving training = cvičení řešení problémů

MT a PST vyjadřují dvě stránky školské matematiky, které si obě zaslouží rovnocennou pozornost. Kdybychom měli stručně popsat ducha citované konference, šlo na ní z podstatné části o PST s následným využitím počítačů. Stručně řečeno to znamená, že řešíme-li matematický či fyzikální problém, jehož řešení vede třeba k soustavě rovnic či k integrálu, není nutné zdržovat se numerickou „otročinou“. Daleko vhodnější je pak k získání numerického výsledku využít programy typu DERIVE, MATHEMATICA, MATLAB, v geometrii pak CABRI a jim podobné. Matematické programy tohoto typu neřeší jenom numerické operace, ale jsou schopny i úpravy výrazů, což je jistě také užitečné.

Matematika má i svou druhou stránku, vyjádřenou zkratkou MT. Zde jde o to, aby byla matematika pochopena ve své podstatě. A právě zde lze spatřovat nevyužitou nebo jen málo využívanou možnost přiměřeného propojení programování počítačů se zájmem pochopit podstatu matematiky.

Programování počítačů – ano či ne?

Spor o to, zda je účelné učit se na gymnáziu základy programování ve vyšším programovacím jazyku, je někdy pouze sporem souvisejícím s ne-

dorozuměním, co je a co není programování. Programování počítačů je nepochybně tvorbou programů pro počítač. Chápeme-li program pro počítač jako algoritmus, zapsaný v programovacím jazyku, není se v zásadě o co přít. Problém je pak jen v tom, že každý si pod slovem „program“ představuje něco úplně jiného. Jistě nebudeme na gymnáziu usilovat o výchovu profesionálních programátorů. Programování však nepochybně rozvíjí přinejmenším smysl pro přesnost, systematičnost a přísně logické uvažování a fungující či nefungující program je pak prověrkou funkčnosti algoritmu. S výjimkou triviálních situací nejde pouze o rutinní překlad, ale spíše o to, co by literární teoretik nazval „umělecký překlad“ či v poezii „přebásnění“. Programování má však ještě jednu na školách opomíjenou stránku: může přispět k hlubšímu a přesnějšímu pochopení matematických pojmů. A právě to je ona „matematika čtená u počítače“ z nadpisu tohoto příspěvku.

Matematika čtená u počítače

V této chvíli mám na mysli zejména takového studenta gymnázia, který svou budoucnost spojuje s matematicko-fyzikálními či technickými vědami. V jeho zájmu je, aby na střední škole nahlédl v matematice za obzor maturity, aby aspoň v prvních semestrech vysoké školy slyšel něco podruhé a nikoliv poprvé.

Velmi nadějnou oblastí je v tomto smyslu studium základů matematické analýzy. Sledujme pojem derivace funkce. Geometrickou interpretací derivace v bodě x je tečna grafu funkce v tomto bodě. Hodnota derivace v bodě x leží někde „mezi“ hodnotami směrnic sečny vlevo a sečny vpravo od bodu x – přijměme jejich aritmetický průměr za dobrou hodnotu derivace. Přesnost výpočtu pochopitelně závisí na hodnotě diference $\mathrm{d}x$, která vytváří sledované trojice $x - \mathrm{d}x$, x, $x + \mathrm{d}x$ a $f(x - \mathrm{d}x)$, $f(x)$, $f(x+\mathrm{d}x)$. Slovo „derivace“ je v komentářích procedury nadsázkou, jejíž stupeň závisí na velikosti $\mathrm{d}x$.

Následující ukázka je jednou z procedur širšího programu, provádějícího analýzu funkcí. Program byl odladěn v programu Borland Pascal 7.0. Konstanta `dx` je deklarována před uvedenou procedurou v rámci globálních deklarací. Výraz Tree je odkazem na vyhodnocovací strom, který umožňuje zadat funkci jejím předpisem přímo z klávesnice. Pascal byl zvolen jako „klasický“ a dostupný studijní vyšší programovací jazyk, totéž lze provést v jiném jazyce. Studenti nedostanou žádnou ukázku ho-

tovou, ale postupně ji tvoří tak, že analyzují pojmy, jmenované v předchozím odstavci. Analýza pojmů s cílem vytvořit program je tím, v čem výpočetní technika pomáhá pochopení matematických pojmů.

```
procedure derivace(x:real;var DER:real);
{vypocet derivace DER v bode x}
var             {deklarace lokalnich promennych}
  xl,xp:real;     {leva a prava hodnota x, tj. x−dx a x+dx}
  yl,y,yp:real;   {leva,stredni a prava hodnota y=f(x)}
  DL,DP:real;     {leva a prava derivace}
begin           {zacatek vlastní procedury}
  xl:=x−dx;       {leva hodnota x}
  xp:=x+dx;       {prava hodnota x}
  yl:=Funkce(xl, Tree);  {hodnota fce pro xl=x−dx}
  y:=Funkce (x,Tree);    {hodnota fce pro x}
  yp:=Funkce(xp,Tree);   {hodnota fce pro xp=x+dx}
  DL:=(y−yl)/dx; {leva derivace}
  DP:=(yp−y)/dx; {prava derivace}
  DER:=(DL+DP)/2;{derivace jako aritmeticky prumer DL a DP}
end;            {konec procedury}
```

Závěr

Ukázka jedné z procedur programu plní skutečně jen ilustrativní funkci. Obdobně lze sledovat například určení bodů nespojitosti či inflexních bodů. Zajímavý je program (nebo procedura širšího programu) na výpočet určitého integrálu. Student se musí vrátit od určení primitivní funkce a dosazování integračních mezí do ní zpět k definici určitého integrálu. Ve skutečné práci se studenty se pak předpokládá postupné vytváření programů dokonalejších. Student tvoří nejprve „holý“ program bez pokynů, větvení, barev, grafické úpravy. Analyzuje možnost rozčlenění složitějšího problému do dílčích procedur, přenos parametrů mezi procedurami a další souvislosti – přitom bezděčně znovu studuje matematiku, tentokrát „čtenou u počítače“.

Rozsah příspěvku nedává prostor ani k hlubšímu teoretickému rozboru ani k ilustraci více různorodými ukázkami. Přesto je snad zřejmé, že jeho smyslem je připomenout, že programování výpočtů vede k hlubšímu pochopení podstaty matematických pojmů. Proto je účelné u počítačů

také opravdu počítat a to nejen ve smyslu „problem solving training“ (PST) s profesionálními programy, ale také ve smyslu „mental training“ (MT) programováním matematické tematiky ve vyšším programovacím jazyku. Aby totiž program fungoval, musí se student nad pojmy a vztahy zamyslet opravdu přesně.

Pokud tento příspěvek vyvolá zamyšlení nad smyslem MT a PST pro studium matematiky, splnil svůj úkol.

Literatura

[1] Černý P.: *Odmaturuj z matematiky 2. Základy diferenciálního a integrálního počtu.* Didaktis, Brno 2004.

[2] Hrubý D., Kubát J.: *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, Praha 1997.

[3] Kvoch M.: *Programování v Turbo Pascalu 7.0.* Kopp, České Budějovice 2002.

[4] Pecka K.: *Matematická analýza u počítače.* In: *Department of Mathematics Report Series*, Volume 11, Pedagogical Faculty, University of South Bohemia, České Budějovice 2003.

[5] Vinš T.: *Turbo Pascal 5.0.* ČVUT, Praha 1990.

[6] Vošický Z.: *Matematika v kostce pro střední školy.* Fragment, Havlíčkův Brod 1996.

Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh?

Alena Pelantová, Jarmila Novotná

1 Úvod

Znalost v matematice není jen naučení se definicím a větám tak, abychom rozeznali, kdy je máme použít. „Dělat matematiku“ zahrnuje řešit úlohy. Řešení úloh je pouze jednou částí práce; formulování dobrých otázek je stejně důležité jako nalézání odpovědí na ně. [1] Pro každou úlohu existují znalosti, které ji umožňují vyřešit. Ne všechny má však žák, který problém řeší, k dispozici. Žákovo **učení** můžeme charakterizovat jako **rozšiřování repertoáru prostředků, které má žák k dispozici, využíváním dalších položek z repertoáru znalostí**. [6] Úkolem učitele je vytvoření vhodného prostředí pro žáky, v němž k takovému rozšiřování dojde.

2 Didaktické situace[1]

Podmínky pro konkrétní použití nějaké matematické znalosti tvoří systém, který budeme nazývat „situací“. *Situace* je soubor okolností, v nichž se nachází nějaká osoba, a vztahů, které ji spojují s jejím okolím. V didaktické situaci vystupují *aktér* (ten, kdo něco koná), *prostředí* (vše, co působí na žáka, a vše, na co žák působí), *pravidla*, *omezení*, ...

Didaktická situace je situace, při níž aktér (učitel) organizuje plán činností s cílem modifikovat u jiného aktéra (žáka) stávající znalost nebo umožnit vznik znalosti nové. *A-didaktická situace* je didaktická situace oproštěná od přímých didaktických zásahů; jejím cílem je umožnit žákovi

Práce je součástí řešení projektu GAČR 406/02/0829: Matematické vzdělávání orientované na žáka.

[1] Zpracováno podle [1, 2, 3]

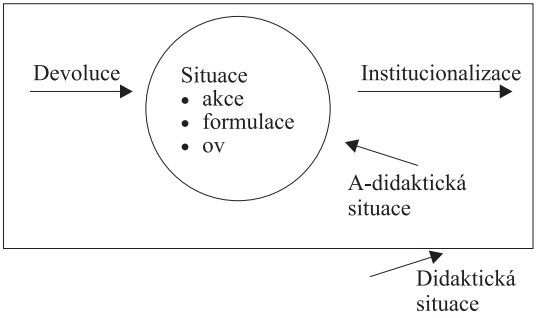
rozvíjet své znalosti samostatně. Tyto znalosti jsou pak učitelem dále využívány/rozvíjeny. Každá didaktická situace zahrnuje aspoň jednu situaci a-didaktickou.

Teorie didaktických situací rozlišuje situace podle jejich struktury. V dalším výkladu budeme pracovat s těmito typy:

- situace akce (aktér se rozhoduje a jedná podle pravidel prostředí, není důležité, zda umí explicitně vysvětlit potřebné znalosti),
- situace formulování (aktéři explicitně formulují implicitní poznatky v lingvistickém systému srozumitelném pro další účastníky situace),
- situace ověřování (aktéři explicitně prokazují oprávněnost charakteristické znalosti situace).

V každém z těchto typů situací probíhá učení se jinak.

Didaktická situace je schematicky znázorněna na obr. 1.



Obr. 1

Devolucí rozumíme proces, při kterém učitel v didaktické situaci předává část svých pravomocí žákovi; žákova činnost je tak řízena pouze prostředím a jeho znalostmi, nikoli didaktickou činností učitele. Žák se stává zodpovědným za získání požadovaných výsledků.

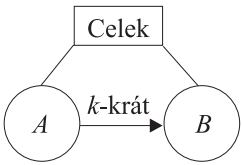
Institucionalizací rozumíme přechod žákovy znalosti z role prostředku pro řešení jedné určité situace do nové role reference pro individuální nebo kolektivní použití v situacích dalších. Institucionalizace může nastat i v situaci spontánního učení. Ve většině případů je však svázána s didaktickými procesy řízenými učitelem.

3 Příprava, realizace a zhodnocení dvou didaktických situací pro řešení slovních úloh

Slovní úlohy o dělení celku na nestejné části jsou obvykle v matematice zařazovány jako úlohy na procvičování sestavování a řešení lineárních rovnic, případně jejich soustav. Řešení úloh při tradičním vyučování matematice se opírá o aplikování algoritmů, které jsou žákovi předloženy (obvykle učitelem) a jejichž použití pak žák na analogických úlohách procvičuje (sám nebo ve skupině).

V článku jsou představeny dvě didaktické situace pro řešení úloh o dělení celku na nestejné části. Jsou určeny pro řešení těchto úloh před probráním algebry. V obou je žákům dána možnost samostatného objevování strategií řešení. Při experimentech jsme sledovaly nejen, jaké řešitelské strategie žáci použijí, ale také argumentaci při zdůvodňování správnosti použitých strategií, závislost použité strategie na kontextu slovní úlohy a schopnost žáků modifikovat použité strategie na úlohy s jinými typy relací mezi částmi, zobecňovat je pro úlohy s jiným počtem částí a stabilnost získaných znalostí.

Základní úlohou pro didaktické situace byla slovní úloha o dělení celku na dvě nestejné části, v níž jsou vztahy mezi částmi multiplikativní ($B = k \cdot A$) a je znám celek. Schematicky je struktura použitých úloh znázorněna na obr. 2.



Obr. 2

Matematická úloha byla zasazena do různých kontextů: dělení peněžního obnosu mezi dva lidi, ukládání kuliček do dvou krabic, rozlití vody do dvou nádob, rozdělení dětí do dvou bazénů na koupališti, počet kilometrů ujetých na kole ve dvou dnech na výletě.

Přenos nalezené strategie pro jiné typy situací byl sledován na úlohách ze stejných kontextů, ale vztahy mezi částmi byly aditivní ($B = k + A$). Pro zobecnění použité strategie byly použity úlohy s multipli-

kativními vztahy mezi třemi a čtyřmi částmi, v nichž byly vztahy mezi částmi vždy vázány na nejmenší část.

Pro použité úlohy existuje několik řešitelských strategií. V [5] jsou podrobně popsány pro případ dělení celku na tři části. Omezme se pouze na aritmetické strategie.[2] V dalším textu uvádíme stručný popis navržených situací. U každé uvádíme její didaktický cíl, stručný scénář a první zkušenosti z jejího použití. Zatímco scénář A je připraven s hlavním cílem sledovat řešitelské strategie, které žáci odhalí, scénář B je navržen tak, aby žáky vedl k použití strategií systematické vyčerpávání/aproximace nebo „falešná položka“.

3.1 Scénář A – samostatné nacházení řešitelských strategií

Celá výuková sekvence je rozdělena do čtyř etap, které popíšeme pouze stručně: V 1. etapě se žáci rozdělí do skupin. Každá skupina dostane zadání jedné úlohy a úlohu společně vyřeší. (*Situace akce.*) (Poznámka: Protože nelze zajistit, že všechny skupiny budou řešit úlohu stejně rychle, jsou připraveny další úlohy pro ty, kteří zadanou úlohu vyřeší rychleji.) Ve 2. etapě jednotlivé skupiny seznámí ostatní se svými řešitelskými strategiemi (*situace formulace*). Ve 3. etapě řeší skupiny úlohu na dělení celku na tři, případně čtyři části (*institucionalizace*). 4. etapa probíhá s časovým odstupem. Žáci řeší podobné úlohy formou testu. Cílem poslední etapy je ověření stabilnosti získaných znalostí a dovedností.[3]

3.2 Scénář B – odhalení strategie aproximace a falešné položky

Scénář má dvě varianty. Varianta APROXIMACE je připravena tak, aby podpořila nalezení strategie aproximace, varianta POLOZKA podporuje odhalení strategie falešná položka. V obou variantách zapisují mezivýsledky do tabulky, kterou dostanou připravenou. Tabulka může mít nadepsaná záhlaví.

[2] Očekávané aritmetické strategie: pokus – omyl, systematické vyčerpávání, aproximace, počet „jednotkových“ dílů, „falešná položka“ (zvětším-li jednu část o 1, změní se druhá část o p a celek o $p+1$; protože celek se má rovnat C, musím za základní část vzít $C:(p+1)$).

[3] Stabilita získaných znalostí a dovedností bude sledována formou písemných testů zadávaných s časovým odstupem. O výsledcích tohoto pozorování budeme informovat při našem vystoupení na konferenci.

Pomůcky:
APROXIMACE: Tabulka na záznam průběhu řešení má tři sloupce (dvě části, celek). Řešitelé volí předpokládanou velikost jedné části, druhou část a celek dopočítají. Pokračují tak dlouho, až odhalí řešení. Všechny kroky zapisují do tabulky.
POLOZKA: Tabulka na záznam průběhu řešení má šest sloupců (kromě dvou částí a celku je vždy ještě zaznamenáváno zvětšení/zmenšení). Na začátku řešitelé volí předpokládanou velikost jedné části, druhou část a celek dopočítají. V dalších krocích volí číslo, které chtějí k velikosti jedné části přičíst a se součtem pracují jako s novou velikostí části. Pokračují tak dlouho, až odhalí řešení. Všechny kroky zapisují do tabulky. Šest sloupců je v tabulce uvedeno proto, aby žáci zaznamenávali i přičítané/odečítané hodnoty.

Výuková sekvence B je také rozdělena do čtyř etap: V 1. etapě se žáci rozdělí do skupin. Každá skupina dostane pět zadání (používáme stejná zadání jako v 3.1, aby bylo možno porovnávat výsledky obou scénářů) a úlohy společně vyřeší. Mezivýsledky zapisují do tabulky. (*Situace akce.*) (Poznámka: Protože nelze zajistit, že všechny skupiny budou řešit úlohu stejně rychle, jsou připraveny další úlohy pro ty, kteří zadanou úlohu vyřeší rychleji.) Další etapy probíhají stejně jako v 3.1.

4 První zkušenosti z použití navržených didaktických situací

Obě didaktické situace byly realizovány v půlené hodině matematiky v 6. ročníku základní školy ve třídě, která není specializovaná. Jedna polovina třídy postupovala podle scénáře A, druhá podle scénáře B.[4] Na celou výukovou sekvenci byla vyhrazena jedna vyučovací hodina. Třída, v níž byl experiment realizován, je vyučována matematice tradičním způsobem, při matematice se před experimentem s konstruktivistickými přístupy k vyučování matematice. Jedná se však o žáky zvídavé, zvyklé řešit úlohy aktivně a s poměrně velkým nasazením. Žáci pracovali ve dvou a tříčlenných skupinách. Do skupin byli rozděleni experimentátory s přihlédnutím k jejich výsledkům v matematice (podle informací vyučující matematiky v této třídě). Skupiny byly sestaveny tak, aby v každé byli

[4] Průběh obou vyučovacích hodin byl zaznamenáván videokamerou a je k dispozici pro další analýzy.

jak žáci výborní v matematice, tak i žáci slabší. Úlohy o dělení celku na nestejné části představovaly pro žáky novou látku.

Nevyplnila se obava, že by „přikázané“ rozdělení do skupin, případně neobvyklost práce ve skupinách mohly u některých žáků vyvolat zápornou reakci, případně neochotu zapojit se do aktivity. Ve všech skupinách probíhala bohatá diskuse.

Shrnutí zkušeností ze situace se scénářem A

Z pěti skupin byla ve třech skupinách nalezena úspěšná strategie (nezávisle na kontextu to byla ve všech případech strategie „počet jednotkových dílů“), ve dvou byl postup chybný (rozdělení celku na dva stejné díly, pak neúspěšná snaha o úpravy vedoucí ke správnému řešení). O jiné strategie se žáci nepokusili.

Po nalezení strategie žáci ve skupinách rychle řešili stejným postupem i další úlohy se stejnou strukturou. Kontext úloh ani velikost čísel v zadání se v diskusi neprojevili jako důležité. U úloh s aditivní strukturou měli žáci obtíže s modifikací jejich strategií pro novou matematickou situaci. Přechod k úlohám s aditivními vztahy zvládla správně v daném čase pouze jedna skupina, a to ta, která jako první našla úspěšnou strategii. K navržení úspěšné strategie použili na začátku grafické znázornění, pro další úlohy však už náčrt nedělali. Použili strategii „odečtu rozdíl ve velikostech částí od celku, zbytek rozdělím stejným dílem“.

Mimořádně úspěšné bylo formulování řešitelských strategií představiteli jednotlivých skupin. Žáci ze skupin, kde nebyla nalezena úspěšná strategie, se aktivně zapojili do diskuse a také představili „svou“ strategii. Při diskusi s ostatními odhalili důvody, proč jejich postup nevedl k nalezení správného výsledku.

Při zobecnění strategie na úlohy s multiplikativními vztahy a více částmi byla úspěšná stejná skupina jako v předchozím bodu, také vysvětlení správnosti postupu bylo velmi jisté a srozumitelné.

Shrnutí zkušeností ze situace se scénářem B

Žáci odmítli pracovat s rozdanými tabulkami. Vysvětlujeme si to tím, že na využití tabulek při řešení úloh nejsou zvyklí. Nesplnilo se naše očekávání, že žáci pomocí tabulek odhalí strategii aproximace nebo „falešné položky“. Ukázalo se, že pro práci v prostředí, které je pro žáky netradiční, je nutno žáky připravovat delší dobu. Naopak, nezvyklá pomůcka zpomalila a tím i prodloužila první fázi – situaci akce. Teprve když byli

žáci ubezpečeni, že mohou pracovat způsobem, který si sami zvolí, pustili se do řešení. Pracovali však bez tabulek a průběh byl analogický jako při scénáři A. Rozdíl v organizaci byl v tom, že zde měli žáci po celou dobu k dispozici všech pět zadání, ne jen jedno jako ve scénáři A. To se projevilo hlavně ve větším počtu řešených úloh ve skupinách.

Literatura

[1] Brousseau G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London 1997. (Francouzská verze: *Théorie des situations didactiques.* [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. La pensée sauvage, Grenoble 1998.)

[2] Brousseau G.: *La théorie des situations didactiques et ses applications.* Cours donné à Montréal pour l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 1998, 56 s.

[3] Brousseau G., Sarrazy B.: *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* DAEST, Université Bordeaux 2, 2002.

[4] Novotná J.: *Analýza řešení slovních úloh.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha 2000.

[5] Novotná J.: *Ukázky analýzy a priori pro slovní úlohy.* In: *Sborník z JŠDS Vrabcov, jaro 2003.* Ed.: Dvořák P., Herman J., UK – PedF, OR Didaktika matematiky, Praha, 2003, s. 31–54.

[6] Novotná J.: *Analýza didaktických situací zaměřená na slovní úlohy ve vyučování matematice.* In: *Sborník z JŠDS Zlenice, jaro 2004.* Ed.: Dvořák P., Herman J., UK – PedF, OR Didaktika matematiky, Praha 2004, s. 31–54.

K DALŠÍMU VZDĚLÁVÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY

Jaroslav Perný

Abstrakt

Článek obsahuje informaci o příspěvku naší katedry k dalšímu vzdělávání učitelů matematiky v libereckém regionu, a to jednak formou dlouholetého pravidelného semináře z didaktiky matematiky pro učitele všech stupňů a typů škol, jednak formou jednorázových akcí v dalších regionálních pedagogických centrech a institucích.

Vzhledem k tomu, že není jednoznačně a přesně stanovena koncepce Dalšího vzdělávání učitelů matematiky, snažil jsem se jako okresní metodik matematiky a bývalý ředitel okresního metodického střediska po nástupu na pedagogickou fakultu o propojení fakulty s pedagogickou praxí právě v této oblasti. Zpočátku to byly jednorázové akce pracovníků katedry matematiky ve spolupráci s okresním metodickým střediskem pro učitele matematiky s určitým zaměřením, např. Pro začínající učitele, Metody řešení nestandardních úloh, Náměty na rozvíjení prostorové představivosti žáků, Matematické hry a rozcvičky apod.

Od akademického roku 1995/96 pak katedra, zpočátku sama, později ve spolupráci s Metodickým střediskem, resp. po vzniku krajů s Pedagogickým centrem, nepřetržitě organizuje pravidelné didaktické semináře s příslušnou akreditací pro učitele všech stupňů škol z Liberecka, Jablonecka, Českolipska a Semilska. Seminář zpočátku garantoval prof. Jan Kopka. Témata jednotlivých seminářů byla školám nabízena zpočátku formou dopisů, později informací ve Zpravodaji Metodického střediska, resp. v Katalogu Pedagogického centra spolu s ostatními akcemi dalšího vzdělávání a učitelé si vybírali dle svého zájmu a zaměření. Semináře byly zpočátku pro učitele zdarma, stejně jako pro referující, kterým byly hrazeny pouze cestovní náklady. Později, kdy byly školám vyčleněny prostředky na další zdělávání učitelů, byly kurzy přihlášeným účastníkům

hrazeny a přednášející byli odměňováni. Účastníci získávají Osvědčení o absolvování příslušného kurzu.

Původní počet 7–8 seminářů za semestr byl z důvodu zatížení učitelů postupně snižován na 6 a nyní probíhá 4–5 seminářů za semestr. Celkem bylo za těch 10 let realizováno 96 seminářů. Počet účastníků rovněž spíše klesá, na počátku to bylo 20–30 na akci, nyní 10–15, záleží na tématu a osobě referujícího. Mezi účastníky převažují učitelé ze základních škol, zejména ze 2. stupně, menší procento je ze středních a zvláštních škol, příležitostně se účastní i naši studenti a kolegové. Jednoznačně učitelé upřednostňují témata blízká školské praxi, z nich pak především témata s netradičním přístupem a témata relaxační. Ukazuje se také, že těchto seminářů se zúčastňuje převážně stálý okruh učitelů, kteří mají zájem svou práci zlepšovat. Jsou to např. metodici matematiky, cviční a uvádějící učitelé na školách, potěšující je, že se mezi nimi objevují i naši bývalí studenti.

Náplň seminářů je velice různorodá. Jedná se převážně o témata didaktická od odborníků z vysokých škol.

I když mají někteří učitelé k tématům připomínky typu „je to hezké, ale nemohu to při vyučování matematiky dělat, protože bych nesplnil(a) osnovy“, celá řada z nich předložené náměty vyzkoušela a následně pak sdělují své poznatky a zkušenosti. Někteří z nich se pak přímo podíleli na rozsáhlejším česko-norském výzkumu Hrozny problémů, který z naší strany garantoval prof. Kopka. Tito učitelé uvádějí naopak, že tyto náměty jim umožňují měnit formy vyučování a zvýšit motivaci a aktivitu žáků, takže začleňováním těchto prvků do výuky není narušeno plnění osnov a žáci se lépe vypořádávají s řešením nestandardních úloh a sami se snaží získávat nové poznatky.

Velice žádané jsou příspěvky od učitelů z praxe. Bohužel řada z nich, přestože mají řadu znamenitých nápadů a námětů odmítá veřejně vystupovat. Existuje mezi nimi např. řada zpracovaných projektů, které by si zasloužily zveřejnění a ocenění.

V souvislosti se záměrem MŠMT ČR zrušit Pedagogická centra v krajích vzniká určitý problém ve finančním zajištění návaznosti těchto seminářů, ale budeme se snažit je zachovat třeba z prostředků fakulty po tuto přechodnou dobu, než bude rozhodnuto o formě organizace dalšího vzdělávání učitelů.

Kromě těchto pravidelných didaktických seminářů jsou pracovníci katedry matematiky a didaktiky matematiky zváni na přednášky a dílny

v rámci souboru akcí dalšího vzdělávání učitelů jiných institucí, jako Střediska informačních technologií v Mladé Boleslavi nebo Střediska služeb školám v Jablonci nad Nisou, např. dvoudílný cyklus Rozvíjení geometrické a prostorové představivosti žáků I a II. Mimo to jsou to jednorázové akce Pedagogického centra v Liberci, jako např. v rámci setkání učitelů středních škol téma Prostorová představivost na střední škole. Právě při těchto dílnách se učitelé matematiky rádi zapojují do řešení problémových úloh a předkládané náměty mají u nich velmi dobrou odezvu. Často zůstávají s lektorem v dalším kontaktu při výměně zkušeností.

V následující příloze uvedu některé náměty a ukázky, které předkládám např. formou „dílny“ učitelům na akcích dalšího vzdělávání na téma Rozvíjení prostorové představivosti žáků, kterým se intenzivněji zabývám. Jedná se o úlohy z oblasti tzv. spontánní stereometrie, tj. stereometrie základních představ o tělese, kam bývají zařazována témata Geometrické těleso a jeho zobrazování, Sítě těles, Skládání a rozkládání těles, Geometrie povrchu tělesa, Pohyb tělesa a po tělese, Kombinatorická geometrie těles atd. Řešení těchto úloh nevyžaduje přímo probírání tématu stereometrie ve vyučování, je možno je zařadit jako rozcvičky či relaxační chvilky, samozřejmě přiměřeně věku.

Literatura

[1] Kopecká H.: *Rozvíjení prostorové představivosti hrou.* DP TUL, Liberec 2004.

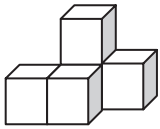
[2] Perný J.: *Disertační práce.* Praha 2001.

[3] Perný J.: *Geometrical Folder.* In.: *Prace Naukowe Wyzszej Szkoly Pedagogicznej v Czestochowie.* Matematyky IX, 2003.

Příloha

Zobrazování těles

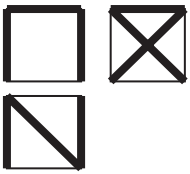
1. Zakresli do čtvercové sítě, jak vidíš těleso při pohledu



a) zepředu b) ze strany c) shora

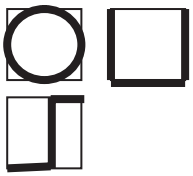
2. Na povrchu průhledné krychle je namotán drát. Urči z půdorysu, nárysu a bokorysu jakým způsobem:

Př. A:



Řešení:

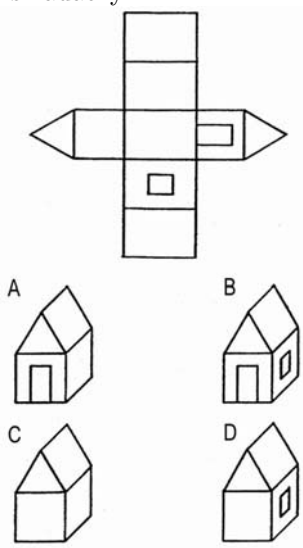
Př. B:



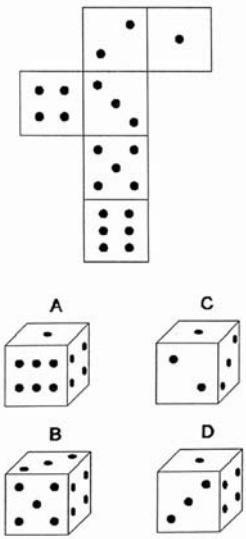
Řešení:

Sítě těles

1. Který domeček nevznikl z rozložené skládačky?

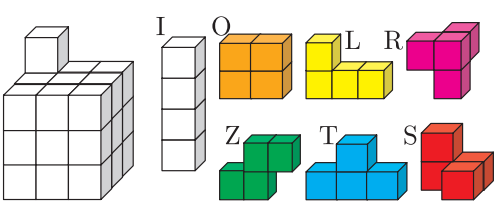


2. Kterou hrací kostku sestavíš z této sítě?

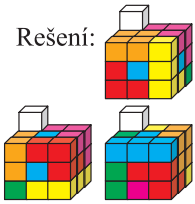


Skládání a rozkládání těles

l. Lze z prostorových tetramin složit těleso vlevo? Kolika způsoby?



Rešení:



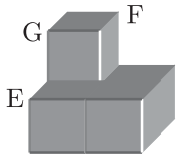
2. Z krychle o hraně 3 odebírej jednotkové krychličky tak, aby povrch zůstal nezměněn. Kolik krychliček lze odebrat?

Řešení:

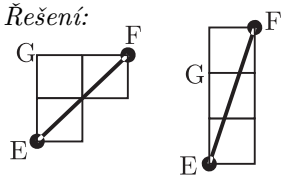
odebrat lze 14

Geometrie povrchu tělesa

1. Urči nejkratší povrchovou spojnici vrcholů krychlového tělesa EF (graficky, pomocí sítě).

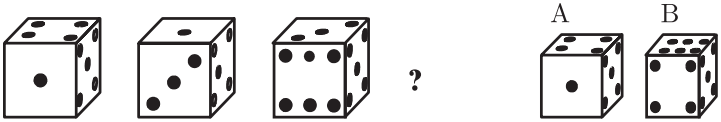


Řešení:

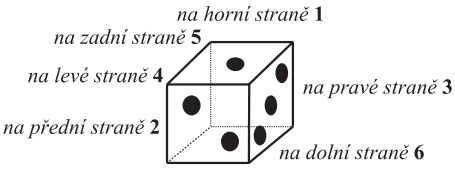


Pohyb tělesa a po tělese

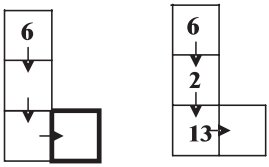
1. Která kostka bude následovat za třemi velkými? Vyber tu správnou ze 2 malých krychlí.



2. Hrací kostka je stabilně v základní poloze (obr.). „Převracej“ ji pouze ve své mysli přes její hrany podle pokynů (šipek) a zapisuj hodnotu, na kterou se kostka právě položila.



Příklad úlohy: *Řešení:*



Prvňáčci a matematika

Šárka Pěchoučková

Úvod

Evaluace současného školství probíhá na několika úrovních. Hodnotí se celý vzdělávací systém, jednotlivé školy podle typů a regionů, hodnocení se nevyhnou žáci ani učitelé. Na většině našich škol se žáci hodnotí známkou. Vystihuje však známka přesně to, co se během roku žák nebo student naučil? Zejména první třída znamená pro každé dítě velký skok. Většina dětí přicházejících do školy neumí číst, psát, počítat. A na konci školního roku?

Pojďme se podívat na experimenty, které probíhaly v první třídě jedné plzeňské základní školy během školního roku 2003–2004. Zaměříme se na dívku, která se ve srovnání se svými spolužáky jeví jako průměrná až podprůměrná. Přesto však, jak uvidíme, dosáhla určitého pokroku.

Použitá terminologie

Matematický symbol $4 + 5$ představuje jak *proces* sčítání, tak i jeho výsledek – *koncept* součtu, tedy 9. [1] Pokud jsme schopni symbol $4 + 5$ chápat jako proces i koncept, vnímáme jej jako *procept*. Naopak procept čísla 6 zahrnuje jak proces počítání ($2 + 4$, $1 + 5$ atd.), tak také výsledek tohoto procesu, tedy koncept.

Pokud je dítě na úrovni *procedurálního myšlení*, manipuluje s čísly prostřednictvím procesu počítání, nechápe rozkládání a skládání čísel. Jestliže již dítě má *proceptuální myšlení*, čísla chápe jako objekty, které lze flexibilně skládat a rozkládat.

Poznávací proces lze rozdělit do pěti etap [2]: motivace, etapa separovaných modelů, etapa univerzálních modelů, abstrakční zdvih, etapa krystalizace poznatku. V etapě *separovaných modelů* získává dítě konkrétní zkušenosti, jejichž vzájemné souvislosti zatím nevidí. (Při práci s Cuisenairovými hranolky při reprezentaci čísla 5 dítě vezme jeden hranolek, chvíli přemýšlí a postupně dodává další hranolky.) Neustálé opakování činností se separovanými modely vede k vytvoření *generického*

modelu. (Jestliže při reprezentaci čísla 5 vezme žák oběma rukama najednou např. jeden dvojkový a jeden trojkový hranolek, má vytvořený generický model $2 + 3$ čísla 5). V etapě *univerzálních modelů* si dítě začíná uvědomovat, že některé separované modely jsou stejné, mohou se vzájemně zastupovat. Dítě si zvolí univerzální model vhodný pro zastupování modelů jiných. (Pokud dítě pracuje v oboru přirozených čísel do 10, jsou takovým univerzálním modelem prsty.)

Experimenty na základní škole

Cílem experimentů bylo částečně zmapovat budování pojmu přirozeného čísla v 1. ročníku základní školy, u jednotlivých žáků provést diagnostiku úrovně vhledu do čísla, vyhledat různé strategie, které se uplatňují při reprezentaci čísla pomocí manipulativní činnosti, a zjistit, zda v chápání pojmu přirozeného čísla převažuje chápání procesuální či proceptuální.

Experiment I

Tento experiment byl proveden v listopadu 2003. Zúčastnilo se ho 13 dětí. V této době žáci znali uspořádanou řadu čísel od nuly do pěti. V tomto oboru dovedli numerovat, sčítat a odčítat. V předešlých hodinách se seznámili s číselnou řadou do deseti.

Experimentátor pracoval s každým žákem samostatně a odděleně od ostatních dětí v kabinetu. Na pracovním stole měl žák připravené karty s čísly 5, 4, 6 a modifikované Cuisenairovy hranolky představující čísla jedna, dva, tři. Hranolky se od sebe lišily délkou, ale nebyly barevné, aby byla při činnosti eliminována interference barev. Tyto hranolky byly použity také proto, aby byl při manipulaci dítěte odstraněn vliv jemné motoriky. Úkolem dítěte bylo provést reprezentaci čísel 5, 4 a 6. Reprezentace byla rozvíjena manipulativní činností.

S Cuisenairovými hranolky se žáci setkali poprvé. Hranolky byl roztříděny na hromádky podle velikosti a každý žák byl slovně při zadávání úkolu seznámen s tím, jaké číslo hranolek představuje. Nebyla na nich napsána žádná čísla.

Situaci navodil experimentátor motivačním rozhovorem s otázkami: *Chodíš nakupovat? Sám nebo s maminkou? Co nakupuješ nejraději?*

Úkol byl zadán následující způsobem: *Teď si spolu zahrajeme na nákup. Máme připravené zvláštní peníze. Na hromádkách jsou koruny, dvě koruny, tři koruny. Na kartě je cena zboží. Zkus zaplatit.*

ANETA

Postup: Aneta otočí pravou rukou kartu s číslem 4, drží ji oběma rukama, pak ji přendá do levé ruky a prohlíží si ji (7 s).

01E: Tak, dej si ji na stůl (Aneta položí kartu na stůl.) a zkus mi zaplatit ty čtyři koruny (3 s). Dovedla bys to?

02A: (Zavrtí hlavou.) Nee.

03E: Ne?

04A: (Sedí nehnutě 5 s, jednu ruku před ústy.)

05E: Tamhle máš třeba hromádku, kde je jedna koruna. Dovedla bys zaplatit?

06A: (Dívá se na hromádku jednotkových hranolků, obě ruce před ústy, 8 s) To nevim.

07E: Kolik těch korun tam musíš dát, abys dostala čtyři koruny?

08A: (Aneta levou rukou odpočítá po jednom 4 jednotkové hranolky, 3 s) Tolik.

09E: Tak to tam zkus dát na kartu. (Hranolky dá na kartu s číslem a uspořádá je do číselné figury, jaká je na hrací kostce, 2 s) No vidíš, že to není tak těžké.

10A: (Dívá se na čtyři kostičky, přitom se neustále prsty dotýká hranolků.) A kam mám dát tuty?

11E: Nech je u té čtyřky na kartě. Máš tam čtyři?

12A: Hm.

13E: Tak. Zkus otočit další kartičku a zase na tu kartičku dáš korunky.

14A: (Vezme vždy jeden jednotkový hranolek a dá na kartu. Hranolky uspořádá do číselné figury, která je na hrací kostce, 13 s.)

15E: Hm, a ještě jednu kartičku.

16A: (Otočí kartu s číslem 6.) To nevim tohle číslo.

17E: To nevíš tohle číslo? To jste ještě neměli?

18A: (Vrtí hlavou.) Ne.

19E: To nevadí.

Komentář: Pro Anetu byl charakteristický taktilní kontakt s číslem. Než získala částečný vhled do problému, prováděla taktilní dokumentaci jednotkových hranolků. Při reprezentaci čísla 4 i čísla 5 používala strategii počítání po jedné tak, jak ji navrhl experimentátor při znázorňování čísla 4. Obě čísla chápala Aneta jako proces a obě má spojené s představou číselné figury na hrací kostce. Aneta nemá vytvořený žádný separovaný model čísla 4 ani čísla 5, nemá vhled do žádného z uvedených čísel. Nezná symbolickou reprezentaci čísla 6.

Experiment II

V téže třídě se stejnými žáky proběhl v březnu 2004 další experiment. Děti v té době měly zvládnutou numeraci přirozených čísel v oboru do 20, sčítání a odčítání v oboru do10 a sčítání a odčítání v oboru do 20 bez přechodu desítky. Experiment probíhal stejným způsobem jako v listopadu 2003.

ANETA

Postup: Aneta otočí pravou rukou kartu s číslem 5, levou ruku má před ústy. Očima těká z čísla na trojkový hranolek (8 s), pak začne na pravé ruce po jednom odpočítávat tři prsty (6 s). Oběma rukama najednou sáhne po trojkovém a po dvojkovém hranolku. Umístí je rovnoběžně na kartu s číslem (3 s). Tedy $3 + 2$.

Po otočení karty s číslem 4 začne ihned na prstech levé ruky odpočítávat po jednom čtyři prsty, jeden prst schová (4 s). Pravou rukou sáhne po trojkovém hranolku a umístí ho na kartu. Sleduje prsty levé ruky a dodává jeden jednotkový hranolek (6 s). Hranolky jsou opět na kartě umístěny rovnoběžně. Tedy $3 + 1$.

Po odkrytí karty s číslem 6 se Aneta dívá na toto číslo (4 s) a pak odpočítá na levé ruce po jednom tři prsty. Pravou rukou vezme jeden trojkový hranolek, položí na kartu a přidá ještě jeden trojkový hranolek (6 s). Hranolky jsou na kartě umístěny rovnoběžně. Reprezentace je $3+3$.
Komentář: Aneta má vytvořené separované modely uvedených čísel, zatím ještě nejsou vytvořeny modely generické. Jako univerzální model používá prsty, přičemž je odpočítává po jednom. Při reprezentaci všech uvedených čísel použila Aneta strategii zaplňování. Vzala největší (trojkový) hranolek a zkoumala na prstech pomocí dočítání, jakým dalším hranolkem tento trojkový hranolek v jednotlivých případech doplní.

Všechna uvedená čísla chápe dívka jako proces. Zatím nemá vhled do žádného ze zkoumaných čísel.

Srovnání s experimentem I: Aneta zvolila místo strategie počítání po jedné pokročilejší strategii – strategii zaplňování. Stále však ještě nemá vhled do žádného z uvedených čísel, nemá vytvořené generické modely těchto čísel.

Experiment III

Třetí experiment proběhl v této třídě v dubnu 2004. Znalosti dětí byly ve stejném oboru přirozených čísel. Děti pracovaly s originálními Cuise-

nairovými hranolky. Každá hromádka byla označena číslem, které bylo reprezentováno příslušným hranolkem. Experiment byl zaměřen na reprezentaci čísel 6, 5, 11, 9. Reprezentace čísel 5 a 6 byla rozvíjena pomocí jednotkových, dvojkových, trojkových a čtyřkových hranolků. Při reprezentaci čísel 9 a 11 byly k dispozici také hranolky pětkové a šestkové.

ANETA

Postup: Aneta odkryje kartu s číslem 6 a levou rukou vezme jeden jednotkový hranolek (3 s). Pak k němu přidá stejnou rukou jeden dvojkový hranolek. Poté na pravé ruce vztyčí nejdříve jeden prst a pak dva prsty najednou (5 s). Sáhne po dvojkovém hranolku, pohlédne na pravou ruku se třemi vztyčenými prsty a zvolí hranolek trojkový (7 s). Tedy $1+2+3$.

Po odkrytí karty s číslem 5 si Aneta nejdříve číslo prohlíží a přitom sleduje hromádku se čtyřkovými hranolky (4 s). Pravou rukou vybere jeden z nich a levou rukou přidá jeden jednotkový hranolek (2 s). Reprezentace byla provedena jako $4+1$.

Když dívka odkryje kartu s číslem 11, postupně sleduje hromádky od jednotkových hranolků až po šestkové (9 s). Pravou rukou vezme jeden šestkový hranolek (2 s). Na pravé ruce vztyčí po jednom tři prsty, poté dva schová a na levé ruce vztyčí naráz pět prstů (6 s). Přidá jeden pětkový hranolek (2 s). Reprezentace je $6+5$.

Po odkrytí karty s číslem 9 Aneta přemýšlí (3 s), pak sáhne po jednom šestkovém hranolku. Na obou rukou najednou vztyčí celkem šest prstů (na pravé jeden, na levé pět) a dodá jeden trojkový hranolek (7 s). Provedla reprezentaci $6+3$.

Komentář: Z postupu reprezentace čísla 6 a čísla 5 je zřejmé, že Aneta má vytvořený generický model čísla 3 a čísla 5. Při reprezentaci čísla 6 kombinovala strategii známých faktů (číslo 6 znázornila jako $1+2$) a strategii zaplňování (přemýšlela, jaký hranolek přidat k jednotkovému a dvojkovému, přičemž pracovala s prsty jako univerzálním modelem). Má tedy vytvořený pouze separovaný model čísla 6. Při reprezentaci čísla 5 použila strategii známých faktů. Číslo 6 chápe Aneta jako proces, číslo 5 jako procept.

Při reprezentaci čísla 11 a čísla 9 použila dívka strategii zaplňování. Vzala největší (šestkový) hranolek a zjišťovala dočítáním na prstech jako univerzálním modelu, jaký hranolek použije k doplnění. Obě čísla chápe jako proces, u obou čísel má vytvořené pouze separované modely.

Aneta má vhled do čísla 5, do čísel 6, 11 a 9 zatím vhled nemá.

Srovnání s experimenty I a II: Ukázalo se, že Aneta má vhled do čísla 5, má již vytvořený generický model $4 + 1$ tohoto čísla. Při reprezentaci čísla 5 použila pokročilejší strategii – strategii známých faktů. Při reprezentaci čísel, do nichž vhled nemá, použila jednodušší strategii – strategii zaplňování.

Závěr

Porovnáme-li tři popsané experimenty, vidíme, že Aneta dosáhla určitých kvalitativních změn v chápání přirozeného čísla. Ve srovnání se svými spolužáky nejsou však tyto změny výrazné. Přesto i malé posuny vpřed ve vědomostech prvňáčků by měly být nějakým způsobem oceněny nebo ohodnoceny. Ukazuje se, že v první třídě musí učitel přistupovat k hodnocení svých žáků individuálně a dávat přednost slovnímu hodnocení před hodnocením známkou.

Literatura

[1] Gray E., Tall D.: *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic.* Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, 1994, s. 115–141.

[2] Hejný M., Stehlíková N.: *Číselné představy dětí.* Praha 1999.

[3] Kotásek J.: *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* MŠMT, Praha 2001.

Stručná historie přípravy učitelů matematiky v českých zemích

Jiří Potůček

Potřeba připravovat učitele vůbec, tedy nejen učitele matematiky, se objevila se zavedením veřejného školství a povinné školní docházky. To se pojí v našich zemích s tereziánskými reformami z druhé poloviny 18. století. Podle Felbingerova statutu bylo možno plnit povinnou školní docházku na třech typech elementárních škol, kam patřily

- triviální školy,
- hlavní školy,
- normální školy.

Zásadním problémem v té době bylo zajištění učitelů, kteří by na uvedených školách působili. Nelze již vůbec hovořit o tom, že by to byli ve všech případech učitelé kvalitní. Je všeobecně známo, že konkurzní komise, které vybíraly z uchazečů o učitelské povolání, byly ve složité situaci. Nároky na uchazeče byly velmi nízké, stačilo, aby uchazeč uměl číst, psát a počítat na úrovni elementárních operací s přirozenými čísly. Jako učitelé proto působili vysloužilí vojáci, řemeslníci atd. Proto lze nalézt v dobových inspekčních správách katastrofální neznalosti těchto učitelů, ale asi to jinak nebylo možné, uvědomíme-li si, že šlo o počátky veřejného školství a učitelé byli vybíráni za pochodu, ne připravováni.

Situace vedla k tomu, aby příprava učitelů byla centrálně a profesionálně řešena. Proto byly při normálních školách zřizovány dvou až tříměsíční kurzy pro přípravu učitelů, jejichž účastníci samozřejmě již museli zvládat to, co měli sami učit, tj. číst, psát a počítat. Od roku 1849 byly tyto kurzy pro přípravu učitelů triviálních a hlavních škol rozšířeny na dvouleté a krátce na to, od poloviny 19. století byly ustavovány jako samostatné učitelské ústavy. Od roku 1853 byly pro ně vydávány normativní předpisy. V prvním ročníku těchto učitelských ústavů byly zařazeny převážně teoretické předměty, ve druhém pak praktické. Po necelých dvaceti letech existence byly zákonem z roku 1869 vytvořeny čtyřleté učitelské ústavy. Ty již byly zakončovány maturitní zkouškou, které předsedal

člen zemské školní rady. Po získání vysvědčení mohl být absolvent ustanoven prozatímně učitelem na některé obecné škole. K tomu, aby byl ustanoven definitivním učitelem, musel po nejméně dvouleté uspokojivé praxi na některé veřejné škole nebo soukromé škole s právem veřejnosti vykonat tzv. zkoušku způsobilosti. Zkušební komise pro takové zkoušky byly ustavovány zpravidla v sídlech učitelských ústavů. Školské zákony ze 70. let 19. století prodloužily povinnou školní docházku z dřívějších šesti let na školách podle Felbingerova statutu na osm let. Elementární školy byly přetransformovány na obecné školy, jejichž absolvování však neopravňovalo k dalšímu studiu, a na tzv. měšťanské školy, které navazovaly na 5. třídu obecné školy. Absolventi měšťanských škol mohli pokračovat ve studiu na středních odborných školách zakončených maturitou.

Pro získání učitelské kvalifikace pro měšťanskou školu bylo třeba vykonat (ovšem po další úspěšné službě) třetí zkoušku způsobilosti v některém ze tří zaměření:

- gramaticko-historickém (vyučovací jazyk, dějepis, zeměpis),
- přírodovědném (přírodopis, fyzika a k tomu počty nebo rýsování),
- matematicko-technickém (matematika, kreslení, krasopis a k tomu buď fyzika nebo rýsování).

Do učitelských ústavů, jak byly výše popsány, mohli vstupovat žáci po absolvování nižší střední školy nebo úplné měšťanské školy. Učitelské ústavy se dělily na dívčí a chlapecké. Při některých z nich existovaly jako paralelní třídy ke čtvrtému ročníku speciální kurzy pro absolventy jiných středních škol, kteří se rozhodli stát se učiteli. První tři ročníky učitelských ústavů byly koncipovány tak, aby poskytly kandidátům učitelství všeobecné vzdělání. Čtvrtý ročník byl věnován metodice vyučování jednotlivým vyučovacím předmětům obecných škol. Obsah vyučování byl velmi omezený, konkrétně v matematice se končilo lineárními rovnicemi. Nutno říci, že metodice vyučování byla jakási pozornost věnována. Co se však týkalo odborné přípravy všech předmětů vyučovaných na obecných školách, pak tato příprava prakticky nepřesahovala vyučovanou látku a nelze proto hovořit o nějakém teoretickém nadhledu. To platí i pro třetí zkoušku způsobilosti, která dávala kvalifikaci pro výuku na měšťanských školách. Ta sestávala z prověření znalostí školských předpisů a po stránce odborné z toho, co učitel na škole vyučoval. Pro tato omezení se od konce 90. let 19. století objevily snahy, které postupně sílily,

aby všichni učitelé měli vysokoškolské vzdělání. Přesto však situace v přípravě učitelů působících na školách poskytujících základní vzdělání, tj. na nichž mládež plnila povinnou školní docházku, přetrvala ještě velmi dlouho, prakticky po celou dobu existence tzv. první Československé republiky a dobu protektorátu.

Podívejme se nyní na situaci v přípravě učitelů středních škol. Střední školy, zejména církevní gymnázia, existovaly mnohem dříve, než si společenská situace vynutila zavedení povinné školní docházky. Přesto však až do roku 1849 nebylo odborné vzdělání středoškolských učitelů institucionálně prakticky nijak zajištěno. Při univerzitách a vysokoškolských lyceích existovaly pouze „stolice pedagogiky“ pro vzdělávání katechetů vychovatelů a kandidátů učitelství vyšších škol. Kvalifikovanost středoškolských učitelů začala být řešena až v souvislosti s Exner-Bonitzovou reformou středního školství. Kandidáti učitelství, kteří chtěli mít na škole pevné postavení, se museli od roku 1850 podrobit zkoušce před zvláštní komisí. Komise pro takový účel byly od tohoto roku ustavovány při univerzitách. (S výjimkou katechetů, kteří získávali aprobaci u svých církevních úřadů.) Zkušební předpisy byly pak několikrát revidovány a to v letech 1884, 1897 a 1911. Poslední úprava platila až do vzniku samostatného Československa.

Podle předpisů z roku 1897 museli být kandidáti na středoškolské profesory zapsáni alespoň 7 semestrů jako řádní posluchači na univerzitě, z toho alespoň 5 semestrů na filozofické fakultě, kde kromě svého oboru navštěvovali přednášky z filozofie, psychologie, pedagogiky, z vyučovací řeči a z němčiny. U kandidátů profesury matematiky, fyziky, deskriptivní geometrie a chemie mohly být do předepsané studijní doby započteny čtyři semestry strávené na technice, u chemiků dokonce šest semestrů. Tyto skutečnosti se týkaly těch, kdo maturovali na gymnáziu. Absolventi reálek, kteří byli zapsáni alespoň 7 semestrů jako mimořádní posluchači na filozofické fakultě, mohli být připuštěni ke zkoušce pouze v matematicko-přírodovědné kategorii a pouze s aprobací pro reálky.

Samotná zkouška kandidátů profesury měla tři fáze:

- domácí práce,
- klausury (školní písemné práce),
- ústní zkoušky.

Domácí práce byly až do roku 1897 tři. Po jedné z aprobačních předmětů (tedy 2) a jedna byla pedagogicko-didaktická. Ta byla od roku 1897

nahrazena kolokvijním vysvědčením z pedagogického a filozofického semináře. Rok 1897 přinesl ještě jedno ulehčení zkoušky v tom, že místo jedné odborné domácí práce mohla být jako náhrada přijata větší vědecká práce vykonaná během studií v seminářích, laboratořích nebo vědeckých ústavech. Pilným studentům tak zůstala jediná práce a mohli být s touto fází zkoušek hotovi již v 8. semestru, zatímco dříve i ti nejlepší strávili s touto fází zkoušek celý 5. rok studia.

Klauzurní zkoušky trvaly čtyři nebo osm hodin. Při ústní zkoušce prokazovali kandidáti vedle znalostí odborných také znalost vyučovacího jazyka, a to gramaticky i literárně, a také znalost němčiny.

Matematika se vyskytovala v těchto kombinacích – pro gymnázia:

- matematika s fyzikou,
- přírodopis pro vyšší a matematika s fyzikou pro nižší gymnázia,
- filozofická propedeutika a matematika pro vyšší, fyzika pro nižší gymnázia,

pro reálky:

- matematika s fyzikou,
- matematika solo pro vyšší třídy reálek,
- deskriptivní geometrie s fyzikou pro vyšší třídy reálek.

Vykonáním předepsaných zkoušek způsobilosti byla ukončena teoretická příprava. Praktická příprava proběhla během tzv. zkušebního roku. Kandidáti byli svěřeni do péče zkušeného profesora na veřejné škole, kde hospitovali na vyučování a od 2. pololetí pod jeho vedením sami učili (bez nároku na odměnu). Na závěr dostali od ředitele a vedoucího učitele vysvědčení, které je opravňovalo k ustanovení definitivním učitelem, pokud bylo volné místo.

Na přelomu 19. a 20. století se začaly objevovat požadavky, aby budoucí středoškolští učitelé nebyli připravováni jen po stránce své odbornosti, ale aby získávali i základy z didaktiky svých aprobačních předmětů. To se však stalo až v samostatné Československé republice od školního roku 1924/25. V matematice byl v tomto roce zřízen na Karlově univerzitě „lektorát didaktiky a metodiky matematiky“ a jeho vedením byl pověřen profesor Qido Vetter. Doporučoval zařadit pro kandidáty učitelství matematiky „přednášky elementární matematiky z vyššího hlediska“.

Z uvedeného je zřejmé, že na učitelských ústavech připravujících učitele obecných škol byla podceněna odborná složka přípravy, v přípravě středoškolských učitelů byla podceněna didaktická složka. Ke zlepšení situace došlo až se vznikem pedagogických fakult po roce 1948. Situace v přípravě učitelů po roce 1948 je obecně známa. Jedním ze závažných problémů dneška je zajištění levné a kvalitní učitelské praxe kandidátů učitelství. Určitou nabídku možností jak tento problém řešit dává pohled do minulosti nebo k nejbližším sousedům. Poněkud nebezpečnější jsou v tomto smyslu občasné návrhy nekompetentních jedinců, směřující ke snížení úrovně učitelské přípravy argumentací, že v minulosti stačilo učitelům na nižších úrovních škol střední vzdělání. Přijetí takových návrhů by vedlo ke snížení odborné i metodické kvality nových učitelů.

Literatura

[1] Kádner O.: *Vývoj a dnešní soustava školství.* SFINX, Praha 1929.

[2] Neuhofer R.: *Učební osnovy středních škol a učitelských ústavů.* SN, Praha 1934.

[3] Bydžovský B.: *Naše středoškolská reforma.* Praha 1937.

[4] Potůček J.: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945.* Pedagogické centrum Plzeň, I. díl 1998, II. díl 1999.

Hodnocení studijních výsledků v matematice na vysoké škole

Otakar Prachař

Abstrakt

Příspěvek se zabývá problematikou hodnocení studijních výsledků v matematice na vysoké škole. Obsahuje návrh změny hodnocení studijního výkonu i klasifikace prospěchu studenta.

Ve svém příspěvku se zamýšlím nad problematikou hodnocení studijních výsledků v matematice na vysoké škole. Proces vyučování a učení je třeba exaktně plánovat, organizovat a řídit. Účinné řízení zahrnuje i kontrolu a hodnocení studijní činnosti. Hodnocení v systému řízení vzdělávacího procesu v předmětu hraje významnou roli. Je závěrečnou fází, ale zároveň východiskem pro zkvalitňování vzdělávacího procesu. Výsledkem výchovně vzdělávacího procesu je určitá osobnostní změna studenta.

Hodnocení plní funkci

a) didaktickou – umožňuje porovnat a seřadit výkony jednotlivých studentů a skupin,

b) regulační – reguluje další postup ve výuce diferencovaně podle kvality výkonu,

c) motivační – ovlivňuje rozvoj poznávacích zájmů, zvyšuje studijní úsilí,

d) výchovnou – vyvolává změny v chování, pocitech a postojích studenta k učení,

e) prognostickou – umožňuje předvídat další rozvoj osobnosti.

Kvalitu skutečných studijních výsledků ověřujeme porovnáváním s vytčenými cíli vyjádřenými exaktně kvalitativními i kvantitativními znaky. Nikdo jistě nepochybuje o tom, že se v matematice nelze spokojit s namemorovanými vědomostmi ze studovaných tematických okruhů, ale že je třeba pěstovat dovednosti, rozvíjet schopnost aplikace osvojených vědomostí a dovedností při řešení různých problémů, schopnost přenosu (transferu) znalostí do jiných oblastí společenské praxe. Žádoucí je integrace matematického vzdělání s přírodovědným, v poslední době i s humanitním, protože matematika je pro řadu oborů nástrojem k řešení jejich problémů.

Formujeme-li cíle vzdělávání v matematice jako osvojování vhodně strukturovaných poznatků, ovládnutí matematických činností (dovednosti, metody, algoritmy), rozvíjení poznávacích procesů a schopností k poznávací a praktické činnosti (rozvíjení specifických forem matematického myšlení, schopností aplikace poznatků a činností, schopnosti sebevzdělávání), pak směřujeme k ovládnutí matematiky jako nástroje a prostředku k řešení problémů nejen matematiky, ale i jiných vědních oborů, techniky a praxe. Student má znát nejen definice a matematické věty, ale umět jich s porozuměním užívat při řešení úloh, porozumět vztahům a souvislostem mezi tématy, matematizovat reálné situace a řešit různé problémy, užívat geometrickou představivost v konkrétních situacích.

Neméně důležitým cílem je chápání významu matematiky jako nástroje k poznávání a přetváření světa, jako výsledku stále se prohlubujícího abstraktního odrazu vztahů reálného světa, jako prostředku formování a rozvoje osobnosti. Při vyučování a učení matematice je třeba si klást i cíle hodnotové (afektivní), které se týkají zájmů, postojů a hodnotové orientace studenta.

Pozitivních studijních výsledků lze dosáhnout, právě když cíle a pedagogické působení učitele jsou v rezonanci s reálnými učebními možnostmi každého studenta. Hodnocení výsledků vyučování a učení musí zahrnovat hodnocení studijních výkonů i hodnocení vývoje osobnosti. Spočívá v porovnání skutečného stavu s plánovanými cíli, v posouzení určitých kvalit studenta (znalostí, schopností, zájmů, postojů, morálních a volních vlastností apod.), v interpretaci vzniklých rozdílů a v hledání příčin, zahrnuje rovněž vyvození závěrů a přijetí účinných opatření k optimalizaci výchovně vzdělávacího procesu.

Objektivní hodnocení studijních výsledků předpokládá získání a registraci úhrnných informací o průběžném i konečném výkonu studenta,

o výsledcích pedagogického působení i samostatného učení a následné srovnání získaných výsledků se stanoveným cílem. K tomu slouží vstupní, průběžné a výstupní didaktické testy, především pak písemná a ústní zkouška. Předpokladem kvalitního hodnocení je formulace učebních cílů vzhledem k činnosti studenta, stanovení požadavků na studijní výkon, stanovení kritérií, měrných jednotek dovolujících kvalitu výkonu hodnotit zařazením na příslušný stupeň hodnotící škály.

Ve svém příspěvku předkládám návrh změny hodnocení studijního výkonu v matematice i změny klasifikace prospěchu v předmětu zařazeného do programu studia.

Proces vyučování a učení vyúsťující ve výkonu studenta je mnohostranným procesem, jehož výsledek lze stěží postihnout jedním číselným údajem (ciferně i slovně vyjádřeným), tedy veličinou skalární. Je žádoucí hodnocení vícesložkové (více číselnými údaji), tedy vektorem. Vyjádřeme proto efekt vyučování a učení matematice u studenta vektorem $\vec{E} = f(V, D, T, K, S, P)$ se složkami V (objem a kvalita vědomostí), D (objem a kvalita dovedností), T (schopnost aplikace vědomostí a dovedností při řešení problémů, úspěšnost transferu do jiných oblastí), K (tvořivé řešení problémů), S (schopnost sebevzdělávání), P (postoj k učení). Tento šestirozměrný vektor by lépe vyjadřoval stav vývoje osobnosti studenta. Jednak by měl větší vypovídací hodnotu než jednorozměrný klasifikační stupeň, zejména by umožňoval posuzovat kvalitativní úroveň jednotlivých složek výkonu studenta a poskytoval by komplexnější pohled na studijní výsledky v předmětu.

Navrhovanému způsobu hodnocení výkonu studenta v matematice je třeba přizpůsobit i strukturu vstupních, průběžných a výstupních didaktických testů, rovněž i písemné a ústní zkoušky. Průběžné testy mohou být koncipovány na zjišťování kvality pouze jedné složky, mohou však mít i povahu komplexnější. Písemná a ústní zkouška je integrovanou zkouškou, při níž zjišťujeme u studenta kvalitu výkonu ve složkách V, D, T, K. Posouzení úrovně u zbývajících dvou složek S, P klasifikačním stupněm je pak výsledkem dlouhodobého pozorování osobnosti studenta.

Znázorněme si v tabulce 1 model hodnocení kvality výsledků učební činnosti studenta, v němž je použito složek definovaného vektoru.

Hodnocení kvality výsledků učební činnosti studenta v matematice může být vyjádřeno šestirozměrným vektorem $\vec{E} = (V, D, T, K, S, P)$, jehož souřadnice jsou po řadě klasifikační stupně jednotlivých složek. Pro

Tabulka 1

Klasifikační stupeň	Složky					
	V	D	T	K	S	P
1 (výborně) 2 (dobře) 3 (nedostatečně)						
Váhové koeficienty	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
Empirické hodnoty	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

U složky P lze hodnotící škálu vyjádřit slovně: 1 – kladný, 2 – neutrální, 3 – záporný.

celkové hodnocení lze definovat kriteriální funkci $H = 8(c_1V + c_2D + c_3T + c_4K + c_5S + c_6P)$, přičemž hodnoty $V, D, T, K, S, P \in \{1, 2, 3\}$, $c_i \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, a $H \in \langle 26, 78\rangle$.

Celkové hodnocení lze stanovit na základě hodnoty H.

Celkové hodnocení	Hodnota H
prospěl výborně	26–39
prospěl dobře	40–60
neprospěl (nevyhověl)	61–78

Za úspěšně studujícího lze pokládat studenta, který si osvojil podstatnou část stanoveného učiva nutnou k dalšímu studiu (osvojení základních pojmů, vlastností matematických objektů, osvojení základních dovedností a návyků), má rozvinuté schopnosti k poznávací a k praktické činnosti (osvojení intelektuálních procesů umožňujících chápat podstatu učiva a aplikovat poznatky při řešení problémů praxe), projevuje samostatnost a vytrvalost v učení, má zájem o sebevzdělávání, jeho vyzrálost se projevuje v postojích k dění v přírodě i společnosti.

Při nedosahování určených cílových hodnot je třeba uvažovat

a) o zdokonalení programu vzdělávání a procesu vyučování a učení,
b) o změně vstupního stavu studenta zvýšením nároků na předcházející přípravu,
c) o změně hodnot cílových parametrů,
d) o zkvalitnění řízení výchovně vzdělávacího procesu, aby pedagogické působení i učební činnost maximálně odpovídaly možnostem studentů a vedly k dalšímu rozvoji osobnosti studenta.

Pak lze dosáhnout maximálně možných studijních výsledků v matematice u studentů na vysoké škole.

Konstruktivistické přístupy ve výuce algebry budoucích učitelů

Magdalena Prokopová

Motto:
Studovat znamená přemýšlet, zkoumat, ověřovat pozorováním nebo experimentem, pátrat, užívat kritické myšlení, zabývat se vědeckými problémy, organizovat čas a učební aktivity,...
J. Vašutová [4]

Úvod

V současné době jsou na výuku na vysoké škole kladeny stále vyšší nároky. Jsou přehodnocovány formy výuky i její cíle. Od absolventa se neočekává pouze dostatečná teoretická znalost, ale různé specifické kompetence, jako je kritické samostatné myšlení, schopnost pracovat týmově, schopnost samostatné tvůrčí činnosti a dalšího samostudia apod. Proto začínají být změny ve způsobech výuky vyžadovány i samotnými studenty. Ovšem ani studenti, ani vyučující nejsou mnohdy na „moderní“ metody a formy výuky připraveni.

V přípravě budoucích učitelů matematiky má konstruktivistický přístup ve výuce významné místo. Pro učitele je totiž nezbytné, aby měl konkrétní představu o tom, jak poznatky vznikají a to jednak jak je buduje jedinec[1], ale i z hlediska epistemologie svého oboru. Proto je pro něj více než užitečné, pokud se sám pokusí matematiku tvořit a objevovat pro něj nové skutečnosti.

[1] Což je obvykle obsaženo v kurzech psychologie a obecné pedagogiky na teoretické úrovni.

Průběh výuky: formulace a řešení problému

Kurz *Aritmetika a teoretická algebra* je zařazen do 5. a 6. semestru oboru učitelství matematiky pro střední školy.[2] Jeho součástí je i téma *Rozvoje racionálních čísel v pozičních soustavách.* V akademickém roce 2003/2004 se účastnilo semináře k tomuto kurzu 12 studentů. Jako procvičení již známé problematiky byla studentům zadána úloha

Určete rozvoj čísel $\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \ldots, \frac{16}{17}$ *(a) v soustavě desítkové; (b) v soustavě o základu 5, 7, 4; (c) v soustavě o základu 8.*
Co jste pozorovali při výpočtech uvedených racionálních čísel v každé ze soustav? Vysvětlete. Případně zobecněte.
Porovnejte první a druhou polovinu (nejkratší) periody uvedených čísel v soustavách o daných základech. [1, s. 250]

Využila jsem toho, že výsledky některé studenty zaujaly. Studenti sami zjistili, že nedokáží na doplňující otázky zcela odpovědět. Proto jsme se rozhodli, v této chvíli především na můj popud, vytvořit analogické úlohy a pokusit se objevit obecné pravidlo, které bychom mohli dokazovat. Studenti si sami rozdělili úkoly, které měli řešit samostatně, resp. ve dvojicích. Ve všech případech byly jejich úlohy zaměřeny na určení rozvoje různých racionálních čísel v soustavách o různých základech.

Na dalším semináři přednesli někteří studenti výsledky své práce. V této chvíli byly ještě zcela neorganizované. Výpočty byly prováděny spíše nahodile, tedy nebyl sledován konkrétní cíl. Všichni v první fázi pracovali heuristicky. Ovšem díky tomu, že na podobném úkolu pracovalo 12 lidí, obdrželi jsme poměrně rozsáhlý soubor výsledků, který vybízel k podrobnějšímu zkoumání. Všichni jsme se proto rozhodli zabývat se touto problematikou podrobněji a vytvořit společně seminární práci.

Konkretizace cílů bádání

Při dalším setkání studenti po diskusi nad již získanými výsledky byli schopni formulovat některé oblasti, které by mohli podrobněji zkoumat. Šlo o následující okruhy otázek:

- Souvislost dělitelnosti základu poziční soustavy a racionálního čísla vzhledem k ukončenosti rozvoje čísla v dané poziční soustavě.

[2] Tj. ve 3. ročníku pětiletého studia.

- Souvislost délky periody s dělitelností základu poziční soustavy a racionálního čísla.
- Speciální postavení prvočísel jako základů pozičních soustav.
- Souvislost číslic v periodě a dělitelnosti základu poziční soustavy a racionálního čísla.
- Speciální případy základů pozičních soustav, resp. racionálních čísel.

Většina studentů již na počátku znala oblast, v níž chtěla pokračovat. To proto, že již sami učinili nějaký objev. Přibližně čtyři studenti se neztotožnili s žádnou oblastí a proto zvolili poslední z nich, neboť ta jim nejlépe umožňovala pokračovat v heuristické metodě.

Příklady práce studentů

Ze zkoumání racionálních rozvojů $\frac{1}{2}$ v různých pozičních soustavách studenti vyslovili hypotézu:

Hypotéza 1: *Pro každé přirozené číslo z platí* $\frac{1}{2} = (0, z)_{2z}$.

Tuto hypotézu posléze zobecnili, doplnili a dokázali.

Věta 1: *Pro všechna přirozená čísla z, k platí* $\frac{1}{k} = (0, z)_{kz}$.

Důkaz: Podle Eukleidova algoritmu je

$$1 \cdot 1 = 0 \cdot k + 1,$$

$$1 \cdot kz = z \cdot k + 0.$$

Tím je důkaz proveden.

Věta 2: *Pro všechna přirozená čísla z, k platí* $\frac{1}{k} = (0, 0\overline{z})_{kz+1}$.

Důkaz: Opět podle Eukleidova algoritmu platí

$$1 \cdot 1 = 0 \cdot k + 1,$$

$$1 \cdot (kz + 1) = z \cdot k + 1.$$

Tím je důkaz proveden.

Práce s číslem $\frac{1}{2}$ přivedla studenty i na racionální rozvoje jejích mocnin. Po několika konkrétních výpočtech formulovali hypotézu, kterou i dokázali.

Věta 3: *Pro každé přirozené číslo n platí* $\frac{1}{2^n} = (0,\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1)_2$.

Po provedení důkazu již nebránilo nic v tom větu zobecnit i pro jiné základy.

Věta 4: *Pro každé přirozené číslo n a každé přirozené $z > 1$ platí*

$$\frac{1}{z^n} = (0,\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1)_z.$$

Po provedení důkazu této obecnější věty, další diskusi a porovnání těchto výsledků s výpočty a hypotézami dalších studentů mohli svou větu dále zobecnit.

Věta 5: *Pro všechna přirozená čísla z, k, n a j, kde $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-$ $-\ 1$, platí*

$$\frac{1}{z^{kn-j}} = (0,\underbrace{0\ldots0}_{n-1}l)_{z^k},$$

kde $l = z^j$.

Důkaz: S využitím Eukleidova algoritmu je

$$1 \cdot z^k = 0 \cdot z^{kn-j} + z^k,$$

$$z^k \cdot z^k = 0 \cdot z^{kn-j} + z^{2k},$$

$$\vdots$$

$$z^{k(n-1)} \cdot z^k = z^j \cdot z^{kn-j} + 0 = l \cdot z^{kn-j} + 0.$$

Celkem dostáváme n řádků, tedy v rozvoji se objeví $n-1$ nul a na $n$tém místě číslice s hodnotou l. Tím je důkaz proveden.

Jiná skupina studentů se zabývala délkami period. Nejprve bylo třeba dohodnout se na značení a definovat některé pomocné pojmy. Jelikož studenti pracovali s prvočísly, následující značení se omezilo právě na ně. Označili jsme délku (nejkratší) periody rozvoje čísla $\frac{q}{p}$ o základu z, kde $q,\ z \in \mathbb{N}$, $z > 1, q < p$ a p prvočíslo, symbolem[3] $\varphi(p, z)$.

Věta 6: *Nechť p je libovolné prvočíslo, q, z, k čísla přirozená a $z > 1$ $q < p$. Potom pro délky period rozvojů čísla $\frac{q}{p}$ platí $\varphi(p, z+kp) = \varphi(p, z)$.*

[3]Délka periody nezávisí na q.

Důkaz: Zvolme libovolné pevné racionální číslo $\frac{q}{p}$ vyhovující podmínkám věty. Potom délku jeho rozvoje v soustavě o daném základu z určíme podle Eukleidova algoritmu takto:

$$q \cdot z = c_1 \cdot p + r_1,$$

$$r_1 \cdot z = c_2 \cdot p + r_2,$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} \cdot z = c_n \cdot p + r_n,$$

kde $r_n = q$, neboli $\varphi(p, z) = n$.

Zvolme libovolné pevné přirozené číslo k. Potom stejným způsobem určíme délku periody při základu $(z + kp)$. Je totiž

$$q \cdot (z + kp) = c_1 \cdot p + r_1 + mkp = (c_1 + mk) \cdot p + r_1,$$

$$r_1 \cdot (z + kp) = c_2 \cdot p + r_2 + r_1 kp = (c_2 + r_1 k) \cdot p + r_2,$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} \cdot (z + kp) = c_n \cdot p + r_n + r_{n-1} kp = (c_n + r_{n-1} k) \cdot p + r_n,$$

kde opět $r_n = q$, neboli $\varphi(p, z + kp) = n$. Tím je důkaz proveden.

Pokud si ale všimneme, je tím dokázáno více. Známe-li totiž cifry $c_1, \ldots, c_n$ a zbytky po dělení $r_1, \ldots, r_n$ daného čísla v soustavě o základu z, můžeme již snad určit cifry jeho rozvoje v číselné soustavě při základu $(z + kp)$. Větu nebudeme již uvádět.

Klíčové situace

V naší šestitýdenní práci doma i na semináři se objevilo několik situací, které považuji za velice důležité v přípravě budoucího učitele matematiky. Šlo především o specifické činnosti studentů.

Cíl neznámý

Hledání cíle vlastního zkoumání bylo pro většinu studentů zcela nové. Někteří byli proto bezradní. Pomohlo jim ale, že mohou spolupracovat s ostatními.

Rozdělení práce a sdílení informací

Studenti sami brzy zjistili, že pro ně bude výhodné rozdělit si práci na zdlouhavých výpočtech. Pokud pak formulovali nějakou hypotézu, mohli ji ostatní studenti na základě svých výpočtů potvrdit či vyvrátit.

Komunikace a společný jazyk

K předchozímu se váže i nutnost najít společný jazyk a potřeba přesného vyjadřování. Studenti sami zjistili, že to, co se jim mnohdy od jejich učitelů zdálo jako bazírování na zbytečnostech, je ve skutečnosti důležité a zapotřebí.

Formulace hypotéz

Přesnost vyjadřování byla nejvíce zapotřebí při samotné formulaci hypotéz. Ve většině případů, kdy studenti objevili nějakou zákonitost, nedokázali ji přesně vyjádřit. V tomto bodu potřebovali mou pomoc nejvíce. Zároveň si ale uvědomovali, jak je přesné a jasné vyjadřování důležité. V opačném případě by jim totiž znemožnilo další práci. Začaly se objevovat důvody, proč je vhodné používat to které značení, indexování a pod. Poprvé ve své přípravě museli definovat nové pojmy. Dostávali se tak do opačné situace, než ve kterých mnohdy bývají u zkoušek, znali zcela bezpečně obsah toho, co chtějí říci.

Nezdar úspěchem

Vše, na co studenti sami přišli, bylo pro ně cenné. Tedy i ten případ, pokud formulovali hypotézu, kterou se jim nakonec podařilo vyvrátit.

Pocit objevitele

Tato situace byla podle mého mínění nejdůležitější na celé naší práci. Tento pocit je jednou z nejlepších vnitřních motivací. Jeden ze studentů na konci semestru v sebereflexi uvedl: ... *poprvé jsem měl možnost projít si cestu od* **vlastních** *konkrétních poznatků přes zobecněné věty a definice až po důkazy. Bylo téměř jasné, že po otevření první učebnice algebry bych záhy odpověď na zkoumanou otázku našel. Avšak naštěstí zůstalo pouze u „téměř“. Takto jsem se dostal alespoň na zlomek cesty skutečného objevitele.*

Při běžné práci v jiných seminářích se mi tyto situace nepodařilo navodit nebo byly navozeny těžce a uměle. Zde však vyplynuly mimochodem a bez mého většího úsilí.

Závěrem

Tento způsob práce byl poučný nejenom pro mé studenty, ale i pro mě. Je pochopitelné, že ne všichni studenti se zapojili do činnosti se stejným zaujetím a nasazením. Ovšem ani jeden ze studentů se nerozhodl se společné práce neúčastnit. Studenti měli možnost zvolit si přiměřené úkoly, které byli schopni zvládnout a které byly pro celek důležité. Někteří studenti byli schopni samostatně formulovat i dokazovat tvrzení, jiní potřebovali pomoc (buď moji či jiného studenta). Nejobtížnější pro studenty nebylo hypotézy dokazovat (popř. je vyvracet), ale formulovat je a formálně je zapsat.

Jsem přesvědčena, že všechny činnosti, které se při řešení společných problémů vyskytly, pomohly k rozvoji matematického myšlení studentů. Mnohé z nich bych jen špatně navozovala při tradičním způsobu vedení semináře. Jednalo se především o samostatné vyjadřování, hledání srozumitelných zápisů, odůvodňování, definování, dokazování, vyvracení, deduktivní postup a pod.

Teorie klade na problém vhodný pro konstruktivistický přístup přísné požadavky (viz např. [3]). Především vyučující by ho měl mít dobře zvládnutý, měl by znát, kam až lze dojít, resp. jeho slepé uličky. To zcela jistě splněno nebylo, protože jsem využila nečekané situace a ocitla se společně se studenty v roli objevitele (i když moje doména objevů byla jiná). Nevěřím však, že nyní, když vím, co lze v oblasti rozvojů racionálních čísel zkoumat, se mi podaří v dalším semestru se studenty pracovat lépe konstruktivisticky. Nejspíš se totiž dostaneme do zcela jiných situací. Ovšem na druhou stranu věřím, že nyní budu k takovým lákavým situacím, které by mi poskytly možnost podobné práce se studenty, otevřenější.

Literatura

[1] Blažek J. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika I.* SPN, Praha 1983.

[2] Blažek J. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika II.* SPN, Praha 1985.

[3] Štech S.: *Teoretické přístupy k vysokoškolské výuce.* In.: Vašutová J. a kol.: *Vybrané otázky vysokoškolské pedagogiky.* Univerzita Karlova

v Praze – Pedagogická fakulta, Ústav výzkumu a rozvoje školství, Praha 1999, s. 157–166.

[4] Vašutová J. a kol.: *Vybrané otázky vysokoškolské pedagogiky.* Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Ústav výzkumu a rozvoje školství, Praha 1999.

Některé zkušenosti s výukou matematiky ve strukturovaném studiu na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice

Ludvík Prouza

Abstrakt

Příspěvek hodnotí první dva roky výuky ve strukturovaném bakalářském studiu a stručně se zabývá nástinem perspektiv výuky matematiky na DFJP – UPa v blízké budoucnosti. Popisuje současný stav i možný vývoj pedagogického působení na studenty po jejich příchodu na fakultu, jejichž pracovní návyky i vědomostní struktura jsou velmi rozdílné a v převažující míře nedostačují požadavkům fakulty technicko-ekonomického zaměření. Jedním z možných řešení mohou být komplexnější přístupy při jejich vzdělávání v matematice, které dodají studentům především základní motivaci ke studiu matematiky a jejích aplikací.

Úvod

Jak vyplývá ze vzájemného porovnávání studijních programů různých oborů, které lze na vysokých školách technicko-ekonomického respektive zemědělského zaměření studovat, přistoupily oborové rady při tvorbě studijních programů ovlivněných tzv. „Boloňskou deklarací“ často k redukci hodin výuky matematiky ve prospěch odborných předmětů, k přeskupování těžiště výuky směrem ke společným formám, především k přednáškám. Byly v řadě případů ignorovány správné námitky matematiků, že základní matematika pro bakaláře zůstane také jedinou základní matematikou pro magistra v třístupňovém boloňském modelu. Byla formulována teze, která se však v současných společenských podmínkách zatím

ukazuje jako nesprávná, že studentovi prospívá, když se musí naučit orientovat se v matematických problémech sám, nejvýš s pomocí „tutorů“, kteří mu doporučí především styl a metodiku práce, spíše než by ho vybavili potřebnými dovednostmi. Tato cesta by nemusela být principiálně nesprávná v jiných kulturně-politických podmínkách, je však idealistická v podmínkách současné vzdělávací soustavy ČR. Aniž bych hlouběji analyzoval příčiny, musím konstatovat, že studenti na naši fakultu přicházejí s trvale se snižujícími pracovními návyky a dovednostmi v oblasti matematiky (a přírodních věd všeobecně). Kardinální otázkou, která před naší fakultou, tak jako před dalšími technickými školami stojí, je otázka, zda a jak rychle se podaří již v prvních semestrech jejich bakalářského studia komplexním působením všech zainteresovaných subjektů, tj. především také oborových kateder, nastolit při výuce přírodovědných předmětů takovou pracovní atmosféru, která by studenty motivovala k cílevědomé přípravě na budoucí aplikace matematických a fyzikálních znalostí a matematického způsobu uvažování v technických předmětech specializací a posléze také v samostatné praxi.

Je třeba přesvědčit studenty, kteří často z mnoha zdrojů „informací a poučení“, jakož i z úst zastupitelů a zákonodárců slýchají o „zbytečnosti“ matematiky a maturity z ní, že tento názor může platit pro různé humanitní profese a obory, nemůže však v žádném případě obstát u zájemce o studium na jakékoliv vysoké škole technického či ekonomického zaměření. Situaci v prvních semestrech na vysoké škole ale podle mého názoru není možné řešit násilně, formou represí a „drtivého tlaku“ ve výuce základní matematiky a dalších nadstavbových matematických předmětů, kterými jsou např. teorie pravděpodobnosti a statistika, operační výzkum, diskrétní a numerická matematika atd. Takový přístup odpor studentů k předmětu pouze dále prohlubuje. K dosažení úspěchu může vést pouze včasné přesvědčení studenta, že získání znalostí a dovedností v matematice a obdobných předmětech je pro něho v jeho další profesní dráze výhodné, nechceme-li tvrdit, že přímo nezbytné.

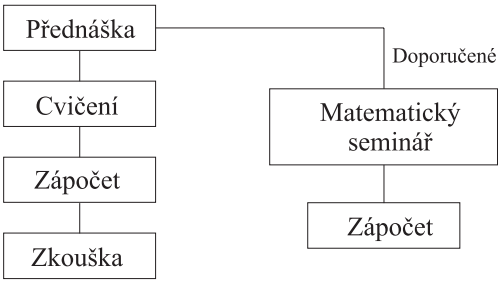
Současný stav výuky základní matematiky

Dopravní fakulta Jana Pernera Univerzity Pardubice přistoupila k redukci hodin výuky základní matematiky vcelku obezřetně. Snížení počtu hodin se dotklo v bakalářském studiu teprve druhého ročníku, ve kterém ve většině oborů není již předmět Matematika III, reprezentující sou-

stavy obyčejných diferenciálních rovnic, Fourierovy řady, základy komplexní analýzy a Laplaceovu transformaci. S některými z těchto partií by se měl setkat až student magisterského studia ve společném předmětu Aplikovaná matematika, který bude navíc zahrnovat i základy diskrétní a finanční matematiky.

Přesto přetrvávají výrazné problémy s úspěšností studentů v matematice v prvním a druhém semestru. Tyto problémy se projevují i v dalších předmětech, které vyžadují exaktní myšlení, především ve fyzice a informatice. Těžko bychom se však mohli tímto faktem utěšovat.

Výuka základní matematiky probíhá v současné době podle „klasického“ schématu, které je na obr. 1. Vychází z převážně teoretické přednášky, na které je uvedeno několik ilustrativních příkladů k probírané látce. Ta se pak procvičuje v menších skupinách pod vedením cvičících – matematiků. Poměr hodin přednáška – cvičení je 3/3 v obou semestrech 1. ročníku.



Obr. 1

Přednáška je společná pro všechny obory, rozlišit náplň podle oborů ve cvičeních se doposud nepodařilo, neboť cvičící učitelé – matematici většinou nejsou zainteresováni do problematiky jednotlivých oborů. Je to přirozené, uvážíme-li, že dva až tři cvičící, většinou absolventi pedagogického vzdělání, by měli obsáhnout deset oborů a zaměření vyučovaných na DFJP. Kromě toho nejsou učitelé základní matematiky kmenovými pracovníky Dopravní fakulty, ale Ústavu matematiky Fakulty ekonomicko-správní, takže záleží na rozhodnutí vedoucího ÚM, zda budou vyučovat matematiku na DFJP pravidelně a stabilně v týchž oborových studijních skupinách, nebo budou každoročně střídat skupiny nebo i fakulty. Jed-

nání s vedením ÚM FES se nyní připravuje. Po několika letech byl loni znovu otevřen matematický seminář, jehož výuky jsem se ujal a do kterého se zaregistrovalo cca 200 studentů prvního ročníku. Seminář měl tři paralelní skupiny, jednu technicko-ekonomickou a dvě konstrukčně-technické. V rozvrhu byly výukové hodiny zařazeny tak, že se semináře mohli zúčastnit i studenti kombinované formy studia. Matematický seminář se setkal mezi studenty s příznivým ohlasem, který míval i v minulých letech, než se přestal z ekonomických důvodů vyučovat (DFJP platí výuku matematiky fakultě ekonomicko-správní tzv. pedagogickými převody). Studenti distanční formy studia ocenili zejména výraznou úsporu času při následném samostudiu. Studenti prezenční formy shlédli některé aplikace z oblasti ekonomie, elektrotechniky, fyziky a mechaniky. Vyhodnotit statisticky přínos semináře ovšem nelze, protože loni došlo také ke změně hlavního přednášejícího.

Jak situaci nadále zlepšovat? Některé náměty jsem diskutoval v [1], po ročních zkušenostech ve funkci proděkana pro pedagogiku DFJP vidím dnes již některá úskalí a problémy navrhovaných řešení. Proto pojednám pouze o nejbližších možných opatřeních.

Tři varianty možných řešení

První variantu jsem již zmínil. Spočívá v zachování schematu z obr. 1, kdy učitelé ve cvičeních budou před začátkem výuky informováni garanty oborů o základních úlohách daných zaměření a takovéto úlohy potom v přiměřeném rozsahu zařadí do výuky v průběhu semestru. Znovu zdůrazňuji, že tento postup je nadějný, představuje však de facto proces dalšího vzdělávání pedagogů a má smysl pouze tehdy, bude-li zaručena personální stabilita na ÚM FES. Jinak by se jednalo v podstatě o ztráty času pedagogů i garantů.

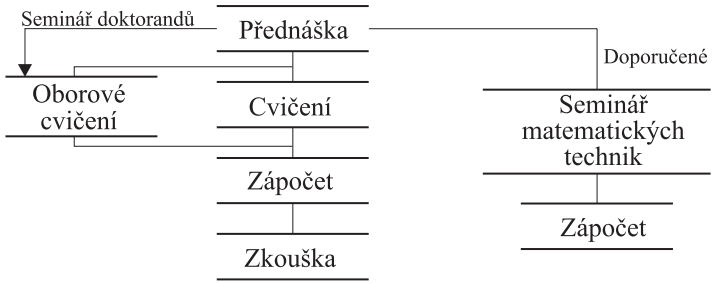
Oprostíme-li se od historických pohledů na výuku většiny předmětů na vysokých školách u nás a zapomeneme-li na klasické uspořádání výuky: jeden přednášející → jeden cvičící ve studijní skupině po dobu celého semestru, budou jistě k dispozici i schémata jiná, která by mohlo být vhodnější aplikovat na současnou výuku ve strukturovaném studiu. Diskutujme jen dvě z nich, přičemž si uvědomme, že další rozšiřující hodiny pro výuku matematiky už nezískáme. Je před námi několik požadavků:

1. rozlišit motivačně výuku matematiky podle oborů,
2. modernizovat výuku užitím některého speciálního software,

3. podchytit již v prvním ročníku nadané studenty a poskytnout jim nadstandardní matematické dovednosti, opět vzhledem k jimi studovanému oboru, nikoli všeobecně, a to v podstatě v rámci běžného rozsahu výuky, aby nebyli znevýhodněni v jiných předmětech.

Těmto požadavkům lze na DFJP vyhovět více či méně, všechna řešení však vyžadují úzkou spolupráci Ústavu matematiky, oborových kateder, především kolektivů jejich doktorandů, resp. Katedry informatiky v dopravě a jejích specialistů na aplikace matematického software. Musí jít o spolupráci vzájemně výhodnou, aby zainteresovaní pracovníci nejen předali své vědomosti a zkušenosti, ale také si je zároveň obohatili a prohloubili. Ale nyní již stručně k jednotlivým schématům.

Na obr. 2 je uvedeno schéma výuky s integrovaným cvičením.



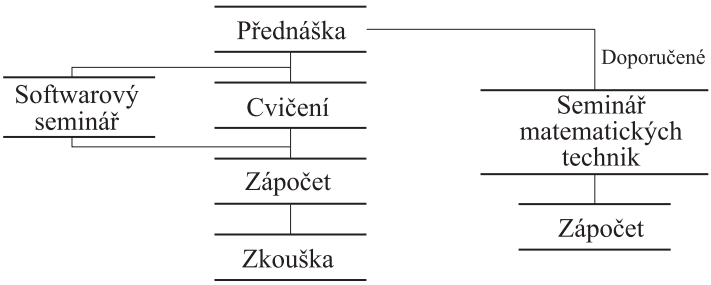
Obr. 2

Kromě klasického cvičení vedeného matematikem vstupuje do výuky oborové cvičení, vedené doktorandem, ve zvlášť speciálních případech i učitelem oborové katedry. Ten předvede a procvičí aplikace matematických pojmů a technik přímo na vybraných úlohách ze svého oboru. Konkrétní organizace nemusí být paralelní, spíše vzhledem k účelu např. dva týdny matematické a třetí týden oborové cvičení a pod. Příprava doktorandů na oborové cvičení proběhne ve spolupráci s matematikem i oborovým odborníkem, což povede k nastartování vzájemného dialogu obohacujícího všechny zúčastněné. Pedagogický tým, který takto vznikne, zajistí trvalou zpětnou vazbu mezi odborností a základem studia.

Toto řešení naráží na DFJP na současné znění Studijního a zkušebního řádu doktorského studia, který neformuluje příznivě povinnost

doktorandů vést výuku. Při minimálních výukových rozsazích se oborové katedry pochopitelně přednostně snaží zaměstnat doktorandy výukou ve vlastním oboru. Změny SZŘ se připravují k přijetí v příštím akademickém roce.

Na obr. 3 vidíme podobné schéma, které se liší jen strukturou cvičení.



Obr. 3

Tento způsob výuky, dokonce v poměru 1 : 1, již zvolily některé české vysoké školy. Místo dialogu mezi oborovými specialisty a matematiky je zde nastolena komunikace mezi matematiky a informatiky. Není jistě překvapivé, že mezi matematiky najdeme řadu odborníků – informatiků a naopak, ani to, že existují katedry, kde jsou zastoupeny obě blízké profese „pod jednou střechou“.

Také Katedra informatiky v dopravě získala v uplynulém roce několik pedagogů, kteří svým profesním zaměřením obsáhnou obě disciplíny. Celková personální situace katedry v současné době však zatím nejspíš bude vyžadovat jejich plné nasazení v informatických předmětech.

Závěr

Předložené modely výuky lze dále modifikovat a navzájem kombinovat. Je třeba vybrat nyní schůdnou cestu, na kterou bychom se vydali. Půjde nejspíš nejprve o variantu z obr. 2, přičemž proporce jednotlivých složek cvičení bude třeba najít experimentálně a „politická práce“, která bude nezbytná pro přesvědčení všech zúčastněných, bude značná. Uplatnění Boloňské deklarace v praxi totiž podle mého názoru znamená překonat vžité názory o rozdělení předmětů na předměty základu a předměty oboru, překonat stále ještě existující rivalitu mezi vyučujícími těmto

předmětům a nahrazení této rivality pevnou a efektivní spoluprací. Jinak povedou boloňské principy neodvratně k degradaci českého technického vysokého školství.

Literatura

[1] Prouza L.: *Integrovaná výuka matematiky ve strukturovaném studiu na Dopravní fakultě Jana Pernera Univerzity Pardubice.* 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických, sborník příspěvků, Brno 2003. ISBN 80-85960-51-6.

Aplikace počítačů ve výuce geometrie

Jarmila Robová

Úvod

V posledních letech jsou počítače a další prostředky ICT stále více využívány ve výuce matematiky na různých úrovních vzdělávacího systému. I když jsou počítače zařazovány především do kurzů matematiky na vysokých školách, můžeme pozorovat jejich postupné prosazování ve výuce na středních i základních školách. Zatímco studenti vysokých škol běžně pracují s matematickými programy jako jsou Mathematica nebo Maple, pro většinu studentů středních a základních škol je tento či podobný software nedostupný, a to z několika důvodů. Ponecháme-li stranou finační důvody, patří k hlavním příčinám této situace především ta skutečnost, že jedním z cílů matematického vzdělání na základních a středních školách je osvojení početních dovedností a vztahů mezi matematickými objekty. Z tohoto pohledu se jeví využití uvedeného matematického software na této úrovni jako problematické; zařazení matematických programů do výuky vyžaduje ze strany učitele nejen dobrou znalost používaného software, ale klade také nároky na didaktickou část jeho přípravy, neboť učitel musí posoudit, v jaké fázi vyučovacího procesu použije tento prostředek, aby byly splněny výukové cíle.

Geometrický software

Mezi tematické okruhy školské matematiky, ve kterých jsou počítače v současné době v širší míře na základních a středních školách využívány, patří geometrie, konkrétně planimetrie a stereometrie. Pro výuku těchto okruhů je u nás k dispozici kvalitní a finančně dostupný software Cabri, který přináší do výuky geometrie nové efektivní metody práce. Kromě software Cabri jsou pro výuku geometrie a „příbuzných“ odborných předmětů na středních odborných školách využívány různé CAD systémy, jejichž ovládnutí je náročnější, než je tomu u software Cabri.

Na MFF UK v Praze jsou budoucí učitelé matematiky seznamováni s možnostmi využití počítačů ve výuce matematiky především v rámci různých výběrových seminářů. Ve školním roce 2003/2004 byl jako součást řešení projektu FRVŠ, který se zabývá uvedenou problematikou, realizován výběrový seminář „Aplikace počítačů ve výuce geometrie“. Cílem semináře je, aby se studenti seznámili s různými geometrickými programy (Cabri, AutoCAD, DesignCAD, Rhinoceros) a s jejich využitím ve výuce konkrétních geometrických témat školské matematiky. V semináři jsou postupně probírány následující programy:

- *Cabri Geometrie II*

  (planimetrie – kružnice, kruh a jejich části, n-úhelníky; geometrická zobrazení v rovině, vektory, lineární a kvadratické útvary v rovině, tvorba maker),
- *AutoCAD LT 2002 CZ*

  (základní příkazy využitelné při řešení planimetrických úloh a při výuce shodných zobrazení v rovině, vytváření ornamentů),
- *DesignCAD Pro 2000*

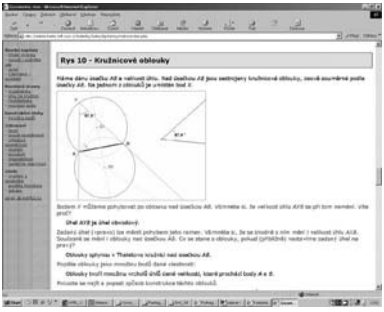
  (základní funkce a zobrazovací možnosti programu, přehled příkazů pro modelování křivek a ploch, tvorba 3D objektů pomocí konstrukčního modelu a šablonováním, propojení s výukou stereometrie – řezy těles, geometrické transformace v prostoru),
- *Rhinoceros*

  (základní příkazy, vytváření elementárních křivek a těles, změna polohy a tvaru nakreslených objektů a využití v úlohách na shodná a podobná zobrazení, vytváření ploch pomocí booleovských operací, řezy těles, sítě těles).

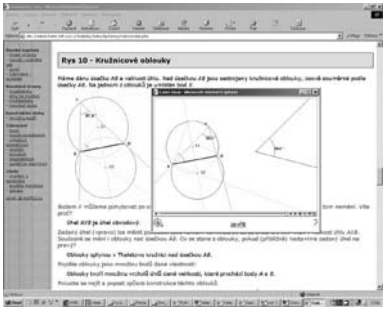
Zkušenosti získané v průběhu semináře ukazují, že pro výuku planimetrie na základní a střední škole je nejvhodnější software Cabri (respektování potřeb školské matematiky, jednoduché ovládání, česká lokalizace); pro výuku stereometrie je dobře vybaven software Rhinoceros, avšak jeho ovládnutí je náročnější (nižší cena vzhledem k jiným CAD systémům, určen pro průmyslové modelování, anglická verze).

Budoucí učitelé matematiky využívají znalosti získané z výběrových seminářů také při psaní diplomových prací. K těmto pracím patří diplomová práce [1], která již byla obhájena a která je věnována výuce

planimetrie s využitím software Cabri (obr. 1, obr. 2). Práce má formu webových stránek a obsahuje řadu hotových rysů – apletů, vytvořených pomocí nástroje CabriJava. Rysy jsou doplněny podrobnými návody a úkoly tak, aby studenti dospívali k osvojení nových poznatků na základě experimentování s geometrickými objekty v rysu.



Obr. 1



Obr. 2

K dalším výhodám této práce patří především to, že učitel nemusí sám rysy vytvářet a dokonce nemusí ani ovládat software Cabri, neboť použití apletů je do značné míry intuitivní; ke spuštění apletů není potřeba software Cabri. Diplomová práce je dostupná na adrese http://adela.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/ukazky.

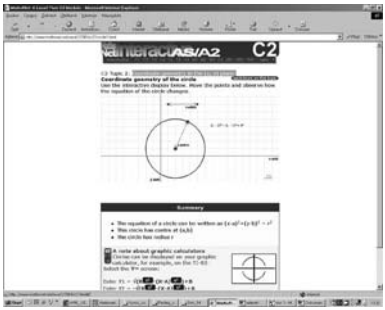
Internet a geometrický software

I když je Cabri Geometrie využívána na stále větším počtu středních a základních škol, existuje řada škol, které nemají k dispozici žádný software pro výuku geometrie. Prostředek, který může do určité míry ve výuce nahradit geometrický program, je Internet. Na webových stránkách lze nalézt různé animace, skripty či aplety, které podobně jako počítačové programy slouží k dynamickému znázornění matematických pojmů a vztahů.

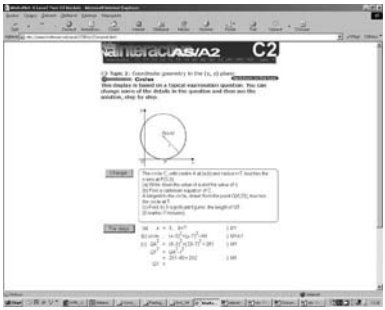
Podle zkušeností, které jsme získali v průběhu posledních let, existuje jen málo webových stránek využitelných ve výuce. Mezi kvalitní stránky věnované výuce geometrie v anglickém jazyce patří:

- *MathsNet* (www.mathsnet.net)
- *Manipula with Java* (www.ies.co.jp/math/java)

Na stránkách *MathsNet* lze najít témata z analytické geometrie, trigonometrie a planimetrie. Uživatel je nejdříve stručně seznámen s teorií, která je často doprovázena názornými aplety (obr. 3), následují testové otázky doplněné bodovým ohodnocením, vzorovým řešením a časovým limitem (obr. 4). V závěru každého tématu je uveden stručný přehled teorie, kterou by si měl student zapamatovat.



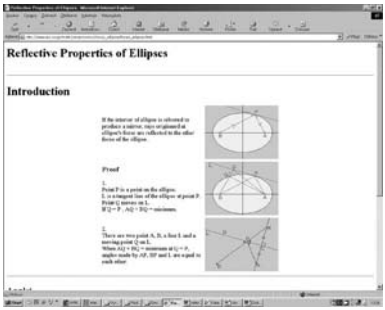
Obr. 3



Obr. 4

Stránky *Manipula with Java* obsahují soubor 279 apletů (obr. 5, obr. 6), mezi kterými lze nalézt aplety z trigonometrie, analytické geometrie a planimetrie. Jednotlivé aplety jsou doplněny teorií a návodem na ovládání apletu.

Obr. 5



Obr. 6

Také v českém jazyce lze na internetu najít kvalitní stránky věnované geometrii, které stojí za pozornost. Jsou to především stránky:

- Cabri geometrie (www.pf.jcu.cz/cabri)
- Prezentace geometrických témat (www.pef.zcu.cz/pef/kmt/projekt/), obr. 7
- WWW projekty (www.gphmi.sk/pages/studproj.html), obr. 8

Obr. 7

Obr. 8

První dvě adresy odkazují na stránky pedagogických fakult Jihočeské a Západočeské univerzity a kromě jiného jsou zde k dispozici diplomové práce studentů těchto univerzit (Západočeská univerzita – práce Kuželosečky, Apolloniovy úlohy; Jihočeská univerzita – odkazy Materiály, Témata). Na třetí adrese nalezneme stránky slovenského gymnázia, kde jsou zveřejněny práce studentů, které uspěly v SOČ (Konstrukce trojúhelníků, Množiny bodů, Úhly v kružnicích).

Závěr

Matematika převážně pracuje s abstraktními pojmy, u kterých se jen obtížně vytvářejí názorné představy. Počítač a matematický software či webové stránky mohou v takových případech sloužit jako pomůcka, kterou lze využít při vytváření a dalším formování některých pojmů a vztahů, a to nejen v geometrii.

Literatura

[1] Bonuš Z.: *Využití software dynamické Cabri geometrie ve výuce geometrie na střední škole.* Diplomová práce, UK MFF, Praha 2003.

[2] Robová J.: *Internet a školská matematika.* In.: Sborník příspěvků „XXI. mezinárodní vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu“, CD, VVŠ PV, Vyškov 2003.

[3] Robová J.: *Výukové programy z matematiky na internetu.* In.: Pedagogický software 2004, sborník příspěvků, CD, České Budějovice 2004.

[4] Šibravová L.: *Výuka matematiky na střední škole s využitím internetu.* Diplomová práce, UK MFF, Praha 2003.

Geometrické kompetence a jejich hodnocení ve vyučování matematice

Filip Roubíček

Novým prvkem v našich i zahraničních kurikulárních dokumentech je pojem *kompetence* (viz [3]). V poslední době je často diskutován především v souvislosti s připravovanými rámcovými vzdělávacími programy (dále jen RVP), v nichž se hovoří o tzv. *klíčových kompetencích.* V Pedagogickém slovníku [5] je pojem klíčové kompetence vymezen jako *soubor požadavků na vzdělávání, zahrnující podstatné vědomosti, dovednosti a schopnosti univerzálně použitelné v běžných pracovních a životních situacích.* Podstatné pro ně je to, že *nejsou vázány na jednotlivé předměty, nýbrž by měly být rozvíjeny jako součást obecného základu vzdělávání.* Tím se liší od tzv. *oborových kompetencí*, jež jsou spjaty s obsahem určitého vzdělávacího oboru. *Geometrickými kompetencemi* budeme tedy rozumět soubor vědomostí, dovedností a schopností spjatých s určitým geometrickým obsahem.

Rozvoj klíčových kompetencí představuje nosnou ideu RVP. V třetí verzi RVP pro základní vzdělávání [8, s. 5] se uvádí, že *základní vzdělávání má žákům pomoci získávat a postupně zdokonalovat klíčové kompetence a poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání.* Klíčovými kompetencemi se v tomto dokumentu [8, s. 7] rozumí *souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové kompetence považovány: kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní.*

Matematika, resp. *Matematika a její aplikace* tvoří v RVP ZV jednu z devíti vzdělávacích oblastí a je rozdělena do čtyř tematických okruhů. *V ... tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují*

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR č. 406/03/D052.

a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací. [8, s. 21] Uvedená charakteristika nám poskytuje jen rámcovou představu o geometrických kompetencích, které jsou stanoveny pro základní vzdělávání. Podrobnější materiál představuje přehled očekávaných výstupů, avšak ani ten není zpracován v takové podobě, aby se mohl stát základem učební osnovy. Právě tento nedostatek RVP ZV považuji za vážné nebezpečí pro tvorbu školního vzdělávacího programu a jeho následnou realizaci.

Geometrické kompetence lze charakterizovat činnostmi, které žák provádí. Hovoříme o tom, že žák umí:

- geometrizovat, tzn. rozpoznat geometrické objekty a reprezentovat reálné situace geometrickými prostředky;
- určovat metrické vlastnosti geometrických útvarů měřením, odhadem a výpočtem;
- určovat polohové vlastnosti geometrických útvarů a třídit je podle daných hledisek;
- modelovat geometrické útvary (překládáním papíru, z krychlí atd.);
- rýsovat a načrtávat;
- konstruovat geometrické útvary a řešit konstrukční úlohy;
- dokazovat a argumentovat.

Tento přehled geometrických kompetencí, který částečně koresponduje s Kuřinovým pojetím matematiky jako *umění počítat, umění vidět, umění konstruovat, umění dokazovat, umění abstrahovat* [1], vznikl zobecněním výčtu očekávaných výstupů uvedených v RVP ZV. Předkládá základní linie vzdělávání v oblasti geometrie. Je třeba podotknout, že vymezení kompetencí a zejména úrovní jejich osvojení v jednotlivých ročnících je náročným úkolem (a to i pro odborníka), ovšem pro tvorbu učební osnovy představuje důležité východisko. Vyvstává otázka, jak si s tím poradí učitelé – tvůrci školních vzdělávacích programů.

Domnívám se, že zavedení RVP ZV do školské praxe ovlivní vyučování geometrii spíše po stránce metodické než obsahové. Realizace vzdělávacího programu, jehož prioritou je rozvoj kompetencí, bude vyžadovat

změnu v přístupu k vyučování geometrii. „Axiomatický“ pohled na geometrii bude muset ustoupit do pozadí, aby mohl být dán větší prostor zkušenostem a vlastní činnosti žáků. Zřejmě bude také nutné opustit monotematičnost, která sice na jedné straně vnáší do výuky geometrie určitý systém, ale na druhé straně jí činí málo efektivní. Spojující prvek bude třeba hledat v řešení úloh a problémů. Asi jen tímto způsobem se podaří docílit toho, že učivo bude nikoli cílem, nýbrž prostředkem vzdělávání. Taková změna pojetí vyučování by mohla v konečném důsledku přispět k pochopení smyslu geometrie. (Například konstrukční úlohy představují ideální prostředek pro rozvíjení kompetence k řešení problémů. Struktura řešení konstrukční úlohy „rozbor – postup konstrukce – provedení konstrukce – ověření a diskuse“ koresponduje s požadavky uvedenými v RVP ZV. Našli bychom jistě řadu dalších příkladů, které svědčí o tom, že geometrie má v rozvíjení klíčových kompetencí své nezastupitelné místo.)

Za veliké úskalí pro realizaci vzdělávacího programu orientovaného na rozvoj kompetencí považuji hodnocení jeho výstupů. Je zřejmé, že *učitel by měl začít klást důraz při hodnocení nikoli na konkrétní poznatky žáka, ale na úroveň jeho osvojení poznatkově-dovednostních struktur, které nazýváme kompetencemi* [7]. Ale jak kompetence hodnotit? Jak zjistit úroveň jejich osvojení? Jistě nevystačíme s metodami prověřování znalostí jako doposud. Pro hodnocení geometrických kompetencí budeme potřebovat nové nástroje v podobě komplexně pojatých úloh nebo žákovských aktivit, jako jsou například hry Sova [2] nebo Stavíme dům [6]). Právě otázka hodnocení kompetencí je jedním z problémů, jehož řešení RVP nepředkládá, přestože je pro úspěšnou realizaci vzdělávacích programů zaměřených na rozvoj kompetencí nezbytné.

Je třeba otevřeně říci, že RVP sice nabízí možnost pozitivních změn ve vzdělávání, zároveň ale přináší řadu rizik. Obavy, které se objevují v souvislosti s připravovanou školskou reformou, jsou opodstatněné (viz [4]). Hlavní pozornost je totiž věnována tvorbě školních vzdělávacích programů, zvláště jejich obsahové stránce, a realizační stránka zůstává v pozadí. Tato skutečnost může nakonec vést k tomu, že vzdělávání orientované na rozvoj kompetencí vyzní i přes všechna svá pozitiva negativně.

Literatura

[1] Hejný M., Kuřina F.: *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

[2] Jirotková D.: *Zkoumání geometrických představ.* Disertační práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha 2001.

[3] Kubínová M., Sýkora V.: *Vyučování geometrii a rozvoj žákovských kompetencí.* In: Ausbergerová M., Novotná J., Sýkora, V. (ed.) *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* JČMF, Praha 2002, s. 23–34.

[4] Kuřina F.: *Rámcové vzdělávací programy a naše škola.* In: *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let (sborník příspěvků).* Litomyšl 2003. (v tisku)

[5] Průcha J., Walterová E., Mareš J.: *Pedagogický slovník.* 4. vyd., Portál, Praha 2003.

[6] Roubíček F.: *Několik cest do světa stereometrie.* In: Uhlířová M. (ed.) *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy (Sborník příspěvků).* Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Olomouc 2004, s. 218–222.

[7] Sýkora V.: *Práce s daty v západoevropských školách.* In: *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let (sborník příspěvků).* Litomyšl 2003. (v tisku)

[8] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (3. verze).* Výzkumný ústav pedagogický, Praha 2004. http://www.vuppraha.cz/

Praha plná čísel (matematika, kde byste ji nečekali) Ukázka využití projektu ve vyučování matematice (v cizím jazyce)

Jan Složil, Šárka Cviková, Šárka Švábová, Zdeňka Šimonová

1 Content and Language Integrated Learning

Content and Language Integrated Learning (CLIL) je široký termín, který označuje výuku některého z nejazykových všeobecně vzdělávacích předmětů prostřednictvím cizího jazyka (např. matematika v anglickém jazyce). Obsah daného předmětu je rozvíjen v cizím jazyce a naopak, cizí jazyk se procvičuje a zdokonaluje pomocí obsahu příslušného předmětu. Za formu CLIL se považuje již takové vyučování, kde se minimálně 25 % výuky odehrává v cizím jazyce. Postupně se obsah a jazyk dostávají do rovnováhy, obě složky se integrují. Výuka má dva cíle, jeden se vztahuje k příslušnému tématu či předmětu, druhý se váže k cizímu jazyku. [1]

CLIL je také zkrácený název kurzu, který je vyučován na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze ve spolupráci Katedry matematiky a didaktiky matematiky a Katedry anglického jazyka a literatury. V rámci CLILu představují studenti své projekty, ukázkové hodiny, prezentace v anglickém jazyce a ostatní tvoří cílovou skupinu, pro kterou je výstup určen. Jde-li například o anglický výklad týkající se lineárních rovnic, jejich grafů a využití v praxi, zahrají si posluchači na žáky osmé nebo deváté třídy a snaží se reagovat tak, jako by asi reagovali autentičtí žáci. Není to tedy jenom výklad, jedná se vždy spíše o simulaci hodiny, kde žáci reagují na učitelovy otázky, ptají se, chodí k tabuli atd. Po skončení výstupu se vždy analyzuje, co bylo dobré, co by se dalo případně zlepšit, jak využít jednotlivé úlohy pro jiné ročníky, a podobně,

Práce je součástí řešení projektu *CLIL – kurs podle standardu EU, Matematika v angličtině.*

námětů k diskuzi je nespočet. Své poznatky se potom snažíme uplatnit na školách, kde někteří z nás učí, jiní konají praxi.

Jeden z projektů připravených v rámci kurzu CLIL ve školním roce 2003/2004 nyní představíme. Projekt byl realizován v různých modifikacích v angličtině se dvěma různými skupinami řešitelů – s účastníky kurzu CLIL a se studenty učitelství na konferenci *Quality Class*, která byla v červenci 2004 součástí konference *History and Pedagogy of Mathematics* ve švédské Uppsale.

V dalším textu uvádíme verzi projektu, která byla použita jako základ pro pracovní dílnu na Quality Class. Cílem bylo přiblížit účastníkům některé význačné památky Prahy, její pověsti, ale i události z poslední doby a přitom pracovat s čísly. Projekt byl realizován v angličtině, zde předkládáme jeho českou verzi.

2 Projekt Čísla všude kolem nás

Za dávných časů, v 16. století za panování Rudolfa II., žil v Praze rabín Jehuda Löw ben Bezalel. Byl to velmi vzdělaný muž, perfektně znal nejen židovské náboženství, ale také se vyznal ve hvězdářství a fyzice. Z jeho praktických činů můžeme jmenovat například to, že založil například rabínské učiliště. Legenda však praví, že stvořil umělého člověka, jménem Golem. Golem byl oživen z hlíny čtyřmi živly. Jeho úkolem bylo střežit pražské židovské město před úklady křesťanů. Říkalo se, že jedině rabín uměl Golema oživit a Golem pak poslouchal jen jeho příkazy. Těsně před svou smrtí však rabín Golema kamsi ukryl, aby nepadl do špatných rukou, a od té doby Golema nikdo nespatřil. Snažil se ho najít i sám Rudolf II., který měl o něj velký zájem, ale nepodařilo se to ani jemu, ani nikomu jinému. O několik století později se studentům pedagogické fakulty podařilo objevit plánek, který snad naznačuje, kde by mohl být Golem ukryt. Je na něm mapka, několik bodů, z nichž je třeba vybrat šest správných, které tvoří šestiúhelník. V jeho středu prý leží budova, kde se nachází ukrytý Golem. Zkusíte ho najít? Stanete se slavnými a všichni archeologové světa vám budou ležet u nohou! Před vámi je šest úloh. Některé jsme museli upravit, abyste lépe poznali Prahu. Když odpovíte správně na každou z nich, měli byste mít na konci šest správných bodů, které tvoří onen šestiúhelník. Přejeme vám hodně štěstí a s napětím čekáme na váš výsledek...

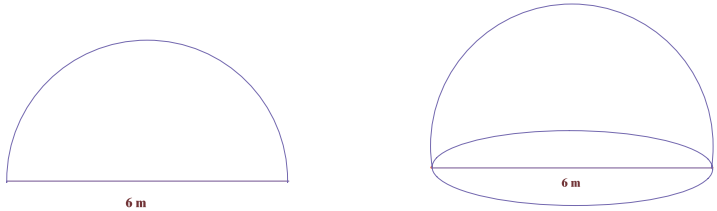
Příklad 1 Víte, co je to Orloj? To jsou hodiny umístěné většinou ve věži, které neukazují jen čas, ale i například astronomické období, znamení zvěrokruhu a fáze měsíce. Jeden z nejznámějších orlojů v Evropě se nachází v Praze na věži Staroměstské radnice. Pochází z roku 1410 a sestrojil ho Mikuláš z Kadaně. Ručičkami orloje otáčí soustava velkého množství ozubených kol. A právě této soustavy se týká váš první úkol. Představte si hlavní kolo (1), na němž je zavěšeno kyvadlo. Toto kolo (1) otáčí celým systémem. Má přesně 600 zubů a průměr 4 metry. Kolo (1) zapadá do kola (2), které má jen 240 zubů. A nakonec, kolo (2) otáčí kolem velké hodinové ručičky (3), o kterou nám jde. Kolo (3) má 360 zubů a za hodinu se otočí přesně jednou. Je až neuvěřitelné, jakou cestu vykonala všechna kola v orloji za dobu od jeho spuštění. Orloj byl v provozu (s menšími přestávkami na občasné opravy) neustále!

Úkol zní: představte si, že na největším kole (1) je na jednom zubu červená tečka. Když budeme uvažovat, že Mikuláš z Kadaně spustil orloj 1. 1. 1410 v 0.00 hodin a řekneme, že se orloj za celou dobu nikdy nezastavil, jak dlouhou cestu urazila ona červená tečka do začátku července tohoto roku, tedy do 1. 7. 2004 0.00 hod? Nezapomeňte na přestupné roky, všechno se počítá, každý den roste vzdálenost!
Poznámka: systém přestupných roků tak, jak ho známe dnes my, platí od roku 1582.

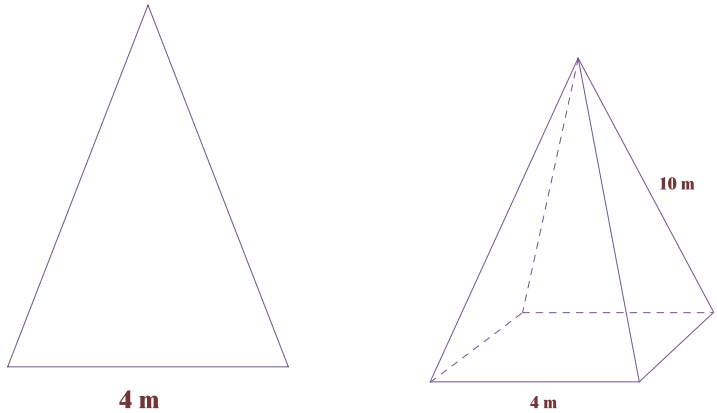
Příklad 2 O Praze se říká, že je „stověžatá“. Je to přívlastek, který vznikl za dob království, a to hlavně proto, že vlastně nikdo nevěděl, kolik těch věží je. Jako první se je pokusil spočítat pražský matematik Bernardo Bolzano (určitě znáte nějaké jeho matematické věty) a došel k číslu 103. V dnešní době má Praha přes 500 věží, někteří odhadují až 1 000! Tyto věže jsou stavěny ve stylu románském, gotickém, barokním, renesančním,... Praha prošla všemi architektonickými styly. Před vámi nyní stojí další úkol týkající se věží. Pro jeho větší snadnost jsme opět poněkud „upravili realitu“.

Budeme předpokládat, že má Praha 500 věží. Pro vás jsme vytvořili tři průměrné pražské věže (viz obr. 1). Řekněme, že model (1) je zastoupen 100 věžemi a modely (2) a (3) mají po 200 zástupcích. Vaším úkolem je spočítat povrch všech těchto věží. (Jen pro přesnost: podstavy se nepočítají, jenom obsah pláště) Protože jich je opravdu mnoho, zajímalo by nás, jestli by jejich plocha pokryla celé Staré Město, jehož rozloha je 1 290 000 m^2.

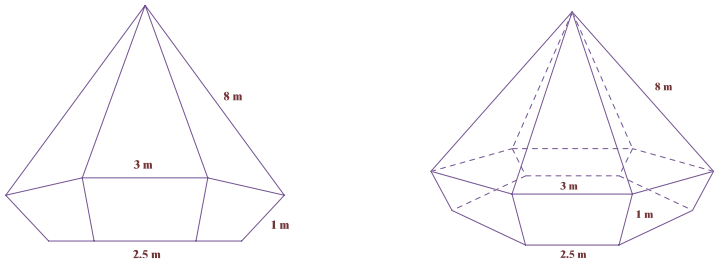
(1)



(2)



(3)



Obr. 1

Příklad 3 Asi nejznámějším mostem v Praze je 516 metrů dlouhý Karlův most, který spojuje dva břehy Vltavy, Staré Město a Malou Stranu. Měl dva předchůdce: jako první byl postaven v 10. století dřevěný most a v roce 1170 ho nahradil Juditin most. Ten však v roce 1342 strhla povodeň. A tak tehdejší český král Karel IV. nechal v roce 1357 postavit nový most, tehdy zvaný Kamenný. Až po Karlově smrti přijal na jeho počest jméno Karlův. Podle kronik se tehdejší stavbaři rozhodli, že do malty přidají vejce, aby byla pevnější. A tak přijížděly do Prahy vozy z českého venkova a vozily vajíčka do malty. Přivážela se jedna kopa vajec za druhou. Kolik kop museli přivézt, když průměrně na postavení jednoho metru délky mostu bylo třeba přibližně 250 vajec? Kopa je stará česká míra a znamená šedesát kusů. Z těchto měr je ještě používaný tucet, což je dvanáct kusů. Aby se vám lépe počítalo, dodáme, že když se lidé z jihočeského města Velvary dozvěděli, že se mají vozit vejce na stavbu, rozhodli se, že také přispějí. Aby se jim vejce cestou nerozbila, uvařili je. Když s nimi přijeli do Prahy, všichni se jim smáli, protože vařená vejce se do malty dát samozřejmě nedají! A tak měla alespoň celá Praha vaječné hody.

Příklad 4 V 17. století vypukl v Praze mor. Byl součástí takzvané morové rány, která tehdy zasáhla celou Evropu. Tuto hrůznou nemoc nám dodnes připomínají morové sloupy, vytesané z jednoho kusu kamene. Tyto sloupy prý měly ochraňovat Prahu před další takovou pohromou. Aby nebylo v Praze málo neštěstí, rozmohly se neštovice a cholera. Z tehdejších 100 000 obyvatel se morem nakazilo přibližně 60 000, neštovicemi asi 9 000 a cholerou přibližně 35 000. Mor souvisel s nečistým prostředím, ve kterém lidé žili. Stejně tak cholera, proto není divu, že třetina lidí, kteří byli nakaženi morem, měla i choleru. Desetina těchto nešťastníků dostala dokonce i neštovice. Cholera a neštovice zároveň nebyly tak častými jevy jako mor a neštovice zároveň. Na každé tři obyvatele nakažené morem a neštovicemi připadl jeden, který měl choleru a neštovice. Samotné neštovice byly ještě méně častým jevem, měl je pouze každý stý obyvatel tehdejší Prahy. Tato morová rána velmi podstatně ovlivnila počet obyvatel, jelikož tehdy ještě Pražané neměli léky na tyto nemoci. Nakazil-li se člověk morem, pravděpodobnost, že přežije, byla jen 50 %. U cholery to bylo 80 % a na neštovice umíraly jen malé děti, takže pravděpodobnost přežití byla 96 %. Kolik obyvatel Prahy tehdy přežilo?

Příklad 5 Poslední dvě úlohy jsou ze současnosti, museli jsme změnit zadání, bylo by jinak moc obtížné. Autor plánku nejspíš netušil, že jeho úlohy budou řešit největší evropské studentské kapacity: V roce 2002 zažila Praha nejhorší povodeň za posledních 500 let. Povodeň přišla v srpnu po prudkých přívalových deštích, a to ve dvou vlnách. Řeka Vltava, která má průtok normálně 150 m^3/s, měla při první vlně průtok 5 000 m^3/s a při druhé dokonce 6 500 m^3/s, a to po dobu 30 hodin! Povodeň v Praze napáchala škody, z nichž se město dosud vzpamatovává. Bylo zaplaveno metro, velká část čtvrtí, které jsou na břehu Vltavy, a nechybělo málo a bylo zaplaveno i celé historické centrum města, což by znamenalo nevyčíslitelné škody. I tak jsme ovšem měli (a někde ještě pořád máme) plné ruce práce s nápravou škod. Jen si představte, 6 500 m^3 vody se každou vteřinu valilo do Prahy! Dejme tomu, že bychom měli bazén velký jako Uppsala (76,5 km^2). Do jaké výšky by sahala voda, kdyby do něj přitékala po oněch 30 hodin proudem 6 500 m^3/s?

Příklad 6 A jeden bonbónek nakonec. Jak jistě víte, jsme všichni studenty Karlovy univerzity v Praze. Založil ji Karel IV., o němž už byla řeč. Vaším úkolem je zjistit, kdy byla Karlova univerzita založena. A protože jsme tu všichni matematici, spočítáme si tento rok. Máte na výběr ze dvou úloh. Obě dvě vám dají stejný výsledek, a to rok, kdy byla založena Karlova univerzita. První úloha je výpočet určitého integrálu a ve druhé je zadána funkce a hodnota maxima této funkce je hledané číslo.

a) $100 \cdot \displaystyle\int_{3}^{2\,393} \frac{2x-5}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

b) $f(x) = -128x^4 + 1\,024x^3 - 3\,072x^2 + 4\,096x - 700$

3 Závěrečné poznámky

Reakce studentů kurzu CLIL byly kladné. Všichni se vyjádřili v tom smyslu, že je projekt motivující k další činnosti v matematice. Studenti CLILu posuzovali správnost zadání úloh, hledali případné nejasnosti v textu. Zkoušeli také úlohy řešit, ovšem v odlišných podmínkách, než za kterých byl projekt zadáván v Uppsale. V textu žádné potíže a nejasnosti nenašli. Problémy nastaly až při řešení, jehož časové omezení bylo příčinou několika chyb z nepozornosti. Tyto problémy při Quality class nebyly.

Studenti Quality class měli s projektem větší potíže, než jsme čekali. Hlavně se projevily jazykové problémy. Angličtina některých účastníků nebyla na takové úrovni, aby ji použili jen jako prostředek k získání informací. Mnohým dělala potíže orientace v textu nebo komunikace. Prezentace jako taková měla velký úspěch a všichni nám potvrdili, že projekt splnil účel, totiž že jim Prahu přiblížil. Povídali jsme si i o tom, zda si myslí, že je vhodný pro studenty matematiky, i pro ty méně nadané. Shodli jsme se na tom, že ano, protože se v projektu nevyskytují jenom matematické operace, je třeba řadu informací hledat na Internetu, zjišťovat, kreslit apod.

O svých zkušenostech z Quality class budeme podrobněji informovat na konferenci.

Literatura

[1] Hofmannová M., Novotná J.: *CLIL – Nový směr ve výuce.* Cizí jazyky, roč. 46, 2002/2003, číslo 1, s. 5–6.

[2] Kubínová M., Novotná J.: *Projekty ve vyučování matematice na základní škole.* [Metodická sbírka příkladů pro učitele ZŠ a G, studenty PF a další zájemce.] Pedagogické centrum, Plzeň 1998.

[3] Skalková J.: *Obecná didaktika.* ISV nakladatelství, Praha 1999.

Skúsenosti s počítačom podporovanej výučby geometrie na základnej škole

Kristína Sotáková

Abstrakt

The use of computers in teaching of mathematics become important nowadays. In the proposed paper we describe two experiments that we have realized with students at basic school. The first experiment has concerned with teaching transforms of symmetry and the second one the angles but both using the graphical software Cabri Geometry.

We have compared the knowledge of two groups of students whereby one of them was teached by using the Cabri Geometry and the second one in a common way. The advantages and disadvantages of both assets are presented as a conclusion of the paper. A change in teaching curricula when using computers seems to be unavoidable.

Úvod

V súčasnosti sa veľa výskumných kolektívov zaoberá špecifikáciou podmienok úspešného integrovania počítačov do výučby, ako aj charakterizovaním účinku a prínosu počítačovej výučby v školských podmienkach.

V našom príspevku chceme analyzovať experimentálnu výučbu, ktorú sme realizovali v priebehu mája 2004 na základnej škole v Bratislave. Témy, ktorými sme sa zaoberali, sa týkali výkladu učiva v rámci tematických celkov „Osová súmernosť“ (7. ročník) a „Súhlasné a striedavé uhly“ (6. ročník).

Cieľom nášho experimentu bolo využitie didaktického softvéru *Cabri Géometrè* ako učebnej pomôcky pre skvalitnenie vyučovania geometrie a zároveň skúmanie efektívnosti tohto spôsobu výučby.

Práca je rozdelená do štyroch častí. V prvej časti stručne charakterizujeme podmienky experimentu. V druhej časti sa podrobne venujeme výučbe osovej súmernosti. Tretia časť opisuje experiment s praktickou

výučbou súhlasných a striedavých uhlov klasickým spôsobom a tiež pomocou počítača. Štvrtá časť analyzuje získané poznatky a prináša nové témy výskumu.

1 Podmienky experimentu

Základná škola, na ktorej sme uvedený experiment realizovali, je pomerne malá a priemerný počet žiakov v triedach sa pohybuje okolo dvadsať, čo sa ukázalo výhodné pre náš experiment. Škola je zapojená do projektu INFOVEK, vlastní počítačovú učebňu s desiatimi počítačmi. Používanie moderných vyučovacích metód pomocou počítača nie je na tejto škole realizované v dostatočnej miere hlavne z dôvodu náročnosti prípravy vyučovacej hodiny zo strany učiteľa a tiež množstva času, ktorý treba vyhradiť na „zaúčanie„ žiakov pri práci s počítačom. Pre naše účely sme Cabri Geometré využili pri vyučovaní žiakov v 6. a 7. ročníku pri výklade nového učiva v rámci riadnej vyučovacej hodiny matematiky, pričom žiaci tento didaktický softvér predtým nepoznali. Ich prvý kontakt s Cabri Geometré bol práve na tejto vyučovacej hodine. Počas hodiny sme sa riadili nasledujúcou osnovou:

1. Uvedenie žiakov do používania nástrojov Cabri Geometré (najmä tých nástrojov, ktoré budú počas vyučovania využívať),
2. Motivácia k novému učivu,
3. Pokyny k vypracovaniu pracovných listov,
4. Samostatná práca žiakov za astistencie učiteľa,
5. Spoločné vyhodnotenie hodiny.

V ďalšej časti nášho článku sa sústredíme na podrobnejší popis dvoch experimentov.

2 Experiment s osovou súmernosťou

Počas prvého experimentu bola v triede prítomná aj ich učiteľka matematiky, ktorá žiakov usmerňovala, pričom sme priebežne diskutovali o problémoch, ktoré sa v triede vyskytli. Žiaci pracovali samostatne a prípadné otázky týkajúce sa samotného softvéru konzultovali. Na začiatku hodiny sme žiakom vysvetlili základy práce s grafickým softvérom Cabri Géometrè, pričom sme sa orientovali na ponuku nástrojov súvisiacu s učivom Osová súmernosť (trojuholník, priamka, bod, pomenovanie, úsečka, dĺžka úsečky, osová súmernosť). Tomuto úvodu sme venovali asi

desať minút. Následne sme žiakom rozdali pracovné listy, ktoré okrem problémových úloh obsahovali aj pokyny k ich vyplneniu. Ich úlohou bolo pozorne čítať pracovné listy a priebežne vypracovávať úlohy za pomoci nástrojov Cabri Géometrè. Ukážka pracovného listu je v tabuľke 1. Keďže učiteľka matematiky správne odhadla, že žiaci nevypracujú všetkých 5 pracovných listov za jednu vyučovaciu hodinu, s experimentom sme pokračovali nasledujúci deň.

V tejto súvislosti by sme radi upozornili na skutočnosť, že spôsob usporiadania úloh v pracovných listoch bol netradičný – v klasickom časovo-tématickom pláne sa učivo o súmernostiach začína stredovou súmernosťou a po nej nasleduje osová súmernosť. Účastníci nášho experimentu sa najskôr oboznámili s osovou súmernosťou, nakoľko sme to pokladali za výhodnejšie z hľadiska nástrojov Cabri Géometrè. Okrem toho výklad v pracovných listoch nezačínal zobrazením bodu v osovej súmernosti, ako je to v klasických učebniciach, ale zobrazením trojuholníka a až potom nasledovalo zobrazenie bodu, úsečky a pod. Dôvodom tohoto netradičného usporiadania učiva bola skutočnosť, že manipulácia s trojuholníkom a následná vizualizácia zhodného zobrazenia trojuholníka je v dynamickej geometrii, ktorú Cabri Géometrè predstavuje, vhodnejšia pri rovinnom útvare ako pri samotnom bode. Následne dostali žiaci možnosť overiť vlastnosti osovej súmernosti pomocou pracovných listov [1] a pomocou práce s Cabri Géometrè.

Po ukončení experimentu, ktorý trval dve vyučovacie hodiny, učiteľka pokračovala v precvičovaní učiva Osová súmernosť klasickou metódou – žiaci rysovali do zošita rôzne konštrukčné príklady z učebnice. Zistilo sa, že žiaci dobre zvládli pojem zhodného zobrazenia z hľadiska funkcie, ktorá každému vzoru priradí svoj obraz – napríklad veľmi rýchlo vedeli narysovať tzv. špeciálne prípady osovej súmernosti, ako je obraz trojuholníka v osovej súmernosti podľa osi, ktorá prechádzala stranou alebo vrcholom trojuholníka. Pri klasickej forme výučby sa práve toto javí problematické, čo potvrdila aj učiteľka matematiky. Problémy u žiakov nastali pri verbalizovaní narysovaného obrázku – nevedeli pomenovať vzor, obraz, samodružný bod.

3 Experiment so súhlasnými a striedavými uhlami

V rámci tohto experimentu sme žiakov rozdelili na dve výkonovo rovnocenné skupiny. Jedna skupina žiakov absolvovala výklad nového učiva

Tabulka 1

Zobrazenie v osovej súmernosti

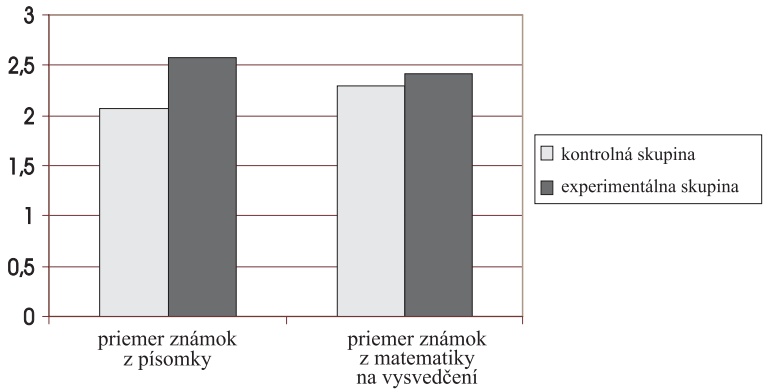
Otvorte si nový súbor.	Súbory – nový
Vyznačte trojuholník.	Trojuholník
Vyznačte ľubovoľnú priamku.	Priamka
Vyberte z ponuky nástrojov „osová súmernosť“.	Osová súmernosť
Posuňte kurzor na trojuholník tak, aby sa pri ňom objavil text „zobraz v súmernosti tento trojuholník“ a potvrďte to kliknutím. Posuňte kurzor k priamke tak, aby sa objavil nápis „vzhľadom na táto priamka“ a kliknite. Nakreslí sa obraz trojuholníka v osovej súmernosti.	
Zafarbite trojuholník – vzor na červeno.	
Zafarbite trojuholník – obraz na zeleno.	Vyplň farbou Vyplň farbou

Otvorte si nový súbor.	Súbory – nový
Vyznačte priamku k.	Priamka
Vyznačte priamku l rovnobežnú s priamkou k.	Rovnobežka
Vyznačte os súmernosti a.	Priamka
Vytvorte obraz priamky k v osovej súmernosti s osou a, vzniknutý obraz priamky k označte k'.	Osová súmernosť
Vytvorte obraz priamky l v osovej súmernosti s osou a, vzniknutý obraz priamky l označte l''.	Osová súmernosť
Vyznačte priamku k a posúvajte ju.	Ukazovateľ
Vyšetrite vzájomnú polohu priamok k' a l''.	Rovnobežný?
Čo možno o nich povedať?	
.....	
.....	

s pomocou Cabri Géometrè a druhá – kontrolná skupina – sa zúčastnila klasickej výučby. Obidve vyučovacie jednotky prebiehali súčasne. Klasickú vyučovaciu hodinu viedla učiteľka matematiky. Téma vyučovacej hodiny bol rovnaká – Súhlasné a striedavé uhly. Cieľom tohto experimentu bolo získať kvantitatívne výstupy vedomostí žiakov kontrolnej a experimentálnej skupiny za účelom ich porovnania.

Vyučovacia hodina prebiehala tak, že po zopakovaní pojmov *susedný a vrcholový uhol* žiaci oboch skupín preberali nové pojmy – súhlasný a striedavý uhol. Obsahom vyučovacej hodiny experimentálnej skupiny a kontrolnej skupiny bola konštrukcia rovnobežiek preťatých priečkou a určovanie dvojíc zhodných uhlov. Na základe manipulácie s obrázkom si žiaci z experimentálnej skupiny upevnili poznatok o tom, že každé dva vrcholové a každé dva susedné uhly majú rovnakú veľkosť. Objavili taktiež iné dvojice zhodných uhlov, ktoré sme nazvali „súhlasné“ a „striedavé“ uhly a to podľa toho, či ležia v jednej polrovine určenej priečkou, alebo ležia v opačných polrovinách určených tou istou priečkou. Na druhý deň obidve skupiny žiakov písali písomku z daného učiva. Znenie písomky uvádzame v zaveru príspevku.

Výsledky písomky sme vyhodnotili za pomoci tabuľkového procesora EXCEL (obr. 1)



Obr. 1 Porovnanie výsledkov písomky v kontrolnej a experimentálnej skupine

Vychádzali sme zo štatistickej hypotézy:

Medzi priemerom známok z písomky experimentálnej skupiny a priemerom známok z písomky kontrolnej skupiny je štatisticky významný rozdiel.

Hypotézu sme overovali použitím Studentovho t-testu pre nezávislé súbory. Testovaciu charakteristiku $t = 2{,}205$ sme porovnali s kritickou hodnotou $t_p = 2{,}064$ na hladine významnosti 0,05 pre počet stupňov voľnosti $n_1 + n_2 - 2 = 24$. Hypotéza sa potvrdila, z čoho usudzujeme, že nami sledované skupiny dosiahli vo výsledkoch písomky štatisticky významné rozdiely.

Záver

Skúsenosti získané z vyššie opísaných experimentov z môžeme zhrnúť nasledovne:

Počítač je pre žiakov veľkou motiváciou. Ich postoj k tomuto spôsobu vyučovania je vysoko pozitívny. V oblasti kognitívneho učenia má počítač vyšší efekt u výborných žiakov, ale je stimulom aj pre slabších žiakov [2]. Tí sú často ochotní riešiť na počítači príklady, ktoré by za normálnych okolností buď ani nezačali riešiť alebo ich rýchlo vzdali.

Výskum ukázal, že Cabri Géometrè je možné použiť pri výklade učiva. V oblasti reprodukovania vedomostí nevedie síce k lepším výsledkom ako klasická výučba, ale v oblasti transferu nového poznatku sa ukazuje efektívnosť významne vyššia.

Využitie počítačov pri výučbe geometrie je vhodné kombinovať s tradičným vyučovaním ceruzkou a pravítkom. Učivo o zhodných zobrazeniach, kde väčšinu času klasickej výučby zaberá nácvik presného rysovania, možno obohatiť prvkami dynamickej geometrie, ktorá poskytuje dostatok priestoru na pochopenie samotnej podstaty zhodných zobrazení ako funkčného vzťahu medzi dvoma objektami [3]. Na druhej strane – výučba pomocou Cabri Géometrè nie je efektívna pri osvojovaní konkrétnych termínov, názvov a pod., ako sa to ukázalo aj v našom prípade.

Náš experiment potvrdzuje aj potrebu prispôsobiť učebné osnovy danému softvéru (pozri prvý experiment), čo potvrdzuje všeobecnú tézu o nevyhnutnej zmene kurikula z hľadiska implementácie počítačov do výučby.

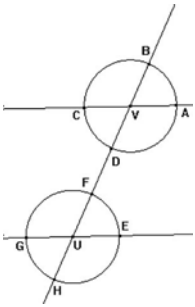
Kvantitatívne horšie výsledky písomky v experimentálnej skupine v druhom experimente mohli byť zapríčinené:

- prílišnou pozornosťou žiakov upriamenou na ovládanie nástrojov Cabri Géometrè,
- nedostatočnou validitou písomky, nakoľko prvá otázka s najväčším počtom bodov bola zameraná na osvojenie si konkrétnych pojmov.

V budúcnosti chceme pracovné listy učiva Osová súmernosť otestovať žiakmi 9. ročníka pri opakovaní učiva. Písomku o striedavých a súhlasných uhloch chceme s určitým časovým odstupom zopakovať v tej istej výskumnej vzorke na overenie stability vedomostí žiakov z hľadiska využitia didaktického softvéru.

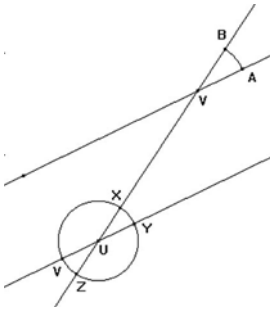
Písomka

1. Na obrázku 2 sú vyznačené uhly. Vypíšte všetky dvojice a) súhlasných, b) striedavých, c) susedných, d) vrcholových uhlov. *8 bodov*



Obr. 2

Obr. 3



Obr. 4

2. Na obrázku 3 je vyznačený uhol. Vyznačte všetky ostatné uhly, ktoré maju rovnakú veľkosť ako vyznačený uhol. *3 body*

3. Na obrázku 4 je vyznačený uhol AVB, pričom $|\angle AVB| = 30°$. Vypočítajte veľkosti ostatných uhlov vyznačených na obrázku. *4 body*

Literatura

[1] Droessaert A.: *Transformations with Cabri, Socrates/Erasmus students exchange.* Pdf TU, 2003.

[2] Turek, I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania.* Metodické centrum Bratislava, Bratislava 1997.

[3] Vaníček, J.: *Počítačem podporovaná výuka geometrie.* Dizertačná práca, KU, Praha 2000.

Testy – informace pro každého

Miroslav Staněk

Testování (pedagogické měření) je propracovaná metoda pedagogické diagnostiky, která je spoustu let používána v západních zemích. Teorie testů je důkladně propracována a pedagogové by její základy měli znát.

Dělení testů

Podle různých kritérií můžeme testy dělit:

A) Ověřovací CR (criterion-referenced)
B) Srovnávací NR (norm-referenced)

A) Objektivně skórovatelné
B) Subjektivně skórovatelné

A) Testy výsledků výuky
B) Testy předpokladů
C) Testy schopností, zručností
D) Testy postojů

A) Vstupní testy
B) Výstupní a závěrečné testy
C) Průběžné tématické testy
D) Postupové testy
E) Diferenciační testy
F) Inspektorské testy
G) Evaluační a monitorovací testy
H) Účetní testy
I) Poradenské testy
J) Akreditační testy

Vlastnosti testu

1 Validita testu

Účel, cíl testu. Zda měří to co má měřit. Musíme vědět co chceme testovat.

Druhy validity:

a) **Zjevná validita** – Pozor! Test nemusí vzhledově odpovídat a cíl může být skrytý (např. psychologické testy).
b) **Obsahová validita** – Obsah musí být totožný s učivem. K úspěšnému vyřešení nesmí být nezbytná znalost jiných informací.

c) **Souběžná validita** – Můžeme prokázat, že test měří to co má měřit tak, že máme jiný zdroj spolehlivých informací se kterými porovnáme (např. starší test, nebo známkování, je-li spolehlivé). Dobrý způsob je připravit nový kratší kontrolní test a pokud dá stejné výsledky pak byl původní test validní.

d) **Predikční validita** – Po přijímacích testech je možno sledovat výsledky přijatých a porovnat s výsledky testu. Nevýhodou je, že se nemůžeme podívat na výsledky těch, co nebyli přijati.

2 Reliabilita testu

Spolehlivost testu. Míra přesnosti měření testem.

Udává schopnost při opakovaném nezávislém měření stejným testem získat stejné výsledky měření (jedná se o koeficient korelace mezi oběma měřeními – číslo od −1 do 1).

V praxi se vyskytují hodnoty od −0,3 do 1:

nad 0,95	vysoce spolehlivý test
nad 0,85	lze použít jako kriterium při rozhodování o jednotlivcích (např. přijímací zkoušky)
nad 0,7	lze použít jako jedno z více kritérií
nad 0,5	pouze orientační a doplňkové kritérium pro skupiny
0–0,5	nepoužitelný

Jak určit(vypočítat) reliabilitu testu?

1. Metoda test – retest bez časového odstupu. Zadáme test dvakrát po sobě a vypočítáme koeficient korelace mezi výsledky.
2. Metoda test – retest s časovým odstupem. Tentýž test s časovým odstupem.
3. Metoda paralelních forem bez časového odstupu. Zadáme druhou formu testu hned po první (např. po skupině A zadáme skupinu B).
4. Metoda paralelních forem s časovým odstupem.
5. Metoda s jednou administrací testu(split-half). Test se rozdělí na dvě poloviny a počítá se koeficient korelace mezi nimi. Obě poloviny musí obsahovat stejné typy otázek.

Pro výpočet reliability existují počítačové programy (TESTAN) a samozřejmě vzorce (KR-20, Cronbachovo alfa, SEM-standart Error of Measurement, Spearman-Brownův vzorec, atd.).

Hlavními faktory ovlivňujícími reliabilitu testu jsou:

1. Délka testu – čím delší test tím je reliabilita vyšší.

2. Obtížnost úloh – příliš lehké a příliš těžké úlohy snižují reliabilitu. Většina úloh by měla mít obtížnost kolem 50 procent.
3. Diskriminační schopnost úloh.
4. Míra „časovanosti“ testu – jestliže je rychlost významným faktorem ovlivňujícím výsledek v testu, bude reliabilita uměle zvýšená.
5. Rozptyl v úrovni testovaných žáků – čím je větší, tím je reliabilita vyšší.

Předchozí poznatky se týkaly především srovnávacích testů NR.

U ověřovacích testů CR se používají stejné metody.Rozdíl je jen v interpretaci výsledků.

Typy úloh (položek testu)

Podle formy dělíme úlohy na:

a) **Otevřené úlohy.**
b) **Uzavřené úlohy.**
c) **Přechodné úlohy.**

Podle cíle můžeme rozlišit úlohy:

a) **Na reprodukci** – co si žák pamatuje a co je schopen reprodukovat.
b) **Na porozumění** – zda rozumí tomu co si pamatuje.
c) **Aplikační** – je schopen znalosti použít?
d) **Analyticko-syntetické** – je schopen rozpoznat souvislosti a vyvodit závěr?

K podrobnějšímu dělení můžeme využít například Bloomovu taxonomii vzdělávacích cílů, či od jiných autorů.

Důležité vlastnosti úloh (Položková analýza)

Základní údaje, které nás zajímají u úlohy:

1. Počet žáků kterým byla otázka (položka) předložená.
2. Počet žáků, kteří k položce nedošli (nedosaženost).
3. Počet žáků, kteří k položce došli, ale nedali odpověď (neřešenost).
4. Počet žáků, kteří k položce došli, ale dali neplatnou odpověď.
5. Počet žáků, kteří dali platnou odpověď.

6. Počet žáků, kteří správně odpověděli (obtížnost). obtížnost = kolik vyřešilo správně/kolik četlo a řešilo
7. Počet žáků, kteří odpověděli špatně.
8. Diskriminační index položky (citlivost).
9. Korelace mezi položkou a testem (validita položky).

Pro podrobnější položkovou analýzu se využívá:

10. Frekvence volby jednotlivých distraktorů.
11. Průměrná úspěšnost při řešení dané úlohy v různých výkonnostních skupinách žáků.
12. Průměrné skóre skupin žáků, kteří volili jednotlivé alternativy.
13. Interkorelace mezi jednotlivými položkami.

Diskriminační index položky (citlivost)

Vyjadřuje míru rozlišovat mezi dobrými a slabými žáky.

U ověřovacích testů nemá význam, ale je důležitý u srovnávacích testů.

Čím vyšší diskriminační schopnost otázek,tím lepší reliabilita testu.

K výpočtu lze použít následující postup:

1. Seřadíme všechny žáky podle úspěšnosti v celém testu.
2. Vybereme asi 27 % nejlepších a 27 % nejhorších žáků.
3. Zjistíme kolik procent žáků v těchto skupinách vyřešilo danou položku správně.
4. Po odečtení obou údajů získáme diskriminační index položky v procentech.

Tvorba úloh

Pravidla formulování úlohy:

1. Ujasnit si co testuje úloha, jaký obsah a na jaké úrovni (testovat podstatné, ne chytáky a pozor na „oblíbené“ otázky).
2. Zvolit optimální formu otázky vzhledem k cíli testování.
3. Formulace otázky musí být jasná a srozumitelná (bez nepodstatných informací).
4. Netestovat jiné dovednosti (znalost cizích slov, příbuzné znalosti).
5. Úloha nesmí nikoho zvýhodňovat (pohlaví, regiony, ...).

6. Každá úloha musí být jednoznačná. Musí být jednoznačné na co se ptá a co je správná odpověď. Musí být zřetelný rozdíl mezi odpověďmi. Čím mladší dítě, tím větší rozdíl.
7. Formulace úlohy má být co nejstručnější. Musí obsahovat jasnou instrukci, co má žák udělat (vyberte, rozhodněte, doplňte, ...) na začátku textu (ohled na časovou náročnost testu).
8. Každou úlohu by měl autor pořádně promyslet a několikrát se k ní vrátit, aby formulace byly co nejlepší.
9. Formulace otázky by měli zkontrolovat alespoň dva jiní lidé. Autor má svou utkvělou představu,která nemusí odpovídat tomu co ve skutečnosti napsal. Nikdy nepřehlížejte jakékoliv kritické připomínky (pokud chcete mít vytvořen opravdu pořádný test)!
10. Distraktory by měli vycházet ze skutečných chyb žáků.
11. Distraktory logicky seřazeny a pozor na nepřímou nápovědu (nejdelší odpověď je správná – viz některé testy vyhlášek).
12. Pokud má otázka charakter nedokončené věty měli by alternativy stylisticky navazovat.
13. Zkontrolovat aby popisy případných grafů a obrázků byly ve shodě se zadáním.
14. Pozor na opravy na poslední chvíli!

0.1 Tvorba testů

Při tvorbě testu je vhodný následující postup:

1. **Sestavit specifikační tabulku**

   U ověřovacího testu (CR). Vybrat reprezentativní témata a použít více úloh na dané téma (méně témat).

   Používají se úlohy o mnoho lehčí než ve srovnávacím testu. Všechny úlohy mají většinou podobnou obtížnost. Nejlehčí úlohy by měli vyřešit všichni. I ti co budou mít 5.

   Každá otázka musí být jasně diagnosticky zaostřená. Musí být jasně formulované co otázka testuje, aby bylo možné interpretovat výsledek.

   Podstatnou kvalitou testu je obsahová (kurikulární) a cílová validita testu.

   Výsledek testovaného nezávisí na výsledcích ostatních.

U srovnávacího testu (NR)

Žádoucí co nejširší rozdělení témat. Ale s větším záběrem testu klesá reliabilita.

Rozložit stejnoměrně počet úloh podle jednotlivých témat (větší počet témat), podle cíle úlohy a podle obtížnosti (lehké, střední, těžké). Středně těžkých by mělo být nejvíc a těch lehkých a těžkých méně (normální statistické rozložení). Nutno vzít v úvahu, že některé typy úloh se budou těžko hledat a vytvářet. Nezařazovat úlohy s obtížností nad 80 % a pod 20 %.

U úloh je podstatná diskriminační schopnost. Nezáleží tolik na diagnostickém cílu úlohy. Podstatnou kvalitou testu je reliabilita a standartní chyba měření.

Výsledek testovaného závisí na výsledcích ostatních.

2. **Tvorba banky úloh**
3. **Ověřování úloh (pilotování)**

   Úlohy jsou vyzkoušeny na jiných žácích.
4. **Úprava úloh, položková analýza**

   Pokud nemáme úlohy připraveny je to jediný způsob jak je získat.

   Firmy, které se testováním zabývají mají své banky úloh, které používají a ty jsou chráněny autorským zákonem. Je to objekt jejich podnikání (viz Scio, EXAM, atd). Navíc zdrojů kvalitních testových příkladů moc není. A s hodnotami položkové analýzy vůbec žádné.
5. **Redundantní verze a oponentura redundantní verze**
6. **Finální verze a pretestace finální verze na vzorku blízkém cílové skupině**
7. **Administrace, vyhodnocení, reklamace, poučení**

   Vlastní provedení testu a jeho vyhodnocení.

Základní parametry testu jako celku, které je třeba sledovat:

1. Celková náročnost testu (U srovnávacího testu by měla být asi 50 % u ověřovacích ještě vyšší).
2. Časová přiměřenost testu (Aspoň 80 % by mělo dosáhnout aspoň 90 % položek).
3. Reliabilita testu.

4. Standartní chyba měření.
5. Ekvivalentnost forem (skupina A i B dává stejné výsledky?).
6. Porovnání výsledků chlapců a děvčat (ekvivalence testu pro obě pohlaví).

Některé dobré rady při sestavování testu:

1. Používat co nejméně různých typů úloh. Čím častěji se mění typ úlohy, tím víc chyb testovaných. Ještě horší je změna tématu.
2. Rozčlenit test podle témat nebo chronologicky. Použít nadpisy. Sníží to časovou náročnost testu. Žák si může vybrat pořadí, jak je chce řešit. Navíc příklady z různých témat, které se střídají stresují žáka a narušují jeho koncentraci.
3. Na počátek a konec testu dát jednodušší úlohy. Je to spíš psychologický tah. Nevyděsit hned testovaného na počátku testu a na konci testu odchází testovaný s lepším pocitem a bez deprese.
4. Test by mělo tvořit co nejvíce lidí. Úlohy také brát z více zdrojů. Zajistí se větší rozmanitost a eliminují se subjektivní vlivy.
5. Je dobré mít na výběr přinejmenším dvojnásobný počet úloh, než které jsou potřeba. Kde máte pochybnosti tak ty úlohy vyhodit.

Literatura

[1] Burjan V.: *Tvorba a využívanie školských testov vo vzdělavacom procese.* EXAM, Bratislava.

Implementace CLIL ve výuce finanční a pojistné matematiky

Marek Šulista, Vivian Baravalle

Abstrakt

Článek seznamuje čtenáře s výukou předmětu Finanční a pojistná matematika v anglickém jazyce na Zemědělské fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, s inovacemi výuky tohoto předmětu po prvních dvou letech experimentálního vyučování v rámci CLIL.

1 Úvod

V současné době se na základních, středních a vysokých školách na celém světě rychle rozvíjí výuka nejazykových předmětů v cizím jazyce. Tento typ výuky je obvykle označován jako Content and Language Integrated Learning (zkráceně CLIL, jako český překlad se obvykle uvádí Integrace odborné a jazykové výuky IOJV) (viz [1, 2]). Počátkem 90. let 20. století Rada Evropy ve svých dokumentech deklarovala prioritu pro mladou generaci ovládat alespoň tři jazyky. Jedním z bodů doporučení Výboru ministrů, týkajících se moderních jazyků, je: „*Promote widespread plurilingualism by encouraging the use of foreign languages in the teaching of non-linguistic subjects (for example history, geography, mathematics) and create favourable conditions for such teaching.*“, kde tato významná evropská organizace navrhuje jako jednu z možností, jak podporovat plurilingvismus, výuku nejazykových (odborných) předmětů v cizích jazycích. S podporou Rady Evropy se projekty CLIL začaly výrazně prosazovat v Evropě, když na nich začaly participovat školy z různých zemí Evropské unie.

Při CLIL je obsah daného předmětu rozvíjen v cizím jazyce a zároveň se cizí jazyk procvičuje a zdokonaluje při výuce tohoto nejazykového

předmětu. Za formu CLIL se považuje již takové vyučování, kde se minimálně 25 % výuky odehrává v cizím jazyce. Postupně se obsah a jazyk dostávají do rovnováhy, obě složky se integrují.

V dnešní době sehrávají projekty CLIL stále významnější úlohu ve vzdělávacím procesu studentů vysokých škol, kde jsou tyto projekty důležitým a nezbytným předpokladem pro úspěšné naplňování a participaci jednotlivých zainteresovaných škol v projektech studentských mobilit (např. projektů Socrates). Mezi hlavní přednosti patří také to, že poskytují prostor k integraci studentů z cizího jazykového prostředí, a tím ve svém důsledku napomáhají procesu evropského sjednocování.

V akademickém roce 2002/2003 se učitelé na Katedře aplikované matematiky a informatiky Zemědělské fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, inspirovaní těmito projekty, rozhodli částečně inovovat výuku předmětu *Finanční a pojistná matematika* (dále FPMAT). Inovovaná forma výuky prozatím probíhala formou experimentu. Studenti ekonomických oborů této fakulty měli poprvé možnost navštěvovat cvičení FPMAT vedené v anglickém jazyce.

2 Struktura předmětu

FPMAT má dotaci 4 hodiny, z toho tvoří 2 hodiny přednášky a 2 hodiny cvičení. V akademickém roce 2002/2003, kdy se s inovací započalo, byly přednášky vedeny v českém jazyce; studenti mohli navštěvovat cvičení buď v českém, nebo anglickém jazyce. Výběr cvičení v češtině nebo v angličtině nebyl nijak omezován, studenti se rozhodovali sami. Obsahově obě cvičení pokrývala v každém týdnu vždy stejnou látku nutnou k úspěšnému splnění výstupních požadavků FPMAT (napsání zápočtových testů a složení písemné a ústní zkoušky).

Organizace cvičení v angličtině a v češtině se lišily. Každé cvičení v angličtině bylo rozděleno do dvou etap:

- Opakování anglické terminologie a seznámení se s dosud neznámými termíny používanými na přednášce česky.
- Procvičení probírané látky v angličtině.

Ve fázi věnované anglické terminologii se vycházelo z toho, že studenti se již seznámili s obsahem pojmů na přednášce, která cvičení těsně předcházela, a mohli se proto soustředit na osvojení a procvičení slovní

zásoby. Termíny byly napsány na jednu část tabule a byly tak studentům k dispozici po celou dobu cvičení. Tato fáze byla vedena částečně v angličtině, částečně v češtině.

V druhé fázi mluvil vyučující pouze anglicky. Přepínání jazykového kódu mezi angličtinou a češtinou bylo využíváno minimálně, pouze v případech, kdy docházelo při použití angličtiny k neporozumění, které se nepodařilo při použití angličtiny odstranit, nebo když bylo jeho odstraňování v angličtině příliš časově náročné. Takových situací nastalo během výuky velmi málo. Hlavním cílem této fáze bylo procvičení probírané látky tak, aby ji studenti byli schopni interpretovat a aplikovat. Druhotný cíl byl (stejně jako každé výuky formou CLIL), aby si při tomto procesu osvojovali a zlepšovali komunikační dovednosti v anglickém jazyce.

Původní představa byla, aby studenti stejně jako učitelé mluvili na cvičení výhradně anglicky. To se zatím zcela nepodařilo. Důvodů bylo několik:

- Dovednost porozumět anglicky mluvenému slovu či textu nejde ruku v ruce s dovedností anglicky mluvit a formulovat své myšlenky.
- Někteří studenti měli zábrany anglicky před svými kolegy s učitelem mluvit (nejčastější příčinou byla pravděpodobně obava z možných chyb týkajících se samotného jazyka).
- Pro popis algoritmu řešení byla nezbytná znalost názvosloví základních matematických operací, se kterými se studenti seznámili na cvičení až v momentě, kdy byly aktuální během výuky.

3 Zkušenosti z prvního roku výuky FPMAT v angličtině

Analýza zkušeností z akademického roku 2002/2003 vedla k některým úpravám v organizaci výuky FPM v angličtině. Úpravy se týkali hlavně podpory rozvoje všech jazykových dovedností v angličtině (čtení, psaní, mluvení a poslechu) a rozšíření prostoru pro jejich aplikaci. V následujícím textu jsou uvedeny hlavní změny, které byly realizovány v letním semestru roku 2003/2004, kdy už celý kurz včetně přednášek, probíhal v anglickém jazyce.

3.1 Systém *e*-Task

Jedním z nových prvků ve výuce FPMAT v angličtině bylo využití systému *e-Task*, který byl v loňském akademickém roce testován na Katedře aplikované matematiky a informatiky Zemědělské fakulty Jihočeské univerzity, je v současné době využíván v několika kurzech v rámci Zemědělské a Pedagogické fakulty. Systém je vyvíjen v prostředí Zope pro tvorbu dynamických webových aplikací (jde o OpenSource projekt) s využitím dalších standardních nástrojů (např. HTML). Systém je prostředí, do kterého mají přístup pouze studenti a učitelé daného předmětu. Ochrana dat a materiálů je zabezpečena heslem. Přístup je umožněn v podstatě odkudkoliv, neboť se zde využívá internetového prostředí. Učitelé do tohoto systému vkládají materiály a úkoly (tasks) pro své studenty a studenti si zde své úkoly mají možnost vyzvednout, vypracovat a opět je do systému vrátit ke kontrole. Úkoly mohou být zadány hromadně všem studentům najednou nebo adresně každému zvlášť. Stejně tak komunikace mezi učitelem nebo učiteli (participuje-li na daném předmětu učitelů více) a studenty může probíhat stejným způsobem.

Do systému se mohou zadávat jak textové, tak i audio a video materiály. Pro předmět FPMAT těmito materiály byly např. graf vývoje inflace, směnka určená ke skontování, audio nahrávka rozhovoru dvou studentek o výhodnosti úročení účtů vedených u různých bank, audio nahrávky obsahující zadání úloh vážících se k probírané problematice nebo video pozvánka na prezentace studentů.

Při výuce CLIL, při které si studenti odborného předmětu rozšiřují a zdokonalují znalost cizího jazyka, je nezbytné, aby každý student měl dostatek prostoru k písemnému i ústnímu projevu. Vzhledem k obvyklému počtu studentů ve cvičení to nelze splnit při klasické organizaci práce. Systém *e-Task* takovou možnost nabízí. Příkladem je zvětšení prostoru pro ústní projev tak, že každý student zpracuje některé „finančně-matematické“ téma formou zvukového záznamu.

Obdobně lze rozšířit kontakt studentů s rodilými mluvčími např. tím, že studenti mohou využívat audio záznamy se zadáním úloh namluvené rodilými mluvčími. Z technického hlediska není vytvoření takové databáze audio záznamů zadání úloh časově ani technicky náročné. V současné době je pro cvičení z FPMAT v angličtině k dispozici databáze s 20 zadáními a počet záznamů se rychle zvětšuje.

Po celou dobu kurzu měli studenti možnost se na webovských stránkách FPMAT seznámit s tím, co se na jednotlivých přednáškách a cvičeních probíralo. K dispozici byla nová slovní zásoba (včetně možnosti poslechu výslovnosti od rodilých mluvčích) nutná k aktivnímu zapojení do jednotlivých přednášek a cvičení.

Obsahem stránek byl i odkaz na databázi vzorových zápočtových testů. Pomocí *e-testeru* (http://www.e-tester.org/financni_matematika_us) si mohli studenti sami průběžně ověřovat úroveň porozumění látce a zvládnutí dovedností požadovaných pro úspěšné splnění požadavků pro ukončení předmětu. Systém pracuje tak, že na e-mailovou adresu studenta zašle jednu z několika cvičných variant. Po vypracování testu student vyplní své odpovědi do formuláře a *e-tester* mu sdělí úspěšnost včetně správných odpovědí.

Dalším prvkem podpory jazykové výuky zaměřené především na mluvený projev byly krátké prezentace studetnů o různých produktech pojišťoven a stavebních spořitelen (např. Student plus, Gaudeamus, možností stavebního spoření, leasingu, platebních karet apod.). Cílem prezentací a následné diskuse bude vedle rozšíření prostoru pro mluvený projev studentů také propojení jejich teoretických vědomostí s praxí a prohloubení slovní zásoby.

3.2 Podmínky pro získání zápočtu

Důležitou otázkou organizace výuky je hodnocení studentů, v případě cvičení splnění podmínek pro získání zápočtu. Těmito podmínkami bylo úspěšné vypracování dvou zápočtových testů. Jeden psali studenti v 6. týdnu výuky, druhý v posledním (zápočtovém) týdnu. V případě neúspěchu měli pro každý test jednu možnost opravy. Dále pak již zmíněná prezentace některého finančního produktu a splnění všech úkolů zadaných systémem *e-Task*. Zkouška byla písemná a ústní. V obou případech, jak v případě zápočtových testů, tak v případě zkoušky, vše probíhalo v anglickém jazyce.

4 Závěr

Ve školním roce 2002/2003 navštěvovalo na začátku semestru anglické cvičení asi 60 z celkového počtu 180 zapsaných studentů v kurzu a 10 z nich během semestru přešlo na cvičení v českém jazyce. Tato skutečnost společně s kladnými reakcemi samotných studentů byla vnímána vcelku

pozitivně a prokázala, že takto pojatá výuka FPMAT je pro studenty přitažlivá a přínosná. To se odrazilo o rok později, kdy 30 studentů úspěšně podstoupilo celý kurz v anglickém jazyce. V příštím roce se vedení fakulty rozhodlo zařadit kurz FPMAT v anglickém jazyce povinně pro ty studenty ekonomických oborů, kteří mají jako první cizí jazyk zvolenu angličtinu.

Literatura

[1] Pavesi M. et al.: *Insegnare in una lingua straniera.* M.I.U.R, Milan 2001.

[2] Langé G.: *TIE-CLIL Professional Development Course.* M.I.U.R., Milan 2002.

Kompetence učitele a akční výzkum ve vyučování matematice

Marie Tichá, Alena Hošpesová, Jana Macháčková

Úvodem

V současné době se zdá, že odpovědi na mnohé obecné otázky, které jsou v centru úvah o matematickém vzdělávání, poskytuje uplatňování konstruktivistického přístupu [4]. V souvislosti s tím dostává role učitele nové dimenze a je stále náročnější. Ozývají se hlasy, že je třeba zkvalitňovat a kultivovat (a) názor učitelů na podstatu, smysl a cíle vyučování matematice a (b) jejich kompetence oborově didaktické, pedagogické, psychologické a další, jak o tom podrobně píše v publikaci [5] Z. Helus. Helusův článek je podle našeho názoru pro didaktiku matematiky velmi podnětný. Mluví v něm o *kompetenci kvalifikované pedagogické reflexe.* Tato kompetence je zahraničními i našimi autory považována za jeden z atributů profesionality učitele.

Kompetence a reflexe

J. Bruner [1] řadí reflexi k důležitým ideám uplatňovaným ve vzdělávání jako jsou spolupráce, kultura a další. K. Krainer [9] pracuje se čtyřmi oblastmi kompetencí: činnost, autonomie, reflexe a vytváření sítě vztahů. Podle Krainera dvojice „činnost a reflexe“, „autonomie a vytváření vztahů“ vyjadřují kontrast i jednotu a mohou být viděny jako komplementární dimenze. Upozorňuje, že: „Je možné říci, že spíše se dává přednost činnosti a autonomii, méně pozornosti se věnuje reflexi a vytváření vztahů, ...“. J. Climent a N. Carrillo [3] konstatovali, že „... nejdůležitější věcí je vytváření vhodné možnosti pro reflexi vlastních vědomostí a přesvědčení, to by mohlo být startujícím momentem

Výzkum byl podporován granty: Socrates projekt 87636-CP-1-2000-1-CZ-Comenius-C31 a GAČR 406/02/0829.

změn vybraných učitelem.“ B. Jaworski [8] navrhuje věnovat se studiu reflexívních dvojic, z nichž jedna je „zkoumání a reflexe“.

Někteří autoři zdůrazňují nutnost systematicky provádět a rozvíjet nejen sebereflexi, ale i kolektivní reflexi. Například P. Scherer a H. Steinbring [11] zdůrazňují vysokou náročnost práce učitele matematiky a odtud plynoucí potřebu přejít „ke kvalifikovanému koncipování a kvalifikované společné reflexi každodenních vyučovacích aktivit“. K tomuto názoru se přiklánějí i autorky tohoto příspěvku.

Z našich autorů V. Spilková [12] mluví o profesionální kompetenci budované na základě teoretické reflexe praktických zkušeností. V. Švec [14] upozorňuje, že systematická reflexe vlastní činnosti, rozhodovacích procesů a pedagogických situací je klíčovým prvkem v profesionálním rozvoji studenta učitelství. Reflexe vlastní činnosti vytváří studentovi prostor k přechodu od intuitivního k vědomému a zdůvodněnému jednání. Měly by mu proto být nabídnuty různé sebereflektivní techniky, které mu umožní hlubší vnitřní dialog. L. Nezvalová uvádí [10], že reflexe jsou podstatnou složkou akčního výzkumu, jehož hlavními aktéry jsou učitelé působící v praxi. Podle našich zkušeností však máme možnost setkat se s prováděním akčního výzkumu jen zřídka.

Akční výzkum

V zahraničí se problematice akčního výzkumu ve vyučování matematice věnuje skupina didaktiků již několik let. Východiskem jsou práce J. Schöna, ve kterých se zabývá „research-in-action“, „research-on-action“, „research-for-action“ (blíže například v [8]). Akční výzkum je chápán jako významné pojítko mezi praxí/učitelem a teorií/výzkumníkem, přičemž cestou vedoucí k propojení je reflexe; učitel se dostává do role výzkumníka (teacher-researcher). Studují se možnosti vzdělávání a kultivace učitelů prostřednictvím jejich vlastní výzkumné práce (Jaworski a další). Jedna z prvních obdobně zaměřených prací v didaktice matematiky u nás je práce N. Stehlíkové a D. Jirotkové [13], v níž autorky ukazují využití introspekcí studentů jako prostředku pro jejich rozvíjení jako řešitelů problémů a výzkumníků.

U nás se bohužel zatím často nechává provádění reflexe na studentech učitelství a učitelích působících v praxi samých, na jejich intuici. Nejsou jim kladeny vnější otázky, výzvy. Sebereflexe tak mají charakter vyprávění „o tom, co se stalo, co jsem zažil“. Studenti ani učitelé se

nezamýšlejí nad vlastním učením vědomě „strukturovaně“, podle určitých jevů, například z hlediska cílů a obsahu vyučování, metod práce, realizace, neočekávaných postupů řešení. Těchto oblastí se dotýkají víceméně náhodně. Pokud můžeme vysledovat kladení si otázek, zpravidla se jedná o otázky popisné a jen zřídka o otázky kauzální (analýza vlastního jednání – Proč jsem jednala takto? Co ovlivnilo moje jednání? ...) a rozhodovací (Jak jsem mohla jednat jinak? V čem se chci změnit? ...) [14].

Socrates – Comenius

Problematikou reflexí jsme se začali zabývat v souvislosti s řešením mezinárodního projektu Socrates – Comenius „Porozumění kultuře matematického vzdělávání a vyučování matematice v různých zemích“ („Understanding of mathematics classroom culture in different countries“) [6, 7, 15]. Cílem projektu bylo přispět ke zkvalitnění permanentního vzdělávání učitelů-elementaristů a k rozvíjení jejich kompetencí. Ve výzkumu jsme se zaměřili zvláště na to, jak kvalifikovaná pedagogická sebereflexe a systematické provádění kvalifikované kolektivní reflexe může ovlivnit zkvalitňování oborově didaktické a pedagogické kompetence učitelů a jak přispívá ke zkvalitnění vyučování.

Důležitou charakteristikou bylo zapojení učitelek, které na 1. stupni učí, do práce na projektu. V každém „národním“ týmu tak pracovali jak učitelé z univerzit, resp. pracovníci z výzkumu, tak učitelky. (Další informace o projektu je možné získat na: http://www.pf.jcu.cz/umccdc.)

Při naší práci na projektu jsme připravili a realizovali několik vyučovacích experimentů týkajících se různých okruhů vyučování matematice na 1. stupni ZŠ. Na přípravě, realizaci a hodnocení experimentů se podíleli všichni členové týmu. Z učitelů se tak stávali učitelé-výzkumníci, kteří prováděli jednu z forem akčního výzkumu. Vzhledem k tomu, že učitelky pracující v českém týmu učily v různých ročnících prvního stupně, zaměřovali jsme se na různé partie vyučování, například zlomky a vztah celek a část. Základem pro výběr tématu byla vždy úvaha učitelky, která vyučovací experiment realizovala o tom, které části učiva jejího ročníku je podle jejího soudu třeba se věnovat. Učitelky tak přirozeně reagovaly na problémy, které přináší jejich pedagogická praxe.

Z vyučování byl pořizován videozáznam, který byl dáván k dispozici všem členům týmu. Jedním z důvodů bylo umožnit učitelům, kteří byli součástí sledovaných jevů, pohled zvenčí. (I přesto učitelé většinou zůstá-

vají úzce spojeni se zaznamenanými žáky, je pro ně velice obtížné přejít do role pozorovatele a mnohým se to zřejmě nezdaří.) Na společném setkání celého českého týmu jsme videozáznam (zpravidla jeho didakticky zajímavé části, na jejichž výběru se opět podílely učitelky) po částech analyzovali. Je tak možné ilustrovat rozvoj jak kompetencí učitelů, tak úrovně reflexí.

Provádění reflexí prostupovaly dvě roviny:

- Sebereflexe, která je zaměřená na vlastní aktivity a záleží na konkrétním učiteli, zda se soustředí více na pedagogicko psychologickou stránku nebo na oborově didaktickou.
- Kolektivní reflexe, v níž se pozornost soustřeďuje na obecné přesvědčení (které je základem úvah) a na oborově didaktické otázky. Pohled na konkrétního žáka je podstatně slabší než při sebereflexi.

Změny a profesní růst

V procesu užívání reflexe jako metody rozvíjení kompetencí učitelů, jsme rozpoznali změny v přístupu zúčastněných učitelů k práci na projektu a v posuzování vlastních kompetencí:

- od pocitu sebejistoty týkající se obsahu i metod matematického vzdělávání na počátku práce na projektu;
- přes nejistotu a pochybnosti o vlastních kompetencích po několika diskusích v kolektivu vyvolaných zpravidla vlastní neschopností adekvátně reagovat na neočekávané, nepředpokládané (a) reakce, řešení žáků v průběhu experimentu, (b) reakce ostatních členů týmu v průběhu kolektivní reflexe;
- ke snaze, ctižádosti změnit vlastní práci a zkvalitnit své oborově didaktické kompetence a lépe porozumět procesu poznávání u dětí.

Úroveň reflexí se rozvíjela v na sebe navazujících a zkvalitňujících se stupních, byl patrný posun:

- od jednoduchého rozhovoru zaměřeného na intuitivně vnímané postřehy typu „Líbí/nelíbí se mi to.“, přičemž učitelky zpravidla vypovídají o svých pocitech [7];
- přes snahu uplatnit hlubší pohled a hledání efektivních metodických postupů pro určité učební obsahy, což směřuje ke zkvalitňování vyučování [15];

- k hlubokému posouzení vyučování z hlediska cíle, obsahu, metod, což vede až ke konstrukci a realizaci vlastních vyučovacích experimentů a formulování otevřených otázek.

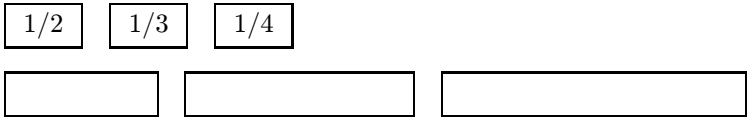
V diskusích se začaly objevovat úvahy učitelek o smyslu provádění kolektivních reflexí, rozvíjelo se chápání a oceňování významu videozáznamu, měnilo se chápání role reflexe jako prostředku pro uvědomování si a hodnocení úrovně vlastních profesionálních (zvláště oborově didaktických) kompetencí, a tím i prostředku pro vlastní profesionální růst.

Experiment navržený učitelkami

Příprava experimentů v oblasti vytváření prekoncepcí pojmu „zlomek“, realizace vyučování a kolektivní reflexe umožňovaly výzkumníkům nenásilně působit na učitele. Bylo možné vést učitele k hlubšímu pochopení pojmu zlomek, uvědomění si různých přístupů a reprezentací a jejich významné role při vytváření pojmu zlomek. Problematice rozvíjení představ o zlomcích a jejich diagnostice jsme se věnovali na několika setkáních celého kolektivu i jeho částí. Domníváme se, že se nám přitom podařilo podstatně zkvalitnit oborově didaktické kompetence v této oblasti. Projevem toho je podle našeho názoru i experiment, který navrhly a realizovaly samy učitelky. Zde naznačíme jeho ideu a zadání.

Každý žák dostal tři shodné papírové obdélníky. Na jednom bylo napsáno 1/2, na druhém 1/3 a na třetím 1/4. Dále každý dostal tři různé papírové proužky takové, že bylo možné poznat, že malý obdélník představuje polovinu jednoho z nich, třetinu druhého a čtvrtinu třetího.

Formulace úkolu: Tady máte tři úplně stejné papírové obdélníky. Na jednom je napsáno 1/2, na druhém 1/3 a na třetím 1/4. Jak je to možné? (O velkých obdélnících učitelka nemluvila.)



Ukázka rozhovoru v průběhu řešení

Učitelka	Jak je možné, že je na každém ze tří shodných obdélníků jiný zlomek? Papírky jsou úplně stejné, ale ...
Míša	... ale ty větší papírky (*znázorňující celky*) jsou úplně jiný.
Učitelka	Honza a Kačka to znázornili, ale každý jinak. Co je lepší?

Honza *pokládá „NA celek“*

1/3		

Kačka *přikládá „VEDLE celku“*

1/3			

Honza vysvětlil, že jeho znázornění je lepší, protože Kačka vlastně neznázorňuje 1/3, ale 1/4.

Otevřené otázky pro další práci formulované učitelkou

- Jak motivovat učitele, aby cítili potřebu na sobě pracovat? Je možné přesvědčit alespoň část učitelů, aby na sobě vyzkoušeli to, co jsme si zkusili my při práci na řešení projektu?
- Jsou vůbec dnes podmínky pro realizaci kolektivních reflexí? Jak zajistit podmínky, za kterých by to bylo možné; nebo šlo jen o zajímavý experiment, který po skončení práce na projektu zapadne?
- Jak vůbec zajistit, aby každý učitel, který má zájem, mohl spolupracovat nebo se podle potřeby mohl obrátit na učitele z fakult? Je dostatek učitelů z fakult a výzkumných pracovníků, kteří jsou schopni, ochotni a mají podmínky pro to, aby mohli učitele vést?

Závěrečné poznámky

Pro některé učitelky (zřejmě bez rozdílu věku) je velmi těžké zapojit se do diskuse, vyjádřit svůj názor. Zřejmě potřebují delší čas na promyšlení situace. Negativně zřejmě působí i jejich nízké sebehodnocení (hodnocení vlastních kompetencí). Snaží se opírat o autoritu. Častý dotaz: „Jak to tedy má být?“ odráží názor, že existuje jediná „správná“ cesta.

Potvrzuje se, že konstruktivistický přístup vyžaduje kompetentního učitele, který zvládá profesi [2]. Na druhou stranu ne všichni si uvědomí potřebu zkvalitňování svých kompetencí v různých oblastech. Na přednáškách a seminářích pořádaných o práci na projektu pro učitele se bohužel projevuje, že ne všichni učitelé jsou připraveni na patřičné úrovni. To znamená tak, aby byli schopni bezpečně poznat, zda v odpovědi žáka je či není „pravdivé jádro“, „zdravá představa“.

LITERATURA

[1] Bruner J.: *The culture of education.* Harvard University Press, Cambrigde 1996.

[2] Cachová J.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice a školní praxe.* Doktorská disertační práce, PedF UK, Praha 2003.

[3] Climent N., Carrillo J.: *Developing and Researching Professional Knowledge with Primary Teachers.* In: J. Novotná (ed.) *CERME 2. European Research in Mathematics Education II, Part 1.* UK PedF, Praha 2001, p. 269–280.

[4] Hejný M., Kuřina F.: *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Portál, Praha 2001.

[5] Helus Z.: *Čtyři teze k tématu „změna školy". Pedagogika, v. 51, no. 1, 2001, s. 25–41.*

[6] Hošpesová A., Tichá M.: Self reflection and improvement of mathematics classroom culture. 2003.
http://www.dm.unipi.it/∼didattica/CERME3/proceedings

[7] Hošpesová A., Tichá M.: Zdokonalování kultury vyučování matematice cestou kolektivní reflexe. In: J. Coufalová (ed.) Od činnosti k poznatku. ZČU, Plzeň 2003, s. 99–106.

[8] Jaworski B.: Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. Educational studies in mathematics, v. 54, 2–3, 2003, p. 249–282.

[9] Krainer K.: *Some considerations on problems and perspectives of in service mathematics teacher education.* In: C. Alsina et al. (eds.) 8th *International congress on Mathematics Education: Selected Lectures.* SAEM Thales, Sevilla 1996, p. 303–321.

[10] Nezvalová L.: *Akční výzkum ve škole.* Pedagogika, v. 53, no. 3, 2003, s. 300–308.

[11] Scherer P., Steinbring H.: *The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – teachers commonly reflect feedbacks to their own instruction activity.*
http://www.dm.unipi.it/∼didattica/CERME3/proceedings

[12] Spilková V.: *Proměna školy jako výzva pro učitelské vzdělávání.* Hledání učitele, PedF UK, Praha 1996, s. 200–211.

[13] Stehlíková N., Jirotková D.: *Process Oriented Research and its Reflection in Pre-service Mathematics Teacher Education; A Case of Diploma Thesis.* In: Ch. Bergsten (ed.) *Proceedings of MADIF3.* SMDF, Linkoeping 2003, p. 157–164.

[14] Švec V.: *Sebereflexe studentů v pregraduální didaktické přípravě.* Pedagogika, v. 46, no. 3, 1996, s. 266–276.

[15] Tichá M., Hošpesová A.: *Učíme se z praxe.* In: M. Uhlířová (ed.) *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* UP, pedagogická fakulta, Olomouc 2004, s. 23–33.

Vyučování matematice v sedmi zemích – videozáznamy

Vladislav Tomášek

Česká republika se spolu s dalšími šesti zeměmi (Austrálie, Hongkong, Japonsko, Nizozemsko, Švýcarsko a USA) zapojila do výzkumu výukových metod v matematice a přírodovědných předmětech pomocí videozáznamu TIMSS 1999 Video Study. Výzkum navazuje na obdobné šetření, které se týkalo pouze matematiky a bylo realizováno ve třech zemích (Japonsko, Německo, USA) v rámci TIMSS 1995. Navíc byly pořízeny videozáznamy hodin přírodovědných předmětů a rozšířen počet na sedm zemí, které měly průměrný výsledek relativně vyšší než USA – výsledky ve výzkumech TIMSS 1995 a TIMSS 1999 jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 Průměrný výsledek žáků 8. ročníku z matematiky

Země	**Průměrný výsledek z matematiky**	
	TIMSS 1995	**TIMSS 1999**
Austrálie (AU)	519	525
Česká republika (CZ)	**546**	**520**
Hongkong (HK)	569	582
Japonsko (JP)	581	579
Nizozemsko (NL)	529	540
Švýcarsko (SW)	534	—
USA (US)	492	502

Cílem projektu bylo zjistit, jak moc a v jakých aspektech se od sebe liší výukové metody a stereotypy v jednotlivých zemích, a poskytnout zúčastněným zemím možnost poučit se a inspirovat se z těchto odlišností. V matematické části výzkumu bylo natočeno celkem 638 hodin (pro Japonsko byly použity videozáznamy ze šetření v roce 1995). V každé zemi

byly hodiny vybrány náhodně, aby celkově reprezentovaly výuku matematiky v 8. ročníku. Aby bylo pokryto co nejvíce učiva, probíhalo natáčení během celého školního roku 1999/2000, vždy se natáčely celé vyučovací hodiny. Natáčení hodin prováděli podle jednotné metodiky speciálně vyškolení profesionální kameramani. Učitelé vyplňovali dotazníky týkající se odučené hodiny, jejích cílů, způsobu hodnocení probraného učiva a možného dopadu přítomnosti kameramanů ve třídě na průběh hodiny. V roce 2001 pak v každé zemi ještě proběhlo hodnocení vybraných hodin ostatních zúčastněných zemí učiteli a odborníky z oboru didaktiky matematiky.

Na našich školách bylo pořízeno sto videozáznamů hodin matematiky a sto videozáznamů hodin přírodovědných předmětů v 8. ročníku základní školy a v odpovídajících ročnících víceletého gymnázia. Natáčení proběhlo na 90 základních školách a na 10 víceletých gymnáziích náhodně vybraných z celé České republiky. Veškeré náklady spojené s realizací šetření u nás hradilo USA.

Jaké poznatky nám může Videostudie poskytnout?

- Porovnání výukových metod užívaných v různých zemích poskytuje pedagogům široké spektrum poznatků pro hodnocení svých vlastních postupů. Možnost poznat, jak učitelé v jiné zemi přistupují ke stejnému tématu, nám umožňuje vidět svůj vlastní způsob v určitém kontrastu a poskytuje nám tak více prostoru pro zhodnocení a vylepšení našeho přístupu.
- Mezinárodní srovnání odhaluje alternativy a podněcuje diskusi o možných volbách metod výuky v dané zemi. Často lze nalézt různé způsoby výuky v rámci jedné země, ale někdy je potřebné podívat se mimo vlastní kulturu, abychom viděli něco nového a odlišného.
- Videozáznamy umožňují podrobné vyhodnocení komplexních aktivit z různých úhlů pohledu. Mnoho lidí s odlišným zaměřením může opakovaně sledovat pořízené záznamy a podrobně tak popsat aktivity ve třídě.
- Vytvoření národního náhodného vzorku poskytuje informaci o získaných zkušenostech žáků v daném rozsahu podmínek, nejedná se pouze o dílčí zkušenosti. Aby se mohla diskuse na národní úrovni zaměřit na „většinovou“ zkušenost žáků, je důležité znát, jak v průměru vypadají užívané výukové metody.

Jaká jsou hlavní zjištění z TIMSS 1999 Video Study?

Na základě kódování a analýzy vyučovacích hodin matematiky a jejich částí byly zjištěny následující obecné rysy společné všem sedmi zemím:

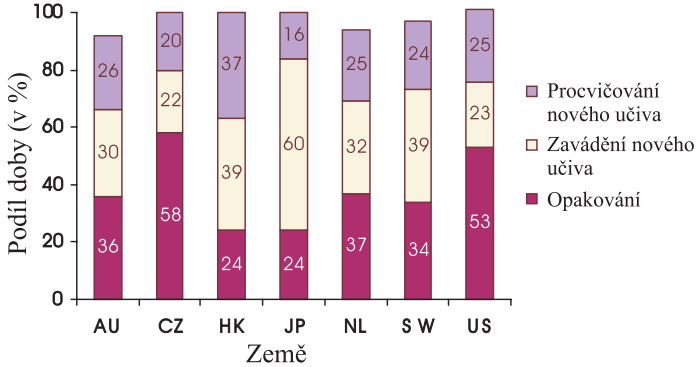
- Matematika v 8. ročníku je často vyučována na základě řešení problémů, v průměru je řešení matematických problémů věnováno minimálně 80 % vyučovací doby.
- Z organizačního hlediska se ve všech zemích setkáváme se společnou prací, celá třída pracuje společně, a individuální prací, žáci pracují samostatně nebo v malých skupinách. Individuální práce probíhá nejčastěji formou samostatné práce žáka, práce ve dvojicích nebo ve skupinách je méně častá.
- V průměru obsahuje vyučovací hodina ve všech sedmi zemích jak opakování již probraného učiva, tak zavádění nebo procvičování nové látky.
- Učebnice nebo pracovní listy jsou nějakou formou používány ve všech zemích minimálně v 90 % vyučovacích hodin.
- Ve všech zemích mluví učitelé více než žáci, minimální poměr slov je 8 : 1.

V další části jsou uvedeny některé rozdíly, které vyplynuly z provedené analýzy hodin.

- V České republice je v porovnání s ostatními zeměmi věnována při hodinách největší pozornost opakování již probraného učiva, s výjimkou USA je tento rozdíl statisticky významný. V Japonsku věnují statisticky významně větší dobu než v ostatních šesti zemích zavádění nového učiva. Procvičování nového učiva je největší pozornost věnována v Hongkongu, významný rozdíl byl zjištěn oproti České republice, Japonsku a Švýcarsku. Graficky je rozložení vyučovací hodiny pro jednotlivé země znázorněno na obrázku 1.

V České republice a v USA bylo 28 % vyučovacích hodin matematiky věnováno výhradně opakování, naopak v Hongkongu a v Japonsku to bylo jen 8 % a 5 % hodin.

- Ve sledovaných sedmi zemích se v 8. ročníku probírá učivo v rozsahu od přirozených čísel a zlomků až po řešení lineárních rovnic a trigonometrii.



Obr. 1 Průměrný podíl vyučovací doby v hodině podle účelu (v procentech)

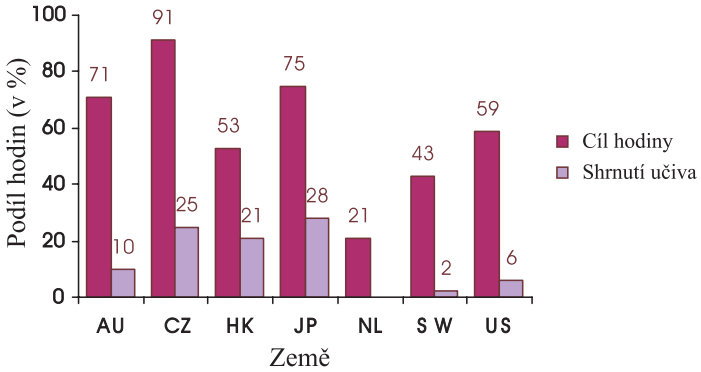
Minimálně 82 % řešených problémů připadajících v průměru na jednu vyučovací hodinu se ve všech zemích týká tří tematických okruhů: čísla, geometrie a algebra. Čísla se v největší míře vyučují ve Švýcarsku (42 %), geometrie v Japonsku (84 %), algebra přibližně v rozsahu 40 % v České republice, Hongkongu, Nizozemsku a USA. Hongkong je prakticky jedinou zemí, kde se v 8. ročníku vyučuje trigonometrie (14 % problémů).

Celková obtížnost matematického učiva je důležitým ukazatelem, ale těžko ji lze definovat a spolehlivě kódovat. Navíc co je obtížné pro jednoho žáka, může být méně obtížné pro jeho spolužáka. Pro účely analýzy videozáznamů matematických hodin byl proto zaveden jeden typ obtížnosti nezávislé na žákovi tzv. procedurální obtížnost, která je určena počtem kroků potřebných k vyřešení problému užitím běžného postupu. Byly definovány tři úrovně procedurální obtížnosti.

- Úrovní procedurální obtížnosti problémů řešených v hodinách se od všech ostatních zemí výrazně odlišovalo Japonsko. Pouze 17 % problémů připadajících na jednu vyučovací hodinu mělo nízkou úroveň obtížnosti – oproti 63 % až 77 % problémů v ostatních zemích. Naopak 39 % problémů řešených v Japonsku mělo vysokou úroveň obtížnosti, v ostatních zemích to bylo pouze 6 % až 12 % problémů.
- Žáci v Nizozemsku ve srovnání s žáky ostatních zemí řeší výrazně častěji matematické problémy, které vycházejí ze situací reálného

života. Reálný kontext má v Nizozemsku celkem 42 % problémů oproti 27 % v Austrálii, 25 % ve Švýcarsku a 22 % v USA. Nejmenší zastoupení (9 %) mají tyto problémy v Japonsku.

Jedním ze způsobů, jak může učitel pomoci žákům identifikovat matematické klíčové body hodiny, je, že popíše cíl hodiny. Druhým způsobem, který pomáhá žákům rozpoznat klíčové myšlenky hodiny, je provedení závěrečného shrnutí učitelem. Na obrázku 2 je graficky znázorněno, jak často se oba způsoby pomoci vyskytují v hodinách matematiky.



Obr. 2 Podíl hodin obsahujících formulování cíle a závěrečné shrnutí (v procentech)

- Nejvyšší procento vyučovacích hodin matematiky (91 %), kdy učitel předem formuluje cíl hodiny, je v České republice, dále pak v Japonsku (75 %) a v Austrálii (71 %). Shrnutí učiva nejčastěji provádějí učitelé v Japonsku (28 % hodin), v České republice (25 %) a Hongkongu (21 % hodin). Naopak výrazně nejnižší výskyt obou prvků je v Nizozemsku.
- Kalkulátory užívají při výpočtech nejčastěji žáci v Nizozemsku (v 91 % hodin), v dalších zemích se jejich používání pohybuje od 31 % (Česká republika) do 56 % hodin. Výjimku tvoří Japonsko, kde bylo zaznamenáno jen několik případů použití kalkulátorů v hodinách.

Jedna z výchozích otázek šetření byla, zda země s vyšším průměrným výsledkem dosaženým v mezinárodním výzkumu TIMSS používají

společné vyučovací metody. Rozbor videozáznamů vyučovacích hodin matematiky v 8. ročníku v sedmi zemích ukázal, že spíše než jeden společný přístup k výuce matematiky používají země rozdílné metody. Byly nalezeny určité obecné rysy ve výuce matematiky společné všem sedmi zemím, avšak každá země kombinuje jednotlivé prvky odlišným způsobem. Někdy se tak v daném přístupu shoduje s ostatními zeměmi, jindy se naopak od nich liší.

Mezinárodní koordinační centrum zveřejnilo výsledky z první časti výzkumu v roce 2003 [2]. Několik výtisků této publikace je k dispozici v oddělení mezinárodních výzkumů v Ústavu pro informace ve vzdělávání v Praze.

Druhá část výzkumu týkající se výuky přírodovědných předmětů se v současné době zpracovává, předpokládá se, že výsledky by mohly být k dispozici koncem roku 2004.

Další informace a podrobnosti o výzkumu TIMSS 1999 Video Study je možné získat na adrese http://www.lessonlab.com/timss1999/

Literatura

[1] Beaton A., Mullis I. V. S., Martin M. O., Gonzales E. J., Kelly D. L., Smith T. A.: *Mathematics Achievement in the Middle School Year: IEA‘s Third International Mathematics and Science Study.* Chestnut Hill, MA, Boston College, 1996.

[2] Hiebert J., Gallimore R., Garnier H., Givvin K. B., Hollingsworth H., Jacobs J., Chui A. M.-Y., Wearne D., Smith M., Kersting N., Manaster A., Tseng E., Etterbeek W., Manaster C., Gonzales P., Stigler J.: *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study* (NCES 2003-013). U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics, 2003.

Úvod do finanční matematiky prostřednictvím Excelu

Dana Tržilová

Konec dvacátého století znamenal pro naši zemi i celou Evropu významné celospolečenské změny, se kterými těsně souvisí ekonomické reformy. Nezbytnou součástí našeho života, bez které se v tvrdé ekonomické realitě dnešního světa neobejdeme, jsou finance. Tato situace se odráží ve školské matematice zařazením finanční matematiky do učebních osnov. Můj příspěvek je zaměřen na výuku finanční matematiky pro učitele 1.stupně základní školy podporovanou tabulkovými procesory. Cílem výuky je oživit znalosti studentů o procentech a seznámit je se základy úrokování, střádání a umořování dluhů. Protože je u nás finanční matematice věnován malý časový prostor, většina studentů hlouběji nepronikne do podstaty problému. Proto jsem se pokusila o zpřístupnění daného učiva prostřednictvím experimentální, počítačem podporované výuky matematiky.

Pro přiblížení potřebných pojmů a vzorců finanční matematiky byly při experimentu využity široké možnosti běžně dostupného softwarového nástroje, kterým je Excel. Avšak správné používání softwarových nástrojů vyžaduje teoretické znalosti základů řešených úloh. Algebraické odvozování potřebných vzorců finanční matematiky je časově náročné a pro zmíněné studenty obtížné. Proto bylo při výuce využito skutečnosti, že Excel umožňuje vyvodit většinu vzorců finanční matematiky na základě manipulace s konkrétními čísly. Zmíněný postup řešení úloh budeme demonstrovat na první úloze, která se věnuje problematice složeného úročení.

Příklad 1 Pan Novák vyhrál 1 000 000 Kč a uložil je do spořitelny. Roční úroková sazba je 13 %. Kolik korun získal na úrocích za 10 let, jestliže je nevybíral.

Řešení: Matematizaci problému úlohy v tabulkovém procesoru odpovídá sestavení tabulky, která úlohu vystihuje. V našem případě se jedná

o zobrazení průběžného stavu financí během desetiletého období. Při řešení úloh jsme předpokládali základní znalosti a dovednosti v používání Excelu a nerozebírali jsme tedy editační otázky (tvorbu záhlaví tabulky, apod.). Na obr. 1 je uvedena jedna z možností výsledné tabulky. Pro její sestavení studenti byli vybídnuti, aby v prvním řádku vytvořili vzorec počítající úrok vzniklý v prvním roce a vzorec pro odpovídající velikost naspořené částky. Při následném postupném vyplňování tabulky bylo úkolem studentů vymyslet, jak ze znalosti předchozích hodnot určit hodnotu v dalším řádku (tj. nalézt rekurentní pravidlo). Aby na základě práce s tabulkou bylo možno vyslovit rekurentní vzorce a „natáhnout“ je do všech řádek tabulky, byl doplněn řádek odpovídající stavu v nultém roce.Výsledkem práce bylo vyslovení následujících rekurentních vztahů pro složené polhůtní úročení:

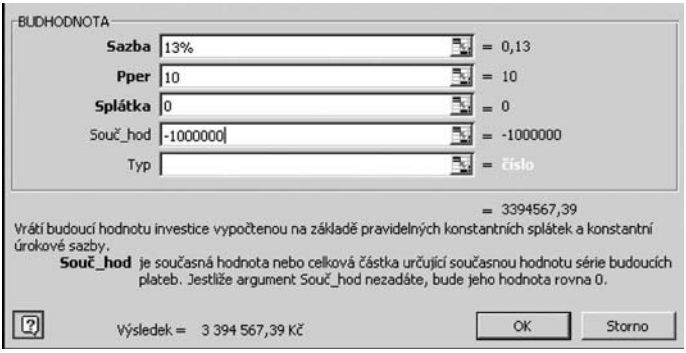
	rok	úrok	Naspořeno
Jistina	0		1 000 000,00
	1	130 000,00	1 130 000,00
	2	146 900,00	1 276 900,00
	⋮	⋮	⋮
	9	345 597,75	3 004 041,94
	10	390 525,45	3 394 567,39
Úrok za 10 let		2 394 567,39 Kč	

Obr. 1

$$\begin{aligned} u_n &= K_{n-1} \cdot i \\ K_n &= K_{n-1} + u_n \end{aligned}$$

kde u_n je výše úroku v n-tém roce, K_n je výše kapitálu na konci n-tého roku, i je roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo, n je doba splatnosti vyjádřená v letech. Pro kontrolu správnosti nalezeného výsledku jsme využili funkce finanční matematiky, kterými Excel disponuje. Uvedli jsme je jako předdefinované vzorce, které provádí výpočty podle zadaných argumentů. Pro zadávání funkcí jsme používali dialogová okna (obr. 2) a potřebné funkce jsme vybírali ze seznamu funkcí

(VLOŽIT – FUNKCE). Upozornili jsme studenty na rozdělení argumentů funkcí na povinné (napsané tučně), které být vyplněny musejí a nepovinné, které sice vyplněny být nemusejí, ale zpravidla způsob výpočtu výrazně ovlivní. Argumenty jsme zadávali kliknutím na odpovídající buňky. Protože se převážně jednalo o málo zkušené uživatele Excelu, upozornili jsme je na rozdíl mezi obsahem buňky (řídící znak „=“, klíčové slovo pro funkci, otevírací závorka, seznam argumentů oddělených středníkem a uzavírací kulatá závorka) a tím co v buňce vidíme (výsledek funkce, v našem případě konstanta). Rovněž jsme upozornili studenty na skutečnost, že v Excelu jsou peníze, které k nám přitékají, vyjádřeny kladnými čísly, zatímco peníze, které od nás odtékají, jsou vyjádřeny zápornými čísly.



Obr. 2

Druhý okruh úloh se týkal spoření. Prostřednictvím těchto úloh byli studenti seznámeni s často používanou metodu při řešení matematických problémů pomocí Excelu, tj. s experimentováním s daty v předem sestavené tabulce.

Příklad 2 Pan Novák chce uspořit 45 000 Kč za šest měsíců. Kolik musí uspořit měsíčně jestliže měsíční úroková sazba činí 1,5 %. Peníze bude ukládat na začátku měsíce a úrok bude přidán na konci měsíce.

Řešení: Úkolem studentů bylo sestavit tabulku počítající velikost naspořené částky za 6 měsíců při zvolené velikosti úložky. Počáteční velikost

úložky se u jednotlivých studentů velmi lišila. Objevovaly se zde jak zcela náhodná čísla (např. 1 500 Kč), tak i odhady provedené výpočtem (45 000/6 = 7 500 Kč). Objevený rekurentní vztah pro výpočet naspořené částky po n letech (S_n) měl následující tvar

$$S_n = (S_{n-1} + m) + S_{n-1} \cdot i,$$

kde m je úložka, i je roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo. Pro zajištění naspořené částky 45 000 Kč studenti s velikostí úložky dále experimentovali, tj. vložili do tabulky její odhadovanou velikost a podle hodnot generovaných počítačem ji postupně zvětšovali, popř. zmenšovali. Aby mohli snáze měnit hodnotu úložky, studenti většinou upravili počáteční návrh své tabulky (viz obr. 3). Nalezenou hodnotu úložky studenti rovněž zkontrolovali prostřednictvím funkce PLATBA.ZÁKLAD.

	úložka	naspořeno
1	7 500	7 500
2	7 500	15 009,38
3	7 500	22 528,14
4	7 500	30 056,3
5	7 500	37 593,87
6	**7 500**	**45 140,86**
7	7 500	52 697,29
8	7 500	60 263,16
9	7 500	67 838,49
10	7 500	75 423,28

$\longleftarrow$ = D15 + D15 ∗ 0,15/12 + C16

první verze tabulky – vyvození vzorců (na základě manipulace s čísly studenti vyvodili příslušné rekurentní vzorce)

	úložka	naspořeno
1	7 480	7 480
2		14 969,35
3		22 468,06
4		29 976,15
5		37 493,62
6		45 020,48
7		52 556,76
8		60 102,46
9		67 657,58
10		75 222,16

$\longleftarrow$ = D15 + D15 ∗ 0,15/12 + $C16$

druhá verze tabulky – experimentování s tabulkou (byly provedeny úpravy aby bylo možno snáze měnit hodnotu úložky)

Obr. 3

Závěrečný okruh úloh byl věnován splácení úvěru. Studenti měli pomocí tabulkového procesoru odhadnout velikost pravidelných splátek při daných podmínkách.

Příklad 3 Začínající podnikatel získal úvěr 500 000 Kč na 16% úrok na 4 roky. Jak veliké budou jeho měsíční splátky? Úrok bude připisován měsíčně.

Úroková sazba	**16 %**	
úvěr	**500 000**	
splátka	**10 500**	
měsíc	zůstatek	
1	496 167	$\longrightarrow$ = C4 + C4 ∗ sazba/12 − splátka
2	492 282	
3	488 346	
⋮	⋮	
45	265 714	
46	258 757	
47	251 707	
48	244 563	

Obr. 4

Řešení: Z tabulky uvedené na obr. 4 je patrné, že s narůstajícími zkušenostmi studenti více využívali předností Excelu. Měnil se jak způsob rozmístění údajů v tabulce, tak způsob zápisu vzorců (např. pojmenování políček). Rekurentní vztah pro výpočet měnícího se zůstatku (Z_n) při jeho umořování pravidelnými splátkami (s) měl následující tvar

$$Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-1} \cdot i - s$$

Výsledná tabulka (umořovací plán), jejíž prostřednictvím studenti vypočítali velikost splátky je zobrazena na obr. 5. Nalezenou hodnotu splátky jsme zkontrolovali funkcí PLATBA.

Uskutečněná pilotní sonda ukázala, že studenti učitelství prvního stupně ZŠ jsou schopni řešit problémy z finanční matematiky za pomoci Excelu. Manipulace s konkrétními čísly dávala studentům větší jistotu při řešení problémů. Správnost vyvozených vzorců a příslušných tabulek byli schopni kontrolovat užitím správně zvolených funkcí finanční matematiky, které jsou součástí Excelu.

úroková sazba				16 %			
půjčka				500 000 Kč			
měsíční splátka				14 170 Kč			
Měsíc	zůstatek	měsíc	zůstatek	měsíc	Zůstatek	měsíc	zůstatek
0	500 000						
1	492 497	13	394 259	25	279 097	37	144 097
2	484 893	14	385 345	26	268 648	38	131 848
3	477 189	15	376 313	27	258 060	39	119 436
4	469 381	16	367 161	28	247 331	40	106 858
5	461 469	17	357 886	29	236 459	41	94 113
6	453 452	18	348 488	30	225 442	42	81 198
7	445 328	19	338 965	31	214 278	43	68 111
8	437 096	20	329 314	32	202 965	44	54 849
9	428 754	21	319 535	33	191 501	45	41 410
10	420 301	22	309 626	34	179 884	46	27 792
11	411 735	23	299 584	35	168 113	47	13 993
12	403 055	24	289 408	36	156 184	48	9

Obr. 5

Maple ve výuce matematiky a jeho využití při řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Marek Vaďura

1 Úvod

Hned na počátku bychom si měli položit otázku, jaký je vlastně přínos počítače jako pomocníka při výuce matematiky. Počítač nám umožní, abychom mu přenechali zdlouhavé výpočty a plně se zaměřili na analýzu a řešení problému. Pokud v běžné výuce popíšeme tabuli jakkoli duchaplným řešením, nejsme často schopni bezprostředně ověřit, zdali jsou podobných úvah schopni i sami studenti. Důvodem je nedostatek času a zbytečné plýtvání energií na dílčí výpočty. Přes všechny počty zbývá pak méně času na samotnou matematiku.

Po přečtení předchozího odstavce bychom si mohli spokojeně odpovědět, že tento problém snadno vyřeší nasazení počítačů ve výuce matematiky a vlastně jen zbývá vybrat vhodný matematický software. Potíž ale nastane ve chvíli, kdy budeme studenty učit, jak se program ovládá. Většinou platí, že čím snadněji se lze program naučit, tím méně možností nám nabízí. Většina odborníků na tuto problematiku se shoduje na programech Derive (střední školy) a Maple (vysoké školy). V tomto článku se zaměříme na program Maple a budeme ilustrovat jeho možnosti při řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. stupně.

Maple je programový systém počítačové algebry, který už má za sebou přibližně dvacetiletou historii vývoje, který započal na univerzitě ve Waterloo (Kanada). Označení Maple mohlo vzniknout zkrácením z anglického akronymu Mathematics Pleasure (matematika potěšením).

Je ovšem nutné poznamenat, že při výuce matematiky pomocí Maplu (na VŠ i ŠŠ) bychom měli spolupracovat s nějakým kurzem informatiky a výpočetní techniky (vzhledem k obtížnosti programu). Také je zřejmé, že klasickou výuku matematiky nemůže výuka s počítačem nahradit, ale pouze vhodně doplnit, jelikož se na problémy můžeme dívat z jiného úhlu.

Spojením těchto dvou pohledů se zvyšuje pravděpodobnost správného pochopení dané problematiky. S programem Maple se můžeme zabývat pouze kostrou problému a dílčí výpočty mu přenechat. Díky tomu máme čas a možnosti zkoumat problém z různých stran.

To, že na daný problém můžeme nahlížet z různých stran, nesouvisí přímo s Maplem. Ten nám k realizaci tohoto záměru dodá pouze vhodné programovací nástroje. Jazyk Maplu je zvláštním křížencem imperativních a funkcionálních jazyků, který byl navržen s ohledem na efektivní řešení matematických problémů. Pro ilustraci zvolme nějaký jednoduchý, obecně známý úkol. Následující příklad ukazuje zavedení funkce *faktoriál* třemi různými způsoby.

```
> fak1:= proc(n::nonnegint)
> local i, j;
> for i~from 0 by 1 to n do
> if i=0 then j:=1; else j:=j*i; end if;
> end do;
> return j;
> end proc;
```

Toto byl klasický imperativní přístup, kdy faktoriál programujeme `for` cyklem. Do proměnné přiřadíme počáteční hodnotu, kterou při každém průchodu cyklem násobíme číslem o 1 větším než bylo to předešlé.

Následující ukázka je jedním z možných způsobů funkcionálního přístupu, který je dostupný i ve většině jiných jazyků.

```
> fak2:= proc(n::nonnegint)
> if n = 0 then return 1; else return n*fak2(n-1); end if;
> end proc;
```

Definovali jsme vlastně funkci, která rekurzivně volá samu sebe, dokud rekurze nedorazí k faktoriálu nuly. V poslední definici faktoriálu, kterou zde uvedeme, využijeme plně možnosti Maplu při definování funkce po částech.

```
> fak3:= n->piecewise(
> n>0 and type(n,nonnegint), n*fak3(n-1),
> n=0, 1,
> "argument musí být celé nezáporné číslo");
```

Mohli bychom teď spekulovat, který zápis je pro výuku nejvhodnější. Můžeme si vybrat funkci, která se nám nejlépe hodí pro naše záměry, a právě proto je Maple tak oblíbený.

2 Diferenciální rovnice

Pro řešení diferenciálních rovnic je Maple přímo stvořený. S programem jsou dodávány knihovny, které obsahují spoustu užitečných příkazů.

```
> sep1:=x*diff(y(x), x)/y(x) = x^2*(1-y(x))/y(x);
```

$$sep1 := \frac{x(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x))}{\mathrm{y}(x)} = \frac{x^2(1-\mathrm{y}(x))}{\mathrm{y}(x)}$$

Pokud napíšeme v Maplu dif. rovnici, nemusí nám vyhovovat její podrobné a poněkud nepřehledné zobrazení. Pokusme se v Maplu zobrazování dif. rovnic (resp. derivace) nastavit vhodněji pro naše účely. Použijeme k tomu příkaz `declare` z knihovny `PDEtools`.

```
\mapleinline{active}{1d}{
> with(PDEtools):declare(y(x));ON;
```

Nyní je derivace značena jako spodní index, jak je obvyklé u diferenciálního počtu více proměnných. Možná bychom ale chtěli značit derivaci čárkou, jak jsme zvyklí u dif. počtu 1 proměnné. To má samozřejmě své nevýhody, avšak pro následující příklad toto značení postačí.

```
> declare(prime=x);
> sep1;
```

$$\frac{xy'}{y} = \frac{x^2(1-y)}{y}$$

Pokud chceme v Maplu použít příkaz z nějaké knihovny, můžeme ji načíst příkazem `with`, nebo načíst pouze konkrétní příkaz, jako v případě příkazu `odeadvisor`, který nám diferenciální rovnici klasifikuje. Pro řešení diferenciálních rovnic je jednou z možností příkaz `dsolve`. Jeho klasifikace rovnice se může od `odeadvisor` lišit, neboť daná rovnice může náležet do více typů. Z výpisu o určování metody vidíme, že příkaz `dsolve` klasifikoval rovnici jako lineární. Při druhém použití stejného příkazu jsme si vynutili, aby danou rovnici řešil jako separovanou (použitím `[separable]`).

```
> DEtools[odeadvisor](sep1);
> infolevel[dsolve]:=2:
> dsolve(sep1,y(x));
> dsolve(sep1,y(x),[separable]);
> infolevel[dsolve]=0;
```

$$[_separable]$$

```
<- 1st order linear successful
```

$$y = 1 + e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} _C1$$

```
Classification methods on request

Methods to be used are: [separable]

<- separable successful
```

$$y = -\frac{e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}}{_C1} + 1$$

Pro některé časté typy rovnic existují v Maplu ještě speciální príkazy na míru. Například v tomto případě můžeme rovnici řešit též příkazem `separablesol`.

```
> reseni2_sep1:=DEtools[separablesol](sep1);
```

$$reseni2_sep1 := \left\{ y = -\frac{e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}}{_C1} + 1 \right\}$$

Nyní si ukážeme, jak hledat v Maplu obecné řešení této rovnice krok za krokem. Budeme postupovat po malých krocích, jako kdybychom počítali příklad na tabuli (kromě počtů, které bezprostředně nesouvisejí s postupem řešení).

Převedeme naši rovnici do zjednodušeného tvaru. Tím nám ale vypadnou řešení, která bychom měli nakonec sloučit s obecným řešením.

```
> sep1_1:=sep1*y(x)/x: sep1_1:=sep1_1/(1-y(x));
```

$$sep1_1 := \frac{y'}{1-y} = x$$

Obě strany rovnice nyní integrujeme.

```
> sep1_2:=map(Int,sep1_1,x);
```

$$sep1_2 := \int \frac{y'}{1-y}\, dx = \int x\, dx$$

Maple nám automaticky k výsledku integrace nepřidá rozdíl konstanty, takže jej musíme (pomocí sčítání rovnic) přidat sami.

```
> sep1_3:=value(sep1_2)\char43 (0=C);
```

$$sep1_3 := -\ln(1-y) = \frac{x^2}{2} + C$$

Nyní osamostatníme $y(x)$, které se však zobrazuje jen jako y, čímž obdržíme obecné řešení, které dále upravujeme.

```
> sep1_4:=isolate(sep1_3,y(x));
```

$$sep1_4 := y = -e^{(-\frac{x^2}{2}-C)} + 1$$

```
> sep1_5:=lhs(sep1_4)=expand(rhs(sep1_4)):
> sep1_6:=subs(exp(C)=-1/k,sep1_5);
```

$$sep1_6 := y = e^{(-\frac{x^2}{2})}k + 1$$

Při neekvivalentních úpravách jsme museli dodatečně vyloučit některá řešení rovnice. Po jejich sjednocení s obecným řešením by se nám však výsledek nezměnil.

Pokud bychom také chtěli řešit počáteční problém, stačí zadat např. jeho rovnici a provést dosazení do obecného řešení. První počáteční problém řešme popsaným způsobem, druhý pomocí `dsolve`.

```
> pp1_1:=y(0)=0:
> pp1_2:=y(0)=2:
> respp1_1:=subs(x=op(op(1,pp1_1)),pp1_1,sep1_6);
> respp1_2:=solve(respp1_1,\{k\});
> PR1_1:=subs(respp1_2,sep1_6);
```

$$respp1_1 := 0 = e^0 k + 1$$
$$respp1_2 := \{k = -1\}$$
$$PR1_1 := y = -e^{(-\frac{x^2}{2})} + 1$$

```
> PR1_2:=dsolve(\{sep1,pp1_2\});
```

$$PR1_2 := y = 1 + e^{(-\frac{x^2}{2})}$$

Řešení počátečních problémů můžeme nyní bez problémů graficky znázornit následujícím příkazem.

```
> plot([rhs(PR1_1),rhs(PR1_2)],x=-3..3,y=0..2,thickness=2,
> linestyle=[1,3],color=black,legend=["PR1_1","PR1_2"]);
```

3 Ortogonální trajektorie

K diferenciálním rovnicím prvního řádu se těsně vážou úlohy o hledání ortogonálních trajektorií k soustavě křivek zadaných rovnicí.

```
> with(plots):
> f := y = c/x:
> f:=subs(y=y(x),f);
```

$$f := \mathrm{y}(x) = \frac{c}{x}$$

```
> dr_f:=diff(f,x):
```

Od dif. rovnice původního systému přejdeme k dif. rovnici systému ortogonálních trajektorií.

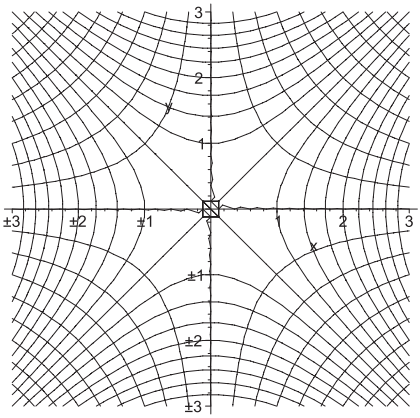
```
> dr_g:=subs(diff(y(x),x)=(-1/diff(y(x),x)),dr_f):
> dr_g:=subs(c=rhs(isolate(f,c)),dr_g):
> res_dr_g:=dsolve(dr_g,y(x))[1]:
```

Vyjádříme si oba systémy ve vhodném tvaru a na závěr vykreslíme jejich společný graf.

```
> g:=solve(res_dr_g,_C1)=c;
> f:=isolate(f,c);
```

$$g := -x^2 + \mathrm{y}(x)^2 = c$$
$$f := c = \mathrm{y}(x)x$$

```
> fplot:=implicitplot([seq(f,c=-10..10)],x=-3..3,y=-3..3,
> color=black,scaling=constrained):
> gplot:=implicitplot([seq(g,c=-10..10)],x=-3..3,y=-3..3,
> color=black,scaling=constrained):
> display(fplot,gplot);
```



Literatura

[1] Heck A.: *Introduction to Maple.* 2. vydání, Springer-Verlag, New York 1996.

[2] Ráb M.: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* 3. přepracované vydání, Brno 1998.

[3] Monagan M. B.: *Maple 9 Advanced Programming Guide.* Maplesoft, Kanada 2003.

[4] http://www.maplesoft.com

Zkušenosti ze školení učitelů v používání počítače při výuce matematiky

Jiří Vaníček

Abstrakt

Masové vzdělávání českých učitelů pro užívání informačních technologií ve výuce umožnilo realizovat plán hromadného proškolení učitelů matematiky v této oblasti. Modul „ICT ve výuce matematiky“ ministerského programu Informační gramotnost, připravený učiteli tří českých univerzit, si klade za cíl informovat učitele matematiky na šklách o možnostech výuky tohoto předmětu pomocí počítače, o současných trendech a používaných počítačových programech, o výhodách a úskalích nasazení výpočetní techniky do výuky. Tento článek informauje o zkušenostech z prvního půlroku provozu školicího modulu a o výhledu do budoucna.

Školení učitelů v používání počítače ve výuce – současný stav

Podle představ MŠMT bude již v roce 2006 plná **čtvrtina všech českých učitelů** na ZŠ a SŠ takzvanými poučenými uživateli, schopnými používat počítač ve vlastní výuce. K tomu absolvují v rámci programu Informační gramotnost tři moduly počítačových školení, z nichž dva jsou výběrové a každý učitel si typ školení může vybrat podle své odbornosti a profesionálního zájmu. Prostředky na tento typ školení jsou nemalé a jsou účelově vázány, disponuje s nimi ředitel školy.

Jednou z možností zvláště připravenou pro učitele matematiky je absolvovat modul školení „Informační a komunikační technologie ve výuce matematiky“, který navrhli a vybudovali učitelé Univerzity Karlovy, Západočeské univerzity a Jihočeské univerzity a garantuje jej Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity. Celostátně jednotně organizovaný systém

školení probíhá v tzv. školicích střediscích, kterých jsou desítky, další vznikají a jejich počet není omezen. Do nich jsou zváni učitelé ze škol, aby se školení zúčastnili.

Školení v rámci modulu P-MAT

Školení má rozsah 24 hodin prezenčního studia a 6 hodin samostudia především prostřednictvím Internetu.

Cílem školení je seznámit učitele s matematickými programy, které se běžně ve světě používají pro výuku matematiky. Jde o programy dynamické geometrie, algebraické systémy, mikrosvěty a tabulkové procesory. Na školeních se konkrétně pracuje s programy Cabri, Derive, Imagine Logo a Excel. Mimo práci s těmito programy je hlavní náplní školení didaktický a metodický nástin výuky matematiky pomocí počítače a ukázky možných či nutných změn v pojetí výuky matematiky, daných pouhým uvědoměním si existence počítačů. Školení je chápáno jako úvodní, klade si za cíl především seznámit učitele s možnostmi nasazení počítače ve výuce. Nezbývá zde bohužel prostor na detailnější procvičení vlastních dovedností ani na konkrétní metodické postupy pro jednotlivé tematické celky – zde vidíme prostor pro školení následná nebo pro samostudium.

Samostudium a závěrečná práce

Ve své koncepci vzdělávání učitelů klade ministerstvo důraz na samovzdělávání učitelů především prostřednictvím Internetu. Proto byla vybudována rozsáhlá internetová podpora modulu, čítající stovky stran učebního textu – příruček ovládání vyjmenovaných programů, sbírky úloh a metodické příručky, populárně vědecké články a odkazy do světa. Součástí podpory jsou připravené počítačové soubory, které lze načíst do odpovídajícího programu a používat ve škole, nebo interaktivní webové stránky, v nichž si uživatel přímo může hotovými obrázky manipulovat. Systém podpory je stále aktivní a materiály na něm přibývají.

Školení by mělo dát učitelům kromě základních dovedností s programy také rozhled po problematice, radost z této práce a naplnit je touhou vyzkoušet si tento způsob výuky na vlastní kůži. Požadavkem ministerstva je však praktický výstup z takového školení. Proto každého účastníka čeká závěrečná práce: učitel si vybere jeden ze školených

programů a v něm vytvoří práci, kterou odevzdá. Může se jednat o zpracovanou úlohu pro vlastní vyučování, o připravený materiál podporující vlastní výklad nebo projekt pro práci s dětmi pomocí vybraného software. K tomu, aby učitel mohl práci vytvořit, si nepotřebuje žádné programy kupovat: v každém ze čtyř typů programů lze vytvořit práci na programech „zdarma“.

Systém přípravy lektorů modulu

Na rozdíl od ostatních modulů, kdy byli budoucí školitelé hromadně sezváni a krátce metodicky instruováni, požadujeme, aby každý budoucí lektor matematického modulu P-MAT nejprve prošel samotným školením. Šlo nám především o zachování ducha školení – nechtěli jsme, aby se P-MAT změnil v pouhé mechanicky počítačové školení o nějakých programech, ale aby byly především předváděny matematické a didaktické aplikace, aby podstatou školení byla matematika a její výuka. Přitom je známo, že je obtížné styl výuky přenést bez přímé zkušenosti, bez tzv. „okoukání“. Dalším důvodem byly později potvrzené obavy, že v českých školách je velmi málo učitelů matematiky, kteří jsou s matematickými programy v modulu vyučovanými dostatečně seznámeni.

Budoucí lektor školení absolvuje metodický seminář a vypracuje čtyři náročnější projekty, každý v jednom ze čtyř programů ve školení vyučovaných. Na vypracování projektů má neomezený čas. Projekty prochází oponentním řízením, které zabezpečuje garant modulu, oponenti jsou odborníci na danou problematiku; neschválené projekty je možno dopracovat. Samotné oponentní řízení stejně jako pozdější administrace školicích středisek probíhá distanční formou pomocí e-learningového prostředí, je tedy možné projekty odevzdávat z domova.

Konkrétní školicí středisko může školit, jakmile má vyškoleného lektora a učebnu se zakoupenými programy nutnými pro provádění školení. Systém „lavinovitého“ vzniku školicích středisek má nevýhodu v počátečním malém počtu školení a výhodu v kvalitě připravených lektorů a jejich programů.

Dosavadní zkušenosti

Základní zkušeností realizačního týmu je, že vybudování modulu představovalo obrovské množství práce. Velmi široký záběr se snahou zachytit hlavní typy používaných programů a doplnit je obecnými pasážemi

svým rozsahem překonal jiné monoaplikační moduly, které měly učitele za úkol seznámit s jediným programem. I když některé výukové materiály byly předem připraveny a některé byly pro potřeby modulu upravovány, řada materiálů musela teprve vzniknout, být vyzkoušena a odladěna. Realizační tým se kromě vypracování webové podpory modulu a vedení vlastních školení musel podílet na lokalizaci, tedy na vytvoření českých verzí tří z vyučovaných programů (Derive, Imagine a Cabri Plus), aby tyto programy byly v českých školách lépe použitelné. Jistý nemalý čas zabírá i permanentní oponentní řízení u projektů budoucích lektorů.

Měli bychom zmínit nedostatky, které cítíme v naší práci nebo v reakcích účastníků:

- Zatím vzniklo relativně málo školicích středisek, existuje málo lektorů. Na rozdíl od jiných modulů (CAD, tvorba www stránek, tabulkové procesory, ...), kde již dříve existovala velká skupina potenciálních lektorů, kteří daný software ovládali, my jsme museli téměř všechny své lektory práci s programy teprve učit, ukazovat jim podstatu práce i přínos pro výuku. Další lektoři se však etablují, zde jsme optimisty, že během příštího roku se školení rozběhne s větší intenzitou.
- Nedokážeme se bránit různým nepravdivým nařčením, že modul je drahý, že si učitelé software musí kupovat apod. Na stránkách webové podpory je vysvětleno několik cest získání různých demoverzí nebo free verzí programů.
- Informace, že školení je nadměrně obtížné, které se šíří mezi učiteli, paradoxně nepochází od absolventů kurzu, ale od lidí, kteří si patrně nepozorně přečetli informace o modulu a možná si pletou nároky na lektory modulu s požadavky na účastníky, tedy na obyčejné učitele. Modul P-MAT není výkonnostní, je seznamovací. Je možné, že toto se nám nepodařilo zcela správně vysvětlit. Jestliže ovšem učitel matematiky před modulem „jak učit M s počítačem“ dá přednost např. modulu „jak digitálně fotografovat“, nemůžeme proti tomu nic dělat.
- Někteří účastníci školení očekávají již konkrétní aplikace, návody, jak učit tu kterou vyučovací hodinu pomocí počítače. V našem školení není prostor pro takto podrobné vedení učitelů, proto podrobnější aplikační materiály (sbírky úloh, metodiky) uveřejňujeme na stránkách webové podpory modulu, a při školení ukazujeme typické příklady a ukázky použití programů.

- Někteří účastníci jsou po skončení školení smutní, že podle jejich slov nádherné věci nebudou moci ihned vyzkoušet ve třídě, protože škola software nyní nekoupí a není připravena organizačně vyřešit používání počítačových učeben pro výuku jiných předmětů než výpočetní techniky. Zde dokážeme pomoci jedině radou nebo příkladem jiných škol, kde to jde. Základní fakt, že programy se musí kupovat, bohužel nezměníme. Rádi bychom viděli například hromadné multilicence těchto programů pro celé české školství, ovšem politika ministerstva vede jiným směrem, v posílení autority škol. Zde již záleží na samotném učiteli, případně na vedení školy.
- Posledním problémem je uvědomovaný fakt, že zatímco současní učitelé ve školách mají možnost se v této oblasti vzdělávat, na mnoha vysokých školách připravující budoucí učitele matematiky se vůbec kompetencemi typu užití počítače ve výuce matematiky nezabývají. Znamená to v důsledku, že čerství absolventi vysokých škol nebudou mít v tomto směru dostatečné vzdělání. Zavedení povinného předmětu Počítačem podporovaná výuka matematiky, který by mohl využívat již vytvořených výukových materiálů, do studijních plánů pedagogických fakult, je problémem, který nevyřeší ani ministerstvo, ovšem postrádáme zde z jeho strany nějakou grantovou podporu tohoto nutného procesu.

Do budoucna

- Školení Informační gramotnosti SIPVZ bude probíhat zatím do konce roku 2006. Jestliže modulem P-MAT projde dostatečný počet učitelů, bude to znamenat i to, že školy budou podávat rozvojové programy na vybavení učeben tímto software a budou ve svých rámcových plánech výuky matematiky možnost výuky na počítači zohledňovat. Tvůrci učebnic, metodických materiálů, kurzů dalšího vzdělávání učitelů atd., budou moci počítat s tím, že mají před sebou nemalý trh učitelů a škol, pro které se vyplatí výukové materiály přizpůsobit pro výuku pomocí počítače. Budou vznikat alternativní učebnice nebo metodické příručky, které počítač ve výuce matematiky využijí.
- Je zřejmé, že školením P-MAT se pouze nastartuje systém dalšího vzdělávání učitelů v této oblasti. Budou organizována další, již podrobnější školení k jednotlivým programům a jejich aplikacím ve výuce.

- Ministerstvo plánuje vytvoření obrovského zdroje výukových materiálů a informací pro školy na Internetu, tzv. internetového vzdělávacího portálu, který bude nabízet školám výukové materiály uspořádané po předmětech, bude nabízet ale i další možnosti – spolupráce škol, účast v soutěžích, výměny informací a online školení učitelů. Je zde předpoklad, že stránky modulu P-MAT se stanou základem budovaného portálu pro oblast výuky matematiky, a to nejen pomocí počítače.
- Bude se více využívat již existující elektronická konference (tedy systém automatického rozesílání e-mailů přihlášeným adresátům) na téma jak učit matematiku pomocí počítače. Účastníci mohou do konference napsat e-mail a obdrží jej všichni ostatní účastníci. Zde se mohou např. řešit problémy s instalací programů, jejich ovládáním a používáním, vést debaty o novinkách, dávat oznámení o školeních nebo soutěžích apod.
- Naši lektoři budou do budoucna jistě představovat soubor lidí, kteří se dokáží v problematice orientovat. Každý takový lektor bude ve svém regionu největším odborníkem v této oblasti. Očekáváme, že z těchto lektorů se etabluje oborová metodická skupina, která bude ve svých oblastech i nadále šířit novinky, bude se podílet na tvorbě metodických materiálů a náplni ministerského portálu, vést další již vlastní školení atd. Očekáváme, že právě cestou našich lektorů se přenese významná část zodpovědnosti za další vývoj z vysokých na střední a základní školy.

Literatura

[1] stránky modulu P-MAT http://www.pf.jcu.cz/p-mat

[2] ministerský informační servis SIPVZ http://www.e-gram.cz

[3] portál pro podporu geometrie pomocí počítače http://www.pf.jcu.cz/cabri

[4] elektronická konference učitelů používajících počítač ve výuce matematiky p-mat@pf.jcu.cz

[5] Vaníček J.: *Informační gramotnost učitelů – modul „P-MAT“.* konference Užití počítačů ve výuce matematiky, České Budějovice, 14. 10. 2003.

[6] Vaníček J.: *The Module P-MAT: How to Teach Math Using Computer.* konference ICTE 2004, Rožnov pod Radhoštěm, 31. 8.–2. 9. 2004.

Budoucí učitelé matematiky a souvislá pedagogická praxe

Jaroslav Zhouf, Naďa Stehlíková

Souvislá pedagogická praxe (dále jen praxe) na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze probíhá podle učebního plánu v letním semestru 4. ročníku (na základní škole) a v zimním semestru 5. ročníku (na střední škole) v rozsahu vždy jednoho měsíce. Před touto praxí probíhá ve 3. ročníku tzv. klinický semestr, což představuje náslechy studentů v hodinách učitelů základní školy vždy jeden den v týdnu po dobu celého semestru.

Minimálně je třeba odučit 12 hodin v rámci jedné praxe. Doporučuje se učit oba předměty na jedné škole a paralelně. Tím se sleduje navození reálnější učitelské práce, kdy každý učitel musí během jednoho dne odučit více hodin, a to z obou předmětů své aprobace. Každá pedagogická praxe začíná řadou náslechů, aby se student mohl seznámit s jednotlivými třídami, s fakultním učitelem a s probíranými tématy. Pak následuje vlastní výuka.

Fakultní učitel má za úkol diskutovat před náslechy i před studentovými výstupy formu i obsah hodiny a po hodině celý její průběh analyzovat. Během pobytu studenta na škole ho má učitel seznámit s pedagogickými dokumenty, s třídnictvím a chodem školy jako celku, zapojit ho pokud možno i do dalších mimovýukových aktivit, jako jsou matematické soutěže, zájmová činnost žáků, návštěvy kina atd. Po každé praxi fakultní učitel studenta písemně zhodnotí a ohodnotí ho klasifikačním stupněm. Student pak písemně vypracuje sebereflexi, kde rozebere své působení na škole. Za splnění všech těchto povinností obdrží zápočet. Studenti musí aspoň jednu ze dvou praxí konat na nějaké pražské škole, aby je mohl při výuce navštívit učitel fakulty, a tak zhodnotit jejich připravenost na budoucí povolání.

Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

Sebereflexe studentů

Stěžejní částí tohoto příspěvku bude analýza písemných sebereflexí studentů. Dá se v nich totiž objevit mnoho zajímavých postřehů, které mohou vést ke korekcím v organizaci praxí a k pochopení vztahů studentů k učitelskému povolání. Jsou to totiž názory mladých lidí, kteří ještě nejsou deformováni učitelským povoláním. Je to vlastně určitý pohled zvenku na toto povolání.

Písemnou sebereflexi jsme začali od studentů vyžadovat před čtyřmi lety a sami jsme ještě neměli představu, jak by měla vypadat. Po dvou letech jsme si na základě syntézy různě zpracovaných sebereflexí udělali lepší představu, jak by mohla vypadat, a rozhodli jsme se studentům doporučit, aby mimo jiné obsahovala jméno učitele, název a zaměření školy, zdůvodnění výběru školy, vyučované třídy a předměty, používané učebnice, prostudované pedagogické materiály, popis některých hodin, postřehy z výuky a ze života školy a mimovýukové činnosti, shrnutí vlastního působení při praxi, mínění o svém budoucím působení jako učitele apod. Studenti toto doporučení vzali doslova a najednou se jejich hodnocení vzájemně podobala. Zcela se z nich vytratily bezprostřední pocity a postřehy, originální nápady, zajímavosti a kreativita. Proto jsme od podrobnějších instrukcí k obsahu sebereflexe upustili.

Výňatky z písemných sebereflexí studentů

Přestože jsou studentské sebereflexe různorodé, dají se v nich najít společná témata, na něž se zaměříme. Provedeme výčet některých z nich a doplníme je autentickými citáty.

Výběr školy

Fakulta má s několika tzv. fakultními školami podepsánu smlouvu o spolupráci. Studenti mají možnost na nich konat svou praxi, mohou si ale také zajistit školu sami, čemuž většina dává přednost.

Jedním důvodem vlastní volby školy je dobrá úroveň výuky toho pro ně oblíbenějšího aprobačního předmětu: „Náš výběr ovlivnila převaha chlapců nad dívkami, protože jsme vzhledem k našemu druhému aprobačnímu předmětu, tělesné výchově, hodlali vyzkoušet florbal, a škola měla výborné tělovýchovné vybavení.“

Asi nejdůležitějším důvodem vlastního výběru je možnost konat praxi na škole, kde by studenti chtěli po absolvování fakulty učit. Často se pak

stane, že jsou po této praxi již na částečný úvazek na škole zaměstnáni nebo tam dlouhodoběji suplují za nemocné učitele: „Pro praxi jsem si vybrala školu, kde se ucházím o místo od příštího školního roku. Nebyla to tedy praxe, kde bych si dělala pouze svoji práci, absolvovala povinné hospitace, udělala své přípravy a odučila své hodiny. Snažila jsem se především poznat prostředí této školy a ujistit se, že toto je ta pravá práce pro mne. Trávila jsem ve škole celé dny, pomáhala ostatním učitelům a kromě svých hodin suplovala i jiné."

Studenti často volí školu, kam sami chodili, protože dobře znají učitele, u něhož praxi konají: „Pro pedagogickou praxi na základní škole jsem si vybral školu, kde jsem sám dříve studoval. Současný ředitel už mě sice nezažil, ale i tak jsem tam docela známá osoba, pamatovaly si mě některé učitelky a znali tam také moji sestru. Učitelské prostředí bylo přátelské."

První vstup do třídy

Před prvním vlastním výstupem jsou studenti většinou nervózní, mají např. strach z nezvládnutí třídy, z možných svých neznalostí, z nepochopení výkladu žáky, z jejich všetečných otázek: „Při nástupu do hodiny jsem se trochu obávala jednak ‚chytrých' dotazů a také toho, že mě tamní žáci budou považovat za příliš mladou, a tudíž mě nebudou brát vážně." „Ačkoli se musím přiznat k tomu, že jsem byl prvních deset minut svého výkladu dosti nervózní, hodina nakonec dopadla velmi dobře." „Lehčí nervozita, kterou mi způsobil profesor K. svým příchodem na moji první hodinu, se ztratila se zahájením hodiny."

Příprava na výuku

Studenti si na každou hodinu tvoří písemnou přípravu. Vidí v ní určitou jistotu a záchranu v neočekávaných situacích. Často trvá mnohem déle než vlastní výuka: „Velmi zajímavou a užitečnou zkušeností pro mne bylo vymýšlení, zadávání a oprava čtvrtletní písemné práce. Příprava tří verzí mi trvala téměř celý den." „Nedovolil jsem si podcenit tuto premiéru, a tak jsem jen se samotnou přípravou strávil skoro tři hodiny. Za žádných okolností jsem nechtěl udělat chybu při výkladu a zároveň jsem chtěl být absolutně připraven na zodpovězení jakýchkoli dotazů." „Na každou hodinu jsem se musela dlouho připravovat a stejně jsem často měla pocit, že jsem jen o krok vpředu před studenty (někdy i vzadu).

I když jsem se podle mého názoru dobře na hodinu připravila, stejně jsem někdy udělala chybu a žáci ji vždy odhalili.“

Průběh výuky

V tomto bodu jsou postřehy studentů tak různorodé, že se jen těžko hledá společný jmenovatel. Pro zkušeného učitele jde o zcela klasické problémy, pro začínajícího učitele to jsou však skutečně nové objevy: „Žáci počítali všechny příklady sami, žádný nebyl jen ‚vychrlením‘ mého krásného, vzorového a nejrychlejšího řešení, které by studenti nechápali a neuměli ho najít. Zde byly ovšem nejtěžší chvíle pro mne. Musela jsem nějak řešit, že mě nesmírně tlačí čas, že musím vše stihnout. Ale co mě především mrzí, je, že ještě nemám tolik zkušeností a že ‚nevidím v matematice‘ tak dobře, jak bych si přála. Když mi studenti vytvářejí mnohá různá řešení a vymýšlejí cesty, které by mě nikdy nenapadly, protože jsem si dodnes řešila příklady ‚po svém‘, je pro mne velkým oříškem rychle rozhodnout, zda mají pravdu, či nikoli a proč. A oni to chtějí vědět hned. Čeká mě v této oblasti ještě spousta práce, počítání a objevování, abych při hodině dokázala být pohotovější.“ „Poněkud mě zarazilo, když se po prvních hodinách zpětná vazba, kterou jsem dostal od fakultního učitele, netýkala ani tolik zvládání kázně, ba ani mého zvládání látky či pedagogického přístupu, nýbrž úpravy zápisu na tabuli. Vždycky jsem měl předtím takový nejasný pocit, že to, jak člověk píše na tabuli, je jeho osobní záležitostí, že se s tím v podstatě nedá asi nic dělat a že já prostě píšu zmateně, tak co. S odstupem času ovšem uznávám, že moje úprava zápisu se díky tomu velmi zlepšila.“

Snad nejčastějším tématem v sebereflexích studentů je rozpor mezi na fakultě propagovaným konstruktivistickým způsobem výuky a reálným instruktivním způsobem, který většinou praktikují učitelé v praxi: „Po týdnu praxe jsem získal pocit, že hodiny jsou sice co do obsahu probrané látky plně v souladu s osnovami, ale jejich průběh je velice nudný. Například hodina, na níž byly probírány úpravy mnohočlenů, spočívala v nezáživném počítání opakujících se typů příkladů. Paní profesorka se domnívá, že dokud cílové požadavky na úroveň matematických dovedností žáků gymnázií vypadají tak, jak vypadají, zůstává pro rozvíjení tvořivého myšlení žáků v matematice malý prostor. Jejími slovy řečeno, máme se s žáky zabývat řešením netypických, ‚zajímavých, příkladů, když nakonec u maturity a u přijímacího řízení budou zkoušeni z automatizované počtářské řemeslničiny?“ „Během výkladu paní učitelky,

který byl srozumitelný, ale nahuštěný, mi přišlo, že jsou žákům věci předkládány jako fakta, která musí vstřebat převážně memorováním. Proto jsem se během svého prvního výkladu, konkrétně výkladu mocninných funkcí, snažila navazovat dotazy na předchozí látku a vyvozovat z ní nové poznatky. Mnohokrát jsem však narazila na nepochopení základních věcí. Takže jsem se snažila věci objasnit a ne pouze předkládat, a proto došlo k tomu, že jsem nestihla odvykládat celou předepsanou látku. Reakce ze strany paní učitelky byla velmi negativní. Bylo mi nepřímo vytknuto, že došlo k běžné chybě začátečníka – neschopnosti rozvrhnout si čas vyučovací hodiny, a dále mi bylo řečeno, že takové zacházení do detailů po žácích nemůžu chtít, že to nejsou schopni pochopit."

Srovnání výuky na základní a střední škole

Studenti většinou registrují významný rozdíl mezi výukou na základní a střední škole. Na základní škole za větší problém považují potřebu žáky ve výuce zaujmout, hlavně však udržet kázeň. Na střední škole je důležitější odborná vybavenost učitele a s tím související náročnější příprava na výuku: „Myslím, že na základní škole by bylo možné slušným způsobem odučit jen s minimální přípravou, na gymnáziu bych na to ani nepomyslel." „Ve srovnání s praxí na základní škole byla samozřejmě příprava na samostatné výstupy na průmyslové škole časově náročnější, přesto jsem se na každou hodinu těšila, neboť většina žáků měla o matematiku zájem a nebyl pro ně problém nad něčím zauvažovat." „Již při prvních vyučovacích hodinách jsem poznala, že gymnázium je značně rozdílné od základní školy. Na základní škole je během vyučovacích hodin nutno dbát hodně na kázeň. Děti jsou často nesoustředěné, baví se, zabývají se něčím jiným, než mají. Občas se velká část hodiny zabere jen tím, že se řeší nějaké kázeňské problémy. Na gymnáziu se jedná už jen o samotnou výuku. Žáci jsou tu proto, že tu být chtějí. Nikdy jsem nemusela nikoho napomínat, pouze jsem neustále musela odpovídat na jejich zvídavé dotazy."

Ruch ve třídě

Podle našich zkušeností vyžadují učitelé větší kázeň s větší délkou svého učitelského působení a s přibývajícím věkem. Mladým začínajícím učitelům ruch ve třídě nevadí, považují ho naopak za projev zájmu žáků o diskutovaný problém: „Nepatrný ruch ve třídách je součástí téměř všech mých hodin a většinou jsou jeho příčinou diskuse nad probíraným

tématem, i když trochu v odlehčené formě. Přesto si myslím, že to není na škodu. Mohu se díky tomu dovědět, co si žáci myslí o probírané látce a zda ji chápou nebo ne.“ „Během praxe mi bylo vytýkáno, že si neumím udržet ve třídě klid, tedy ani kázeň žáků. Problém byl v tom, že mi kreativní šum ve třídě nevadí.“

Vztah fakultního učitele k praktikujícím studentům

Spolupráce studenta s fakultním učitelem je studenty většinou hodnocena pozitivně, tj. fakultní učitel je studentovi oporou a rádcem. Máme však i opačné reakce.

Jsou fakultní učitelé, kteří se studentovi věnují plně, berou ho na dozor na chodbě, na dozor v jídelně, na pedagogickou radu atd., prostě oba spolu po dobu celé praxe ‚žijí‘. Jsou ale také učitelé, kteří nechají studenta jen odučit, do ničeho ho nezasvětí, prostě dávají najevo, že je pro ně student pouze přítěží, neboť pak musí dohánět látku nebo ji dokonce vysvětlovat znovu.

„Moje fakultní učitelka působí jako vitální ‚persona‘ – přísná, rozhodná, kultivovaná a v neposlední řadě ochotná. Během mé praxe mi udělila hodně cenných rad. Nikdy se mi nesnažila dát najevo, že ona je ta, která zde vládne a má za sebou roky zkušeností.“ „Tato moje praxe pomohla i paní učitelce (naznačila to na jedné z rozborových hodin), protože do nynějška měla žáky zaškatulkované a nyní mohla vidět hodinu i z ‚druhé strany‘. Zvýšená aktivita několika žáků ji velmi překvapila a shodli jsme se na tom, že důvody jsou dva. Prvním důvodem je styl výuky (sama uznala, že člověk často sklouzne ke stereotypu) a druhým to, že jsem muž. To, že jsem muž, přináší větší respekt (když žáci uvidí učitele – muže) a navíc bylo některým děvčatům trapné nic nevědět.“ „Ovšem největším mým problémem byla přítomnost pana učitele. Domluvili jsme se totiž, že do výuky nebude nijak zasahovat, jedině snad při vzniku nějaké kázeňské situace, kterou bych nedokázala zvládnout. Pan učitel sice nezasahoval do výkladu, ale neustále žáky rušil tím, že si jednotlivě chodil půjčovat domácí sešity, kontroloval žákovské knížky, rozdával opravené písemky, odcházel s některými žáky dopisovat staré písemné práce, . . . “ „V osmé třídě běžně probíhá výuka matematiky podle zaběhnutého schématu (úvod, desetiminutovka, oprava ve dvojicích, počítání příkladů z učebnice na tabuli a psaní do sešitů, zadání domácího úkolu a konec hodiny). Potom není divu, že jsou žáci unuděni a mnohem větší pozornost věnovali mně než výuce matematiky. A tak jsem

se v téhle třídě snažila, aby se pro ně matematika nestala jen nutným zlem, ale aby v ní alespoň někteří našli trochu zalíbení. Jenže můj styl výuky se nezamlouval paní učitelce, protože jsem tím narušovala její zaběhnutý chod, a tak jsem byla nucena vést hodiny matematiky dle jejího ‚vzorce'." „Na své vlastní výstupy jsem se připravovala sama. První týden se mi tam vůbec nelíbilo. Paní učitelka mi nesdělila vůbec nic o třídách, do kterých jsem měla jít. Jen letmo mi řekla, co mám odučit, a pět minut před hodinou mi teprve zkontrolovala přípravu. Několikrát se mi stalo, že jsem musela vymýšlet něco přímo při hodině, protože o přestávce mi sdělila, že to s nimi už dělala. Nejprve jsem byla velmi nespokojená i s přístupem k mé osobě. ... vždy po odučené hodině jsem si připadala, že jsem úplně hloupá. Myslela jsem, že praxe je od toho, aby mi někdo zkušený pomohl a poradil, co dělám špatně a co naopak dobře, ale paní učitelka mi dávala silně najevo, že jedině tak, jak to dělá ona, je to správné. Nejvíce mi vadilo, že mi při mém výkladu skákala do řeči a doplňovala mě, i když jsem neudělala žádnou chybu. Ke konci týdne jsem to už nevydržela a dala jsem najevo svůj nesouhlas. Vše jsme si vyříkaly a druhý týden se mi pracovalo už mnohem lépe. Dokonce jsme si i nakonec v některých otázkách výuky porozuměly."

Význam fakulty v přípravě na pedagogickou praxi

Často se setkáváme s názorem studentů, že příprava na fakultě na budoucí povolání je pouze teoretická a velice vzdálená realitě. Místo této teoretické přípravy by dali přednost delší pedagogické praxi. Jsou i takové návrhy, že by mohla praxe trvat celý semestr jako trvalá práce pod dohledem fakultního učitele nebo že by mohla probíhat celý semestr nebo dokonce rok např. jeden či dva dny v týdnu, aby si student mohl vést dlouhodoběji svou třídu.

„Během těch 20 až 25 hodin, které je třeba povinně odučit z obou předmětů, nezíská budoucí učitel mnoho zkušeností. Po nástupu do povolání je tak mnohem lépe připraven po stránce teoretických znalostí na úkor lepší praktické vybavenosti. Možná že na místo některých pedagogicko-psychologických přednášek by bylo pro budoucího učitele užitečnější být přímo ve škole a učit." „Další aspekt, kterým se tento úsek studentova působení liší od skutečného učitelského působení, je jeho časové omezení. Na řadě škol se stává, že žáci nástup praktikanta berou jako přerušení výuky a jakousi hru. Pokud by praxe měla být skutečnou praxí, tedy setkáním s realitou učitele, musel by jí být věnován

mnohem delší čas a musel by se změnit způsob jejího vedení. Například by na jedno pololetí vytvořil praktikant a učitel vyučující dvojici. Ze začátku by učitel vedl výuku a praktikant by mu byl pomocným učitelem. Po určitém čase... by se jejich role vyměnily. Slyšel jsem již proti prodlužování praxe argument, že by na to školy nepřistoupily a že by to fakulta nezaplatila. Myslím, že tento přístup by současný problém způsobu financování praxí... odstranil. Fakulta by žádné odměny nevyplácela a fakultní učitel (škola) by měl(a) zdarma k dispozici pomocníka, nikoli narušitele výuky, se kterým je práce navíc."

Vlastní studentské hodnocení pedagogické praxe

Až na malé výjimky studenti hodnotí pedagogickou praxi jako dobrou počáteční zkušenost s výukovým procesem. Poměrně hodně z nich na závěr pochválí i sebe, což svědčí o nárůstu jejich sebevědomí: „Celkový dojem z pedagogické praxe byl velice dobrý. Díky těmto třem nedělím jsem si utvrdila názor, že bych opravdu po dokončení školy chtěla pedagogicky působit." „Celkově bych celou praxi hodnotila jako velmi přínosnou a zajímavou. Musím říci, že mě výuka na této škole nadchla. Přesvědčila jsem se zde, že matematika není jen o počítání, rýsování, ale že je hlavně o přístupu, chtění a v neposlední řadě i o radosti z práce." „... souvislá pedagogická praxe byla pro mne velkým přínosem. Prostředí a klima školy jen umocňovaly můj pozitivní pocit z mé práce. Díky této praxi vím, že mám pro tuto práci celkem dobré předpoklady a že by mě učitelská profese v budoucnu vnitřně naplňovala." „... praxe pro mne byla zkušeností, a to každopádně větší, než jsem původně očekával. Jsem velice rád, že jsem si to vyzkoušel, a vůbec nelituji, že jsem nakonec odučil o jednu hodinu více." „Závěrem bych chtěla zopakovat, že praxi považuji za jedinečný ‚studijní nástroj', kterého by se mělo využívat ve větší míře. To přesto, že vím, že pro paní učitelky a pány učitele, kteří si nechají nabourat hodinu, je to spíše přítěž než pomoc."

Zájem o to stát se učitelem

Velmi hrubá statistika dokumentující touhu současných praktikujících studentů stát se po absolvování fakulty učitelem je tato: asi 40 % z nich se chce stát učitelem, asi 20 % si to chce zkusit a „pak se uvidí", asi 20 % ještě neví a asi 20 % chce dělat něco jiného. Hlavní výtky proti učitelskému povolání jsou nám známé, a to malé finanční ohodnocení a malá společenská prestiž. „Praxe na střední škole ve mně zanechala naprosto

jiné pocity než loňská praxe na základní škole. Loni jsem byla po praxi přesvědčená, že učit nebudu. Neboť mě při praxi o tom každý utvrzoval, kdykoli jsem se zmínila, že studuji jazyk. Vždy mi bylo odpovězeno, že stejně učit nikdy nebudu. A proto jsem byla tak překvapená, když jsem potkala spoustu učitelů, které tato práce baví. A tak jsem se rozhodla, že učit budu."

Závěr

Jak je patrné z výše uvedeného, poskytují studentské sebereflexe cenné poznatky, které lze využít jako podněty pro jejich vysokoškolskou přípravu. Budeme je i nadále sledovat a analyzovat, zejména z hlediska rozdílů mezi praxí na základní a střední škole, frekvence používání konstruktivistických či instruktivních metod výuky a dalších.

Na úplný závěr uvedeme citát jednoho studenta, který výstižně charakterizuje první úspěšné i neúspěšné krůčky budoucích učitelů při pedagogické praxi: „Svoje krátké zamyšlení bych zakončil výrokem jedné studentky třetího ročníku střední školy, která mi při řešení úlohy o hledání kolmého vektoru ke dvěma dalším vektorům řekla: ‚Pane profesore, já matice moc nerozumím, ale když nás máte vy, mám v tom ještě větší guláš.' "

Literatura

[1] *Sebereflexe z pedagogické praxe studentů Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.*

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Ausbergerová Marie KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	377 320 866
Baláková Miroslava SOU a OU, Nemocniční 11 Město Albrechtice, 793 95	554 652 631 server@souzma.cz
Bečvář Jindřich MÚ UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	 becvar@karlin.mff.cuni.cz
Berčíková Iva OA, Národního odboje 17 Ústí nad Labem, 400 03	602 840 526 bercikova@oaul.cz
Binterová Helena PF JU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 087 hbinter@pf.jcu.cz
Bittnerová Daniela KMD TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 134 526 485 352 332 daniela.bittnerova@vslib.cz
Brandner Marek KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	377 632 625 brandner@kma.zcu.cz
Brant Jiří VÚP v Praze, Novodvorská 1010/14 Praha 4, 142 01	261 341 453 261 341 480 brant@vuppraha.cz
Brejcha Miloš Vydavatelský servis, Republikánská 28 Plzeň, 312 00	604 731 803 brejcha@vydavatelskyservis.cz
Bušek Ivan VOPŠ, Masná 13 Praha 1, 110 00	605 938 823 busek.ivan@vops-praha.cz
Cahová Alena SPŠT a SOUT, Manž. Curieových 734 Třebíč, 674 01	568 832 230 acahova@spst.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Cakl Ondřej Nakladatelství Prodos, Kollárovo ná. 7 Olomouc, 772 00	585 556 247 585 229 718 o.cakl@prodos-cz.cz
Calda Emil KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	 Calda@karlin.mff.cuni.cz
Coufalová Jana KMT FPE ZČU, Sedláčkova 38 Plzeň, 306 14	377 636 007 coufalov@kmt.zcu.cz
Cutychová Jana Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	604 813 317 cutychova@volny.cz
Cviková Šárka KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	602 318 686 .cvikova@volny.cz
Čechurová Milana SPN, Ostrovní 30 Praha, 110 00	224 932 066 cechurova@spn.cz
Čermáková Olga SPŠE, Ječná 30 Praha 2, 121 36	224 941 469 cermakov@spsejecna.cz
Černý Jaroslav KM FSv ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	224 353 866 cerny@mat.fsv.cvut.cz
Čížek Čestmír FAST (Casio), Poděbradská 61a Praha 9, 198 00	266 610 476 266 610 477 cestmir.cizek@fastsro.cz
Daněček Josef ÚMDG FAST VUT v Brně, Žižkova 17 Brno, 602 00	541 147 614 danecek.j@fce.vutbr.cz
Daněk Tomáš OA a G Vimperk, Pivovarská 69 Vimperk, 385 01	388 411 039 kolben@oag.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Davidová Eva Gymnázium, Čs. exilu 699 Ostrava-Poruba, 708 00	606 260 050 596 541 953 eva.davidova@email.cz
Dittrich Jiří Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	548 522 369 jiri.dittrich@atlas.cz
Dlouhý Oldřich ÚMDG FAST VUT v Brně, Žižkova 17 Brno, 602 00	541 147 612 541 147 604 dlouhy.o@fce.vutbr.cz
Drábek Pavel KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	377 632 648 377 632 602 pdrabek@kma.zcu.cz
Drahotský Petr Gymnázium, Pospíšilova 324 Hradec Králové, 500 03	495 514 691 drahotsky@gybon.cz
Dvořák Petr KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha, 116 39	603 366 240 petr.dvorak@pedf.cuni.cz
Dvořáková Ivana Gymnázium PIerra de Coubertina, nám. Fr. Křižíka 860 Tábor, 390 01	381 252 142 idvorako@gymnasium.tabor.cz
Eliášová Lada VŠE, Ekonomická 957 Praha 4, 148 00	224 094 229 eliasova@vse.cz
Fantová Ivana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	317 721 710 fantova@gbn.cz
Fenclová Věra ZŠ, Nám. Jiřího z Lobkovic 22 Praha 3, 130 00	267 310 706 fenclova@lobkovicovo.cz
Fišerová Jitka Gymnázium, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	604 230 097 274 815 054 fiserova@gymvod.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Fořtová Ilona Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	261 215 409 fortova@prometheus-nakl.cz
Fuchs Eduard KMA PřF MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 602 00	549 493 858 541 210 337 fuchs@math.muni.cz
Gazárková Dana SPŠ stavební, Kudelova 8 Brno, 662 51	545 321 210 gazarkova@spsstavbrno.cz
Girg Petr KMA FAV ZČU, Univerzitni 22 Plzeň, 306 14	377 632 224 pgirg@kma.zcu.cz
Hamplová Marie SOŠ a SOU, Nám. 9. května 2a Boskovice, 680 01	516 453 041 hamplova@soubce.cz
Havel Hugo SOŠT, SOU a U, Lidická 31 České Budějovice, 370 01	386 356 501
Hofmanová Hana SPŠD, Masná 18 Praha, 110 00	222 316 027 222 317 737 info@spsdmasna.cz
Holenda Jiří KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	377 632 643 holenda@rek.zcu.cz
Hora Jaroslav KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 320 13	 horajar@kmt.zcu.cz
Horák Karel Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	606 728 516 HorakK@math.cas.cz
Horodyská Jana Gymnázium, Tomkova 45 Olomouc, 779 00	 jana.horodyska@post.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Horská Zdeňka ZŠ, Krátká 676 Klášterec nad Ohří, 431 51	474 375 397 skola@1zsklasterec.cz
Hošpesová Alena PF JČU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 089 hospes@pf.jcu.cz
Houser Jiří SPŠ, ČSA 376 Nové Město nad Metují, 549 01	491 474 195 491 470 164 houser@spsnome.cz
Houska Jan VÚP v Praze, Novodvorská 1010/14 Praha 4, 142 01	261 341 453 261 341 480 houska@vuppraha.cz
Hricz Miroslav ZŠ, U Santošky 1/1007 Praha 5, 150 00	604 976 543 miroslav.hricz@centrum.cz
Hrubá Miluše Gymnázium, A. K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	461 327 805 hruba@gymjev.cz
Hrubý Dag Gymnázium, A. K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	461 327 805 hruby@gymjev.cz
Hudcová Milada VOŠ, VZŠ, SOŠ a SOU, Hybešova 53 Boskovice, 680 01	516 454 809 hudcova@abba.cz
Jančařík Antonín KMDM PedF UK, M. D. Rettigove 4 Praha 1, 116 39	602 960 426 jancarik@atlas.cz
Jedličková Milada SPŠS, Jihlavská 628 Havlíčkův Brod, 580 01	569 433 519 jedlickova@stavskola.cz
Jehlička Vladimír UM FES UPa, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 066 018 vladimir.jehlicka@upce.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Jeřábek Jaroslav VÚP v Praze, Novodvorská 1010/14 Praha 4, 142 01	261 341 441 261 341 480 jerabek@vuppraha.cz
Jindrová Pavla UM FES UPa, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 018 Pavla.Jindrova@upce.cz
Jíra Václav SOŠT, Ještědská 100 Liberec 8, 460 08	 jira.vaclav@seznam.cz
Jirsa Michael ZŠ, Loučanská 1112 Praha, 150 00	257 912 580 257 912 580 michaeljirsa@seznam.cz
Kadlčík Vojtěch Gymnázium, Dr. E. Beneše 449/II Soběslav, 392 11	381 503 911 381 521 040 kadlcik@gym-so.cz
Kadlčíková Věra SOŠ a SOU spojů, Bydlinského 2474 Tábor, 390 01	381 254 756 kadlcikova@sous.cz
Kafková Marika Pf JČU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	603 576 061 maja.k@email.cz
Kaslová Michaela KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 247 221 900 248 kaslovam@pedf.cuni.cz
Kašpar Jan KDM MFF UK, Sokolovska 83 Praha 8, 186 00	221 913 234 221 913 227 kaspar@karlin.mff.cuni.cz
Klufová Renata KAM ZF JU, Studentská 13 České Budějovice, 370 05	387 772 707 klufova@zf.jcu.cz
Kočandrlová Milada KM FSv ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	224 354 380 kocandrlova@mat.fsv.cvut.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Kommová Helena Gymnázium J. Keplera, Parléřova 2 Praha 6, 169 00	777 553 579 kommova@gjk.cz
Kopáčková Alena FP TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 307 alena.kopackova@vslib.cz
Kopecký František Gymnázium J. Nerudy, Hellichova 3/457 Praha 1, 118 00	257 317 274 257 326 747 kopecky@gjn.cz
Koreňová Lilla MPCMB, Exnárova 20 Bratislava, 820 12	+421 243 423 114 korenova@mcmb.sk
Košťáková Marta VOŠ, SPgŠ a OA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	476 707 792 skola@vos-oamost.cz
Koudela Libor UPa, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 451 libor.koudela@upce.cz
Kováčová Monika KMA STF, Námestí Slobody 17 Bratislava, 812 31	+421 259 410 611 kovacova_v@sjf.stuba.sk
Krčková Stanislava VÚP v Praze, Novodvorská 1010/14 Praha 4, 142 01	261 341 442 261 341 480 krckova@vuppraha.cz
Kremsová Veronika SpŠ, Výmolova 169 Praha 5, 150 00	 v.kremsova@centrum.cz
Krtička Jan KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	608 476 269 jan.krticka@centrum.cz
Kubát Josef Gymnázium, Dašická 1083 Pardubice, 530 03	466 650 715 466 651 560 gypced@supce.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Kubeš Josef Gymnázium, Mikulášské náměstí 23 Plzeň, 326 00	604 593 962 Josef.Kubes@gymik.inplus.cz
Kubešová Naděžda Gymnázium, Opavská 21 Plzeň, 312 00	732 369 494 377 183 310 kubesova@gop.pilsedu.cz
Kubínová Marie KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha, 116 39	221 900 249 marie.kubinova@pedf.cuni.cz
Kuřina František UHK, V. Nejedlého 593 Hradec Králové, 500 03	495 061 153 frantisek.kurina@uhk.cz
Lávička Miroslav KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	377 632 619 377 632 602 lavicka@kma.zcu.cz
Leischner Pavel PFJU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 084 leischne@pf.jcu.cz
Lesáková Eva ÚIV ů CERMAT, Jeruzalémská 12 Praha 1, 110 00	224 507 412 224 507 555 lesakova@cermat.cz
Mahnelová Hana Gymnázium, Komenského 779 Nymburk, 288 40	325 512 747 mahnelova@gym-nymburk.cz
Macháček Vlastimil , Nad cihelnou 22 Praha 4, 147 00	261 213 151
Machačová Ludmila UM FES UPa, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 019 Ludmila.Machacova@upce.cz
Machková Lenka Gymnázium, Tylovo nábřeží 682 Hradec Králové, 500 02	 machkova@gjkt.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Málková Jana Gymnázium, Voděradská 900/2 Praha 10, 100 00	777 167 117 274 815 054 malkova@gymvod.cz
Maňásek Luděk Gymnázium, Palackého 524 Holešov, 769 01	573 394 522 ludekm@centrum.cz
Mannheimová Dagmar Gymnázium, Komenského 713 Třinec, 739 61	558 325 284 dagmar.mannheimova@gymtri.cz
Mareš Jiří LF UK, Šimkova 870 Hradec Králové, 500 38	495 816 426 mares@lfhk.cuni.cz
Matásková Lubica SPŠS, SOUS a U, Klatovská 109 Plzeň, 320 57	377 423 208 mataskova@spstrplz.cz
Matoušková Marie SOU a OU, Palacha 711/2 Most, 434 01	606 532 131 MMZM@post.cz
Melicharová Stanislava SPŠS, Kudelova 8 Brno, 662 51	545 321 210 melicharova@spsstavbrno.cz
Minář Jaroslav SOŠ a SOU, Dukla 313 Ústí nad Orlicí, 562 01	465 521 127 minar@skola-auto.cz
Miškovský Pavel Gymnázium, Tererova 17/2135 Praha 4, 149 00	267 914 553 linka 120 pavel.miskovsky@gjm.cz
Moll Ivo ÚMDG FAST VUT, Žižkova 17 Brno, 602 00	541 147 608 541 147 624 moll.i@fce.vutbr.cz
Molnár Josef KAG PřF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	585 634 657 molnar@inf.upol.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Mrázek Jiří ISŠE COP, Zvolenovská 537 Hluboká nad Vltavou, 373 41	387 924 204 mrazek@isscop.cz
Mrvíková Stanislava Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 326 00	377 226 747 stanislava.mrvikova@gymik.inplus.cz
Nečasová Eva Gymnázium J. Nerudy, Hellichova 3 Praha, 118 00	274 773 032 e.necasova@centrum.cz
Němcová Lenka SSZŠ, s. r. o., Mojmír 747 Uherské Hradiště, 686 06	572 554 514 572 554 514 svobodnazs@seznam.cz
Neubauerová Danuše SZŠ a VZŠ, Karlovarská 99 Plzeň, 323 17	377 221 248 377 221 163 neubauerova@szsvzsplzen.cz
Nováková Jiřina ZŠ, Korunovační 8/164 Praha 7, 170 00	776 147 670 novakjirina@seznam.cz
Novotná Jarmila KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 251 221 900 248 jarmila.novotna@pedf.cuni.cz
Olšáková Věra SSZŠ, Mojmír 747 Uherské Hradiště, 686 06	572 554 514 572 554 514 svobodnazs@seznam.cz
Ostravský Jan UM FT UTB, nám. TGM 275 Zlín, 762 72	576 032 356 ostravsky@ft.utb.cz
Otruba Karel CMSPgŠaG, Lerchova 63 Brno, 602 00	543 423 754 otruba@cmsps.cz
Pecka Karel Gymnázium J. Machara, Královická 668 Brandýs nad Labem, 250 50	326 903 929 KarelPecka@seznam.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Pech Pavel KM PF JU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 071 387 312 194 pech@pf.jcu.cz
Pěchoučková Šárka KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 306 14	377 636 274 pechouck@kmt.zcu.cz
Pelantová Alena ZŠ Na Slovance, Bedřichovská 1 Praha 8, 182 00	286 589 718 286 589 718 pelantova@thundernet.cz
Perný Jaroslav KMD FP TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	485 352 285 jaroslav.perny@vslib.cz
Petrbok Václav Akermann Electronic Praha s.r.o., Ukrajinská 2 Praha 10, 101 00	271 746 247 271 745 452 vaclav@akermann.cz
Petrová Lenka ISŠ OSaP, Kněžskodvorská 33/A České Budějovice, 370 04	387 438 925 ekonom@iss-osp.cz
Plch Roman KM PřF MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 602 00	549 496 499 plch@math.muni.cz
Plíšková Jana ZŠ, Josefa Ressla 2258 Pardubice, 530 02	737 685 022 pliskova.jana@seznam.cz
Polová Alenka ZŠ, Jiráskovy sady 273 Příbram, 261 01	602 136 517 alenapb@seznam.cz
Pomykalová Eva Gymnázium, Lesní čtvrť 1364 Zlín, 760 01	577 436 114 pomykal@sendme.cz
Popelková Ivana ZŠ, Krátká 676 Klášterec nad Ohří, 431 51	474 375 397 skola@1zsklasterec.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Potůček Jiří KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 306 19	377 636 277 potucek@kmt.zcu.cz
Prachař Otakar UPce, Studentská 84 Pardubice, 532 10	466 036 014 otakar.prachar@upce.cz
Preclíková Markéta SOŠT, SOU a U, Ještědská 358/100 Liberec 8, 460 08	482 771 115 preclikova_marketa@sost.cz
Procházka František SPŠS a VOŠ, Čáslavská 973 Chrudim, 537 01	469 688 623 prochazka@spss-cr.cz
Prokeš Josef Biskupské gymnázium, Jirsíkova 5 České Budějovice, 370 21	386 359 067 prokesovi@bigy-cb.cz
Prokešová Jana Biskupské gymnázium, Jirsíkova 5 České Budějovice, 370 21	386 359 067 prokesovi@bigy-cb.cz
Prokopová Magdalena KM PF UJEP, České mládeže 8 Ústí nad Labem, 400 96	 prokopova@pf.ujep.cz
Prouza Ludvík DFJP KID, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 094 Ludvik.Prouza@upce.cz
Rendlová Miloslava SPŠ a SOU dopravní, Karlovarská 99 Plzeň, 323 17	377 520 253 rendlova@dopskopl.cz
Robová Jarmila KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	221 913 355 221 913 227 robova@karlin.mff.cuni.cz
Rollinger Antonín VOŠ, SPgŠ a OA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	777 301 274 finrol@centrum.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Rosecká Jana ŠECR, U Klafárku 1 Žďár nad Sázavou, 591 01	776 649 479 566 625 865 jana.rosecka@secr.cz
Roubíček Filip MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	222 090 750 222 211 638 roubicek@math.cas.cz
Řezáčová Růžena SPŠS, Dušní 17 Praha 1, 110 00	224 810 208 222 311 068 rezacova@spsdusni.cz
Řídká Eva ÚIV ů CERMAT, Jeruzalémská 12 Praha 1, 110 00	224 507 413 224 507 555 ridka@cermat.cz
Samková Soňa SPN, Ostrovní 30 Praha 1, 110 00	224 932 066 samkova@spn.cz
Sgall Jiří MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	222 090 780 sgall@math.cas.cz
Slabeňáková Jana ÚMDG FAST VUT, Žižkova 17 Brno, 602 00	541 147 603 541 147 604 slabenakova.j@fce.vutbr.cz
Složil Jan KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	608 889 368 Hslozil@seznam.cz
Sotáková Kristína KMaI PdF TU, Priemyselná 4 Trnava, 917 43	+421 335 516 047 +421 335 516 047 ksotakov@truni.sk
Staněk Miroslav SOŠ a SOU, nám. 9. května 2a Boskovice, 680 01	516 453 041 stanek@soubce.cz
Stehlíková Naďa KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 252 221 900 248 nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Stejskalová Blanka Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	723 184 559 stejskalova@gymjat.cz
Sýkora Václav KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 110 00	603 384 893 vaclav.sykora@pedf.cuni.cz
Šarman Arnošt KI VŠB TU, Tř. 17. listopadu 15 Ostrava-Poruba, 708 33	596 993 241 596 919 352 arnost.sarman@vsb.cz
Šedivá Alena Gymnázium, nám. Fr. Křižíka 860 Tábor, 390 01	381 252 142 sediva@gymnasium.tabor.cz
Šedivý Jan Gymnázium J. Nerudy, Hellichova 3 Praha 1, 118 00	222 715 388 222 715 388 gjn.hud@seznam.cz
Šilhánková Vladimíra Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	261 215 409 silhankova@prometheus-nakl.cz
Šíma František SOA a SOUS PT, Zlatá stezka 240 Prachatice, 383 01	388 314 112 frantisek.sima@soa.cz
Šíma Petr ISŠS a U Jihlava, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	567 301 871 psima@isss-ji.cz
Šimonová Zdeňka KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	777 085 676 simonovaz@seznam.cz
Šišák Radek SPN, Ostrovní 30 Praha 1, 110 00	224 931 447 neuveden
Šolcová Alena FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	224 354 388 solcova@mbox.cesnet.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Šteffl Ondřej Scio, Janovského 11 Praha 7, 170 00	603 251 274 266 711 524 steffl@scio.cz
Štěpánková Jiřina 16. ZŠ, Albrechtická 414 Most, 434 01	723 784 832 stepji@atlas.cz
Štochlová Lucie VOŠ, SPgŠ a OA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	476 707 792 Lucie.St@seznam.cz
Štrbíková Iva VOŠ a SPŠ, Gen. Krátkého 1 Šumperk, 787 29	583 218 461 strbikova@seznam.cz
Šulista Marek ZF JU, Strudentská 13 České Budějovice, 370 05	389 032 466 sulista@zf.jcu.cz
Švábová Šárka KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	724 168 488 sarkasvab@post.cz
Šváchová Jana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	317 721 710 svachova@gbn.cz
Švrček Jaroslav KAG PřF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	585 634 659 svrcek@inf.upol.cz
Tetourová Markéta Gymnázium J.Nerudy, Hellichova 3 Praha 1, 118 00	257 314 170 tetourova@centrum.cz
Tichá Marie MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	222 090 726 222 211 638 ticha@math.cas.cz
Tichá Irina SPŠ a VOŠ, Školní 50 Chomutov, 430 01	603 195 259 iticv@seznam.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Tichý Miroslav SŠAK, Hradecká 1151 Hradec Králové, 500 03	603 293 244 tichy@ssakhk.cz
Tomášek Vladislav ÚIV, Senovážné nám. 26 Praha 1, 110 06	224 398 333 tomasek@uiv.cz
Trejbalová Lucie SZS a VZS, Karlovarská 99 Plzeň, 323 17	377 221 248 377 221 163 trejbalova@szsvzsplzen.cz
Tržilová Dana PF JU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 085 trzilova@pf.jcu.cz
Vacka Milan VOŠ, Okružní 10 České Budějovice, 370 21	387 842 199 vacka@voscb.cz
Vaďura Marek KM PřF MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	777 147 488 vadura@seznam.cz
Valehrachová Vlasta PC Zlín, Potoky 267 Zlín, 760 01	577 432 559 577 432 559 valehrachova@pczlin.cz
Vaníček Jiří PF JU, Jeronýmova 10 České Budějovice, 371 15	387 773 074 vanicek@pf.jcu.cz
Vavroš Michal Gymnázium, Čs. exilu 699 Ostrava-Poruba, 708 00	603 879 790 michal.vavros@osu.cz
Vlášková Jana Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10 Praha 4, 140 00	241 740 053 Vlaskova@prometheus-nakl.cz
Vodáková Zdeněk Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	549 250 890 mat@gymnaslo.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Vodáková Dana SPŠT a SOUT, Manž. Curieových 734 Třebíč, 674 01	568 832 230 dvodakova@spst.cz
Vysoká Jana VOŠ, Okružní 10 České Budějovice, 370 21	723 305 132 jana.vysoka@seznam.cz
Wasyliw Vladimír ISŠT, K Učilišti 2566 Mělník, 276 01	605 256 056 315 693 761 wasyliw@seznam.cz
Wirth Michal Gymnázium, Ruská 355 Mariánské Lázně, 353 01	354 624 166 354 624 167 mwirth@atlas.cz
Zámorská Petra SSHŠ, Nám. T. G. M. 1281 Zlín, 760 01	736 131 623 pea@avonet.cz
Zapletal David UM FES UPa, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 036 018 david.zapletal@upce.cz
Zapomnělová Marie ISŠS a U, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	567 301 871 567 310 100 mzapomelova@isss-ji.cz
Zárubová Věra VOŠ, SPgŠ a OA, Zd. Fibicha 2778 Most, 434 01	476 707 792 Zar.Vera@seznam
Zhouf Jaroslav KMDM PedF UK, M. D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	221 900 250 221 900 248 jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Žák Václav ELKAN, spol. s r.o., V Tůních 12 Praha 2, 120 00	224 999 100 224 999 101 vzak@elkan.cz
Železná Hana ISŠE COP, Zvolenovská 537 Hluboká nad Vltavou, 373 41	387 924 275 zeleznah@isscop.cz

příjmení a jméno adresa	telefon fax e-mail
Žižka Pavel UM Upce, Studentská 95 Pardubice, 532 10	466 955 568 peregrinus@seznam.cz

Vydavatelský servis
občanské sdružení
Republikánská 28
312 00 Plzeň
servis@vydavatelskyservis.cz

Zajišťujeme:

- Vydávání odborné literatury
- Vydavatelské práce
- Sazbu publikací
- Grafické práce

9. SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY
VŠECH TYPŮ A STUPŇŮ ŠKOL

Vydal Vydavatelský servis, Plzeň
Editoři: Marie Ausbergerová, Jarmila Novotná, 2004

Sazba: Ing. Miloš Brejcha
Sazba v LaTeXu z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$-font
Náklad: 210 kusů Vydání 1.
Tisk: IMPROMAT CZ spol. s r. o., Plzeň

Plzeň 2004