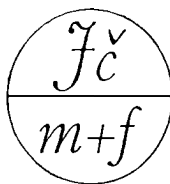


7. SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY
VŠECH TYPŮ A STUPŇŮ ŠKOL



25.–27. říjen 2000
Mariánské Lázně

OBSAH

Předmluva	7
------------------	---

Plenární přednášky	9
---------------------------	---

Milan Hejný Budování geometrických proceptů.....	11
---	----

František Ježek Škola na prahu informační společnosti.....	19
---	----

František Kuřina Perspektivy vyučování geometrie.....	31
--	----

Graham H Littler From Building Blocks to Matrices.....	39
---	----

Jarmila Novotná ICME 9 – The 9th International Congress on Mathematical Education	49
---	----

Ladislav Skula Velká Fermatova věta a nejednoznačnost rozkladu čísla na pr- vočinitele.....	57
---	----

Příspěvky v sekcích	65
----------------------------	----

Daniela Bittnerová, Jaroslav Vild Matematika strukturovaně.....	67
--	----

Emil Calda Kombinatorika v učitelském studiu na MFF UK.....	73
--	----

Marie Demlová Jeden úspěšný pokus o motivaci studentů – RSA.....	77
---	----

Eva Dvořáková Matematika distančně	81
---	----

Jaroslav Hora Gosperův algoritmus pro určení součtu řady.....	89
Darina Jirotková Odhalování geometrických závislostí s využitím čtverečkova- ného papíru	95
Michaela Kaslová, Jitka Šobrová Jazykové obtíže při komunikaci v matematice na ZŠ.....	103
Jan Kašpar Vzdělávací program T^3	109
Milada Kočandrllová Úlohy znovu objevené.....	113
Milan Koman Pohyb – třetí „rozměr“ Cabri-geometrie Ukázky aplikací Cabri- geometrie v algebře, geometrii a astronomii	117
Alena Kopáčková Pojetí funkce u českých žáků.....	123
Jana Kratochvílová Struktura triád jako nestandardní prostředí v matematice ...	131
Marie Kubínová Dynamický model pregraduální přípravy učitelů matematiky	137
Ludmila Macháčová Východiska pro využití nové maturity v přijímacím řízení na vysoké školy	143
Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková Netradiční úvod do abstraktní matematiky	147

Karel Otruba Švédský stůl aneb několik myšlenek o pravděpodobnosti na střední škole.....	155
Eva Pomykalová Geometrické vidění studentů SŠ v ČR.....	161
Jana Pradlová Program RWCT v matematice.....	167
Ludvík Prouza, Marie Prouzová O čem vypovídají přijímací zkoušky.....	171
Jarmila Robová Úlohy z praxe řešené s využitím grafického kalkulátoru.....	177
Filip Roubíček Vizuální reprezentace v geometrii.....	183
Bronislava Růžičková, Jaroslava Brincková Příprava budoucích učitelů matematiky v souladu s trendy EU	187
Naďa Stehlíková Diplomová práce nebo diplomová spolupráce?	191
Marie Tichá K formování názorů učitelů na charakter matematického vzdě- lávání	199
Stanislav Trávníček K přípravě a dalšímu vzdělávání učitelů matematiky	207
Jaroslav Zhouf Maturitní písemné zkoušky z matematiky	213
Seznam účastníků	221

PŘEDMLUVA

Setkání učitelů matematiky v roce 2000, který je světovým rokem matematiky, má před sebou řadu výzev, otazníků i obav z ohrožení.

Výzvou jsou proměny světa, zejména pak uplatnění informačních technologií. Přejít k informační společnosti má velmi významný dopad na obsah i formy vzdělávání. Distribuce činností v prostoru a čase se týká i školního vzdělávání a otevírá dokořán dveře pro celoživotní vzdělávání. Česká společnost zatím nepřijala ideu učit se společnosti a možná i proto jen zálibně hledí k evropským tygrům, jako je Skotsko či Finsko.

Jaké otazníky visí nad naší činností? Je to pozice matematiky ve školském systému. Velmi aktuálně se to týká nové koncepce maturitní zkoušky. V poloze ohrožení může být matematiky na některých vysokých školách vnímána implementace Boloňské deklarace. Nejde např. o oslabení teoretického, a tedy matematického základu inženýrství?

Nesluší se zde mluvit o finančním úhoru školství. Ovšem sanace bankovního sektoru či náhrada hliněných nohou metalurgických komplexů státními podporami je pro lidi s číselnou představivostí absurdním divadlem. Možná bychom na toto téma mohli vymýšlet alespoň matematické úlohy, aby vnímavější žáci a jejich rodiče pochopili proporce daných jevů.

Ale i samo školství a výuka matematiky má své vnitřní problémy. Setkání v Mariánských Lázních je příležitostí, jak sdílet dobré zkušenosti a hledat cesty, jak se vyhnout nezdaru při šíření matematického vzdělání a myšlení.

František Ježek

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

ROK 2000 MEZINÁRODNÍ ROK
MATEMATIKY

BUDOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH PROCEPTŮ

Milan Hejný

1 TERMÍN PROCEPT

zavedli Eddie M. Gray a David O. Tall (1994). Termín je složen ze slov process a concept a vyjadřuje jistý specifický, vysoce kvalitní typ poznání člověka.

Slova *proces* a *koncept* charakterizují dva způsoby, jimiž se naše vědomí

- orientuje při vnímání jevů reálného světa
- zmocňuje pojmů, vztahů či situací, které vědomím eviduje,
- strukturuje a restrukturalizuje tyto ve své dlouhodobé paměti a
- pracuje s nimi.

Asi prvním představitelem procesuálního vnímání světa je řecký filozof Herakleitos z Efezu (?544–?483), zdůrazňující permanentní proměnlivost světa. Připomeňme jeho výrok „Nelze vstoupit dvakrát do téže řeky, ani se dvakrát dotknout pomíjivé, svou povahou totožné podstaty.“ (viz [14, str. 55]). Vstoupím-li do téže řeky podruhé, bude voda kolem mne jiná než ta, do které jsem prvně vstoupil. Vrátím-li se opět k neúspěšně řešené úloze, bude můj pohled na ni jiný, než byl při prvním pokusu o řešení.

Představitelem konceptuálního vnímání světa je Parmenides z Eley (?540–?470), hlásající totální stálost a neměnnost světa.

Adjektivum *procesuální* označuje ty obsahy, aktivity nebo stavy našeho vědomí, v nichž rozhodující roli hraje čas. Příkladem může být algoritmus písemného dělení nebo úprava algebraických výrazů.

Adjektivum *konceptuální* označuje nadčasové obsahy, představy nebo stavy našeho vědomí. Když žákům otevíráme pojem čtverec nebo zlomek, snažíme se, aby se ve vědomí žáků vytvořila pevná a jasná představa daného pojmu.

2 OD PROCESU KE KONCEPTU

Před čtyřiceti roky maďarský didaktik matematiky Zoltan Dienes (1960) vyslovil myšlenku, že mnohé pojmy matematiky (koncepty) vzešly z matematických činností (procesů). Například ke konceptu „čtyři“ se dítě dostane přes počítání věcí „jedna, dvě, tři, čtyři“. Dienesova plodná teze byla rozvíjena dalšími badateli. V osmdesátých letech se zájem o transformaci

$$\text{proces} \rightarrow \text{koncept}$$

výrazně zvýšil. Uvedená transformace byla zkoumána z různých pozic a dostala různá jména: „entification“ (Kaput, 1982), „reinification“ (Sfard, 1989), „encapsulation“ (Dubinsky, 1991). Všechny tyto studie se snaží popsat mechanismus, kterým se z opakovaných procesů vytváří ve vědomí dítěte a žáka nový koncept. Příkladový materiál je bohatý, obsahuje poznatky od předškolního věku přes didakticky náročné koncepty jako zlomek nebo záporné číslo až po základy infinitezimálního počtu.

3 PROCEPT

Nový pohled na popsanou transformaci formulují Gray a Tall takto:

V tomto článku uvažujeme o dualitě mezi procesem a konceptem v matematice, zejména o té, v níž se stejný systém používá jak pro proces (jakým je sčítání dvou čísel $3 + 2$) tak i pro produkt tohoto procesu (součet $3 + 2$). Dvouznačnost zápisu umožňuje myslícímu člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, jímž jistou úlohu řeší, ke konceptu, pomocí něž s ní zachází jako s částí širšího mentálního schématu. Znak, jenž přirozeně reprezentuje amalgam dvouznačnosti proces/koncept, nazýváme „procept“.

V pojmu „procept“ jsou tedy dvě důležité myšlenky: první se týká amalgámu proces/koncept, druhá znaku, jako reprezentanta tohoto amalgámu. Na jedné straně nová představa, která vznikla ve vědomí člověka, totiž představa téhož jevu připouštějící jak činnostní, tak statický

(Gestalt) způsob jeho uchopení, na druhé straně znak, který obě uchopení slepuje.

Znak je pro ideu proceptu dominantní. Podobné znaky v geometrii neexistují, a proto Tall a Gray nepoužívají procept v oblasti geometrie. Zde navazují na myšlenky van Hieleho (1986) a ve studii Tall et al. (1999) dávají hierarchický pohled na didaktiku geometrie: od percepcie tvarů přes praktickou manipulaci s prototypy objektů k Eukleidovské geometrii platonických objektů až po důkaz a axiomatickou stavbu geometrie.

4 PROCEPT V GEOMETRII

V uplynulých třech letech jsme se pokusili aplikovat na geometrii ideu proceptu ochuzenou o znak. Vycházíme z antropogeometrické teorie Petra Vopěnky (1989). V didaktické interpretaci této teorie se poznávání geometrického světa začíná evidencí geometrických osobností jako krychle, čtverec nebo kruh a pokračuje manipulativní činností, v průběhu které se dítěti vynoří jevy průvodní těchto osobností jako jsou vrcholy, strany, hrany, střed a dále pak míry: délka, obsah, objem a velikost úhlu. Pojmenování geometrických jevů umožní dítěti a žákovi budování geometrických proceptů. Reprezentantem jevu, který může být uchopen jak procesuálně, tak konceptuálně, není znak, ale jméno.

V aritmetice se nejprve naučí dítě proces – říkanku „jeden, dva, tři, ...“ a až pak pochopí koncept – číslo „tři“. V geometrii vnímá dítě koncept – kostku stavebnice a až pak začne evidovat proces – jak se kostky chovají například při stavbě věže. K proceptuálnímu poznání čtverce dochází až tenkrát, když žák umí čtverec sestavit nebo vymodelovat. Ilustrace osvětlí naznačenou myšlenku podrobněji.

5 OBSAH TROJÚHELNÍKA

Na čtverečkovaném papíře je nakreslen trojúhelník ABC (např. $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(2, 4)$). Dva žáci hledají jeho obsah.

Andrea postupovala procesuálně: nakreslila obdélník $ABEF$ ($E(5, 4)$, $F(0, 4)$) a rozdělila jej výškou CD ($D(2, 0)$) na dva obdélníky $ADCF$ a $DBEC$. Nad obdélníky napsala jejich obsahy 8 a 12. Pak poloviny těchto čísel (4 a 6) vepsala do $\triangle ADC$ a $\triangle BDC$. Nakonec součet 10 napsala vedle obrázku a číslo podtrhla.

Adam postupoval konceptuálně: dokreslil výšku CD trojúhelníka a napsal vzorec $S = z \cdot v/2$. Dosadil hodnoty $z = 5$, $v = 4$ a vypočítal $S = 5 \cdot 4/2 = 10$.

Andrea ví, že nějaký vzoreček existuje, ale nepamatuje si ho. Její poznání pojmu „obsah trojúhelníka“ je zatím jenom procesuální.

Adam použil konceptuální postup. Jeho pilířem je vzorec uchovaný v žákově paměti. Je-li tento vzorec podepřen žákovou znalostí vyvození vzorce, je jeho poznání pojmu „obsah trojúhelníka“ na úrovni proceptu. Jestliže však Adam původ vzorce nezná, je jeho poznání pouze formální, neboť není podloženo zkušeností žáka, není použitelné v životě, není schopno dalšího rozvoje.

6 OBJEKT VS. JEHO TVORBA

Žákyně čtvrté třídy, Bětko, měla zjistit, kolik úseček je určeno čtyřmi body. Bětko řekla 12, protože pojmy „úsečka KL “ a „úsečka LK “ považovala za odlišné. Bětko pod „úsečkou“ chápe „proces tvorby úsečky“. Ten je u obou úseček jiný. Pojem, který Bětko nazvala „úsečka“, matematici znají jako „vázaný vektor“. Bětkina představa pojmu „úsečka“ není chybná, ale je jiná než naše.

Kolegyně Vlasta Jančiová (Gymn. Púchov) použila ke studiu geometrického chování žáků úlohu, jejíž východiskem byl obrázek obsahující 12 krychlových těles. Každé z těchto těles vzniklo „pěkným“ slepením pěti shodných krychlí. Do množiny 12 těles zavedla vztah příbuznosti: tělesa A a B jsou příbuzná, když lze těleso A rozdělit na dvě krychlová tělesa a z nich pak složit těleso B . Úlohou žáků bylo najít všechny příbuznosti na dané množině těles. Jeden chlapec však počítal příbuznost násobně. Dvojici těles, která je možné navzájem transformovat třemi různými způsoby, počítal trojnásobně.

Oba uvedené příklady ilustrují objekt, který je standardně pojat jako koncept, ale který někteří žáci vnímají jako proces tvorby daného objektu. To jistě není chyba, ale vývojové stádium porozumění danému pojmu.

7 ÚHEL

Úhel uvažovaný jako část roviny je koncept, úhel jako otočení je proces. Slova „pravý úhel“ mohou vyvolat v našem vědomí představu rohu stolu (koncept) nebo povel „vpravo bok!“ (proces). Slova „úhel α trojúhelníka

ABC “ evokují představu konceptuální, slova „úhel φ má 420° “ představu procesuální, otáčení. V rovině totiž nelze vidět úhel přesahující 360° .

Diagnostický test. Požádejte žáka, aby pomocí hodinových ručiček vysvětlil, co to je pravý úhel. Řekne-li například „Je to úhel, který svírají ručičky, když je přesně 9 hodin.“, tak je jeho pohled konceptuální. Řekne-li ale „Je to úhel, který urazí velká ručička za 15 minut.“, tak je to pohled procesuální.

Sami sebe můžete otestovat tak, že vyřešíte následující úlohu.

Úloha Je krátce po 12:15 h a ručičky hodin svírají úhel 90° . Kolik je hodin? *Komentář k řešení úlohy bude uveden v přednášce.*

8 PROCEPTUÁLNÍ TRANSFER

Ve výzkumu geometrického chování budoucích učitelů matematiky použila I. Malechová (1998) následující úlohu, kterou navrhnul M. Kočan-drle.

Úloha Dány jsou čtyři body P, Q, X, Y . Najděte otočení R se středem P a otočení R' se středem Q tak, aby bylo $(R' \circ R)(X) = Y$.

Někteří řešitelé přistoupili k úloze konceptuálně: otočení vnímali jako dvojici bodů vzor – obraz. Nakreslili vstupné body P, Q, X a Y a k nim dokreslili neznámý bod Z tak, aby bylo $Z = R(X)$ a $R'(Z) = Y$. Vznikl obrázek, jemuž dominovaly dva rovnoramenné trojúhelníky XPZ a ZQY .

Jiní řešitelé uchopili otočení procesuálně, jako pohyb. Načrtli dvě kružnice – trajektorie bodů X a Y při otáčení kolem středů P a Q . Tito řešitelé našli řešení téměř okamžitě. Těm prvním to trvalo někdy hodně dlouho.

Myšlenku podívat se na procesuálně popsanou situaci konceptuálně nebo na konceptuálně popsanou situaci procesuálně nazveme proceptuální transfer.

9 ZÁVĚR

Domníváme se, že idea geometrického proceptu je pro učitele podnětná. Má-li čtenář zájem hlouběji se s ní seznámit, nabízíme mu spolupráci. V literatuře jsou uvedeny některé práce, které vstoupily do našeho výzkumu a mohou být výchozím bodem případné experimentální činnosti čtenáře.

LITERATURA

- [1] Dienes, Z.P.: *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational, 1960.
- [2] Dubinsky, E.: *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer 1991, s. 95–123.
- [3] Gray, E.M. – Tall, O.D.: *Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic*. *Journal for Research in Math. Educ.* 25, 2, 1994, s. 116–141.
- [4] Hejný, M.: *Procept*. Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky, Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského, Bratislava, 1999.
- [5] Hejný, M. – Michalcová, A.: *Analýza písomného riešenia matematických úloh*. Metodické centrum Banská Bystrica, 1999.
- [6] Jančiová, V.: *Skúmanie priestorových predstáv žiakov* (Preprint).
- [7] Jirotková, D.: *Perception of a solid*. In: SEMT, 1995, s. 39–41.
- [8] Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii*. MÚ AV ČR, Praha, 1996.
- [9] Kuřina, F. – Tichá, M. – Hošpesová, A.: *On children's everyday experience and geometrical imagination*. In: SEMT, 1999, s. 72–76.
- [10] Malechová, I.: *Analýza studentských řešení úloh a transformací*. Kandidátská disertační práce, UK, MFF, Praha, 1998.
- [11] Perný, J.: *Space imagination*. In: SEMT, 1999, s. 195.
- [12] Roubíček, F.: *Visualization and representation of three-dimensional objects*. In: SEMT, 1999, s. 103–107.
- [13] Sfard, A.: *Transition from operational to structural conception: The notion of funktion revisited*. In: G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (Eds.): *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, France, 1989, s. 151–158.

- [14] Svoboda, K.: *Zlomky předsokratovských myslitelů*, ČSAV, 1962.
- [15] Sýkora, V.: *The development of similarity and its pre-concept level*. In: SEMT, 1997, s. 196–197.
- [16] Tall, D. and all.: *Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking*. Mathematical Education Research Centre, University of Warwick, 1999, (preprint).
- [17] van Hiele, P.: *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press, 1986.
- [18] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií*. Panoráma, Praha 1989.
SEMT – Proceedings of SEMT, (Ed.) M. Hejný and J. Novotná,
Charles University, Faculty of Education, Prague

ŠKOLA NA PRAHU INFORMAČNÍ SPOLEČNOSTI

František Ježek

1 ÚVOD

Evropský koncept informační společnosti má v České republice odraz ve formulaci státní informační politiky – viz [1]. Pro oblast školství je přijat materiál, který pojednává o příslušných důsledcích na formy a obsah vzdělávání – viz [2]. Přesto však dané materiály jsou jen začátkem velmi složité proměny vzdělávání. Tento příspěvek se snaží o pojmenování některých očekávání i rizik této proměny. Otázkou je, jak se v tomto procesu změní postavení a obsah výuky matematiky. Nesporné je, že právě **matematika stála u zrodu technologického potenciálu informační společnosti**.

2 INFORMAČNÍ SPOLEČNOST

Informační společnost je vize, v níž dominantní úlohu hraje propojení informačních a komunikačních technologií (ve zkratce ICT). Tato vize v jevové oblasti znamená dramatické snížení prostorového a časového omezení přístupu k informacím.

Informační společnost podporuje aktivity malých a středních podniků, neboť se mohou stát součástí globálních projektů a aktivit. Mění se i přístup k dalším oblastem života společnosti. Patří mezi ně i vzdělávání.

3 STÁTNÍ INFORMAČNÍ POLITIKA

Vytvoření informační společnosti je jednou z priorit Evropské unie. Jde o nutnost, která vyplývá z poznání, že jen cestou uplatnění ICT lze zastavit narůstající technologický náskok USA a Japonska. Výchozím dokumentem či výzvou je tzv. **Prodiho iniciativa** („eEurope – An Information Society For All“), v níž je v deseti bodech formulován program zemí Evropské unie. Pro oblast vzdělávání jsou stanoveny v zemích EU následující cíle:

- rok 2000 – odstranit administrativní a licenční bariéry přístupu k informacím a plně rozvinout odpovídající síťovou infrastrukturu,
- rok 2001 – všechny školy připojit k Internetu a vybavit je multimedialní technikou s tím, že postupně vznikne evropský multimedialní univerzitní campus,
- rok 2002 – vysokorychlostní připojení k Internetu má být dovedeno do tříd na všech typech škol, učitelé mají být schopni tuto nabídku plně využít,
- rok 2003 – má být dosaženo „informační gramotnosti“ absolventů škol.

V dokumentu [1] je formulováno osm prioritních oblastí realizace **státní informační politiky České republiky**. Na prvním místě je uváděna informační gramotnost občanů s tím, že klíčovou roli má sehrát školství. V dalších prioritách uvedeného dokumentu se akcentuje rozvoj informační infrastruktury a změny, které informační společnost přinese ve státní správě a v podnikání.

Dokument [2] detailně rozpracovává realizaci **státní informační politiky ve vzdělávání**. Obsahuje i vymezení konkrétních programů pro oblast školství. Pozornost budí zejména rozsah finanční podpory, které se má tomuto záměru dostat. V roce 2001 by mělo jít o částku 1,7 miliardy Kč. Pro porovnání: jde o částku, která odpovídá cca čtvrtině roční dotace vysokých škol na vzdělávací činnost, resp. o takřka celý rozpočet Karlovy univerzity.

Cílem pro rok 2001 je **připojení všech škol a veřejných knihoven na Internet** (minimálně linkou 64 kb/s) a vybavení alespoň jedním multimedialním počítačem. Na školách mají být ustaveni ICT koordinátoři a má se rozeběhnout příprava těchto pracovníků i dalších učitelů.

4 ZMĚNY FOREM VZDĚLÁVÁNÍ

Uplatnění principů informační společnosti bývá v oblasti vzdělávání spojeno s rozvojem alternativních vzdělávacích forem. Dostupnost informačních zdrojů a interaktivních elektronických vzdělávacích programů má samozřejmě svá pozitiva i negativa.

Např. tzv. **virtuální univerzity** jsou vytvářeny po celém světě. Rovněž v naší republice bylo řešeno několik projektů tohoto typu. Celkově jde

o pozoruhodnou možnost, jak zpřístupnit ty nejlepší texty a vyučovací metody prakticky neomezenému počtu zájemců. Jedná se však zároveň o velmi nákladnou záležitost. Zahraniční studie a zkušenosti ukazují, že pro virtuální univerzitu zajišťuje její rentabilitu klientela, která může vzniknout v teritoriu s cca 10 miliony obyvatel. V současné době lze očekávat průnik zahraničních vzdělávacích programů i na náš trh. Německé zkušenosti ukazují, že nositelem těchto snah jsou především majitelé či provozovatelé médií (zejména telekomunikačních přenosových tras).

V podmínkách České republiky je reálná šance využít informačních technologií k rozvoji **distančního vzdělávání**. Bylo by velmi užitečné, aby tato technologická platforma vedla zejména k rozvoji **dalšího vzdělávání**, které představuje jeden z nejslabších článků naší vzdělávací soustavy.

Z pedagogického hlediska se však jako přínosné jeví možnosti **kombinace různých forem vzdělávání**. Prvky distančního vzdělávání a podporu informačními technologiemi je vhodné zavádět tam, kde nová forma bude mít reálný přínos. Největší naději na úspěch má v současné době uplatnění rysů distančního vzdělávání na vysokých školách a na nich pak tam, kde jde o masovou výuku. Jasně se ukazuje, že tuto vlastnost mají zejména první **roky studia na technických, právnických a ekonomických fakultách a vysokých školách**. Proto lze očekávat, že zejména v oblasti matematiky pro techniky se stále více bude projevovat snaha řešit přípravu studentů **oslabením počtu kontaktních vyučovacích hodin** a vytvořením podmínek pro uplatnění informačních technologií a prvků distančního vzdělávání. Pro matematiky (ale i informatiky a fyziky) tak vzniká zvláštní dilema: Nabízí se možnost zapojení do týmů, které zpracovávají pomůcky pro distanční prvky vzdělávání, ale tím zároveň připravovat situaci, kdy o klasickou učitelskou práci vysokoškolského pedagoga již nebude vlastně takový zájem. Nepochybně je z pragmatického hlediska rozumné být nositelem změny. Přesto je dobré si uvědomit, že jde velmi zásadní proměnu, která má i ryze ekonomické hledisko. Vzdělávání se stává stále masovější záležitostí a distanční forma je jednou z cest, jak vzdělávání zlevnit. Pro některé z organizátorů těchto snah může jít o ovládnutí většího segmentu trhu se vzděláváním. V souvislosti s implementací Boloňské deklarace je tento proces markantní v počáteční etapě vzdělávání vysokých školách. Orientaci některých představitelů vysokých škol na rychlou implementaci třístupňového systému (s povinným bakalářským stupněm) je nutné

hodnotit i z hlediska jejich vztahu k teoretickému základu. Rovněž ve středním a základním školství dojde nepochybně k proměnám, ale lze se domnívat, že největší změny lze očekávat v obsahové oblasti.

Podpora vzdělávání multimediálními nástroji prochází zatím živelným vývojem. Pro faktický úspěch projektů, tj. pro prokazatelný přínos studujícím, je rozhodující **výběr partií, v nichž jsou multimediální nástroje využity**. Rozhodně by neměla být takto jako první zpracována témata, která jsou relativně snadno pochopitelná. Nejvíce mohou multimediální nástroje přinést v nejnáročnějších partiích. Takto jsme např. postupovali při tvorbě multimediálního pořadu k podpoře studia konstruktivní geometrie pro strojní fakultu. Ze zkušenosti i ze statistického šetření jsme věděli, že nejobtížnější partií je kapitola věnovaná obalovým plochám. Přínos multimediální podpory byl z hlediska výsledků zkoušek jednoznačně pozitivní. K tomu nepochybně přispělo to, že se jednalo o poskytnutí dalšího (doplňujícího) informačního zdroje, nástroje pro procvičování s možností opakovaného výkladu za použití animací apod. Klasická výuka v tomto případě nabyla nahrazena multimediálními prostředky, ale byla jimi účelně a velmi účinně doplněna. Zdá se, že to může být obecný poznatek.

5 OBSAHOVÉ ZMĚNY VE VZDĚLÁVÁNÍ

Ve studii [3] je zdůrazněn význam změn obsahu vzdělávání. Informační společnost přináší kromě alternativních forem vzdělávání zejména možnost a nutnost proměny obsahu. **Bez obsahových změn v osnovách současných základních a středních škol nemůže být dosaženo skutečného přechodu k informační společnosti.** Na vysokých školách ještě více než na základních a středních školách jde o osobní angažovanost a postoje.

Jaké obsahové změny ve vzdělávání vyvolává či provokuje rodící se informační společnost? K diskusi předkládám následující výčet.

5.1 OSLABENÍ FAKTOGRAFICKÉ SLOŽKY VZDĚLÁVÁNÍ

Dostupnost informací na Internetu a v multimediálních encyklopediích by skutečně mohla vést **k uvážlivějšímu zařazování faktografických údajů do výuky**. Přesto tuto tezi je nutné aplikovat velmi opatrně. Nutné znalosti historické, literární a další budou i v období informační společnosti tvořit základ vzdělání. Multimediální technologie mohou při-

spět k snazšímu zvládnutí faktografických údajů. Informační společnost však jistě promění náhled na znalosti zeměpisné, biologické i chemické. Domnívám se, že toto téma – tj. obsahová proměna vzdělávání – by mělo být velkou výzvou pro pedagogy a pro fakulty připravující učitele. Výzvou k podání a přijetí grantových projektů, podnětem k řešení projektů vědeckými metodami a výzvou k prosazení implementace výsledků. Počátkem takové implementace jsou jednoznačně změny v pojetí přípravy budoucích a stávajících učitelů.

5.2 SCHOPNOST ANALÝZY INFORMACÍ

Pro využití informačních zdrojů Internetu je schopnost **shromažďovat, třídit a analyzovat údaje** klíčovou kompetencí. Je mnohem náročnější, než je získání tzv. informační gramotnosti, která je často redukována na schopnost obecné obsluhy počítače a využití kancelářských systémů. Otázkou je, jak tuto kompetenci rozvíjet. Nejobtížnějším úkolem je rozvoj analytických myšlenkových postupů. Mohlo by se jednat o novou šanci pro postavení matematiky.

5.3 MOŽNOSTI SLEDOVÁNÍ DYNAMIKY JEVŮ

Informační technologie přinášejí možnost **sledovat jevy v jejich dynamice**. Markantní je to např. v geometrii, kde klasické metody deskriptivní geometrie zobrazovaly statické objekty a prezentovaly řešení. Možností animací nebo dokonce virtuální reality přinášejí nové možnosti a podstatně zvyšují názornost popisovaných jevů. Principy virtuální reality umožňují i simulace laboratorních pokusů ve fyzice nebo chemii s interakcemi s pozorovatelem, který vlastně pokus sestavuje a řídí.

5.4 PODPORA TÝMOVÉ PRÁCE NEZÁVISLE NA MÍSTĚ A ČASE

Uživatelé elektronické pošty vědí o jejích příjemných vlastnostech, totiž o možnosti komunikovat s okolím i v případě, že právě jste na služební cestě, doma (jste-li však ochotni platit příslušné poplatky) nebo na zahraničním pobytu. Elektronická media otevírají prostor pro týmovou práci s tím, že částečně je oslaben i význam pobytu na jednom místě.

Schopnost týmové práce nabývá na významu a podle zjištění OECD by právě v této oblasti mělo české školství učinit významnější posun vpřed. Problémem je dovednost vést tým a samozřejmě i ochota sdílet společné hodnoty a vnitřní kulturu týmu.

5.5 PODPORA PROJEKTOVĚ ORIENTOVANÉHO STUDIA

Projektové metody vyučování odstraňují izolaci jednotlivých disciplín a vedou k rozvoji užitečných vlastností studentů. Uplatnění informačních technologií tuto cestu usnadňuje. Ostatně mnohé programátorské problémy jsou velmi dobrým materiálem pro projektově orientovanou výuku.

Kombinace týmové práce a projektově orientovaného studia bude pravděpodobně jedním z dalších trendů vývoje vzdělávání s podporou informačních technologií.

5.6 INTERNACIONÁLNÍ DIMENZE VZDĚLÁVÁNÍ

Internet nezná hranic a nenásilně vede uživatele v **komunikaci v cizích jazycích, zejména v angličtině**. Použití informačních zdrojů Internetu posiluje internacionální charakter vzdělávání.

6 MATEMATICKÉ DISCIPLÍNY A RODÍCÍ SE INFORMAČNÍ SPOLEČNOST

6.1 REFORMA ŠKOLSTVÍ A MATEMATIKA

Za dva nejvýznamnější administrativně-koncepční impulsy pro proměnu českého školství lze považovat **Boloňskou výzvu a přípravu nového pojetí maturity**.

Přesněji podle současného stavu terminologie by ta část reformy maturitní zkoušky, o níž bude dále řeč, měla být nazývána externí část maturitní zkoušky. Tento příspěvek by měl být spíše podnětem k diskusi a zamyšlení, nemohu předložit hotová řešení. Proto několik otázek, na které je podle mého názoru vhodné a nutné hledat konsensuální odpověď:

- Odráží externí část maturity zjevný trend, totiž směřování k informační společnosti?
- Jakou matematickou gramotnost ověřuje externí část maturitní zkoušky? Co například rozumíme v daném kontextu slovem geometrie?
- Dokážeme pak přesvědčit středoškolské kolegyně a kolegy (zejména na odborných školách), že jejich poslání je vznešenější, než je jen příprava na testy?

Boloňská výzva je možná zúženě interpretována jako požadavek či doporučení k restrukturalizaci vysokoškolského vzdělávání, které prodělává „masifikaci“. Na příkladu řady zemí je možné dokumentovat, že lze zvládnout i studium více než 50 % občanů v populačním ročníku v terciárním vzdělávání (např. Finsko), a dokonce, že je na tom možné založit nebývalý rozvoj a prosperitu. Boloňská deklarace doporučuje, aby se zvýšila prostupnost různých forem a úrovní terciárního vzdělávání. Pro naše vysoké školství je typické, že musí dojít k rozvoji bakalářského studia. V těchto dnech pozorujeme nebývalý ruch na vysokých školách. Skoro jako o závod se připravuje implementace Boloňské deklarace, tj. zavádí se povinný bakalářský stupeň. Dále již jen položím otázky, neboť mám obavu, že jevová stránka, tj. intenzivní implementační činnosti, mohou mít i další, zatím nepojmenovanou rovinu.

- V bakalářském stupni nelze ponechat na fakultách využívajících matematiku a fyziku současnou úroveň teoretického základu. Naplní se druhá část oblíbené argumentace, totiž, že v magisterském navazujícím programu bude teoretický základ doplněn?
- Jsme schopni říci, jak by takováto restrukturalizace obsahu vypadala věcně např. v matematické analýze, diskrétní matematice, geometrii?
- Jakými změnami bude muset projít studijní literatura (podpora multimediálními nástroji na Internetu apod.)?
- Jakými změnami projdou matematická pracoviště na nematematických fakultách?

A závěr? O ohrožení je lépe být informován a účinně na něj reagovat. Přichází období velkých změn. Je lépe být aktivním prvkem, tj. spoluvytvářcem změny, než se jen spokojit s rolí trpného adresáta změny. Proto v další části uvedu několik podnětů (vycházejících z osobní zkušenosti) k obsahové proměně vyučování matematice.

6.2 OBLÍBENÉ MATEMATICKÉ OBJEKTY A ÚLOHY

Historické hledisko, vnímání kořenů poznání a zobecnění poznatků z vývoje jsou nepochybně velkou předností matematiky a v jistém smyslu jí

dávají punc filozofického myšlení. Na druhou stranu je zřejmé, že historické kořeny přežívají částečně bez většího oprávnění ve volbě obsahu vzdělávání.

Příkladem takové preference v obsahu vyučování je dominantní postavení kvadratické rovnice a v geometrii pak preference kvadratických objektů (vedle objektů lineárních). Metody numerické matematiky a dnes moderní algebry vlastně odstranily praktické důvody k omezení prostoru matematiky ve vyučování obzorem kvadratických útvarů.

Z uvedené úvahy nevyplývá, že by se neměla vyučovat látka o kvadratické rovnici. Zvláště cenná je, pokud se jí dostává průběžně náležité geometrické interpretace. Jde ale o nalezení cesty k uplatnění útvarů, které jsou popsány algebraickými rovnicemi vyšších stupňů, resp. mají nepolynomialní vyjádření. Je to výzva pro hledání. Navíc pokud jde o geometrickou interpretaci, dostaneme se tak nenásilně k objektům moderního počítačového geometrického modelování, tj. k objektům jako jsou spline křivky a plochy, Bézierovy či NURBS objekty – viz např. [4].

6.3 GEOMETRIE A INFORMATIKA

Pozice geometrie ve školském vzdělávání se za posledních 20–30 let velmi výrazně proměnila a oslabila. Mimochodem i nově připravovaná koncepce maturitní zkoušky vede k dalšími odklonu od geometrie, tentokrát dokonce jen z ryze technických důvodů. Geometrii je těžké vměstnat do testových otázek. Geometrie totiž používá širší výrazové škály. V geometrii je prostor pro hledání mnoha cest, geometrie je v mnoha oblastech kreativní.

Častým argumentem k obhajobě restrikcí prostoru věnovaného geometrii je uplatnění počítačů. A je možné slyšet i takové vulgarizace, že rýsují dnes počítače a proč tedy vůbec dávat do rukou žáků kružítko a pravítko. Je to zvláštní argumentace, neboť úplně stejný model demagogie lze aplikovat téměř na kteroukoliv oblast matematiky.

Dovolím si tvrdit, že geometrie má velmi dobrou šanci ve spojení s informatikou. Disciplíny jako počítačová grafika, geometrické modelování, rozpoznávání obrazu, geomatika apod. zažívají velký rozvoj a prosperitu. Do příslušných monografií – jejich reprezentativní přehled lze najít v [4] – těchto disciplín se stěhuje obsah, který dříve patřil do středoškolské či vysokoškolské geometrie.

Obhajobu pozice geometrie v rámci matematické průpravy zakončím přesvědčením, že vývoj geometrického myšlení je možné popsat v kon-

textu s filozofií a že v tom je šance i pro vyučování matematice, které by nemělo uvíznout jen v tréninku aplikace algoritmů v rámci některých kalkúl (např. úpravy výrazů, diferenciální a integrální počet).

6.4 UČITEL MATEMATIKY A INFORMAČNÍ SPOLEČNOST

Jsem si plně vědom toho, že předcházející obhajoba geometrie, která nejen mizí z osnov, ale i z mysli a srdcí učitelů matematiky (a to je mnohem horší), je vlastně otazníkem nad profilem učitelů matematiky. Jde především o absolventy pedagogických fakult za posledních deset let. Nechci se dopustit neoprávněné generalizace, neboť naštěstí něco jako průměr všech učitelů nelze spočítat. Proto zvolím výčet otázek, na které je podle mého názoru nutné a vhodné hledat odpověď.

- Co je příčinou stále klesajícího zájmu absolventů středních škol o studium exaktních věd a speciálně matematiky?
- Které předměty motivují na střední škole ke studiu technických disciplín (pro ně je matematika přirozeným základem, ale není zpravidla motivací)?
- Proč je projekt technických lyceí, ač se stal standardním studijním oborem, popelkou a proč se o tuto šanci již od počátku neucházela gymnázia?
- Proč je kategorie P Matematické olympiády na okraji zájmu středoškoláků?

Novou šancí či výzvou pro matematiky na všech typech škol je realizace státní informační politiky. Na každé škole by měl být ustanoven ICT koordinátor, tj. koordinátor pro informační a komunikační technologie. Mělo by jít o učitele, kterému se dostala či dostane speciální příprava a který by měl být ve vedení školy osobou odpovědnou za uplatnění informačních technologií. Bohužel hrozí zjednodušení role ICT koordinátora na technickou stránku věci, tj. na provoz počítačů, akvizici softwarových titulů, zaškolení kolegyn a kolegů na úrovni ECDL, tj. elementární obsluhy počítačů a programových produktů, neboli v počítačové gramotnosti. Domnívám se – viz [3], že ICT koordinátor by měl na škole iniciovat a koordinovat i obsahové změny v řadě předmětů. Jde o pojetí vyučování, o jeho akcenty a nadstavbu. Jde o rozevření prostoru pro pedagogickou tvořivost a pro samostatnou práci žáků.

Pro řadu učitelů matematiky na středních školách se ukázala v minulosti jako velmi přínosná aprobační kombinace matematika - deskriptivní geometrie. Tito učitelé rozhodně dbali a dbají na názornost, stereometrie pro ně nebyla partií, která se špatně učí a zkouší, geometrie netrpěla neúměrnou algebraizací. Zdá se, že dnes může být žádoucím zpestřením kombinace matematika – informatika, či matematika – technická geometrie (tuto kombinaci nabízí např. Fakulta aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni). Od těchto učitelů lze očekávat tvůrčí vztah k uplatnění výpočetní techniky, uchopení výzvy s názvem „ICT koordinátor“ a snad i mateřštější vztah k dědictví s názvem „geometrie“.

A největší otazník na závěr. Jak se promítne Boloňská deklarace do učitelského vzdělávání? Opět nezbyvá jiná možnost, než v situaci, kdy teprve krystalizuje názor, volit systém otázek:

- Nešlo by pro budoucí učitele základních škol chápat bakalářský stupeň jako odborné studium v oborech budoucí aproby a navazující magisterský stupeň založit na dlouhodobých praxích ve školách a zkoušce učitelské způsobilosti?
- Jak řešit rozpor mezi počtem studujících na pedagogických fakultách a počtem studentů těchto fakult, kteří uvažují o dráze učitele?
- Nebo jinak: Nešlo by dosáhnout stavu, kdy učitelské povolání je stejně žádané jako učitelské studium? Nevedla by tudíž cesta k růstu prestiže učitelské řehole?
- Není idea informační společnosti velkou výzvou pro cílený pedagogický výzkum?

7 ZÁVĚR

Cesta k informační společnosti je pro matematické vzdělávání možná překvapivě více jeho ohrožením než příležitostí pro jeho expanzi. Eliminace bezprostředního ohrožení tkví pravděpodobně v tvůrčím a aktivním přijetí principů informační společnosti, v promyšlené a interakční strategii transformace obsahu matematického vzdělávání a v osobní angažovanosti kvalitních a věci oddaných učitelů matematiky na školách všech stupňů.

LITERATURA

- [1] *Státní informační politika. Cesta k informační společnosti.* Praha, ÚSIS 1999.
- [2] *Koncepce státní informační politiky ve vzdělávání.* Praha, MŠMT 2000.
- [3] Ježek, F.: *Státní informační politika ve vzdělávání. Podkladová studie – rukopis.* Plzeň, 2000.
- [4] Ježek, F.: *Geometrické a počítačové modelování.* Pomocný učební text. Plzeň, ZČU 1999.

PERSPEKTIVY VYUČOVÁNÍ GEOMETRIE

František Kuřina

Existují minimálně tři důvody, proč bychom se na shromáždění učitelů matematiky v roce 2000, v Mezinárodním roce matematiky, měli zabývat i geometrií:

a) Geometrie hrála pozoruhodnou roli v historickém vývoji matematiky.

b) Problematika vyučování geometrie je aktuální otázkou i v celosvětovém měřítku.

c) Na naší domácí scéně se objevil v tisku hlas: „Podle odborníků by tím, co ze škol zřejmě zmizí, mohla být třeba geometrie“ (citováno podle [1]).

Název mého příspěvku se může zdát mnohému učiteli i profesionálními matematikovi příliš odvážný; jeví se tak i mně. Volil jsem ho však proto, abych zdůraznil jeden ze zdrojů svých úvah. Chci nejdříve informovat o významné akci, kterou v posledních letech uspořádala Mezinárodní komise pro vyučování matematice (ICMI) na doporučení 7. světového kongresu konaného v r. 1992 v kanadském Quebecu, totiž o vypracování studie *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. V roce 1994 byla publikována několikastránková výzva ke spolupráci [2], v níž jsou formulovány základní otázky a program. K řešení těchto problémů se sešla v roce 1996 konference v sicilské Catanii, k jejímuž jednání byla vydána kniha [3]. Závěry mezinárodní spolupráce k problematice vyučování geometrie pro budoucnost byly pak zpracovány v monografii [4] o 353 stránkách. Můj příspěvek čerpá z těchto publikací, využívám však i vlastní zkušenosti a snažím se reagovat na problematiku vyučování matematice u nás. Titul svého příspěvku jsem tedy převzal z citovaných studií a hned na počátku poznamenávám, že bohužel komise nedošla k formulaci jasných, či dokonce závazných, perspektiv vývoje vyučování geometrie. Je to z hlediska kulturních tradic jednotlivých zemí přirozeně pochopitelné, nicméně jsem osobně očekával od studie více, než nabízí. Připomínám, že o pracech [2] a [3] jsem publikoval v roce 1996 článek [5].

1 HISTORICKÝ VÝVOJ GEOMETRIE JE ÚZCE SPJAT S VÝVOJEM LIDSTVA

V této části příspěvku vycházím z úvodní studie *C. Mammany* a *V. Villaniho* z knihy [4]. Poučné je srovnat tuto kapitolu s článkem [6] *I. Koláře*.

Od prehistorie lidé silně toužili reprodukovat různorodé aspekty reality stylizovaným kreslením. Dekorovali své výrobky ornamentálními motivy jednoduchých geometrických tvarů, zvláště pak tvarů symetrických a tvarovali své prvky konstrukce do jednoduchých geometrických forem. V této fázi vývoje je pro prvky geometrického světa dominantní vizuální aspekt.

V další etapě spjaté s ranými civilizacemi (např. v Číně, Mezopotámii, Indii, Egyptě, Mexiku a Řecku) ovlivňují geometrii utilitární potřeby: měření délek, obsahů a objemů a vytyčování hranic pozemku. Zároveň hraje geometrie významnou instrumentální roli pro další disciplíny, jako architektura, geografie a astronomie. Zde již lze pozorovat první pokusy aspoň o částečné logické uchopení geometrických poznatků. Vizuální a výpočetní vlivy jsou přitom navzájem propojeny.

V řecké civilizaci začínají v geometrii převažovat abstraktní aspekty se snahou po celkovém deduktivním uspořádání, které vyvrcholilo v *Eukleidových Základech* a v pracích jeho následovníků (*Apollónius*, *Archimedes*, *Ptolemaios*). V této fázi jde především o pojmové aspekty geometrie. Preciznost Eukleidových Základů se stala prototypem logického uspořádání jakékoliv oblasti vědění a po mnoho staletí byla geometrie oceňována jako nejvýznamnější disciplína pro kultivaci vědců – od středověkého trivía až za renesanci. Z druhé strany perfekcionismus Eukleidových Základů bránil dalšímu rozvoji geometrie samé a měl za následek „zmrazení“ geometrických poznatků do eukleidovského schématu na mnoho století. Nové podněty přicházejí z vnějšku eukleidovské geometrie a jsou to v 15. století perspektiva, v 17. století mísení geometrie s algebrou (*Descartes*) a v 18. století systematické studium reprezentace trojdimenzionálního prostoru v rovině (*Monge*). Tyto tři aspekty, projektivní, analytická a deskriptivní geometrie, byly cizí *Eukleidovu* duchu a nijak jeho autoritou neotřáslý. Teprve 19. století znamená pokrok proti *Eukleidově* dílu. Objev neeukleidovské geometrie (*Lobačevský*, 1826, *Bolyai*, *Gauss*) znamenal novou éru ve studiu základů geometrie reprezentovanou jmény *Riemann*, *Pasch*, *Peano*, *Klein* a *Hilbert*. Tento vývoj je spjat s vysokým stupněm abstrakce a ztrátou vazby geometrie na smys-

lově vnímanou realitu. Právě tak jako dokonalost *Eukleidových Základů* uzavřela fázi myšlenkového dovršení geometrických znalostí antiky, znamenala dokonalost *Hilbertových Základů* dovršení bádání o základech geometrie.

Mezitím *Dedekind*, *Cantor* a *Weierstrass* položili základy rigorózní teorii reálných čísel, která není vůbec vázána na geometrické „jistoty“. Od konce 19. století je to naopak algebra, která poskytuje „modely“ geometrii. To umožňuje zabývat se abstraktními prostory libovolných dimenzí, zcela odloučených od smyslové zkušenosti (*Riemannova* a *Minkovského* diferenciální geometrie a jejich vliv na *Einsteinovu teorii relativity*). Na začátku 20. století byly sestrojeny nové algebraické nástroje k obecnému studiu geometrických objektů, z nichž nejmocnější je pojem vektorového prostoru. V současnosti, zdá se, zakoušíme obnovený zájem o vizuální aspekty geometrie, který se tentokrát projevuje spíše mimo matematickou komunitu. Jde o aplikace geometrie v počítačové grafice, v rozeznávání obrazců a v robotice. Neaktivnější v těchto směrech jsou informatika, technika, chemie a medicína.

Tento stručný historický nástin ukazuje, jak geometrie osciluje mezi vizuálními, početními, pojmovými, algebraickými a aplikačními aspekty.

Literatura o geometrii – zvláště v takto širokém historickém záběru, jistě tvoří dosti bohatou knihovnu. Kdybych však měl vybrat tři knihy, jejichž prostudování dá dobrý pohled na to, co historicky znamenala a znamená geometrie, doporučil bych tyto práce: *Eukleidovy a Hilbertovy Základy* ([7, 8]) a *Dieudonného Lineární algebru a elementární geometrii* [9].

Podle mého názoru lze historicky doložené etapy přístupu ke geometrii pozorovat i ve vývoji duševního světa dětí. V několika šetřeních jsme prokázali poměrně dobrou úroveň „vizuální geometrie“ u pěti až šestiletých dětí, všeobecně je známá nechuť žáků učit se „přesnou pojmovou“ geometrii na konci základní školy. Patrně podobně, jako byl *Eukleides* „překonán obchvatem“ přes geometrii projektivní, analytickou a deskriptivní, měli bychom získávat žáky pro vhodné úseky aplikační geometrie, kde se přirozeně uplatní jak výpočetní technika, tak i počítačová grafika. Připomínám, že jsme se v projektu „*Svět čísel a tvarů*“ [10] snažili výrazně uplatnit dětskou vizuální geometrii při zavádění přirozených čísel, přičemž je zajímavé, že takové přístupy nejsou v naší didaktické literatuře vůbec nové [11].

2 GEOMETRIE JE UMĚNÍ

Geometrii v užším smyslu můžeme chápat jako studium některé geometrické struktury. V *Hilbertově* duchu to může být např. struktura

$$(B, P, \epsilon, m, \cong),$$

kde B je množina bodů, P je množina přímek, ϵ je relace incidence, m je relace mezi a $\cong$ je relace shodnosti. Přitom jsou vlastnosti příslušných množin a relací formulovány v axiomech.

Ve *Weylově* pojetí je geometrie studiem struktury

$$(B, V, +, \cdot, \circ, -),$$

kde B je množina bodů, V je množina vektorů, $+$ je algebraická operace sčítání vektorů, $\cdot$ je algebraická operace násobení vektorů reálným číslem, symbolem $\circ$ popisujeme skalární násobení vektorů a $-$ je zobrazení kartézského součinu $B \times B$ do množiny vektorů. Dále je formulována soustava axiomů, která implicitně definuje geometrickou strukturu eukleidovského prostoru.

Ačkoliv se ve škole nezavádí žádná z takovýchto struktur exaktně, napovídá členění geometrie na naší střední škole, že přece jen považujeme strukturální pohled za základní, neboť izolovaně studujeme např. stereometrii v syntetickém pojetí [12] a analytickou geometrii [13]. Takovýto pohled je patrně jedině možný z hlediska matematiky, ale je nepochopitelný z hlediska studenta, který se matematikou nehodlá dále zabývat. Proč by ho měly zajímat jakési vyspekulované abstraktní struktury? Snad by ho však měly zajímat vlastnosti prostoru, v němž žije. Měl by tomuto prostoru rozumět, orientovat se v něm a řešit geometrické úkoly přirozeným způsobem, bez „svěrací kazajky“ struktury. Podle mého názoru nemá strukturálně ovlivněné pojetí výuky geometrie budoucnost. Budoucnost však má, a mělo by být posíleno, „geometrické myšlení“ v tom smyslu, který se pokusím v dalším vysvětlit.

Co je geometrie, není-li studiem geometrických struktur? V souladu s *R. Duvallem* ([4], str. 37–52) budu za geometrii považovat tyto tři dovednosti, tato tři umění (v původním slova smyslu):

- a) umění vidět,
- b) umění sestavovat,
- c) umění dokazovat.

Snad každý cítí, že tyto dovednosti nejsou specificky geometrické. Vidět mohu nejen prostorový či rovinný útvar, ale i útvar přírodní, vidět mohu i souvislosti, příčiny, řešení problému, konstrukci nebo důkaz. Sestrojit mohu nejen trojúhelník nebo kružnici, ale i model, stroj, algebraický výraz nebo rovnici. Tvrzení dokazujeme nejen v geometrii, ale i v algebře. důkazy se zabývají soudy, argumentace je složkou každodenního života. Skutečnost, že zařazuji zmíněné tři dovednosti do geometrie, má důvody jednak historické, jednak praktické. Geometrie je vhodná k tomu, aby od zcela elementární úrovně cvičila vidění, konstruování i dokazování. Vznik *Eukleidových Základů* je toho dokladem. Patrně proto, že v geometrii je spojena intuice s logikou, byla tato strukturálně složitá disciplína zpracována deduktivně jako první v historii. Samozřejmě závažná je otázka transferu, přenosu. Bude student, který umí vymýšlet důkazy v geometrii, stejně úspěšný i v argumentaci politické? Tyto otázky mi nejsou zcela jasné. Jsem však přesvědčen, že mnohé intelektuální dovednosti se právě na geometrické problematice dají dobře kultivovat. Chápeme-li geometrii jako vidění, konstruování a dokazování, je zřejmé, že o vypuštění geometrie ze vzdělání nemůže být řeč. Naopak, jsem přesvědčen, že tyto složky vyučování matematice bychom měli posílit.

Jak chápat geometrické myšlení? Nabízí se tyto tři pohledy (*Griffith*, [4, str. 195]):

a) Pěstovat geometrické představy a vizuální vyjadřování jako paralelu k symbolickému jazyku. Podle mého názoru má naše škola v této oblasti výrazné rezervy.

b) Převádět nápady znázorněné náčrtem do jazyka formálních důkazů. Obrázek přirozeně není důkaz, ale může výrazně hledání důkazu pomoci.

c) Rozvíjet zálibu v lokálně deduktivním nebo v deduktivním uspořádání učiva. Přitom by ve škole samozřejmě snad nikdy nemělo jít o předvádění důkazů, ale o celou řadu aktivit, které s dokazováním souvisejí. V prvé řadě bychom měli učit vidět souvislosti. To může být navozeno prováděním experimentů a jejich hodnocením. Pro porozumění důkazu je účelné hledat různé formulace téhož tvrzení a jejich objevování v rozmanitých kontextech a samozřejmě i užití vět v typických i méně typických situacích.

Pro vyučování na každém stupni školy je důležité uvědomovat si různé úrovně abstrakce. V negeometrických disciplínách bývá takovéto rozdělení zřejmé: počítání s čísly – aritmetika – má konkrétní charakter,

počítání se symboly – algebra – je abstraktnější. V geometrii pracujeme buď s konkrétními geometrickými útvary, nebo s jejich abstraktními formami. „Pověra pevné poloroviny“ v diskusi o počtu řešení konstrukčních úloh v elementární geometrii ukazuje, že ani některým autorům učebnice nemusí být tyto otázky zcela jasné.

3 JAKÁ JE BUDOUCNOST ŠKOLSKÉ GEOMETRIE?

Na tuto otázku patrně nelze dát odpověď příliš konkrétní. Budu vycházet (spolu s *M. Neubrandem*, [4, str. 226]) z přesvědčení, že budoucí vývoj bude extrapolací současných trendů. Z tohoto hlediska lze formulovat následující pohledy.

a) Geometrii ovlivní další vývoj komplexnějšího chápání matematiky, zejména jejího společenského ukotvení, její dynamiky a filosofie. Příznávám, že charakter těchto změn mi není jasný a publikaci [14], na níž se monografie [4] odvolává, jsem neměl k dispozici.

b) Větší důraz na aplikace a modelování. Přitom aplikace nejsou pojímány „a posteriori“, tak, že po vybudování příslušné teorie ukazujeme, jak ji lze použít, ale aplikace mají sloužit jako podněty k budování pojmů a teorií. Rozvíjení aplikačních zřetelů je v geometrii dobře možné.

c) Uplatnění základních ideí. Teoreticky můžeme přitom vycházet z myšlenek *Brunerových* [15], za základní geometrickou ideu považuje *Neubrand* např. transformační pojetí geometrie. Toto pojetí se prosazuje s menšími či většími úspěchy prakticky po celé století, zatím však bez výraznějšího úspěchu. V naší učebnicové literatuře se najde k této problematice několik zajímavých podnětů, podrobnější informace může najít čtenář v článku [16].

d) Konstruktivistické teorie učení. Nepříliš výrazné úspěchy tradičního přístupu k vyučování, kdy učitel vykládá, studenti píší, snaží se učivu porozumět a pak se učí, vedou ke snahám posílit roli studujícího ve vzdělávacím procesu. Zdá se, že po celém světě rostou sympatie ke konstruktivním přístupům, kdy student si sám, na základě vhodných podnětů (otázek, úloh, problémů, ...) konstruuje postupně vlastní matematický svět. Této problematice věnujeme u nás již několik let pozornost [17]. Realizace konstruktivních přístupů v praxi není jednoduchá, především proto, že je náročná jak na čas, tak na práci učitele.

e) Zaměření se na matematiku jako na lidskou aktivitu. Matematika není souborem vzorců, definic, vět a důkazů, ale především procesem,

jak se prostřednictvím kvantitativních vztahů orientovat v realitě. I tuto stránku lze v geometrii rozvíjet.

f) Studenti vidí geometrii jako empirickou teorii. Rozpor mezi geometrií jako fyzikou hmotného světa a abstraktní matematickou strukturou je nutno postupně překonávat. Je to nutné zejména z hlediska úrovně a smyslu argumentace a dokazování.

g) Vpád počítačů do škol. Role počítačů v geometrii bude i nadále růst. „Počítačová geometrie“ mění výrazně charakter geometrických objektů a to si vyžaduje nejen změnu didaktických přístupů, ale i charakteru komunikace ve třídě. V tomto směru vykazuje vyučování geometrie největší pokroky, vyvstávají však nové didaktické problémy.

4 ZÁVĚR

Řešení otázek vyučování geometrie není zdaleka otázkou osnov. Je to složitý komplex problémů, který bude ovlivňován zejména těmito vlivy (Hansen, [4, s. 236]):

a) Epistemologickou perspektivou, tj. neustále se měnícím charakterem matematiky a matematické aktivity.

b) Pedagogickou perspektivou, tj. současnými znalostmi vzdělávacího procesu (jak procesu vyučování v užším slova smyslu, tak i procesu učení).

c) Technologickou perspektivou, tj. změnami technologických zařízení, která budeme mít k dispozici jak pro vlastní matematickou činnost, tak i pro proces učení se matematice

d) Politickou perspektivou, tj. změnami ve společnosti.

LITERATURA

- [1] Schwabik, Š.: *Přestane školáky děsit matematika?* In: Učitel matematiky, 3. roč. 8, 2000.
- [2] *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 26, 1994.
- [3] *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Department of Mathematics, University of Catania, 1995.
- [4] *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

- [5] Kuřina, F.: *Postavení geometrie v současném vyučování matematice*. In: Matematika, fyzika, informatika, 1. 2: roč. 6, 1996.
- [6] Kolář, I.: *Postavení geometrie v současné matematice*. In: Matematika, fyzika, informatika, 5, roč. 5, 1996.
- [7] *Eukleidovy Základy*. JČMF, Praha, 1906.
- [8] Hilbert, P.: *Grundlagen der Geometrie*. Berlin, 1899.
- [9] Dieudonné: *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris, 1968.
- [10] Hošpesová, A. – Divíšek, J. – Kuřina, F.: *Svět čísel a tvarů*. Prometheus, Praha, 1996.
- [11] Matolín, A.: *Početnice pro školy obecné*. C. K. školní knihosklad, Praha, 1913.
- [12] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia, stereometrie*. Prometheus, Praha, 1995.
- [13] Kočandrlé, M. – Boček, L.: *Matematika pro gymnázia, analytická geometrie*. Prometheus, Praha, 1995.
- [14] Tymoczko, T.: *New directions in the philosophy of mathematics*. Birkhäuser, 1986.
- [15] Bruner, J.S.: *Vzdělávací proces*. SPN, Praha, 1965.
- [16] Kuřina, F.: *Transformační pojetí školské geometrie a konstrukční přístupy k vyučování matematice*. In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 1999.
- [17] Hejný, M. – Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*. In: Matematika – fyzika – informatika, č. 7, 1998.

FROM BUILDING BLOCKS TO MATRICES

Graham H Littler

INTRODUCTION

In 1995 I gave a plenary lecture at the SEMT Conference entitled ‘Geometry for the Teacher Education Student’ (SEMT 95, Charles University). This paper particularly related to the teaching of Geometry in the Elementary school and attempted to promote a cohesive policy dependent upon a clear conceptual development towards this subject. One of the main reasons for this approach was, in the United Kingdom at that time, isolated parts of the range of topics suitable for the elementary pupils were chosen at random. Thus the pupils did not get the logical development which would give them a suitable under-pinning for the work which they would do in the secondary school.

I will give the salient points of that paper again briefly so that you will be able to follow my thoughts more clearly as I approach the work in geometry which could be done in the secondary school.

PRE-SCHOOL AND EARLY YEARS DEVELOPMENT

All the objects which children play with before they come to school are three-dimensional and therefore my belief is that we should try to build on that basis as teachers and not introduce two dimensional forms to the children too early. There is much art education research available on children’s perception of shapes and it is thought that many misconceptions have been engendered because most young children represent what they see in a two dimensional form and therefore they should be introduced to two dimensional shapes first. The main reason for their representation in this form is because the concept of perspective is only achievable at a much later stage.

If you watch children playing with building bricks the first stage is probably trying to build towers so that they can knock them down.

Later on they try to build houses, castles etc. and here you can see them estimating what size of block they need to put across a doorway, what will be the right shape for a corner or 'piece of furniture'. They are developing their manipulative skills and more importantly the children are using their imagination. These learning situations need exploiting as soon as the children come to school.

We need to provide lots of material with which the children can build objects. Cubes, cuboids, cones, cylinders, prisms and spheres. Use of the correct language for the shapes by the teacher is important to improve the children's vocabulary and for them to have the benefit later on in their school life of not having to learn new names for the shapes. Much work can be done in classification at this stage and in simple counting games. 'Which shapes have got a curved surface?' 'How many faces has this shape got?' Obviously very simple relationships can be determined from the children with questions such as 'Are any of the edges of this shape the same length?'

An activity which I have found very beneficial from a number of points of view is 'junk modelling'. For this I collect, and ask the children to bring, lots of empty packages, cylinders, and unusual packaging. I ask the children to make a large object using their imagination. So often we get 'prehistoric animals', 'rockets', 'robots' and some objects which defy description. The purpose though is to get the children to think about what shapes will generate the object they have in their mind, to think about the sizes of boxes, cylinders etc. they will need to make their object realistic and for them to enjoy what they are doing.

All these activities lend themselves to discussion, getting the children to talk about what they have made the shapes they have used and finally to look at the shapes at the ends of the objects which leads on to them concentrating on the two-dimensional forms they see. Most of these will be squares, rectangles, triangles and circles but your 'junk' might include shapes which give quadrilaterals, pentagons and hexagons.

Once the move to two dimensions has been achieved then work on plane symmetry can take place. This can be done by getting the children to make 'paint-blob butterflies' by putting a blob of paint on the fold of a piece of paper and getting the children to spread the paint out after folding the paper together. Also the use of metallic mirrors to complete half-drawn shapes can be used and the idea of pricking through a pattern drawn on one half of a folded sheet of paper to get the whole pattern. The

environment of the classroom also makes a good source of symmetrical objects. All these examples of symmetry can be put into a scrapbook.

THE MIDDLE YEARS

For years I have used a very simple piece of apparatus to help me with the next stage of development of geometry, that of **two dimensional shapes**, called the geoboard. This consists of a small block of wood 10–15 cm square and approximately 1 cm deep into which nine nails have been placed at the intersections of a 2×2 lattice. The whole idea of the apparatus is for two pupils to share and experiment, one making a shape by means of placing a rubber band around certain of the pins whilst the other records this on squared paper. They then change jobs for the next shape.

This exercise is not as haphazard as it might seem! There is a rule – the elastic band cannot be crossed. This avoids pupil making two triangles by crossing the bands. A series of exercises then develops the ideas of plane shapes. The first is simply to find as many shapes as possible, then to classify them in some way, to name them and finally to find out how many DIFFERENT triangles, quadrilaterals, pentagons, etc. they can make on the 9-pin board. This last exercise brings in the concept of congruence since I define two shapes being NOT different if they can cut out the shapes and can fit one exactly on top of the other. Other tasks which can be done at this stage is to look for special features, such as ‘Which triangles have two sides equal?’ ‘Can you make a triangle with all its sides equal on the 9-pin board?’ An interesting feature, which has occurred on several occasions, is that children have given the name ‘square angle’ to an angle of 90 degrees. So they have looked for shapes in which there are ‘square angles’. More suggestions for work with geoboards are given in the earlier paper.

One final point before leaving this particular aspect is that I have found it very useful to discuss with children whether they could make a two-sided or one-sided shape on the geoboard. Some very interesting points have been made. Similarly asking whether they could imagine shapes with more sides than they have been able to make on the 9-pin board. At this stage some relaxation can come into the work by getting the children to make up pictures or to find which shapes tessellate using sticky gummed shapes similar to ones they have found.

Again as earlier **symmetry** can be brought into the work at this stage. Can they classify the triangles or the four-sided shapes by their symmetries? This work could introduce the ideas of more than one line of reflective symmetry and also rotational symmetry. It is important to develop observational techniques at this stage and I have found that using the alphabet letters to be a good source of material. Pupils can find those letters that have reflectional symmetry and those which do not. If you then give them the letters 'HONIS' to write out and then ask them to turn their paper upside down to see what they get, the answer which comes back is 'they look the same'. Then you can identify that three of the letters have two reflectional symmetry lines whilst the other two have none – but they do have rotational symmetry. This simple exercise leads back to the geometrical shapes to see which shapes have reflectional symmetry only, which have rotational symmetry only and which have both. An environmental investigation looking for different symmetries can be done at this stage.

The next task is to develop the concept of **angle**. Up to this stage the children have dealt with 'square-angles' and if you get the children to fold a piece of paper once and then fold the fold on to itself you make the perfect right-angle. So the children can check what angles in the classroom are right-angles, which are less and which are more. I use a historical 'story' to develop the idea of there being 360 degrees in a complete turn. Basically the idea of being able to divide the circumference of a circle by its radius six times and the Babylonians dividing each of these arcs by their number base to give 360 points for their mariners to navigate by. You can then impose the modern compass on this and the children will see that there are four 'square angles' where the compass lines meet each of 90 degrees. Practical exercises can then be given which allow the children to consolidate this knowledge in an interesting way.

I then develop the knowledge of the **angle sum of a triangle**. The pupils draw a triangle on a piece of paper and cut it out. They colour or mark the three corners and then TEAR these off the triangle. On a drawing of the compass points they stick the three angles the edge of one of then starting on a compass line, and then they see where the final edge ends. So if they started on the west line, the final edge will be on the east line. 'How many degrees do you turn through if you start facing the West and finish up facing the East?' Answer: 180 degrees. I have found

this method far more convincing for pupils rather than then trying to master the protractor.

Once this has been established, then you are able to find angle sums of polygons and which regular polygons tessellate and which do not by means of the real-life applied mathematical fact of **rigidity**. I use an apparatus called ‘geometrical strips’ for this. These are plastic strips of various lengths which can be joined together by brass stud clips. The class of children make 3, 4, 5, 6 ... sided shapes with the strips and I ask them to hold them up using on one of the brass studs. What happens? Only one shape remains the same, the triangles, all the others collapse. The use of this phenomenon in real life can be shown through pictures of bridges and other structures. The question then arises how can we make the other shapes rigid? Make them comprise of triangles is often suggested and here they begin an experiment which can sometimes lead to a generalisation. The experiment is simply to make polygons and then to make them rigid but not over rigid, then complete the table:

Number of strips used	Number of Triangles when rigid	Sum of Interior angles	Size of each Interior angle of regular Figure	Does this shape Tessellate?
3	1	1×180	60	Yes, $6 \times 60 = 360$
4	2	2×180	90	Yes, $4 \times 90 = 360$

And so on for 5, 6, 7, ... sided polygons.

I have had 10 year old children tell me in response to the question ‘What if I did not know how many sides the polygon had?’ – ‘just count the number of sides, there are always two less triangles than the number of sides, then multiply this number by 180 degrees. If you want to find the size of each angle of the regular figure divide this number by the number of sides!’ They could not express it in algebraic terms but they could explain the generalisation in words. A further exercise with more able children is to get them to see whether they can tessellate with irregular triangles or quadrilaterals. Or could they find a pentagon which would tessellate?

At this stage the work can go back to **three-dimensions**. I would advocate again a practical approach. Skeleton three-dimensional models can be easily made from straws and pipe cleaners. This is a very inexpensive way of building both regular and irregular solids and of course,

if the pupils record the number of edges, vertices and faces for each solid, they can be asked to look for the relationship between these three variables. This will give the Euler relation.

ELEMENTARY/SECONDARY STAGE

A second investigation is to look at the possible nets which make up certain **threedimensional shapes**. ‘How many different nets are there which make up a cube from six squares?’

This form of exercise can well form a challenging intellectual investigation if it is extended into ‘packaging’. The pupils open out commercial packaging to find the net for a packet of cornflakes, say. Why is the package this particular shape? What factors do the companies have to take into account when designing the package? Could you design a package which would hold the same quantity of cornflakes, be as cost effective in terms of cost of material and protect the goods inside to the same extent as the original package? I believe strongly that the more we can bring real-life into all our mathematics then this makes the subject far more meaningful to the pupils.

Envelopes are not often taught in school and yet there are several interesting projects which can be done using them. For instance, for pupils who are having difficulties with number bonds, get them to draw two lines which meet and to mark off $(n - 1)$ points from where they cross, numbering each point. Then the task for the pupils is to join with a straight line the pairs of points, one on each line, such that their sum is n . The reader can determine what is the name of the envelope produced! The original ‘base’ lines need not be straight and the pupils can make up pictures but joining them together. Again having a 10 cm radius circle marked with 36 points at 10 degree intervals on its circumference will aid arithmetical work considerably. Number the points either 0 to 35 or 1 to 36. In this case the pupils are asked to map point n on to $2n$, $n \rightarrow 3n$, $n \rightarrow 4n$ etc. The pupils will be surprised to find a relationship between the multiplication table and the number of cusps formed. This work also brings in the idea of ‘clock/residue arithmetic’.

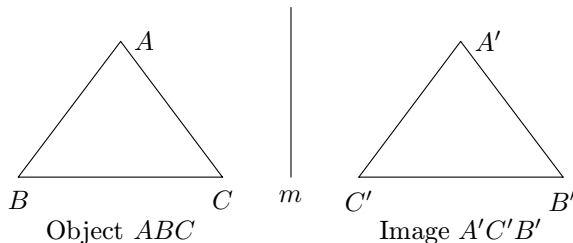
SECONDARY STAGE

I want to link the work in secondary school particularly with the work suggested above for the elementary school. Therefore I am not going to

develop Euclidean ideas of geometry or the standard geometrical constructions but rather build on the work which the pupils will have done particularly in their work on symmetry. I hope to develop some ideas on **transformational geometry** and link these to the ideas of the algebra of **matrices** acting as operators.

During their work on symmetry the pupils will have met the ideas of reflectional and rotational symmetry. At this stage I want to look at what is meant by these and to add the additional transformation of translation, thus generating the transformation geometry isometries, that is, those transformations which leave the image of any object unchanged in terms of lengths. The image is congruent to the object in Euclidean terms.

The basic property of a reflection is that any point in the object, O is reflected to a point in the image, I , such that the line OI is the perpendicular bisector of the line of reflection m . However the image of an object following a single reflection reverses its orientation and so the image is 'indirect'. In practical terms, triangle ABC would have to be flipped over to get triangle $A'C'B'$.

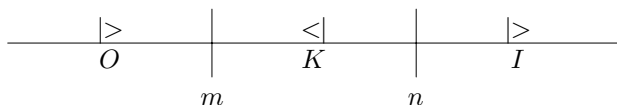


A rotation moves every point in an object through a given angle β about a fixed point R . This means that the image is 'direct'.

Similarly when a translation is applied to an object then every point in the object is moved a given distance d , in a given direction β .

I am sure that these simple facts are well known to everyone but I want to look at what happens if we have more than one reflection or more than one rotation or translation to see whether we can link any of these transformations to one another.

Let us take the easiest of all pairings, the idea of two parallel mirrors, m and n .



If my object is a flag pointing to the right, the first mirror m changes this to a flag pointing to the left and the second mirror n changes this again to a flag pointing to the right. So the object and the final image are identically orientated. Every point in the object has moved a given distance, which is twice the distance between the mirrors, in a given direction. Hence the effect of reflecting in two parallel mirrors is a translation of twice the distance between the mirrors in a direction perpendicular to the mirrors. Try placing the object between m and n or to the right of n but keep the order of reflections the same, that is m first and then n . What do you find?

The mirrors might not be parallel but inclined and would meet if extended in a point. Might I suggest the reader draws this situation for themselves and simply using the property of a reflection stated above determine where the final image of an object is when placed either between the mirrors or on either side. You should find that the effect is that of a rotation of twice the angle between the mirrors whose centre is where the two mirrors meet. The direction of turn is determined by the order in which you take the mirrors.

There are two special cases – the first is what happens if you reflect twice in the same mirror? If you look at the diagram above, reflecting O in m gets the image at K , now reflect this image in m again and you will return to O . Thus in group terms reflection twice in the same mirror gives you the identity. The second case is when the two mirrors are at right angles. I have intimated above that this will produce a rotation of twice the angle between the mirrors about the point where they meet. So in this particular case we get a turn of 180 degrees or half turn about the point of intersection of the mirrors. Bright pupils might be asked to determine the general cases for n parallel mirrors or n passing through a point when n is odd or even. Overheads of all these cases will be shown at the conference.

Finally in the transformational geometry section, there are two further cases which are worth exploring. The first is relatively simple and is the case of three mirrors two of which are parallel and the third perpendicular to the parallel mirrors. No matter which order you take the mirrors,

provided that the order in which you take the parallel mirrors remains the same, you will end up at the same point. The movement required from the object to the final image is equivalent to a translation of twice the distance between the parallel mirrors, together with a reflection in the third mirror. This transformation is known as a ‘glide-reflection’ and is used considerably by designers of wall-papers etc.

The final case which involves three mirrors which form a triangle requires the use of the corollary of several of the lemmas detailed above. For instance, any translation can be replaced by two mirrors which are perpendicular to the line of translation and their distance apart half the translation. Similarly any rotation can be replaced by two mirrors each of which pass through the centre of rotation and are inclined to one another at an angle equal to half the rotation. By applying the lemmas and the corollaries it can be shown that any three mirrors which form a triangle can be reduced to a glide reflection. Similar methods can resolve any combination of transformations such as two rotations about different centres or a translation followed by a rotation. This last example models work which is sometimes done to make a sharp bend in the road more safe. I hope to show you step by step reduction of some of these examples in my presentation.

This work can be linked to matrix algebra to show your pupils how matrices work as operators. There are two basic ways of approaching this work, the first is to use the basic 2×2 matrix operator $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ on the general co-ordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ to give the general point $\{(ax+by), (cx+dy)\}$. Diagrams can then be drawn for the image of $P(x, y)$ when it is reflected in the lines $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ and $y = x$, followed by rotating $P(x, y)$ through 90, 180, 270 and 360 degrees. Each case will give different values for a, b, c , and d from the equivalence relationships and hence eight matrix operators will be formed. The alternative way is to see what happens to the unit vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ when you perform the above operations on them. The answers give the two columns necessary for the 2×2 matrix.

Pupils can then use these matrices to check and prove transformations they can draw on squared paper. For instance does a rotation matrix operator for 90 degrees followed by one for 180 degrees give the matrix

for a rotation of 270 degrees? By multiplying the matrix which reflects a point in $x = 0$ by one which reflects in $y = 0$ do you get the matrix which rotates any point through 180 degrees about the origin? Many interesting exercises can be given using just these eight matrices. It should be noted that the determinant of a matrix would be positive if the image is direct and negative if indirect. All the above matrices should give a determinant of either +1 or -1. If enlargements are used then the determinant gives the multiplying factor for the new area. More advanced students can determine the matrices which will rotate any point about the origin through ω degrees or reflect in the general line through the origin, $y = mx$.

Translations cannot be undertaken using the 2×2 matrix form. To use matrices for translations you have to work on the $z = 1$ plane with the general co-ordinate $(x, y, 1)$ and the 3×3 matrix $\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

The eight original matrices obviously form the symmetry group for the square, however we have found it better to wait until sixth-form work at least before introducing group structures to pupils.

One aspect of this work which the pupils have enjoyed, has been the ability to demonstrate that their work is correct by drawing. This has given considerable confidence to many pupils and a relevance which has otherwise been missing.

LITERATURA

- [1] Littler, G.H.: *Geometry for the Teacher Education Student*. SEMT 95 Proceedings, Charles University, 1995.
- [2] Glenn, J. (Editor): *Children Learning Geometry*. Harper & Roe, London, 1979.
- [3] *Mathematical Development, Primary Survey Report No 2*. HMSO, London, 1981.
- [4] Fletcher, T.J. (Editor): *Some Lessons in Mathematics*. ATM, Cambridge University Press, 1970.
- [5] Thwaites, B. (Editor): *School Mathematics Project*. Cambridge University Press, 1971-1980.
- [6] Jager, M.: *Transformational Geometry*. Collins, London 1965.

ICME 9 – THE 9TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION

Jarmila Novotná

I join you in recognizing and celebrating mathematics as a central part of human culture – for its applications in science and society, for the power and beauty of its ideas and methods of reasoning, and for its enrichment of the human spirit.

*Z pozdravu amerického prezidenta Billa Clintona
zaslaného ICME 9*

ÚVOD

Snad ve všech vědeckých oborech se dnes rozšiřuje možnost seznamovat kolegy s výsledky vědeckého výzkumu na národní i mezinárodní úrovni. Stále stoupající počet elektronických diskusních skupin by mohl vést k závěru, že tradičním setkáním na konferencích a kongresech bude v brzké době odzvoněno. Ale skutečnost je jiná. Osobní setkání a diskuse o společných problémech a možnostech spolupráce je prozatím nenahraditelná. Každý vědecký obor má některé mimořádně významné světové události, které se postupně staly základními konferencemi daného oboru. V oboru didaktika matematiky je takovou nejvýznamnější událostí *International Congress on Mathematical Education ICME*, který se koná vždy jednou za čtyři roky. Je organizován ICMI (*International Committee for Mathematics Instructions*). Letos se ve dnech 30. 7.–6. 8. 2000 v Japonsku, Tokio/Makuhari Messe, konal již devátý kongres (ICME 9).

Program kongresů ICME je vždy velmi bohatý a různorodý. Do základní programové nabídky ICME 9 lze zahrnout Plenary a Regular Lectures (plenární přednášky), Working Groups for Action a Topic Study Groups (pracovní skupiny), International Round Table (mezinárodní kulatý stůl), Short Presentations (krátká sdělení doplněná postery). Program byl obohacen dalšími aktivitami, jako např. Report Sessions on

ICMI Studies, Sessions for Affiliated Study groups, Workshops, National Presentations a různými výstavami. Lze konstatovat, že každý z více než 2 000 účastníků z celého světa měl nejen možnost seznámit se s nejnovějšími trendy a výsledky v oboru didaktika matematiky, ale také informovat o dění v tomto oboru ve své zemi a o svých vlastních výsledcích a oblastech zájmu. Rozmanitostí programové nabídky se ICME 9, stejně jako předchozí kongresy, stal základem pro získání informací, ale i pro výměnu zkušeností a navázání řady nových spoluprací v mezinárodním měřítku.

Oficiálním jazykem kongresu byla angličtina, vzhledem k tomu, že se kongres konal v Japonsku, byly Plenary Lectures a vybrané Regular Lectures simultánně tlumočeny do japonštiny.

ICME 9 se konalo v Nippon Convention Center, což je mezinárodní konferenční centrum ve veletržní oblasti Makuhari poblíž Tokia, a v Chiba Institute of Technology, což je soukromá univerzita sídlící poblíž Makuhari. Doprava mezi oběma kongresovými lokalitami byla zajišťována kyvadlovou autobusovou dopravou. Mimořádně kvalitní organizační zajištění kongresu, kterým jsou Japonci světově proslulí, významně přispělo k celkovému úspěch celého kongresu.

Počet účastníků kongresu (2 069 účastníků a 231 doprovázejících osob) byl nižší než na předchozích ICME, což bylo dáno hlavně tím, že cestování do Japonska i náklady na ubytování a stravování byly velmi vysoké.

INTERNATIONAL ROUND TABLE

Předmětem Mezinárodního kulatého stolu byla “Role matematiky ve vzdělání pro 21. století”. Byl organizován formou devadesátiminutové videokonference. Moderátorem byl Peng Yee Lee (Singapur). Aktivně vystupovali další tři panelisté – Hyman Bass (USA), Gilah Leder (Austrálie) a Akihiro Nozaki (Japonsko) – a tři “vzdálení přispěvatelé” – Bruce Albert (USA), Akito Arima (Japonsko) a Tin Heng Wee (Singapur).

PLENARY LECTURES

Do programu ICME 9 byly zařazeny čtyři hodinové PL:

- Mogens Niss (Dánsko): Key Issues and Trends in Research on Mathematical Education (Klíčové otázky a trendy výzkumu v didaktice matematiky)

- Hiroshi Fujita (Japonsko): Goals of Mathematical Education and Methodology of Applied Mathematics (Cíle matematického vzdělávání a metodologie aplikované matematiky)
- Erich Ch. Wittmann (Německo): Developing Mathematics Education in a Systematic Process (Rozvíjení didaktiky matematiky v systematickém procesu)
- Terezinha Nunes (Brazílie/Velká Británie): How Mathematics Teaching Develops Pupils' Reasoning Systems (Jak vyučování matematice rozvíjí systémy argumentace žáků)

Bylo by opravdu obtížné stanovit, která z přednášek byla nejlepší. Každá z nich byla velmi kvalitní, každá přinesla řadu skvělých myšlenek a každá oslovila účastníky svým způsobem. Prozatím byly publikovány čtyřstránkové abstrakty těchto přednášek [1].

REGULAR LECTURES

Na ICME 9 bylo těchto prestižních zvaných přednášek 54. V programu byly zarazeny v šesti skupinách (většinou po deseti, jednou devět a jednou pět s ním). K jejich přednesení byli pozváni odborníci z celého světa. Dvoustránkové abstrakty uveřejněné v [1] dostali účastníci kongresu při prezentaci. Vzhledem k pestrosti témat, kterým se jednotliví přednášející věnovali, to bylo velkou pomocí při rozhodování, které z přednášek se zúčastnit.

WORKING GROUPS FOR ACTION (WGA) A TOPIC STUDY GROUPS (TSG)

WGA můžeme definovat jako skupinu skládající se z těch odborníků a účastníků kongresu, kteří mají chuť společně přemýšlet a hledat řešení a možnosti pro zlepšení matematického vzdělávání v jednotlivých oblastech. Pro každou WGA byla vyhrazena tři 120-minutová zasedání, při nichž se účastníci mohli dělit dále do podskupin podle jejich zájmu. Shrnující zprávy o jednáních jednotlivých WGA byly předneseny posledního dne kongresu ve dvou samostatných plenárních zasedáních. Na ICME 9 pracovaly tyto WGA:

WGA1 Mathematics Education in Pre- and Primary School

WGA2 Mathematics Education in Junior Secondary School

WGA3 Mathematics Education in Senior Secondary School
 WGA4 Mathematics Education in Two-Year Colleges and Other Tertiary Institutions
 WGA5 Mathematics Education in Universities
 WGA6 Adult and Life-long Education in Mathematics
 WGA7 The Professional Pre- and In-service Education of Mathematics Teachers
 WGA8 Research, Practice and Theory of Mathematics Education
 WGA9 Communication and language in Mathematics Education
 WGA10 Assessment in Mathematics Education
 WGA11 The Use of Technology in Mathematics Education (Computers, Calculators, IT Media)
 WGA12 The Social and Political Dimensions of Mathematics Education
 WGA13 History and Culture in Mathematics Education

TSG byly tvořeny skupinami lidí skládajícími se ze specialistů nebo účastníků, kteří mají zkušenosti v daném oboru, přejí si představit nebo vyměnit výsledky včetně výsledků z praxe, a z těch účastníků, kteří mají zájem na rozvoji daného oboru a/nebo se chtějí seznámit s dalšími novými poznatky z dané oblasti. Každá TSG měla k dispozici dvě devadesátiminutová jednání. Žádná TSG se nedělila na podskupiny. Na ICME 9 pracovaly tyto TSG:

Na ICME 9 pracovaly tyto TSG:

TSG1 The Teaching and Learning of Algebra
 TSG2 The Teaching and Learning of Geometry
 TSG3 The Teaching and Learning of Calculus
 TSG4 The Teaching and Learning of Statistics
 TSG5 The Teaching and Learning Aids and Materials (Hands-on) in Mathematics Education
 TSG6 Distance Learning in Mathematics Education
 TSG7 The Use of Multimedia in Mathematics Education
 TSG8 Vocational Mathematics education
 TSG9 Mathematical Modeling and Links between Mathematics and Other Subjects
 TSG10 The Trends in Mathematics and the Mathematical Sciences; Their Reflections on Mathematical Education
 TSG11 Problem Solving in Mathematics Education

TSG12 Proof and Proving in Mathematics Education
TSG13 Mathematical learning and Cognitive Processes
TSG14 Constructivism in Mathematics Education
TSG15 Mathematics Education for Students with Special Needs
TSG16 Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students
TSG17 Mathematics Education and Equity
TSG18 Mathematics Competitions in Mathematics Education
TSG19 Entrance Examination and Public Examinations in Mathematics Education
TSG20 Art and Mathematics Education
TSG21 Ethnomathematics
TSG22 Topics in Mathematics Education in Asian Countries
TSG23 TIMSS and Comparative Studies in Mathematics Education

SHORT PRESENTATIONS

Na konferenci bylo představeno celkem 368 krátkých sdělení od autorů ze 44 zemí. Z nich 328 bylo doplněno postery, 13 videozáznamy a 27 počítačovými ukázkami. Na omezeném prostoru tohoto příspěvku je nelze podrobněji představit. Uvedeme proto pro zajímavost jen přehled počtu příspěvků podle zemí. Abstrakty jednotlivých příspěvků jsou publikovány v [2]¹.

ÚČAST ČESKÉ REPUBLIKY NA ICME 9

Vyslání národní delegace na takovou událost je významným počinem vědecké komunity daného oboru. Jsme rádi, že od roku 1992 (ICME 7) se to didaktikům matematiky v naší zemi daří, i když je účast vždy finančně náročná. Česká delegace na ICME 9 v Tokiu měla čtyři členy, což je méně než na ICME 8 (1996, Sevilla, Španělsko – 11 účastníků z ČR). Byli jimi RNDr. Marie Kubínová, CSc., a doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc. (UK – PedF Praha), PaedDr. Alena Hošpesová, Dr. (JU, České Budějovice) a prof. RNDr. Ivan Mezník, CSc. (VUT, Brno).

Významným oceněním výsledků české didaktické školy je fakt, že k jedné z Regular Lectures byla pozvána doc. Novotná. Přednesla před-

¹Publikace [1, 2] jsou k dispozici na Pedagogické fakultě v Praze na katedře matematiky a didaktiky matematiky.

Argentina	2	Austrálie	6	Bělorusko	1
Belgie	3	Brazílie	13	Bulharsko	1
Česká republika	5	Čína	48	Čína – Hong Kong	14
Dánsko	2	Egypt	3	Filipíny	2
Francie	2	Holandsko	3	Indie	1
Indonésie	1	Irán	2	Irsko	1
Izrael	4	Japonsko	165	Jihoafrická republika	5
Kamerun	1	Kanada	2	Kolumbie	1
Korea	5	Maďarsko	1	Malajsie	2
Německo	9	Pakistán	1	Polsko	2
Portugalsko	3	Rumunsko	3	Rusko	4
Slovensko	1	Španělsko	7	Švédsko	2
Švýcarsko	1	Tádžikistán	2	Uganda	1
Ukrajina	6	USA	15	Velká Británie	11
Venezuela	3	Zimbabwe	1		

nášku s názvem *Students' Levels of Understanding of Word Problems*, která vzbudila mezi účastníky velký zájem a byla velmi pozitivně přijata. Bylo to poprvé v historii ICME, že byl k přednesení Regular Lecture pozván někdo z České republiky.

Kromě této přednášky přispěly A. Hošpesová, M. Kubínová a J. Novotná (spolu s doktorandy v oboru didaktika matematiky) do programu ICME 9 ještě dalšími příspěvky do programů WGA, TSG i do Short Presentations.

Součástí programu ICME 9 bylo také Mini-Symposium on Mathematics Education Journals, kde byla k vystoupení pozvána J. Novotná. Její příspěvek měl název *How the Readers Influence Journal Content*

VÝZNAM ÚČASTI NA ICME

Jak už bylo řešeno v úvodu k tomuto článku, mají kongresy ICME mezi konferencemi z oblasti didaktiky matematiky zvláštní postavení. Je to dáno hlavně jeho velikostí a tím, že se ho zúčastňují zástupci většiny zemí světa. Jak je zřejmé již z přehledu programu ICME 9, probíhá současně větší množství akcí. Pro čtyřčlennou delegaci z České republiky

nebylo možné, aby se každé z nich zúčastnil aspoň jeden odborník z České republiky. Snažili jsme se nevynechat aspoň ty akce, které měly vysokou odbornou úroveň.

Účast zástupců České republiky na ICME 9 byla velmi úspěšná. Byly navázány nové spolupráce na mezinárodních výzkumech. Výsledkem těchto spoluprací jsou také předjednané výměnné studijní i přednáškové pobyty, vzájemné informování se o výsledcích výzkumů a výměna materiálů. Příznivý ohlas na vystoupení našich účastníků vedl ke zvýšenému zájmu odborníků mnoha zemí o konference SEMT 01 a CERME 2 pořádané katedrou matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy – Pedagogické fakulty v roce 2001 v České republice. Účastníci projevili zájem také o Letní školy Didaktiky matematiky, které jsou dvakrát ročně pořádány v Choceradech.

Další informace o kongresu mohou zájemci najít na webovské stránce kongresu na adrese <http://www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9>.

LITERATURA

- [1] *Abstracts of Plenary Lectures and Regular Lectures*. ICME 9, July 31 – August 9, 2000, Tokyo/Makuhari, Japan. Ed. H. Fujita, Y. Hashimoto, T. Ikeda.
- [2] *Short Presentations*. ICME 9, July 31 – August 9, 2000, Tokyo/Makuhari, Japan.

VELKÁ FERMATOVA VĚTA A NEJEDNOZNAČNOST ROZKLADU ČÍSLA NA PRVOČINITELE

Ladislav Skula

1 VĚTA O JEDNOZNAČNOSTI ROZKLADU CELÉHO ČÍSLA NA PRVOČÍSLA

Veškerá aritmetika okruhu $\mathbb{Z}$ celých čísel je založena na tzv. *základní větě celých čísel*:

„Každé celé číslo větší než 1 se dá jednoznačně vyjádřit (až na pořadí) jako součin konečně mnoha prvočísel.“ [2, Ch. I, 7]

Důkaz této věty je založen ve své podstatě na tom, že množina přirozených čísel je dobře uspořádaná. Z věty vyplývá, že základním kamenem aritmetiky přirozených čísel je pojem prvočísla.

*Prvočísl*o je přirozené číslo větší než 1, které má za kladné (celé) dělitele jen 1 a sebe sama. Např. množina prvočísel menších než 20 je rovna množině čísel $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Základní věta celých čísel byla již známa ve starověku, jakož i důkaz tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho. Tento důkaz pochází od Eukleida a je veden metodou sporu. Eukleidés předpokládal, že existuje jen konečně mnoho prvočísel: $p_1, p_2, \dots, p_n$ (n př.č.) a uvažoval přirozené číslo $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Protože N není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, \dots, p_n$, nemá jiné dělitele než 1 a sebe sama. Je tedy také prvočíslem, které ale neleží v množině všech prvočísel $\{p_1, \dots, p_n\}$, což je spor.

Eukleidův důkaz je velmi elegantní, jednoduchý a poučný, možno na něm pěkně demonstrovat metodu nepřímého důkazu, tzv. metodu sporem. V současné době je známo více důkazů o nekonečnosti mnoha prvočísel [7, Ch. I], žádný z nich není však tak jednoduchý jako Eukleidův.

Základní větu celých čísel můžeme také použít k řešení diofantické rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Diofantické rovnice jsou rovnice, u kterých hledáme jen celočíselná řešení. Trojice (x, y, z) přirozených čísel vyhovující uvedené rovnici, se nazývá *pythagorejská trojice*. Nejznámější pythagorejskou trojicí je trojice $(3, 4, 5)$ a trojice $(5, 12, 13)$. Tyto pythagorejské trojice byly známy již starým Sumerům spolu s některými dalšími, kteří je používali ve stavebnictví a zeměměřičství pro konstrukci pravého úhlu. Všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ jsou dána následující větou:

Věta (*o pythagorejských trojicích*). Řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ přirozenými čísly x, y, z , která jsou nesoudělná a x je sudé, je dáno tzv. „indickými formulemi“:

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2,$$

kde m, n jsou nesoudělná přirozená čísla různé parity a $m > n$.

2 FERMAT

Pierre de Fermat se narodil 20. srpna 1601 ve městě Beaumont-de-Lomagne v jihozápadní Francii a zemřel v roce 1665. Ve své době patřil k nejslavnějším matematikům v Evropě. Stal se známým a slavným svými výsledky v teorii čísel, analytické geometrii, počtu pravděpodobnosti a dospěl až k základům diferenciálního počtu.

Fermat jako matematik byl čistý amatér, který byl často nazýván „kníže amatérů“. Povoláním byl právník a pracoval jako soudce v Toulouse. Matematice se věnoval ve svém volném čase. Jedním z jeho dalších koníčků bylo básnictví a řecká filologie.

Fermat žil a pracoval daleko od Paříže vzdálen od tehdejší špičkové matematické společnosti zcela izolován. Jeho matematické výsledky se šířili v tehdejší matematické světě prostřednictvím jeho korespondence s jinými vědci a pomocí různých pojednání, které kolovaly v matematické veřejnosti v rukopisné formě.

Z matematických oblastí byl Fermat nejvíce zaujat teorií čísel, která se zabývá vlastnostmi celých čísel, resp. čísel přirozených. Základní vlastnosti přirozených čísel byly obsaženy v třinácti knihách starořeckého matematika Diofanta, který toto dílo nazval *Aritmetika*. Bohužel z těchto třinácti knih se zachovalo pouhých šest. Fermat studoval tyto knihy v latinském překladu řeckého originálu provedeného Claudem Gasparem Bachetem de Méziriac. Stránky Bachetova vydání Aritmetiky měly velmi široké okraje, na které si Fermat psal své poznámky.

Na straně, která se zabývala Pythagorovou rovnicí, uvažoval Fermat rovnici

$$x^n + y^n = z^n, \text{ kde } n \text{ je přirozené číslo, } n \geq 3.$$

O této rovnici pak tvrdil, že nemá celočíselné řešení (nenulové) a že má důkaz pro toto tvrzení.

„Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení, avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl.“ (Napsáno v latině.)

Toto tvrzení se nazývá v literatuře *Fermatova hypotéza* nebo také *Velká Fermatova věta*. V anglické literatuře se často používá název *Fermat's Last Theorem* (Poslední Fermatova věta). Slůvko poslední zde nemá význam poslední vyslovená věta Pierrem de Fermat, nýbrž poslední Fermatovo tvrzení, které nebylo dokázáno. Fermat totiž většinu svých matematických výsledků uváděl bez důkazu a během času byly tyto důkazy vytvořeny jinými matematiky nebo byla ukázána jejich neplatnost.

Více než 350 let trvalo než se matematikům podařilo najít správný důkaz tohoto tvrzení. Poslední článek v řetězu vět a tvrzení z různých oblastí matematiky – zejména tzv. aritmetické algebraické geometrie – byl proveden britským matematikem Andrew Wilesem na jeho přednášce 23. června 1993 v Cambridge (publikováno v článku [10]). V krátké době však se zjistilo, že tento důkaz obsahoval mezeru, která ale byla velmi rychle doplněna samotným Wilesem a jeho žákem Richardem Taylorem [11]. Wilesův důkaz používá prostředků aritmetické algebraické geometrie, což přesahuje rámec této přednášky, a pojednává o něm článek J. Nekováře [6].

3 KUMMER – NEJEDNOZNAČNOST ROZKLADU

Užitím věty o pythagorejských trojicích dokázal Fermat nemožnost řešení rovnice

$$x^4 + y^4 = z^4$$

přirozenými čísly. Odtud pak již snadno plyne, že při řešení Fermatovy hypotézy stačí se omezit na vyšetřování Fermatovy rovnice

$$x^l + y^l = z^l$$

pro prvočíselný exponent $l \geq 3$.

Ukázalo se, že je výhodné studovat tuto Fermatovu rovnici v okruhu celých čísel $Z[\zeta_l]$, kde ζ_l je l -tá primitivní odmocnina z 1, např. $\zeta_l = \cos(2\pi/l) + \sin(2\pi/l)$. Okruh $Z[\zeta_l]$ se pak skládá ze všech komplexních čísel tvaru $a_0 + a_1 \zeta_l + \dots + a_{l-2} \zeta_l^{l-2}$, kde $a_0, a_1, \dots, a_{l-2}$ jsou celá čísla (racionální). V tomto okruhu se pak levá strana Fermatovy rovnice dá rozložit na součin l faktorů a tato rovnice má potom následující tvar:

$$\prod_{i=0}^{l-1} (x + \zeta_l^i y) = z^l.$$

Tento tvar je pro vyšetřování rovnice daleko výhodnější než tvar původní.

V minulém století většina matematiků byla přesvědčena, že v okruhu $Z[\zeta_l]$ platí stejné zákony aritmetiky jako v okruhu celých čísel Z . Speciálně se předpokládalo, že v tomto okruhu platí základní věta celých čísel, přesněji věta o jednoznačnosti rozkladu prvku z okruhu $Z[\zeta_l]$ na součin ireducibilních prvků (až na pořadí a asociovanost).

Pokusů o řešení Fermatovy hypotézy bylo v minulosti nepřehledné množství. Byly to pokusy matematiků amatérů s neseriózními důkazy, ale též pokusy vážných, známých matematiků. V roce 1847 ve snaze získat prestižní cenu vypsanou francouzskou Akademií věd za vyřešení tohoto problému ohlásili téměř současně (v březnu) slavní francouzští matematikové G. Lamé a A.L. Cauchy, že jsou již blízko řešení tohoto problému a že se chystají důkaz Fermatovy hypotézy publikovat. Důkaz obou těchto matematiků byl ale založen na předpokladu, který pokládali za samozřejmý, že totiž v okruhu $Z[\zeta_l]$ platí jednoznačnost rozkladu prvku na ireducibilní prvky.

24. května došlo ale k velkému překvapení, když Liouville oznámil, že obdržel zprávu od vynikajícího pruského matematika z Breslau (nyní Vratislava) E.E. Kummera, že předpoklad o jednoznačnosti rozkladu na ireducibilní prvky v okruhu $Z[\zeta_l]$ obecně neplatí. Tento fakt ukázal pro případ prvočísla $l = 23$. V okruhu $Z[\zeta_{23}]$ existují totiž čtyři navzájem neasociované ireducibilní prvky p_1, p_2, p_3, p_4 s vlastností

$$p_1 \times p_2 = p_3 \times p_4.$$

V dnešní době je známo, že z okruhů $Z[\zeta_l]$ jen pro $l = 3, 5, \dots, 19$ platí zákon jednoznačnosti rozkladu prvku na ireducibilní prvky, které se pak nazývají *prvočinitelé* (*prime elements*).

Kummer také ohlásil, že našel způsob, jak tento defekt odstranit.

4 ODSTRANĚNÍ DEFEKTU NEJEDNOZNAČNOSTI

V dnešní době se v matematice často používá metoda, kterou se „vylepšují“ různé objekty s nějakou matematickou strukturou. Máme-li nějakou „dobrou“ vlastnost pro námi vyšetřovanou nějakou třídu objektů a některé z těchto objektů tuto vlastnost nemají, dodáme těmto objektům další prvky a tím vznikne nový objekt se studovanou strukturou, který již požadovanou vlastnost má.

Mezi nejznámější takové případy patří vytvoření komplexních čísel z objektu čísel reálných. Reálná čísla nemají vlastnost, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ má řešení, kdežto komplexní čísla tuto vlastnost mají. Dalším známým případem jsou kompaktifikace topologických prostorů nebo zúplňování uspořádaných množin.

Kummer použil tuto metodu k odstranění nejednoznačnosti rozkladu prvku okruhu $Z[\zeta_l]$ na ireducibilní prvky tím, že dodal k tomuto okruhu nové typy komplexních čísel, které nazval „*ideální komplexní čísla*“, přičemž tento nový matematický objekt vzhledem k operaci násobení komplexních čísel již splňoval zákon jednoznačnosti rozkladu prvku na ireducibilní prvky. Tyto nové ireducibilní prvky se pak nazývají *prvočinitelé*.

Tato metoda je dnes v matematice velmi běžná, nicméně v době Kummerově (kolem r. 1850) se jednalo o nový přístup k této problematice. Musíme si uvědomit, že v této době ještě nebyla známa např. teorie množin a jazyk teorie množin se ještě nepoužíval.

Tímto způsobem vyjasnil Kummer celou problematiku kolem Fermatovy hypotézy a postavil ji na solidní základy. Sám pak také přispěl použitím svých ideálních komplexních čísel, která se dnes nazývají *ideály* nebo *divizory*, k řešení Fermatova problému publikací některých kritérií.

Na základě Kummerových výsledků pak ve velké míře vznikla celá řada výsledků a kritérií týkajících se Fermatovy hypotézy. Nejznámější a snadno formulovatelné je asi Wieferichovo kritérium o Fermatově kvocientu založené na tzv. malé Fermatově větě:

Věta (*Malá Fermatova věta*). *Jestliže l je prvočíslo a celé číslo a je nedělitelné prvočíslem l , pak číslo $a^{l-1} - 1$ je dělitelné l .*

Zlomek $(a^{l-1} - 1)/l$ se pak nazývá *Fermatův kvocient prvočísla l o základu a* a značí se symbolem $q_l(a)$.

Velkým překvapením byl v r. 1909 publikovaný výsledek Wiefericha [9] o Velké Fermatově větě:

Věta (Wieferich). *Jestliže existují přirozená čísla x, y, z nedělitelná lichým prvočíslem l s vlastností $x^l + y^l = z^l$, pak prvočíslo l dělí Fermatův kvocient $q_l(2)$.*

Prvočíslo l s touto vlastností se pak nazývá *Wieferichovo prvočíslo*. V dnešní době jsou známa jen dvě Wieferichova prvočísla. První $l = 1\,093$ bylo nalezeno Meissnerem [5] a druhé $l = 3\,511$ objevil Beeger [1]. Doposud i za použití nejmodernějších metod a počítačů žádné další Wieferichovo prvočíslo nebylo nalezeno. Také Wieferichovo kritérium bylo v mnoha směrech zobecněno a zesíleno.

LITERATURA

- [1] Beeger, N.G.W.H.: *On a new case of the congruence $2^{p-1} \equiv 1(p^2)$* . Messenger of Math. 51, 1922, 149–150.
- [2] Carmichael, R.D.: *The Theory of Numbers and Diophantine Analysis*. New York, 1959.
- [3] Edwards, H.M.: *Fermat's Last Theorem, A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. Springer – Verlag, 1977.
- [4] Kummer, E.E.: *Contributions to Number Theory*. Collected Papers, Vol.I, Edited by André Weil, Springer – Verlag, 1975.
- [5] Meissner, W.: *Über die Teilbarkeit von $2^p - 2$ durch das Quadrat der Primzahl $p = 1\,093$* . Sitzungsberichte Akad.d.Wiss., Berlin, 1913, 663–667.
- [6] Nekovář, J.: *Modulární křivky a Fermatova věta*. Mathematica Bohemica č. 1, 1994.
- [7] Ribenoim, P.: *The New Book of Prime Number Records*. Springer – Verlag, 1996.

- [8] Singh, S.: *Fermat's Last Theorem*. Fourth Estate, London, 1997.
- [9] Wieferich, A.: *Zum letzten Fermat'schen Theorem*. Journal für reine u. angew. Math. 136, 1909, 293–302.
- [10] Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Annals of Mathematics 142, 1995, 443–551.
- [11] Taylor, R. – Wiles, A.: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*. Annals of Mathematics 142, 1995, 553–572.

PŘÍSPĚVKY V SEKCÍCH

Tento sborník obsahuje podkladové materiály pro diskusi v rámci konference.

Příspěvky nebyly recenzovány.

MATEMATIKA STRUKTUROVANĚ

Daniela Bittnerová, Jaroslav Vild

Abstrakt: *Popsány jsou některé aspekty tvorby matematických textů pro distanční kursy na ekonomických a technických VŠ, jíž se zabývá kolektiv autorů z TU v Liberci, z MU v Brně a ze ZČU v Plzni. Téma volně souvisí s příspěvkem E. Dvořákové Matematika distančně.*

ÚVOD

V devadesátých letech se opětovně zdůrazňuje význam celoživotního vzdělávání. Pro ně je zvláště vhodná až příznačná distanční forma vzdělávání, které nelze ovšem ztotožňovat s klasickým dálkovým studiem. Cílem příspěvku je popis tvorby učebních textů, vhodných pro samostatné (distanční) studium bez přímé pomoci učitele. Požadavky jsou náročnější než u běžně používaných učebnic či skript pro prezenční studium. Na základě dlouhodobých zkušeností (viz např. [1, 4, 7]) a po navázání kontaktů doma i v zahraničí se tým nadšenců pokusil vytvořit učebnici matematiky šitou na míru základnímu vysokoškolskému kursu matematiky v prvních ročnících na školách ekonomických a technických.

DEFINICE – VĚTA – DŮKAZ?

Běžné učebnice matematiky mají zhruba obdobnou již ustálenou stavbu. Celý text je rozčleněn do definic, v nichž jsou vymezeny důležité pojmy, následují věty, pomocné věty a jejich důsledky, kde jsou zformulovány vlastnosti těchto pojmů a vztahy mezi nimi, v drtivé většině jsou připojeny důkazy. Poté najdeme ukázková řešení příkladů (v lepším případě) a několik příkladů určených k samostatnému procvičení. Definice a věty bývají spojovány nejvýš stručným komentářem, motivace či neformální úvahy a návaznosti často zcela chybí. Pro studenty – začátečníky je čtení

matematického textu mnohdy velmi obtížné, neboť se implicitně předpokládá vyslechnutí přednášky, která většinou výrazně napomůže orientaci v textu. „Distanční“ student je zpravidla odkázán jen na literaturu či nějaký počítačový výukový program. V omezené míře navštěvuje konzultace, na nichž by se však měly řešit již konkrétní problémy. Tutor pomáhá převážně na dálku, nejvíce práce musí vykonat student sám. Nemá-li zkušenosti (z předchozího studia), jsou pro něj klasické matematické texty obvykle téměř nepřekonatelné. Autor speciální distanční literatury by měl proto volit formu volnější, s doprovodným aparátem nahrazujícím výklad učitele v hodinách matematiky. Pravidelná cvičení povinná pro prezenční formu studia v textech jsou nahrazena množstvím detailně vyřešených příkladů s podrobným komentářem a neměla by chybět sbírka příkladů s výsledky.

Na KMD FP TU v Liberci se již několik let mj. sleduje vliv struktury psaného matematického textu (grafické úpravy zdůrazňující jeho stavbu) na srozumitelnost přednášek a učebních textů pro studenty, zejména prvních ročníků. Vychází se z předpokladu, že způsob prezentace může výrazně ovlivnit efektivitu studia. Zkoumá se, zda jsou studenti vůbec schopni číst matematický text a jaké formy zápisu preferují. Zásadou je, že studijní texty by měly připomínat průběžné zapisování dobře organizovaných přednášek na tabuli.

Besedy se studenty potvrdily, že grafická úprava textu je většinou vítána – viz [3]. Přivyknutí novému zápisu ovšem vyžaduje jistý čas.

VLASTNÍ ZPRACOVÁNÍ

Při práci na distančních textech se uplatňuje zásada „méně znamená více“. Student, většinou zaměstnaný, obvykle studuje nárazově a chce počítovat pokrok. Měl by tedy mít možnost najednou nastudovat ucelenou (i když malou) část látky. Proto je vhodné text rozdělit do menších celků a na jejich začátku shrnout obsah a cíl. Přednost mají základní informace o dané problematice se spoustou příkladů a ilustrací. Důkazy vět se uvádějí obvykle jen ideově s odkazy na podrobnější (klasickou) literaturu. Postupuje se po malých krůčcích s varováním před častými a typickými chybami, podávají se rady a návody při řešení úloh, včetně připomínek „starého“ učiva. Téma se motivuje většinou nějakou praktickou úlohou. Zpracování je volnější. Počet definic a vět je redukován, jsou formulovány v běžném jazyce (vyloučeny jsou archaismy typu „budiž“ a „pakliže“).

Některé pojmy jsou zavedeny přímo ve volném textu. Kromě množství vzorově vyřešených příkladů a příkladů pro samostatné procvičování je text proložen tzv. úlohami. Jde o drobné problémy, jež by čtenáři v daném okamžiku měli být schopni rozřešit. Nezdá se, že výklad nebyl úplně pochopen a student by se měl vrátit a prostudovat jej znovu. Na konci téměř každé kapitoly je vložen kontrolní test nabízející možné odpovědi na dané otázky (správných může být i několik odpovědí).

PŘÍKLADY BĚŽNÝCH A STRUKTUROVANÝCH PASÁŽÍ

Na typických částech matematických učebnicových textů dokumentujeme některé prohřešky (závady), které mohou vést ke zbytečnému neporozumění, případně odradit čtenáře. Vyjadřujeme se k nim v připojených komentářích a formulujeme zásady pro distanční texty.

Výňatky se snažíme citovat co nejvěrněji, včetně grafické úpravy, délky a zalamování řádků. Odstraněny byly pouze evidentní tiskové chyby. Citáty jsou vyznačeny svíslou plnou čarou vlevo, navrhované obměny čárkovane.

([6]282₁₄–287¹⁴) se na téměř pěti stránkách zabývá frekventovanou a významnou tematikou, a to polynomy a racionálními funkcemi a jejich limitami v „zajímavých“ bodech. Jde o standardní učebnicový text, který se však těžko hodí pro nezkušeného čtenáře a zejména ne pro distanční formu vzdělávání.

([6]285^{11–16}) **Vady: a a a; iritující linearita**

Veta 73.2. *Nech f je racionálna funkcia $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy. Nech a je číslo, ktoré nie je z oboru definície f , t.j. $Q(a) = 0$. Potom platí: f má v a nevlastnú limitu zľava a nevlastnú limitu sprava, ak buď a nie je koreňom $P(x)$, t.j. $P(a) \neq 0$, alebo a je menejnásobným koreňom polynómu $P(x)$ ako polynómu $Q(x)$. Funkcia f má v a limitu, ak buď a je aspoň toľkonásobným koreňom polynómu $P(x)$ ako polynómu $Q(x)$, alebo ak $P(x)$ je nulovým polynómom.*

Komentář. Nepříjemně koliduje znak „a“ v roli gramatické spojky a matematického symbolu. Kurzívní provedení celé věty dále ztěžuje rozlišení významu písmene „a“ v daném místě. Nápravou může být odlišný typ písma (matematické znaky kurzívou), nebo raději použití jiného (mnemotechnického) označení. Značíme-li funkci f , pak píšme bod b , limita L . Jiný typ písma nemůže škodit. Další vadou je lineární tok textu.

Podobně unavující linearitu při vyšetřování limity racionální funkce předvádí [2, str. 129–130]. I zde by strukturace textu pomohla lépe a hlavně rychleji pochopit smysl textu. Uvedme možnou strukturovanou realizaci.

Věta: Je-li R racionální funkce, $R(x) = \frac{C(x)}{D(x)}$, kde C, D , st $D \geq 0$, jsou polynomy na $\mathbb{R}$, přičemž pro $b \in \mathbb{R}$ je

$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} R(x) &= \lim_{x \rightarrow b} (x-b)^{\kappa-\lambda} p(b)/q(b) = \\ &= \begin{cases} p(b)/q(b) & \text{pro } \kappa = \lambda; \\ 0 & > \\ -\infty & < \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} C(x) = (x-b)^\kappa p(x), \quad p(b) \neq 0, \\ D(x) = (x-b)^\lambda q(x), \quad q(b) \neq 0, \end{array} \right. \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{l} \text{násobnost } \mu \text{ kořene } b \text{ pro} \\ \text{čitatele } C \quad \text{jmenovatele } D \end{array} \right. \\ &\mu(b, C) = \mu(b, D) \end{aligned}$
--	---	--

Komentář. Bezprostřední sousedství odlišností ulehčuje jejich identifikaci.

Větu je radno shrnout do početního návodu např. ve formě dobře pamatovatelného hesla:

Limita racionální funkce v bodě $b \in \mathbb{R}$ je dána rozdílem násobností kořene b čitatele a jmenovatele a „dosazením“ čísla b (po vykrácení „obtížného“ kořenového činitele).

[6]285₇₋₃) Vada: Nestrukturovaná linearita

Věta 73.3. *Nechť f je rýdzo racionálna funkcia. Potom f má v ∞ a v $-\infty$ limitu 0, t.j. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Ak f je nerýdzo racionálna funkcia, má f v ∞ a v $-\infty$ limitu, ak sa stupne polynómov v čitateli a menovateli sebe rovnajú, a f má v ∞ a v $-\infty$ nevlastnú limitu, ak stupeň polynómu v čitateli je väčší ako stupeň polynómu v menovateli.*

Zásada: Zvýrazňování zdůrazňovaného, strukturování srovnávaného

Zdůrazňované části pasáže mají ovšem být zvýrazněny strukturně či jinak v kontextu.

Významné je rozbití klasického lineárního toku informací. Vycházíme z vnitřní struktury obsahu, kterou v textu zvýrazňujeme graficky. Za velmi vhodné považujeme např. stromové struktury, zdůrazňující paralelní alternativy v definicích či větách. Paralelizace pomocí „resp.“ či

závorkovaných alternativ (nebo dokonce jejich kombinace) je odrazující. Oblé závorky by se měly přednostně používat pro průběžné vysvětlivky (synonyma, zpřesnění apod.).

([5]150¹⁵⁻²³) Vady: resp. resp. resp.; linearizace paralel

Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je

$$(5.1.23) \quad \sin(\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle) = \cos(\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle) = \langle -1, 1 \rangle,$$

$$(5.1.24) \quad \operatorname{tg}(\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle) = \operatorname{cotg}(\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle) = \mathbb{R}.$$

Protože všechny čtyři funkce jsou v uvedených intervalech spojitě (a nekonstantní), zobrazují tyto intervaly na intervaly; krajní body obrazů jsou přitom rovny infimu a supremu příslušné funkce na příslušném intervalu. Protože minimální resp. maximální hodnotou funkce sinus (resp. kosinus) na každém z intervalů $\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle$ (resp. $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$) je -1 resp. $+1$ (sr. s (1.4.22)–(1.4.23)), platí identity (5.1.23). Protože funkce tangens (resp. kotangens) má v krajních bodech intervalu $\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle$ (resp. $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$) jednostranné limity rovné $\pm\infty$, je infimum resp. supremum obou funkcí rovno $-\infty$ resp. $+\infty$; z toho ihned plynou identity (5.1.24).

Zásada: Místo mnohostupňových číselných odkazů uvádět raději obsah. Odkazy na desetinná označení užíváme co nejméně.

Protože všechny čtyři funkce jsou v uvedených intervalech spojitě (a nekonstantní), zobrazují tyto intervaly na intervaly; krajní body obrazů jsou přitom rovny infimu a supremu příslušné funkce na příslušném intervalu. Protože minimální hodnotou fce sinus na každém z intervalů $\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle$ je -1 , maximální kosinus $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ $+1$, jak plyne z vlastností sin, cos, a tedy spojitě funkce sin, cos zobrazují své maximální intervaly monotónie na $\langle -1; 1 \rangle$. Protože funkce tangens má v krajních bodech intervalu $\langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle$, kotangens $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ jednostranné limity rovné $\pm\infty$, je infimum obou funkcí rovno $-\infty$, supremum $+\infty$; z toho ihned plyne, že tg, cotg zobrazují své maximální intervaly monotónie na celou $\mathbb{R}$.

Komentář. Bezprostřední sousedství odlišností—shod ulehčuje jejich rozpoznání.

ZÁVĚR

Problematika psaní odborných textů je nevyčerpatelná. Při oprávněně individuálních (vysokoškolských) pojetích prezentace bychom měli respektovat objektivní praktické zkušenosti. Lze pozorovat jisté rozšiřování repertoáru prezentačních prostředků – patrně vlivem (nedostatečně osvojených) editorů. Záležitost zasluhuje i nadále trvalé pozornosti.

Věnovali jsme se především matematické tematice. Sami autoři se obvykle dopouštějí prohrěšků mnohem závažnějších, než byly uvedeny, a čelí stále mnoha pochybnostem. Jistou útěchou však může být, že v jiných oblastech je situace s texty obvykle mnohem horší.

LITERATURA

- [1] Bittnerová, D.: *Matematické texty pro distanční vzdělávání*. In: Aktuální problémy distančního vzdělávání dospělých. Olomouc 1995. ISBN 80-7067-542-X.
- [2] Brabec, J. – Martan, F. – Rozenský, Z.: *Matematická analýza I*. Praha 1985.
- [3] Bittnerová, D. – Mach, J. – Vild, J.: *Úvodní anketa o strukturaci při výuce matematiky*. In: Sborník XVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Vyškov, květen 2000, s. 29–32. ISBN 80-7231-059-3.
- [4] Bittnerová, D. – Vild, J.: *Distance Principles for Full Time Studies*. VIth Czech-Polish Mathematical School. Litoměřice červen 1999. UJEP Ústí n. L. 1999. s. 191-196.
- [5] Černý, I.: *Diferenciální a integrální počet 1*. Liberec, TU 1997.
- [6] Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika I*. Bratislava, SVTL 1959.
- [7] Vild, J. – Bittnerová, D.: *Destrukce lineární struktury textů*. In: Seminář o využití výpočetní techniky na technických VŠ. Liberec 1999. s. 65–70. ISBN 80-7083-395-5.

KOMBINATORIKA V UČITELSKÉM STUDIU NA MFF UK

Emil Calda

V učebním plánu učitelského studia na MFF UK má kombinatorika dotaci 2/0 a je zařazena do 2. ročníku; je ukončena klasifikačním zápočtem. Klade si za cíl dosáhnout toho, aby studenti získali dostatečný přehled o metodách a výsledcích klasické kombinatoriky a také potřebný nadhled nad látkou, kterou budou na střední škole vyučovat. Obsahem přednášky jsou tato témata:

Kombinatorika na střední škole

Princip inkluze a exkluze

Věžové polynomy

Cesty ve čtvercové síti, vlastnosti kombinačních čísel

Dirichletův princip

Rozmísťovací úlohy

Metoda vytvářejících funkcí, vytvářející funkce pro kombinace a variace, řešení rekurentních rovnic

Ve skriptech k této přednášce (Kombinatorika pro učitelské studium, Matfyzpress, 1996) je kromě stručného výkladu teorie vyřešena řada příkladů; některé mohou sloužit i k prohloubení středoškolské výuky. Na tuto přednášku navazuje výběrový „Kombinatorický seminář“ určený studentům 3. a 4. ročníku.

Tuto základní informaci je asi vhodné doplnit nějakou ukázkou. Zvolil jsem téma, o němž se domnívám, že není příliš známé, a které se v běžně dostupné literatuře (mně známé) nevyskytuje. Jde o zajímavý způsob řešení úloh týkajících se permutací s omezujícími podmínkami – o věžové polynomy. Ukážu tento způsob na konkrétním příkladu.

Každá z princezen $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ si má za účelem ochočení vybrat právě jednoho z draků $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$, každá jiného. Máme zjistit, kolika způsoby se to dá provést, jestliže si zhýčkané princezny kladou podmínky znázorněné vyšrafovanými políčky na obr. 1 – vyšrafované

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
P_1	≡		≡			
P_2		≡				
P_3		≡	≡			
P_4				≡		≡
P_5					≡	
P_6					≡	

Obr. 1

	1	2	3	...	n
a_1	≡				
a_2		≡			
a_3			≡		
$\vdots$				$\ddots$	
a_n					≡

Obr. 2

políčko $P_i D_j$ znamená, že princezna P_i nechce draka D_j . Sítí S tvořené vyšrafovanými políčky přiřadíme věžový polynom $v(x, S)$, tj. polynom

$$v(x, S) = v_0(S) + v_1(S)x + v_2(S)x^2 + \dots + v_6(S)x^6,$$

jehož koeficienty $v_k(S)$ pro $k = 1, 2, \dots, 6$ udávají, kolika způsoby lze na políčka sítě S rozmístit k vzájemně se neohrožujících věží; pro $k = 0$ se definuje $v_0(S) = 1$. Podle definice snadno určíme, že $v_1(S) = 9$ a $v_6(S) = 0$, ale určení zbývajících koeficientů už tak jednoduché není. V tomto daném příkladu však můžeme využít toho, že síť S se dá rozložit na dvě disjunktní sítě S_1, S_2 (disjunktní sítě nemají žádný společný řádek ani sloupec); síť S_1 je tvořena devíti vyšrafovanými políčky v levém horním rohu sítě S , síť S_2 se skládá z devíti vyšrafovaných políček v pravém dolním rohu sítě S . Velice snadno se dá dokázat, že věžový polynom každé sítě, kterou lze rozložit na několik sítí disjunktních, je roven součinu věžových polynomů těchto sítí. V našem případě tak máme:

$$v(x, S) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2),$$

a protože podle definice

$$\begin{aligned} v(x, S_1) &= 1 + 5x + 6x^2 + x^3, \\ v(x, S_2) &= 1 + 4x + 4x^2, \end{aligned}$$

platí

$$v(x, S) = (1 + 5x + 6x^2 + x^3)(1 + 4x + 4x^2) = 1 + 9x + 30x^2 + 45x^3 + 28x^4 + 4x^5.$$

Proč jsme však tento polynom vůbec určovali? Protože platí věta, která se dá poměrně snadno odvodit z principu inkluze a exkluze:

Věta: Počet permutací s omezujícími podmínkami z n prvků je dán součtem

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k v_k(S) (n-k)!,$$

kde $v_k(S)$ jsou koeficienty věžového polynomu $v(x, S)$ sítě S , která znázorňuje omezující podmínky.

Počet způsobů, jimiž si princezny mohou vybrat draka podle svého přání, je tak roven

$$\sum_{k=0}^6 (-1)^k v_k(S) (n-k)! = 6! - 9 \cdot 5! + 30 \cdot 4! - 45 \cdot 3! + 28 \cdot 2! - 4 \cdot 1! = 142.$$

Tímto postupem také snadno odvodíme počet D_n nepořádků z n prvků, tj. počet permutací, ve kterých žádný z prvků a_i není na i -tém místě. Z odpovídající sítě na obr. 2 je zřejmé, že ji lze rozložit na n disjunktních sítí (každá je tvořena jediným políčkem), takže pro její věžový polynom $v(x, S)$ platí:

$$v(x, S) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Je tedy $v_k(S) = \binom{n}{k}$, což znamená, že pro počet D_n nepořádků v souladu se známým vzorcem platí

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k(S) (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Ukažme si ještě pro zajímavost, jak se dá také postupovat v případě, že danou síť nelze rozložit na sítě disjunktní; příklad takové sítě je na obr. 3. Postupujeme tak, že zvolíme políčko w a budeme uvažovat síť S_{w1} , která je tvořena všemi políčky sítě S kromě políčka w , a síť S_{w2} , která vznikne ze sítě S vynecháním řádku a sloupce, v nichž leží políčko w . (Políčko w zvolíme tak, aby se daly snadno určit věžové polynomy sítí S_{w1} , S_{w2} .) Poměrně jednoduše se dá dokázat, že pro věžový polynom celé sítě S platí:

$$v(x, S) = v(x, S_{w1}) + x \cdot v(x, S_{w2}).$$

	1	2	3	4	5
a_1	≡				
a_2	≡	≡			
a_3		≡	<u>w</u>		
a_4			≡	≡	≡
a_5				≡	≡

Obr. 3

Všimneme-li si, že v síti na obr. 3 bylo políčko w zvoleno tak, že každou ze sítí S_{w1} , S_{w2} lze rozložit na dvě sítě disjunktní, dostaneme

$$\begin{aligned} v(x, S_{w1}) &= (1 + 4x + 3x^2)(1 + 5x + 4x^2), \\ v(x, S_{w2}) &= (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2), \end{aligned}$$

odkud po nepříliš pracném výpočtu zjistíme

$$v(x, S) = v(x, S_{w1}) + x \cdot v(x, S_{w2}) = 1 + 10x + 34x^2 + 46x^3 + 22x^4 + 2x^5.$$

Pro počet permutací s omezujícími podmínkami znázorněnými na obr. 3 (prvek a_1 není první, prvek a_2 není první ani druhý, prvek a_3 není druhý ani třetí, prvek a_4 není třetí ani čtvrtý ani pátý, prvek a_5 není čtvrtý ani pátý) to znamená, že jejich počet je

$$5! - 10 \cdot 4! + 34 \cdot 3! - 46 \cdot 2! + 22 \cdot 1! - 2 \cdot 0! = 12.$$

(I když lze tento konkrétní výsledek získat snadněji výčtem jednotlivých permutací, na eleganci tohoto postupu to vůbec nic nemění.)

Doufám, že z tohoto krátkého výkladu je patrné, že miniteorie o věžových polynomech je zajímavá a někdy i užitečná.

LITERATURA

- [1] Calda, E.: *Permutace s omezujícími podmínkami a věžové polynomy*. Učitel matematiky, roč. 6, č. 2 (26).
- [2] Calda, E.: *Ještě jednou o věžových polynomech*. Učitel matematiky, roč. 6, č. 3 (27).
- [3] Calda, E.: *Věžové polynomy*. Rozhledy MF, roč. 75, č. 3.
- [4] Calda, E.: *Věžové polynomy řeší kombinatorické úlohy*. Rozhledy MF, roč. 75, č. 4.

JEDEN ÚSPĚŠNÝ POKUS O MOTIVACI STUDENTŮ – RSA

Marie Demlová

Jedním z největších problémů, které musí řešit vyučující matematiky na technických vysokých školách, je malý zájem, často až nezájem, studentů o matematiku. Značná část studentů přistupuje k matematice jako „nutnému zlu“ a jejich jediným cílem je složit zkoušku a to s nejmenší možnou námahou. Navíc současné trendy ve výuce matematiky na technických vysokých školách preferují porozumění matematickým modelům před jejich bezmyšlenkovitým použitím. To znamená, že u matematických problémů je více kladen důraz na pochopení, *proč* se problém řeší právě touto metodou, před pouhou znalostí, *jak* se problém řeší. Ovšem pochopení proč je často náročnější na úsilí než jen bezmyšlenkovité použití známého postupu. Musíme proto studenta přesvědčit, aby se o matematiku a její použití více zajímal a sám si kladl otázku proč.

Nejúčinnějším řešením by bylo změnit styl zkoušení tak, aby student bez porozumění nebyl schopen zkoušku vykonat. To je ale velmi obtížné. Porozumění se jen velmi obtížně zkouší písemnou formou. To, co je u prvního problému porozuměním, může u obdobného být již jen naučenou strategií bez pochopení souvislostí.

Jiným způsobem motivace studentů, a podle mého názoru jednodušším, je získávat zájem studentů o matematiku tím, že jim ukážeme aplikace, které studenty zajímají. Studenti, kteří přímo „vidí“ užitečnost jednotlivých partií matematiky, se o dané partie matematiky zajímají a snaží se získat (aspoň někteří) hlubší znalosti. Pro studenty výpočetní techniky a elektrotechniky jsou takovou aplikací např. bezpečnostní kódy a šifrování. Cílem příspěvku je ukázat, které partie matematiky jsou nezbytné k pochopení bezpečného šifrování zpráv pomocí tzv. *veřejného klíče metodou RSA*, a tudíž, které partie matematiky se díky vysvětlení RSA stanou pro studenty zajímavější.

Uvedme nejprve, jak RSA pracuje. (Jméno RSA získala tato metoda podle iniciál příjmení autorů, jsou to R.L. Rivest, A. Shamir a L.M. Adelman [3].) Dvě osoby, nazývejme je Alice a Bob, si potřebují posílat zprávy tak, aby je nikdo nepovolaný nebyl schopen přečíst. Každou zprávu nejprve známým způsobem převedou na číslo. Každému písmenu latinské abecedy přiřadí číslo od 1 do 26. Zpráva o k písmenech pak představuje číslo x , pro nějž platí $0 < x \leq 26^k$. Předpokládejme, že x je číslo, které má méně než 200 cifer. Kdyby zpráva byla delší, rozdělí se na několik kratších zpráv.

K vlastnímu šifrování si Alice i Bob vyberou každý dvě velká prvočísla (o alespoň 200 cifrách), označme je p_A, q_A pro Alici a p_B, q_B pro Boba. Položme $n_A = p_A \cdot q_A$, $n_B = p_B \cdot q_B$. Navíc si Alice zvolí číslo e_A nesoudělné s $\Phi(n_A) = (p_A - 1) \cdot (q_A - 1)$, Bob číslo e_B nesoudělné s $\Phi(n_B) = (p_B - 1) \cdot (q_B - 1)$. Čísla e_A a e_B se nazývají *šifrovací exponenty* (písmeno e pochází od anglického slova *encryption*). Na závěr Alice spočítá (to jediné) číslo d_A , pro nějž $d_A \cdot e_A \equiv 1 \pmod{\Phi(n_A)}$. Obdobně i Bob spočítá číslo d_B , pro nějž $d_B \cdot e_B \equiv 1 \pmod{\Phi(n_B)}$. [$a \equiv b \pmod{n}$ znamená, že $a - b$ je dělitelné n .] Čísla d_A a d_B se nazývají *dešifrovací exponenty* (písmeno d pochází od anglického slova *decryption*.) Alice a Bob zveřejní dvojice (n_A, e_A) a (n_B, e_B) (tzv. *veřejný klíč*). Co Alice tají, jsou prvočísla p_A, q_A (a tudíž i $\Phi(n_A)$) a dešifrovací exponent d_A . Obdobně se chová i Bob.

Předpokládejme, že Bob chce Alici poslat zprávu x . Bob vyšle číslo x^* menší než n_A takové, že

$$x^* \equiv x^{e_A} \pmod{n_A}. \quad (1)$$

(To znamená, že Bob povýší zprávu x na Alicin známý šifrovací exponent e_A .) Alice po přijetí čísla x^* spočítá číslo $(x^*)^\diamond$ (opět menší než n_A) podle vztahu

$$(x^*)^\diamond \equiv (x^*)^{d_A} \pmod{n_A}. \quad (2)$$

(Jinými slovy Alice povýší přijaté číslo x^* na svůj dešifrovací exponent.) Jestliže x^* splňuje rovnici (1), pak $(x^*)^\diamond = x$. Jinými slovy $(x^*)^\diamond$ je dešifrovaná zpráva x .

Představme si, že navíc Alice chce mít jistotu, že zprávu x^* skutečně vyslal Bob (a nejde o podvrh). Pak Bob navíc za x^* připojí číslo y^* , které získal následujícím postupem:

$$y^* \equiv x^{d_B} \pmod{n_B}. \quad (3)$$

Jinými slovy, Bob povýší zprávu na svůj dešifrovací exponent. Alice po obdržení y^* spočítá

$$(y^*)^\diamond \equiv (y^*)^{e_B} \pmod{n_B}. \quad (4)$$

Tj. Alice povýší y^* na Bobův šifrovací (tudíž známý) exponent. Jestliže y^* vyhovuje rovnici (3), pak $y^* = x$.

Zprávě y^* se také říká *elektronický podpis*. Je to proto, že má Alice nejen jistotu, že zpráva pochází od Boba, ale navíc ani Bob v budoucnu nemůže popřít, že zprávu vyslal – dešifrovací exponent nezná nikdo jiný než Bob.

Co z matematiky je potřeba k tomu, aby student porozuměl předchozímu postupu?

1. Student musí rozumět kongruenci modulo n . A to nejen definici, ale musí znát i její vlastnosti. To přirozeně vede na počítání se zbytkovými třídami mod n .
2. Student potřebuje vědět, že platí: Je-li číslo a nesoudělné s n , pak existuje právě jedno číslo b takové, že $a \cdot b \equiv 1 \pmod{n}$.
3. Student musí znát tzv. *Eulerovu funkci* $\Phi(n)$, která je rovna počtu přirozených čísel menších než n , která jsou s n nesoudělná. Musí znát i její vlastnosti:

a) Je-li p prvočíslo, pak $\Phi(p) = p - 1$.

b) Jsou-li m, n nesoudělná čísla, pak $\Phi(m \cdot n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$.

4. Student potřebuje znát Euler–Fermatovu větu: Je-li číslo a nesoudělné s n , pak

$$a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Bod 2 předchozího výčtu vyžaduje:

a) Porozumění Eukleidovu algoritmu pro nalezení největšího společného dělitele a využití tohoto algoritmu pro řešení Diophantických rovnic typu

$$ax + by = 1.$$

b) Vědět, že v každé pologrupě existuje k libovolnému prvku nejvýše jeden inverzní prvek.

Chceme-li ukázat pravdivost tvrzení v bodu 3b, je výhodné si uvědomit:

a) Všechny invertibilní prvky v $\mathbf{Z}_n$, tj. prvky nesoudělné s n , tvoří podpogrupu $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$, která je grupou. Označme ji $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot)$.

b) Z Čínské věty o zbytcích vyplývá, že jsou-li m, n nesoudělné, pak grupa $(\mathbf{Z}_{m \cdot n}^*, \cdot)$ je isomorfní s kartézských součinem grup $(\mathbf{Z}_m^*, \cdot)$ a $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot)$.

Ukázat pravdivost Euler–Fermatovy věty se základními znalostmi o konečných Abelových grupách je jednoduché.

Shrňme na závěr, které partie jsou potřebné k pochopení RSA.

1. Eukleidův algoritmus a z něj vyplývající Bezoutova věta.
2. Řešení Diophantických rovnic.
3. Zbytkové třídy a grupy invertibilních prvků $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot)$.
4. Čínská věta o zbytcích.
5. Abelovy grupy.

Jsem přesvědčena o tom, že podobné příklady aplikací mohou podstatným způsobem zvýšit zájem studentů technických oborů o matematiku a tím i usnadnit práci nám, kteří je chceme „matematice naučit“.

LITERATURA

- [1] Křížek M.: *Má ryze teoretická matematika uplatnění v technické praxi?* PMFA, 44 (1), 1999, 14–24.
- [2] Koblitz, N.: *Algebraic Aspects of Cryptography*. Springer, Second Edition, 1999.
- [3] Rivest, R.L. – Shamir, A. – Adelman, L.M.: *A method for obtaining digital signatures and public key cryptosystems*. Comm. ACM 21, 1978, 120–126.

MATEMATIKA DISTANČNĚ

Eva Dvořáková

Abstrakt: *Jsou uvedeny definice a základní pedagogicko-psychologické problémy distančního vzdělávání, role a pravidla tvorby speciálních studijních textů a naznačeny s tím související možnosti a problémy v distanční formě studia matematiky.*

Vysokoškolský zákon zmiňuje tři formy studia: prezenční, distanční a kombinovanou. Kombinovaná forma studia je kombinací obou předchozích forem a je přechodnou fází v době, kdy učivo ještě nebylo zpracováno distančně v celém rozsahu.

Distanční studium představuje novou formu studia, u nás až do konce 80-tých let prakticky neznámou. Cílem příspěvku je stručně charakterizovat distanční vzdělávání a pokusit se naznačit možnosti a problémy výuky matematiky distanční formou. S ohledem na šíři problematiky se zaměříme pouze na základní problémy spojené s přípravou studijních textů.

ČÁST 1: DISTANČNÍ FORMA STUDIA

DEFINICE DISTANČNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

Distančním vzděláváním nazýváme takovou formu řízeného vzdělávání, kdy vyučující a studující nejsou v přímém kontaktu a studujícím jsou k dispozici:

- systém konzultací a poradenství,
- speciální studijní materiály.

Konzultace a poradenství jsou zpravidla zajišťovány speciálním centrem, pedagogů se týkají odborné konzultace organizované individuálně a hromadně formou tzv. tutoriálů. Povolání tutora je u nás zatím neznámé a je podceňováno. V současné době je jedinou možností vhodný

výběr vyučujících a alespoň krátké základní školení o práci a metodách tutorů.

Speciální studijní materiály jsou v distančním studiu často jediným komunikačním prvkem mezi učitelem a studujícím a současně základním studijním zdrojem. Tradičně jsou to studijní texty, audio- a videoprogramy, výukové programy, rozhlasové a televizní vysílání. Bez ohledu na to, zda jsou studijní materiály studentům zasílány poštou nebo přes Internet, zůstává stěžejní role studijním textům, které jsou i v multimediálních kurzech studentům k dispozici v tištěné podobě.

ROLE STUDIJNÍCH TEXTŮ V DISTANČNÍM STUDIU

Role distančních studijních textů je jednoznačná: mají kvalitním způsobem nahradit přednášky a semináře, tj. prezenční výuku denního studia. Chceme-li se vyvarovat negativních zkušeností z dálkového studia, skripta ani učebnice nemohou distanční texty nahradit. Úkolem distančních textů je nejen umožnit studentům základní orientaci v oboru, vyzdvihnout stěžejní poznatky a závěry, naznačit principy aplikace teorie do praxe, ale zejména řídit studijní proces a zajistit nezbytnou komunikaci se studenty.

S ohledem na roli distančních textů je zřejmé, že metodické zpracování učiva a forma jeho podání jsou přinejmenším stejně důležité, jako odborná úroveň. Tím nemáme na mysli snižování úrovně studia – odborné literatury mají studenti k dispozici dostatek. Nezastupitelnost textů spočívá v jejich pedagogicko-psychologických vlastnostech, vhodné motivaci ke studiu, dostatku zpětné vazby a kvalitním řízením studijního procesu.

PEDAGOGICKO-PSYCHOLOGICKÁ PROBLEMATIKA DISTANČNÍHO STUDIA

Zabýváme-li se problematikou distančních textů, je třeba upozornit alespoň na tři základní pedagogicko-psychologické aspekty distančního studia:

1. Studující jsou dospělí lidé z praxe, kteří mají rozdílné odborné i praktické zkušenosti a znalosti. Jejich podmínky ke studiu jsou ztížené a po celou dobu studia překonávají intenzivní pocity izolace. To by mělo ovlivňovat způsob výkladu učiva a volbu ilustrativních příkladů a zdůvodňovat zvýšenou potřebu zpětné vazby u distančních studentů.

2. Dalším významným aspektem distančního studia je skutečnost, že učitel a studující se neznají a k jejich osobnímu setkání běžně dochází až u zkoušky. Tím je ztížena vzájemná komunikace a současně nabývá velký význam naprostý nedostatek zpětné vazby o průběhu studijního procesu pro učitele. Nedostatek zpětné vazby nelze učiteli ničím nahradit, můžeme pouze předcházet možným následkům. Osvědčenými metodami jsou:

- sdělit studentům jasně a jednoznačně, o co nám jde, tj. jaké jsou cíle studia,
- volit srozumitelnou, přehlednou a jednoznačnou formu předávání informací a znalostí.

3. Nesporným pedagogickým problémem jsou nedostatečné studijní dovednosti studujících. Absolventi středních škol nemají vlastní osvědčené způsoby studia, ani dostatečné znalosti práce s informacemi. Problémy jsou násobeny výraznou změnou role dospělých studujících v posledních letech a zkreslenými představami o průběhu a úrovni studia. Distanční texty by měly být oporou při překonávání studijních problémů, zejména v prvním roce studia.

Shrňme výše naznačené principy, které je třeba dodržovat při psaní distančních studijních textů:

- Využívat praktické zkušenosti studujících, mít na paměti rozdílnou úroveň vstupních znalostí a zvýšenou potřebu motivace.
- Řešit problémy zpětné vazby:
 - Poskytovat studujícím dostatek vhodné zpětné vazby,
 - vyrovnávat nedostatek informací o správnosti a průběhu vzdělávacího působení.
- Řídit vlastní studijní proces a zajišťovat aktivitu studujících.

TYPOGRAFICKÁ FORMA TEXTU

Na rozdíl od jiné odborné literatury má v distančních textech význam i jejich formální vzhled. V metodice distančního vzdělávání je typografická forma textu považována za pedagogický nástroj. Nahrazuje audiovizuální projevy pedagoga, jako jsou gesta, mimika a zvýšení hlasu,

kterými během přednášky udržuje zájem a upozorňuje na důležitost probíraného učiva. Pedagog je zodpovědný nejen za odbornou a pedagogickou kvalitu studijních textů, ale i za jejich formu. Kromě běžných zásad u studijních textů, zaměřených zejména na

- formát studijních textů, volbu písma, rozmístění textu na stránce,
- ucelený a co nejjednodušší systém hlavních a vedlejších nadpisů,

je zvykem využívat formy textu k usnadnění studia. Vhodná forma textu je oceňována zejména v přechodně ztížených podmínkách ke studiu. Doporučuje se využívat následující prvky:

- přehledně zpracovaný detailní obsah,
- obrázky, schémata a tabulky ilustrující učivo a usnadňující jeho pochopení,
- ucelený systém znaků pro označení důležitých částí učiva, různých druhů aktivit, úkolů, shrnutí učiva apod., usnadňující orientaci v textu.

ČÁST 2: MOŽNOSTI A PROBLÉMY VÝUKY MATEMATIKY DISTANČNÍ FORMOU

V zemích západní Evropy se matematika distančně vyučuje zcela běžně a stejně úspěšně jako jiné obory. Dobrých výsledků se dosahuje s minimálním počtem hodin tutoriálů, které mají charakter praktických cvičení a nikoliv přednášek či jiné formy výkladu učiva. Osvědčenými studijními materiály jsou tištěné studijní texty. V posledních deseti letech jsou texty doplňovány stále častěji výukovými programy na CD ROM nebo přístupnými přes Internet, jejichž cílem je umožnit kontrolu teoretických znalostí a procvičit početní dovednosti.

Kapitoly distančních textů mají zcela klasickou strukturu, zahrnující úvod, výklad učiva a závěr. Každá z těchto částí obsahuje charakteristické pedagogicko-psychologické prvky, jejichž zdůvodnění jsme v předchozí části alespoň naznačili. Na základním schématu distančních textů se nyní pokusíme ilustrovat a naznačit možnosti a problémy v distančním vzdělávání matematiky.

ÚVOD

Úvod každé kapitoly obsahuje následující části:

- Stanovení cílů, popis studijních výsledků.
- Studijní data (čas potřebný ke studiu kapitoly, odbornou literaturu atd.).
- Je-li to potřeba, stručné shrnutí předběžných znalostí.

Nejdůležitější část úvodu nazvaná „stanovení cílů, popis studijních výsledků“, má za úkol předcházet problémům vzniklým nedostatečnou zpětnou vazbou pro pedagoga. Na rozdíl od humanitních oborů je v matematice poměrně snadné sdělit studujícím jasně a jednoznačně, co se mají naučit. Jedná-li se o nabytí teoretických znalostí, stačí předložit sylabus, který je díky přesné matematické terminologii zpravidla jednoznačný. Je-li cílem kapitoly osvojení početních algoritmů či jiných dovedností, pak se doporučuje formulovat cíle konkrétně, včetně požadované rychlosti řešení úloh, množství a charakteru tolerovaných chyb.

VÝKLADOVÁ ČÁST

Výklad učiva závisí na osobnosti každého pedagoga a neexistuje obecný návod, jak učivo předkládat. Velkou důležitost má metodické zpracování učiva. Rozsah a styl bude zřejmě záviset na charakteru a rozsahu další základní odborné literatury.

Začínajícím autorům distančních textů se při výkladu učiva doporučuje mít na paměti následujících pět bodů, z nichž první tři mají zásadní důležitost s ohledem na nedostatek zpětné vazby o průběhu studia:

- Výběr učiva (ucelený systém základního učiva, detaily a dodatky má studující možnost zjistit z jiných zdrojů),
- Vhodný styl výkladu, navázání dialogu se studujícím.
- Logická struktura výkladu.
- Vhodné příklady a ilustrace dospělým z praxe samostatné studium usnadňují, je třeba je volit promyšleně. U distančních studentů se doporučuje předpokládat dobrou praktickou znalost oboru, který studují.

- Schémata a přehledy shrnující základní poznatky a jejich vztahy jsou studujícími oceňovány jako přehledný zdroj základních informací. Usnadňují studium ve ztížených podmínkách a při opakování učiva.

Výkladem učiva se zabývají v příspěvku Matematika strukturované Dr. Bittnerová a doc. Vild, zde chceme pouze vyzdvihnout dva body schématu: výběr učiva matematiky a způsob výkladu.

Výběr učiva v matematice je obecným problémem a týká se nejen distančního studia. Studenti jsou zahlcováni množstvím nových pojmů a vět na úkor rozvoje jejich myšlení a dovedností řešit problémy. Pokud jsou tyto dovednosti dostatečně rozvíjeny, lze omezit počet předkládaných vět a pouček, protože studenti jsou schopni je odvodit sami, a to formou řešení vhodných problémových úloh.

Druhý problém se týká výkladu učiva. Obvyklé schéma „definice – věta – důkaz“ je pro distanční texty nepřijatelné. Vyžaduje schopnost umět samostatně studovat matematický text, kterou u absolventů středních škol nemůžeme předpokládat. Ve většině zahraničních studijních textů se toto schéma nevyskytuje. Definice bývají nahrazeny méně formálním vysvětlením nových pojmů a je-li to možné, jsou důsledkem řešení problémových úloh. Přesná formulace vět zůstává, většinou jsou uváděny jako závěr předchozího výkladu učiva, který nahrazuje důkaz.

ZÁVĚR

Podobně jako úvod, i závěr kapitoly mívá následující standardní strukturu:

- Stručný obsah kapitoly usnadňující opakování učiva.
- Rozsáhlejší případy z praxe.
- Autokorektivní cvičení s bodovým ohodnocením.

Rozsáhlejší případy z praxe mohou v matematice znamenat např. problémové úlohy s praktickým zaměřením. Autokorektivní cvičení mají formu testů nebo jednoduchých příkladů s cílem osvojit si učivo a procvičit početní dovednosti. Součástí textů jsou výsledky cvičení. V moderních kurzech bývají autokorektivní cvičení předkládána formou výukových programů.

AKTIVITA STUDUJÍCÍCH

Zajišťovat aktivitu studujících v průběhu studia je nejosvědčenější způsob, jak udržet jejich pozornost, zajistit dobrou úroveň studia a poskytovat potřebnou míru motivace a zpětné vazby. Distanční studijní texty se na první pohled odlišují od skript zejména viditelnou snahou pedagoga vybízet studující k neustálé aktivitě. V matematice lze aktivitu studujících rozdělit schematicky do pěti skupin:

- Řečnické otázky, otázky vybízející k zamýšlení nebo přímo k písemnému vyjádření vlastního názoru. Správná odpověď následuje jako součást výkladu.
- Úkoly praktického rázu, vybízející k zopakování nebo vyhledání informací.
- Jednoduché úkoly spočívající v přímé aplikaci vysvětleného učiva. Studující nemají k dispozici správné řešení. Pokud si nevedí rady, je to pro ně signál, že potřebují konzultaci.
- Autokorektivní cvičení byla popsána v předchozí části. V tištěné podobě bývají soustředěna na konec kapitoly, ale doporučuje se začleňovat je i do výkladu učiva.
- Úlohy určené k opravě jsou v podstatě semestrální práce. Měly by mít problémový charakter nebo řešit konkrétní praktické úlohy. Studující odevzdávají alespoň jednu úlohu za semestr, v ideálním případě jednu úlohu na závěr každého tématu.

Problematika distančního studia matematiky je široká a nemůže být řešena v rámci jednoho příspěvku. Vzrůstající počet studijních programů v technických oborech organizovaných kombinovanou formou je známkou toho, že výuka matematiky distančně je aktuální. Pokusili jsme se předložit základní informace o distančním vzdělávání a s tím spojené problémy ve výuce matematiky a rádi bychom touto cestou iniciovali diskusi o distančním vzdělávání matematiky.

LITERATURA

- [1] Aribaud, M.: *Analyse 1*. CNED, Centre de Vanves 1994.
- [2] Aribaud, M.: *Analyse 2*. CNED, Centre de Vanves 1994.

- [3] Bittnerová, D.: *Matematické texty pro distanční vzdělávání*. Seminář Aktuální problémy distančního vzdělávání. Olomouc 1995. Sborník semináře.
- [4] Dvořáková, E.: *Několik poznámek o distančním vzdělávání*. TU v Liberci 1999.
- [5] *Studijní texty matematiky vydané francouzským Národním centrem distančního vzdělávání (CNED) a FernUniversität v Hagen*.

GOSPERŮV ALGORITMUS PRO URČENÍ SOUČTU ŘADY

Jaroslav Hora

Již ve středoškolské matematice a samozřejmě i v kursech vysokoškolské matematiky se často setkáváme s úlohami požadujícími určení součtu konečné či nekonečné číselné řady. Nejde zajisté o triviální záležitost. O to více bychom však mohli být překvapeni, když úlohy tohoto typu předložíme „velkým“ programům počítačové algebry jakými jsou kupř. Maple[®] či Mathematica[®], či dokonce i některým „malým“ kalkulátorům umožňujícím provádět symbolické výpočty. Mnohdy bychom se neubránili otázce: „Jak to, že to ten kus železa umí také?“

Při tvorbě sumačních algoritmů bylo odvedeno mnoho práce. Ukazuje se, že pokud mají členy sečítané řady „vhodný“ tvar (hypergeometrická posloupnost), může být účinný tzv. **Gosperův algoritmus**, jehož zápis je uveden dále. Přitom lze říci, že se tento algoritmus opírá jen o provádění algebraických operací s polynomy.

1. $r := \text{true}$

2. if $a_n = 0$ then $s(n) := 0$; return fi

3. $p(n) := 1$

$$q(n) := \text{cit} \left(\frac{a(n)}{a(n-1)} \right)$$

$$r(n) := \text{jmen} \left(\frac{a(n)}{a(n-1)} \right)$$

4. while $\text{res}_n(q(n), r(n+j^*))$ has a non-negative integer root j^* do

$$g(n) := D(q(n), r(n+j^*))$$

$$q(n) := \frac{q(n)}{g(n)}$$

$$r(n) := \frac{r(n)}{g(n-j^*)}$$

- $p(n) := p(n) \cdot g(n) \cdot g(n-1) \cdot \dots \cdot g(n-j^*+1)$
 od
5. $l_p := st(q(n+1) + r(n))$
 $l_m := st(q(n+1) - r(n))$
 if $l_p \leq l_m$ then $k := st(p(n)) - l_m$
 else
 $k_0 := [-l_p \cdot coef(q, l_p) - coef(q, l_p-1) + coef(r, l_p-1)] / coef(q, l_p)$
 if (k_0 is integer) then $k := \max(k_0, st(p(n)) - l_p + 1)$
 else $k := st(p(n)) - l_p + 1$
 fi
 fi
 if $k < 0$ then $r := \text{false}$; return fi;
6. [determination of f]
 determine a polynomial $f(n)$ satisfying $p(n) = q(n+1)f(n) - r(n) \cdot f(n-1)$,
 $st(f(n)) \leq k$, by solving a system of linear equations for the indeterminate coefficients of $f(n) = c_k n^k + \dots + c_1 n + c_0$
 if (solution does not exist) then $r := \text{false}$; return fi;
7. $s'_n := \frac{q(n+1) \cdot a_n \cdot f(n)}{p(n)}$;
 $s_n := s'_n - s'_0$;
 return

Nyní krátký komentář k uvedenému algoritmu.

Definition: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **hypergeometrická**, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ lze podíl dvou následujících členů posloupnosti vyjádřit ve tvaru $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{u(n)}{v(n)}$, kde $u(n)$, $v(n)$ jsou polynomy.

Následující dvě věty poskytují Gosperovu algoritmu teoretický základ. První z nich říká, že racionální funkci $\frac{u(n)}{v(n)}$ lze reprezentovat v jistém, pro další postup velice užitečném, tvaru.

Věta 1: Každou racionální funkci $\frac{u(n)}{v(n)}$ nad tělesem T lze zapsat ve tvaru

$$\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{p(n) \cdot q(n)}{p(n-1) \cdot r(n)}, \quad (1)$$

kde p, q, r jsou polynomy splňující podmínku

$$D(q(n), r(n+j)) = 1 \quad (2)$$

pro všechna $j \in \mathbb{N}_0$.

Položme nejprve $p(n) := 1$, $q(n) := u(n)$, $r(n) := v(n)$. V bodě 4 algoritmu se pracuje s tzv. rezultantem $R(j) = \text{res}_n(q(n), r(n+j*))$ polynomů $q(n)$, $r(n+j*)$. Připomeňme, že tímto rezultantem se rozumí determinant utvořený z koeficientů obou polynomů, a také to, že výpočet rezultantu lze opět realizovat operacemi s polynomy (viz kupř. [1]). Má-li rovnice $R(j) = 0$ alespoň jeden kořen j^* v množině $\mathbb{N}_0$, pak položíme

$$\begin{aligned} g(n) &:= D(q(n), r(n+j^*)), \\ p(n) &:= p(n) \cdot \prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k), \\ q(n) &:= \frac{q(n)}{g(n)}, \\ r(n) &:= \frac{r(n)}{g(n-j^*)}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že stupně polynomů q tvoří klesající posloupnost přirozených čísel, skončí popsany proces v konečném počtu kroků.

Definice: Nechť $\frac{u(n)}{v(n)}$ je racionální funkce nad tělesem T a polynomy p, q, r mají vlastnosti uvedené ve větě 1. Pak trojici p, q, r nazýváme **regulární reprezentací podílu** $\frac{u}{v}$.

Následující věta ukazuje, proč je výhodné mít vypočtenou regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Věta 2: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je hypergeometrická posloupnost nad tělesem T a nechť polynomy p, q, r tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Jestliže i posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, je hypergeometrická, pak lze n -tý částečný součet s_n vyjádřit ve tvaru

$$s_n = \frac{q(n+1)}{p(n)} \cdot a_n \cdot f(n) \quad (3)$$

pro jistý polynom $f(n)$ splňující podmínku

$$p(n) = q(n+1) \cdot f(n) - r(n) \cdot f(n-1). \quad (4)$$

Ukazuje se, že stupeň k polynomu f lze rovněž určit algoritmicky. Označme

$$l_p := st(q(n+1) + r(n)), \quad l_m := st(q(n+1) - r(n)).$$

1. Pokud $l_p \leq l_m$, pak $k := st(p(n)) - l_m$.
2. Pokud $l_p > l_m$, je nejprve vypočteno číslo k_0 . (Dohodněme se, že zápisem $coef(p(n), i)$ se míní koeficient u mocniny n^i v polynomu $p(n)$).

$$k_0 = [-l_p \cdot coef(q, l_p) - coef(ql_p - 1) + coef(r, l_p - 1)] / coef(q, l_p).$$

Jestliže je k_0 celé číslo, pak položíme $k := \max(k_0, st(p(n)) - l_p + 1)$.

Pokud k_0 není celé, pak položíme $k := st(p(n)) - l_p + 1$.

Nakonec, je-li $k < 0$, pak teorie říká, že $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ není hypergeometrická posloupnost, a tedy řada $\sum_{i=1}^n a_i$ není gosperovsky sčitatelná.

Jinak můžeme ve výpočtu pokračovat.

Z věty 2 víme, že Gosperův algoritmus nemusí být vždy úspěšný. Předpokládá se, že je dána hypergeometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Odpovídající posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ může, ale také nemusí být hypergeometrická. Proto je do programu zařazena logická proměnná r , která nabývá hodnoty true, resp. false (v případě, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není gosperovsky sčitatelná). Poznamenejme, že ve shora uvedeném zápisu Gosperova algoritmu jsme označili $cit(\varphi)$, resp. $jmen(\varphi)$ čítec, resp.

jmenovatel racionální funkce φ , a přistupme k vyřešení ilustračního příkladu.

Příklad: Určeme posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, jakož i její součet s .

Řešení: Nejprve nalezneme regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Máme $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n-1)n}} = \frac{n-1}{n+1}$. Při hledání regulární reprezentace tohoto podílu položíme $p(n) = 1$, $q(n) = n-1$ a $r(n) = n+1$. Dále vypočteme $R(j) = \text{res}_n(q(n), r(n+j)) = \text{res}_n(n-1, n+j+1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & j+1 \end{vmatrix} = j+2$. Polynom $R(j) = j+2$ má kořen $j = -2$, který ale nepatří do množiny N_0 . Proces končí a regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ tedy tvoří $p(n) = 1$, $q(n) = n-1$ a $r(n) = n+1$.

Pokusme se nyní nalézt polynom $f(n)$ takový, že pro něj platí vztah (4), tj. $1 = n \cdot f(n) - r(n) \cdot f(n-1)$.

Teď by bylo dobré mít informaci o stupni polynomu f . Exaktní postupy k určení stupně polynomu f jsou uvedeny v zápise Gosperova algoritmu nahoře a pro nedostatek místa je zde ponecháváme bez komentáře (viz např. [2, 3]). Zjišťujeme, že v daném případě jde o polynom 1. stupně. Zapišme jej ve tvaru $f(n) = c_1 \cdot n + c_0$, kde c_0, c_1 jsou neurčité koeficienty. Pak

$$1 = n \cdot (c_1 \cdot n + c_0) - (n+1) \cdot [c_1 \cdot n + (c_0 - c_1)]$$

a po krátkém výpočtu $1 = c_1 - c_0$.

Nahlížíme, že polynomů $f(n)$ je dokonce nekonečně mnoho: volíme-li $c_0 = p$, je $c_1 = p+1$ a $f(n) = (p+1) \cdot n + p$. Volme $p = 0$, pak $f(n) = n$ a dosazením do (3) $s_n = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot n = \frac{n}{n+1}$. Protože je $s_0 = 0$, není nutné realizovat bod 7 Gosperova algoritmu (určení aditivní konstanty) a máme definitivně $s_n = \frac{n}{n+1}$. (V kursu matematické analýzy obvykle studenti dospějí k tomuto výsledku užitím tzv. „teleskopické“ me-

tody, kdy se nejprve analogicky s rozkladem na parciální zlomky zapíše $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$). Nakonec $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

LITERATURA

- [1] Internetovské zdroje o sumačních algoritmech, zejména <http://belili.fjfi.cvut.cz/~liska/ca/node40.html>.
- [2] Petkovsek, M. – Wilf, H. – Zeilberger, D.: $A=B$, AK Peters, 1997.
- [3] Winkler, F.: *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*. Springer Verlag Wien, 1996.

ODHALOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH ZÁVISLOSTÍ S VYUŽITÍM ČTVEREČKOVANÉHO PAPÍRU

Darina Jirotková

ÚVOD

V učebních osnovách matematiky bývají tradičně geometrie a aritmetika pojaty jako dvě oddělené poznatkové oblasti. K propojení těchto oblastí dochází až v tematickém celku analytická geometrie, se kterým se setkává student teprve na střední škole.

Některé základní myšlenky analytické geometrie lze zprostředkovat žákům mnohem dříve, již v mladším školním věku (9–10 let). Podle našich zkušeností je pro takové poznávání vhodným prostředím čtverečkový papír, jehož vizualizace se otevírá geometrií a struktura čar nabízí vstup aritmetice a tyto dvě základní oblasti, se kterými se žáci ve školní matematice seznamují, jsou tak velmi přirozeným způsobem úzce propojeny. Abychom s tímto prostředím seznámili i budoucí učitele, rozhodli jsme se na čtverečkový papír vložit úvodní kapitoly kurzu analytické geometrie ve studiu učitelství pro druhý stupeň, ale hlavně také obsah kurzu geometrie ve studiu učitelství primární pedagogiky. Podkladem ke studiu tohoto kurzu je skriptum [1], na něž se budeme odvolávat.

V tomto článku bude předmětem našeho zájmu Pickova formule. Na způsobu jejího odhalení bychom chtěli ukázat některé didaktické možnosti prostředí čtverečkováného papíru se zdůrazněním konstruktivistického přístupu k poznávání matematických pojmů, jevů, závislostí.

V různých učebnicích geometrie, zejména starších nebo tzv. klasických, najdeme úlohy převážně tohoto typu: „Dokažte, že platí...“ nebo „Sestrojte...“. My si náš úkol zformulujeme tak, aby byl zdůrazněn a vynucen konstruktivistický přístup k jeho řešení. Dříve se však musíme domluvit na používané terminologii.

POUŽITÁ TERMINOLOGIE

Čtverečkováná rovina je struktura, jejímž nositelem je eukleidovská rovina s pevně zvoleným kartézským systémem. Strukturu v dané rovině pak tvoří osnova přímek $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, spolu s osnovou přímek $y = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Přímkou první osnovy nazýváme *svislé* a přímkou druhé osnovy nazýváme *vodorovné*. Soubor všech vodorovných a svislých přímek nazveme (*čtverečkováná*) *mříž*. Průsečík vodorovné a svislé přímky nazveme *mřížový bod*. Soubor všech mřížových bodů dané mříže nazveme *sít*. Ve škole budeme spíše pracovat s danými pojmy v omezeném prostoru. Dáme jim zvláštní jména: omezenou část čtverečkové roviny nazveme *čtverečkový papír*, vodorovné nebo svislé přímkou – *vodorovná* nebo *svislá úsečka* (nebo *čára*) a omezenou část sítě nazveme *pinboard* (nebo také *geoboard*). Přímkou, která prochází alespoň dvěma mřížovými body, nazveme *mřížová přímka*. Úsečkou, jejíž oba krajní body jsou mřížové, nazýváme *mřížová úsečka*. Obdobně pak *mřížový trojúhelník*, *n-úhelník*.

Čtverečkový papír je tedy abstraktní pojem s „dokonalými“ čarami, kolmostí, vzdálenostmi, ... Modelem tohoto myšlenkového konstruktu je „reálný“ čtverečkový papír. Dále nebudeme rozlišovat mezi čtverečkováným papírem a „reálným“ čtverečkováným papírem. Budeme mluvit jen o čtverečkováném *papíře*.

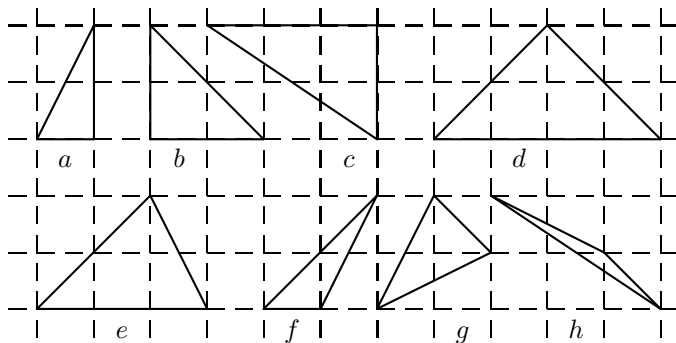
Domluvme se ještě na označení: $S(T)$ značí obsah trojúhelníku T , $h(T)$ počet mřížových bodů na hranici trojúhelníku T a $v(T)$ počet vnitřních mřížových bodů trojúhelníku T .

FORMULACE ÚLOHY

Nyní již formulujeme náš úkol: *Hledejte Pickovu formuli, která říká, jak vzájemně souvisí čísla $S(T)$, $h(T)$ a $v(T)$ pro libovolný mřížový trojúhelník T .*

Zadání našeho úkolu pouze prozrazuje existenci jakéhosi vztahu. Je také zřejmé, že se od řešitele očekává, že umí určit přiměřeným způsobem obsah mřížového trojúhelníku. Například:

Určete obsah každého následujícího trojúhelníku.



Přiměřený způsob nalezení obsahu trojúhelníku znamená způsob odpovídající věku a úrovni žáků. Ti mohou použít metody popsané v [1, s. 40–41], nebo mohou použít některého známého vzorečku, pokud si na něj vzpomenou. Máme bohaté zkušenosti s tím, že toto nové prostředí zcela potlačí dříve a hlavně v jiném prostředí nabyté „vzorečkové“ znalosti. Studenti na gymnáziu nebo na VŠ mohou použít i metody vyvozené v [2, s. 10].

STRATEGIE OBJEVOVÁNÍ

Jaké mohou být strategie objevování? My jsme se studenty vyzkoušeli tyto dvě:

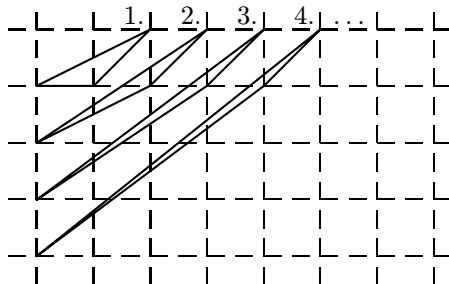
- Strategie A – posloupnost pozvolna gradovaných úloh.
- Strategie B - přímý „útok“ na Pickovu formuli.

Obě dvě strategie jsou založeny na experimentování, to je kreslení a počítání potřebných prvků konkrétních trojúhelníků, uspořádání a přehledné evidování experimentů nejlépe do tabulky, objevování zákonitostí v tabulce a formulace hypotézy. Uvedeme ukázkou použití obou strategií.

- Strategie A ([1, s. 45]):

Prvním krokem může být následující úloha. Poloha bodů, které jsou vrcholy trojúhelníku, je dána kartézskými souřadnicemi. Pro žáky 1. stupně ZŠ můžeme určit vzájemnou polohu bodů šipkovým zápisem popsaným v [1, s. 17–24].

1. Jaké hodnoty nabývají čísla $S(T)$, $h(T)$ a $v(T)$ pro trojúhelník ABC , když $A[0, 0]$, $B[t, t-1]$, $C[t+1, t]$, kde $t = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$?



Řešení: Od řešitelů očekáváme, že budou kreslit obdobné obrázky, které pak „přenesou“ do tabulky. Účelem této úlohy je získání vhledu do situace, získání zkušeností s experimentováním. Postupné dosazování čísel 1–10 za parametr t nabízí, jak je možné experimenty uspořádat a pak přehledně evidovat do tabulky. Závislost v tabulce je zřejmá a přímo vybízí k formulaci druhého úkolu.

T	1.	2.	3.	4.	...	10.
$v(T)$	0	0	0	0		0
$h(T)$	3	3	3	3		3
$S(T)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

Další úlohy ponecháme již bez řešení.

2. Jakou a) největší, b) nejmenší hodnotu může nabývat číslo $S(T)$, jestliže $h(T) = 3$ a $v(T) = 0$?
3. Pro kolik navzájem neshodných trojúhelníků platí $h(T) = 4$, $v(T) = 0$? Jakých hodnot může nabývat číslo $S(T)$ pro trojúhelníky, které jste našli?
4. Pro kolik navzájem neshodných trojúhelníků platí $h(T) = 3$, $v(T) = 1$? Jakých hodnot může nabývat číslo $S(T)$ pro trojúhelníky, které jste našli?

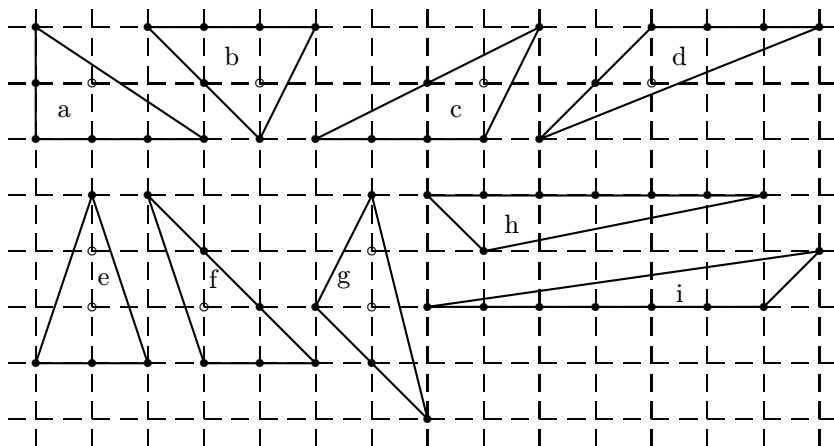
5. Uvažujeme takové trojúhelníky $T = \triangle ABC$, pro něž $A[0, 0]$, $B[1, 0]$, $C[x, y]$, $v(T) = 0$. Jak závisí číslo $S(T)$ na číslech x, y ? Jak závisí číslo $h(T)$ na číslech x, y ? Jak závisí číslo $S(T)$ na čísle $h(T)$?
6. Předchozí otázku řešte pro případ a) $A[0, 0]$, $B[2, 0]$, b) $A[0, 0]$, $B[3, 0]$, c) $A[0, 0]$, $B[2, 1]$.
7. Jakých hodnot může nabývat číslo $v(T)$, jestliže $h(T) = 3, 4, 5, \dots$? Jakých hodnot pak nabývá číslo $S(T)$?
8. Víme, že $v(T) = 0, 1, 2, \dots$ Jak vzájemně souvisí čísla $h(T)$ a $S(T)$?
9. Jak vypadá Pickova formule pro mřížové trojúhelníky?

Při řešení úloh se objeví řada konkrétních závislostí. Formulace každé jedné závislosti vybízí k odhalení dalších konkrétních závislostí až k odhalení závislosti obecné. Jeden z důležitých jevů, který se postupně vynořuje, je, že mřížové trojúhelníky se stejnými čísly $v(T)$ a $h(T)$ mají i stejný obsah a na tvaru trojúhelníku nezáleží.

• Strategie B:

Vezměme nějakou „rodinu“ mřížových trojúhelníků. Dohodněme se nejdříve na tom, který „příbuzenecký“ vztah budeme uvažovat. Pro naše účely se hodí utvořit „rodinu“ z takových mřížových trojúhelníků, které mají některý z prvků $S(T)$, $v(T)$, $h(T)$ stejný. Nyní se nabízí další postup individualizovat. Každý si může definovat „rodinu“ podle své volby. Nakreslete co nejvíce členů jedné „rodiny“ a sestavte odpovídající tabulku a vyvoďte závislost. V tomto místě je individualizace práce velmi důležitá, neboť každý řešitel může přizpůsobit jednak tempo práce svým potřebám, ale také počet řádků či sloupců, které si musí v tabulce vyplnit, aby sám odhalil zákonitost.

Uvažujme například „příbuzenecký“ vztah mezi mřížovými trojúhelníky „mít stejný obsah“. Kresleme například různé trojúhelníky s obsahem 3 a zjišťujeme čísla $h(T)$ a $v(T)$. Někdy je obtížné najít trojúhelník s předem daným obsahem. Je důležité mít v zásobě mnoho obrázků a z nich pak ty vhodné vybírat. Čísla v tabulce přehledně uspořádáme.



T	i,h	a,b,c,d,f	e,g	
$v(T)$	0	1	2	
$h(T)$	8	6	4	
$S(T)$	3	3	3	3

Tabulka svádí k dalšímu vyplňování, neboť je hned vidět, jak se čísla v tabulce chovají. Čísla v prvním řádku rostou po jedné a ve druhém řádku klesají po dvou. Jakmile toto odhalíme, bude snadné vyplňovat tabulky, aniž bychom si kreslili příslušné trojúhelníky. Například pro „rodinu“ trojúhelníků s obsahem 2,5 dostaneme tuto tabulku:

$v(T)$	0	1	2
$h(T)$	7	5	3
$S(T)$	2, 5		

Stačí si nakreslit jeden trojúhelník a zjistit údaje v jednom sloupečku a další sloupečky se nám bude chtít vyplnit uvedeným způsobem.

Nyní je nutné položit si otázku, zda skutečně umíme ke každému sloupečku, který jsme vyplnili v tabulce pouze podle odhalené závislosti, najít odpovídající mřížový trojúhelník. Odpověď na tuto otázku najdeme v článku [3]. Uspořádáme-li dílčí tabulky, Pickovu formuli se nám pak podaří najít snadno.

ZÁVĚR

Na uvedeném příkladu jsme ukázali jak čtverečkovaný papír přirozeným způsobem propojuje geometrii s aritmetikou. Toto propojení vizuální geometrie s procesuální aritmetikou otevírá studentům s různými kognitivními styly schůdnou cestu k porozumění studované problematiky. Ukázali jsme také, jak čtverečkovaný papír umožňuje jednoduché a ná-zorné experimentování a snadnou evidenci experimentů.

Při nahlédnutí do [1] a [2] čtenář zjistí, že i mnohé konstrukce lze realizovat pouze tužkou nebo tužkou a pravítkem.

V prostředí čtverečkováného papíru je možné modelovat většinu matematických pojmů 1. stupně ZŠ, a proto je důvěrná znalost tohoto prostředí pro učitele i didakticky cenná.

LITERATURA

- [1] Hejný, M. – Jirotková, D.: *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, ISBN 80-86039-92-7, 1999.
- [2] Hejný, M. – Jirotková, D. – Stehlíková, N.: *Analytická geometrie*. Univerzita Karlova, Karolinum, Praha, ISBN 80-7184-198-6, 1996.
- [3] Hejný, M. – Jirotková, D.: *Čtverečkovaný papír, trojúhelníky a Pickova formule*. Učitel matematiky, roč. 8, 2000, č. 3, ISSN 1210-9037.

JAZYKOVÉ OBTÍŽE PŘI KOMUNIKACI V MATEMATICE NA ZŠ

Michaela Kaslová, Jitka Šobrová

1 ÚVOD

Tento příspěvek je dílčím výstupem v řešení výzkumného záměru zabývajících se mezioborovými problémy komunikace. Navazuje na níže uvedené reference a vznikl ve spolupráci katedry matematiky a didaktiky matematiky s katedrou českého jazyka UK Pedf – s dr. J. Šobrovou.

Výchozí myšlenka: Vážné propojení mezi matematikou a českým jazykem v oblasti komunikace. Proto je třeba zmapovat problémy, utřídit je, charakterizovat a sestavit materiál, který by pomohl jak v pregraduálním, tak postgraduálním studiu učitelů. Jeho logická strukturace by měla sledovat problémy ze tří hledisek: matematiky, jazyka a dítěte. Text by měl obsahovat mj. i diagnostické a terapeutické aktivity jak pro dospělé, tak pro žáky.

Uvedme ukázky, které jsou odposlechnuty ve škole a budou východiskem pro diskusi po přednášce.

2 TRANSFORMACE SYMBOLICKÉHO ZÁPISU DO MLUVENÉ ŘEČI

Co je korektní, co je změnitelné? Co lze připustit z hlediska matematiky, ale ne jazyka?

$5 > 2$ pět je větší než dvě, pět jsou víc než dvě, pětka je větší než dvojka, číslo pět je větší než číslo dvě, dvě je menší než pět, dvě je méně než pět, pět je víc než dvojka, ... taky dvě je větší než pět

$5\text{ cm} > 2\text{ cm}$ pět centimetrů je větší než dva centimetry, pět centimetrů je víc než dva centimetry, úsečka 5 centimetrů je delší než ta dva centimetry, pět centimetrů je víc než dva centimetry, pět cm je víc než dva, pět – no dva je kratší

$5\heartsuit > 2\heartsuit$ pět je víc než dvě, pět srdíček to je víc než dvě, pět srdíček je o tři víc, pět je větší než dvě,

$5 \text{ hl} > 2 \text{ hl}$ pět hl to je víc než dva, pět hektolitrů vody je víc než dva hektolitry, pět a dva hektolitry, pět je víc; pět hektolitrů je větší než dva;

$5 + 3 = 8$ pět plus tři je osm, pět a tři je osm, pět a tři jsou osm, pět a tři rovná se osm, pět plus tři se rovná osmi, když zvětšíme pět o tři, dostaneme osm, přidáme k pěti tři a je to osm, dostaneme osm, pět zvětšené o tři dá osm, sečteme-li pět a tři, získáme osm, součet čísel pět a tři se rovná osm, osm můžeme vyjádřit jako součet pět a osm, . . . pěti a osmi, osm rozložíme na pět a tři, osm je o tři větší než pět, pět je o tři menší než osm, osm dostaneme tak, že zvětšíme pět o tři, kdybychom zvětšili pět o tři dostali bychom osm

$3 + 1 = 4$ tři a jedna je čtyři, tři a jedna jsou čtyři, tři plus jedna rovná se čtyři, tři plus jedna se rovnají čtyřem

$3 + 4 =$ Kolik je tři plus čtyři? Čemu se rovná tři plus čtyři? Tři a čtyři to je . . . Tři plus čtyři je . . . Nevíme, kolik je . . . Najdi součet čísel . . . Vypočítej, kolik je . . . Jaké číslo dostaneš, když zvětšíš tři o čtyři?

$(10 + 6) \cdot 3 = 1$ V závorce: deset plus šest, to celé krát tři. Závorka deset plus šest, závorka, krát tři. Součet deset a tři v závorce vynásob třemi. Deset a šest . . . krát tři. Deset plus šest konec závorky krát tři.

$46 - (20 + 7) = 46 - 20 - 7 =$ Odečíst součet dvacet a sedm znamená odečíst od čtyřiceti šesti dvacet a pak sedm, čtyřicet šest mínus dvacet je dvacet šest mínus sedm devatenáct, čtyřicet šest závorka dvacet bez sedmi závorka je . . . , čtyřicet šest závorka otevřít dvacet plus . . .

$2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 =$ Které číslo je zapsáno v rozvinutém zápisu? Čemu se rovná součet součinů dvakrát sto a pětkrát deset a osmkrát jedna? Mám dvě stovky, pět desítek a osm jednotek, kolik mám? Myslím si číslo, . . . Které číslo si myslím? Dvě vynásob stem přičti pětinasobek deseti a nakonec přičti osm. Co dostaneš?

Obtíže: pády jmen, číslo u sloves, alternace

Terapie: doplňovací cvičení, porovnávání a analýza, obměny, práce s modely, práce s barvou, tvorba slovních úloh, popis řešení – vysvětlení vlastního řešení, návod k řešení, interpretace cizího řešení

3 TRANSFORMACE MODELU DO MLUVENÉ ŘEČI

Obtíže: vyčtení informací v podobě podstatných jmen případně ve dvojici s přídavným jménem, vyhledání a pojmenování vztahů, jazykové vyjádření binarity či symetričnosti vztahu, rozlišení jedinečnosti či obecnosti, nerozlišení směru, polohy, rovinného a prostorového útvaru

Terapie: geometrický diktát, Pantomina, doplňovací cvičení, rozhodovací cvičení založená na metodě kontrastu, transformace jednoho modelu na druhý, ukazování, práce s kartami, tvorba modelu ke slovům na kartách, ...

4 TRANSFORMACE MLUVENÉHO PROJEVU DO MATEMATICKÉ SYMBOLIKY

Specifický problém tvoří transformace slovesa být. Další obtíže jsou různorodé: úplnost informací, jednoznačnost, stručnost, jazyková správnost, počet slov neodpovídá pokaždé stejnému počtu značek, jedna značka má více významů, které se vybavují v závislosti jen na jistém typu kontextu. Terapie: matematický diktát, hra telefon, Pantomima, Karty s ekvivalenty, Hry adaptované z dramatické či globální výchovy

5 TRANSFORMACE MLUVENÉ ŘEČI NA MODEL

Obtíže: neúplnost, neschopnost popsat polohu, umístění, neviditelné, orientace na vodorovnou polohu, na čelní stěnu, reagovat na celou větu graficky či zpracováním materiálu, slabá slovní zásoba týkající se vztahů, nejasný význam slov

Terapie: posílení haptického vnímání za vyblokování zraku, poslech se zavřenýma očima s popisem dvou odlišných či shodných modelů, porovnání modelů slovně, výběr modelu k popsanému, doplňovací cvičení, vyškrtávání nevhodných slov, porovnání slov – vysvětlování významu

6 PRÁCE S INFORMACÍ (SLOVNÍ ÚLOHY A ÚLOHY KONSTRUKČNÍHO CHARAKTERU)

Obtíže jsou dvojího typu: závislé na individuálních charakteristikách žáků a na práci, osobnosti učitele. Jsou spjaté s aktivitami: zadání instrukcí, formulace závěrů procesu zevšeobecnění, naslouchání či čtení s pochopením, popis představy, modelu, aktivity zasazené do specifického kontextu, zpravidla spojeno s tvorbou úloh, s návodem.

Terapie: protipříklad, negace, otázka, podtrhání jádra informace, uspořádání kroků na kartách, přiřazení kroků k instrukci, převyprávění, podtrhávání v textu

Vybrané příklady obtíží z jazykově matematického pohledu:

slovesné vazby: pád, úplnost: rovnat se čemu, přenést co kam, být kolmý k čemu, rovnoběžný s, dělitelný čím, násobkem čeho

přídavná jména: při porovnávání použita charakteristika ve smyslu absolutním, místo relativním – vynecháním vazby než u komparativu

význam slov: překrývat – krýt, vyznačit – označit, nakreslit – namalovat, je – může být, kostkovaný polštář, udělej kruh

číslo jmen a význam: (tady je) rovnoběžka, kolmice

pád, rod podstatného jména a číslovka: jeden, jedna, jedno, dva, dvě, tři, čtyři, pět

čtení, psaní a skloňování číslovek: základních, řadových, druhových (přirozených, celých a desetinných čísel, zlomků)

formulace otázek: slovosled, tázací zájmeno – volba, záměna, rozpor mezi užitým slovem a definičním oborem

odpověď na otázku: kam – odpoví co, proč – odpoví jak

negace: záměna s antonymem, pouze u slovesa bez uvědomění si, na co se změna vztahuje, negace uplatněná na přídavném jménu místo na slovesu

kvantifikátory: nepochopení, vynechání a domýšlení kvantifikátoru ne vždy správně

význam závorek, škrty a písmene: na rozdíl od jazyka českého.

REFERENCE:

Kaslová M. – přednášky:

1. Jazykové obtíže v komunikaci. Celostátní konference – mezioborové problémy komunikace, Litoměřice, květen 2000.

2. Hry se slovy aneb diagnostická funkce asociačních cvičení. Didaktický seminář Praha 2000.
3. Specifické problémy při řešení slovních úloh. Třebíč, květen 2000.
4. Tvorba slovních úloh. Didaktický seminář pro doktorandy, Chocerady 1999.
5. Jazyková cvičení. K aktuálním otázkám matematické přípravy učitelů 1. stupně ZŠ na Pedagogických fakultách ČR a SR, Olomouc, duben 1997.

LITERATURA

- [1] Králík, J.: *Written and spoken mathematics*. In: Slovo a slovesnost č. 54. 1993, pp. 191–193.
- [2] Machová, S.: *On spoken, written and standardized computer science terminology*. In: Slovo a slovesnost č. 54, 1993, pp. 194–195.
- [3] Kaslová, M.: *Pupils' creation of word problems*. In: Proceedings SEMT, Prague 1999, pp. 145–150.

VZDĚLÁVACÍ PROGRAM T³

Jan Kašpar

V práci učitelů matematiky a fyziky se v posledních letech jako neoddělitelná součást objevuje výpočetní technika, popř. technika na ni navazující. Před více než dvaceti léty se začalo využívat kapesních kalkulaček, které usnadnily a zrychlily provádění rutinních početních úkonů. Názory na používání této techniky se různily, odpůrci uváděli, že žáci zleniví a nebudou schopni a ochotni přemýšlet o reálnosti získaného výsledku, v argumentech pro bylo uváděno, že při správném vedení žáků učitelem dojde k časovému zisku, který bude možné využít k řešení více úloh a navíc, že výše uvedenou argumentaci proti je možné uplatnit např. i proti používání tabulek. Přibližně před 10–12 léty došlo k významnému kvalitativnímu skoku ve vybavenosti škol a začala počítačová éra. Proti kapesním kalkulačkám umožňují počítače grafické zobrazení výsledků, zobrazení více než jednoho řádku výpočtů a programování. Přínos pro názornost a přehlednost není potřeba zdůrazňovat, při programování úloh jsou navíc žáci nuceni k problému přistoupit komplexně a i při využívání převzatých programů musí mít představu o tom, co chtějí dělat a čeho chtějí dosáhnout. Bohužel nevýhodou počítačů jsou poměrně vysoké ceny a z toho plynoucí nedostatečná vybavenost škol, dále malá operativnost při využívání pro elementární početní úkony (mám tím na mysli nutnost „prokousat se“ nějakým prostředím než mohu začít jednoduchou prací – situace se poněkud zlepšila díky WINDOWS) a nakonec i mnoho standardně dodávaného programového vybavení, pro školní výuku nevyužitelného.

Za této situace se kolem roku 1985 začínají objevovat první grafické kalkulačky. Jejich výrobě se věnuje několik předních světových počítačových firem a tak poměrně brzy tato technika začíná pronikat do výuky na školách. Grafické kalkulačky jednak poskytují možnost velice operativně provádět základní početní úkony (stejně jako jejich předchůdci, kapesní kalkulačky), jednak umožňují na obrazovce zobrazení více řádků výpočtu, zobrazení grafů a tabulek a dále poskytují možnost programování.

Takřka okamžitě s jejich prvním výskytem se v USA začínají těmto kalkulačkám věnovat dva profesori OHIO State University v Columbus, pánové Bert Waits a Franklin Demana. Grafické kalkulačky však neposuzují z hlediska výpočetních schopností, ale z hlediska didaktického, z hlediska využitelnosti při výuce matematiky a dalších přírodovědných předmětů na školách. Jejich práce je zaměřena dvěma směry. Na jedné straně zkoumají možnost využití grafických kalkulaček v jednotlivých partiích matematiky, na druhé straně pořádají o této problematice kursy pro učitele, resp. pro instruktory učitelů (z řad učitelů), kteří výsledky jejich práce rozšiřují a samozřejmě také obohacují. Postupně se tak jimi začatý vzdělávací program, dnes nesoucí jméno T³ (Teachers Teaching with Technology) rozšiřuje nejprve po celých USA, později pak po celém světě. Spolu s uvedeným programem pro učitele, organizovaným formou kursů v průběhu školních roků, resp. letních škol o prázdninách, konala se každoročně od roku 1989 výroční otevřená setkání pro všechny členy a zájemce o výše uvedený program. Vzhledem k tomu, že od roku 1994 se letních škol začali zúčastňovat i zájemci z jiných kontinentů, bylo desáté výroční setkání v březnu 1998 v Nashville, USA, zorganizováno současně jako první mezinárodní (zúčastnilo se ho kolem 3000 učitelů a instruktorů z USA a 51 zahraničních účastníků ze 17 států Evropy, Asie, Jižní Ameriky a Austrálie) a program T³ byl oficiálně vyhlášen jako celosvětový. Díky tomu, že jsme v letech 1993 až 1996 na KDM na MFF UK úspěšně řešili granty, zabývající se využitím grafických kalkulaček ve výuce matematiky na středních školách, byli jsme s kolegyní Robovou na výroční setkání do Nashville pozváni. Zde jsme měli možnost se jednak seznámit s aktivitami a produkty T³ a porovnat je s výsledky naší práce, jednak nám bylo umožněno navázat kontakty s představiteli již ustavené evropské větve T³. Ihned v Nashville byla zahájena jednání o možnosti začlenění České republiky do programu a po následném projednání nezbytných formalit byla uzavřena dohoda o připojení České republiky k programu T³ od 1. září 1998, přičemž garantem se stala Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze. V současné době jsou členy evropské větve Anglie, Skotsko, Finsko, Švédsko, Dánsko – „severská“ skupina, Německo, Rakousko, Slovinsko, Švýcarsko – „germánská“ skupina, a dále samostatně Francie, Španělsko, Portugalsko, Belgie, Holandsko, Polsko, Maďarsko a samozřejmě Česká republika.

Program má také podstatný vliv na výrobce grafických kalkulaček. Nejprve, aspoň u firmy Texas Instruments, která stála u zrodu vzděláva-

cího programu T^3 a stále ho podporuje, výrobní program sledoval zvyšování kvality této techniky. Tak byly postupně vyvinuty typy, u nichž docházelo k zvětšování paměti a doplňování dalších funkcí. Protože však velice podstatným hlediskem (a to hlavně díky aktivitám programu T^3) se stala využitelnost pro výuku matematiky na základních a středních školách, začaly být kladeny požadavky na vhodnou formu výstupu a v neposlední řadě i cenovou dostupnost. Např. u typu TI 92 je poprvé k dispozici symbolický zápis a trojrozměrná grafika. Tato zatím nejvýkonnější kalkulačka firmy TI (prezentovaná jako kalkulačka pro vysoké školy) však jak cenově, tak svými schopnostmi přesahovala potřeby středních a základních škol a tak dochází k vývoji jednodušších a levnějších kalkulaček, umožňujících ovšem jak symbolický zápis, tak rolování obrazovky, běžné u počítačů. Kromě toho byly pro potřebu výuky dalších přírodovědných předmětů vyvinuty datový a impulsový analyzátor (CBL, resp. CBR), umožňující přenos naměřených hodnot do grafických kalkulaček a zde potom následné vyhodnocení a zpracování. Dále je technicky zabezpečen přenos dat mezi kalkulačkami navzájem a mezi kalkulačkou a počítačem. Nejnovější typy kalkulaček TI (TI 83+, TI 89 a TI 92+), vybavené tzv. FLASH technologií, umožňují dokonce přenos souborů z Internetu. Uvedené informace se týkají výrobního programu firmy TI, ovšem při sledování produktů ostatních výrobců je zřejmé, že trendy u všech výrobců jsou velice podobné. Jenom pro doplnění bych rád uvedl, že součástí programu T^3 se stala také CABRI geometrie, implementovaná na kalkulačce TI 92. Tolik stručná informace o celosvětovém vzdělávacím programu T^3 , který je úspěšně realizován i u nás a těší se zájmu i podpoře jak učitelů, tak i fakult, budoucí učitele připravujících.

Na závěr se stručně zmíním o dosavadních aktivitách programu T^3 a plánech do budoucna. Jak již bylo uvedeno, v letech 1993 až 1996 byly na KDM MFF UK řešeny granty, zabývající se využitím grafických kalkulaček ve výuce matematiky. Na základě tehdy získaných poznatků a podle harmonogramu, začleněného do dohody o připojení České republiky k programu T^3 , jsou pořádány kurzy pro učitele. V krátkých kurzech, obvykle 3–4 hodinových, jsou poskytovány základní informace o grafických kalkulačkách, v dlouhých kurzech, obvykle 18–20 hodinových, jsou pak kromě podrobných informací o kalkulačkách doplněny podrobnější informace o programování a je zaměřena pozornost na využití kalkulaček při výuce vybraných partií matematiky jako např. řešení rovnic a nerovnic, finanční matematika, statistika, základy dife-

renčiálního a integrálního počtu apod. V rámci tohoto programu byly uspořádány kurzy pro budoucí instruktory a díky tomu jsou kurzy programu pořádány kromě Prahy i v západočeském, jihočeském a severomoravském regionu (realizováno instruktory ze Západočeské Univerzity v Plzni, Jihočeské Univerzity v Českých Budějovicích, resp. Ostravské Univerzity). Od září 1998 do konce roku 1999 bylo v rámci programu T³ uspořádáno celkem 41 krátkých kursů a 15 dlouhých kursů, kterých se zúčastnilo celkem 572 učitelů, resp. studentů – budoucích učitelů matematiky, a dále se uskutečnila 3 setkání instruktorů. Kromě toho je od 1. března 2000 otevřeno stálé konzultační středisko o dané problematice na KDM MFF UK (tel. 02/21 91 32 34), kde je mj. možné půjčovat školám krátkodobě sady grafických kalkulaček a jednotky CBL a CBR. Nakonec bych rád ještě uvedl jednu podstatnou informaci, a to, že 18-ti hodinové kurzy o grafických kalkulačkách a stejně dlouhý kurs CABRI II získaly akreditaci MŠMT ČR jako vzdělávací programy v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků. Od školního roku 1999/2000 byly na MFF kurzy o grafických kalkulačkách zařazeny do programu U3V.

Veškeré informace o programu T³ v České republice můžete získat na adrese www.mff.cuni.cz/iso/news/t3/, popř. o další si můžete napsat na adresu: t3@karlin.mff.cuni.cz, podrobnější informace o celosvětovém programu T³ pak můžete získat na adrese www.t3ww.org/t3.

ÚLOHY ZNOVU OBJEVENÉ

Milada Kočandrlová

Abstrakt: *Od absolvování fakulty učím na FSv, tj. téměř 30 let. Je všeobecně známo, že si technické obory nevybírají právě nejlepší absolventi středních škol. Tak mne zajímalo, jací jsou ti studenti, kteří k nám na fakultu nepříjdou. Od září minulého roku jsem vedla na Dopplerově gymnáziu volitelný matematický seminář. Všichni byli studenty 3. ročníku a jejich zájem byl prakticky pouze o řešení úloh na úrovni MO kategorie A, nebo mezinárodní MO. Vzhledem k tomu, že mnohé z těchto úloh již řešili v minulém ročníku, bylo třeba hledat nové zdroje. Těmi se staly starší ročníky Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky.*

TROCHU HISTORIE

V létě roku 1861 čtyři studenti matematiky a fyziky pražské filozofické fakulty založili *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*. Jeho cílem bylo prohlubování vzdělání členů *Spolku*, kteří se připravovali na dráhu středoškolských profesorů matematiky a fyziky.

Po osmileté činnosti, kdy časté změny studentů ve vedení *Spolku* vedly ke kolísání jeho činnosti, byl *Spolek* přejmenován na *Jednotu českých matematiků*. Jejimi členy už nebyli pouze studenti. Postupně se do *Jednoty* přihlásila většina středoškolských učitelů matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie. Např. v r. 1911 tvořili právě tito učitelé 49 % členské základny.

V průběhu své existence *Jednota* pečovala o informovanost svých členů prostřednictvím vydávaných časopisů. Za základ časopisecké činnosti *Jednoty* lze považovat návrh F.J. Studničky na vydávání zpráv. V roce 1870 vyšla *První zpráva* a v následujících dvou letech *Druhá* a *Třetí zpráva*. *Zprávy* vedle informací o pořádaných přednáškách obsahovaly i úlohy pro žáky. Tyto úlohy lze pokládat za začátek matematických soutěží studentů.

Na *Zprávy* pak navázal *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, který se zvláštním zřetelem k studujícím redigoval F.J. Studnička. *Časopis* měl jednak uspokojovat zájmy všech členů *Jednoty*, poskytovat publikační možnosti vědeckým pracovníkům, ale i zaujmout učitele a jejich studenty.

Rostoucí zájem studentů o řešení úloh, které zde vycházely, vedly po dvaceti letech jeho trvání v roce 1892 ke vzniku samostatné *Přílohy pro středoškolské studenty*. Po dalších třiceti letech ruší *Jednota Přílohu* a počínaje šk. rokem 1921/22 vydává časopis *Rozhledy matematicko-přírodovědné*, později *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Tento zájem o úlohy ale vydržel pouze do třetího ročníku *Rozhledů*. V následujících letech neustále měl tendenci klesající, viz rozborů v [1, 2].

NĚKOLIK DAT

Od roku 1872, kdy vyšel 1. ročník *Časopisu*, do roku 1921, kdy začaly vycházet *Rozhledy*, tj. v 50 ročnících *Časopisu*, bylo uvedeno cca 1 580 původních úloh. Jejich řešení se věnovali žáci 4.–8. tříd všech typů tehdejších středních škol, ale také studenti vysokých škol a technici z praxe.

Mezi oblíbené úlohy patřily na prvním místě rovnice a soustavy rovnic. Dále pak úlohy planimetrické. K méně oblíbeným úlohám patřily úlohy na geometrická místa, kterými byly většinou křivky vyšších stupňů, dále úlohy o křivkách vůbec, úlohy z teorie čísel a pravděpodobnosti i kombinatorika.

Tomu také odpovídala skladba úloh. Nejvíce v celkovém počtu úloh je zastoupena planimetrie, a to trojúhelník, méně pak čtyřúhelník a pravidelné mnohoúhelníky. Poměrně početná je i skupina úloh stereometrických, ale značná část z nich by pro našeho studenta nebyla vhodná. Především úlohy na výpočty řezů těles, či seříznutých částí těles.

Vedle různých rovnic pro jednu neznámou zde jsou soustavy rovnic pro více než jenom dvě neznámé a soustavy nejen lineárních algebraických rovnic.

Pro geometrii, jak rovinnou, tak prostorovou, je zcela samozřejmé numerické řešení, ze kterého je pak v některých případech odvozena konstrukce.

DESET ÚLOH

Úloha 1 *Do kruhu poloměru r vepsati rovnoramenný trojúhelník, jehož půdice s výškou mají součet $3r$.*

[A. Strnad, ČPMF XXIV, 1895, úloha řešena Pythagorovou větou]

Úloha 2 *Do dané kružnice sestrojena jest strana vepsaného pravidelného trojúhelníka, čtyřúhelníka a šestiúhelníka. Do obou úsečí každou z těchto stran vzniklých, vepsány kružnice, které se vespolek v středu příslušné strany dotýkají. Jak se má součet s_3 prvních dvou kruhů k součtu s_4 druhých a k součtu s_6 třetích kruhů?*

[V. Jelínek, ČPMF XXIV, 1895, úloha řešena Eukleidovou větou o výšce]

Úloha 3 *Paprsek, který rozděluje úhel C trojúhelníka ABC na části $\gamma_1 + \gamma_2 = C$, půlí protější stranu, jest-li $\sin \gamma_1 : \sin \gamma_2 = \sin \alpha : \sin \beta$.*

[V. Jelínek, ČPMF XXIV, 1895, úloha řešena sinovou větou]

Úloha 4 *Jest možný trojúhelník, jehož strany i úhly jsou v arithmetické posloupnosti?*

[A. Strnad, ČPMF XIX, 1889, úloha řešena kosinovou větou]

Úloha 5 *Na jednom rameni úhlu 15° přenesena od vrcholu a úsečka $ab = m$; pak vedeny od jednoho ramene ke druhému úsečky $bc = cd = \dots = m$. Ustanoviti jest obsah trojúhelníků $abc, bcd \dots$ jakož i jejich součet.*

[A. Strnad, ČPMF XXV, 1896]

Úloha 6 *Kolik procent plochy pravidelného šestiúhelníka obsahuje čtveřec tomuto vepsaný?*

[A. Strnad, ČPMF XX, 1891]

Všechny úlohy ze stereometrie jsou zaměřeny na počítání objemů a povrchů těles.

Úloha 7 *Dokažte o kuželi o danou kouli opsaném a dvakrát tak vysokém jako koule:*

1. že jest povrch jeho dvojnásobné povrchu koule,
2. že jest krychlový obsah jeho dvojnásobné obsahu koule a konečně

3. že jest kužel tento nejmenší ze všech o kouli opsaných kuželů.

[A. Koštěnek, ČPMF XIII, 1884]

Jedna ze zajímavých rovnic od prof. A. Strnada:

Úloha 8 *Které jsou hodnoty kladných součinitelů a, b v rovnici $ax + by = 620$, má-li tato 10 kladných celistvých řešení, ve kterých součet všech 10ti x rovná se 455 a součet příslušných y jest 335.*

[ČPMF XIX, 1889]

A jedna soustava:

Úloha 9 *Má se řešiti soustava rovnic:*

$$\begin{aligned} x + y &= u + v, \\ xy &= uv, \\ \frac{x}{y} + \frac{u}{v} &= 2, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 &= 4. \end{aligned}$$

[autor neuveden, ČPMF VIII, 1879]

Na konec jedna o číslech:

Úloha 10 *Dokažte, že*

1. každé číslo tvaru $p^3 + 11p - 12$ při lichém p jest dělitelno 24;
2. každé číslo tvaru $5p^2 - 2p$ při sudém p jest dělitelno 8;
3. každé číslo tvaru $p^4 - 20p^3 + 68p^2 - 64p$ jest při sudém p dělitelno 192.

[V. Řehořovský, ČPMF XII, 1883]

LITERATURA

- [1] Lerl, K.: Účast žactva na řešení úloh z Rozhledů. ČPMF, 1935, D24-5.
- [2] Hyška, A.: O matematických úlohách v Rozhledech. ČPMF, 1936, D268-74.

POHYB – TŘETÍ „ROZMĚR“ CABRI-GEOMETRIE UKÁZKY APLIKACÍ CABRI-GEOMETRIE V ALGEBŘE, GEOMETRII A ASTRONOMII

Milan Koman

Rozdíl mezi znázorňováním geometrie na papíře a v Cabri-geometrii je asi jako rozdíl mezi fotografií a filmem nebo mezi sochou herce a jeho živým vystoupením.

Pohyb je jednou z hlavních předností Cabri-geometrie. Ten dává jedinečnou příležitost k používání **kinematického přístupu** pro studium a řešení nejrůznějších geometrických problémů. Jeho předností je, že dává možnost nejen vnímat, objevovat a uchopovat geometrická fakta, ale vnímat, uchopovat a používat i **geometrické procesy**. Může tak přispívat i k rozvíjení **procesuálního myšlení žáků** i všech ostatních uživatelů. Možnost interaktivní spolupráce s dynamickými geometrickými programy poskytuje možnost **heuristického přístupu** při zkoumání problémů a problémových situací.

Je škoda, že Cabri-geometrií je u nás vybaveno až dosud jen málo škol. S tím souvisí i nízký počet článků věnovaných geometrickým softwarům v našich didaktických časopisech a absence tohoto tématu ve většině programů didaktických konferencí pořádaných JČMF i jinými našimi organizátory. Jiná situace je například u našich sousedů v Německu a Polsku. V Německu je na každoročních konferencích matematiků a didaktiků matematiky známých pod názvem „Tagung für Didaktik der Mathematik“ (obdoba našich „Setkání matematiků všech typů škol“) vždy zařazena samostatná sekce věnovaná této problematice. Pravidelně na nich vystupují například *R. Hölzl*, *J. Meyer* a *H. Schumann*. V Polsku zase vychází pod vedením *S. Turnaua* specializovaný časopis věnovaný Cabri-geometrii pod názvem *Cabrista*. Lze proto jen přivítat, že na letošní „Setkání“ byla problematika geometrických softwarů ražena.

Príspevek byl podpořen grantem GA ČR 406/99/1696 a výzkumným záměrem J1398:114100004.

Jako ukázky aplikací Cabri-geometrie jsem vybral příklady ze tří oblastí: a z algebry, z geometrie a z astronomie.

1 ALGEBRA – HLEDÁNÍ KOMPLEXNÍCH KOŘENŮ ROVNIC 2. A 3. STUPNĚ

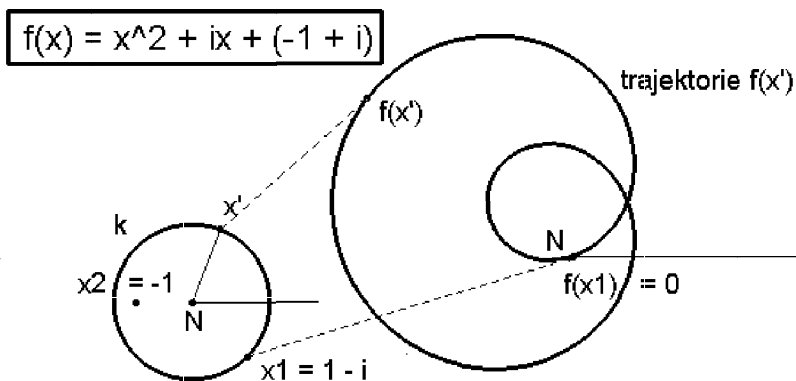
Uvedená Cabri-metoda je založena na zobrazení situace v Gaussově rovině komplexních čísel. Ukážeme si to na rovnici

$$x^2 + ix + (-1 + i) = 0. \quad (1)$$

Její levou stranu si označíme $f(x)$, tedy

$$f(x) = x^2 + ix + (-1 + i). \quad (2)$$

Snadno se přesvědčíme, že rovnice (1) i polynom (2) mají komplexní kořeny: $x_1 = 1 - i$, $x_2 = -1$.



Obr. 1

Nyní budeme v Gaussově rovině komplexních čísel uvažovat zobrazení:

$$F(x): x \rightarrow f(x) = x^2 + ix + (-1 + i)$$

Při tomto zobrazení se kořeny polynomu $f(x)$ (tj. i kořeny rovnice (1)) zobrazí do počátku N Gaussovy roviny (obr. 1). Pro lepší srozumitelnost znázorňujeme vzory v jedné rovině (na obr. 1 vlevo) a obrazy ve druhé rovině (na obr. 1 vpravo).

Zvolme nyní proměnný bod x' , který necháme probíhat po kružnici, která má střed v počátku N . (Nazveme ji pracovně „středová“ kružnice.) Budeme zkoumat, jakou trajektorii proběhnou obrazy $f(x')$ bodu x' . Protože středová kružnice je spojitá uzavřená křivka, bude i trajektorie bodů $f(x')$ uzavřená spojitá křivka. Může mít však, jak vidíme na obrázku 1, smyčku. Pokud středová kružnice prochází kořenem polynomu (na obr. 1 prochází např. kořenem x_1), prochází trajektorie bodů $f(x')$ počátkem N . Budeme-li tedy umět sestřiovat trajektorie $f(x')$ odpovídající libovolné středové kružnici a mezi nimi vyhledat ty, které procházejí počátkem, snadno najdeme kořeny daného polynomu jako vzory počátku N .

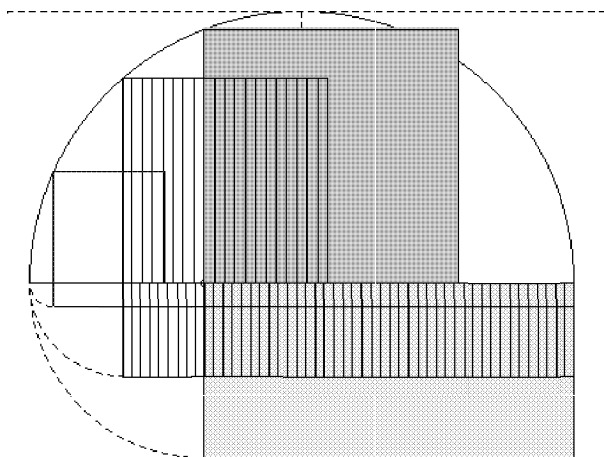
Popsaná idea je stará nejméně půl století a pochází od autorské dvojice *Birkhoff – Mac-Lane* [1]. Avšak v době, kdy byla publikována, neexistoval vhodný software, který byl umožnil ji prakticky využít. Jak se to někdy stává, předběhla tato idea možnosti svého využití o mnoho let. Na přednášce bude právě praktické využití této myšlenky ilustrováno na příkladech. Program lze připravit tak, že je možné koeficienty rovnic „libovolně“ měnit, viz *M. Koman*, [2]. Omezením je pouze rozměr obrazovky.

Budou uvedeny i náměty ke zkoumání. Například vyšetřování vícenásobných kořenů, komplexně sdružených kořenů, polynomů třetího a vyššího stupně, binomických polynomů.

2 GEOMETRIE – ÚLOHY NA EXTRÉMY

Cabri-geometrie poskytuje vhodný nástroj pro experimentální zkoumání extrémálních úloh. Umožňuje to právě skutečnost, že v Cabri-geometrii můžeme dynamicky spojitě měnit geometrické útvary a pohybovat s nimi. Množiny bodů (a nejen bodů, ale i dalších útvarů) můžeme vytvářet plynulým pohybem, což dává báječnou příležitost sledovat a zkoumat dynamicky se měnící situace a objevovat s nimi související nové jevy. Problematikou extrémálních úloh se zabývají například *H. Schumann* [3] a *R. Danckwerts* [4].

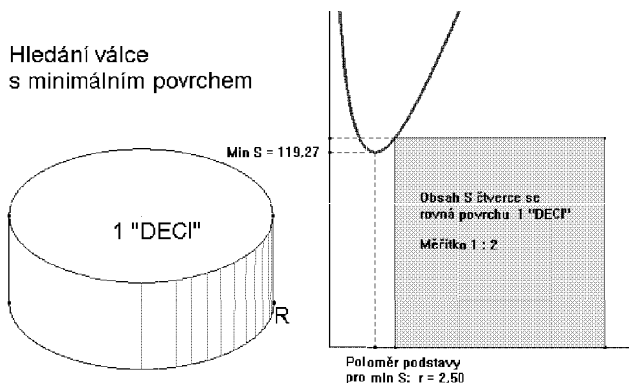
Velice hezký důkaz isoperimetrického problému pro obdélníky užitím Eukleidovy věty o výšce demonstruje pomocí Cabri právě *R. Danckwerts* v [4], viz obr. 2. Tažením bodu A se mění čtverec i obdélník. Podle Eukleidovy věty o výšce mají v každé poloze stejný obsah. Ten se ovšem mění podle polohy bodu A . Co se však nemění, je obvod obdélníku z obou



Obr. 2

úseků přepony. Tažením bodu A lze tedy demonstrovat, že při daném obvodu obdélníku je jeho obsah největší, je-li tento obdélník čtverec.

Hledání válce daného objemu s minimálním povrchem naznačuje obr. 3 sestrojený podle *H. Schumann* [3].



Obr. 3

Tažením bodu R se mění poloměr válce. Změna povrchu se zkoumá na grafu. Pro lepší názornost je povrch válce znázorněn jako čtverec stejného obsahu.

3 ASTRONOMIE – DÉLKA DNE MEZI ROVNÍKEM A ZEMSKÝMI PÓLY

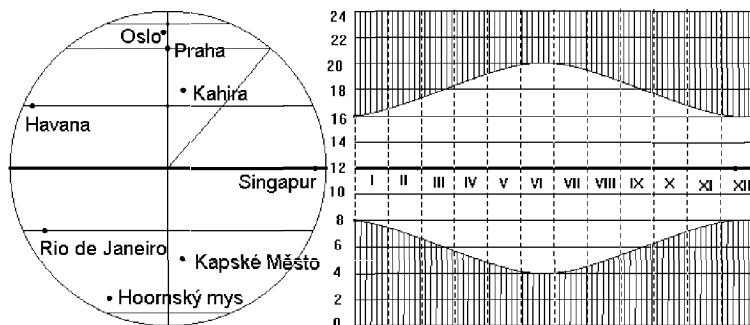
Všichni máme zkušenosti s měnění se délkou noci v průběhu kalendářního roku. V našem povědomí jsou i dlouhé zimní polární noci a naopak dlouhé letní polární dny. Je zajímavou geometrickou úlohou na povrchu koule zkoumat délku noci a dne matematicky. Z astronomie je nutné znát pojmy *ekliptika*, úhel $\alpha = 23,44^\circ$, který ekliptika svírá se *světovým rovníkem* a *deklinaci* δ . Dále pojmy *obratník raka* a *kozoroha*, *severní a jižní polární kruh* a jejich *zeměpisné šířky*.

Pro aktuální zeměpisnou šířku λ pozorovatele lze odvodit vztah

$$\sin \delta = \sin \alpha \cdot \sin \lambda.$$

Označme ještě úhel odpovídající na čtyřiadvacetníkovém ciferníku úhlu od západu Slunce do východu Slunce jako 2ϕ (úhel noci). Konečně označme „úhel kalendáře“ udávající aktuální polohu Slunce na ekliptice jako κ . (Například pro jarní bod, tj. pro jarní den rovnodennosti, je $\kappa = 0^\circ$. Pro letní slunovrat je $\kappa = 90^\circ$.)

Délka dne a noci



Obr. 4

Potom můžeme odvodit následující základní vztahy nutné pro sestrojení obr. 4.

$$\begin{aligned} \phi &= \arccos(\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \kappa), & \text{pokud } |\operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \kappa| \leq 1 \\ \phi &= 180^\circ, & \text{pokud } \operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \kappa < -1 \\ \phi &= 0^\circ, & \text{pokud } \operatorname{tg} \lambda \cdot \operatorname{tg} \kappa > 1 \end{aligned}$$

Na základě těchto údajů lze sestavit obr. 4. Zeměpisnou šířku lze měnit tažením bodu po „ose“ zeměkoule.

LITERATURA

- [1] Birkhoff, G. – Mac Lane, S.: *A Survey of Modern Algebra*. New York 1954.
- [2] Koman, M.: *Moiivresche Formel und Wurzeln der Polynome, Visualisation mit Cabri-Geometrie*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Franzbecker Verlag.
- [3] Schumann, H: *Computererstütztes Entdeckens und Lösen geometrischer Extremwertaufgaben*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999
- [4] Danckwerts, R.: *Dynamische Visualisierung und Mathematikunterricht: Ein Beispiel*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Herausg. M. Neubrand, Verlag Franzbecker, s. 141–144.
- [5] Koman, M.: *On the Length of Days Between Singapore and the North Pole*. Mathematics & Informatics Quarterly (4), No. 4, 1997, s. 170–172.

POJETÍ FUNKCE U ČESKÝCH ŽÁKŮ

Alena Kopáčková

Motto: „*Chápat neznamená být divákem, ale konstruovat si reprezentace. Bez mentálních obrazů není soudržný svět. . . . dojem pochopení problému nezíská žák z učitelova vysvětlování, ale na základě transformace, kterou při poslechu učitele provádí.*“ [1]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá pojmem funkce z hlediska pojmotvorného procesu žáka a studenta.

ÚVOD

Pojem funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů v matematice. Do školské matematiky však pronikl až počátkem 20. století; zasloužil se o to německý matematik Felix Klein, který *funkční myšlení* považoval za osu veškerého vyučování matematice a popsal jej slovy: „*Funkční myšlení chápeme jako schopnost představivosti proměnnosti veličin ve vzájemné spojitosti a podmíněnosti*“ [5].

Zájem psychologů i didaktiků matematiky se v posledních letech stále více soustřeďuje na to, co se děje v mozku žáka, co v něm zůstane po učitelově výkladu, jakým způsobem nastává porozumění pojmu. Vznikla celá řada tzv. kognitivně psychologických teorií, které ovlivnily dnešní didaktiku. Připomeneme stručně tzv. didaktický konstruktivismus [3]. Pro stoupence tohoto směru je společná víra v to, že porozumění pojmu není pouze kopií nějakého ideálního pojmu, ale sestává z vytváření *reprezentací pojmu (individuálních konstruktů)* v mysli žáka. Jde o aktivní, intencionální (A. Sierpínská) a individuální proces. Žákovo porozumění je tedy ovlivněno nejen učitelem a způsobem jeho výkladu, ale i předchozí zkušeností žáka (viz také *prekoncepty* žáka [1]), sociálním prostředím, interakcemi ve třídě, formami komunikace. Někteří badatelé kladou důraz na žákovy (převážně vrozené) dispozice, tzv. *pedagogický profil* žáka

(A. de la Geranderie, A. Taurisson rozlišují dva základní typy: *auditivní a vizuální*, [1]), u prof. Mareše *kognitivní styl*, širěji *styly učení* [4].

Z modelů poznávacího procesu uvedme model popsáný v [2]: *motivace – separované modely – univerzální model – poznatek (objev) – začlenění do kognitivní struktury (krystalizace, automatizace)*. Srovnajme s vývojovými stadii myšlení u Piageta: *senzomotorické myšlení – předoperační myšlení – konkrétní operace – formální operace* (tzv. *interiorizací vnějších myšlenkových operací k vnitřnímu procesu*) nebo s Brunerovými stadii: *akční myšlení – ikonické myšlení – symbolické myšlení* (*postupným abstrahováním od konkrétností se idea pojmu stává nezávislou na konkrétních modelech*). Pojem (angl. *concept*) je stavebním kamenem kognitivní struktury. Vyskytují se i termíny jemně významově odstíněny, např. *pojmový komplex*, zahrnující také situace, vztahy a postupy týkající se daného pojmu (prof. Hejný), či *pojetí, koncept*. V naší situaci pocítujeme místy jako vhodnější užívat těchto významově širších termínů, např. *pojmový komplex funkce* vedle užšího *pojem funkce*.

ONTOGENEZE POJMU

Funkční myšlení se u žáka začíná rozvíjet daleko před tím, než se ve škole s pojmem funkce setká. Toto období uvědomování si kauzality jevů, užívání různých tabulek závislostí, kreslení grafů apod. lze považovat za již zmíněnou motivační (synkretickou) etapu pojmotvorného procesu. Konkrétní příklady funkcí probírané na 2. stupni ZŠ s jejich vlastnostmi, grafy a vzájemnými vztahy vytvářejí separované modely pojmu v žákově mysli. Univerzální model pojmu funkce by měl začít uzrávat v období vyslovení první obecné definice funkce, což se v našich školách v současnosti děje většinou v devátém ročníku základní školy, příp. v kvartě víceletého gymnázia. V tomto období je funkce předkládána vesměs jako předpis či pravidlo, které každé hodnotě nezávisle proměnné z definičního oboru přiřazuje právě jedno reálné číslo (srovnajme s historicky první definicí funkce pocházející od Johanna Bernoulliho z r. 1697: „*Funkce proměnné veličiny je veličina složená určitým způsobem z této proměnné veličiny a z konstant*“ [5]). Na dalších typech škol se naši žáci setkávají s definicí pojmu funkce většinou znovu, ať už je to zpravidla ve druhém ročníku čtyřletých gymnázií či v úvodních matematických kurzech na vysoké škole. Zde již je často funkce předkládána jako zobrazení (tj. speciální binární relace) čili jako množina uspořádaných dvojic s jistou

vlastností. Někteří autoři učebnic ztotožňují funkci s grafem funkce, jiní to zásadně odmítají. Podobně při fylogenezi pojmu funkce sledujeme postupné oprošťování od potřeby analytického vyjádření u Bernoulliho a Eulera až po obecnou definici např. u Dirichleta a Lobačevského.

POPIS VÝZKUMU

Základní otázkou, kterou jsme si v první fázi výzkumu stanovili, bylo, zda je možno konstatovat, že žák přechází k etapě univerzálního modelu pojmu funkce poté, co se ve škole alespoň jednou s obecnou definicí setkal, a zda tato skutečnost významněji souvisí se stupněm školy, již žák navštěvuje. Dalším úkolem, který jsme si v této fázi dali, bylo pokusit se analyzovat a klasifikovat zjištěné nedostatky a navrhnout reedukační postupy. Do průzkumu, který probíhal ve školním roce 1999/2000, byli zapojeni žáci tří devátých ročníků z Liberce, pěti kvart víceletých gymnázií z Liberce a Teplic, dvou druhých ročníků čtyřletého gymnázia z Liberce a 121 studentů Technické univerzity v Liberci (jednalo se o posluchače Fakulty pedagogické, učitelství 1. stupně základní školy v prvním ročníku dálkového i denního studia, posluchače třetího ročníku učitelství matematiky 2. a 3. stupně škol a o posluchače prvního ročníku Fakulty hospodářské). Testy byly zadávány poté (většinou bezprostředně), co se funkce jako obecný pojem ve škole probírala, a žáci o nich nebyli předem informováni. Sestávaly z následujících úkolů:

Test č. 1: a) **Definovat, resp. vlastními slovy vysvětlit, co to je funkce** (reálná funkce jedné reálné proměnné – specifikováno u čtyřletého gymnázia a u vysokoškoláků s výjimkou učitelství 1. stupně).

b) **Do jednoho ze dvou kartézských souřadných systémů načrtnout graf libovolné funkce, do druhého graf libovolné „nefunkce“** (tj. binární relace, která není funkcí).

Test č. 2: Identifikovat funkci/nefunkci v předložené sérii (9–12) grafů. (Testovaný žák měl vždy zapsat pouze ANO/NE.)

Test č. 3: Identifikovat funkci/nefunkci v předložené sérii osmi slovních formulací závislostí mezi proměnnými. (Žák měl zapsat ANO/NE a své rozhodnutí stručně zdůvodnit.)

Test č. 4: Slovní asociace – napsat první slovo, které žáka napadne při vyslovení slova nikoliv nutně svázaného s oblastí funkcí.

VÝSLEDKY PRŮZKUMU

Celkem jsme získali 575 vyplněných testů. Vyhodnocení se ukázalo obtížným zejména u testů 1a) a 3). U testu 4) máme zatím malý počet respondentů, takže jeho zhodnocení není do zde prezentovaných závěrů zahrnuto. Vzhledem k omezeným možnostem tohoto příspěvku nebudeme uvádět tabulky shrnující výsledky jednotlivých testů, ale zaměříme se spíše na okomentování některých typických žákovských odpovědí. Žákovské odpovědi jsou doslovné (včetně pravopisných chyb) a jsou přepisovány kurzívou s uvozovkami.

Test č. 1 prokázal, že pro mnohé žáky je **definice** pojmu funkce **formální** záležitostí, vymezení pojmu u nich nesouvisí s další matematickou činností s daným pojmem. Definice jim nijak nepřekáží (a to ani v pozitivním slova smyslu, ani v negativním). To, zda definici žáci pociťují jako nezbytnost, bylo dobře vidět z uváděných grafů funkcí a nefunkcí; ty byly totiž často s definicí v rozporu. Původní záměr rozlišovat při hodnocení testu definici správnou a nesprávnou se ukázal jako neuskutečnitelný. Po prvním zhodnocení jsme si začali všimnout více toho, zda žák jakýmkoliv způsobem zmínil skutečnost, že přiřazení závisle proměnné je jednoznačné. To jsme potom brali za symptom porozumění pojmu (pokud tomu i oba uvedené grafy odpovídaly). Někteří žáci namísto vymezení jednoznačnosti závisle proměnné užili při formulaci popření této jednoznačnosti a vazby „funkce je, když se nestane...“. Často přitom „viděli“ graf: *„funkce je když jsou body jak koliv ale ne nad sebou nebo přímka“* (9. tř. ZŠ; tentýž žák dále za příklad funkce uvádí konstantu, za příklad nefunkce graf $x = a$; není tedy v rozporu se svou definicí); *„funkce je, když uděláme rovnoběžku dolu a body nejsou nad sebou ale vedle sebe smí být“* (9. tř. ZŠ; za příklad funkce uvádí graf připomínající $-\cos$, za graf nefunkce totéž otočené o 90° ; opět tedy není v rozporu s definicí). Přístup žáků k vymezení pojmu funkce byl v zásadě dvojí: někteří se snažili za každou cenu **reprodukovat definici**, kterou probírali ve škole, a často se tak objevovala torza ztrácející smysl po vynechání klíčových slov: *„funkce – předpis který každému prvku z množiny D přiřazuje právě reálné číslo x “*; *„funkce je obor hodnot H a R “*; *„funkce je pojem, který musí mít D, H “* (vše 9. tř. ZŠ). Jiní se snažili

pojem funkce **objasnit** zcela **vlastním**, někdy kuriózním **způsobem**: „*Funkce funguje pravidelně, dá se podle ní řešit. Ona sama se dá řešit podle zaběhnutých regulí*“ (2. r. gymnázia); „*funkce je část, jež má body v grafu y, x* “; „*funkce je soustava prvků splňujících stejné podmínky*“ (1. r. FP). Někteří žáci ani v obecné definici nepřekročili stádium separovaných modelů: „*funkce*=sin, cos, tg, cotg“; „*funkce: je přímá a nepřímá úměrnost*“; „*funkce: $y = x^2$* “; „*fce: hodnota, kde se stoupajícím x stoupá i y a naopak (s klesajícím x klesá i y)*“ – (vše 1. r. FP). Příklady, kdy nabízené grafy funkcí a nefunkcí jsou v rozporu s uvedenou definicí: „*Fce: každému číslu $z \in \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno $x \in \mathbb{R}$* “ (1. r. FH), přičemž tentýž student za příklad grafu nefunkce uvádí jeden jediný bod; „*funkce = řešení rovnice (nerovnice)*“ (1. r. FP), přičemž tentýž student uvádí za příklad funkce graf podobný parabole $y = x^2$, za příklad grafu nefunkce izolovaný bod; „*Definici funkce nazýváme předpys který každému prvku x z množiny D přiřazuje právě jedno reálné číslo*“ (9. tř. ZŠ), přičemž tento žák za příklad grafu funkce uvádí dvě rovnoběžné přímky nad sebou a za příklad nefunkce graf $y = ax; a > 0$. Podrobně jsme dále rozebrali, jaké grafy byly uváděny za příklady funkcí a nefunkcí. Shrňme-li, za příklad **funkce** to byly nejčastěji funkce **lineární** a **kvadratická**, a to ještě zcela zřetelně jejich **speciální případy** (např. kladná směrnice u lineární funkce, kladný koeficient u kvadrátu kvadratické funkce, grafy zpravidla v základním tvaru bez posunutí). Jako **chybné příklady „nefunkcí“** žáci uváděli nejčastěji **diskrétní body** a **konstantní funkci**, často také **graf obecnější spojitě funkce**, u níž evidentně neznali analytické vyjádření.

Z testu č. 2 vyplynulo např: grafem **funkce je** pro žáka často to, co **viděl na tabuli** či v učebnici; to, co se **podobá známému** grafu; to, co je **symetrické**, **spojité** a **hladké**. Grafem **funkce není** to, co je **nespojitě**, zejména ne **diskrétní body** a zejména ne **jeden bod**; dále jím není to, co je **posunutě** (tj. není v základní poloze); co je **nekompletní** (např. část grafu funkce $y = x^2$ byla často považována za nefunkci, zatímco „kompletní“ graf téže funkce za funkci) a dále také to, co je „**slepené**“ z grafů více funkcí. Zvláštní postavení u žáků opět zaujímá **konstanta**; je opět často považována za nefunkci. Vzhledem k tomu, že v testu č. 2 žáci pouze měli označit ANO/NE, nešlo o důvodech jejich rozhodnutí spekulovat.

Vyhodnocení **testu č. 3** poskytlo kromě očekávaných výsledků (**nedůvěra v neprostou funkci** a speciálně **v konstantu, potřeba analytického vyjádření**) i některé další závěry. Vzhledem k tomu, že v tomto testu bylo požadováno zdůvodnění odpovědi, ukázalo se, že u dvou různých žáků slouží tentýž důvod jako argument pro dva protichůdné závěry, a naopak, jak dva protichůdné argumenty mohou sloužit pro zdůvodnění téhož závěru. Zaměříme se nyní na některé typické odpovědi.

Předpis, který každému číslu přiřadí jeho absolutní hodnotu.

„*NE – pro $2x$ bychom měli stejné y* “ – 2. r. gymnázia (nedůvěra v neprostou funkci).

„*NE – k hodnotě x můžeme najít $2y$* “ – 2. r. gymnázia (**záměna závisle a nezávisle proměnné**).

Předpis, který každému psu přiřadí počet jeho nohou.

„*NE – každý pes má 4 nohy*“ – 9. tř. (**neporozumění slovu počet**, **záměna s počtem závisle proměnných přiřazených jedné nezávisle proměnné**).

„*NE – pes má čtyři nohy, (aby byla funkce $\rightarrow$ musel by mít 1 nohu)*“ – kvarta (viz předchozí).

„*ANO – může se to určit funkcí, třeba funkcí $y = 0x + 4$* “ – 9. tř. (potřeba analytického vyjádření).

„*NE – protože každý pes má čtyři nohy (pokud je zdravý)*“ – kvarta (slovo počet).

„*ANO – pokud je pes zdravý*“ – kvarta (za nezávisle proměnnou bere jakéhosi univerzálního psa, **neschopnost identifikovat definiční obor**).

Předpis, který každému českému městu přiřadí počet řek, které jím protékají.

„*NE – tohle se nedá určit přes vzorec*“ – 9. tř. (potřeba analytického vyjádření)

„*ANO – každým českým městem protéká nejvíce jedna řeka*“ – kvarta (slovo počet i geografická neznalost)

„*NE – je více měst, kterými protéká 1 řeka*“ – kvarta (nedůvěra v neprostou funkci)

Dále se projevilo, že žáci mají tendenci vidět funkci tam, kde je situace **svázána s časem** nezávisle na povaze závislosti, slova **přiřazení, přiřadit** pocítují jako **viditelnou aktivitu** (např. „*věk nelze člověku přiřadit*“, věk nám plyne bez naší aktivity).

ZÁVĚR

Myslíme si, že předložené příklady naznačují, že mnozí žáci nevytvářejí univerzální model reprezentace pojmu funkce a že dokonce stagnují ve svých reprezentacích ve stadiu „separovaných“ modelů (jen některé „běžnější“ grafy lineární a kvadratické funkce byly za funkce považovány). Věk žáka nehraje takovou roli, jak jsme očekávali. Je patrný větší počet separovaných modelů, ale ve schopnosti vytvářet univerzální modely jsou si žáci a studenti různých stupňů škol podobní. Jsme názoru, že pomoci by mohly větší pestrost separovaných modelů při výuce (viditelná je zejména absence nespojitých modelů a modelů bez analytického vyjádření), snaha o ilustraci vykládaných pojmů více způsoby (vzorec, slovo, obrázek, graf), konstruování protipříkladů a neustálý boj proti formalismu.

LITERATURA

- [1] Bertrand, Y.: *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha, Portál 1998.
- [2] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, SPN 1990.
- [3] Hejný, M. – Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*. In: Matematika – Fyzika – Informatika 7, 1997/98.
- [4] Mareš, J.: *Styly učení žáků a studentů*. Praha, Portál 1998.
- [5] Struik, D.J.: *Dějiny matematiky*. Praha, Orbis 1963.

STRUKTURA TRIÁD JAKO NESTANDARDNÍ PROSTŘEDÍ V MATEMATICE

Jana Kratochvílová

ÚVOD

Ve výzkumu, jehož část je věnována tomuto příspěvku, jsme se zabývali studiem myšlenkových procesů 10–11letých žáků při řešení úloh zadáných v nestandardním prostředí triád. Žák se v běžné výuce matematiky s takovým prostředím nesetkává, a tudíž nemá k dispozici algoritmy pro řešení úloh o triádách. Je proto nucen vyhledávat vlastní postupy a tím je význam nestandardního prostředí v matematice nezastupitelný.

Ve světovém výzkumu se velká pozornost věnuje termínům proces, procedura, koncept a procept [6, str. 116–141]; [5, str. 115–130]; [7, str. 40–61]). V tomto příspěvku budu uvedené termíny ilustrovat v prostředí triád.

STRUKTURA TRIÁD

Definice: Prvek $(a, b, c) \in \mathbf{N}^3$ nazveme **triáda**, jestliže $c = a + b$.

Nutnou podmínkou pro řešení úloh s triádami je znalost následující procedury (viz obr. 1):

1. Nechť triáda leží na jisté n -té úrovni (označme ji např. $(a, b, a + b)$, tato triáda leží na 1. úrovni).
2. Při přechodu z n -té úrovně na $(n + 1)$ -ní úroveň provedeme následující procedurální kroky:

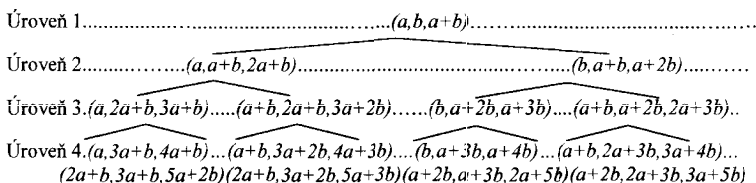
Procedurální krok 1

- Vezmi první číslo z triády na n -té úrovni.
- Toto číslo je první číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.

- Vezmi třetí číslo z triády na n -té úrovni.
 - Toto číslo je druhé číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.
 - Třetí číslo nové triády je součet prvních dvou čísel této triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.
- (V našem označení triáda $(a, a + b, 2a + b)$ je nová triáda na 2. úrovni.)

Procedurální krok 2

- Vezmi druhé číslo z triády na n -té úrovni.
 - Toto číslo je první číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.
 - Vezmi třetí číslo z triády na n -té úrovni.
 - Toto číslo je druhé číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.
 - Třetí číslo nové triády je součet prvních dvou čísel této triády na $(n + 1)$ -ní úrovni.
- (V našem označení triáda $(b, a + b, a + 2b)$ je druhá nová triáda na 2. úrovni.)



Obr. 1

Prostředí triád poskytuje mnoho úloh. Ve výzkumu byly použity:

Úloha 1. Pokračuj v proceduře, jestliže víš, jak z jedné triády na jisté úrovni získáš dvě nové triády na následující úrovni.

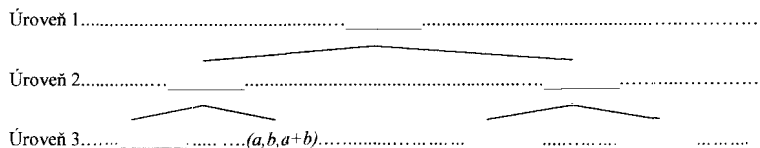
Úloha 2. Kolik triád je na n -té úrovni?

Úloha 3. Najdi nejmenší triádu na n -té úrovni. Nejmenší triáda na n -té úrovni je tvořena takovými třemi čísly, jejichž součet je ze součtů na n -té úrovni nejmenší.

Úloha 4. Najdi největší triádu na n -té úrovni. Největší triáda na n -té úrovni je tvořena takovými třemi čísly, jejichž součet je ze součtů na n -té úrovni největší.

Úloha 5. Najdi všechny triády na úrovních 1, 2 a 3, jestliže víš, že triáda

$(a, b, a+b)^1$ je umístěna na a) prvním místě, b) druhém místě (viz obr. 2), c) třetím místě, d) čtvrtém místě zleva na třetí úrovni.



Obr. 2

PROSTŘEDÍ TRIÁD Z DIDAKTICKÉHO HLEDISKA

Prostředí triád vyžaduje jednoduché matematické aktivity – sčítání a dodržování jednoduchého algoritmu. Ovšem i tak je toto prostředí náročné pro žáky, protože tyto jednoduché aktivity jsou „zabaleny“ do nestandardního „obalu“. Ať se to týká samotné triády, např. užití závorek pro triády, implicitní vyjádření vztahu čísel uvnitř triády, nebo struktury triád vytvořené několikerým aplikováním procedurálních kroků. V této struktuře jsou přítomny závislosti (např. aritmetické a Fibonacciho posloupnosti) a hledání těchto závislostí je jednou z důležitých aktivit pro žáka.

V souvislosti s nestandardností triád jsme se zamýšleli nad termíny proces, procedura, koncept a procept.

PROCES

Proces je posloupnost úkonů [1]. V tomto případě jsou úkony konkrétními činnostmi, jako např. učinění rozhodnutí o vykonání procedurálního kroku 2, výběr druhého čísla triády, umístění druhého čísla na první místo nové triády, výběr třetího čísla, umístění třetího čísla na druhé místo nové triády, sečtení prvního a druhého čísla nové triády, umístění součtu na třetí místo nové triády. Tato míra přesnosti vymezení úkonů je individuální a záleží na řešiteli, a možná i na výzkumníkovi, na kolik a jakých úkonů je proces rozložen.

¹Triáda $(a, b, a + b)$ je zadávána s konkrétními čísly.

PROCEDURA

Nejvýstižnější definice procedury vztažené k tomuto výzkumu je definice užívaná ve výpočetní technice (Velký slovník naučný, encyklopedie Diderot, 1999). Procedura je množina činností, která se několikrát opakuje. Procedura se skládá z procedurálních kroků 1 a 2 nebo pouze z procedurálních kroků 1 (např. při hledání nejmenší triády na 10. úrovni) nebo pouze z procedurálních kroků 2 (např. při hledání největší triády na 10. úrovni).

TRIÁDA JAKO KONCEPT

Vymezení konceptu vychází z prací [5, str. 115–130]; [7, str. 40–61]). Triáda je objekt (a, b, c) , ve kterém první dvě čísla a a b mají aritmetický vztah k číslu c . Tento aritmetický vztah je reprezentován symboly ‘+’ a ‘=’ tak, že $c = a + b$. Protože symboly nejsou dány explicitně, ale vztah je jasně definován, triáda je koncept.

TRIÁDA JAKO PROCEPT

Vymezení proceptu vychází z prací ([6, str. 116–141]; [7, str. 40–61]). V triádě je na jedné straně vztah čísel a a b k c konceptuální a na druhé straně úloha $c = a + b$ je procesuální. V důsledku této duality je triáda procept. Má tři složky: **proces** (sčítání), který vytvoří **matematický objekt** (triáda) a **interpretace symbolu** (závorky a tři čísla), který reprezentuje jak sčítání, tak triádu.

ZÁVĚR

Pro mnoho žáků je vyučování matematiky často redukováno na soubor pouček, návodů, pravidel a schémat, které je nutno dobře nacvičit a zapamatovat si [3, str. 73]. I když tito žáci mohou být úspěšní ve vyhledání výsledků, často pouze opakují postupy, které byly předloženy, aniž rozumí tomu, co dělají a proč. Když je jim předložena nestandardní situace, neumí si s ní poradit, protože nezapadá do žádného schématu, s kterým se již setkali. Tak opouští školu lidé, kteří nemají rádi a neumí použít matematiku ani v jednoduchých situacích. Jedním z možných způsobů, jak tuto situaci napravit, je zadávat žákům nestandardní problémy. Domníváme se, že úlohy o triádách tento požadavek splňují. Žáci se zde setkávají na jedné straně s jevy, které již dobře znají, např. sčítání a uspořádání, a na druhé straně s jevy, které ještě neznají, ale jsou pro

ně uchopitelné, např. nalezení aritmetické a Fibonacciho posloupnosti nebo inverzní procedury. Umístění a seskupení těchto jevů vytváří ne-standardní prostředí, ve kterém je žáci objevují a znovuobjevují, tzn. že probíhá žákův proces učení.

LITERATURA

- [1] *Cambridge International Dictionary of English*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] *Cobuild Dictionary of English on CD-ROM*. Version 1.2. Harper-Collins Publishers Ltd. 1995.
- [3] Demlová, M.: *Jeden úspěšný pokus o motivaci studentů – RSA*. In: Sborník 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, 2000.
- [4] Glenn, J.A. – Littler, G.H.: *Dictionary of Mathematics*. Harper & Row Publishers, London, 1984.
- [5] Gray, E.M. – Pitta, D. – Tall, D.O.: *The Nature of the Object as an Integral Component of Numerical Processes*. In: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of XXI. International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Lahti: Finland, 1997, s. 115–130.
- [6] Gray, E.M. – Tall, D.O.: *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Conceptual View of Simple Arithmetic*. *Journal for research in mathematics Education*, 25, 2, 1994, s. 116–141.
- [7] Hejný, M.: *Procept*. In: Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 1999, s. 40–61.
- [8] Kratochvílová, J.: *Pre-structural Thinking Processes involved in Solving Mathematical Tasks*. In: *Proceedings SEMT 99*. Ed.: Hejný, M. – Novotná, J., PedF UK Praha, 1999, s. 67–71.
- [9] Kratochvílová, J.: *The Structure of Triads and Pilot Experiments*. *Psychology of mathematical education journal* 12, November 1999 ISBN No. 0-85068-195-2, Ed.: Ernest P., 12, <http://www.ex.ac.uk/PERnest/pome12/>.

- [10] Kratochvílová, J.: *Porzadkowanie przez uczniow obiektow w strukturze matematycznej*. In: *Materialy Konferencyjne VI. Srodowiskowej Konferencji Matematycznej Rzeszów – Lublin – Krynica 1999*, Redakcja Wydawnictw Kateolickigo Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin. V tisku.
- [11] Novotná, J.: *Analýza řešení slovních úloh*. [Studie.]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 2000.
- [12] Repáš, V. – Černek, P. – Pytlová, Z. – Vojtela, I.: *Matematika pre 5. ročník základných škôl. Prirodzené čísla*. Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2000.

DYNAMICKÝ MODEL PREGRADUÁLNÍ PŘÍPRAVY UČITELŮ MATEMATIKY

Marie Kubínová

*Pedagog je průvodce dětí, nikoli ten,
kdo by je trénoval a někam posílal.
P. Pižma, 1996*

Jedním ze společných rysů světových trendů typických pro současné přístupy k výchovně-vzdělávacímu procesu jsou snahy o harmonickou proporci mezi jeho vzdělávací a výchovnou složkou. Osvojování vědomostí, pěstování a rozvíjení dovedností a zdokonalování schopností je úzce vázáno na tvorbu postojů, s nimiž jsou spjaty potřeby a zájmy motivující další činnost jedince. Prosazuje se interaktivní – činnostní a zkušenostní učení, které je založeno na využití aktivizujících metod, forem a prostředků ve výchově a vzdělávání. To podstatně mění roli učitele. Učitel není chápán jako ten, kdo „předává hotové obsahy“, ukazuje jediná správná řešení nebo nejlepší postupy a poskytuje informace, ale jako ten, kdo vytváří vhodné klima pro společnou práci ve třídě tak, aby ve výchovně-vzdělávacím procesu mohly být dominantní aktivity žáků. Učitel je chápán jako ten, kdo pro vnějšího pozorovatele sice ustupuje do pozadí, ale ve skutečnosti je právě on tím subjektem, který kvalitně a kvalifikovaně řídí probíhající výchovně-vzdělávací proces.

Tímto směrem je orientováno i naše pojetí přípravy učitelů matematiky. Nesdílíme proto názor části oborových didaktiků, kteří tvrdí, že hlavním úkolem pregraduální přípravy učitelů je poskytnout budoucím učitelům formou frontálního receptivního vyučování dostatečně široký odborný základ a jakési povinné minimum pedagogicko-psychologických znalostí, protože všechny ostatní učitelské kompetence získají v reálném vyučování po nástupu do praxe.

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu FRVŠ č. 1341/2000: Kurz didaktiky matematiky realizovaný v prostředí klinické školy.

V současné době máme již dosti bohaté zkušenosti s vytvářením podnětného prostředí, které je schopné ovlivňovat hodnotový systém budoucích učitelů matematiky směrem od transmisivního pojetí vyučování ke konstruktivistickému. V minulosti jsme ověřovali různé motivační postupy zaměřené na ovlivňování vědomí studentů učitelství matematiky směrem k aktivnímu a tvořivému přístupu k jejich přípravě. Přitom se ukázalo, že klima, ve kterém probíhá pregraduální příprava učitelů matematiky, nelze zásadně změnit proklamacemi nebo pouze pomocí inovace učebních plánů či učebních materiálů nebo jednostrannými či příležitostnými vstupy výsledků vědeckého výzkumu v didaktice matematiky do pregraduální přípravy učitelů matematiky. Pro trvalou změnu tohoto klimatu je naprosto rozhodující permanentní ovlivňování přesvědčení a postojů komunity budoucích učitelů (matematiky). Bez aktivního podílu jich samotných při práci na sobě není žádný výrazný a trvalý posun od převážně transmisivního přístupu k vyučování směrem k vyučování konstruktivistickému možný.

Přesto jsme nuceni konstatovat a naše zkušenosti to ukazují, že koncepty vyučování, se kterými vstupují začínající učitelé, naši absolventi, před své žáky, jsou v naprosté většině koncepty transmisivní školy. Můžeme to přičítat tradici české školy, která byla a stále ještě je silně založená na předávání již hotových poznatků těm, kteří si je mají osvojit, těmi, kteří byli speciálně vyškoleni na to, aby je mohli předávat. Je třeba si však uvědomit náš díl odpovědnosti. Chceme-li, aby se učitel stal organizátorem a tvůrcem aktivit ve vyučování, je třeba ho na takovou roli kvalitně připravit už v době jeho studia na fakultě.

Analýzy průběhu a výsledků dílčích, souborných i magisterských zkoušek ve studiu učitelství matematiky pro školy střední a pro druhý stupeň základní školy na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě (dále jen studium učitelství matematiky), rozhovory se studenty učitelství, učiteli ze škol, ale i názory odborné a laické veřejnosti však signalizují, že přes všechny snahy a dílčí inovace učebních plánů přetrvávají v přípravě budoucích učitelů matematiky závažné nedostatky. Jsou jimi především:

- statický přístup k výuce budoucích učitelů, která je vedena vesměs frontálně a receptivně,
- nevyváženost mezi rozsahem teoretické a praktické složky přípravy,

- izolovanost oborové a pedagogicko-psychologické složky studia učitelství,
- izolovanost jednotlivých disciplín v rámci studijních oborů,
- nedostatečná orientace na učitelskou profesi od počátku studia.

Zamýšlíme-li se nad cestami, jak tyto nedostatky v pregraduální přípravě učitelů matematiky odstranit, je zřejmé, že je třeba zcela změnit podstatu existujícího konceptu přípravy učitelů v následujících směrech:

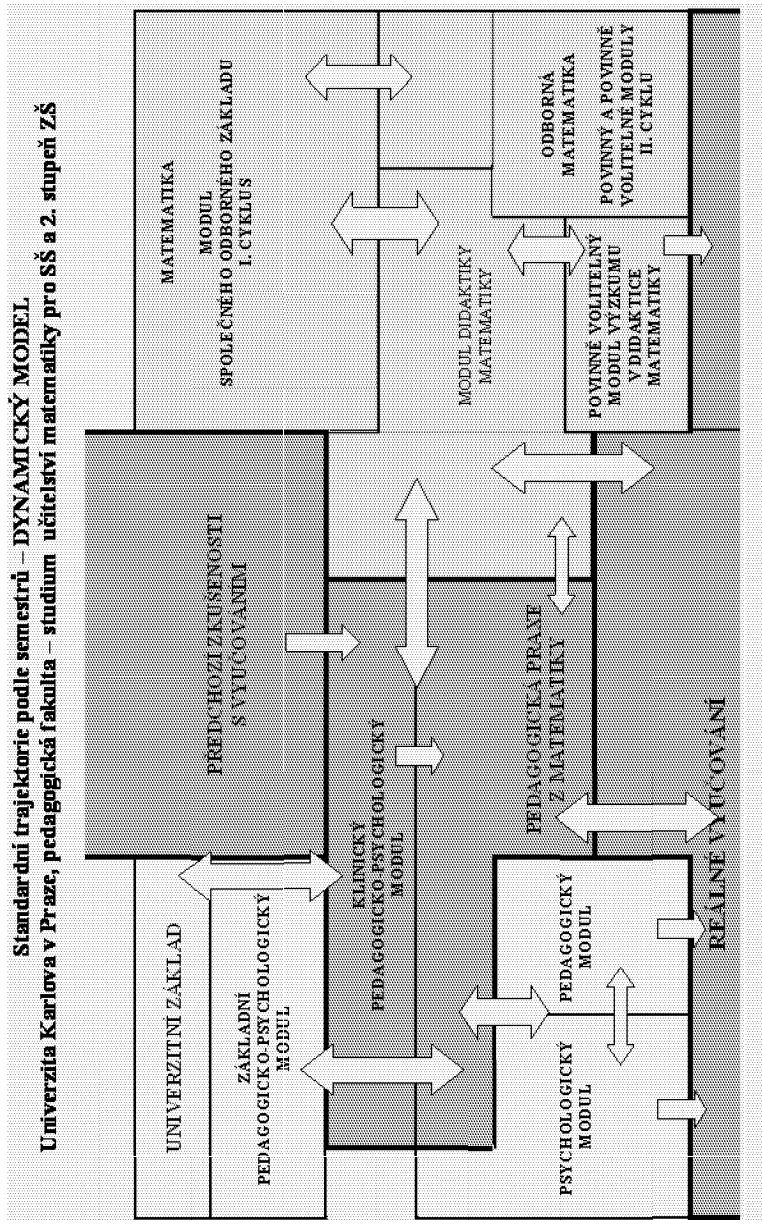
- vytvořit nová schémata transformace vědních disciplín, které tvoří teoretický základ pregraduální přípravy učitelů matematiky, přitom
 - preferovat osvojování klíčových poznatků v činnostech,
 - omezit transmisivní předávání hotových vědomostí a dovedností na minimum,
- přejít od statického přístupu, kdy je příprava vedena převážně frontálním způsobem v prostředí fakulty, k dynamickému přístupu, který je charakterizován konstruktivistickými přístupy k osvojování poznatků a odehrává se podle potřeby v prostředí fakulty nebo v prostředí fakultní (nebo později klinické) školy, přitom
 - dominantní budou činnosti studenta, a to včetně posílení praktické složky přípravy realizované v prostředí fakultní školy,
 - k racionalizaci bude využit mimo jiné i vhodný pedagogický software,
- po celou dobu studia připravovat budoucí učitele v konkrétních činnostech na uplatňování i jiných než tradičních forem didaktické interpretace (tj. postupů, kterých užívali v převážné míře jejich učitelé na základní a střední škole), aby budoucí učitelé sami na sobě poznali, že
 - je možné ve vyučování uplatňovat i jiné přístupy, které umožní žákům osvojení poznatků, aniž by bylo toto poznání formální a verbální,

- pro současného člověka je v mnoha případech důležitější cesta k osvojení poznatku než osvojení poznatku samotného.

Z naší strany jsou k tomu zatím vytvořeny následující předpoklady:

- na pregraduální přípravě budoucích učitelů matematiky se podílí několik učitelů katedry, kteří mají dlouhodobé zkušenosti s výchovou budoucích učitelů matematiky v odborné i didaktické složce jejich přípravy a ve své odborné práci se dlouhodobě orientují na problematiku práce učitele jako hlavního nositele kvality vyučovacího procesu,
- koncepce povinných kurzů didaktiky matematiky a povinně volitelných seminářů z didaktiky matematiky, které jsou součástí učebnímu plánu oborového studia učitelství matematiky na pedagogické fakultě Univerzity Karlovy, předpokládá využití zkušeností studentů z reálného vyučování, které získali v průběhu obou stupňů praxe (pedagogicko-psychologické praxe v 5. nebo 6. semestru a didaktické praxe v 8. a 9. semestru) na škole,
- část didaktické složky pregraduální přípravy učitelů matematiky je v současné době (v roce 2000 mimo jiné s podporou grantu FRVŠ č. 1341/2000: Kurz didaktiky matematiky realizovaný v prostředí klinické školy) realizována v prostředí fakultních škol, kde působí vynikající učitelé oboru a na část pracovního úvazku také dva oboroví didaktici katedry matematiky a didaktiky matematiky, využíváme tak toho, že didaktikové oboru působí současně v pregraduální přípravě učitelů a jako učitelé základní školy, což jim umožňuje, aby obecné zákonitosti didaktiky a především didaktiky matematiky interpretovali se skutečnou znalostí reálných vyučovacích situací a aby do tohoto procesu přímo či nepřímo postupně zapojovali studenty učitelství,
- na fakultních školách ZŠ Campanus v Praze 4 a ZŠ Londýnská v Praze 2 jsou vytvořeny personální i materiální podmínky k realizaci inovovaného pojetí některých kurzů (včetně obou stupňů pedagogické praxe) pregraduální přípravy učitelů matematiky.

Postupně je tak připravován a v praxi ověřován model pregraduální přípravy učitelů matematiky, který bychom mohli označit jako dynamický (jeho schéma je uvedeno na obr. 1), protože předpokládá:



Obr. 1

- uplatňování konstruktivistických přístupů v přípravě budoucích učitelů včetně odstranění izolovanosti jednotlivých disciplín,
- propojení prostředí fakulty s prostředím fakultní (nebo později klinické) školy,
- vytvoření takového klimatu v přípravě učitelů, aby se tvořivý přístup k učitelskému povolání stal permanentní součástí jejich budoucí práce.

LITERATURA

- [1] Jaworski, B.: *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. The Falmer Press, 1994.
- [2] Kubínová, M. – Sýkora, V.: *Didaktika matematiky ve škole – ne za katedrou*. In: *Didaktika matematiky a metody řešení matematických úloh*, sborník celostátního semináře kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky, Pec pod Sněžkou. Vydala Univerzita Karlova, MFF, katedra didaktiky matematiky, 1997.
- [3] Kubínová, M.: *Postavení didaktiky matematiky v přípravě učitelů matematiky*. In: *Sborník abstrakt konference Učitel a jeho univerzitní vzdělávání na přelomu tisíciletí*, Praha, 1998.
- [4] Kubínová, M.: *The Position of Didactics of Mathematics in the training of Mathematics teachers*. *Psychology of Mathematical Education*, 12 (1999). <http://www.ex.ac.uk/~PERnst/>
- [5] Kubínová, M.: *Učební plány studia učitelství matematiky na Univerzitě Karlově v Praze – Pedagogické fakultě*. In: *Sborník setkání zástupců fakult připravujících učitele matematiky v České republice*, Frýdlant nad Ostravicí, 1999.
- [6] Kubínová, M.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky jako hypertext*. In: *Sborník konference Pedagogický software*. České Budějovice, 2000.

VÝCHODISKA PRO VYUŽITÍ NOVÉ MATURITY V PŘIJÍMACÍM ŘÍZENÍ NA VYSOKÉ ŠKOLY

Ludmila Machačová

V devadesátých letech nebyvale vzrostl počet přihlášek ke studiu také na fakulty University Pardubice. Mnohé z nich však bývají formální, násobné a neodrážejí skutečný zájem o zápis ke studiu na danou fakultu. Katedra matematiky, která zajišťuje přijímací zkoušky na tři fakulty, znamenala se vznikem nových středních škol nesoulad mezi středoškolským hodnocením uchazečů a výsledky jejich zkoušek, i velké rozdíly ve znalostech absolventů různých středních škol.

Proto vítáme snahu o posílení výmluvnosti maturitního výsledku pro rozhodování o přijetí k vysokoškolskému studiu. Promýšlíme však míru využití celé maturitní zkoušky v její externí i interní části.

Vycházíme především z poznání, že každé souhrnné opakování přináší nadhled, doplňuje vzájemné souvislosti mezi jednotlivými tématy. V tomto smyslu jsou účelná i všechna dílčí opakování, kurzy, příprava k maturitě a sama maturita zvlášť. Tak např. na vzorku 1 716 absolventů středních škol, kteří skládali pro školní rok 1995/96 písemnou přijímací zkoušku z matematiky, se ukázal statisticky významný rozdíl [1] ve znalostech těch, kteří z matematiky maturovali, ve srovnání s uchazeči bez maturity z tohoto předmětu, a to u absolventů tří typů středních škol: gymnázií, středních ekonomických škol a středních průmyslových škol. Obdobně v 1. semestru akad. roku 1999/2000 byli ve výsledcích z matematiky úspěšnější na FES maturanti oproti těm, kteří z matematiky maturitní zkoušku neskládali [2].

Uznáváme jednoduchost, rychlost a snadnost užití testů s výběrem odpovědi (např. v SONDĚ MATURANT) a zejména ekonomickou úspornost a jednoznačnost při jejich vyhodnocení. Vidíme však současně nebezpečí v přecenění závěrů, které poskytují. Proto chápeme ústup od nich, jak jej formulovala v r. 1991 konference [3] uspořádaná Mezinárodní komisí pro vyučování matematice (ICMI).

Doufáme, že při úvahách o cizích vzorech (amerických i jiných) nepomineme jejich vlastní kritické pohledy a své tradice a zkušenosti. Tak např. je dobře známo, že japonské školství téměř nezná ústní zkoušky [4], ale jen testy a bodovací systém. Dokonce už tříletý uchazeč o dobrou mateřskou školu se musí vyrovnat s testem. Hovoří se však i o přetížení školáků a přílišném tlaku na ně. Naproti tomu návštěvníka japonské univerzity zaujal efektivní způsob seznamování s nejnovější literaturou formou „společného čtení“ v malých skupinách zájemců pod vedením staršího pracovníka.

Zamyšlení by si zasloužil všeobecný pokles schopnosti se přesně a srozumitelně vyjádřit, nechuť k ústnímu projevu, obtíže s argumentací, prapovísné chyby v projevu písemném. Už v roce 1993/94 v anketě studentů FCHT preferovalo 62 % jejich účastníků písemné zkoušení jako formu, na niž jsou zvyklí ze střední školy. V současné době usiluje i více než uvedené procento posluchačů FCHT a DFJP o získání známky ze zkoušky jen na základě písemné práce. Pro učitele je písemná forma časově méně náročná. Oba však ztrácejí. Učitel zpětnou vazbu, student průpravu pro budoucí závažnější okamžiky, na škole např. u státních zkoušek a obhajoby, kdy se může cítit bez dostatečné zkušenosti s formulací myšlenek zaskočen. I kvůli účelné středoškolské zkušenosti s odbornou komunikací, s kritickým myšlením a odpovídajícím slovním vyjádřením, se vyslovujeme pro jednotu ústní interní části maturity s částí externí [5].

Po vyhodnocení 2. semestru studia na FES, jemuž předcházelo zjištění, že bez ohledu na typ absolvované střední školy maturita z matematiky podpořila úspěch ve studiu 1. semestru, přistoupíme k návrhu případného prominutí přijímací zkoušky z matematiky či aspoň zohlednění maturity v přijímacím řízení.

Zdá se, že už sama diskuse o nové podobě maturitní zkoušky posiluje význam maturity.

LITERATURA

- [1] Machačová, L. – Prouza, L.: *Sonda do znalostí absolventů středních škol v roce 1995*. Sborník 5. setkání matematiků všech typů a stupňů škol, Mariánské Lázně, 1995.
- [2] Borisová, L.: *Od maturity k souhrnné zkoušce*. Sborník 26. konference o matematice na VŠTEZ, Bohdaneč, 2000.

- [3] Burjan, V.: *Evaluácia a hodnotenie vo vyučovaní matematiky, súčasne svetové trendy*. PMFA, 37, č. 3 a 4, 1992.
- [4] Andrej, L.: *Prírodovedné štúdium v Japonsku*. PMFA, 26, č. 4, 1981.
- [5] Sýkora, V. a kol.: *MATEMATIKA. Katalog cílových požadavků ke společné části maturitní zkoušky*. 2. návrh pro veřejnou diskusi, MŠMT, CERMAT, Praha, 2000.

NETRADIČNÍ ÚVOD DO ABSTRAKTNÍ MATEMATIKY

Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková

1 ÚVOD

Ve školské matematice (v dalším textu pro ni budeme používat termín „elementární matematika“) se obvykle studují matematické objekty a tak se objevují a popisují jejich vlastnosti, které se dále využívají. Ve vysokoškolské matematice (v dalším textu pro ni budeme používat termín „abstraktní matematika“) se důraz přesunuje na výběr určitých vlastností, pomocí nichž se definují objekty, a zavedení axiomů. Ostatní pojmy se budují pomocí axiomatické výstavby. Student je najednou žádán, aby „zapomněl“, že něco platí, do té doby, než si to odvodí pomocí definic a axiomů (např. odvození vlastností operací s přirozenými čísly v Peanově aritmetice). Stručně řečeno, jde o krok od elementární matematiky počítání a manipulace k matematice definic a důkazů.

Naše dlouholetá zkušenost s výukou studentů učitelství matematiky nás přesvědčuje, že přechod od elementární matematiky k abstraktní matematice na vysoké škole je pro studenty velmi náročný. Omezíme-li se jen na velmi hrubé rozdělení, můžeme studenty rozdělit do dvou základních skupin (nejsou přesně odděleny, jeden student může v různých částech matematiky být v různých skupinách): Jedni se snaží abstraktním pojmům porozumět, umět je aplikovat v konkrétních situacích a využívat v jiných kontextech, druzí (podle našich zkušeností je tato skupina obvykle početnější) se po počátečním neúspěšném pokusu pochopit „nový druh“ matematiky spokojí s pouhým memorováním zavedených pojmů bez hlubšího vhledu do jejich vlastností a užití.

Problémy spojené s přechodem od elementární k abstraktní matematice se netýkají pouze studentů v České republice a v současném

výzkumu v oblasti didaktiky matematiky je mu věnována stále větší pozornost.¹ U budoucích učitelů matematiky považujeme tuto problematiku za zvláště důležitou, protože zkušenost např. z kurzů algebry může pozitivně nebo negativně ovlivnit jejich postoje k matematice a tím i jejich vyučovací styly.

V článku popíšeme náš pokus, jak postavit „most“ mezi elementární a abstraktní matematikou. Bude se týkat vlastností algebraických struktur.

2 ALGEBRA NA VYSOKÉ ŠKOLE

Úkolem úvodního kurzu algebry a teoretické aritmetiky na pedagogické fakultě UK v Praze je seznámit studenty s těmi základními partiiemi algebry a teoretické aritmetiky, na nichž je jednak založena školská matematika, jednak jsou aparátem pro další matematické disciplíny zařazené do přípravy učitelů matematiky. V kurzu se probírají mimo jiné také algebraické struktury.

Pojmy grupa a těleso jsou pro studenty velmi abstraktní a jejich zavedení tradiční formou *definice – věta – důkaz – ilustrace* u mnoha z nich vede pouze k formálnímu osvojení znalostí bez porozumění (ve smyslu formálního poznání v Hejný, Stehlíková, 1999). Abychom se tomuto nebezpečí co nejvíce vyhnuli, snažíme se opírat o předchozí zkušenosti studentů s čísly. Při definování pojmů pak vycházíme z toho, co mají jednotlivé číselné struktury společné. Abychom porušili vazbu zavádaných pojmů pouze na čísla (např. neutrální prvek je vždy při aditivním značení číslo 0, při multiplikativním číslo 1, inverzní prvek je vždy číslo převrácené), zařazujeme v omezené míře struktury, jejichž nosičem jsou číselné množiny, ale operace jsou definovány netradičně, a také struktury s jinými než číselnými nosiči (množiny funkcí, vázaných vektorů apod.).

Při pozornosti, kterou věnujeme algebraickým strukturám, by se dalo očekávat, že studenti porozumí pojmům a budou schopni nejen uvést jejich definice a vlastnosti, ale budou je také umět aplikovat v jiných kontextech. Zkušenost však ukazuje, že u mnohých z nich k porozumění nedochází. Zdrojem nedorozumění se stává nejen již výše zmíněné au-

¹Např. Gray et al. (1999) se zabývá abstraktní matematikou z teoretického hlediska, v oblasti algebraických struktur Dubinsky (1994) zkoumá možnost využití programovacích jazyků k usnadnění přechodu od elementární k abstraktní matematice, Almeida (1999) popisuje způsob výuky založený na rozsáhlém studiu symetrií.

tomatické přenášení významu slov z číselných oborů do jiných struktur, ale i nedostatečné zvládnutí práce s kvantifikovanými výroky, nedůsledné používání definice operací (např. při kontrole asociativity operací, hledání neutrálních a inverzních prvků) apod. Opakované testování, které jsme prováděli v prvních třech letech studia, prokázalo, že získané znalosti a dovednosti studentů často nejsou dlouhodobé, a když je potřeba je aplikovat v dalších oblastech jak algebry, tak geometrie nebo matematické analýzy, není se o co opřít.

Proto jsme hledali nové cesty, jak situaci zlepšit. Běžnou výuku algebry jsme u sedmi studentů doplnili formou experimentu takto:

- Studenti delší dobu pracovali v určitém prostředí, ve kterém jsou „skryty“ základní pojmy grupové algebry. Částečně pracovali doma a částečně při individuálních konzultacích s vyučujícím.
- V průběhu práce studenti sami definovali základní pojmy (neutrální prvek, inverzní prvek, dělitelé nuly, odčítání apod.) a hledali kořeny jednodušších algebraických rovnic v tomto prostředí. Při práci mohli používat analogii se strukturou celých čísel s operacemi sčítání a násobení, nemohli však žádné poznatky přenášet automaticky.

Za prostředí uvedené v prvním bodu byl zvolen kontext tzv. *zúžené aritmetiky*, s níž již několik let experimentálně pracujeme (viz např. Stehlíková, 1998) a jejímž autorem je Milan Hejný.

3 ZÚŽENÁ ARITMETIKA

Struktura $A_2 = (\underline{A}_2, \oplus, \otimes)$ se skládá z množiny $\underline{A}_2 = \{1, 2, \dots, 99\}$ devadesáti devíti přirozených čísel (říkáme jim *z-čísla*) a dvou binárních operací *z-sčítání* $\oplus$ a *z-násobení* $\otimes$ ²: $\forall x, y \in \underline{A}_2, x \oplus y = r(x+y), x \otimes y = r(x \cdot y)$, kde $r: \underline{N} \rightarrow \underline{N}$ je operace redukce, kterou zavedeme pro troj- a čtyřciferná čísla ABC , $ABCD$ takto (zavedení na vícečiferná čísla je analogické):

$$r(100A + 10B + C) = A + (10B + C),$$

$$r(1000A + 100B + 10C + D) = (10A + B) + (10C + D).$$

Redukci opakujeme tak dlouho, dokud nedostaneme číslo z $\underline{A}_2$. Například $73 \oplus 69 = r(142) = 1 + 42 = 43$, $81 \otimes 90 = r(r(7290)) = r(\overline{72} + 90) = r(162) = 1 + 62 = 63$.

Takto je A_2 zavedena studentům. Všechno ostatní musí odhalit sami.

²Předponou *z* vyjadřujeme fakt, že se jedná o operaci či objekt v rámci zúžené aritmetiky.

3.1 PROČ PRÁVĚ A_2 ?

- Struktura A_2 představuje kontext, z něhož byla odstraněna sémantika (čímž se blíží abstraktní matematice), přitom však umožňuje studentům „hladší“ přechod od elementární k abstraktní matematice, protože se mohou opřít o své předchozí zkušenosti. Získají zkušenost s prací s ne-sémantickou strukturou, přičemž musejí uvažovat spíše strukturálně než sémanticky.
- Struktura A_2 je zdrojem velkého množství různých úloh, které si studenti mohou formulovat i sami na základě svých zkušeností z běžné aritmetiky.
- Nové pojmy jsou definovány tehdy, když se objeví potřeba jejich zavedení (např. při řešení aditivních rovnic je nutno zavést odčítání a k tomu je zase nezbytný pojem inverzního prvku). Navíc studenti okamžitě vidí vzájemné souvislosti mezi těmito pojmy, a to v jiném prostředí než v běžné aritmetice.
- Studenti se musí zamyslet nad pojmy, které byli zvyklí považovat za automatické a zřejmé (např. způsob řešení rovnic, odčítání, dělení). Musí je podrobně analyzovat, a tak objevují to abstraktní, co je za konkrétními poznatky skryto.
- Struktura A_2 není hotový produkt (jak je často matematika studentům předkládána), ale představuje otevřené prostředí, které si studenti musejí prozkoumat sami. Učitel dává neustále najevo, že jde o něco nového, že ani on sám nemůže rozhodnout o pravdivosti nějaké hypotézy, kterou si student formuluje.
- Studenti mají tendenci při aplikaci teorie grup spoléhat se na své představy z oblasti čísel (viz také Hazzan, 1999). Z toho pak plyne číslo nula jako univerzální model neutrálního prvku vzhledem ke sčítání (neutrální prvek je chápán sémanticky = nic, spíše než strukturálně), či záporných čísel jako inverzních prvků vzhledem ke sčítání. V A_2 toto neplatí a ukazuje se, že A_2 je dobrým prostředím pro narušení této rozšířené nesprávné představy (působí jako jakýsi protipříklad, o to působivější, že ho studenti odhalují sami).
- Výhodu struktury A_2 takto zavedené oproti např. kongruencím modulo m vidíme v tom, že není nikde zpracována, a studenti se tedy mohou opřít pouze o své zkušenosti z běžné aritmetiky a nemohou si problematiku někde nastudovat.
- Konečně neméně důležitým důsledkem práce v A_2 je fakt, že studenti

často pocítí potřebu studovat abstraktní algebraické struktury, které by jim zpětně mohly přinést nové poznatky o A_2 .

3.2 UKÁZKY ÚKOLŮ S KOMENTÁŘEM

V následujícím odstavci uvedeme stručné ukázky úloh, které studenti řeší při práci v A_2 . Nutno podotknout, že vzhledem k charakteru struktury A_2 se způsob práce i volba úloh u jednotlivých studentů (či skupin) liší podle toho, jakým směrem je vede jejich úroveň poznání struktury A_2 . Například student, který už objevil nulový prvek, bude volit jiné úlohy i jiné strategie jejich řešení, než ten, kterému je tento poznatek zatím skryt. Je zřejmé, že toto prostředí klade na vyučujícího jiné nároky než běžná výuka. Musí reagovat na různé směry, kterými se ubírá práce jednotlivých studentů či skupin, a dát si pozor, aby některé poznatky neodhalil studentům předčasně.

1. Z kterých čísel uděláme redukci číslo 6 (18, 34, 99)?

Jde o zvědomění zpětné redukce a snahu dovést studenty k úplné řadě zpětných redukci.

2. Dokázali byste znázornit čísla z A_2 graficky?

Pokud si student uvědomí cykličnost, může je znázornit třeba na kružnici. Pěkné je také znázornění na číselné ose, kde se opakují čísla 1, 2, ..., 99. Tam dobře vynikne číslo 99 jako jakási nula a „záporná“ čísla, z čehož přirozeně vyplývá odčítání.

3. Řešte rovnice se sčítáním: $x \oplus 17 = 99$, $x \oplus 61 = 4$, $x \oplus 6 = 92$, $25 \oplus x = 36$, $99 \oplus x = 13$, $66 \oplus x = 66$.

4. Řešte rovnice s násobením: $2 \otimes x = 40$, $2 \otimes x = 1$, $2 \otimes x = 99$, $3 \otimes x = 30$, $3 \otimes x = 1$, $3 \otimes x = 99$, $3 \otimes x = 45$, $14 \otimes x = 91$, $13 \otimes x = 45$, $6 \otimes x = 3$, $93 \otimes x = 3$, $50 \otimes x = 5$, $6 \otimes x = 45$, $3 \otimes x \oplus 2 = 83$, $5 \otimes x \oplus 10 = 5$.

Úlohy obsahují neutrální prvek vzhledem ke sčítání v různých rolích.

5. Najděte rovnice, které mají jedno, dvě, tři, ... či žádné řešení.

Rovnice vlastně tvoří jádro počáteční práce v A_2 . V průběhu jejich řešení se postupně objevuje nutnost najít neutrální prvek, inverzní prvky, dělitele nuly, odčítání, dělení, definovat pojem dělitel, formulovat větu o dělení se zbytkem apod.

6. Necht a, b, c jsou daná z -čísla. Řešte z -rovnice: $a \otimes x = 1$, $a \otimes x = 33$, $a \otimes x = 99$, $a \otimes x = c$, $x \oplus b = c$, $x \ominus b = c$, $a \otimes x \oplus b = c$, $a \otimes x \ominus b = c$. Pokuste se najít obecnou formuli.

7. Pro jaká $a \in A_2$ platí: $a \otimes b = a \otimes c \Leftrightarrow b = c$?

Předchozí tři úlohy by měly vést k objevu dělitelů nuly. Zde se vlastně projeví nutnost zavést tyto prvky a pojmenovat je.

Mezi další pojmy, které lze v A_2 studovat, patří sudost, lichost, prvočísla, uspořádání na A_2 , posloupnosti, mocniny, řešitelnost kvadratických rovnic, faktoriál apod.

4 ZÁVĚR

Naše zkušenosti s použitím zúžené aritmetiky ve výše uvedeném smyslu jsou zatím jen sporadické a týkají se individuální výuky. Nelze tedy vyzovovat konečné závěry. Konstatujeme však, že u sledovaných studentů pomohla práce v A_2 překonat podvědomou snahu naučit se pouze definice a věty s důkazy bez důkladného promyšlení jejich obsahu, případně dívat se na algebraické struktury vždy jen „brýlemi číselných oborů“. Očekáváme, že se přínos projeví u studentů nejen v dalších kurzech algebry, zejména v kurzu obecné algebry, ale také při použití algebraických struktur v dalších oblastech vysokoškolské matematiky.

Netvrdíme, že námi navržený způsob práce je jediný účinný, ani že je dokonalý. Je samozřejmé, že někteří studenti takový „most“ k abstraktní matematice nepotřebují, úroveň jejich schopnosti práce se strukturou je vysoká. Pro ty, kteří mají s abstraktní matematikou potíže, však nabízí pomoc ve formě individualizace rychlosti a průběhu osvojování abstraktních pojmů při zkoumání netradiční struktury a respektování individuálních stylů učení.

LITERATURA

- [1] Almeida, D.F.: *Visual aspects of understanding group theory*. Intern. Journal of Math. Educ. in Science and Technology, **30**, No. 2, 1999, 159–166.
- [2] Dubinsky, E. – Dautermann, J. – Leron, U. – Zazkis, R.: *On learning fundamental concepts of group theory*. Educational Studies in Mathematics **27**, 1994, 267–305.

- [3] Gray, E. – Pinto, M. – Pitta, D. – Tall, D.: *Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics*. Educational Studies in Mathematics, **38**, 1999, 111–133.
- [4] Hazzan, O.: *Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts*. Educational Studies in Mathematics, **40**, 1999, 71–90.
- [5] Hejný, M. – Stehlíková, N.: *Číselné představy dětí*. UK v Praze, PedF. 1999.
- [6] Stehlíková, N.: *Algebraic structure – restricted arithmetics*. In: Intern. Conf. on the Teaching of Mathematics. Proc. Univ. of the Aegean, Greece. John Wiley & Sons, Inc., 1998, 281–283.

ŠVÉDSKÝ STŮL ANEB NĚKOLIK MYŠLENEK O PRAVDĚPODOBNOSTI NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Karel Otruba

Můj příspěvek přináší některé myšlenky, anekdotické příběhy, vtipy a dokonce i příklady na téma „Pravděpodobnost“. Dlouho jsem nedovedl dát svým představám, o které se chci s vámi podělit, ucelenou a zarámovanou formu. A tak jsem se této snahy nakonec vzdal a přináším je pouze „volně ložené“. Proto také název „Švédský stůl“. Každý si může vzít, na co má chuť. Nebo taky nemusí. Mám totiž pocit, že by se s výukou pravděpodobnosti mělo něco udělat, ale zatím úplně přesně nevím co a ani jak. Byl bych proto rád, kdyby můj „stůl“ inspiroval k úvahám na toto téma vás ostatní, kteří to možná víte, nebo máte alespoň také podobné pocity jako já.

Zaprvé bych rád připomněl, že my učitelé matematiky vlastně matematiku ve škole více či méně úspěšně popularizujeme. Proto jsem svůj příspěvek nabídl do sekce „Popularizace matematiky“. Domnívám se, že do této sekce by správně patřilo všechno, co se týká vyučování matematiky ve škole.

Můj vztah k počtu pravděpodobnosti prošel několika stupni vývoje a myslím, že nejsem sám. Slyšel jsem vyprávět o SŠ učitelích, kteří tuto partii matematiky prý nemají rádi, a setkal jsem se dokonce i s takovými, kteří mi to sami na sebe prozradili. Nuže i já jsem kdysi patřil do této množiny. U mně to souviselo s tím, že jsem této partii příliš nerozuměl. Z toho jsem si ovšem nic nedělal, neboť jsem kdesi četl, že opravdu dobrý učitel dokáže naučit i to, co sám neumí. Ale během času, jsa trpělivě a shovívavě veden studenty tříd 01 bývalého GWP v Praze, začal jsem pronikat do tajů a zákoutí této látky. Jak při řešení příkladů přibývalo shod čísel mnou vypočtených s čísly ve výsledcích skript A. Vrbý, stoupalo moje učitelské sebevědomí i v této oblasti. A začal jsem se domnívat, že jsem tu a tam něčemu i částečně porozuměl.

Ale potom přišly zvláštní, podivné věci. Začal jsem totiž přemýšlet, k čemu je tohle všechno dobré v praxi. My učitelé přeci žákům velmi

rádi demonstrujeme upotřebitelnost a využitelnost toho, co je učíme, rádi se blýskneme upozorněním na aplikaci v životě, v praxi, a účinně tím podněcujeme jejich zájem o předmět (že?), neboť šedivá je každá teorie a jenom strom života se zelená.

A tak jsem začal uvažovat, k čemu je dobré vědět třeba to, že revizor bude v tramvaji s pravděpodobností 1:27, nebo že pravděpodobnost pětky při hodu kostkou je 1/6, a tak podobně.

A přibližně v té době jsem také zaslechl několik vtipů či anekdotických příběhů týkajících se pravděpodobnosti a dokonce jsem některé zajímavé situace sám zažil. Nyní bych tedy chvíli vyprávěl vtipy. Později, až zas půjde do tuhého, se budu na některé z nich odvolávat.

1) Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že si z úplné karetní hry vytáhnu napoprvé červeného krále? Odpověď: 1/2. Jsou totiž dvě možnosti, buď si ho vytáhnu nebo si ho nevytáhnu. (Prý kdysi oblíbený vtip na katedře statistiky MFF UK.)

2) Pacient se má podrobit velmi těžké operaci, o které je známo, že šance na přežití je 1:10. Lékař mu říká: „Mohu vám zaručit, že právě vy tu operaci přežijete. Přežije ji totiž jeden z deseti. Já jsem těch operací dělal devět a nikdo to nepřežil, tedy vy to nutně musíte přežít, protože jste desátek.“

3) Jistý finanční magnát trpěl utkvělou představou, že do jeho letadla by mohl někdo ukrýt časovanou bombu. Žádal tedy své matematiky, aby mu spočítali pravděpodobnost takové příhody. Přišli s výsledkem $1 : 10^5$. Zdálo se mu to stále moc a žádal je, aby vymysleli, jak by tato pravděpodobnost šla ještě výrazně snížit. Za nějakou dobu po pracných výpočtech přišli s návrhem: „Až zase poletíte, ukryjte předtím v letadle už sám jednu časovanou bombu. Zjistili jsme totiž, že pravděpodobnost výskytu dvou časovaných bomb v letadle je pouze $1 : 10^{100}$.“

4) Nyní jeden skutečný rozhovor, který se odehrál mezi mnou a A. Vrbou kdysi v 80tých letech v nádherném prostředí Alšovic na seminářích, na které stále rád vzpomínám. Šli jsme takhle lesem a já začal:

Já: Stejně stále nevím, jaký praktický význam má pravděpodobnost.

On: Dám ti příklad. Chceš kupovat dům a máš dvě nabídky. Jenže víš, že v jednom z těch domů je bomba. Víš také, že v prvním domě s pravděpodobností 1 : 2, v druhém s pravděpodobností 1 : 100. Kterej dům bys koupil?

Já: Víím, že mne chceš přivést k odpovědi, že koupím ten s menší pravděpodobností nebezpečí. Jenže koupím-li jej a ta bomba tam bude a vy-

bouchne, tak co mi je platné, že tam byla s pravděpodobností pouze 1 : 100? (Další řeč si už nepamatuji.)

5) Už na gymnáziu nás upozornil náš matematikář na jednu zajímavost. Sportka. Někdo stále sází 1, 2, 3, 4, 5, 6. Všichni si myslí, že je blázen, protože prý „je velmi málo pravděpodobné, že vyjdou ausgerechnet tato čísla, prvních šest za sebou... to je skoro nemožné“. Málokdo se nechá přesvědčit a málokdo si uvědomuje, že pravděpodobnost tažení této šestice je úplně stejná, jako pravděpodobnost tažení kterékoli jiné šestice. Sázet tuto šestici je naopak velmi výhodné, poněvadž kdyby vyhrála, mnoho lidí by ji nemělo, asi jen ten „blázen“, tedy by byla vysoká výhra, nedělila by se.

6) A tohle jsem skutečně odposlechl v autobuse na cestě do Prahy 15. V. 1998, kde si novopečení abiturienti sdělovali dojmy od maturit: „On byl připravený na první čtyři otázky. Šel čtvrtý a představ si, že první tři před ním si táhli čísla 1, 2, 3.“ Dál jsem to neslyšel, ti mladíci v Miletíně vystupovali. Nabízejí se tyto úlohy:

a) Jaká je pravděpodobnost, že si dotyčný vytáhne nyní otázku č. 4 a tím se zachrání? Zdálo by se, že je „malá“. Bylo-li otázek n , je rovna $1/(n-3)$. V případě $n = 25$ je to $1/22$, což je 0,045 45 periodicky. Čekali jste číslo ještě menší? K tomu by mohla vést nesprávná sice, ale vnucující se představa, že tato úloha je shodná s úlohou:

b) Jaká je pravděpodobnost, že se vytáhnou za sebou čísla 1, 2, 3, 4? Ta je opravdu „malá“, je to (při $n = 25$) 0,000 003 3 („asi tři milióntiny“). Ale to je příklad úplně jiný. Další úloha na toto téma:

c) Jaká je pravděpodobnost, že si čtvrtý losující vytáhne jednu z předem daných (např. prvních) čtyř otázek (z pětadvaceti)? Tři otázky už byly taženy, ale ten losující neví, které to byly. Tato úloha myslím není zrovna triviální.

V poslední době se pojem „pravděpodobnost“ hodně často objevuje skoro nečekaně kolem nás, v běžném životě.

7) V časopise SPY jsem náhodou četl pravděpodobnost sňatku jistých dvojic populárních lidí. Uváděla se čísla 85 %, 99 % a podobně. Nevycházel jsem z údivu a ponechávám to bez komentáře.

8) Jedna firma nabízela svým zákazníkům, že kdo splní jisté podmínky, bude mít při slosování své jméno v osudí třikrát, čímž prý pravděpodobnost jeho výhry třikrát vzroste. Není to pravda. Předvedte to studentům. Jde o jednoduchý a poučný příklad na pravděpodobnost a limitu posloupnosti.

9) Jevy s „malou“ pravděpodobností. Rozhodím-li na stůl 100 mincí (například deset korun v desetičích, ty se vejdu do hrsti), potom pravděpodobnost, že se panny a lvi objevili na (očíslovaných) mincích právě tak, jak se objevili, je $1 : 2^{100}$, což se rovná „jedna ku třicetimístnému číslu“. O tomto čísle nemáme vůbec žádnou zkušeností představu. (Pro zajímavost: Stáří našeho vesmíru se odhaduje na 2^{70} sekund. To je číslo pouze 21-místné. Během trvání vesmíru by tedy nebyla zdaleka šance všechny možnosti realizovat, kdybychom na každou chtěli jednu sekundu. Zamysleli jsme se někdy nad tím, k jakým úvahám nás může přivést pouhá hrst desetičů?) Pravděpodobnost, že nastane jev, který nastal, by se ještě velmi prudce snížila, kdybych hleděl také na to, do kterého místa která mince padla, jak se natočila a podobně.

10) S pojmem „pravděpodobnost“ často operují různé náboženské společnosti a sekty. Například v jisté knize se „dokazuje“ nutnost Stvořitelova zásahu takto: „Představte si, že rozhodím lístky z letadla nad Vaším pozemkem. Co myslíte, dopadnou na zem třeba tak, že se z nich náhodou sestaví iniciály Vašeho jména? Jistě že ne, to je tak málo pravděpodobné, že k tomu nemůže dojít. Zrovna tak málo pravděpodobné je, že by život vznikl náhodnými seskupováními chemikálií atd. atd.“ Jenže když lístky dopadnou, vytvoří nějaký obrazec. A teď si položme otázku, jaká byla pravděpodobnost, že vytvoří právě tento obrazec? Stejně mizivě malá jako s těmi iniciálami. A přesto tento jev nastal.

Vím dobře o tom, že si zde příliš zahrávám s pojmem „entropie“. Ovšem domnívám se, že i přes to je výše uvedená úvaha správná. Neboť námitka, že obrazec iniciál má „řád“, kdežto jiný obrazec ho nemá, jednak nemusí být akceptována, a jednak by privilegovala jistá místa na zemi oproti jiným. Není důvodu, proč by to mělo platit. Každé místo dopadu by mělo mít zhruba stejnou pravděpodobnost. (To není úplně fyzikálně pravda, ale podmínky by šly zajistit vhodnou modifikací pokusu). A dále: Pripustíme-li, že „iniciálový výsledek“ má „řád“, tak potom tvrzení, že proto je méně pravděpodobný, vlastně říká, že „něco brání existenci (samovolnému vzniku) uspořádaných systémů“ nebo tak nějak podobně. Sugestivnost uvedeného příkladu tkví v něčem jiném. Vlastně se nenápadně podsouvá jiná úloha: „Dopadnou do tvaru iniciál nebo ne? Co je pravděpodobnější?“ Tato úloha má jednoznačnou odpověď. První možnost je daleko méně pravděpodobná, než všechny ostatní dohromady. Jenže zrovna tak, jako kterákoli jiná jediná možnost proti „zbytku“ ostatních. Trochu se to podobá naší první úloze o vy-

tažení červeného krále. Mimochodem: Zkuste někdy zajít na přednášku nějaké náboženské sekty a ve vhodné chvíli navrhněte, že na místě předvedete, jak uskutečnit jev s „libovolně“ malou pravděpodobností. Stačí mít v kapse n desetníků a naznačit jim to s číslem $1 : 2^n$ (pro $n = 100$ je to pěkné, ale už i pro $n = 10$ je to dost efektní). Dejte mi potom vědět, jak to dopadlo, ale obávám se, že přednášející nebudou vědět, o čem je řeč. Často se uvádí tato úvaha (aplikujme ji na příklad s mincemi): Jev, který má „malou“ pravděpodobnost (např. $1 : 2^{100}$), nemůže nastat už proto, že těch možností je tolik a vůbec by se nestačily ani vystřídat tak, aby na tu konkrétní mohlo dojít, to by se prostě nestihlo (v našem příkladě během trvání vesmíru). Bojím se, že tato úvaha není správná. Vždyť to, že možností je mnoho, vůbec neznamená, že ta jedna konkrétní může nastat až ke konci, nebo dokonce poslední. Může nastat dokonce hned první. Rozhodím-li sto mincí po stole, ten konkrétní případ, který nastal, nastal hned první, i když měl tak mizivou pravděpodobnost.

Jeden matematik mi kdysi řekl, že běh vesmíru je nepřetržitý sled událostí s mizivými pravděpodobnostmi. Tedy ne, že nenastávají, ale nastávají dokonce neustále. (Je to mírně zjednodušené.)

Jeden slavný fyzik (Feynman??) prý vyzýval studenty, aby se podívali z okna a řekli mu, jakou poznávací značku má auto, které právě jede kolem. Potom studentovi blahopřál k tomu, že jej potkala tak málo pravděpodobná příhoda.

11) Ještě jsme se mnozí nevzpamatovali z povodní. Mně Labe ve Dvoře Králové nad Labem „pouze“ zatopilo sklep do výšky jednoho metru, ale mnoho lidí bylo a je na tom mnohem hůř. Panu F. dvakrát zničila voda rodinný domek. Hydrologové mluví o „stoleté vodě“, která prý může přijít každý rok s pravděpodobností $1 : 100$ (viz např. rozhovor s hydrologem J. Kubátem v MF DNES z 25. III. 2000). Fakt je ten, že v r. 1997 tedy byla její pravděpodobnost 1 % a přišla (zničila domek). V roce 1998 opět 1 % a nepřišla, v r. 1999 opět 1 % a nepřišla, v r. 2000 zase pravděpodobnost 1 % a přišla (znovu zničila domek). Tak to vidí pan F. Nad rozvalinami domku mu není jasné, co si počne s číslem 1 %. Podobá se to našemu příkladu č. 4. Ale drsná příhoda ze života skoro mění nezávazné žertování na vycházce v ironický škleb.

12) A konečně snad ještě trochu ožehavější téma. Ochrana proti přenosu HIV. Uvádí-li některá firma spolehlivost svého výrobku (kondom) například číslem 95 %, má to snad znamenat, že při jeho používání se ze sta případů 95krát nenakazím a 5krát nakazím?

Ale měl bych to přece jenom trochu shrnout. Zdá se mi, že při probírání tématu „Pravděpodobnost“ je to zajímavé až do okamžiku, kdy zjistíme čitatele a jmenovatele onoho kýženého zlomku. Ale pak už jsou problémy s interpretací. Snad by se mělo víc se studenty mluvit o zákonu velkých čísel, o tom, jak skutečně vypadá v praxi statistika, a především o tom, že „pravděpodobnost není předpovídání budoucnosti“. Pro jeden konkrétní případ bývá velmi nebezpečné spoléhat se na zlomek s velkým jmenovatelem. Nakazit se přece mohu hned napoprvé. Podobá se to trochu příkladu č. 2.

Ale především bychom měli studenty vést k tomu, aby se z nich nestaly objekty snadné manipulace. I v tomhle vidím nutnost zachovat matematice přední místo mezi předměty se silnou možností výchovného působení. Stále věřím, že je nás naprostá většina, kteří si tohle myslíme.

Tak nevím. Vybrali jste si?

GEOMETRICKÉ VIDĚNÍ STUDENTŮ SŠ v ČR

Eva Pomykalová

Již delší dobu lze pozorovat, že studenti základních i středních škol nemají dostatečně vyvinutou schopnost vnímat rovinné, a zejména pak prostorové vztahy, tedy nemají rozvinutou prostorovou představivost. V důsledku toho jsou také jejich znalosti z geometrie víceméně formální. Vzhledem k tomu, že geometrická představivost je nutnou podmínkou technické tvořivosti, je třeba se tímto problémem zabývat a hledat cesty k jeho řešení.

Pokusy „zmapovat“ stav geometrického vidění studentů a hledání východisek z „krize“ vycházejí většinou z vysokých škol, a to z fakult vychovávajících budoucí učitele matematiky, příp. z vysokých škol technických, pro jejichž studium je dobrá geometrická představivost nutným předpokladem. O jednom z posledních testování nejenom geometrické představivosti, ale postoji studentů (slovenských) ke geometrii vůbec, hovořila na semináři o geometrii a počítačové grafice v září 1998 v Miloňově kolegyně Juščáková z Košic. Její dotazník mne zaujal a domnívala jsem se, že by nebylo neúčelné provést analogický výzkum v českých zemích a případně pak následně provést srovnání situace v SR a ČR. Na základě předběžné domluvy se slovenskou kolegyní jsem dotazník přeložila, provedla nezbytné korekce a požádala kolegy matematiky na několika středních školách (Zlín, Liberec, Benešov, Jevíčko, Boskovice, Litomyšl, Trinec) o spolupráci. Testování se zúčastnilo cca 150 studentů převážně z gymnázií ve věku 16–17 let. Testování mělo tři části – vlastní dotazník, úlohy z planimetrie a úlohy ze stereometrie.

DOTAZNÍK

V první části testování odpovídali studenti na otázky týkající se jejich vztahu k matematice, zejména pak ke geometrickému učivu. Výsledky lze shrnout takto:

- **matematika** nepatří mezi předměty, o které mají studenti zájem: jen 13 % studentů se těší na hodiny matematiky, naproti tomu 14 % se hodin matematiky bojí; průměr známek na posledním vysvědčení u dotazovaných studentů byl 1,73, z matematiky však 2,08; matematiku z hlediska své budoucí profese považuje za důležitou 37 % studentů; pokračovat ve studiu na vysoké škole technického, popř. přírodovědného zaměření plánuje jen 9 % studentů, 15 % dotazovaných ještě neví, zda a kde chce dále studovat
- **geometrické učivo** je pro polovinu studentů lehké, jen 5 % vnímá geometrii jako těžkou, nerozumí ji, průměrná známka z matematiky v období, kdy probírali geometrii, je přibližně stejná jako v jiných partiích matematiky; kdyby měli studenti volit mezi algebrou a geometrií, vybrala by si geometrii asi čtvrtina; geometrii jen jako nutnou součást všeobecného rozhledu vnímá skoro čtvrtina studentů, další čtvrtina hodnotí její praktické využití, skoro polovina považuje geometrii za potřebnou jen v některých profesích
- **vyučování geometrie** jak na ZŠ, tak i na SŠ vnímá většina studentů jako celkem dobré, ale nic vyjímečného, někdy se líbilo, jindy vůbec ne; průměr známek, kterými studenti hodnotí vyučování geometrie, je 2,27; problematické je zadávání a zejména pak kontrola domácích úloh, individuální zkoušení u tabule (většinou se nezkouší), modely jsou ve výuce geometrie používány minimálně
- asi třetina studentů potřebuje v geometrii aspoň příležitostně doučování, pětina naopak někoho doučuje; **domácí příprava** je u čtvrtiny studentů minimální, neboť látku pochopí již ve škole a nepovažují za potřebné se doma ještě učit, motivace pro 18 % studentů je dobrý pocit ze splněných povinností, 35 % je motivováno dobrými studijními výsledky; při psaní domácích úloh udělá úlohu z geometrie jako jednu z prvních čtvrtina studentů, úlohu neudělá vůbec desetina studentů
- většina studentů považuje za **typické pro geometrii** rýsování, znázorňování rovinných útvarů a těles (87 %), přitom raději črtají než rýsují; jen pro čtvrtinu studentů jsou typické pro geometrii výpočty obsahů, obvodů, objemů a povrchů; jsou však i takoví, kteří do geometrie řadí tabulky a grafy funkcí (4 %)

- z **nabídnutých slov**, která mají vyjadřovat pocity studentů z geometrie:

velmi důležitá 4 % užitečná 19 % vhodná 16 % neužitečná 10 %
 bezcenná 3 % zbytečná 13 % zajímavá 47 % nudná 29 %
 chladná 13 % vzrušující 3 % humorná 13 % jednotvárná 25 %
 rutinní 14 % složitá 34 % velmi těžká 2 % velmi lehká 3 %
 z dalších slov, která studenti sami uvedli: nevyzpytatelná, překvapivá, lhostejná, děsivá, pohodová

- co se studentům na geometrii **líbí**: názornost, uplatnění představosti, logičnost, menší náročnost na paměť, mají šanci prosadit se ti, kterým nejde algebra, možnost různých způsobů řešení, spojení grafického a početního řešení, tvořivost, prostor pro vlastní úvahy, přímka, protože je nekonečná, kružítka
- co se studentům na geometrii **nelíbí**: rýsování a to, co s tím souvisí, zejména gymnazistům nutnost přinést si a používat rýsovací pomůcky, nároky na přesnost, pečlivost, úpravnost, časová náročnost

PLANIMETRIE

Test z planimetrie obsahoval třináct úloh.

- Prvních deset úloh testovalo **základní planimetrické vědomosti a dovednosti**: využití Pythagorovy věty při konstrukci „odmocnin“ – 70 %; dělení úsečky v daném poměru – látka ZŠ, 71 %; sestrojení osy úhlu – látka ZŠ, 96 %; konstrukce čtverce z jeho úhlopříčky – 76 %; konstrukce pravidelného šestiúhelníku při zadané délce jeho strany – 92 %; sestrojení těžiště trojúhelníku – látka ZŠ, 80 %; konstrukce kružnice dotýkající se dvou daných různoměřek a mající daný poloměr – 8 %, přitom dotykové body neurčil nikdo; sestrojení tečny z bodu ke kružnici – látka ZŠ, přesně 26 %; sestrojení kružnice procházející třemi zadanými body – látka ZŠ, 66 %; definice osy úsečky a osa úsečka jako gmb – 48 % (procenta udávají úspěšnost jednotlivých úloh)
- Poslední tři úlohy testovaly **rovinnou geometrickou představivost**. Zvolené úlohy byly netypické pro školskou geometrii. Šlo

v nich o práci ve „čtverečkové“ síti – pojmenovat nakreslený obrazec a určit jeho obsah (počtem čtverečků), znázornit daný obrazec o daném obsahu a tzv. parketování. Někteří studenti měli problém vůbec pochopit zadání.

Výsledky planimetrického testu vypovídají o nízké úrovni studentů ve sledované oblasti (viz uvedenou procentuální úspěšnost). Navíc grafický projev, zejména gymnazistů, je vesměs katastrofální.

STEREOMETRIE

Stereometrická část testování byla časově náročná – ne všichni „stihli“. Všechny úlohy testovaly prostorovou představivost. Celkem patnáct úloh lze rozdělit do čtyř částí:

- První část tvořily úlohy o **názorném zobrazení základních těles** a jejich **sítí**: náčrtek pohledu na těleso a jeho síť pro válec – 70 %, šestiboký hranol – 49 %, krychle – 79 %, kužel – 64 %, jehlan, který má i s podstavou čtyři stěny – 52 %; přiřazení názvu zobrazenému tělesu – 43 %; doplňování chybějících hran – 55 %; vepsání čtyřstěnu do krychle – 58 %. Náčrty nejen v této části testu byly velmi nekvalitní, studenti nedodržují proporce, nevyznačují viditelnost hran.
- Ve druhé části byly zadány jednoduché **metrické úlohy** – odchylky a vzdálenosti, přitom body, přímky a roviny byly zadány pomocí vrcholů krychle: vzdálenost dvou bodů (tělesová úhlopříčka krychle) – 68 %; vzdálenost bodu od přímky – 57 %; vzdálenost bodu od roviny – 46 %; odchylka přímek – 15 %; vzdálenost středu krychle od její stěny – 44 %; obvod a obsah rovnostranného trojúhelníku, jehož strany jsou stěnové úhlopříčky krychle – obsah 4 %, obvod 40 %.
- V dalších úlohách řešili studenti **řez krychle rovinou**. Celkem bezproblémovou úlohou byl řez rovinou určenou třemi body umístěnými na hranách krychle vycházejících z jednoho vrcholu (úspěšnost 90 %). Již podstatně větší problémy činil řez rovinou, kdy její třetí daný bod ležel na hraně v protější stěně vzhledem ke zbývajícím dvěma daným bodům – 62 %. Případy, kdy body určující

rovinu ležely ve stěně nebo na třech mimoběžných hranách krychle, byly pro studenty téměř neřešitelné (3–7 %).

- Úlohy na „**dělení**“ **krychle popř. kvádrů** na dvě objemově stejné části, stejně tak práce s tělesy tvořenými krychličkami, zvládli studenti asi z 50 %. Stejně jako v planimetrii úlohy používající čtverečkovou síť tak i tyto úlohy bývají při probírání stereometrického učiva opomíjeny.

Úlohy poslední části nejlépe zvládly studentky střední pedagogické školy, zatímco metrické úlohy gymnazisté. Ještě více než v planimetrii je ve stereometrii poznat, zda vyučující je či není deskriptivář.

Dotazník jen potvrdil skutečnost, že v současné době studenti středních škol „nevidí“, mají nepostačující znalosti a dovednosti z geometrie, a to nejen prostorové. Přestože počet respondentů byl poměrně malý, jsou zjištěné skutečnosti alarmující. Testem prošli studenti středních škol, ale i bez testování lze soudit, že nejiná je situace i na školách, které předcházejí střední škole, tj. na školách základních, a těch, na které naopak středoškolaři přicházejí, tj. na školách vysokých.

Ještě **v roce 1966** prof. Miloslav Zedek ve svých skriptech Metodika vyučování deskriptivní geometrie a rýsování uvádí, že „**nedostatek prostorové představivosti je jev poměrně vzácný**“. Situace se od té doby podstatně zhoršila. Příčiny současného stavu geometrického vidění studentů jsou zejména tyto:

- „**množinová éra**“ sedmdesátých let – rozptýlení geometrického učiva, především jeho základů do učiva o množinách a tím potlačení systému, který je pro geometrii charakteristický
- **snižování počtu hodin matematiky** jak na ZŠ, tak i na SŠ v rámci „humanizace vzdělání“, zrušení deskriptivní geometrie jako povinného předmětu na gymnáziích
- **zařazení geometrického učiva** v učebních plánech až na konec školního roku
- **nedostatečná připravenost** vyučujících na vyučování geometrie (kromě oborů M–Dg)
- **nechuť učitelů** věnovat se geometrii – ostatní části školské matematiky mají jednak lépe propracovanou metodiku, jsou algoritmizovatelné (lze uplatnit „dril“), jsou méně náročné na čas, nevyžadují žádné učební pomůcky, prověřování vědomostí a dovedností

je rovněž snadnější, geometrické úlohy (kromě početních) nebývají součástí přijímacích zkoušek

- **zanedbání propedeutické části** geometrie – „hraní si“ např. s kostkami
- **vynechání experimentování** jako základního a nezastupitelného způsobu získávání geometrických zkušeností především, ale nejenom, v nižším věku
- **předsudek**, že geometrie je v podstatě nenaučitelná – buď žák vidí nebo nevidí

Samotný výzkum (testování) nemůže situaci vyřešit. Je žádoucí přimět celou matematickou učitelskou obec, aby se zamyslela nad tímto problémem, uvědomila si, co je jeho podstatou a snažila se tento problém řešit. Různí studenti (žáci) mají různé dispozice geometrického vidění, přesto však i ti se slabšími dispozicemi musí mít možnost se něco naučit, své schopnosti rozvinout. Se zlepšením geometrického vidění se jistělepší i jejich vztah ke geometrickému učivu. K řešení problému jistě již přispívají:

- přednášky (referáty, sdělení, ...) s geometrickou tematikou na akcích pořádaných JČMF pro učitele matematiky (M. Lázně – Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Frýdek-Místek – Jak učit matematice 11–15-leté žáky, Hradec Králové – Dny s geometrií, ...)
- aktivity dr. Šarounové (semináře pro učitele matematiky, učebnice matematiky pro ZŠ z nakladatelství Prometheus), dr. Molnára (učebnice matematiky pro ZŠ z nakladatelství Prodos), dr. Pomykalové (učebnice Planimetrie a Stereometrie pro gymnázia z nakladatelství Prometheus), doc. Kadlečka (učebnice Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy, Rýsování pro 9. tř. ZŠ z nakladatelství Prometheus), publikace prof. Kuřiny (Umění vidět v matematice, Deset pohledů na geometrii)
- zařazení Rýsování aspoň jako volitelného, v lepším případě povinně volitelného předmětu, do učebního plánu některých základních škol a nižších gymnázií
- zařazení úloh zjišťujících geometrické vidění do testů u přijímacích zkoušek aspoň na některých středních i vysokých školách, včetně Scio testů

PROGRAM RWCT V MATEMATICE

Jana Pradlová

Program „Čtením a psaním ke kritickému myšlení“ (anglicky RWCT – Reading & Writing for Critical Thinking) vyvinulo Consortium for Democratic Pedagogy, jehož členy jsou University of Northern Iowa, Hobart and William Smith Colleges, Orava Association – Projekt Orava, International Reading Association – IRA. Program probíhá v 17 zemích střední a východní Evropy a Asie a je finančně zajišťován sítí kanceláří Open Society Institute New York. V čele konsorcia stojí čtyři řešitelé:

Charles Temple, Hobart and William Smith Colleges, Geneva, New York, USA

Kurt Meredith, Orava Association, Bratislava, Slovenská republika

Jeannie Steelová, Orava Association, Bratislava, Slovenská republika

Scott Walter, International Reading Association - IRA, Washington, DC, USA

V české republice je program RWCT řízen občanským sdružením Kritického myšlení. Program u nás vstoupil do čtvrtého roku své činnosti, jednotlivými kurzy prošlo kolem 350 učitelů a dalších

několik stovek se zúčastnilo ukázkových dílen. Ve školním roce 1999/2000 proběhlo na 13 replikací po celé republice pořádaných pod hlavičkami školských úřadů a pedagogických center. Pro zájemce organizuje sdružení několik dvoudenních setkání a seminářů, na kterých se učí, jak v dětech vzbuzovat otázky, nápady, představy, poznatky, jak s nimi potom zacházet a uplatnit je v praxi, jak zorganizovat práci v hodině i ve školním roce. Učitelé se učí ptát se dětí, co potřebují znát, a z toho pak vycházejí. Díky tomu pak nabízejí žákům to, co je chtějí naučit, a přitom je učí, aby si uměli zodpovědně a vhodně vybírat. Učitelé se scházejí s těmi, kteří už tímto způsobem učí, a pak si vše ověřují v praxi.



The
**READING &
WRITING** for
**CRITICAL
THINKING**
Project

V červnu roku 1999 se v chorvatské Opatiji konala konference zaměřená na výuku metod RWCT na vysokých školách připravujících budoucí učitele. Tři vysokoškolští učitelé z každé ze 17 zúčastněných zemí pracovali ve třech pracovních skupinách:

- RWCT a příprava učitelů pro první stupeň základních škol
- RWCT a příprava středoškolských učitelů v humanitních vědách
- RWCT a příprava středoškolských učitelů v přírodních vědách

Účastníci se v jednotlivých sekcích mohli seznámit se způsobem vysokoškolské přípravy budoucích učitelů v jednotlivých státech střední a východní Evropy i Asie, dále pak se zaváděním metod RWCT do tohoto studia. Společně se pak pracovalo na některých tématech, např.:

- Které metody používáme ve výuce běžně a jaké změny bychom chtěli uskutečnit.
- Náš pohled na naše studenty dnes a jak bychom chtěli, aby se změnili v průběhu dalších deseti let.
- Konkrétní ukázky užití kritického myšlení v současné výuce a jeho další možnosti.
- Začlenění metod psaní a čtení do výuky přírodních věd.

Při diskusích s účastníky konference se ukázalo, že v zahraničí se projekt RWCT realizuje především na pedagogických fakultách, kde se studenti učitelství učí pracovat s těmito metodami tak, že jsou používány přímo na nich samotných. Zatím

proto s těmito metodami pracují ti vysokoškolští učitelé, kteří sami učí budoucí učitele. Na Západočeské univerzitě organizujeme v rámci projektu Mladý Sisýfos – tyto kurzy v oblasti dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků (podprojekt „Kritické myšlení v dalším vzdělávání učitelů matematiky“). Dále se pokoušíme zavádět tyto metody také do samotné výuky vysokoškolské matematiky.

Co se mohou účastníci kurzů RWCT naučit? Určitě nespěchat na žáky, nechat je mluvit sami za sebe, nechat je hledat vlastní názor a učit je srozumitelně sdělovat tyto názory spolužákům i učitelům. To vše probíhá spolu s porozuměním pojmů svoboda a odpovědnost. Mnozí žáci si díky takovému postupu ujasňují svůj přístup sami k sobě. Takové



přístupy jsou běžné v hodinách společenské výchovy či českého jazyka. V projektu „Kritické myšlení v dalším vzdělávání učitelů matematiky“ se pokoušíme zavádět metody vedoucí k tomuto cíli i v hodinách matematiky. Na příklad tradiční výklad není chápán jako přežitek. Proč ho nevyužít, když je potřeba celé třídy vysvětlit nějaký jev, na který studenti sami přišli, ale který vyžaduje shrnutí, graf nebo tabulku. I při výkladu by však měl učitel spíš usměrňovat a neměl by se vzdávat vyjádření těch, kteří už o látce něco vědí. Samostatné získávání informací, jejich formulování, porovnávání, vyhodnocování a diskuse o nich, to je základ RWCT metod výuky, které by měly vést děti už od základní školy ke snadnější orientaci ve společnosti a lepšímu uplatnění v zaměstnání.

Jedním z problémů využívání metod RWCT je po učitele potíž vzdát se role toho, který to ví správněji. Proto se v kurzech učitelé učí nebýt tím, kdo všechno ví. Se svými správnými odpověďmi musí totiž učitel stát v pozadí a velmi dlouho čekat. Součástí kurzů je proto také téma zaměřené na správné kladení otevřených otázek – nikoli takových, na které se odpovídá ano–ne, ale spíše: Z čeho tak usuzuješ? Proč si to myslíš? S jakým záměrem to autor píše? Tak je umožněno dětem, aby samy nacházely argumenty, uměly je vyjádřit a odůvodnit.

Při frontální výuce narážejí učitelé často na nezájem dětí: nechťejí číst, diskutovat, jsou površní. To učitele vyčerpává. Když však investuje své síly do nových metod, brzy si ověří, že děti pracují samy, protože rozjitril jejich dětskou chuť se dozvídat. Vzdělávací program Čtením a psaním ke kritickému myšlení je otevřený, ale provázaný systém efektivního vzdělávání, který se dá použít v jakékoli třídě. Zdůrazňuje prožití učebních činností a následnou analýzu výuky. Neklade přitom zvýšený důraz na pedagogické, psychologické či teoretické poznatky. Je určen pedagogům, kterým jsme o to, aby se dětem lépe učilo.

Názor Jaroslavy Škrobánkové z Gymnázia ve Vítkově u Opavy: „Metodami kritického myšlení učím už třetím rokem a přesvědčila jsem se, že se děti lépe vyjadřují, jsou sebevědomější, aktivně se zapojují do diskuse o tématech, ke kterým dříve neměly co říct. Učím tak matematiku, naposledy jsme probírali goniometrické rovnice. Zadané příklady putovaly po skupinách a vždy jeden žák své řešení vysvětloval ostatním ve skupině. S výsledkem jsem spokojená, i když se našli tací, kteří si stěžovali na rychlé tempo nebo něco nepochopili. Jiní zase ocenili to, že jim nikdo nevyvracel vlastní názor. Každý sám za sebe se musel postarat, aby látku uměl.“

V rámci prezentace tohoto příspěvku bude předveden proces učení vedoucí ke kritickému myšlení na třech konkrétních ukázkách:

- „Souvislost mezi mícháním karet a symetriemi sněhové vločky“ (shodná zobrazení a jejich skládání) – metoda psaní,
- „Dokažme Pythagorovu větu“ (15 důkazů Pythagorovy věty) – diskuse,
- „Proč je smutný Dürerův anděl?“ (Fibonacciho čísla, magický čtverec) – čtení

Na těchto ukázkách budou demonstrovány tři fáze učení.

1. Nejprve učitel zadá téma a začíná průzkumem. Ptá se žáků: Co víte nebo co si myslíte, že o tom víte? Jaký k tomu zaujímáte postoj? A nechá je deset minut, aby přemýšleli a psali. Děti vědí, že jim nikdo nebude opravovat pravopisné chyby, kontrolovat styl, sloh, osnovu. Beze strachu z textu píší, co je napadá. Říká se tomu volné psaní.
2. Na základě výchozích záznamů pak společně názory, někdy zdánlivě bezcenné, posuzují. Prou se, souhlasí či nesouhlasí a postupně si informace třídí. Učitel nebo žák přesně zaznamenává výpovědi na tabuli, nevylepuje je. Ze souhrnu poznatků, tvrzení a domněnek na tabuli vyplývají první otázky. Ptají se: Jak to tedy bylo? Já si myslím, že tohle bylo později... Ještě neznají odpovědi, ale hovoří a zapisují si otázky.
3. Na vzniklé otázky jsou pak společně hledány odpovědi. Při takovém hledání vystávají otázky nové, které motivují žáky na další vyučovací hodiny.

Je zřejmé, že princip RWCT metod spočívá v interaktivním způsobu výuky. Děti samy přicházejí na otázky, umějí se zeptat a přesvědčují se o tom, že toho dohromady hodně vědí. Od ostatních se dozvídají nové poznatky i nové pochybnosti. Nebojí se odpovídat, neboť tu neexistuje špatná odpověď – každý omyl se dá přetvořit na otázku. Pokud omyl projde a nikdo z žáků si ho nepovšimne, je tu také učitel, aby žáky dovedl k tomu, jak se ptát, aby došli ke správné odpovědi. Není však jediným definitivním zdrojem informací, nepoučuje, používá nápovědy typu: Jak si myslíš, že... To je učení, které se osvědčuje, když chceme informace v hlavě uchovat dlouhodobě a jde nám o to, aby se všichni žáci uplatnili.

O ČEM VYPOVÍDAJÍ PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY

Ludvík Prouza, Marie Prouzová

Rozborem výsledků přijímacích zkoušek z matematiky na Univerzitě Pardubice se učitelé katedry matematiky FES UPa zabývají již řadu let. V minulosti byla věnována pozornost především porovnávání rozdílů výsledků, kterých dosáhli uchazeči o studium z různých typů středních škol. Byla sledována úspěšnost přijatých studentů při výuce vysokoškolské matematiky v závislosti na typu absolvované střední školy, na dosažených výsledcích v matematice na střední škole a na absolvování či neabsolvování maturity z matematiky.

V poslední době však vystupuje do popředí zájmu zcela jiná tématica. Rozvinula se široká diskuze o vypovídací schopnosti a srovnatelnosti jednotlivých variant písemných testů z matematiky při přijímacích zkouškách na vysokou školu. Protože pro objektivní porovnání těchto testů neexistuje prozatím odpovídající exaktní aparát, sahá se při hodnocení „ekvivalence“ jednotlivých variant testů k pojmu „reliabilita“. Tento termín je již dlouhá léta používán k ověřování reprodukovatelnosti testů jiného než matematického charakteru, například testů v psychiatrii a lékařství obecně. O vhodnosti tohoto přístupu při porovnávání obtížnosti různých variant písemných testů z matematiky nepanuje jednotný názor. Jedním z důležitých sporných bodů diskuze je, zda kolektivy uchazečů přistupujících v jednotlivých termínech k přijímací zkoušce můžeme považovat za statistické soubory s totožným (normálním) rozdělením pravděpodobnosti výchozích matematických znalostí a dovedností. Řečeno stručně jinak, zda výsledky téhož písemného matematického testu budou nezávislé na většinou nenáhodně vytvořené skupině uchazečů, kteří se testu účastní.

Aby byly získány přesnější informace v této oblasti, byl při přijímacím řízení na FES UPa v roce 2000 proveden následující experiment. Pro přijímací řízení bylo vytvořeno šest „matematicky ekvivalentních“ testů. Jak jsme již uvedli výše, exaktní formulace a přesná diagnostika rozdílnosti testů doposud nebyla zformulována. Proto můžeme pojem

„matematicky ekvivalentní“ definovat stručně například takto: dva matematické testy jsou „matematicky ekvivalentní“, pokud obsahují úlohy, k jejichž vyřešení je třeba týchž matematických vědomostí, týchž matematických dovedností a stejného počtu týchž početních operací.

Protože nám prozatím nejde o stanovení míry „rozdílnosti“, tj. opaku „matematické ekvivalence“ testů, poznamenejme jen, že testy, ve kterých na odpovídající si pozici stojí úlohy typu: řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $3x - 5 = x + 7$ a: řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $5x - 3 = 2x + 4$ apod. budou k vlastnosti „matematická ekvivalence“ blíže než testy, kde na odpovídající si pozici stojí úlohy: řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $3x - 5 = x + 7$ a: řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\sin x + \cos x = 1$.

Obraťme se nyní znovu k provedenému experimentu. Aby mělo smysl z pouhého vyhodnocení **výsledků** testů (bez jejich konkrétní analýzy ve smyslu „matematické ekvivalence“) usuzovat určitým způsobem na srovnatelnost jednotlivých variant, musíme přijmout předpoklad, že výsledky testů nejsou významně ovlivněny složením skupiny uchazečů, která se testu podrobí. Potom ovšem výsledky **jednoho a téhož** testu v různých skupinách uchazečů nesmějí být označeny tímto způsobem vyhodnocení za nestejně. Totéž můžeme očekávat i u testů „matematicky ekvivalentních“ a této ekvivalenci „velmi blízkých“ (což je pojem nepřesný, ale výstižný podle příkladů uvedených výše).

Experiment, na jehož detailní vyhodnocení bylo prozatím vzhledem k naprosté aktuálnosti dat jen omezené množství času, oprávněnost pochybností o použití pojmu „reliabilita“ potvrdil.

Přestože byla věnována mimořádná péče sestavování testů tak, aby byly různé, ale blížily se stavu „matematické ekvivalence“, byly výsledky v jednotlivých variantách, tedy v jednotlivých skupinách uchazečů, statisticky významně odlišné. Kruskal-Wallisovým testem bylo potvrzeno, že je třeba zamítnout na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ hypotézu o nevýznamnosti třídícího znaku „varianta“ na výsledky testů. Protože však všechny varianty byly navzájem „matematicky ekvivalentní“, je ve skutečnosti reálným třídícím znakem „soubor uchazečů testovaných danou variantou“. Celkově dosažená reliabilita, vyjádřená ve formě Cronbachova $\alpha = 0,7452$, svědčí o solidní skladbě úloh testů a dobré vypovídací hodnotě o úrovni testovaných vědomostí uchazečů. Výsledky jednotlivých variant jsou uvedeny v tabulce 1. (Průměr bodů je ze 100 maximálně možných.)

Z tabulky je patrné na první pohled, že 95% intervaly spolehlivosti pro reliabilitu jednotlivých variant testů mají prázdný průnik. Varianty

Tabulka 1

Var.	Počet účast.	Průměr bodů	Směr. odchylka	Reliabilita Cron. α	Dolní mez 95 % I.S.	Horní mez 95 % I.S.
A	234	24,6	23,9	0,752 8	0,699 0	0,799 6
B	227	23,6	21,8	0,679 3	0,608 2	0,740 8
C	205	34,2	26,6	0,742 8	0,682 6	0,794 5
D	210	32,4	25,8	0,740 9	0,681 1	0,792 5
E	185	37,0	29,7	0,797 0	0,746 8	0,839 8
F	186	28,4	23,4	0,668 0	0,586 1	0,737 9

nebyly zadány v abecedním pořadí, psaly se vždy dvě vylosované varianty souběžně, skupiny uchazečů byly sestavovány na základě přihlášky uchazeče k testu z jazyka. Dvojice C, E neměla ve skupině uchazečů žádné přihlášené do kombinované formy studia.

Abychom dokumentovali stupeň „matematické ekvivalence“ testů variant B (psaná druhý den zkoušek) a E (psaná první den zkoušek), uvedeme zde jejich přesné znění. Ověření stupně jejich „matematické ekvivalence“ podle námi zavedené definice přenecháme dle obvyklých matematických praktik laskavému čtenáři.

Varianta B:

1a) Uveďte, pro které hodnoty proměnných má výraz smysl, a upravte:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(x + \frac{1 - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} + x}\right) \cdot \left(1 - \frac{xy - x^2}{1 + xy}\right)^{-1}.$$

1b) Řešte v $\mathbb{N}$ rovnici

$$2 \cdot \binom{n}{n-2} + \binom{n-1}{2} = 5 \cdot \log_2 8.$$

2) Z rozlohy půdy, kterou vlastnil farmář, tvořily 18 % louky a pastviny. Pro rozšíření produkce energetických plodin přikoupil farmář od souseda ornou půdu, takže se celková výměra jeho půdy zvýšila o 14 %.

a) Kolik procent z rozlohy nyní představují louky a pastviny?

b) Kolik procent budou představovat louky a pastviny, pokud jich farmář polovinu prodá sousedovi?

Výsledky zdůvodněte výpočtem a zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

3) Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\frac{x+2}{x-5} \leq \frac{1+x}{5-x}.$$

4) Vypočtete souřadnice průsečíků funkce $f(x) = 4^{x-1} + 4 - 5 \cdot 2^{x-1}$ s osou x .

5) Napište obecnou rovnici přímky p , která prochází středem elipsy $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$ rovnoběžně s přímkou $q: x - 3y + 7 = 0$. Vypočtete polovinu vzdálenosti obou přímek.

Varianta E:

1a) Uveďte, pro které hodnoty proměnných má výraz smysl, a upravte:

$$\frac{1}{y^{-1}} \cdot \left(\frac{1+y}{1-y} - \frac{1-y}{1+y} \right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{y^2} + 1}{\frac{1}{y^2} - 1} \right)^{-1}.$$

1b) Řešte v $\mathbb{N}$ rovnici

$$2 \cdot \binom{n}{n-2} - \binom{n-1}{2} = 3 \log_3 27.$$

2) V centrálním skladu obchodu s obuví tvořila 30 % zásob pánských bot obuv velikosti č. 8. Do skladu přivezli dodávku pánských bot č. 6, čímž se celkový stav zásob ve skladě zvýšil o 5 %.

a) Kolik procent stavu zásob tvoří nyní pánská obuv č. 8?

b) Kolik procent stavu zásob bude tvořit pánská obuv č. 8, jestliže polovinu této obuvi vyskladní do prodejny?

Výsledky zdůvodněte výpočtem a zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

3) Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\frac{x+3}{3-x} \leq \frac{4x-1}{x-3}.$$

4) Vypočtete souřadnice průsečíku funkce $f(x) = 15 + 2 \cdot 5^{x+1} - 25^{x+1}$ s osou x .

5) V rovině je dána přímka $q: x + 2y + 3 = 0$ a elipsa $16x^2 + 9y^2 - 32x - 18y - 119 = 0$. Napište obecnou rovnici přímky p , která prochází

Tabulka 2

OLAP Cubes

VARIANTA: Total

Mean

P-KS: Total

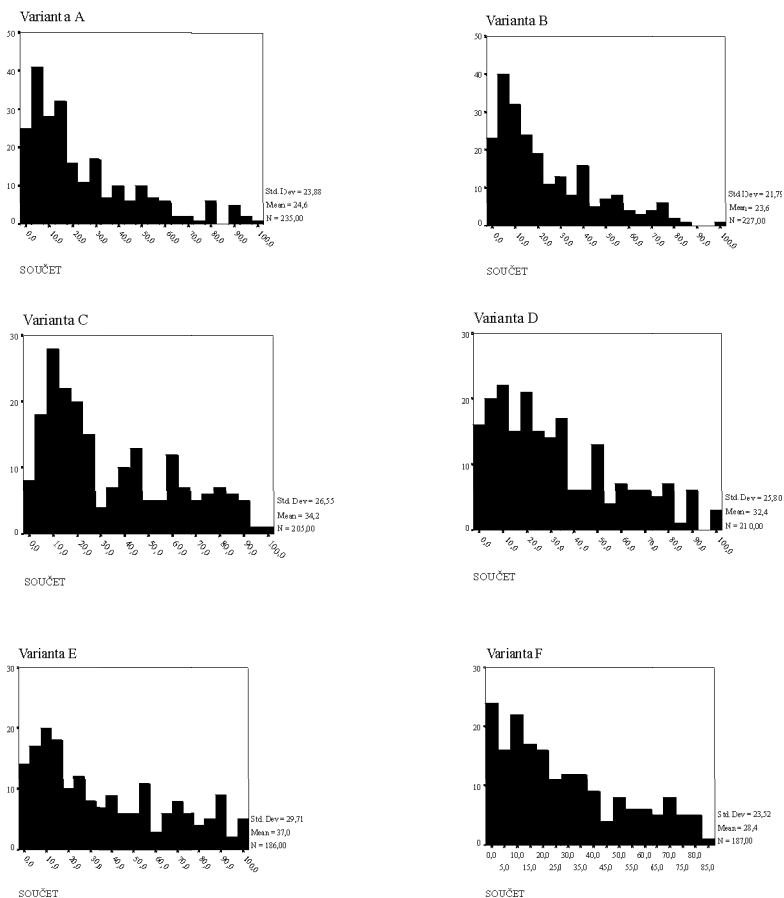
	Jazyk				
	A	F	N	R	Total
PŘ_1	9,83	11,11	7,35	6,84	8,91
PŘ_2	5,01	2,78	3,69	4,22	4,51
PŘ_3	5,76	6,44	4,10	4,31	5,16
PŘ_4	6,14	7,78	5,15	3,71	5,74
PŘ_5	6,17	8,83	3,98	3,39	5,38
SOUČET	32,91	36,94	24,27	22,47	29,70

středem dané elipsy rovnoběžně s přímkou q . Vypočtete sedminásobek vzdálenosti přímek p a q .

Rozbor výsledků přijímacích testů může přinést i zajímavé výsledky z hlediska filozoficko-sociologického pohledu. Tabulka 2 uvádí úspěšnost (průměrný bodový zisk z 20, resp. 100 bodů) uchazečů, rozdělených podle jazyka zkoušky, při řešení jednotlivých úloh (formulace úloh je zřejmá z ukázek variant B a E). Stálo by jistě za hlubší úvahu, proč francouzštináři jsou úspěšnější v úlohách „techničtějších“ proti angličtinářům, zatímco při řešení „slovní (problémové) úlohy“ je tomu právě naopak.

Na obrázku 1 uvedme ještě rozložení bodového hodnocení jednotlivých variant přijímacích testů.

Domníváme se, že i tento obrázek dokumentuje nehomogenitu souborů uchazečů identických s danou variantou testu. Proto s výsledky testů nakládejme obezřetně, nezveličujme při jejich posuzování různost (jistě ne zcela vhodných) statistických charakteristik, platných jen za idealizovaných vstupních předpokladů.



Obr. 1

ÚLOHY Z PRAXE ŘEŠENÉ S VYUŽITÍM GRAFICKÉHO KALKULÁTORU

Jarmila Robová

V souvislosti se snahou o přiblížení obsahu i pojetí školské matematiky potřebám praxe se často hovoří o významu matematiky pro každodenní život jako užitečného nástroje řešení problémů z reálného světa. Tento aspekt matematického vzdělávání je ve školské praxi realizován pomocí různých metod výuky, mezi které patří například projekty, kdy studenti samostatně řeší problémy z praxe a objevují vztahy mezi zkoumanými jevy; nejčastěji je však význam matematiky pro praxi ilustrován prostřednictvím řešení aplikačních úloh.

Zařazení uvedených činností do výuky nebývá často jednoduché, neboť v učebnicích najdeme jen málo vhodných úloh a problémů, jejichž řešení by ilustrovalo užitečnost matematických poznatků v praxi. V řadě případů tyto úlohy obsahují upravené a zjednodušené údaje tak, aby bylo možné úlohu vyřešit klasickým početním postupem, který studenti ovládají. Pokud však při řešení aplikačních úloh použijeme grafický kalkulátor, můžeme řešit úlohy z praxe se skutečně reálnými daty. Při řešení aplikačních úloh lze snadno prostřednictvím grafického kalkulátoru přejít od algebraické reprezentace matematického problému k jeho grafické reprezentaci (případně algoritmické, jestliže je to vhodné), experimentovat se zadanými údaji (např. sledovat změnu průběhu parametrického systému funkcí v závislosti na změně parametru), či dokonce řešit problémy, které by jinak byly studentům těžko přístupné (např. úlohy, které vedou na algebraické rovnice vyšších stupňů).

Nyní si ukážeme některé z uvedených myšlenek na konkrétních příkladech. Následující příklady jsou řešeny pomocí kalkulátoru TI-83, avšak většina grafických kalkulátorů je vybavena obdobnými příkazy a funkcemi pro výpočty v grafickém režimu.

Příklad 1

Uživací dávka stejného léku pro dospělého člověka je větší než pro dítě. V medicíně se pro určení dětské dávky používají vztahy

$$c = \frac{r \cdot d}{r + 12} \quad \text{nebo} \quad c = \frac{(r + 1) \cdot d}{24},$$

kde c je dávka léku pro dítě v mg, d je dávka léku pro dospělého člověka v mg, r je věk dítěte vyjádřený v rocích.

a) Použitím obou vztahů určete velikost jedné dávky antibiotika Pencid pro šestileté, sedmileté a osmileté dítě, jestliže doporučená nejvyšší jedna dávka pro dospělého je 658 mg.

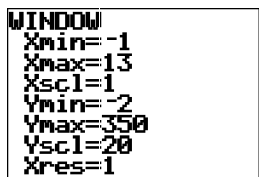
b) Určete, kdy oba vztahy dají stejný výsledek.

Řešení

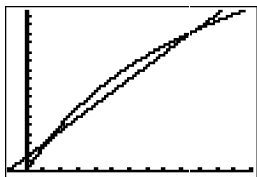
Podle zadání je hodnota $d = 658$ mg, v obou vztazích je r nezávislá proměnná, c je závislá proměnná. Před zapsáním vztahů do editoru funkcí na kalkulátoru tyto vztahy přepíšeme tak, že nezávislou proměnnou označíme x , závislou proměnnou y

$$y = \frac{x \cdot 685}{x + 12} \quad \text{nebo} \quad \frac{(x + 1) \cdot 685}{24}.$$

Příklad budeme řešit grafickou metodou; po zadání předpisů obou funkcí do editoru zvolíme vhodný rozsah souřadnic (obr. 1) a grafy zobrazíme (obr. 2).



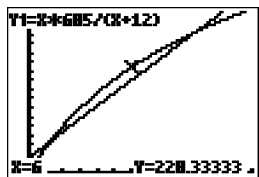
Obr. 1



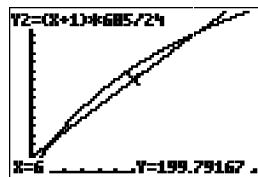
Obr. 2

a) Nyní nás zajímají hodnoty těchto funkcí pro $x = 6$, $x = 7$ a $x = 8$. Použijeme příkaz *value* pro výpočet funkčních hodnot přímo z grafu. Po vložení hodnoty $x = 6$ získáme dávku antibiotika Pencid pro šestileté dítě z prvního vztahu $c_1 = 228,33$ mg (zaokrouhлено na setiny mg) –

obr. 3, a pouhým přemístěním kurzoru na druhý graf obdržíme dávku pro šestileté dítě z druhého vztahu $c_2 = 199,79$ mg (opět zaokrouhleno na setiny mg) – obr. 4.



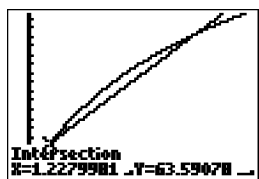
Obr. 3



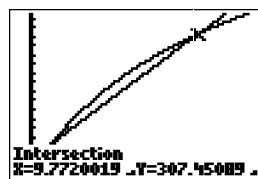
Obr. 4

Opakováním uvedeného postupu obdržíme výsledky pro $x = 7$ ($c_1 = 252,37$ mg a $c_2 = 228,33$ mg) a pro $x = 8$ ($c_1 = 274$ mg a $c_2 = 256,88$ mg).

b) Jestliže máme určit, kdy oba vztahy dávají stejný výsledek, musíme nalézt společné body grafů obou funkcí. K určení společných bodů použijeme příkaz *intersect*. Nejprve určíme souřadnice průsečíku, který leží vlevo – obr. 5, pak vypočítáme souřadnice průsečíku vpravo – obr. 6. Oba vztahy dávají stejné množství léku pro věk $r = 1,2$ roku a pro $r = 9,8$ roku.



Obr. 5



Obr. 6

Jako další ilustraci si ukážeme řešení optimalizační úlohy, ve které jde o nalezení maxima či minima veličin, které jsou určeny podmínkami úlohy. Jestliže grafickým znázorněním situace získáme jako množinu přípustných řešení konvexní mnohoúhelník, hledané maximum či minimum nalezneme v některém vrcholu tohoto mnohoúhelníku.

Příklad 2

Filip s Honzou mají za úkol koupit nápoje na školní besídku. Děvčata jim z vybraných peněz přidělila 285 Kč s tím, aby se snažili šetřit. Chlapci se rozhodli, že v obchodě blízko školy zakoupí dvoulitrová balení Pepsi a stolní perlivé vody. Jedna dvoulitrová láhev Pepsi v nevratném obalu stojí v tomto obchodě 22,80 Kč a stejné balení stolní vody 9,50 Kč. Filip s Honzou se dohodli, že lahví Pepsi by mělo být alespoň dvakrát více než lahví stolní vody. Když odhadovali spotřebu nápojů, řekli si, že na každého z 28 žáků ve třídě by měl připadnout alespoň litr tekutiny (nezávisle na druhu). Kolik lahví Pepsi a stolní vody koupí Filip s Honzou, jestliže chtějí ušetřit?

Řešení

Označíme si x počet lahví Pepsi a y počet lahví stolní vody. Pomocí nerovnic vyjádříme podmínky ze zadání příkladu

$$22,80x + 9,50y \leq 285, \quad 2y \leq x, \quad 2x + 2y \geq 28,$$

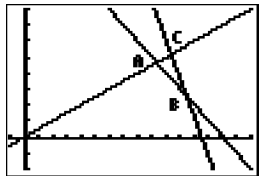
avšak do editoru funkcí můžeme zadat jen funkční vztahy. Znázorníme proto pouze hraniční přímky polorovin, které jsou grafickým řešením jednotlivých nerovnic. Tyto hraniční přímky mají rovnice

$$y = 30 - 2,4x, \quad y = 0,5x, \quad y = 14 - x.$$

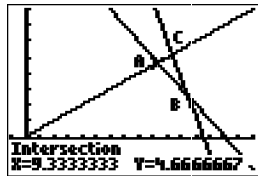
Zobrazíme grafy lineárních funkcí ve vhodném rozsahu souřadnic ($X_{\min} = -1$, $X_{\max} = 16$, $Y_{\min} = -2$, $Y_{\max} = 8$). Řešením soustavy nerovnic je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, které jsou reprezentovány body trojúhelníku ABC (obr. 7). S přesností na dvě desetinná místa určíme souřadnice vrcholů trojúhelníku pomocí příkazu *intersect* – $A = [9,33; 4,67]$ (obr. 8), $B = [11,43; 2,57]$, $C = [10,35; 5,17]$.

Vypočítáme cenu nákupu za x lahví Pepsi a y lahví stolní vody pro situace, které odpovídají vrcholům trojúhelníku o souřadnicích $[x, y]$ a zjistíme, že cena nákupu je nejnižší pro situaci reprezentovanou bodem A , a to 257,09 Kč. Vzhledem k tomu, že chlapci mohou koupit pouze celé lahve, zakoupí buď 10 lahví Pepsi a 5 lahví stolní vody (za 275,50 Kč) či 10 lahví Pepsi a 4 lahve stolní vody (za 266 Kč).

Poslední řešení příklad je věnován úloze s „neúplnými údaji“. Pomocí grafického kalkulátoru však i zde snadno nalezneme řešení.



Obr. 7



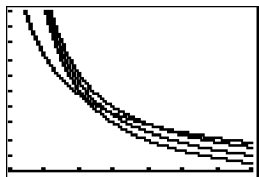
Obr. 8

Příklad 3

Ve sklářské dílně vyrábějí obří číše na objednávku. Každý den vyrobí stejný počet číší. Zákazník si objednal 144 obřích číší, ale zjistil, že číše potřebuje o čtyři dny dříve, než původně stanovil. O kolik obřích číší musí nyní ve sklářské dílně vyrobit každý den více, aby vyhověli zákazníkovi?

Řešení

Grafické řešení příkladu spočívá v nalezení společných bodů dvou hyperbol, které mají rovnice $144 = x \cdot y$ a $144 = (x - 4) \cdot (y + c)$, kde x představuje původní počet dnů výroby, y počet denně vyrobených číší před změnou, c počet číší denně navíc. Rovnici první hyperboly upravíme na tvar $y = \frac{144}{x}$, druhou rovnici na tvar $y = \frac{144}{x-4} - c$, $c \in \mathbb{N}$. Hodnotu parametru c postupně zvolíme jako 1, 2, 3. Vzhledem k reálné situaci nás zajímají pouze společné body, které mají souřadnice $x, y \in \mathbb{N}$. Nastavíme vhodný rozsah souřadnic ($X_{\min} = 5$, $X_{\max} = 40$, $Y_{\min} = 0$, $Y_{\max} = 20$), zobrazíme grafy a získáme obr. 9.



Obr. 9



Obr. 10

Podmínkám úlohy vyhovuje pouze bod $[16, 9]$, který je společným bodem první hyperboly a hyperboly, v jejíž rovnici je $c = 3$ (obr. 10). Tomuto bodu odpovídá situace, kdy v dílně vyrobí každý den o 3 číše

více, zakázku splní během 12 dní a každý den vyrobí 12 obřích číší. Zkoumáním dalších hodnot parametru c zjistíme, že pro $c = 6$ mají hyperboly společný bod $[12, 12]$ (denně vyrobí o 6 číší více, zakázku splní za 8 dní, každý den vyrobí 18 číší). Úvahou o rozkladu čísla 144 na součin dvou přirozených činitelů a s využitím grafické kalkulačky nalezneme další řešení pro $c = 18$ (společný bod $[8, 18]$, zakázku splní za 4 dny, každý den vyrobí 36 číší) a pro $c = 48$ (společný bod $[6, 24]$, zakázku splní za 2 dny, každý den vyrobí 72 číší). Reálné řešení však souvisí s výrobními možnostmi dílny, které nejsou v zadání příkladu určeny.

Možnost grafického řešení úloh na kalkulačce přináší do výuky řadu pozitivních jevů, mezi které patří především větší názornost výuky a usnadnění výpočtů. Studenti, kteří používají při řešení úloh grafické kalkulačky, se mohou více soustředit na podstatu matematického problému než na algebraické úkony a výpočty.

LITERATURA

- [1] *Guidebook TI-83*. Texas Instruments, 1996.
- [2] *Algebra 1*. Glencoe Teacher's Wraparound Edition, USA, 1998.
- [3] Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh*. SPN, Praha 1990.

VIZUÁLNÍ REPREZENTACE V GEOMETRII

Filip Roubíček

Vyučování geometrii na základní škole je neodmyslitelně spojeno s používáním obrázků a modelů. Vést žáky k poznání geometrie jinak než prostřednictvím těchto nositelů vizuálních informací si lze jen obtížně představit. Modelování a demonstrování, a to nejen ve smyslové, ale i v mentální rovině, je organickou součástí výuky geometrie. Obrázky a modely jsou nepostradatelné při budování představ geometrických pojmů, při řešení úloh, v důkazech i v jiných aktivitách. Zákonitosti světa geometrie nelze vnímat jen skrze slova, ty je třeba vidět (a někdy i ohmatat). Tuto skutečnost si učitelé matematiky uvědomují, ale... Opravdu se umí žáci učit pomocí obrázků a modelů? Zkušenost s tím, že dovednost pracovat s vizuálními informacemi není u žáků samozřejmostí, má jistě nejeden učitel. Obrázek nebo model může být sice z pohledu učitele názorný a srozumitelný, ale nemusí to již platit v případě žáka. Problém je v tom, že žáci nebývají k tomu systematicky vedeni. „Obrázek nebývá předmětem detailního rozboru: učitel neprobírá se žáky, jak si obrázek odborně prohlížet, podle kterých pravidel je koncipován, co všechno obraz sděluje, jak takový obrázek – byť schematicky a neuměle – samostatně nakreslit.“[3] Rozvíjení dovednosti pracovat s vizuálními informacemi – pěstování vizuální gramotnosti je jedním z důležitých úkolů učitele matematiky.

Obrázky a modely sice představují nejužívanější formy vizuální reprezentace v geometrii, nejsou však jedinými. Zrakem vnímáme i psaný text, symbolický zápis, diagramy apod. Prostředky pro vyjádření geometrických objektů a vztahů, které lze vnímat zrakem (a proto mají přívlastek vizuální), můžeme rozdělit do čtyř hlavních skupin:

- verbální/symbolické,
- obrazové,
- grafové,
- modelové.

Takových klasifikací existuje samozřejmě více, neboť lze uplatnit různá hlediska. Navíc jednotlivé skupiny nejsou ostře ohraničené, ale vzájemně se prolínají.

Z výše uvedených skupin výrazových prostředků je nejméně názorná ta první, která zahrnuje psaný nebo tištěný text a zápis pomocí matematických symbolů. Druhou skupinu reprezentují grafy, diagramy a tabulky, tj. prostředky pro znázornění vztahů, závislostí, průběhů, postupů, údajů. Tato skupina představuje přechod mezi verbální/symbolickou a obrazovou formou reprezentace. Hlavním rysem třetí skupiny výrazových prostředků je statické zpodobení geometrického objektu nebo poznatku. Patří do ní schémata, náčrty, kresby, fotografie. Naopak dynamické zpodobení je typické pro poslední skupinu, která zahrnuje různé typy trojrozměrných modelů, dynamické projekce (video, počítač) a imaginární modely (tj. modely, které jsou krátkodobě zpřístupněny našemu smyslovému vnímání s cílem vytvořit představu – např. znázornění geometrického objektu pohybem ruky).

Jedním z problémů v oblasti vizuální reprezentace, s kterým se učitel při vyučování geometrii setkává, je používání standardizované matematické symboliky. Žáci ji přijímají za předpokladu, že v ní spatřují zjednodušení a že přepis „slovo – symbol(y)“ je pro ně srozumitelný. Z tohoto důvodu je prospěšné, aby symbolika vznikala z popudu žáků, aby ji sami objevovali a vnášeli do vyučování. Úkolem učitele je takové aktivity podněcovat a korigovat.

Velice důležitá je rovněž problematika zobrazovacích metod, především dovednost zachytit „trojrozměrnost“ objektu. Ukazuje se, že s propedeutikou by bylo třeba začít již na prvním stupni, a to nejprve objevováním znaků, které jsou používány pro znázornění prostoru, a modelováním těles podle obrázku. Porozumí-li žáci pravidlům zobrazování při těchto aktivitách, snáze se naučí zobrazovat i složitější trojrozměrné objekty.

Jak již bylo zmíněno v úvodu, „čtení“ a kreslení grafů, diagramů, schémat, náčrtů apod. je třeba věnovat větší pozornost, zvláště pak učení se pomocí obrázku. Nelze předpokládat, že žáci tyto dovednosti získají spontánně, je třeba žáky k nim systematicky vést. „Kreslení je zřejmě velmi příhodná forma sémiotické funkce, vhodná činnost k procvičování, shrnování a systematizování učiva – budování představ o věcech . . .“ [2]

Rozvíjení orientace v rovině a prostoru, tzv. geometrické představivosti, je jedním z cílů, který obsahují všechny vzdělávací programy.

Ovšem dáváme žákům k tomu dostatek příležitostí? Jsem přesvědčen, že zde máme co dohánět, že frontální a občasné užívání modelů při výuce tuto situaci neřeší. Největší přínos pro poznání má modelování, které je aktivní a ne pouze demonstrativní. Vlastní zážitek objevu určité zákonitosti působí na žáka výrazněji než sebelepší výklad učitele. Navíc takové zkušenosti vytváří základ pro přechod do abstraktních rovin poznání.

V příspěvku jsem se pokusil stručně vyjádřit hlavní problémy vizuálních reprezentací. Jeho cílem nebylo podat vyčerpávající pojednání, ale předložit téma k diskusi, které je dle mého názoru aktuální. Na základě získaných zkušeností se domnívám, že možnosti, které nám zmíněné vizuální prostředky poskytují, jsou nedostatečně anebo nesprávně využívány a že je nanejvýš přínosné se touto otázkou zabývat.

LITERATURA

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, SPN 1990.
- [2] Klusák, M.: *Číst – psát – počítat a kreslit*. Pedagogika, 45, 1995, s. 363–372.
- [3] Mareš, J.: *Učení z obrazového materiálu*. Pedagogika, 45, 1995, s. 318–327.

PŘÍPRAVA BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEMATIKY V SOULADU S TRENDY EU

Bronislava Ružičková, Jaroslava Brincková

Ekologická výchova ve smyslu přípravy občanů pro udržitelný rozvoj lidské společnosti je neodmyslitelnou součástí celého působení školy a představuje velmi významnou inovaci z hledisek obsahových i metodických.

Udržitelný rozvoj je chápán jako takové uspokojování potřeb současnosti, které umožní i uspokojování potřeb budoucích generací.

Tento požadavek znamená, že do vzdělávání a výchovy všech občanů je nezbytné systematicky (nikoliv jen náhodně a pro některé části populace) věnovat základní znalosti

- o potřebách člověka a zákonitostech, z nichž vyplývají,
- o způsobech ohrožování životních podmínek,
- o možnostech řešení udržitelnosti rozvoje

i s tím spojené dovednosti a návyky a zároveň akcentovat hledisko tolerance a odpovědnosti vůči současnosti i budoucnosti.

V současné době není úroveň ekologické výchovy na základních školách zcela uspokojivá. Prvky ekologické výchovy jsou zpravidla obsaženy v učivu občanské výchovy, resp. rodinné výchovy. V souladu s trendy s EU je však třeba usilovat o to, aby se ekologická výchova stala součástí komplexního působení školy na žáka.

Každá škola – jakožto instituce, kterou prochází budoucí generace a která může dlouhodobě a systematicky ovlivňovat utváření způsobu myšlení – by měla zvážit svou odpovědnost vůči budoucnosti a bez prodlení zahájit proces inovací, které by směřovaly ke změnám důležitým pro udržitelnost rozvoje.

Škola může působit ve vlastním vyučovacím procesu a v mimovyučovací době.

Mezi vyučováním a mezivyučovacím působením školy jsou velmi důležité vztahy, které jsou často rozhodující pro celkový vliv školy na osobnost žáka.

Společné úsilí v obou oblastech může postupně přinést určité výsledky, které se znatelně projeví v postojích populace k ekologické problematice a ve změnách ve způsobu života.

Ekologické vzdělávání a výchova je celoživotní úkol pro každého pedagoga, protože je to úkol dynamický, měnící se v závislosti na aktuálních situacích, reflektující nejen lokální a regionální, ale i globální změny a vyžadující stále inovace v obsahu a metodách. Je to úkol, který vyžaduje nejen stále zvyšování znalostí, ale i stále promyšlený způsob, jak co nejúčinněji ovlivnit rozum i city mladých lidí, jak spojovat široké a dlouhodobé záměry ekologického vzdělávání a výchovy s různými aktuálními prioritami, které bezprostředně ovlivňují náš život. Je to úkol, který se týká nejen jedince, ale i celých pedagogických sborů a jejich vztahů k žákům – celé školy a jejich vztahů k okolí.

Jedním z významných pokusů snažících se o zlepšení tohoto stavu byl nizozemsko-český projekt Tulipán, který bude v tomto roce ukončen. Projekt Tulipán byl však realizován jen na některých vybraných školách v ČR.

Naskýtá se otázka: „Jak dále?“ Jak zabezpečit, aby myšlenky projektu Tulipán spojené s enviromentální výchovou byly šířeny i nadále, a to nejen ve vybraných školách?

První, co nás napadá, jak přispět pro dobro věci v této oblasti, je změna ve vysokoškolské přípravě budoucích učitelů. Zařazením prvků ekologické výchovy do vysokoškolské přípravy budoucích učitelů by se vytvářely předpoklady pro formování ekologického myšlení jejich budoucích žáků.

K uskutečnění tohoto záměru v podmínkách kreditového systému na vysokých školách se nabízí forma výběrového semináře, zaměřeného na problematiku „trvale udržitelného rozvoje společnosti“. V rámci tohoto semináře studenti vypracovávají ekologicky zaměřené projekty. Přírozonou touhou každého žáka je poznávat, objevovat nové a krásné. Proto se snažíme, aby v projektech nebyly předávány hotové poznatky, ale byly vytvářeny takové situace, aby žáci sami cítili potřebu objevit ukrytý jev.

Projekty vytvořené studenty v rámci výběrového semináře mohou být prezentovány jednak na vědecko-didaktických seminářích, dále na seminářích v rámci dalšího vzdělávání učitelů.

První pokusy o vytvoření takového projektu v rámci výuky didaktiky matematiky jsme již provedli. Chtěli bychom vám předložit jako ukázkou jeden z řady vypracovaných projektů.

Návrh projektu do vyučování matematice s uplatněním prvků ekologické výchovy

Petra Martinková, Eva Medková, III. ročník, M – Př

Tento projekt budeme realizovat na naučné stezce Chráněné krajinné oblasti Litovelské Pomoraví z Horky nad Moravou do Hynkova. Nabízí se využít období „volnější výuky“ např. v posledním týdnu školního roku před prázdninami. Stezka začíná v Horce nad Moravou (4 km od Olomouce) a vede po červené turistické značce přes Hynkov a Lhotu nad Moravou do Litovle po lesních a polních cestách vhodných pro cyklisty. Proto i my pojedeme na kolech. Celkem budeme mít 5 zastávek a to vždy u informační tabule. Úkolem žáků bude tyto tabule najít a pečlivě je prostudovat. U každé tabule bude žákům zadána matematická úloha, kterou musí vyřešit. Kromě toho žáci na každé zastávce změří teplotu vody a vzduchu. Pro zdárné realizování projektu budou žáci potřebovat kolo, krejčovský metr, teploměr, provázek, zápisník, psací potřeby a svačtinu.

1. zastávka

1. informační tabule – vítejte v litovelském Pomoraví

Úkol č. 1: Jakou průměrnou rychlostí jsme jeli z Olomouce do Horky nad Moravou, když víme, že jsme jeli... minut a vzdálenost mezi Olomoucí a Horkou je 4 km?

2. zastávka

2. informační tabule – Krajina v minulosti

Úkol č. 2: V okruhu 5 metrů si každý vyberte libovolný strom. Změřte jeho obvod a z něj vypočítejte průměr stromu.

3. zastávka

3. informační tabule – Mokřady a jejich význam v krajině

Úkol č. 3: CHKO Litovelské Pomoraví má 9 600 ha. Kolik je to km²? (96 km²)

4. zastávka

4. informační tabule – Periodické tůně

Úkol č. 4: Bobři byli v CHKO Litovelské Pomoraví vyhubeni na přelomu 17. a 18. století. Studie tohoto území ukázala, že území splňuje podmínky pro život bobra evropského. V letech 1991–1993 zde bylo celkem vysázeno 20 bobrů. V zimě 1994/95 byla v oblasti CHKO stanovena přítomnost 39 bobrů. Vypočítejte, jaký byl populační přírůstek bobra evropského v procentech. (96 %)

5. zastávka

5. informační tabule

Úkol č. 5: V CHKO Litovelské Pomoraví je 16 vodních mlýnů, elektráren a pil. Určete, kolik je mlýnů, elektráren a pil, jestliže jsou v poměru 3 : 1 : 4. (6 mlýnů, 2 elektrárny, 8 pil)

Úkol č. 6: Odhadněte šířku řeky. Na mostě ji přeměřte pomocí metru a kamene. Zde také změřte hloubku řeky. Jak to provedete? (provázek s kamenem)

Úkol č. 7: Vypočítejte průměrnou teplotu vody (z hodnot naměřených v průběhu cesty) a porovnejte ji s průměrnou teplotou vzduchu.

V nejbližší hodině matematiky budou vyhodnoceny výsledky úkolů, které měli žáci splnit.

LITERATURA

- [1] Frantzen, H., Van Rossum, J.: *Ochrana životního prostředí*. AMER-SFOOT. Vyd. In Sielde Blociende, 1999, s. 44.
- [2] Kvasničková, D.: *Systém ekologické výchovy a vzdělávání v základní škole*. Vyd. Matra, Praha 1999, s. 22.

DIPLOMOVÁ PRÁCE NEBO DIPLOMOVÁ SPOLUPRÁCE?

Nada Stehlíková

V tomto příspěvku budeme na příkladu jedné diplomové práce ilustrovat jeden pohled na způsob zpracování diplomové práce studenta – budoucího učitele matematiky. K tomu účelu se nejdříve podíváme na současný stav didaktiky matematiky.

1 DIDAKTIKA MATEMATIKY¹

V šedesátých a sedmdesátých letech proběhla u nás stejně jako ve všech vyspělých zemích světa tzv. modernizace matematiky. Do škol se zavedly množiny s nadějí, že změna obsahu povede ke zlepšení výuky a k odstranění drilu. Přes všechnu snahu (psaly se nové učebnice, příručky pro učitele, sbírky úloh, učitelé z praxe i budoucí učitelé se učili množinové matematice) skončil celý projekt neúspěchem a množiny ze škol opět pomalu vymizely. Mezi cenné zkušenosti, které s sebou modernizace přinesla, patří (Hejný, Stehlíková, 1999):

- Není pravda, že jen malé procento žáků je schopno rozumět matematice a že většina žáků se musí matematiku učit paměťově. Matematika může k intelektuálnímu rozvoji žáků přispívat daleko výrazněji.

- Jádrem problému zkvalitnění školské matematiky nespočívá v osnovách a obsahu toho, co se učí, ale v metodách vyučování, tj. ve způsobu, jak se učí.

- Rozhodujícím prvkem kvality vyučování matematice je učitel. Na něm, na jeho vztahu k matematice a žákům, na jeho tvořivosti a především na tom, do jaké míry on sám pracuje na sobě, závisí kvalita jeho práce ve třídě.

Příspěvek byl podpořen grantem GAČR 406/97/P132.

¹Následující úvahy jsou čerpány z publikace Hejný, Stehlíková (1999) a do značné míry odrážejí osobní zkušenost prvního z autorů.

Začaly se hledat nové cesty vedoucí ke zlepšení kvality výuky. Stále více lidí si uvědomovalo, že více než obsah učiva je potřebné zkoumat myšlenkové procesy žáků. Narůstal zájem o systematické vědecké zkoumání procesů, které probíhají v hlavě žáka při řešení úlohy, hledání důkazu, formulování myšlenky nebo při třídní diskusi o nějakém problému. Didaktika matematiky si rychle osvojovala v té době již značně rozpracované myšlenky a metody kognitivní psychologie, zejména práce Piageta a Vygotského.

Tak byl vedle tradičního, obsahově orientovaného proudu v didaktice matematiky záhy vytvořen proud procesně orientovaný.² Zatímco obsahově orientovaný proud se soustřeďuje na didaktickou transformaci matematiky (tj. jak se z vědecké matematiky vytváří náplň školského předmětu matematika) z hlediska kurikula, učiva, učebnic a učebních pomůcek, proud procesně orientovaný se soustřeďuje na matematické chování člověka, zejména na procesy probíhající v jeho vědomí (řešení úloh, budování pojmu, argumentování, abstrahování, formulování myšlenky apod.). Jeho významnou součástí je studium historie matematických myšlenek s cílem hledat inspiraci pro nové didaktické pohledy na důležité pojmy, vztahy či oblasti matematiky střední a základní školy. Jeden ze směrů procesně orientovaného proudu se zaměřuje na zkoumání prostředí, ve kterém vyučování matematice probíhá. Hledá a analyzuje fenomény, které ovlivňují interakci učitel–žák i učitel–třída, a snaží se výsledky bádání využít v praxi.

Výsledky výzkumů v didaktice matematiky se však jen s obtížemi dostávají do praxe. Jedním ze způsobů je působit na učitele matematiky jak v období jeho vysokoškolské přípravy, tak i později v praxi. O tom pojednáme v dalším odstavci.

2 ODRAZ V PŘÍPRAVĚ BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEMATIKY

Jak již bylo řečeno výše, ukazuje se, že základním činitelem, který ovlivňuje kvalitu výuky, je učitel. Didaktika matematiky se jej snaží oslovovat např. prostřednictvím odborných článků, knížek či přednášek a dílen. Jako účinnější se ukazuje forma, kdy učitel či budoucí učitel matematiky samostatně připraví, realizuje a posléze vyhodnotí nějakou pedagogicky

²Uvědomujeme si, že toto rozdělení je pouze hrubé a odráží pouze dva póly celého spektra výzkumu v didaktice matematiky, pro naše účely se však dobře hodí.

orientovanou činnost, např. experiment. Tento způsob často vede k větší motivovanosti učitele dále na sobě pracovat.

K tomuto tvrzení nás vede pozitivní zkušenost z projektu Iniciativa z roku 1995, který organizovala PedF UK v Praze (viz seznam literatury). Několik desítek učitelů z celé republiky takové experimenty provedlo, vyhodnotilo a posléze obhájilo v podobě jakési seminární práce. O tom, že je jejich práce v rámci projektu inspirovala pro jejich pedagogickou práci, svědčí i to, že o ní referovali v rámci některých konferencí a seminářů a publikovali články. V seznamu literatury jsou uvedeny některé odkazy na takové práce, jimž dal vzniknout právě projekt Iniciativa.³

Podobná situace je i u budoucích učitelů základních a středních škol – studentů pedagogické fakulty. Kromě tradičních diplomových prací zaměřených na didaktickou transformaci matematiky vznikají na KMDM PedF UK v Praze již několik let diplomové práce, které odrážejí procesně orientovaný proud v didaktice matematiky. V následujícím textu na příkladu diplomové práce studentky Marcely na téma „Netradiční aritmetické struktury“ ilustrujeme jejich základní charakteristiky. V dalším textu budeme na tuto diplomovou práci odkazovat jako na DP.

2.1 ILUSTRACE

- Marcela se začala ve druhém ročníku studia mimo svou povinnou výuku účastnit setkání s autorkou tohoto příspěvku, při nichž pracovala v oblasti tzv. **zúžené aritmetiky** (jejím autorem je Milan Hejný a je popsána na jiném místě tohoto sborníku v příspěvku Novotná, J., Stehlíková, N.: Netradiční úvod do abstraktní matematiky). Postupně samostatně odkrývala pojmy a jevy zúžené aritmetiky, zprvu prostřednictvím řešení zadaných lineárních a kvadratických rovnic, později i pomocí studia odborné literatury věnované algebře a algebraickým strukturám. Tak dospěla k pojmům nulový prvek, inverzní prvek vzhledem ke sčítání a násobení, dělitel nuly apod. Postupně pracovala i v analogických aritmetických strukturách.

Je nutné zdůraznit, že zúžená aritmetika byla k tomuto účelu vybrána záměrně. Jedná se totiž o otevřenou, „nehotovou“ strukturu, kterou si student musí dotvořit sám na základě svých zkušeností z práce z „běžné aritmetiky“. Autorka má se zúženou aritmetikou bohaté zkušenosti, které ukazují, že tato problematika je silně motivující právě svou

³ Jejich výčet nemůže být úplný, uvádíme pouze ty, které jsou nám známy.

otevřeností a „nehotovostí“. Je zdrojem mnoha hypotéz a škála úloh, které se v ní dají řešit se základní znalostí aritmetiky, je téměř nevyčerpatelná. Neméně důležitým rysem je, že zúžená aritmetika není zpracována v žádné literatuře, alespoň pokud je nám známo, a student si ji tedy nemůže dostudovat. Zdá se, že to, že učitel, případně experimentátor, sám pracuje současně na stejném tématu jako jeho žáci (i když třeba na vyšší úrovni), je důležitým zdrojem vytvoření motivačního klimatu. Jak uvádí Marcela v závěru své diplomové práce: *Práce s netradičními aritmetickými strukturami A_1 , A_2 a A_3 se pro mne stala velice zajímavou zkušeností v oblasti matematiky. ... Studenti při našich společných setkáních ochotně a zaujatě spolupracovali. Strukturou A_1 byli přímo nadšeni, pracovat v ní se jim líbilo, což dosvědčila i jejich domácí aktivita a rozmýšlení nad problémy.*

Zúžená aritmetika je také výborným kontextem pro konstruktivistický způsob výuky, jak o tom svědčí následující prohlášení z DP: *Od původně plánovaného instruktivního přístupu jsem se při druhém setkání nebránila přejít k přístupu instruktivně-konstruktivistickému. Myslím, že A_1 přímo nabízí použití konstruktivistických prvků ve výuce a že tento přístup experiment jen obohatil.*

- Ve čtvrtém ročníku připravila Marcela analogii zúžené aritmetiky pro jednociferná čísla⁴ jako podklad pro **experiment** se studenty osmiletého gymnázia. Cílem bylo zjistit, do jaké míry budou žáci schopni pracovat s nesémantickou strukturou a využívat při tom svých školských zkušeností.

- S využitím příslušné literatury zaměřené na provádění experimentů a jejich analýzu provedla Marcela experiment se třemi studenty v průběhu dvou setkání. Obě setkání byla nahrávána.

- Po transkripci experimentu provedla Marcela analýzu, jejímž výsledkem je přehled a rozbor zajímavých momentů a chyb, u nichž se pokusila i o návrh jejich nápravy u studentů.

DP se tedy řadí mezi ty práce, kde autor projde v několika fázích roli žáka (zkoumá na vyšší úrovni problematiku, kterou budou řešit jeho

⁴Redukce, která převádí libovolné přirozené číslo na jednociferné číslo 1 až 9, je zavedena jako ciferný součet.

žáci) a posléze učitele (při experimentech) a „experta“ (při analýzách experimentů).

• Neméně důležitou součástí práce je však i **sebereflexe**⁵, která se v případě ilustrativní diplomové práce týká (1) průběhu vlastní matematické práce při odhalování zúžené aritmetiky, (2) vedení experimentu z hlediska experimentátora – učitele.

ad (1) Zkoumání vlastních myšlenkových procesů při matematické práci vede k lepšímu pochopení myšlenkových procesů žáků.

ad (2) Zaznamenání průběhu experimentu se ukazuje jako cenný zdroj poučení pro budoucí učitele matematiky z hlediska matematického i pedagogického. Vlastní interakce mezi účastníky setkání probíhá na několika úrovních současně – komunikace mezi žáky a experimentátorem i mezi žáky samotnými. Při analýze přepisu experimentu si studenti uvědomí nepřesnosti ve svém matematickém vyjádřování či nedostatky vedení experimentu.

I když se jedná o experiment a ne o výuku, studenti se mohou dozvědět cenné informace o svém stylu výuky. Jako ilustrace dobře poslouží výňatek z DP.

Když analyzuji zpětně obě setkání, nacházím ve své práci tyto nedostatky:

1. *Chybně položené otázky.*
2. *Doplnění odpovědi studentů dříve, než ji sami objeví a řeknou.*
3. *Přílišný spěch.*
4. *Nevyužití situace k tomu, aby dělali to, co je zrovna zajímavá (jejich časté navrhování hypotéz).*
5. *Přílišné navádění mým směrem.*

A konečně, jak hodnotí Marcela celý průběh rozpracování své diplomové práce?

⁵Pojem sebereflexe je vymezován například jako: učitelovo pojetí výuky, diagnostikování, diagnostika, vnitřní dialog, autodiagnostika, zdokonalování pedagogické činnosti (Bílá, 1998). V pedagogickém kontextu jde nejčastěji o sebereflexi učitelů (Průcha et al., 1998). Zahrnuje několik fází: opětovné vybavení, popis a rozbor klíčových prvků, hodnocení či přehodnocení, způsoby vysvětlení, přijetí rozhodnutí, stanovení další strategie. Profesionální sebereflexe učitele (ať už začínajícího nebo zkušeného) je nutnou podmínkou jeho odborného růstu, jeho pedagogické kompetence a odborné i lidské odpovědnosti.

Experiment mi přinesl mnoho pedagogických a didaktických zkušeností do budoucí učitelské praxe. Otevřela se mi možnost vyučovat něčemu zcela netradičnímu, s čím se studenti v běžné školní výuce nesetkají. Vyzkoušela jsem si analýzu ústního a písemného projevu studentů, diagnostiku jejich schopností a stupeň osvojení znalostí o struktuře A_1 , identifikaci a reedukaci chyby.⁶ Tyto schopnosti budu nadále ve své učitelské praxi rozvíjet.

3 ZÁVĚR

Závěrem ocitujeme myšlenku Víta Hejného publikovanou v Hejný a kol. (1990, s. 19), která výstižně shrnuje filosofii popsaného typu diplomových prací:

V rovině **informační** chceme poskytnout studentovi – budoucímu učiteli matematiky „takovou didaktickou strukturu, která by mu umožnila: 1. evidovat svoje každodenní pedagogické zkušenosti, 2. třídit je a hodnotit objektivními kritérii, 3. tvořivě hledat cesty zkvalitnění vlastní práce. V rovině **influenční** [jsme vedeni snahou] ukázat vlastní starosti, ale hlavně radosti při práci se žáky a studenty – bez ohledu na to, zda jde o laboratorní výzkum, experimentální vyučování, zájmovou činnost v kroužcích či na táborech mladých matematiků, nebo o běžné vyučování „v terénu“.“

Popsaná diplomová práce je zatím jedinou osobní zkušeností autorky, ale plně koresponduje se zkušenostmi kolegů. V seznamu literatury jsou uvedeny některé publikace, které vznikly na základě diplomových prací obhájených na PedF UK v Praze.

LITERATURA

- [1] Bílá, A.: *Introspekce v didaktice matematiky*. Disertační práce. Praha, PedF UK, 1998.
- [2] Hejný, M. – Stehlíková, N.: *Číselné představy dětí*. UK PedF, Praha, 1999.
- [3] Průcha, J. – Walterová, E. – Mareš, J.: *Pedagogický slovník*. Portál, Praha, 1998.

⁶Tedy něco, co by jako učitelka matematiky měla dělat zcela intuitivně.

PRACOVNÍ MATERIÁL PRO VZDĚLÁVACÍ PROGRAM „INICIATIVA“, KMDM, PedF, UK, PRAHA, 1995.

- [4] Hejný, M.: *Matematické hry*.
Koman, M. – Tichá, M.: *Jak učit žáky tvořivému přístupu k situacím s náměty z praxe*.
Kubínová, M.: *Metodika experimentu*.
Novotná, J.: *Slovní rovnice a strategie jejich řešení*.
Stehlíková, N.: *Analýza žákovských písemných řešení*.

NĚKTERÉ PŘÍSPĚVKY NAPSANÉ NA ZÁKLADĚ SEMINÁRNÍCH PRACÍ ÚČASTNÍKŮ INICIATIVY.

- [5] Sborník příspěvků konference „Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let“, MPS JČMF, 1997.
Hanušová, J.: *Kostková tělesa*. 48–58.
Milata, M.: *Matematická didaktická hra „Hádej, na který obrázek myslím“*. 109–110.
Müllerová, E.: *Matematický test – aditivní čtverce*. 111–114.
Odvářka, R.: *Nové přístupy k vyučování na 1. stupni ZŠ*. 119–125.
Přidalová, S.: *Matematické didaktické hry – „Autobusové linky“*. 126–132.
Slováková, K.: *Jak nejlépe využít milion*. 141–142.
- [6] Sborník příspěvků semináře „Dva dny s didaktikou matematiky“, KMDM PedF UK, Praha, 1996.
Čadová, M.: *Cestování, závěrečná práce projektu Iniciativa*.
Damková, L. – Landová, A.: *Matematická didaktická hra „Dělení království“*.
Javorková, K. – Solich, P. – Solichová, J.: *Motivace při výuce tématu „Úpravy algebraických výrazů“ v učebních oborech SOU*.
Kaletová, L.: *Didaktická hra „Autobusové linky“ (pro žáky 4.–5. ročníku ZŠ)*.
Kellerová, M.: *Metodika experimentu, závěrečná práce projektu Iniciativa*.
Lepíková, J.: *Kalkulace cen a tvorba zisku (aneb hra na malé podnikatele)*.
Lepíková, J.: *Využití matematické didaktické hry „Bludiště“ v hodinách matematiky ve 2. a 3. ročníku Obecné školy*.

Majerová, M.: *Matematická didaktická hra „Bludiště“*.
Müllerová, E.: *Vzdělávací program Iniciativa*.

NĚKTERÉ PŘÍSPĚVKY NAPSANÉ NA ZÁKLADĚ DIPLOMOVÝCH PRACÍ.

- [7] Daňhelková, J. – Jirotková, D.: *Nejen hravé učení*. Učitel matematiky, 8, č. 1 (33), 1999, 44–53.
- [8] Horáček, I. – Litošová, J.: *Matematické křížovky*. Učitel matematiky, 5, č. 4 (24), 1997, 232–235.
- [9] Foltinová, K. – Novotná, J.: *Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy*. Pedagogické centrum, Praha, 1997.
- [10] Košťálová, R. – Novotná, J.: *Sírkové hlavolamy (na procvičování logických a kombinatorických schopností a logické představivosti žáků)*. Pedagogické centrum, Plzeň, 1997.
- [11] Kratochvílová, J.: *Students' strategies in the solution to a combinatorial problem*. In: *Materialy z konferencji naukowej Interakcja teorii a praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i sredniej*, WSP Rzeszow, 1997 89–98.
- [12] Laubová, M.: *Úlohy typu „Stěhování“*. Učitel matematiky, 6, č. 4 (28), 1998, 245–252.
- [13] Laubová, M.: *Ještě jednou úlohy typu „Stěhování“*. Učitel matematiky, 7, č. 3 (31), 1999, 183–186.
- [14] Šebánková, L.: *Analýza žákovských řešení nestandardních úloh z geometrickým obsahem*. Pedagogické centrum, Plzeň 2000.

K FORMOVÁNÍ NÁZORŮ UČITELŮ NA CHARAKTER MATEMATICKÉHO VZDĚLÁVÁNÍ

Marie Tichá

ÚVODNÍ POZNÁMKY

Z. Helus ve své přednášce „Proměny, úskalí a perspektivy učitelského vzdělávání“ na konferenci *Učitelé a jejich univerzitní vzdělávání na přelomu tisíciletí* ukázal, že současné vzdělávání charakterizuje přechod od transmisivně orientovaného vzdělávání ke vzdělávání osobnostně orientovanému. To znamená, že se od pouhého „předávání“ přechází k učení se poznávat, jednat, komunikovat, žít společně. Osobnostně orientované vzdělávání zprostředkovává ucelený náhled na svět a místo člověka v něm.

V článku [2] M. Hejný a F. Kuřina formulovali své přesvědčení o smyslu vzdělávání: „Smysl vzdělávání vidíme v kultivaci žáka, zvláště pak v kultivaci jeho duševního světa. Přitom nejde prioritně o to, aby žák ovládal určitou sumu poznatků či informací, ale o to, aby rozuměl světu, aby dokázal řešit problémy, s nimiž přijde do styku, aby uměl vyhledávat a hodnotit informace, aby měl vybavení pro svůj další rozvoj.“ Mnozí učitelé matematiky i didaktikové s tímto názorem souhlasí. Reálné vyučování s ním však často není v souladu.

Naše zkušenosti z vyučování prokazují, že jedním z velkých problémů matematického vzdělávání je vhodné nasměrování aktivity učitelů i žáků ve vyučování. Hlubší pozorování ukazuje, že se často jedná o vyučování transmisivní a instruktivní, to znamená že vyučování má charakter předávání informací nebo dává jen návody, jak postupovat. Žáci se nepodílejí na získávání a formování vlastních poznatků, spoléhají se jen na mechanické ukládání informací do paměti. „To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (například u zkoušky), obvykle však dochází k rychlému zapomínání a zřídka kdy k jejich netriviálnímu využití a dalšímu

rozvíjení.“ [1] Žáci pak vidí matematiku jako soubor pouček, návodu a pravidel, které je třeba nacvičit a dobře si zapamatovat.

Jak jsme již vícekrát uvedli (například [7, 10]), jsme přesvědčeni, že matematika nemůže být žákům předávána v „hotové“ formě. Poznátky musí vyrůstat z jejich zkušeností a být výsledkem jejich vlastní činnosti. Proto zdůrazňujeme potřebu posílení konstruktivních přístupů k vyučování matematice. V naší současné škole však stále ještě převažuje transmisivní a instruktivní orientace vyučování.

JAK DOCÍLIT ZMĚNY?

Uvědomujeme si, že kvalita vyučování závisí v rozhodující míře na učiteli, na tom, jak chápe smysl, význam, podstatu matematického vzdělávání, jaké je jeho „přesvědčení“. Učitel je nositelem charakteru i změn ve vzdělávání, jeho přesvědčení zaujímá klíčovou pozici. Chceme-li tedy změnit charakter vyučování, musíme se snažit působit především na učitele, rozvíjet a kultivovat názory a přesvědčení učitelů.

Ukažme si některé výsledky dvou šetření, které naznačují postoje a přesvědčení učitelů.

Učitelé 1.–5. ročníku (účastníci seminářů – tedy ti, u kterých lze předpokládat zájem o kvalitu vzdělávání i sebevzdělávání) byli požádáni, aby napsali, jak by podle jejich názoru mělo vypadat matematické vzdělávání (co všechno zahrnuje, co je jeho podstatou, jaký je jeho význam, ...). Sešla se velmi široká škála odpovědí. Většina učitelů nejvíce zdůrazňovala nácvik a ovládnutí numeriky a rýsování a dovednost řešit slovní úlohy pomocí naučené metody a její procvičování. Následovalo řešení „praktických“ úloh ze života (někteří zdůrazňovali různorodost úloh). Poměrně často se vyskytoval požadavek na rozvíjení logického myšlení a představitivosti a na využívání hry. Podstatně méně často se objevil požadavek smysluplnosti a použitelnosti poznatků, „umění si poradit“ při řešení úloh, využívání různých metod řešení a vizualizace, odstranění strachu z matematiky („čelit problémům“) atd. Objevil se i požadavek, aby žáci samostatně objevovali nové poznatky. O roli učitele se nezmiňoval nikdo. Když jsme posléze o problematice diskutovali, učitelé většinou sebekriticky uváděli, že v jejich práci se žáky převažuje nácvik provádění početních operací a předávání návodu, jak řešit typové slovní úlohy. Současně však bylo z jejich výpovědí patrné, že si uvědomují potřebu změny.

Následující šetření připravil F. Kuřina. Učitelům 6.–9. ročníku bylo předloženo pět různých návodů, jak postupovat při vyučování tématu Pythagorova věta. Postupy se lišily různou mírou zastoupení konstruktivistických idejí. Úkolem učitelů bylo:

- a) Rozhodnout, který z návrhů pokládají za nejvhodnější.
- b) Vybrat ten z návrhů, ke kterému se jejich vlastní postup nejvíc blíží.

I ti učitelé, kteří pokládali za nejvhodnější ty postupy, které byly do značné míry v souladu s myšlenkami konstruktivismu, svůj vlastní postup sebekriticky charakterizovali aspoň o jeden stupeň blíže k konstruktivismu.

Doposud jsme učitele připravovali (a stále ještě často připravujeme) převážně instruktivně, předkládali jsme jim „hotové“ materiály a předpokládali jsme, že oni pak budou ve své práci ve škole uplatňovat ideje konstruktivismu. Nyní se pokoušíme učitele připravovat stejným způsobem, jaký očekáváme v jejich práci se žáky. To se týká přípravy budoucích učitelů i vzdělávání učitelů již působících v praxi (například [6]).

Pokud se učitelé, kteří dosud vyučovali převážně transmisivně a instruktivně, budou snažit změnit svůj vyučovací styl, bude je to zřejmě stát značné úsilí. Pro didaktiku matematiky to znamená výzvu, aby těmto učitelům pomohla jejich snahu uskutečnit. Aby jim pomohla posunout těžiště působení na žáky od role „předavatele“ informací k roli nositele výzev, otázek, problémů, tvůrce klimatu.

Jednou z cest, jak toho dosáhnout, je „otevřený přístup“ a soustavné zařazování „otevřených problémů“ do vyučování matematice. Pod označením „otevřený problém“ se zpravidla rozumí problémy, u kterých není jasně jednoznačně zadaná výchozí a/nebo cílová situace. Označení „otevřený problém“ („otevřený přístup“) můžeme chápat jako „deštník“, pod který lze schovat problémy a činnosti nazývané různými autory například jako podurčené úlohy, otevřené úlohy, projekty, zkoumání reálných situací, tvoření úloh, užití metody Co když...? a mnohé další. Úlohy, se kterými se žáci setkávají ve škole, jsou ale zpravidla „uzavřené“, takové, které neposkytují žákům mnoho prostoru [8].

Do popředí našeho zájmu se proto dostalo studium dvou oblastí – „uchopování situací“ a „využívání projektů“ ve vyučování matematice [9]. Naše zkušenosti ukazují, že zkoumání žákům známých situací, při kterém mohou využít svých matematických i obecných zkušeností a znalostí, poskytuje mnoho příležitostí k posilování konstruktivního charakteru vy-

učování matematice. Dochází přitom k propojování reálného a matematického světa ve vědomí žáků a rozvíjení schopnosti a dovednosti žáků formulovat otázky a tvořit vlastní úlohy, což je projevem porozumění.

UCHOPOVÁNÍ SITUACE, SCÉNÁŘE, PROJEKTY

Podrobněji se zmíníme o uchopování situací (navazujeme na [3]). Situací rozumíme „otevřenou“ oblast „matematickou“ i „nematematickou“, kterou chceme zkoumat a ze které vyrůstají otázky a úlohy. Pokud jde o „reálné situace“, snažíme se vyhledávat takové, se kterými mohou mít učitelé i žáci vlastní bohaté zkušenosti. Zaměřujeme se na situace, jejichž součástí jsou i lidé, kteří v nich vystupují. Vzájemné vztahy mezi těmito lidmi ovlivňují průběh i výsledky řešení problémů. Zkoumáním situací, jejichž uchopování s porozuměním vyžaduje uplatnění sociálního hlediska, se náš výzkum odlišuje od výzkumů dosud u nás prováděných (například [7, 10]).

Uchopováním situace rozumíme myšlenkový proces, ve kterém se prolíná zvláště: vnímání situace; objevení klíčových objektů, jevů a vztahů; stanovení určitého směru uchopování; vytvoření modelu; formulování otázek a úloh „vyrůstajících“ ze situace. Tyto činnosti jsou zaměřeny na zkoumání a pochopení situace a jejich cílem je formulování otázek, problémů, úloh. Střídají se v nich pohledy „zevnitř“ (z pozice jednající osoby) s pohledy „zevně“ (řešitel vystoupí z pozice jednající osoby a hodnotí situaci jako celek). V následujících oblastech uchopování situace převládá řešení úloh: hledání odpovědí na formulované otázky a řešení vytvořených úloh; interpretace a hodnocení výsledků a jejich posouzení z různých hledisek; eventuálně identifikace nové situace a její uchopování s využitím zkušeností obohacených během dosavadní činnosti (podrobněji například [7, 9, 10]).

Chceme-li, aby do vyučování matematice proniklo „uchopování situací“, stavíme učitele i žáky do pro ně „neznámého světa“. Proto když chceme rozvíjet schopnost učitelů i žáků uchopovat situace, tedy nejen řešit úlohy, ale také formulovat otázky a úlohy tvořit, připravujeme pro tyto účely scénáře [4, 6, 7, 10]. Scénáře jsou určeny hlavně učitelům. Zamýšlíme je jako inspiraci, v žádném případě jako instrukci. Cílem je, aby se staly podnětem pro učitele k vytváření jejich vlastních scénářů.

Scénáře obsahují zpravidla: popis situace z vybraného prostředí; sadu otázek pro žáky, které jim pomohou oživit dřívější zkušenosti; vstupní

(jednoduchou) úlohu s doplňujícími otázkami pro žáky; podpurný soubor otázek a úloh čerpajících náměty v dané situaci (některé otázky vedou na standardní úlohy, jiné jsou neobvyklé, dokonce mohou budit dojem, že do matematiky nepatří a učitelé se jim proto někdy brání [5, 10]); poznámky pro učitele, které naznačují různé možnosti uchopování situace (jsou v nich uvedeny i očekávané postupy žáků); poznámky vztahující se k jednotlivým bodům a otázkám, které nejen naznačují matematické řešení, ale zdůrazňují i roli introspekce.

Scénáře mají učitelům i žákům ukázat možné cesty zkoumání situace a jejího uchopování. Můžeme je chápat jako mapy nebo sítě. Ukazuje se, že na počátku uchopování situace je třeba pracovat se zúženými „nasměrovanými“ situacemi. To znamená, že už v úvodu do situace naznačíme okruh zkoumání, oblast zájmu, nasměrování otázek. Došli jsme k závěru, že na „nasměrovanou situaci“ je možné se dívat jako na „projekt“. V mnoha ohledech se tu projevila shoda nazírání [9].

Ukážeme situaci, která podle našich zkušeností budí zájem žáků a učitelé z ní rádi vycházejí. Její zkoumání nevyžaduje žádné velké matematické znalosti, spíše dobrý úsudek. Proto jsme se jí zabývali již od 4. ročníku základní školy [6, 7, 10].

Představení a popis situace:

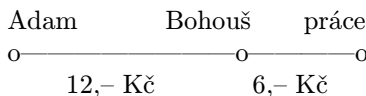
Každý den jezdím svým vlastním autem do práce. Také moji spolupracovníci, kteří bydlí v blízkých místech, jezdí každý svým autem.

Nasměrování:

Uvažujeme, zda a jak bychom mohli snížit náklady na dopravu do zaměstnání.

Vstupní otevřená úloha:

Adam a Bohouš jezdí každý svým autem, po stejné trase, ale ze dvou různých míst do stejného místa zaměstnání. Adama stojí jedna cesta do práce 18,- Kč, Bohouše 6,- Kč. Náklady na 1 kilometr jízdy mají stejné.



Uvedená situace dává příležitost k uvolňování parametrů (dopravní síť, počet osob, pravidla dělení nákladů, ...). To umožňuje vytváření

kaskády na sebe navazujících úloh s různým stupněm obtížnosti. Uchopování této situace vyvolává diskusi o spravedlivém rozdělování nákladů, při kterém hraje podstatnou roli dohoda zúčastněných osob.

O NĚKTERÝCH DOSAVADNÍCH ZKUŠENOSTECH

Hlavní překážkou pro kultivaci názoru učitelů na charakter matematického vzdělávání a tedy i na zařazování „uchopování situací“ a „projektů“ do vyučování je navyklý styl práce učitelů, zaměřený především na ovládnutí „matematického řemesla“. Někteří se obávají, že se utíká od „skutečné matematiky“, je to zřejmě projevem jejich zúženého pohledu na význam matematického vzdělávání pro rozvoj osobnosti žáka. Mnozí učitelé mají obavu z časově náročných diskusí, o jejichž přínosu pro matematiku pochybují. Další se obávají časově i myšlenkově náročné přípravy a obtížnosti předem odhadnout reakce žáků. Někteří se obávají, že nejsou dostatečně kompetentní. Mnozí mají také obavy z toho, jak žáky hodnotit. Pokoušíme se tyto překážky odstranit. Proto formou dílen seznamujeme učitele působící v praxi i studenty (budoucí učitele) s možnostmi využívání „uchopování situací“ a „projektů“ ve vyučování matematice. Toto téma bylo zařazeno i do pracovních cyklů seminářů pořádaných v rámci programu Iniciativa na Pedagogické fakultě UK. Zkušenosti z uvedených aktivit ukazují, že postoje a názory, přesvědčení učitelů lze kultivovat a rozvíjet [5, 6].

Zkoumání situací i práce na projektech vyžaduje od učitelů pečlivou přípravu celé vyučovací jednotky včetně pokusu předvídat možné myšlenkové procesy a reakce žáků. Pokud se podaří, aby učitelé překonali počáteční nedůvěru a začali scénáře promýšlet, jsou ve většině případů schopni pracovat velmi tvořivě. Nejpriznivěji přijímali naše scénáře právě ti učitelé, kteří s nimi tvořivě pracovali, upravovali je, doplňovali nebo si dokonce vytvářeli scénáře vlastní [5]. Ilustrujme si názory učitelů na ukázkách výpovědí několika z nich:

„V přípravné fázi jsem se obávala, jak žáci přijmou tento přístup k úlohám z praxe... pokoušet se o zapřádání úvah začínajících slovy „Co když...“,“ mě naplňovalo neklidem.“

„Žáci dobře přijali, že mohou sami rozhodovat o vytvoření nových úloh, ovlivňovat nové otázky, posuzovat výhodnost řešení. Zapojili se i slabší žáci.“

„Je skutečně motivující, když učitel dokáže využít zkušenosti žáků k ře-

šení úloh. Je příjemné vidět dychtivost v očích žáků, se kterou se pouštějí do práce . . . “

Zkoumání situací a tvoření úloh zvýšilo aktivní účast žáků na vyučování, a to i těch nejslabších. Je však třeba říci, že jen někteří žáci rádi pracují delší dobu na jednom tématu. Ne všichni mají rádi „objevování“. Větší tvořivost a touhu dovídat se něco nového pozorujeme u mladších žáků; to ukazuje, že je třeba začít včas.

LITERATURA

- [1] Hejný, M. – Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*. MFI, r. 7, 1997/98, č. 7, s. 385–395.
- [2] Hejný, M. – Kuřina, F.: *Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces*. Pedagogika, r. 50, 2000, č. 1, s. 38–50.
- [3] Koman, M. – Tichá, M.: *Jak pomocí pravidelnosti a závislosti získávat vhled do situací*. Sborník „5. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol“. JČMF, Plzeň 1995, s. 50–53.
- [4] Koman, M. – Tichá, M.: *K aplikacím matematiky na ZŠ*. MFI, r. 5, č. 3, 4, 5, 6, 8, 9 (Řešíme úlohy o nákupech, cenách, zisku; s. 113–117, 172–177. Cestování – čas – peníze; s. 227–232, 281–284. Jedeme na výlet – vlakem, autobusem, možná i jinak; s. 399–406, 449–454.)
- [5] Koman, M. – Tichá, M.: *Jak v matematice zvládají žáci zkoumání situací z praxe – I*. MFI, r. 7, 1997/98, č. 1, s. 2–12.
- [6] Učební texty pro vzdělávací program Iniciativa. Ped. fak. UK, Praha 1995:
Koman, M. – Tichá, M.: *Jak učit žáky tvořivému přístupu k situacím s náměty z praxe*.
Tichá, M. – Koman, M.: *Jak s matematikou na obecné škole?*
- [7] Koman, M. – Tichá, M.: *On Travelling Together and Sharing Expenses*. Teaching Mathematics and its Applications. Ed.: D. Burghes. Oxford University Press, r. 17, č. 3, 1998, s. 117–122.
- [8] Pehkonen, E.: *Introduction: Use of open-ended problems*. ZDM, r. 27, 1995, č. 2, s. 55–57.

- [9] Tichá, M. – Kubínová, M.: *On the activating role of projects in the classroom*. In: Proceedings CERME 1. Ed.: I. Schwank. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück 1999.
- [10] Tichá, M.: *Aplikace ve vyučování matematice*. In: Sborník přednášek z konference Matematické vzdělávání 10–15letých žáků. Ed.: Z. Bachelová, V. Sochací. JČMF, Frýdek-Místek 1999, s. 96–104.

K PŘÍPRAVĚ A DALŠÍMU VZDĚLÁVÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY

Stanislav Trávníček

Část veřejnosti, dokonce i učitelské veřejnosti, považuje vysokoškolské vzdělání za jednorázovou investici, která „majiteli vzdělání“ zajišťuje jednu provzdu oprávnění k vykonávání určitého zaměstnání. Tento názor je ještě posilován současným stavem za neexistence systému celoživotního vzdělávání v ČR, kde můžeme pozorovat jen první vlaštovky, které však ještě jaro nedělají.

Chápejme však raději vysokoškolskou přípravu jen jako vhodný start do celoživotního vzdělávání, které se stává a nutně stane součástí všeobecné kultury života. Znamená to např., že již v průběhu vysokoškolské přípravy by studenti učitelství měli projít situací, která navodí jejich další vzdělávání ve všech složkách budoucí profese.

ODBORNÉ VZDĚLÁNÍ

Zde je vysokoškolská příprava klíčovou příležitostí, kdy studenti mají možnost poznat základy svých zvolených oborů. Na Přírodovědecké fakultě UP v Olomouci jsme před několika lety přešli k systému, který podle nás vystihuje specifika učitelského vzdělávání a přihlíží i k zájmovým oblastem studentů.

Prvních 5 semestrů se zde studují základy algebry, geometrie a matematické analýzy (s přihlédnutím k učitelskému zaměření studentů) a tato první etapa studia je zakončena soubornou zkouškou. Ta má i svou písemnou část, která je – stejně jako část ústní – zaměřena odborně na matematiku.

Pak si studenti volí jednu z uvedených disciplín jako hlavní zaměření a jednu jako další zaměření a do větší odborné hloubky pronikají jen ve zvolených směrech. Současně, zejména ve druhé fázi svého studia, studují předměty zaměřené profesně, jako je didaktika matematiky, semináře ze

školské matematiky, pravděpodobnost a statistika, dějiny matematiky apod.

Tím, že část jejich studijní literatury je umístěna na počítačové síti, jsou studenti motivováni pro používání této sítě, což považujeme za běžný požadavek, jaký dnes už na budoucí učitele můžeme klást. Pokud se po absolvování chce někdo věnovat dalšímu odbornému (např. postgraduálnímu) studiu, je pro tento účel vhodně „nastartován“.

DIDAKTICKÉ VZDĚLÁNÍ

Ve druhém, čtvrtém, šestém, osmém a devátém semestru se v určité formě volitelnosti konají semináře ze školské matematiky, zaměřené na řešení typových, běžných (standardních) i nadstandardních úloh i na další stránky práce učitele (sestavování a oprava písemek, práce s literaturou, matematické zajímavosti ad.). Studenti se mohou seznámit i se základním matematickým SW. Dále v šestém až osmém semestru probíhá výuka didaktiky matematiky se stěžejním tématem – jak co učit.

Dvě třítydenní školní praxe přináší studentům první zažitě praktické zkušenosti. Chybí nám průběžná praxe a snad i více souvislé praxe, ale zde narážíme na organizační a ekonomické problémy a překážky v současnosti neřešitelné.

Diplomová práce může být zaměřena odborně na vyšší nebo na elementární matematiku nebo i na didaktiku matematiky. Součástí závěrečné zkoušky (z hlavního a dalšího zaměření a didaktiky) je písemná zkouška z didaktiky, kde studenti prokazují praktické znalosti z elementární matematiky (řešení úloh různé náročnosti) a z didaktiky (oprava, analýza a hodnocení žákovských písemek).

DALŠÍ VZDĚLÁVÁNÍ – MOTIVACE

Motivace dalšího vzdělávání má dvě stránky - věcnou a ekonomickou. Věcně je učitel motivován k dalšímu vzdělávání zpravidla tehdy, když se tu setká se zdroji informací, které reflektují jeho aktuální potřeby a problémy jeho pedagogické práce. Ekonomicky je pak motivován, pokud mu úspěšné další vzdělávání přinese možnost jeho kariérního postupu.

Zatím je motivace věcí každého jednotlivce. Jsou učitelé, kteří vyhledávají příležitosti ke svému dalšímu vzdělávání, mnoho učitelů cítí, že by měli něco dělat, ale současné příležitosti je dostatečně nemotivují, ale jsou též učitelé, kteří jsou rádi, že „mají studia, a tedy i vzdělávání za

sebou“. Zde dochází k nepochopení moderního světa, v němž bez dalšího vzdělávání bude člověk nacházet stále menší a menší uplatnění. Ekonomická motivace dalšího vzdělávání není dosud institucionalizována. Není zahrnuta ani do podmínek platových postupů učitelů a ježto přináší i nároky na určité náklady a na organizační zabezpečení ze strany škol, nenachází často faktickou podporu ani u vedení škol. Zorganizování, zajištění a provádění akcí dalšího vzdělávání je natolik náročné, že je nelze považovat za lukrativní ani pro vysoké školy, které na tuto činnost nedostávají do svých rozpočtů nic. Vysoké školy jsou proto nuceny požadovat úhradu na účastnících, kteří se rozpakují vynakládat prostředky na něco, k čemu nejsou ekonomicky motivováni. Myslím, že bez takové motivace bude další vzdělávání učitelů na školách jen okrajovou záležitostí, bez možnosti realizace účinných koncepcí u organizátorů z VŠ.

To však neznamená, že bychom měli rezignovat. I za současných podmínek lze odzkoušet a ověřit různé formy dalšího vzdělávání, různé obsahové náplně založené na věcné motivaci a potřebnou podkladovou literaturu. K tomuto ověřování se hlásí i matematika na Přírodovědecké fakultě UP. Pro každý region se samozřejmě musí vycházet z místních podmínek. Města s velkou kumulací škol, a tedy i učitelů mají jiné podmínky než místa, kde je třeba počítat s uspokojováním zájemců ze širšího okolí. Tak například zatímco jedni mohou praktikovat formu odpoledních setkání, nelze tuto formu použít tam, kde učitelé musí dojíždět z větší vzdálenosti.

DALŠÍ VZDĚLÁVÁNÍ – PŘEDSTAVY O FORMĚ

Předpokládáme, že kromě příležitostných odborných akcí bude probíhat i organizované další vzdělávání učitelů matematiky. Chtěli bychom vyzkoušet studium třísemestrové, které bude probíhat formou přednášek, seminářů, praktických cvičení, konzultací a samostatných prací. Při výuce se předpokládá využití nejen klasické formy literatury, ale i nejmodernějších informačních technologií, včetně internetu. Výuka bude v prvních dvou semestrech probíhat v sedmi týdnech ve čtrnáctidenním intervalu po pěti vyučovacích hodinách v jednom týdnu. Náplní bude matematika, didaktika matematiky i další předměty související s problematikou výuky na základních a středních školách všech typů. Ve 3. semestru se předpokládá řízená i samostatná praxe účastníků vzdělávání a kontakt s univerzitou zejména přes internet a též formou osobních

konzultací. (Další možností organizační formy je internátní typ prázdninového soustředění s toutéž náplní.) Studium bude uzavřeno praktickým výstupem, a to jednou z navrhovaných forem podle výběru účastníka:

- přednesením příspěvku na odborné konferenci, semináři apod.,
- publikací v odborném časopisu,
- závěrečnou prací,
- přípravou a provedením otevřené vyučovací hodiny (s rozбором a diskusí),
- jiným dohodnutým způsobem.

Katedra algebry a geometrie vypsala na téma dalšího vzdělávání učitelů projekt Fondu rozvoje a v případě jeho přijetí, které by mělo pokrýt náklady organizace, pak své zkušenosti sdělí pracovníci katedry na odborných seminářích a konferencích, resp. budou je publikovat v odborných časopisech.

DALŠÍ VZDĚLÁVÁNÍ – PŘEDSTAVY O OBSAHU

Věcný obsah dalšího vzdělávání má dvě složky. Jsou oblasti, o nichž učitelé vědí, že je postrádají a potřebují, a jiné oblasti, o nichž se mnoho neví. První složku lze hodnotit jako „zájem učitelů“. Z tohoto hlediska jeví učitelé zájem zejména o problematiku úloh a jejich řešení, a to úloh různých druhů, např. náročnějších (styl MO), netradičních, tzv. zajímavých, komplexních úloh na matematizaci a jiných úloh aplikačních (např. z finanční matematiky nebo i z oblastí dalších změn ve společenském a ekonomickém systému) i úloh ze zahraničních učebnic. Aktuální zájem projevují učitelé rovněž o problémy související se změnami ve školském systému, např. o ukončování základního vzdělání nebo o novou organizaci maturitních zkoušek. Zájem je rovněž o využívání nových technologií a zvláště počítačových sítí, na základní škole je zájem i o některé psychologicko-pedagogické problémy.

V následujícím přehledu navržených výukových témat jsou některá navržena jako povinná a některá jako výběrová. Zde uvádíme pro informaci jen přehled bez uvedení dalších podrobností (a bez rozčlenění na 1. a 2. složku):

- moderní formy a metody výuky matematiky,
- metody řešení matematických úloh,
- nadstandardní úlohy školské matematiky,
- teorie grafů,
- matematizace a slovní úlohy,
- geometrie a umění,
- úvod do historie matematiky,
- zajímavá matematika,
- názorné obrázky v geometrii,
- komunikace na počítačové síti,
- školský matematický software,
- asertivita ve škole,
- foniatrie (péče o hlas),
- rétorika,
- jak psát matematiku a o matematice.

Při organizaci a zabezpečování dalšího vzdělávání učitelů chceme využívat zkušeností jiných pracovišť a máme již dohodnutu i zahraniční spolupráci. Předpokládáme, že účastníci dostanou k jednotlivým tématům sylaby.

Tento typ dalšího vzdělávání učitelů považujeme za formu, která se může stát trvalým úvodním vstupem do celoživotního vzdělávání probíhajícího v mnoha dalších formách. Podmínkou oživení a širšího dosahu dalšího vzdělávání učitelů však zůstává dostatečná motivace nejen věcná, ale také ekonomická.

MATURITNÍ PÍSEMNÉ ZKOUŠKY Z MATEMATIKY

Jaroslav Zhouf

Tento článek by měl přispět do diskuse o podobě maturit z matematiky na střední škole.

Nynější návrhy stanoví, že maturita z matematiky nebude povinná, že bude možné volit si jeden z dvojice předmětů matematika – občanský a společenskovědní základ. Maturitní zkouška bude mít dvě části. Společná (státní) část bude jednotná pro všechny studenty, bude organizována centrálně a bude mít dvě úrovně, základní (B) a vyšší (A). Školní část pak bude mít v podstatě takovou formu, jakou měly maturitní zkoušky doposud, a zůstane zcela v kompetenci jednotlivých škol.

Skupina autorů tzv. Katalogu cílových požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky předložila návrh na podobu této zkoušky. Vesměs se jedná o soubor úloh testového charakteru s volbou odpovědi, tzv. multiple-choice. Kromě nesporných výhod této formy zkoušky (úlohy se velmi rychle opravují, výsledky jsou objektivně porovnatelné v celé republice, úlohami se dají pokrýt téměř všechny oblasti matematiky) je jí vytýkán hlavně ten nedostatek, že testové otázky jsou většinou úlohy uzavřené, kde není vyžadováno vlastní vyjádření studenta, a volba odpovědi může být často jen náhodná. Také není možné řešit obtížnější a komplexnější úlohy, tedy ty klasické úlohy, které byly studentům doposud zadávány.

Odstranění uvedeného nedostatku lze provést zařazením úloh polootvřených, kde je vyžadována stručná odpověď, nebo dokonce úloh otevřených, kde je nutné formulovat a řešit obtížnější a komplexnější úlohy.

V tomto článku uvedu písemné maturitní zkoušky, jejichž úlohy se podle mého mínění přibližují formě otevřených úloh. Při jejich tvorbě jsem si vytyčil řadu zásad, kterými jsem se řídil. Za nejdůležitější považuji tyto:

1. rozčlenění rozsáhlejší úlohy na řadu dílčích úkolů,

2. nezávislost jednotlivých otázek v každé úloze,
3. propojení jednotlivých oblastí matematiky v jedné úloze,
4. zastoupení co nejširšího spektra témat v celé písemné práci a jejich nepřekrývání,
5. přítomnost aspoň jedné komplexnější úlohy,
6. možnost řešení úloh více způsoby,
7. „čitelnost“ řešení pro studenty i pro opravovatele.

Pokud by byla písemná maturitní zkouška určena pro talentované žáky v matematice – ostatně takové zkoušky dále prezentuji – je vhodné předchozí zásady doplnit na „desatero“:

8. používání abstrakce, zobecňování, experimentování, řetězení myšlenkových kroků,
9. budování nových pojmů a propojování se známými pojmy,
10. zajímavost a „elegantnost“ úloh i celé písemné zkoušky.

Ne vždy se podaří všechny zásady u všech úloh nebo u maturitní písemné práce jako celku splnit. Někdy je lepší záměrně některou zásadu nedodržet, aby úloha nepřestala být zajímavou, aby se příliš neztížila či naopak nezjednodušila, aby se neztratila její přehlednost atd.

Vysvětlím nyní podrobněji podstatu jednotlivých zásad.

ad 1. Úlohy v písemné maturitní zkoušce by měly být přiměřeně náročné a rozsáhlé. Bývá zvykem položit na závěr úlohy jedinou otázku. Řešení ale vyžaduje lineární postup, kdy je nutné vyřešit řadu pomocných úkolů. Rozčlenění jedné úlohy na dílčí problémy dovoluje, aby se student v řešení orientoval, aby ho dílčí úkoly směřovaly k vyřešení celého problému.

ad 2. Otázky v úloze by měly být koncipovány nezávisle na sobě, s malou návazností na sebe. Zamezí se tím zablokování řešení v případě, že student ztroskotá v prvních krocích. Pokud na sebe přesto otázky navazují, měl by se v nich prozradit výsledek, aby bylo možné se o něj opřít při řešení následujících úkolů. Např. místo úkolu „Najděte průsečík přímk...“ by měl úkol znít: „Dokažte, že průsečíkem přímk je bod...“.

ad 3. Ve škole se většinou zadávají úlohy, které procvičují a ověřují jednu partii matematiky. Děje se tak proto, že úloha je zadávána v průběhu či bezprostředně po výkladu onoho tématu. S úlohami, které by propojovaly více oblastí matematiky, se setká student zřídka. Proto si ani neuvědomuje souvislosti mezi jednotlivými partiemi. Typickým příkladem je chápání grafu kvadratické funkce a paraboly jako kuželosečky jako dvou zcela odlišných pojmů, protože každý byl probírán v jinou dobu a nebyla ukázána souvislost mezi nimi. Je velice přínosné předložit dokonce takovou úlohu, která vytváří most mezi zdánlivě nesouvisejícími partiemi učiva.

ad 4. Rozčlenění jednotlivých úloh na řadu dílčích problémů, a pokud možno ještě z různých partií, dovoluje pokrýt více oblastí matematiky. Je tak možné, aby se objevila problematika množin, výroků, statistiky, pravděpodobnosti, dalších planimetrických pojmů atd., které se jinak objevují v úlohách velice málo. Ideální by bylo, kdyby všechny dílčí úkoly všech jednotlivých úloh byly z odlišných oblastí. Písemná zkouška by tak získala jednu z výhod testové formy, a sice pokrytí co největší části probraného učiva.

ad 5. Přílišné rozmělnění úlohy na dílčí úkoly může znamenat řešení jen těch nejelementárnějších problémů a může až příliš navádět studenta k řešení. Proto je naopak vhodné, aby se v každé písemné práci objevila aspoň jedna úloha komplexnějšího charakteru s jednou, nebo jen dvěma otázkami.

ad 6. Tuto zásadu není třeba nijak podrobně komentovat. S počtem možných řešitelských postupů se zvětšuje pravděpodobnost, že student úlohu vyřeší.

ad 7. Určitá úroveň matematické kultury v přehlednosti a srozumitelnosti textu úlohy i v zápisu řešení pomůže jak studentovi, aby se nezalekl složitých úvah a úprav, tak učiteli, aby se neutápěl v rozsáhlých opravách a nepřehlednosti myšlenkových postupů studentů.

ad 8. Písemná maturitní zkouška by neměla ověřovat pouze znalosti a dovednosti studentů získané při výuce, měla by také odhalovat jejich matematické schopnosti. Mohly by se tedy objevit úkoly, které nebyly explicitě ve škole řešeny. Při jejich řešení musí student prokázat schopnost zobecňování, abstrakce, experimentování, řetězení myšlenkových kroků atd.

ad 9. Maturitní zkouška by nemusela prověřovat jenom znalosti studentů, ale mohla by přinášet i nová poučení, např. ve formě nových

pojmů, které by byly definovány v zadání úlohy a jejich pochopení by bylo následně testováno otázkou.

ad 10. Má-li úloha studenty zaujmout, měla by být nová a v několika detailech přitažlivá.

Podívejme se nyní na konkrétní písemnou maturitní zkoušku, kterou jsem vytvořil. Na několika příkladech provedu analýzu výše uvedených zásad tvorby úloh do této zkoušky. Zde uvedené úlohy jsou náročné, neboť jsou určeny pro talentované studenty v matematice. Nás náročnost ale nebude zajímat, neboť v tomto článku jde především o obsah a formu jednotlivých úloh i celé písemné maturitní zkoušky. Aspoň pro ty studenty, kteří budou konat společnou část maturity v úrovni (A), se dají vytvářet podobné jednodušší úlohy.

Maturitní písemná zkouška z matematiky pro studenty tříd se zaměřením na matematiku na gymnáziu Zborovská v Praze v roce 1999

Úloha 1

V matematické soutěži byly zadány tři úlohy A, B, C. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý vyřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nevyřešili úlohu A, byl počet těch, kteří vyřešili úlohu B, dvojnásobkem počtu těch, kteří vyřešili úlohu C. Počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří vyřešili úlohu A. Ze všech žáků, kteří vyřešili jedinou úlohu, právě polovina nevyřešila úlohu A. Počet žáků, kteří vyřešili právě dvě úlohy, byl ve všech třech případech stejný. Kolik žáků vyřešilo všechny tři úlohy?

Úloha 2

V soustavě souřadnic Oxy uvažujme oblast omezenou osou x a parabolou o rovnici $y = x^2 + 6x$.

- Určete rovnici kružnice opsané této oblasti.
- Určete rovnici kružnice vepsané této oblasti.
- Najděte oba středy stejnolehlosti kružnic z bodů a) a b).

Úloha 3a

Pro každé přirozené číslo n je dána kvadratická funkce předpisem

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)^2 \\ f_2(x) &= (x-1)^2 + (2x-1)^2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x) &= (x-1)^2 + (2x-1)^2 + \dots + (nx-1)^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

a) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b) Každou funkci f_n lze převést na tvar

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n. \quad (1)$$

Určete koeficienty a_n, b_n, c_n jako funkce proměnné n .

c) Určete souřadnice x_n, y_n vrcholu každé paraboly dané předpisem (1) jako funkce proměnné n .

d) Dokažte, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ je klesající a posloupnost $(y_n)_{n=1}^\infty$ je rostoucí.

e) Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Úloha 3b

a) Sestrojte grafy funkcí

$$f: y = \sqrt{3-x}, \quad g: y = \sqrt{x+1}$$

v jedné soustavě souřadnic a na jejich základě sestrojte odhadem graf funkce $h: y = f(x) - g(x)$.

b) Pomocí diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce $y = h(x)$.

c) Řešte v oboru reálných čísel nerovnici $h(x) > 1$.

Úloha 4a

Nechť $ABCD$ je čtverec o straně délky jedna, M je střed strany CD , N je střed strany AD , P je průsečík úseček BM a CN .

a) Najděte to shodné zobrazení v rovině, které zobrazí trojúhelník MBC na trojúhelník NCD (ty jsou shodné).

- b) Umístěte čtverec $ABCD$ do Gaussovy roviny tak, že body A, B, C, D jsou postupně označeny komplexními čísly $a = 0, b = 1, c = 1 + i, d = i$. Dokažte, že každý z těchto čtyř bodů z se ve shodnosti z bodu a) zobrazí na bod $w = iz + 1$.
- c) Dokažte, že lze čtyřúhelníkům $ABPN$ a $NPMD$ opsat po řadě kružnice k a l .
- d) Vypočítejte mocnost bodu C vzhledem ke kružnici k .
- e) Určete množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost vzhledem ke kružnicím k a l .

Úloha 4b

V pravidelném čtyřstěnu $A_1A_2A_3V$ jsou K_1, K_2, K_3 postupně středy hran A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Středem hrany VA_1 je vedena rovina rovnoběžná se stěnou $A_1A_2A_3$, která protíná přímky VK_1, VK_2, VK_3 postupně v bodech L_1, L_2, L_3 .

- a) Určete poměr obsahů trojúhelníků $L_1L_2L_3$ a $A_1A_2A_3$.
- b) Nakreslete těleso (antihranol) $A_1A_2A_3L_1L_2L_3$.
- c) Určete poměr objemů antihranolu $A_1A_2A_3L_1L_2L_3$ a čtyřstěnu $A_1A_2A_3V$.

Připomeňme, že úlohy 1 a 2 jsou povinné a že z dvojice 3a, 3b a také z dvojice 4a, 4b si student může volit po jedné úloze.

V této písemné zkoušce se projevují výše citované zásady takto:

Zásada 1: Pět ze šesti úloh má problematiku rozdělenou aspoň do tří dílčích úkolů.

Zásada 2: V úloze 2 jsou nezávislé otázky a) a b). V úloze 3b jsou všechny tři otázky nezávislé. V úloze 4a můžeme považovat otázky d) a e) za nezávislé na předchozích. V úloze 4b jsou nezávislé otázky b), c) na otázce a).

Zásada 3: Uvedu jen nejhrubší dělení na jednotlivé matematické oblasti. V úloze 2 jsou propojeny funkce, kuželosečky, planimetrie syntetická i analytická. V úloze 3a jsou spojeny důkazy, rovnice, funkce, posloupnosti. V úloze 3b jsou propojeny funkce a nerovnice. V úloze 4a se propojují planimetrie a komplexní čísla. Úloha 4b spojuje planimetrii a stereometrii.

Zásada 4: Zde bude asi jednodušší vyjmenovat ty partie matematiky, které ve zkoušce zastoupeny nejsou. Jsou to např. integrální počet, řady, kombinatorika, pravděpodobnost, dělitelnost. V porovnání s počtem témat zastoupených je jich poměrně málo.

Zásada 5: V písemné práci je přítomna úloha s jedinou položenou otázkou a reprezentuje tak případ komplexní úlohy.

Zásada 6: V této písemné zkoušce se většinou jedná o klasické úkoly a problémy, které se také klasicky řeší známými postupy. Je tam ale rozsáhlý prostor, kde se dá použít více způsobů řešení. Jako příklad uveďme možnost hledání vrcholu paraboly doplněním na úplný čtverec používanou v nauce o kuželosečkách, či užitím diferenciálního počtu, či využitím znalostí o průběhu kvadratické funkce.

Zásada 7: Úspěšnost této zásady musí posoudit čtenář sám.

Zásada 8: Příkladem využití abstrakce může být úkol b) v úloze 2 a rovněž úkol b) v úloze 3a, nebo úkol a) v úloze 3b, nebo úkol b) v úloze 4b. Zobecnující prvky se objevují v úkolu b) v úloze 2, nebo v úkolu b) v úloze 4a. Řetězení jednotlivých myšlenkových kroků je obsaženo hojně v každé úloze.

Zásada 9: Nejevidentnějším novým pojmem je v písemné práci „antihranol“. Novým pojmem je také popis geometrického zobrazení komplexní proměnnou.

Zásada 10: Splnění této zásady opět ponechávám na posouzení čtenáři.

Domnívám se, že uvedené úlohy a zásady jejich tvorby mohou přispět k přípravě společné části písemné maturitní zkoušky z matematiky.

LITERATURA

- [1] *Katalog cílových požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky*. CERMAT, Praha, 2000.
- [2] *Katalog cílových požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky*, 2. návrh. CERMAT, Praha, 2000.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Ausbergerová Marie KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	019/732 08 66
Barešová Monika MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 09 07 26 baresova@math.cas.cz
Bauer Luboš KAMI ESF MU, Lipová 41A Brno, 659 79	05/43 52 32 42 05/43 52 32 22 lubos@econ.muni.cz
Beckerová Ludmila Gymnázium, Arabská 14 Praha 6, 160 00	02/36 17 07 02/33 31 03 66
Bečvář Jindřich MÚ UK, Sokolovská 83 Praha, 186 75	02/21 91 32 51 becvar@karlin.mff.cuni.cz
Benda Josef Bankovní institut VŠ, Letenské nám. 4 Praha 7, 170 00	02/21 01 72 38 02/33 37 22 37 bi-benda@mbox.vol.cz
Beneš Jan Gymnázium, Jana Masaryka 1 Jihlava, 586 01	066/730 36 12 066/731 01 77 reditelna@ji.cz
Bittnerová Daniela KMD FP TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	048/535 23 10 048/535 23 32 daniela.bittnerova@vslib.cz
Brejcha Miloš ÚDV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 13 70 019/742 14 15 brejcha@udv.zcu.cz
Brůnová Jitka SOU farmaceutické, Olomouc, 779 00	068/522 35 45
Burešová Jarmila Školský úřad, K Nemocnici 2007 Kladno, 272 01	0312/62 03 61 0312/62 72 81 su3203kd@alfa.uiv.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Bušek Ivan Pedagogické centrum, Na Poříčí 4 Praha 1, 110 00	02/232 48 39 02/24 23 02 35 busek@pcpraha.cz
Calda Emil KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	02/21 91 32 25 calda@karlin.mff.cuni.cz
Cutychová Jana Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	
Černý Jaroslav KM FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	02/24 35 38 66 02/24 31 07 35 cerny@mat.fsv.cvut.cz
Dejmalová Jana SZŠ a VZŠ, Masarykova 2033 Havlíčkův Brod, 580 01	0451/216 56 0451/216 56 zdravskol@hbnet.cz
Demlová Marie KMA FEL ČVUT, Technická 2 Praha 6, 166 27	02/24 35 34 40 02/311 92 38 demlova@math.feld.cvut.cz
Dittrich Jiří Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	05/41 32 13 17 gsn@gsn.anet.cz
Dolanský Petr KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 43 019/742 99 89 dolansky@kma.zcu.cz
Drahotský Petr Gymnázium B. Němcové, Pospíšilova 324 Hradec Králové, 500 02	049/551 46 91
Dvořáková Eva RDV TUL, Hálkova 6 Liberec, 461 17	048/535 51 05 048/535 51 01 eva.dvorakova@vslib.cz
Dvořáková Hana ISŠT COP, Nad Ovčírnou 2528 Zlín, 760 01	067/721 11 40 067/359 02 isst@isst.zlin.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Dvořáková Ivana Gymnázium, Nám. Fr. Křižíka 860 Tábor, 390 30	0361/25 21 42
Eliášová Lada VŠE Jižní město, Ekonomická 957 Praha 4, 148 00	02/793 67 66 eliasova@vse.cz
Entlová Petra SSHŠ Zlín, Nám T.G. Masaryka 1279 Zlín, 760 01	0603/87 97 08 czy@avonet.cz
Ernestová Martina MÚ UK MFF, Sokolovská 83 Praha, 186 00	02/21 91 32 51 mernesto@karlin.mff.cuni.cz
Fantová Ivana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	0301/72 17 10 fantova@gbn.cz
Fenclová Věra ZŠ, nám. Jiřího z Lobkovic 22 Praha 3, 130 00	02/67 31 07 06
Frýzek Miloslav MŠMT ČR, Karmelitská 7 Praha 1, 118 12	02/57 19 36 68 02/57 19 31 77 fryzek@msmt.cz
Fuchs Eduard PřF MU , Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	05/41 32 15 51 05/41 21 03 37 fuchs@math.muni.cz
Havel Hugo SOŠT, SOU a U, Lidická 31 České Budějovice, 370 01	038/635 65 01
Hejný Milan KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 50 02/21 90 02 48 milan.hejny@pedf.cuni.cz
Hetzer Miroslav Obchodní akademie, Karlovy Vary,	017/323 49 26

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Holenda Jiří KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	019/749 11 49 holenda@rek.zcu.cz
Hora Jaroslav KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 320 13	019/742 37 76 horajar@kmt.zcu.cz
Horák Karel MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 09 07 63 02/22 21 16 38 horakk@math.cas.cz
Hostinská Michaela Euroškola spol. s.r.o., Železničářská 2232 Česká Lípa, 470 01	0425/83 17 50 michaela.hostinska@atlas.cz
Houser Jiří SPŠ, ČSA 376 Nové Město nad Metují, 549 01	0441/47 41 95 0441/47 01 64 spsnome@nm.cesnet.cz
Hrbek Jiří SLŠ, Žižkov 345 Žlutice, 364 52	0169/39 31 67 0169/39 32 37 jaih@mujmail.cz
Hrubá Miluše Gymnázium, A.K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	0462/32 78 05 0462/32 78 31 hruba@gymjev.cz
Hrubý Dag Gymnázium, A.K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	0462/32 78 31 0462/32 78 31 hruby@gymjev.cz
Hudcová Milada SOU a U, nám. 9. května 2 Boskovice, 680 01	0501/45 30 41 0501/45 30 47
Humlová Milada ZŠ, ul. Míru Rokycany, 337 01	0181/72 27 07 zs.miru@worldonline.cz
Jedličková Milada SPŠS, Jihlavská 628 Havlíčkův Brod, 580 01	0451/43 35 19 0451/223 10

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Ježek František KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	019/27 17 48 019/27 17 47 jezek@kma.zcu.cz
Jirotková Darina KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 52 02/21 90 02 48 darina.jirotkova@pedf.cuni.cz
Kadlčík Vojtěch Gymnázium, Dr. E. Beneše 449/II Soběslav, 392 11	0363/52 10 39 0363/52 10 40 kadlcik@gym-so.cz
Kadlčíková Věra SOU spojů, Bydlinského 2474 Tábor, 390 11	0361/25 47 56 kl. 230 0361/25 41 66 draxler@sous.cz
Kaslová Michaela KMDM PedF UK, Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 52 02/21 90 02 48 kaslovam@pedf.cuni.cz
Kašpar Jan KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha, 186 00	02/21 91 32 34 02/21 91 32 27 kaspar@karlin.mff.cuni.cz
Kirschnerová Eva SPŠSE, Masarykova 3 Liberec, 460 01	048/510 01 13 048/510 00 63 eva.kirschnerova@spsselib.hiedu.cz
Klierová Květa Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	047/560 11 56 047/560 12 46
Klusáček Stanislav ZŠ, Česká Bělá, 582 61	0451/44 41 88 0451/44 41 71
Kočandrlová Milada KM FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 9, 166 29	02/24 35 43 80 kocandrlova@mat.fsv.cvut.cz
Kojecká Jitka KMA a AM PřF UP, Tomkova 38 Olomouc, 779 00	kojecka@matnw.upol.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Koman Milan PedF UK Praha, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 49 milan.koman@pedf.cuni.cz
Kommová Helena Gymnázium J. Keplera, Parlérova 2 Praha 6, 169 00	02/33 35 25 46 02/33 35 25 49 kommova@k2.gjf.cz
Kopáčková Alena KMD FP TU, Hálkova 6 Liberec, 461 17	048/535 23 07 alena.kopackova@vslib.cz
Kotlík Josef ISŠS a U, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	066/730 18 71 jkotlik@isss-ji.cz
Kott Dalibor KMA PřF MU , Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	0604/84 73 84 kott@gyrec.cz
Kratochvilová Jana KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 01 76 jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz
Krčková Stanislava VÚP, Strojírenská 386 Praha-Zličín, 155 21	02/57 95 00 44 02/57 95 03 13 vuppraha@mbox.vol.cz
Krejčová Eva Gymnázium, Omská 1300 Praha 10, 105 00	02/67 31 13 17 02/72 73 40 28 gymomska@bon.cz
Kubálková Vlastimila Gymnázium, Čajkovského 9 Olomouc, 779 00	068/541 24 93 068/543 86 38 gcajk@iol.cz
Kubátová Lenka První české gymnázium, Národní 25 Karlovy Vary, 360 20	017/322 35 50 kubatova@gymkvary.cz
Kubeš Josef Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 301 54	019/722 67 47 019/22 51 49 josef.kubes@gymik.pilsedu.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Kubínová Marie KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 marie.kubinova@pedf.cuni.cz
Kučerová Dagmar SZeŠ a Gymnázium, Velehradská 1527 Staré Město, 686 03	0632/54 10 63-4 0632/54 10 66 szesgsm@szesgsm.cz
Kučová Jaroslava ZŠ, Komenského 1720 Staré Město, 686 03	0632/54 12 98 0632/54 12 98 jaroslava.kucova@zsstmesto.uhedu.cz
Kurzweil Jaroslav MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	
Kurina František VŠP, N. Svobody 301 Hradec Králové, 500 02	049/506 11 54 049/551 38 90 frantisek.kurina@vsp.cz
Leitgeblová Marie ZŠ, Větrná 1063 Uherské Hradiště, 686 05	0632/57 90 05 0632/57 90 05 marie.leitgeblova@zsvychoduh.uhedu.cz
Lišková Hana VOŠP a SPgŠ, Komenského nám. 22 Litomyšl, 570 12	0464/61 45 50 liskova@iol.cz
Littler Graham Haward University of Derby, Mickleover Derby, DE35GX	++44/11 59 25 59 59 grahamlittler@email.msiv.com
Lochmanová Věra ZŠ Campanus, Jírovcovo nám. 1782 Praha 4, 148 00	02/792 67 42
Machačová Ludmila KM FES UPa, Studentská 84 Pardubice, 532 10	040/603 60 19 ludmila.machacova@upce.cz
Macháček Vlastimil , Nad cihelnou 22 Praha 4, 147 00	02/61 21 31 51

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Macháčková Marie OA T. Bati a VOŠE, nám T.G.M. 3669 Zlín, 761 57	067/721 07 59 067/367 07 m.machackova@academy.inext.cz
Mannheimová Dagmar Gymnázium, Komenského 713 Třinec, 739 61	0659/32 52 84 0659/32 52 84 dagmar.mannheimova@gymtri.cz
Maňásková Eva Gymnázium L. Jaroše, Palackého 524 Holešov, 769 01	0635/210 98 0635/239 66 ghol.mat@sukm.cz
Marková Martina Gymnázium F.M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou, 516 01	0445/215 94
Mašek Josef KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 39 019/742 99 89 jmasek@kma.zcu.cz
Matásková Ľubica SPŠS, Klatovská 109 Plzeň, 320 52	019/742 33 78 019/742 26 40
Máca Stanislav Gymnázium, Hradecká 235 Telč, 588 56	066/724 30 70 066/721 30 02 sedlacek@gymntelc.ctn.cz
Míka Stanislav KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 35 019/742 99 89 mika@kma.zcu.cz
Míková Marta KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 38 019/742 99 89 mikova@kma.zcu.cz
Molnár Josef KAG PřF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	068/41 22 10 molnar@risc.upol.cz
Mrvíková Stanislava Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 301 54	019/726 03 65

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Navrátilová Radka 18. ZŠ, nám. Odboje 18 Plzeň, 323 21	019/52 06 81 019/753 29 89 zs18@pilsedu.cz
Nešetřil Jaroslav MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	02/21 91 42 30
Nováková Marie Nakl. Prometheus, Čestmírova 10 Praha, 140 00	02/612 15 49 02/612 15 49 prometheus@iol.cz
Novotná Jarmila PedF UK Praha, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 51 02/24 94 77 82 jarmila.novotna@pedf.cuni.cz
Otruba Karel GMSPgŠaG, Lerchova 63 Brno, 602 00	05/43 23 39 36 05/43 23 39 39 cmspgsag@sssbrno.cz
Pajtllová Pavla Gymnázium a SOŠ, Rokycany, 337 01	0181/72 53 63
Pavel Vladimír Gymnázium, Družstevní 650 Blovce, 336 01	0185/52 20 53 gymnazium@blovice.cz
Pelantová Alena ZŠ Na Slovance, Bedřichovská 1 Praha 8, 182 00	02/858 97 18 02/858 97 18
Perný Jaroslav KMD FPed TU, Voroněžská 13 Liberec, 461 17	048/535 22 85 jaroslav.perny@vslib.cz
Pěchoučková Šárka KMT FPE ZČU, Klatovská 51 Plzeň, 320 13	019/742 37 76
Pillerová Jana ZŠ, Krásovy Domky 989 Pelhřimov, 393 01	0366/236 91

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Plzáková Bohumila ZŠ, Karla IV. 1024 Ústí nad Labem, 400 03	047/553 11 38 047/553 11 39 zs_strekov@telecom.cz
Polák Josef KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 45 019/742 99 89 polak@kma.zcu.cz
Pomykal Rudolf WINVEST s.r.o., , 760 01	067/361 14 067/361 14 pomykal@sendme.cz
Pomykalová Eva Gymnázium, Lesní čtvrť 1364 Zlín, 760 01	067/361 14 067/361 14 pomykal@sendme.cz
Potácel Jaroslav První české gymnázium, Národní 25 Karlovy Vary, 360 20	017/322 35 50 017/322 33 69 potacel@gymkvary.cz
Pradlová Jana KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 47 019/742 99 89 pradlova@kma.zcu.cz
Procházka František SPŠS, Čáslavská 973 Chrudim, 537 01	0455/68 86 23 0455/68 86 21 prochazka@spss-cr.cz
Prokešová Jana Biskupské gymnázium, České Budějovice, 370 21	038/635 90 67 gybi-bc@jcu.cz
Prouza Ludvík KMA UPa – FES, Studentská 84 Pardubice, 532 10	040/603 65 14 ludvik.prouza@upce.cz
Randáková Ilona SOUT, U Panského dvora 1006 Ústí nad Labem, 400 01	047/521 46 14 047/520 97 38
Rašková Alena SPŠ oděvní, Vápenice 1 Prostějov, 796 01	0508/267 11 0508/33 97 67 spsodev@pvscholy.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Rezek Jan SOU spol. stravování, U Krbu 521 Praha 10, 108 00	02/74 77 06 04 02/74 77 06 65 soukrb@mbox.vol.cz
Rendlová Miloslava SOŠ a SOU dopravní, Karlovarská 99 Plzeň, 323 17	019/52 02 53 019/52 20 67
Rilák Michal Gymnázium, Pod školou 10 Velké Pavlovice, 691 06	0626/42 82 45 0626/42 81 67
Robová Jarmila KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha, 186 00	02/21 91 33 55 02/21 91 32 27 robova@karlin.mff.cuni.cz
Roubíček Filip KMDM PdF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 50 filiproubicek@pedf.cuni.cz
Rozkopalová Vladimíra ISŠT COP, Nad Ovčírnu 2528 Zlín, 760 01	067/721 11 40 067/359 02 isst@isst.zlin.cz
Růžicková Bronislava KMA PdF UP, Žižkovo nám 5 Olomouc, 772 00	068/563 57 10 ruzickov@risc.upol.cz
Rybová Juliana SZŠ a VZŠ, Palachova 35 Ústí nad Labem, 400 01	047/521 12 76
Skula Ladislav PřF MU, Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	05/41 32 12 51 05/41 21 03 37 skula@math.muni.cz
Soukupová Jaroslava ZŠ, Krásovy Domky 989 Pelhřimov, 393 01	0366/236 91
Stehlíková Naďa KMDH PdF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 52 02/21 90 09 48 nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Stejskalová Marie Gymnázium L. Jaroše, Palackého 524 Holešov, 769 14	0635/239 66
Sýkora Václav PdF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/22 21 12 02 02/22 21 12 02 vaclav.sykora@pedf.cuni.cz
Šarounová Alena MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	02/21 91 32 35 sarounov@karlin.mff.cuni.cz
Šedivý Jan PC Praha, Na Poříčí 4 Praha 1, 110 00	02/24 23 02 36 02/24 22 83 34 sedivy@pcpraha.cz
Šíma František SOA a SOUS s.r.o., Zl. Stezka 240 Prachatice,	0338/31 68 53
Štefl Ondřej Scio nadace, Senovážné náměstí 24 Praha 1, 116 47	02/24 10 22 87 02/24 10 24 17 steffl@scio.cz
Štěpánek Milan SZŠ a VZŠ, Karlovarská 99 Plzeň, 305 98	019/722 12 49 019/722 11 63 milan.stepanek@volny.cz
Šváchová Jana Gymnázium, Husova 470 Benešov, 256 01	0301/72 17 10 0301/72 30 77 svachova@gbn.cz
Tichá Marie MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 09 07 26 ticha@math.cas.cz
Tomáš Jan Gymnázium, Nábřeží svobody 306 Polička, 572 01	0463/72 21 02 0463/236 26 gymnazium.policka@unet.cz
Tomášek Vladislav ÚIV, Senovážné nám. 26 Praha 1, 111 21	02/24 39 83 33 02/24 39 82 78 tomasek@uiv.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Tomiczková Světlana KMA FAV ZČU, Univerzitní 8 Plzeň, 306 14	019/749 11 47 svetlana@kma.zcu.cz
Tuchanová Milena KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/749 11 27 tuchanov@kma.zcu.cz
Valoušková Jarmila Obchodní akademie, Hlavní třída 31 Šumperk, 787 01	0649/21 33 49
Vlášková Jana Nakl. Prometheus, Čestmírova 10 Praha, 140 00	02/691 33 59 02/61 21 54 09 prometheus@iol.cz
Vodák Zdeněk Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	05/41 32 13 17 gsn@gsn.anet.cz
Wagnerová Hana Gymnázium a SOŠ, Rokycany, 337 01	0181/72 53 63
Zapomělová Marie ISSS a U, Žižkova 20 Jihlava, 586 01	066/730 18 71 mzapomelova@iss-jj.cz
Zhouf Jaroslav SPŠST, Panská 3 Praha 1, 110 00	02/21 00 21 19 zhouf@panska.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Čížek Čestmír FAST (Casio), Poděbradská 61a Praha 9, 198 00	02/66 61 04 76 02/66 61 04 77 cestmir.cizek@fastsro.cz
Kabátová Michaela Akermann Electronic, s.r.o., Ukrajinská 2 Praha 10, 101 00	02/71 74 62 47-8 02/71 74 54 52 info@akermann.cz
Kebert Michal Akermann Electronic, s.r.o., Ukrajinská 2 Praha 10, 101 00	02/71 74 62 47-8 02/71 74 54 52 michal@akermann.cz
Šenfeld Radek IMPROMAT, U Prazdroje 24 Plzeň, 301 52	019/722 61 16-7 019/722 61 16-7 radek.senfeld@impromat-praha.cz

DĚKUJEME SPONZORŮM TÉTO KONFERENCE:

IMPROMAT GROUP

FAST – CASIO

ČSOB, POBOČKA PLZEŇ

ČESKÁ POŠTA, POBOČKA PLZEŇ

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

ÚSTAV DALŠÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

nabízí celoživotní vzdělávání v následujících oblastech:

PEDAGOGIKA:

DPS, mistr odborného výcviku, speciální pedagogika, výchovné poradenství, ...

PSYCHOLOGIE:

asertivita, relaxační metody, komunikace s problémovými jedinci, motivace pracovníků, ...

INFORMAČNÍ TECHNOLOGIE:

základy PC, Windows, Word, Exel, ...

JAZYKOVÉ KURSY:

angličtina, němčina, francouzština, španělština, ruština

a další kurzy z různých oblastí.

Úplnou nabídku kursů naleznete na www.udv.zcu.cz nebo v katalogu, který vám na požádání rádi zašleme.

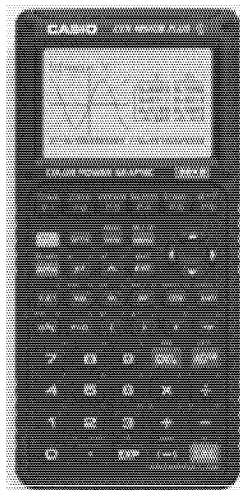
Adresa: ÚDV ZČU, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň

tel., fax: 019/742 14 15

e-mail: info@udv.zcu.cz

CASIO®

KALKULAČKY PRO VŠECHNY

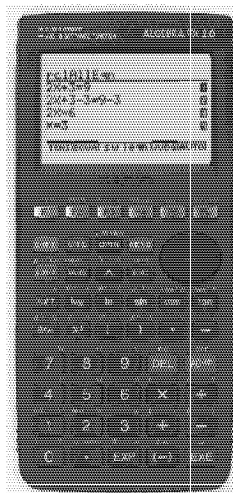


CFX-9850 GB PLUS

- trojbarevný bodový display (127 × 63 bodů), 21 znaků/řádek, 8 řádek
- paměť 28 kB
- ikonové menu
- statistika z hodnot
- standardní odchylka
- komplexní čísla
- výpočty s maticemi
- integrály a diferenciální výpočty
- lineární, kvadratické a kubické rovnice
- programování na bázi jazyka BASIC
- regresní graf
- dynamický graf
- duální graf
- grafy kuželoseček
- grafy nerovností
- parametrický graf
- finanční funkce
- softwarová knihovna
- datová komunikace
- 905 funkcí

ALGEBRA FX 2.0

- trojbarevný bodový display (127 × 63 bodů), 21 znaků/řádek, 8 řádek
- paměť 144 kB
- ikonové menu
- symbolická manipulace
- pokročilá statistika
- komplexní čísla
- výpočty s maticemi
- integrály a diferenciální výpočty
- lineární, kvadratické a kubické rovnice
- programování na bázi jazyka BASIC
- regresní graf
- dynamický graf
- grafy kuželoseček
- grafy nerovností
- parametrický graf
- finanční funkce
- Add-in software prostřednictvím Internetu (např. české menu)
- datová komunikace
- 1 095 funkcí



Editoři: Marie Ausbergerová
Jarmila Novotná

Sazba a technická příprava: Miloš Brejcha

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Za obsah příspěvků plně zodpovídají autoři. Příspěvky nebyly recenzovány.

Vysázeno systémem $\text{\LaTeX}$.
Vydala JČMF, pobočka Plzeň 2000.