

6. SETKÁNÍ UČITELŮ MATEMATIKY VŠECH TYPŮ A STUPŇŮ ŠKOL

21. – 23. říjen 1998
Mariánské Lázně

Obsah

ÚVODEM	5
PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY	7
Jiří Křen	
Možnosti školské matematiky při řešení praktických úloh	9
František Kuřina	
Je vůbec školská matematika užitečná?	21
Graham H. Littler	
Mathematics & Real Life	29
Jiří Všečka	
Matematika ve fotografii, výukových a multimed. programech .	43
HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ V MATEMATICE	47
Marie Demlová	
Význam matematické přípravy pro budoucí inženýry	49
Ludmila Macháčová, Stanislav Kolda	
Pohled na způsoby hodnocení výsledků vzdělávání v matematice	53
PRÁCE S TALENTY A MATEMATICKÉ SOUTĚŽE	57
Petr Emanovský	
O jednom zahraničním zdroji zajímavých matematických úloh .	59
Jana Pradlová	
Práce s antitalenty aneb popularizace matematiky	63
PŘÍPRAVA UČITELŮ A JEJICH DALŠÍ VZDĚLÁVÁNÍ	67
Emil Calda	
O prospěšnosti a smyslu matematického vzdělávání	69
Václav Friedrich	
Výuka statistiky na FEK ZČU s využitím výpočetní techniky .	73
Libuše Hozová	
Matematika vesele i vážně	79
Bohumil Novák	
Úlohy z matematické soutěže a možnosti jejich využití	81
Václav Sýkora	
Názory mexických učitelů a studentů na užitečnost matematiky	87

Alena Šolcová	
Zkoušky učitelské způsobilosti v 19. století	95
Stanislav Trávníček	
Příprava učitelů matematiky na práci v podmínkách humanizace	101
OTÁZKY PRÁCE S 11–15LETÝMI ŽÁKY A PŘIJÍMACÍ POHOVORY	
NA STŘEDNÍ ŠKOLY	107
Monika Barešová, Eva Weislová	
Představy žáků základní školy o pojmech „vzdálenost“ a „obsah“	109
Michaela Kaslová	
Problém přechodu z prvního stupně ZŠ na druhý	115
Jana Kratochvílová	
Triády jako nástroj výzkumu myšlenkových procesů	119
Jarmila Novotná, Marie Kubínová	
Proces a koncept v uchopení úlohy	127
Marie Tichá	
Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky	133
UČEBNICE A UČEBNÍ POMŮCKY	139
Milada Hudcová, Libuše Kubičková, Růžena Blažková	
Informace o připravované Sbírce úloh z matematiky pro SOŠ	141
Karel Otruba	
Budeme mít dost příkladů na kuželosečky?	143
Karel Otruba	
Pan Načera dec v tanečních	149
Marie Kubínová	
Slovní úlohy v učebnicích matematiky pro druhý stupeň ZŠ	153
Ivo a Jana Horáčkovi	
Úlohy o pohybu	155
Jiří Vaníček	
Slovní úlohy o obsahu v učebnicích matematiky	161
Barbora Černá	
Slovní úlohy o směsích	171
Jana Ludvíková, Filip Roubíček	
Úlohy o společné práci	177
SEZNAM ÚČASTNÍKŮ	185

Úvodem

Globalizace světa zahájená nejen Internetem v oblasti komunikace, ale i katastrofickými vizemi vyžadujícími změnu chování lidí a lidstva, povede patrně v dohledné době k novým pohledům na záměrné formování ontogeneze lidské psychiky, jehož součástí je i vyučování a učení se matematice. Významní světoví odborníci v didaktice matematiky vyslovují obavy, že při hledání časového prostoru pro nové úkoly školy porostou útoky proti předmětu matematika. Kritici budou poukazovat na to, že rozsah matematiky ve škole je zbytečně velký a že využitelnost získaných matematických poznatků je pro naprostou většinu populace minimální. Musíme přitom přiznat, že didaktika matematiky je v rozpacích. Učíme algoritmy početních operací na základní škole nebo diferenciální a integrální počet na středních a vysokých školách jako klíčové oblasti školské matematiky stejně tak jako před sto lety. Přitom víme, že v praxi běžného občana ani specializovaného uživatele matematických poznatků dnes už nikdo nedělí desetinná čísla písemně, ani nepočítá hodnoty integrálů metodami popisovanými v učebnicích matematické analýzy. Tvrdíme, že vyučování matematice přispívá k rozvoji lidského myšlení. Nedovedeme však říci, které části matematiky a v jakém metodickém zpracování nejvíce přispívají k rozvoji myšlení a zároveň poskytují velké části lidí nástroj pro řešení praktických problémů.

Neznamená to, že bychom viděli černě další vývoj školské matematiky. Například výsledky anket ukazují, že i lidé bez těsnějšího vztahu k matematice uznávají bezvýhradně její podíl na rozvoji obecné kultury člověka. Měli bychom se však velmi intenzívně zabývat těmito otázkami a uvědomit si, že svět, ve kterém žijeme, velmi pragmaticky pohlíží na prostředky, pomocí nichž řeší své problémy a dosahuje své cíle.

Jedním z příspěvků Matematické pedagogické sekce JČMF k této diskusi je i sborník příspěvků z konference v Mariánských Lázních, který vám předkládáme. V každém případě by tato diskuse měla pokračovat. Domníváme se, že otázky užitečnosti školské matematiky v praxi patří ke klíčovým problémům současné didaktiky matematiky.

Václav Sýkora

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

UŽITEČNOST ŠKOLSKÉ MATEMATIKY
V BĚŽNÉM ŽIVOTĚ

MOŽNOSTI ŠKOLSKÉ MATEMATIKY PŘI ŘEŠENÍ PRAKTICKÝCH ÚLOH

Jiří Křen

Úvod

V úvodu bych se chtěl omluvit všem případným čtenářům tohoto článku, že neumím definovat pojem „školská matematika“. Výstižnější by byl zřejmě pojem aplikovaná matematika a zde bych se rád zaštitil výrokem Leonarda da Vinci *Mechanika je rájem matematických věd, neboť v ní plody matematiky sklízíme*. Toto vyjádření se sice může některým puritánským matematikům, kteří opovrhují praktickým využitím matematiky, přičítat, ale nemůže být pochyb o tom, že obrovský rozvoj mechaniky byl umožněn právě díky matematice a logickému myšlení. Snad ještě podotkneme, že mnoho partií klasické matematiky vděčí za svou existenci problémům mechaniky (Newton s Leibnitzem zavedli infinitezimální počet).

Obecná analýza problémů

Lidské činnosti využívané k řešení různých problematik: **výkonné** — fyzické a psychické činnosti, spojené s realizací známého a popsaného postupu; **rozhodovací** — myšlenkové činnosti, v nichž po skončení určité operace není další operace jednoznačně určena (není známá, je jich více, známá ale nerealizovatelná atp.); **tvůrčí** — psychické činnosti v mozku člověka, jejichž výsledkem je něco doposud neznámé či nerealizovatelné (postup, přístup, operace, výrobek). Podle toho, jaký typ činnosti převládá, hovoříme **o úlohách**, jestliže postup pro dosažení cíle je známý (výkonné činnosti), a **o problémech**, jestliže dosažení cíle vyžaduje kromě výkonných činností i činnosti rozhodovací, resp. i tvůrčí.

Na základě uvedeného lze vymezit problém větou: *Problém je situace objektu, jejíž řešení vyžaduje tvůrčí, rozhodovací a výkonné činnosti.*

Objekty, na nichž se řeší problémy, jsou typu *abstraktního* (politika, ekonomie, ...) a *materiálního* (technické, biologické, člověk, ...).

Objekty v technice a lékařství

Společenská potřeba v oblasti techniky spočívá v realizaci potřebných technických objektů (TO), kterých je značný počet. Základní vlastnosti TO jsou např: potřebnost, funkčnost, realizovatelnost, spolehlivost, opravitelnost.

V lékařství, na rozdíl od techniky, existuje jediný objekt — člověk. Jeho organismus má jednotnou strukturu pro všechny lidi, přičemž její prvky a vazby se mohou odlišovat. Člověk obvykle nevzniká na základě společenské potřeby. Při jeho vzniku a vývoji se nevyužívají znalosti z tvorby předchozích bioobjektů (přenášejí se genetické vlastnosti). Vlastnosti prvků lidského organismu závisí na aktuálním stavu (bdělý stav, spánek, narkóza, stav po úmrtí). Po vyjmutí z těla závisí vlastnosti na způsobu konzervace (zmrazení, balzamování, uložení do fyziologického roztoku apod). Struktura tkání lidského těla je značně složitá (anizotropie, závislost na historii zatěžování, nelinearita, relaxace, creep, hystereze při cyklickém zatěžování, viskoelastičita, únavové vlastnosti, dědičnost, stárnutí, chybí snad jen koroze; schopnost regenerace).

Pro řešení problému lze obtížně vytvářet dílčí jednoduché živé objekty, obsahující všechny podstatné prvky a vazby — základní předpoklad pro řešení problému modelováním. V lékařství se obtížně vytvářejí teorie ve smyslu teorií technických nebo přírodních věd (pracují s neživými objekty). Teorie v lékařství je vytvořena na základě empirických znalostí (nejobvyklejší postup při řešení problémů v lékařství je využití známých postupů a intuice, tzv. přímá řešení). Na lidském organismu se obtížně realizují nebo jsou zcela vyloučeny (zejména in vivo) experimenty sloužící k získání poznatků o vlastnostech a chování lidských tkání či orgánů. Velmi obtížně se získávají vstupní údaje do výpočtového modelování a ověřují hypotézy či výsledky modelování.

Problémy přímé a nepřímé

Součástí řešení každého problému je vytvoření množiny fyzikálních veličin a vazeb mezi nimi, které jsou z hlediska řešení problému na daném objektu podstatné. Tento proces se označuje jako **vytvoření systému veličin** $\sum(\Omega)$. Obecně je systém $\sum(\Omega)$ tvořen veličinami, které popisují tvar a strukturu objektu, vlastnosti prvků a jejich vazeb, působení okolí na objekt (příčiny) a nakonec jeho chování (jako důsledek příčin). Podle toho, které z těchto veličin tvoří vstupy do algoritmu pro řešení problému

a které z veličin jsou výstupy z tohoto algoritmu, lze problémy (úlohy) členit na: **přímé problémy** (úlohy) — vstupy do algoritmu tvoří příčiny a struktura objektu, výstupem z algoritmu jsou důsledky příčin, tedy projevy objektu (jeho chování); **nepřímé problémy** (úlohy) — vstupem do algoritmu jsou vždy důsledky, tedy chování objektu plus něco z množiny $\sum(\Omega)$.

V technice převládají úlohy a problémy přímé nad nepřímými, v lékařské praxi je tomu právě naopak. Každý **diagnostický proces** je realizací **inverzní úlohy**, protože se hledají příčiny nemoci, která je projevem chování lidského organismu. **Terapeutický proces** je pak řešením **přímé úlohy**, protože při známých příčinách nemoci se aplikuje taková terapie, aby se dosáhlo normálního chování organismu, tedy aby se pacient uzdravil.

Přístupy k řešení problému

Škála přístupů k řešení problémů je velmi široká, od živelných a intuitivních přístupů až po přístupy na vědecké bázi, k nimž např. patří **systémová analýza a syntéza** (SAS). Základním metodologickým prostředkem SAS je systémový přístup a základním atributem SAS je priorita problému, kterému jsou podřízeny všechny její prvky, k nimž patří: vymezení objektu, na němž se problém řeší; multikriteriální analýza problému; vytvoření systému veličin na objektu; výběr konkrétního přístupu a metody řešení problému; implementace a realizace vyřešeného problému.

Systém veličin $\sum(\Omega)$ se vytváří na objektu Ω z určitého problémového hlediska, na určité úrovni a s přihlédnutím k metodě řešení. Musí obsahovat vše podstatné, co je spojeno s objektem, s jeho okolím a problémem. *Je to nejdůležitější a nejobtížnější etapa procesu řešení každého problému.* Jestliže něco podstatného opomeneme, řešení bude chybné, zahrneme-li i něco nepodstatné, řešení bude dlouhé, nákladné a možná i nerealizovatelné.

Výběr konkrétního přístupu a metody k řešení problému

Přístupy k řešení problémů lze členit na: **přímý přístup** — řešení problému probíhá přímo, bez vědomého využívání jakýchkoliv pomocných objektů; **nepřímý přístup** — řešení problému se hledá prostřednictvím pomocného, tzv. *modelového objektu* O_M . Ve vědecko-aplikační

sféře se toto řešení problému označuje jako **modelování**. O_M má charakter **materiální** (modelování podobnostní, analogové a experimentální) a **abstraktní** (např. teorie). Pak se hovoří o modelování teoretickém, realizovaném výpočty, takže se jedná o výpočtové modelování, resp. počítačové modelování. Modelování je prostředek k řešení problému, není tedy konečným výsledkem našeho snažení.

Výpočtové modelování

U výpočtového modelování je modelovým objektem O_M množina teorií $\sum \tau(\Omega)$, které jsou použitelné pro řešení problému. Systémem $\sum(O_M)$ je použitelná teorie τ_Ω vybraná z $\sum \tau(\Omega)$, přičemž mezi τ_Ω a $\sum(\Omega)$ musí existovat oboustranné (izomorfní) zobrazení. Modelovým SW je algoritmus A_M výpočtového modelování vytvořený z teorie τ_Ω a modelovým HW je počítač C . Výpočtový model je pak soustava:

$$\begin{aligned} M(R, \Omega, P_R(\Omega)) = & \sum(\Omega), O_M, \sum(O_M), SW, HW \langle = \\ & = \rangle \sum(\Omega), \sum \tau(\Omega), \tau_\Omega, A_M, C \langle . \end{aligned} \quad (1)$$

Formulujeme např. problém stanovení deformace prutu určitým způsobem vázaného a zatíženého. Množina prvků a vazeb, které jsou z hlediska tohoto problému podstatné a z níž se pak vytváří systém $\sum(\Omega)$, obsahuje: délku prutu L , příčný průřez prutu $S(x)$, charakter zatížení F (silový, teplotní), charakter namáhání (tah, tlak, ohyb, krut, vzpěr), charakter odchylek (geometrie, intervaly zatížení, materiálové konstanty), elastické vlastnosti materiálu prutu EV (izotropní, anizotropní, elastický, elasticko-plastický, viskoelastický), charakter vazeb V (typ kinematické dvojice), ovlivnění prutu O (teplota, radiace, koroze), předpokládaná velikost deformačních parametrů prutu DP (průhyb, úhly natočení, posuvy). Systém veličin je tedy určen touto množinou:

$$\sum(\Omega) = \rangle L, S(x), F, EV, V, O, DP \langle . \quad (2)$$

Množina použitelných teorií $\sum \tau(\Omega)$, které tvoří modelový objekt O_M , je tvořena: teorií prutových těles, teoriemi numerických metod — metoda konečných prvků, hraniční integrály, metodami umělé inteligence (neuronové sítě, genové algoritmy).

Každá z těchto teorií je odvozena za určitých předpokladů (linearita úlohy, velké nebo malé deformace ...) a na určité úrovni je schopna vystihnout vlastnosti prvků množiny.

Modelová úloha interakce v biomechanice dolní části močového traktu

Jedním z cílů výzkumného úkolu GA ČR „Biomechanika dolní části močového traktu“, který je řešen na katedře mechaniky ZČU Plzeň, je vytvoření počítačově orientovaného modelu proudění moče v mužské uretře. Řešení tohoto problému představuje obecně značně komplikovanou úlohu interakce kapaliny s deformujícím se tělesem, u které se s časem mění hranice interagujících kontinuí (úloha s volnou hranicí). Základní charakteristiky DČMT: moč proudí válcovou nerotační trubicí (uretrou) s poddajnou drsnou stěnou; proudění moče je nestacionární — mění se tlak v močovém měchýři, v úseku hrdla močového měchýře není plně vyvinuté; tkáň stěny uretry je neizotropní a nelineární viskoelastický materiál.

Předpoklady pro modelování interakce v DČMT: proces mikce je plně rozvinutý (uretra má tvar rotační válcové trubice); moč je Newtonova kapalina, její proudění je nestacionární, laminární a izotermické; stěna uretry je izotropní a lineárně elastický materiál se známým konstitutivním vztahem; tkáň uretry je podrobena velkým zobecněným posuvům a velkým deformacím (geometricky nelineární úloha).

Na řešení uvedené modelové úlohy interakce budeme aplikovat nedsruženou metodu řešení, která vychází z předpokladu samostatného řešení pohybu obou interagujících kontinuí, s tím, že na společné hranici (hranice interakce) se obě kontinua vzájemně ovlivňují. Úloha interakce se tedy formálně rozpadá na samostatné řešení úlohy proudění moče v uretře a na řešení vlastní deformace stěny uretry.

Deformace stěny uretry

Kontinuum se pohybuje v pevném kartézském souřadnicovém systému, koná velké zobecněné posuvy a vykazuje velké deformace. Cílem řešení je určit rovnovážné stavy kontinua v diskrétních časových okamžicích $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, \dots, T$, kde Δt je přírůstek času. Necht' rovnovážné polohy kontinua do času t známe. Potom přechod na konfiguraci v čase $t + \Delta t$ je typickým krokem řešení problému. Při řešení uvažujeme Lagrangeův popis kontinua.

V Lagrangeově inkrementálním postupu se rovnovážná poloha kontinua v čase $t + \Delta t$ vyjadřuje pomocí principu virtuálních prací, který

má tvar

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d^{t+\Delta t}V = \delta^{t+\Delta t}W, \quad (3)$$

kde τ_{ij} je Cauchyův tenzor napjatosti, e_{ij} je lineární část Almansiova tenzoru přetvoření a pro virtuální práci vnějších sil platí

$$\delta^{t+\Delta t}W = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^{t+\Delta t}V + \int_{t+\Delta t S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t}S. \quad (4)$$

Zde jsou všechny veličiny vztaženy na okamžitou konfiguraci kontinua ${}^{t+\Delta t}C$; f_i^B , resp. f_i^S jsou složky vektoru vnější objemové, resp. plošné síly.

Stav kontinua v čase $t + \Delta t$ dopředu však neznáme, vztah (3) nelze přímo použít. Proto se při řešení nelineárních úloh mechaniky kontinua používá přírůstkové vyjádření principu virtuálních prací (všechny veličiny kontinua se vztahují na určitý známý rovnovážný stav kontinua — referenční konfigurace). Podle toho, jakou konfiguraci kontinua zvolíme za referenční, se potom hovoří o příslušné formulaci. **Totální Lagrangeova formulace** (TL formulace) volí referenční konfiguraci 0C (počáteční konfigurace v čase $t = 0$), **aktualizovaná Lagrangeova formulace** volí za referenční konfiguraci tC (okamžitá konfigurace v čase t).

Lagrangeova přírůstková formulace se opírá o identitu (např. [1])

$$\int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta_0^t \varepsilon_{ij} d^0V = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{mn} \delta^t e_{mn} d^tV, \quad (5)$$

která vyjadřuje virtuální práci vnitřních sil kontinua (deformační energie) v příslušných konfiguracích. Zde ${}^t_0S_{ij}$, resp. ${}^t_0\varepsilon_{ij}$, je 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti, resp. Greenův tenzor přetvoření, konfigurace kontinua tC vztažený (měřený) na konfiguraci 0C . Oba tyto tenzory jsou objektivní a jsou tzv. energeticky sdružené. Greenův tenzor přetvoření má tvar

$${}^t_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}), \quad {}^t_0u_{i,j} = \partial^t u_i / \partial^0 x_j. \quad (6)$$

Vzhledem k předpokladům řešení úlohy interakce je výhodnější použít TL formulaci, a proto se dále budeme věnovat pouze této formulaci.

Řešení pomocí TL formulace se váže na konfiguraci 0C a základní veličiny mají hodnoty: **na začátku přírůstku** — ${}^t u_i, {}_0^t \varepsilon_{ij}, {}_0^t S_{ij}$ (určují konfiguraci tC); **na konci přírůstku** — ${}^t u_i + \Delta u_i, {}_0^t \varepsilon_{ij} + \Delta_0^t \varepsilon_{ij}, {}_0^t S_{ij} + \Delta_0^t S_{ij}$ (určují konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$). Přírůstek tenzoru přetvoření $\Delta_0^t \varepsilon_{ij}$ má podle vztahu (4) dvě části. První je lineární ve členech $\partial \Delta u_i / \partial {}^0 x_j$, druhá obsahuje jejich součiny, a je tudíž nelineární. Platí [3]

$$\Delta_0^t \varepsilon_{ij} = \Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L + \Delta_0^t \varepsilon_{ij}^{NL}; \quad (7)$$

$$\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial {}^0 x_i} + \frac{\partial^t u_k}{\partial {}^0 x_i} \cdot \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^0 x_i} \cdot \frac{\partial^t u_k}{\partial {}^0 x_j} \right); \quad (8)$$

$$\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^0 x_i} \cdot \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^0 x_j}. \quad (9)$$

Podle principu virtuálních prací je virtuální práce vnějších sil rovna virtuální práci vnitřních sil v kterékoliv fázi pohybu kontinua, tedy i na konci přírůstku zatížení, resp. přetvoření. S ohledem na identitu (5) a výše uvedenou přírůstkovou dekompozici dostáváme

$$\begin{aligned} \delta({}^t W + \Delta W) &= \int_{{}^0 V} ({}_0^t S_{ij} + \Delta_0^t S_{ij}) \delta({}_0^t \varepsilon_{ij} + \Delta_0^t \varepsilon_{ij}) d^0 V = \\ &= \int_{{}^0 V} ({}_0^t S_{ij} + \Delta_0^t S_{ij}) \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}) d^0 V, \end{aligned} \quad (10)$$

kde $\delta_0^t \varepsilon_{ij} = 0$, neboť přetvoření ${}_0^t \varepsilon_{ij}$ i posunutí ${}^t u_i$ na začátku přírůstku známe. Uplatníme-li v tomto vztahu přírůstkový konstitutivní vztah (${}_0 E_{ijkl}$ je materiálový tenzor vztažený na 0C)

$$\begin{aligned} \Delta_0^t S_{ij} &= {}_0 E_{ijkl} \Delta_0^t \varepsilon_{kl}, \quad \text{resp. } \Delta_0^t S_{ij} = {}_0 E_{ijkl} \Delta_0^t \varepsilon_{kl}^L; \\ \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}) &= \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L), \end{aligned} \quad (11)$$

dostaneme základní tvar podmínky rovnováhy kontinua v přírůstkové TL formulaci. Platí [2, 3]

$$\begin{aligned} &\int_{{}^0 V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L) {}_0 E_{ijkl} \Delta_0^t \varepsilon_{kl}^L d^0 V + \int_{{}^0 V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^{NL}) {}_0^t S_{ij} d^0 V - \\ &-\delta(\Delta W) = \delta^t W - \int_{{}^0 V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L) {}_0^t S_{ij} d^0 V, \end{aligned} \quad (12)$$

kde 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti má tvar ${}_0^t S_{ij} = {}_0 E_{ijkl} {}_0^t \varepsilon_{kl}$.

Pravá strana rovnice (12) vyjadřuje nerovnováhu vnějších a vnitřních sil kontinua v konfiguraci tC , která je důsledkem přijatých linearizací. Tuto nerovnováhu v rámci daného přírůstku odstraníme iteračním postupem, který je řízen vztahy [3]

$$\begin{aligned} \int_{{}_0V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^L)^{(k)} {}_0E_{ijkl} \Delta_0^t \varepsilon_{kl}^{L(k)} d^0V + \int_{{}_0V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^{NL})^{(k)} {}_0^tS_{ij} d^0V = \\ = \delta^{t+\Delta t} W - \int_{{}_0V} \delta(\Delta_0^t \varepsilon_{ij})^{(k-1)} {}_0^tS_{ij}^{(k-1)} d^0V; \end{aligned} \quad (13)$$

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^k; \quad {}^{t+\Delta t}u_i^{(0)} = {}^tu_i. \quad (14)$$

Podotkněme, že tenzory ${}_0E_{ijkl}$ a ${}_0^tS_{ij}$ na levé straně vztahu (13) se uvnitř intervalu Δt při výpočtu nemění (modifikovaná Newtonova-Raphsonova metoda).

Provedeme-li nyní prostorovou diskretizaci kontinua pomocí MKP, dává vztah (13) pro každý přírůstek maticovou rovnici

$$[\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_\sigma] \Delta \mathbf{q}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(k-1)}, \quad (15)$$

kde hranatá závorka označuje matici tangenciální tuhosti $\mathbf{K}_t$, která je tvořena lineární maticí tuhosti, maticí počáteční deformace a maticí počáteční napjatosti. $\mathbf{q}$ je vektor zobecněných souřadnic kontinua (posuvy uzlů), $\mathbf{Q}$ je vektor vnějších zobecněných sil a $\mathbf{R}$ je vektor vnitřních sil kontinua (síly napjatosti). Tím je vyřešena úloha deformace stěny uretry (pružného kontinua).

Nestacionární proudění Newtonovy kapaliny

Proudění Newtonovy kapaliny je popsáno Navierovou-Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity (podmínka nestlačitelnosti)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \rho \nu_j^* \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i; \\ \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} &= 0; \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Okrajové a počáteční podmínky proudění mají tvar

$$\begin{aligned} \nu_i(x, t) &= \hat{\nu}_i(x, t); \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_1; \\ \tau_{ij} n_j &= \hat{\sigma}_i(x, t); \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega_2; \\ \nu_i(x, 0) &= {}^0\hat{\nu}_i(x); \quad t = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Zde Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, x_i jsou Eulerovy souřadnice, ν_i jsou složky vektoru rychlosti, p je tlak, μ je dynamická viskozita kapaliny, ρ je měrná hmotnost a f_i jsou složky měrné objemové síly. Neznámé v úloze jsou $\{\nu_i, p\}$, řešení hledáme na časoprostorovém válci $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [0, T]$.

Použijeme-li pro odvození slabého řešení úlohy hydromechaniky Galerkinovu metodu, mají výchozí integrální vztahy tvar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \rho \nu_j^* \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \right) - \rho f_i \right] \delta \nu_i dx &= 0; \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} \delta p dx &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Třetí a čtvrtý člen v hranaté závorce upravíme pomocí Greenovy věty. Integrální identity (18) přejdou na tvar

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \delta \nu_i dx + \int_{\Omega} \rho \nu_j^* \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \delta \nu_i dx - \\ & - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta \nu_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \delta \nu_i}{\partial x_j} dx = \\ & = \int_{\Omega} \rho f_i \delta \nu_i dx - \int_{\partial\Omega_2} \left(\mu \frac{\partial \nu_i}{\partial \vec{n}} - p n_i \right) \delta \nu_i dx; \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Nyní opět provedeme prostorovou diskretizaci oblasti vyplněné kapalinou pomocí MKP. Omezíme se pouze na rovinné proudění kapaliny. Při použití izoparametrických interpolačních funkcí jsou složky rychlosti ($\nu_1 = u$, $\nu_2 = v$) a tlak p aproximovány vztahy

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, t) &= \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{u}(t); \quad v(\xi, \eta, t) = \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{v}(t); \\ p(\xi, \eta, t) &= \mathbf{H}^T(\xi, \eta) \mathbf{p}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

kde $\mathbf{N}$ a $\mathbf{H}$ jsou vektory interpolačních funkcí definované lokálně pro každý element a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}$ jsou vektory uzlových hodnot složek rychlosti a tlaku. Pro vyjádření derivací příslušných funkcí podle souřadnic x_i použijeme známou Jacobiovu matici a ze vztahů (19), (20) získáme tři skalární rovnice v maticovém tvaru (virtuální přírůstky $\delta u = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}$,

$\delta\nu = \delta\mathbf{v}^T\mathbf{N}$, $\delta p = \delta\mathbf{p}^T\mathbf{H}$ jsou nezávislé, $\mu = konst.$, $\rho = konst.$). Platí [3]

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \right] \dot{\mathbf{u}} + \left[\rho \int_S (\mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{u}^* \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{v}^* \mathbf{N}_y^T) dS \right] \mathbf{u} + \\ & + \left[\mu \int_S (\mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T) dS \right] \mathbf{u} - \left[\int_S \mathbf{N}_x \mathbf{H}^T dS \right] \mathbf{p} = \\ & = \int_S \rho f_x \mathbf{N} dS + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{X}}^T d\Gamma; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_S \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \right] \dot{\mathbf{v}} + \left[\rho \int_S (\mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{u}^* \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}\mathbf{N}^T \mathbf{v}^* \mathbf{N}_y^T) dS \right] \mathbf{v} + \\ & + \left[\mu \int_S (\mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T) dS \right] \mathbf{v} - \left[\int_S \mathbf{N}_y \mathbf{H}^T dS \right] \mathbf{p} = \\ & = \int_S \rho f_y \mathbf{N} dS + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{Y}}^T d\Gamma; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left[\int_S \mathbf{H} \mathbf{N}_x^T dS \right] \mathbf{u} + \left[\int_S \mathbf{H} \mathbf{N}_y^T dS \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

kde $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y$ jsou derivace interpolačních funkcí podle x, y a $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}$ jsou členy, které obsahují Neumannovy okrajové podmínky. Vztahy (21)–(23) zapíšeme ve zjednodušené maticové formě

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \mathbf{u} + \mathbf{C}_1 \mathbf{p} &= \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \mathbf{v} + \mathbf{D}_1 \mathbf{v} + \mathbf{C}_2 \mathbf{p} &= \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Vyjádříme-li dále časovou změnu rychlosti pomocí dopředného diferenčního schématu

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}, \quad (25)$$

můžeme předchozí rovnice zapsat v kompaktním maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(n+1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(n)}, \quad (26)$$

kde n je časová hladina a maticový zápis představuje soustavu nelineárních algebraických rovnic, kterou řešíme Newtonovou-Raphsonovou metodou na každé časové hladině. Dosud nedefinované matice mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta)[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)^{(n+1)} + \mathbf{D}_1], \\ \mathbf{B} &= \Delta t(1 - \beta)\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{C} = \Delta t(1 - \beta)\mathbf{C}_2, \\ \mathbf{F}_1 &= \{\mathbf{A}_1 - \Delta t\beta[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)^{(n)} + \mathbf{D}_1]\} \mathbf{u}^{(n)} - \Delta t\beta\mathbf{C}_1\mathbf{p}^{(n)}, \\ \mathbf{F}_2 &= \{\mathbf{A}_1 - \Delta t\beta[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)^{(n)} + \mathbf{D}_1]\} \mathbf{v}^{(n)} - \Delta t\beta\mathbf{C}_2\mathbf{p}^{(n)} \end{aligned} \quad (27)$$

a součinitel β nabývá hodnot

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{pro } \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n+1)}, \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(n+1)}; \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^{(n+1)} + \mathbf{u}^{(n)}}{2}, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^{(n+1)} + \mathbf{v}^{(n)}}{2}, \\ & \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^{(n+1)} + \mathbf{p}^{(n)}}{2}; \\ 1 & \text{pro } \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(n)}. \end{cases} \quad (28)$$

Při zkráceném zápisu soustavy rovnic (26) ve tvaru

$$\mathbf{K}^{(n+1)} \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)}, \quad (29)$$

je iterační postup řízen vztahy (n – časová hladina, r – iterační krok na časové hladině)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n+1),(r+1)} &= \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{J}_{(n+1),(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)}, \\ \mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(0)} &= \mathbf{K}^{(n+1),(r)} \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{f}^{(n),(0)}, \end{aligned} \quad (30)$$

tj. rychlosti a tlaky ve vektoru $\mathbf{f}^{(n)}$ jsou „konstanty“ napočtené v předchozí časové hladině a v průběhu iterace na aktuální časové hladině se nemění. Jacobiova matice má potom tvar

$$\mathbf{J}^{(n+1),(r)} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_u & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{A}}_\nu & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

kde

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}}_u &= \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \cdot \\ &\cdot \left[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)^{(n+1),(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^{*T}} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^{*T}} \right) \mathbf{u}^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 \right], \\ \overline{\mathbf{A}}_v &= \mathbf{A}_1 + \Delta t(1 - \beta) \cdot \\ &\cdot \left[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)^{(n+1),(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{u}^{*T}} + \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{v}^{*T}} \right) \mathbf{v}^{(n+1),(r)} + \mathbf{D}_1 \right].\end{aligned}\quad (32)$$

Tím je vyřešena úloha proudění Newtonovy kapaliny v uretře.

Řešení úlohy interakce

V souladu s nesdruženou metodou řešení interakce použijeme iterační postup. Nejdříve řešíme proudění moče v tuhé uretře. Vypočteným tlakem zatížíme pružnou uretru, jejíž deformaci řešíme pomocí TL formulace. Vlivem deformace stěny uretry se změní oblast proudění moče, předchozí výpočet proudění je nutno opravit. Takto iterujeme, až najdeme rovnovážnou polohu obou interagujících kontinuí. Řešení provádíme na vhodně zvolených časových hladinách a uvnitř každé časové hladiny aplikujeme výše uvedený iterační postup. Řešení vyžaduje použit adaptivní síť konečných prvků.

Tato část příspěvku je součástí řešení grantu GA ČR s názvem „Biomechanika dolní části močového traktu“, který je registrován pod číslem 106/97/0397.

Literatura

- [1] Bathe, K.J.: *Finite-Elemente- Methoden (Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann)*, Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 1990.
- [2] Bittnar, Z. — Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky 1, 2*, Praha, Vydavatelství ČVUT, 1992.
- [3] Křen, J.: *MKP v nelineární mechanice kontinua*, Výzkumná zpráva č. 102-09-97, Plzeň, ZČU, FAV, Katedra mechaniky, 1997.
- [4] Křen, J. — Rosenberg, J. — Janíček, P.: *Biomechanika*, Skriptum, Plzeň, Vydavatelství ZČU, 1997.

JE VŮBEC ŠKOLSKÁ MATEMATIKA UŽITEČNÁ?

František Kuřina

„Ať už jsou důvody jakékoli, matematika je rozhodně užitečným způsobem, jak uvažovat o přírodě. . . Náš svět spočívá na matematických základech a matematika je nevyhnutelně vnořena do naší globální kultury. . . Kdyby matematika, včetně toho, co na ní spočívá, musela náhle z našeho světa zmizet, lidská společnost by se v okamžiku zhroutila. A kdyby se matematika měla zmrazit, takže by nikdy nepostoupila ani o krok kupředu, naše civilizace by začala couvat.“

Těmito slovy charakterizuje matematiku Ian Stuart. O užitečnosti matematiky, zdá se, nelze v civilizované společnosti pochybovat.

Přitom *„jedním z nejpodivnějších, ale také jedním z nejsilnějších rysů vztahu mezi matematikou a „reálným světem“ je to, že dobrá matematika, ať už je její zdroj jakýkoli, se nakonec ukáže být užitečnou.“* (I. Stuart, [1]).

Je-li užitečná matematika, musí být užitečná i školská matematika, neboť školská matematika je prvním stupněm k poznávání matematiky. Aspoň dobrá školská matematika bude jistě užitečná. Takto jsme my, matematici a učitelé matematiky ochotni uvažovat. Je vina společnosti, že to nechápe. Mnozí její členové jsou totiž přesvědčeni, že *„u brány k výtvarné profesi, zemědělství nebo společenské vědě. . . číhá běs matematický a kdo mu nezplatí daň a nesloží zkoušky z něčeho, co celý život nebude potřebovat, tomu je i obor zcela jiný znepřístupněn.“* (B. Blázek, [2]).

Pokusme se nad problematikou, která je složitější, než jak jsme výše uvedli, kriticky zamyslet.

Vopěnkova definice a Polyova věta

Matematiku, její charakter a užitečnost můžeme přirozeně chápat mnoha různými způsoby. Pozoruhodnou její charakteristiku podal v roce 1971 P. Vopěnka [3]:

„Matematika je metoda předpovídání pomocí formálních kalkulů.“

Nemohu posoudit význam této definice pro matematiku, zdá se mi však, že je vhodná jak z hlediska významu matematiky pro aplikace (tam společnost vidí užitečnost matematiky především), tak i z hlediska didaktického. Obrací totiž naši pozornost na formální stránku matematiky a na kalkuly, všeobecně zanedbávanou stránku školské matematiky.

V čem můžeme vidět užitečnost školské matematiky?

Vzhledem k tomu, že budoucí matematici tvoří malé procento našich žáků a studentů, vyzní argument, že školská matematika je užitečná, protože matematika je užitečná, poněkud naprázdno. Matematiku užívají ovšem všichni. Jaký rozsah a jakou úroveň matematických poznatků potřebují ti, kteří nebudou potřebovat matematiku ve své profesi, to je velmi důležitá a netriviální otázka, k níž se vrátíme ve třetí části našeho příspěvku. Užitečnost školské matematiky by ovšem měli žáci poznávat v každodenní praxi, a to zejména charakterem úloh, které řeší. Samozřejmě — ne všechny úlohy mohou mít aplikační charakter. Mnohé úlohy zařazujeme pro porozumění pojům a postupům, mnohé potřebujeme k zvládnutí matematického řemesla. Aplikační úlohy mohou hrát i významnou roli motivační, měly by však být dokladem užitečnosti matematiky pro život. Bohužel není problém najít v tomto smyslu negativní příklady z naší i cizí, staré i nové učebnicové produkce.

První ukázka je z roku 1912 a pochází prý z jedné staré ruské učebnice.

Šířka poštovní známky činí

$$4\frac{37}{45} \cdot \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{9} + \frac{18}{18} + \frac{35}{36}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}}$$

její délky, což je $\frac{9}{10}$ coulu. Za kolik musí člověk nakoupit tyto známky, aby jimi mohl vytapetovat stěnu pokoje o délce 5 metrů a výšce $5\frac{6}{7}$ metru?

Naše klasická sbírka úloh stará 100 let uvádí řadu úloh tohoto typu:

Chrudim, Budějovice a Liberec mají dohromady 63 000 obyvatelů; Chrudim, Budějovice a Plzeň 72 000 obyvatelů; Chrudim, Liberec a Plzeň 77 000 obyvatelů; Budějovice, Liberec a Plzeň 88 000 obyvatelů. Kolik obyvatelů má každé z těchto měst?

Ve sbírce úloh z roku 1994 můžeme číst:

Hromada písku má tvar rotačního kužele o průměru 2 m. Jak velká je strana této hromady, jestliže svírá s výškou úhel $\varphi = 21^\circ 50'$? Výsledek zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

Absurdnost všech citovaných úloh je zřejmá. Myslím, že je přirozené, aby se určité postupy žáci učili na vymyšlených modelových situacích, měl by však být jasný jejich účel a charakter.

S budováním představ o účelnosti matematiky souvisí i otázka vztahu matematických pojmů k reálným situacím.

Asi před 30 lety jsem si všiml v tehdejší učebnici matematiky pro střední školu zcela nesprávné věty:

Množina všech bodů roviny, které mají od ramen dutého úhlu stejné vzdálenosti, je osa tohoto úhlu.

Od té doby jsem našel citovanou větu v učebnicích německých, amerických i dalších (i v jedné české učebnici z let devadesátých) a při mnoha příležitostech jsem o ní diskutoval se žáky, studenty i didaktiky. Když jsem upozornil na nutnost vyjasnit pojem vzdálenost bodu od polopřímky, přišel vždy aspoň jeden účastník s návrhem definovat vzdálenost bodu od polopřímky PA jako vzdálenost bodu od přímky PA ! Matematické pojmy jsou v povědomí studentů velmi málo spjaty s realitou. Takto budovaná matematika je pak přirozeně nazírána jako málo užitečná.

Zatím jsme diskutovali pouze o jedné, řekněme „pragmatické“ stránce matematiky. Z nejrůznějších didaktických materiálů ovšem víme, že matematika má mít i výrazný formativní vliv, má sloužit zejména pěstování myšlení. V tomto smyslu by měla být matematika především užitečná.

Zdá se však, že transfer

logicky utříděné učivo $\longrightarrow$ rozvíjení myšlení

není akceptovatelný. Podle Vygotského „*velký počet výzkumů ukazuje, že ani tradiční požadavky na kázeň, ani výuka starých jazyků, dějin klasických civilizací a matematiky nemají velký vliv na duševní rozvoj dítěte*“ [4].

V roce 1983 posílá G. Polya 4. kongresu ICME poselství, v němž píše: „*Matematika kultivuje myšlení pouze tehdy, učíme-li ji vhodným způsobem.*“

To je ona Polyova věta z nadpisu první části našeho příspěvku. Otázka vhodného přístupu k vyučování matematice je ovšem složitá. Jsem přesvědčen, že řešením je odklon od tradičního vyučování založeného na přenosu informací k vyučování založenému na zkušenostech žáků.

K. Popper k této problematice píše ([6]):

Pedagogika obvykle vypadá tak, že se dávají odpovědi, aniž se položily otázky, ale na otázky se neodpovídá... Učíme se z informací, které do nás proudí skrze naše smysly; opakováním se pak učíme zákonitostem.

Já se naopak domnívám, že se učíme pouze činností, aktivitou, a nikdy pasivitou.

Podrobnější rozbor těchto otázek jsme formulovali v článku [6] a k problematice se ještě vrátíme.

Dvě pozoruhodné priority našeho matematického vzdělávání

Po letech izolace našeho školství máme dnes zásluhou studií TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) možnost porovnávat naši školu se světem. Není účelem tohoto příspěvku o zmíněných studiích informovat, nebo je dokonce hodnotit. Chtěl bych však v souvislosti s tématem našich úvah upozornit podle informací publikovaných ve sbornících [7] a [8] na dva alarmující výsledky.

Nejdříve uvedu letmý pohled na výdaje ve školství. Obvykle se publikují srovnatelné procentové ukazatele (např. o výdajích na vzdělání v procentech hrubého domácího produktu). Aniž bychom hodnotili naše současné možnosti a rozebírali příčiny současného stavu, je snad vhodné uvědomit si i některá absolutní čísla. Uvedu zde pro srovnání tabulku s výdaji na školství na jednoho obyvatele v roce 1996 u čtyř zemí.

	Hrubý domácí produkt na 1 obyvatele (USD)	Výdaje na školství (% HDP)	Výdaje na školství na 1 obyvatele (USD)
Česká republika	3 210	3,75	120,37
Německo	25 580	2,43	621,59
USA	25 860	4,02	1 039,57
Japonsko	34 360	2,82	968,95

S námi srovnatelné státy z hlediska hrubého domácího produktu jsou např. Jihoafrická republika a Maďarsko. Tyto státy však dávaly v roce 1996 na vzdělání na obyvatele přece jen více. U Jihoafrické republiky jde o částku 154,11 USD, u Maďarska o 165,50 USD. Z hlediska těchto čísel není perspektiva zlepšování úrovně našeho školství nijak radostná.

Vraťme se nyní k dvěma prioritám ohlášeným v nadpisu.

První se týká obliby matematiky u žáků 8. ročníků. Na otázku „*Jak rád(a) máš matematiku?*“ mohli žáci vybrat odpověď z těchto čtyř možností:

velmi nerad(a), nerad(a), rád(a), velmi rád(a).

V Rakousku, Německu, České republice, Maďarsku, Japonsku, Koreji, Litvě a Nizozemí uvedlo více než 40 % žáků, že matematiku nemají rádi. Na prvním místě mezi těmito zeměmi je Česká republika, kde takto odpověděla plná polovina z dotazovaných žáků 8. ročníků. Nejmenší procento našich žáků (8 %) odpovědělo, že mají matematiku velmi rádi. Plných 14 % dětí uvedlo, že mají matematiku velmi nerady.

Může nás sice těšit, že naši žáci 8. ročníků přitom dosáhli v matematice výborných výsledků, neboť pouze Singapur, Korea a Japonsko měly výsledky statisticky výrazně lepší, jsem však přesvědčen, že tento negativní poměr k matematice snižuje úroveň užitečnosti matematiky v běžném životě. K tomu, co nemám rád, se uchyluji pouze v případě nouze nebo donucení. Špatný poměr k matematice u populace patrně vede k zplanění těch znalostí, které si žák ze školy přináší. Je otázka, zda tento negativní poměr k matematice nemá za následek další náš světový primát, s nímž se nemůžeme chlubit.

V šetření TIMSS byly dány v matematice 4 stejné úlohy v 8. ročníku základní školy a v posledním ročníku střední školy. Jsme jediná země světa, která má celkovou úspěšnost středoškoláků nižší než úspěšnost žáků 8. ročníků. Všimněme si této problematiky podrobněji. Vzhledem k tomu, že třetí úloha nebyla stejně v obou kategoriích formulována a ve čtvrté úloze byli naši středoškoláci lepší než žáci základní školy, budeme se dále zabývat prvními dvěma úlohami.

Úloha 1. Kolik kalorií je v 30 gramové porci jídla, je-li ve 100 g tohoto jídla 300 kalorií?

A 90	B 100	C 900	D 1 000	E 9 000
------	-------	-------	---------	---------

Úloha 2. Ze zásilky 3 000 žárovek bylo 100 namátkou vybráno ke kontrole. Je-li z tohoto vzorku 5 žárovek vadných, kolik vadných žárovek můžeme očekávat v celé zásilce?

A 15	B 60	C 150	D 300	E 600
------	------	-------	-------	-------

První úlohu vyřešilo správně 78 % žáků základní a 61 % žáků střední školy.

Druhou úlohu vyřešilo správně 76 % žáků základní a 63 % žáků střední školy.

Odpověď na otázku, zda je středoškolská matematika užitečná pro život, budeme tedy asi muset formulovat opatrně.

Je smutnou realitou, že z celého světa pouze v naší republice vyřeší tutéž úlohu o 10 % méně středoškoláků než žáků 8. ročníku. Všechny ostatní státy vykazují nárůst úrovně řešení úloh. Nejnižší nárůst (o 10 %) se objevil u studentů z Maďarska, Kypru, Spojených států a Jihoafrické republiky. Island, Dánsko a Švédsko vykazují více než 20% nárůst úrovně řešení úloh.

Heymann-Hejného redukce

V této části příspěvku si dovoluji spojit názory dvou didaktiků, kteří se patrně neznají, nejen osobně, ale ani literárně, přesto však docházejí z různých pozic k velmi podobným závěrům. Jedná se o H.W. Heymanna z univerzity v Bielefeldu a M. Hejného z Univerzity Karlovy. H.W. Heymann publikoval v roce 1996 habilitační práci *Všeobecné vzdělání a matematika* [9], která vzbudila v německé veřejnosti značný ohlas ([10]). Heymann vychází z experimentálně ověřené skutečnosti, že převážná část populace, která nebude potřebovat ve své profesi matematiku, vystačí s mnohem menším rozsahem matematických poznatků, než je nucena podle současných učebních plánů zvládat. Matematika „pro praxi“ se tak redukuje na *procentový počet, trojčlenku a úrokování*. Heslo „7 let matematiky stačí“ nadchlo část německé veřejnosti, a to i přesto, že Heymann zdůrazňuje, že jde pouze o jeden aspekt, podle něhož se má matematické vzdělání hodnotit. M. Hejný upozorňuje ve statí [11], že *nejvážnějším nedostatkem vyučování matematice na všech typech škol je instruktivnost výuky vedoucí k formálnímu poznání. Poznání je nedostatečně podloženo žákovou zkušeností, izolované poznatky uchovávané v paměti netvoří strukturu, žák je zaměřen na to, aby uměl imitovat učitelovo chování při řešení určitých standardních úloh*.

Hrozí nebezpečí, že podobně jako vyhynula latina, může vyhynout i matematika. Rozhodovat o tom nebudeme my, matematici, ale laici, na něž i po létech doléhá strach a napětí z doby, kdy se museli učit nepotřebnou matematiku.

Heymann i Hejný nabízejí podobné řešení: *nebojácně redukovat objem učiva a výrazně zlepšit kvalitu poznávacího procesu* [11].

Podle Heymanna by se měla *uvolnit odborná systematika základního kursu matematiky a část standardního učiva, např. trigometrie, by se měla přesunout do učiva výběrového. Přitom je však nutné prohloubit*

studium matematiky blízké běžnému životu, včetně tvořivého využívání výpočetní techniky, a orientace matematiky na mimomatematické situace studované v zajímavých projektech. Na gymnaziální úrovni by pak mělo jít o výraznou vnější diferenciaci, při níž by se např. místo základů analýzy probírala společensky orientovaná statistika [10].

To je ovšem jedno stanovisko. Z druhé strany upozorňuje R. Zahradník, že *je reálné nebezpečí, že lidé z humanitních oblastí nezvládnou základní rysy přírodovědy (a techniky), což je neblahé a může být opravdu nebezpečné [13].*

Ať chceme nebo nechceme, jsou nadhozené otázky aktuální a vážné. Provést redukci učiva bez náležitého zvýšení úrovně výuky zbývající části by samozřejmě bylo osudovou chybou.

Naše dosavadní úvahy vycházely z reality dnešní školy a nevšímalý si problémů, které může přinést budoucnost. P. Piňha píše v článku [12], že ve společnosti probíhají radikální změny prostředí, na něž by měla škola rovněž reagovat. Mimo jiné uvádí tyto:

Člověk ztrácí paměť, neboť ji nahradil protézou účinnější než lidský mozek.

Člověk ztrácí zkušenostní cit pro primární realitu, neboť pracuje s modely, abstrakcemi a interpretacemi.

Člověk ztrácí racionalitu, protože rychlost informačních impulsů znemožňuje reflexi a tlačí ho k animálně reaktivnímu jednání.

Lze očekávat krizi logiky a vlnu alogičnosti.

To jsou problémy, které, zdá se mi, přesahují obzor většiny z nás. Měli bychom však i o nich uvažovat.

Naše škola nemůže být skanzenem představ o vzdělání z minulého století. *Musíme mít ctížádost, aby naše vzdělání bylo v evropském kontextu jedinečné, pak budeme moci mluvit o skutečné demokracii (Zahradník).*

Literatura

- [1] Stewart, I.: *Čísla přírody*, Archa, Bratislava, 1996.
- [2] Blažek, B.: *Spiknutí učitelů matematiky*, In: Literární noviny, 27, 1997.
- [3] Vopěnka, P.: *Poznámky o současné matematice*, In: Filosofický časopis, 5, 1997.

- [4] Bertrand, Y.: *Soudobé teorie vzdělávání*, Portál, Praha, 1998.
- [5] Polya, G.: *Mathematics Promotes the Mind*, In: Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser Boston, 1983.
- [6] Hejný, M. — Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*, In: Matematika-fyzika-informatika, 7, 1998.
- [7] Straková, J. — Tomášek, V. — Palečková, J.: *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků 8. ročníků*, Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 1996.
- [8] Straková, J. — Tomášek, V. — Palečková, J.: *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků posledních ročníků středních škol*, Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 1996.
- [9] Heymann, H.W.: *Algemeinbildung und Mathematik*, Betz.-Weinheim, Basel, 1996.
- [10] Heymann, H.W.: *Sind sieben Jahre Mathematik genug?* In: Mathematik in der Schule, 6, 1996.
- [11] Hejný, M.: *Matematický pojem v interakci učitel – žák*, In: Matematika a učitelé prvního stupně, Vysoká škola pedagogická, Hradec Králové, 1998.
- [12] Piřha, P.: *Výchova k lidskosti*, In: Literární noviny, 9, 1998.
- [13] Zahradník, R.: *V čem jsme zdatní*, In: Literární noviny, 9, 1998.

MATHEMATICS & REAL LIFE

Graham H. Littler

Introduction

We are told that “Mathematics is an international language” and this is obviously true for those of us who have had the pleasure of children from another country in our class and who could not speak our language. They are always able to work through a mathematical exercise provided it is at the right level for them.

“Mathematics provides a means of communication which is powerful, concise and unambiguous” *Mathematics Counts* (1982). This is often given as a reason for teaching mathematics but is it a sufficient reason? Mathematics develops logical thinking is another phrase often used which is particularly linked with Euclidean geometry and the solution of problems.

My reason for starting my presentation in this way was partly to answer a question I set myself when I began to think about this paper — why do we teach mathematics and why is it seen as such an important subject in the school curriculum? Immediately, all the old clichés came to mind, which we, as mathematicians, give as answers to such questions. One of the most common responses given is “because it is used so much in everyday (real) life”.

These clichés raised a secondary question in my mind. If I was not a mathematician what mathematics would I need in life? I am not going to define the minimum curriculum which every student should have by the age of 16 years. However thinking generally about an answer to this question, I am sure we would all agree that most people would expect our students to be able to carry out calculations on paper, mentally or using a calculator. Those calculations would be related to measures in most instances; time, money, length, weight etc. Percentages would have to be included in our list of topics even if it was only to calculate the price of goods in a sale which had a 15 % discount. What spatial

concepts are needed by the average person in real life? Horizontality and verticality might be important, as would be the properties of the most common shapes. Hopefully our students will read the press and so it would be helpful for them to have some knowledge of graphs and pictorial representation!

This is by no means a definitive list but it might help us to understand why we get comments from students such as “What use will algebra be to me?”, “Why are we doing this sort of mathematics?” and from adults “I have never used most of the mathematics which I was taught at school”.

The point I am trying to make is that there is a very wide gulf between what we as mathematicians think our students should study and the perception which both the student and the general pupil have of their needs. I believe that we as professional mathematicians and scientists are partly to blame for this because we do not relate our subject to the real world sufficiently.

Abstraction and Reality

To argue my case I will have to go back to the quotation “Mathematics is a powerful, concise and unambiguous means of communication”. Yes, this is true IF the person who is communicating understands the code, can translate language into the mathematical code and back again and can manipulate the symbols of the code in a way which is internationally accepted. Do all our pupils have these attributes?

We as mathematicians are happy dealing with abstract symbolism and the older we are the more indoctrinated we are in the algorithms of our trade! The problem is that too many teachers then go on to teach their pupils, using these algorithms and abstract symbolism, without giving them any understanding of the underlying concepts and without putting the work into a context to which the pupils can relate.

Let me take a Year 1 example to illustrate what I mean? There is plenty of research available which shows that very young children are quite capable of adding “mentally” successfully, long before they can write and manipulate the necessary symbols. These children would be working within a context in which they were familiar and they would be doing the work practically. A typical sort of question might be: “You have three sweets in your right hand and two in your left hand, how many sweets have you got altogether?” Many four year-olds will get this correct either by putting them all into one group and counting from

the beginning 1, 2, ..., 5. The more sophisticated children will “add on” 3, 4, 5.

However when we write this problem down in an abstract form $2+3 = 5$, many of these same children, even at a later stage, cannot determine the solution because of the lack of context. It is worth noting that we would have written the same symbols down if we had been adding 2 cows and 3 cows, adding a rod 2 units long to one of three units or asking how many children in our family if I have 2 sons and 3 daughters. So yes, our mathematical language is very concise! The digit “2” can represent two of anything. Next the children have to understand the what the operations are which are represented by the symbols $+$, $-$, $\times$, and $:$, together with the processes and the words which are connected with these operations. (A task you might set your self is to explain to someone else what you mean by the processes of addition, subtraction, multiplication and division without using any numbers! You may use objects.)

If we do not do this then we will continue to produce the type of students whose teacher says, “They are very good at number but they are unable to solve problems”. My experience of this type of teacher is that mathematics has been taught through algorithms which it is hoped the students will memorise but no understanding of the concepts involved has been given. What happens in these cases is that when the students are confronted with a problem in which they have to translate a written statement into a mathematical operation they are often unsure whether they should add or multiply, subtract or divide.

Many school textbooks for young children have exercises of the type $2 + 3 = ?$ The author is expecting the pupils to accept this abstract form of exercise without putting them into a context. Martin Hughes (1986) commented: “For many children there is a serious split in their mathematical understanding between the concrete and written forms. It is as though they inhabit two worlds, each with its own rules and procedures, but with little connection between the two.”

What has all this to do with the title of this paper. I would argue that we, as teachers, move to abstraction in mathematics far too quickly throughout the development of the subject and do not take the opportunities to use develop certain aspects of mathematics when it is most appropriate, because it is not in the syllabus for that year. I have tried to show earlier that many young children can cope with simple arithmetic

when this is done in the context of real life objects to which they can relate.

Perhaps as teachers, we should reflect on the practise in the good homes from which our pupils have come. Where parents have let them help with the baking, measuring out the ingredients, setting the table, playing games involving counting and so gaining many basic mathematical concepts such as the one-to-one relationship, comparison, order, equality, conservation etc. Can we say that all these children on starting school will come into classrooms which carry on this type of learning or even begin it for the less fortunate child? Merttens and Vass (1990) make the comment — “Arguably, children learn more from their parents in the first five years of life than they do in the next ten”. I appreciate that this is a debatable point but it does indicate that it is important for our pupils to learn in a context which is meaningful to them.

Mathematical Application

Some pupils may be able to memorise sufficient algorithms to show that they have a high degree of skill in solving arithmetic and algebraic examples. Many of these pupils find the solving of problems and the undertaking of investigations exceedingly difficult. There are two reasons for this state of affairs in general. The first is that problem solving and investigation work is not part of many mathematical curricula and therefore the pupils are unsure of how to cope with the work as a self learning activity rather than always being directed in their “learning”. Secondly the pupils do not have the mathematical understanding to apply their known skills in unusual situations.

In the United Kingdom we have had a National Curriculum since 1989 for the 5 to 16 age-range. Although, for various reasons, it is now in its third revision, within both the Mathematics and Science curricula, the first and arguably most important Attainment Target is “Using and Applying Mathematics/Science”. To put this Attainment Target in context for the mathematics curriculum, the other three Attainment Targets are number and algebra, geometry and measures, and data handling.

Pupils cannot hope to gain the attainment targets in “Using and Applying Mathematics”, unless the teaching strategies which are used, incorporate work which relates to in the real world. Teachers should make use of other subjects either to provide the necessary problems or as vehicles with which to put over the mathematical concepts. In the

guidance given to teachers of mathematics, within the National Curriculum (1989) it says, “Cross-curricula approaches to mathematics reflect the real world in which we live; they enable pupils use skills which they have already acquired to meet new ideas in a meaningful way; they can motivate the need for new mathematics”.

To give an example of using a scientific phenomena say in a mathematics lesson you could pose the problem:

“What has the volume and surface area of cubes of different sizes got to do with the need for a wren to eat 1.5 times its own weight each day, or a baby having to be fed every three hours and yet the adult person does neither of these things?”

Obviously you would wish the students to start building cubes either practically or in their minds if they are capable of doing this and recording their findings. I would hope the pupils would put their results in a table as follows;

Side of cube	Surface area	Volume	$\frac{\text{Surface area}}{\text{Volume}}$
1	6	1	6
2	24	8	3
3	54	27	2
4	96	64	1.5
5	150	125	1.2
6	216	216	1

From this chart the students ought to see that the smaller the object is the greater the ratio of the surface area to volume. The animals and humans eat to produce energy. One of the main ways by which we lose energy is through heat loss from the surface area of our body. Hence the wren and the baby which are small, require more “food” to provide energy for the larger surface area to volume ratio compared with an adult.

Here we are taking a very simple mathematical concept, the relationship between surface area and volume of a cube with quite a sophisticated concept in science.

To cover all the aspects of mathematics from 5 to 16 years and how these could be related in the main to the real world would take an awful long time, so I will give you some ideas and examples across the age range and from different aspects of mathematics.

Real World Situations

I have already indicated young children need to be introduced slowly into the manipulation of abstract mathematical symbols. This means that in the early stages of mathematics there should be a considerable amount of sorting material about so that the pupils can learn to classify in many different ways. Making comparisons, order, dealing with equality and conservation in measures. All this can be done without using number to enable the pupils to grasp the essential basic mathematical concepts; and in so doing, not only start to build the mathematical conceptual foundations but also gain a considerable amount of language development.

Place value in number is found to be a neglected area of the curriculum in England and this impedes number work throughout the pupils career if the grounding of this fundamental concept are not fully understood. One way in which this can be related to the real world in the UK is to use particular coins from our money system — the one penny coin, the ten penny coin and the pound coin. Children come to school having had pocket money to spend and so they are “street-wise” with respect to this, hence we can make use of this in developing the denary system. Similarly getting the pupils to make non-standard rulers and use these to measure with and so build up the processes needed for the arithmetical operations. Littler et al (1995).

I said earlier in the paper that we should take the opportunity to develop aspects of our work when it arises rather than wait for the aspect to appear on the syllabus. At a very early stage in the mathematical development of our pupils many of textbooks use a $\square$ to denote a number which has to be found, such as

$$3 + \square = 7.$$

Young children find no difficulty in solving such a problem. For them it is not the algebraic equation $3 + x = 7$ which they have to solve by having to remember the algorithm to change this to $x = 7 - 3$; these young children quite simply translate the mathematical statement into a sentence which is meaningful to them such as “What do I have to add to 3 to make 7?” In my experience many children will then say the word “three” and “count on” on their fingers — “four, five, six, seven,” and

see that they have counted four fingers, hence the answer. These pupils are beginning to develop the ideas of a generalised arithmetic — algebra and this can be referred back to later on in their development.

I could give many examples of what I meant earlier when I spoke about “indoctrination”. Elementary school children when faced with the simple sum $20 : 4 = ?$, will translate this and ask in their heads, “How many fours are there in 20?” However when they are faced with the problem $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = ?$ immediately go to the algorithm and hope they remember it correctly — “change the $2\frac{1}{2}$ into $\frac{5}{2}$, change the sign to ‘ $\times$ ’ and turn the last one upside-down!” It seems to me there are two important questions to ask here, “Do you know why the algorithm works?” and “Why did you not approach it as for natural numbers? How many halves are there in $2\frac{1}{2}$?” In other words, the way we teach our children does not allow them either to use their common sense, or do we encourage them to use their own computational methods. To relate this back to real life, is the way you perform a subtraction sum in school the same way you would do a subtraction sum in money — giving change, for instance?

Elementary mathematics gives great opportunities for doing mathematics in real world situations. “The shop” can give those necessary experiences of handing money and deal with the operations of addition, subtraction, multiplication of money in “real” situations. The idea of non-standard units will allow the children to make “rulers” from strips of grid/graph paper so that 10 cm say represents a unit, then a lot of measuring can be done to develop the ideas of decimals being an extension of the natural number system. It also gives a good opportunity for the children to measure non-straight lines. Littler et al (1996). I would also use maps of the local area at a slightly later stage, to get the pupils to find the distance from their home to school, which cannot be done by putting a ruler across between the two points! Similarly how would your pupils measure the circumference of a can?

In England, as soon as my pupils can interpret simple maps, I start preparing the way for the introduction of co-ordinates. First by the use of a street map in which a whole square is designated (B2) and finally getting to the stage where the grid lines are labelled and therefore giving the pupils the ability to designate a point. This is done through games such as “Battleships” and the idea of a “Treasure Island”.

Letting the students gather data about matters which interest them will introduce them to all forms of pictorial representation, to different

“averages” and to the idea of making an hypothesis to see whether their data supports the hypothesis. Newspapers and magazines are good sources of the misuse of pictorial representation which brings into sharp focus the need for careful study of any graphical illustration to see whether interpretation is possible or meaningless.

“Mathematics is about relationships” DES (1985), and our students have to realise that it is not a collection of disconnected parts but they have to realise that all the parts are interconnected. “Using mathematics, communicating mathematically and reasoning should be set in the context of all the areas of mathematics. Measurement should be taught in relation to number, handling data and geometry. Ratio and proportion should be linked to probability, geometry and solving numerical problems. Key concepts such as variable, equivalence, order, inverse, should be developed in number, algebra and geometry”. DES (1995).

An example of putting the above into practice would be linking the sum 27×16 to the area of a rectangle having these dimensions and if this is drawn on graph paper, the students can see how the multiplication sum is built up. That is

$$\begin{aligned} 27 \times 16 &= (20 + 7) \times (10 + 6) \\ &= (10 + 10 + 7) \times (10 + 6) \end{aligned}$$

and from the diagram they see that this gives $(10 \times 10) + (10 \times 10) + (10 \times 7) + (6 \times 10) + (6 \times 10) + (6 \times 7)$ each part of which is easy to compute.

	10	10	7
10			
6			

It is obvious that this can also be related to the multiplication of brackets in algebra, for instance: $(2a + b)(a + c)$ is the generalised form of the above arithmetical expression.

In the United Kingdom we found many students with misconceptions about the links between area and volume. Many students were under

the impression that all shapes which have the same area have the same perimeter (distance around) and that shapes with the same perimeter enclose the same area! There are two simple practical experiments which students can do which will remedy their misconceptions.

The first is to take a loop of string, 20 units long and to get the pupils to use the loop to make as many rectangles as they could which had natural number sides. Record the length l and width w of each rectangle. Draw the graph of length against width which is found to be a straight line with the relationship $l + w = 10$, which the pupils quickly give both in words and as this algebraic statement. After this the calculated the areas of the rectangles and found that these ranged from 0 to 25 when the rectangle was a square. On plotting the length against the area I was told the shape of the graph was like a water fountain — it was a parabola and some Year 8 students did the necessary algebraic manipulation to find its equation.

The second is to have 36 small plastic squares and for the pupils to make as many rectangles as they can using all the squares each time. Record the length l and the width w of each rectangle, then plot the graph of these rectangles. I then get them to compute the perimeters for the rectangles they have found and they quickly realise that these range from 74 units (36×1 rectangle) down to 24 units (6×6 rectangle).

In a Year 6 class I had an interesting development of this last experiment happen. One child said that if the plastic squares had been made from paper then they could have cut each one in half and made a rectangle which was $72 \times \frac{1}{2}$ and this would have a perimeter of 145 units. I asked them could they go on doing this process, to which the answer was a resounding yes — the rectangle would go on getting longer but thinner! I then said “Would it ever disappear?” and I was told most firmly that it would not, that there would always be some width but the length would have gone into the distance! I thought this was a wonderful beginning to the idea of infinity (as well as asymptotes).

The generalisations of the relationships also make a very good introduction to the ideas of equations in algebra in a much more meaningful way than coldly introducing the equation $x + y = 10$.

The spatial world gives us considerable scope for considering the real world. Take the topic of “packaging”. Why are the goods we buy from the supermarket packaged in the way they are? What are the nets of the boxes in which cereals are packaged for instance? Why are most tins of

cylindrical form and not cuboid? Exploration of these phenomena not only brings out the mathematics of shapes but also raise the whole issue of economics as well as aesthetic presentation. I have done work on this both in elementary and secondary schools. With Years 5 & 6, having established what an angle is and that a turn from North to South is 180 degrees, I proceed to get the children to determine that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees — without the use of a protractor! I then get the pupils to construct geometrical shapes in framework form using a simple apparatus called “Geostrips”. This is made up of plastic strips of different lengths which can be joined loosely at their ends. The next stage is to get the students to hold their frameworks up by one of the fixing points and observe what happens. Only one shape stays rigid — the triangle. All the others collapse. So we come to the conclusion that the most rigid shape is a triangle and pose the question of its use in real life. It does not take them long to find examples of the triangle being used in industry to make rigid shapes. Railway bridges often have this type of construction, scaffolding, the corner plates on the steelwork of multi-story buildings and I have even found it being used in L-shaped concrete beams.

For Years 8 & 9 I have often taken a bicycle into the classroom to develop the idea of loci. I usually start with the simple example of marking the tyre of one of the wheels on its side and then ask the class to draw what they think the path the chalk-mark will trace out as I wheel the cycle along. Very few pupils get it correct first time, most of them thinking the wheel goes back on itself somehow! You can then look at the locus formed by the end of a pedal as it turns to drive the cycle forwards and how this would alter if the cycle had gears. One of the most simple locus using this apparatus is the locus of one of the nuts holding on the wheel. With this simple one you can add many “what if questions”. What if you were going uphill/downhill? What if you were riding on the footpath and went down on to the road?

I have found that Year 7 onwards have difficulty in scale drawing or with practical work in scale particularly when working in three dimensions. For instance what would your answer be to the simple task, “I make an ‘aeroplane’ in the form of a ‘T’ using two pieces of wood. How many pieces of wood the same size as the first ones would I need to make a plane which was twice the size as the original one?”. To help with this I have got my pupils to design a study-bedroom with the furniture they

would like in it. I get them to do this in plan elevation first with card cut-outs for the furniture to enable them to see whether or not their designs would fit through the door! Then we model this using balsa wood. This in itself is a wonderful exercise in measuring, accuracy the use of scale models to determine problems.

Another source providing many mathematical opportunities is “games”. These can be board games in which the pupils can develop strategies for winning or “not losing”; they can develop into mathematical investigations such as “how many squares are there on a chess board?” They can be indoor games such as billiards or for older pupils outdoor games such as soccer and tennis.

I have not mentioned either the many real-life projects which can be undertaken by pupils at any age from Year 6 to Year 10. The Assessment of Performance Unit in the United Kingdom tested pupils at Year 6 and Year 9 over a period of ten years. One of the practical tasks they gave both age groups was the “Day-out”. APU (1978–90). The pupils were given a map showing the town where they lived, with two other holiday resorts joined by rail one directly, the other needing a change of trains. They were provided with rail timetables, (simplified ones for the Year 6 group), a list of activities/attractions at the two resorts, how long each activity took and finally the types of food which were on offer at each resort. The aim of the exercise for Year 6 was to see whether they could plan a day within the time scale set, which was to leave their home town at 0900 and return by 1800 having spent some time at each resort. The exercise for Year 9 was more complicated, apart from having to cope with real timetables, the costs of the activities and food were also given. Hence their day out had a time constraint and there was also a constraint on the amount of money they had to spend.

Planning and actually undertaking an orienteering course is a good practical example of map-work including the use of co-ordinates and also angle work and the use of a compass. I have also given my class the job of costing and planning a class camping holiday which included planning menus, determining the amount of food we would need, how much each person could carry and planning the layout of the camp-site.

Many of our textbooks today have a considerable number of problems, investigations and activities both within mathematics and across other subjects. A source book to which I contributed some twenty years ago, but still has a number of good ideas was a Schools Council pro-

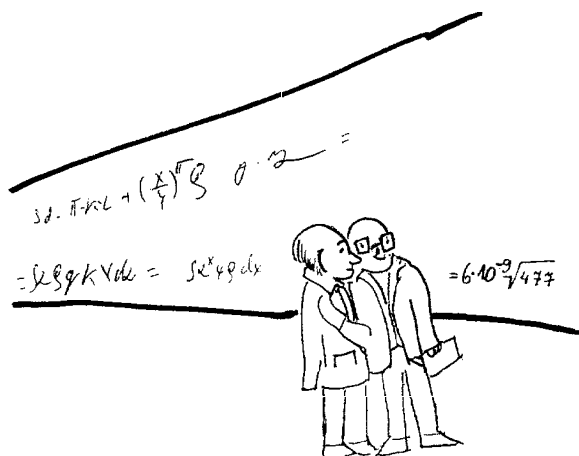
duction called “Mathematics across the curriculum”. Ling, (1977). One of the areas for which I was responsible was “Mathematics in Technical Subjects”, nowadays we would call this Technology. One of the most interesting demonstrations of the power of mathematics when I was researching this area, was when I went into the workshop of the local woodworker. My visit might have been planned because the man had a long plank on his bench some 30 cm wide and 10 cm thick. I asked him what he was doing. “I have to cut seven equal strips of wood from this plank.” Immediately my mathematical mind thought — “divide 30 by 7 — recurring decimals — difficult to get them exactly equal”. So I said, “That is a difficult measuring problem to get them all equal isn’t it?” “No”, was the reply “I just put my ruler across the plank at an angle so that it measures exactly 35 or 42 cm and mark off in either 5 or 6 cm lengths and there I have my plank marked off into seven equal widths!” Do you think this woodworker was aware of the Euclidean theorem on proportionality?

There are many other instances of working with other subjects. For instance with Year 4 we had done some work on weather. From a very simple study of the direction of the wind each day at a particular time during the whole summer term, we have determined the direction where we thought the majority wind scattered seeds would be blown. Incidentally this exercise has given these pupils their first experience of vectors!

As no doubt you can tell, I could continue citing work which I have done or which can be done in the classroom for a long time. What works for me in England might not work for you in the Czech Republic simply because of the different contexts but for no other reason. However I hope my suggestions might have given you some ideas which could be put into a Czech context. Putting your mathematics into a real life context helps your pupils in so many ways. They begin to see the value of mathematics and its use in many areas, they learn to work co-operatively. If you get a group to talk about what they have found out to the rest of the class, they learn to communicate mathematical ideas, but most of all, your pupil enjoy their mathematics and a positive attitude to the subject is achieved.

Bibliography

- [1] Assessment of Performance Unit, *Practical Mathematics at Age 11 years & Age 15 years*, HMSO, London, 1985.
- [2] Department of Education & Science, *Mathematics Counts*, HMSO, London, 1982.
- [3] Hughes, M.: *Children and Number: Difficulties in learning mathematics*, Blackwells, Oxford, 1986.
- [4] Ling, J. (Editor): *Mathematics across the Curriculum*, Schools Council Project, Blackie & Son Ltd, London, 1977.
- [5] Littler, G.H. et al, *Place Value 2*, 1995, *Place Value 3*, 1996, University of Derby.
- [6] Merrtens, R. — Vass, J.: *Sharing Mathematics Cultures*, IMPACT Fontana, London, 1990.
- [7] National Curriculum Council (1989, 1993, 1997): *The Mathematics Curriculum*, Department for Education and Employment, HMSO, London.



RÁD BYCH S VÁMI SOUHLASIL,
 ZVLÁŠTĚ KDYŽ $6 \cdot 10^{-9} \sqrt{477}$ JE MOJE OBLÍBENÉ ČÍSLO.

MATEMATIKA VE FOTOGRAFII, VÝUKOVÝCH A MULTIMEDIÁLNÍCH PROGRAMECH

Jiří Všetečka

Mezi geometry. I přijdeme k jinému auditorium, nad nímž: Nikdo nevcházej, kdo neznáš geometrii, napsáno bylo a já, zastavě se: „Budem-liž tam moci?“, řekl sem, „poněvadž tam geometry toliko pouštějí?“ „Pod předce“, řekl Všudybud. I vejdemo . . .

Jan Amos Komenský: Labyrint světa a ráj srdce

Nejsem matematik ani geometr. Zapomeňme společně na chvíli na přesné matematické definice a formulace. Podívejme se na to, jaké zájímavosti, potřeby, nesnáze, ale i radosti přináší matematika do práce fotografa nebo filmaře. Projdeme se spolu po Praze a dívejme se kolem sebe „matematickýma očima“.

Setkání první: kniha Objektivem počítače, geometrie speciálních fotografických technik [3]

Hned první část knihy — lineární perspektiva — staví fotografa před obtížný problém. Chce-li totiž fotografovat tak, aby fotografie ilustrovaly matematickou teorii, je třeba, aby fotoaparát zobrazoval na celou plochu objektivu. Fotoaparát však obvykle využívá z kruhu pouze část, obdélník nebo čtverec. Upravil jsem proto starý deskový měchový fotoaparát 6 × 9 cm, původní objektiv vyměnil za kinofilmový širokoúhlý 20 mm objektiv. Tím byla vyřazena funkce uzávěrky a expozice byla prováděna kloboučkem jako v dávné historii fotografie.

Při fotografování pro kapitulu Cylindrická a panoramatická perspektiva jsem použil fotoaparát Horizont, kde film je navinut na válcovou plochu, objektiv se otáčí a štěrbinou postupně exponuje film. Použití je fantastické — zemský horizont se při sklopení osy aparátu změní v sinusoidu — vlastně přímku ohnete a z města dostanete část zeměkoule. Nejlepší záběr je z ochozu radnice na Staroměstském náměstí směrem k Novému městu. Jen je třeba se dostatečně vyklonit nad náměstí.

Kolega ze strojínské fakulty ČVUT, doc. Ing. Vratislav Šulc, CSc., sám vymyslel a vyrobil speciální fotoaparát, kde úhel záběru byl 270 stupňů. Vznikly tak snímky téměř přepanoramatické. Jedinou nevýhodou bylo, že při fotografování ze stativu bylo nutné se pod aparát schovat nebo při expozici kolem fotoaparátu běhat, aby nebyla porušena expozice filmu zastíněním otáčejícího se zrcadla a tím i objektivu. Na Václavském náměstí uprostřed na křižovatce s ulicemi Vodičkovou a Jindřišskou tak se mnou běhal příslušník dopravní policie, protože bylo nutno jít do středu křižovatky mezi koleje. Fotografie Václavského náměstí jako tří ulic — začátek Dům obuvi, dnes Baťa — spodní část náměstí — Jindřišská ulice — horní část náměstí se sochou sv. Václava — konec u Domu módy — stála za námahou.

Setkání druhé: videoprogram Názorné zobrazovací metody — Perspektiva [4]

Obsahem části tohoto videoprogramu je krivočará perspektiva, sférická perspektiva a princip fotografování tzv. rybím okem. Teorie požadovala dynamické zobrazení umožňující plynule přecházet z ptačí do žabí perspektivy a ukázat efektní změny zobrazení přímek jako křivek. Objektív rybí oko, úhel záběru 180 stupňů, jsme neměli, posloužila předsádka fotoaparátu. V malé vzdálenosti od Domu u zvonu na Staroměstském náměstí jsme použili vysokozdviznou plošinu dosahující do výšky 24 m s plynulým pohybem plošiny včetně otáčení. A právě rychlé kombinované pohyby otáčení, zdvihání a klesání plošiny umožnily dokumentovat teorii: přímky se efektně deformovaly, domy jakoby koulely. Přihlížející cizinci vše natáčeli, protože jsem byl s kameramanem dost blízko domů. Pohled z výšek mi nikdy nevalil, naopak mě přitahuje, protože Praha má z výšek zvláštní neopakovatelné kouzlo.

Setkání třetí: videoprogram Geometrie zastřešení [5]

„Dívá-li se člověk na Prahu, jež rozsvěcuje jedno po druhém svá světla, připadá si jako někdo, jemuž se zjevil zakletý hrad o stu věží. Tento pocit se mi opakuje téměř vždy, kdykoliv se skloním nad jezerem hvězdných střech. Abychom však poznali nejskrytější tajemnou krásu Prahy, bylo by třeba, abychom se směli nad ní vykloniti ze všech jejích oken a zvláště z těch, která jsou zcela ztracena na nejneprístupnějších místech mezi komíny.“

Vítězslav Nezval: Pražský chodec

Když jsem začal realizovat program Geometrie zastřešení, zjistil jsem, že není střecha jako střecha, ale je střecha pultová, valbová, sedlová, mansardová, křížová, klášterní, válcová, kulová a už nevím jaká další. Uveďme několik působivých situací: Malostranské střechy — z nočního pohledu na kopuli kostela sv. Mikuláše se objeví zasněžené střechy. Natáčení z pudy Vojenského muzea na Hradčanském náměstí. Rozptýlené světlo, najednou velký vítr před sněhovou bouří strhává plachty na dřevěné konstrukci opravovaného domu, pokrývači běhají po trámech, upevňují plachty a — máme záběr pod úvodní titulek. Začíná sněžit — marná přání spolupracovníků, že natáčení končí. Kamera je upevněna na stativ u okna, zasněžené střechy se natočí, okno opatrně zavře, večer při rozsvěcování Prahy opatrně okno otevřít, postupně až do úplné tmy natáčet. Ve střížně oba záběry vyměnit a dlouze prolnout.

Hlavní přímka, úběžník, promítací rovina, spád střechy jsou důležité pojmy v geometrii, ale dokumentovat je na pražské architektuře může být dost obtížná, někdy až „detektivní“ činnost. Uveďme ukázky: Jediná střecha obrácená dovnitř objektu v Praze je na arcibiskupském dvoře na Malé Straně. Vidět je pouze z malostranské mostecké věže. Z Karlova mostu, z místa, kde nejvíce lidí fotografuje Hradčany a chrám sv. Víta, je vidět střecha tvořená plochou hyperbolického paraboloidu. Stejná střecha je i ve Valdštejnské zahradě. Při pohledu z garáží vedle Státní opery těsně nad válcovými střechami Wilsonova nádraží jede majestátně na koni Jan Žižka. Konstrukci klášterní klenby můžeme ukázat na kopuli Národního muzea. Mnoho dalších střech je průnikem různých ploch a rovin, geometricky i fotograficky zajímavých. Jako fotograf budu hledat zvláštní světlo, nové pohledy na střechy i když nebudu znát jejich geometrii.

„Chodili jsme od místa k místu, z ulice do ulice zkoumat do jaké výšky může vyhnat ta rumělková plevel jíž je sen. V tom městě, v obrazi nejkratšího spojení dvou bodů na mapě příemek nazvané skutečný život na půdorysu toho města, které nám přiřkl osud. Spatřili jsme město nazývané Praha v té přeludné podobě jakou mělo, když jsi na ně hleděl do kukátka. Dívali jsme se na Prahu, jež rozsvěcuje nebo zhasíná, jedno po druhém, svá světla.“

Vítězslav Nezval: Pražský chodec

Literatura

- [1] Komenský, J.A.: *Labyrint světa a ráj srdce*, Praha, nakladatelství Šolc a Šimáček, 1940.
- [2] Všeťka, J.: *Pražský chodec — kniha fotografií Prahy na motivy Vítězslava Nezvala*, Praha, Pressfoto, nakl. ČTK, 1978.
- [3] Drs, L. — Všeťka, J.: *Objektivem počítače — geometrie speciálních fotografických technik*, Praha, SNTL, 1981.
- [4] Černý, J. — Kočandrlová, M. — Všeťka, J.: *Názorné zobrazovací metody — Perspektiva* (snímek oceněný na XXXII. ročníku soutěže Techfilm Cenou Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy), Praha, ČVUT – AVTC, 1994.

Program představuje perspektivní zobrazení jako model lidského vidění. Rozděluje perspektivy podle typu perspektivní průmětny. Zaujímá se o volbu určujících prvků perspektivy a vliv volby na perspektivní průmět. Prezентuje populárním způsobem různé typy křivočarých perspektiv.

- [5] Černý, J. — Kočandrlová, M. — Všeťka, J.: *Geometrie zastřešení* (snímek oceněný na XXXIV. ročníku festivalu Techfilm 1. cenou v kategorii Výukové a instrukční snímky), Praha, ČVUT–AVTC, 1994.

Videoprogram ukazující geometrii zastřešení budov. Na reálných situacích prezentuje všechny základní typy rovinných střech i jejich geometrii. Rozsáhlý příklad uvádí jednu z metod teoretického řešení střech. Závěrem jsou prezentovány příklady na zastřešení obecnými plochami.

SEKCE

HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ
V MATEMATICE

VÝZNAM MATEMATICKÉ PŘÍPRAVY PRO BUDOUCÍ INŽENÝRY

Marie Demlová

V posledních letech probíhají na mnoha úrovních diskuse o tom, jak by měla vypadat výuka matematiky v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky, speciálně v souvislosti s programy *Mathematica*, *Maple* atp. Ve svém příspěvku bych se ráda zamyslela nad situací ve výuce matematiky na technických vysokých školách.

Zmíněné programy jsou schopny řešit převážnou část příkladů a problémů, které obsahuje většina současných skript pro základní kurzy matematiky na technických vysokých školách, a to pouhým „zmáčknutím tlačítka“. Tato situace vyvolává řadu otázek: Má ještě smysl chtít po studentech, aby byli schopni tyto příklady řešit pomocí tužky a papíru? A co vlastně učit z matematiky na technikách? A jakým způsobem matematiku vyučovat?

Abychom byli schopni na tyto otázky odpovědět, je nutné se zamyslet nad tím, co studium matematiky studentům přinášelo, přináší a co bychom chtěli, aby přinášelo. Před několika desítkami let bychom se od inženýrů dozvěděli, že matematiku potřebují k tomu, aby studenti byli schopni spočítat některé integrály, vyřešit diferenciální rovnice atp. Ale již tehdy to nebyla úplně pravda a neplatí to ani dnes. Již tehdy existovaly tabulky integrálů a kdyby „výsledkem“ výuky matematiky měla být jen schopnost spočítat „školské“ integrály, stačilo by studentům nařídit zakoupení odpovídajících tabulek a ušetřilo by se hodně hodin výuky. Podle mého názoru cílem matematické přípravy inženýrů již před lety kromě získání dovedností (jako např. spočítání některých integrálů) bylo též získání schopnosti „matematicky myslet“. A právě tento cíl matematické přípravy hraje nyní čím dál důležitější roli. Co si ale představit pod pojmem „matematické myšlení“? Podle mého názoru se jedná o:

1. schopnost matematického uvažování,

2. schopnost zobecňování,
3. schopnost argumentace při obhajobě vlastních postupů,
4. schopnost pracovat s literaturou.

Ani jednoho z těchto cílů není možno dosáhnout bez matematických znalostí některého oboru a hlavně bez zkušeností s matematickým modelováním. Na druhé straně se ukazuje, že zaměříme-li se na získávání výše uvedených schopností, stane se konkrétní výběr faktů (a tedy i oborů matematiky) méně podstatný. Ovšem některé partie matematiky jsou pro některé cíle výhodnější než jiné. Jsem přesvědčena, že diskrétní matematika a matematická logika jsou vhodnými kandidáty na obory matematiky, které umožňují dosažení cílů 1 až 3. Navíc s rozvojem počítačů a jejich využití vzrůstá důležitost diskrétní matematiky a logiky jako matematického základu teoretické Computer Science.

Ve zbylé části příspěvku bych ráda ukázala jeden konkrétní problém, který je jednoduše formulovatelný a přitom umožňuje studentům modelování situace matematickým aparátem, aniž by od nich vyžadoval hluboké znalosti některého matematického oboru. Obdobných úloh existuje řada a myslím si, že jejich vyřešení přispívá k rozvoji matematického myšlení.

Úloha: *Je dán obdélník o rozměrech 7×3 , který je sestaven z jednotlivých čtverců dvou různých barev. Je pravda, že pro jakékoli sestavení čtverců (tj. pro jakékoli obarvení těchto 21 čtverců) existuje v tomto obdélníku nedegenerovaný podobdélník, který má ve všech rozích čtverce stejné barvy? (Za nedegenerovaný obdélník považujeme každý obdélník, který má opravdu v rozích čtyři různé čtverce, tj. má šířku a délku aspoň 2.)*

Jak by mohla vypadat strategie řešení tohoto nebo podobného problému:

Řešení: Dostane-li student takový problém, měl by začít přemýšlet. Přirozené by bylo, kdyby se nejprve zamyslel nad tím, zda by problém nešel vyřešit „hrubou silou“, tj. probráním všech možných obarvení těchto 21 čtverců dvěma barvami. Brzy zjistí, že k tomu by potřeboval velmi výkonný počítač, neboť všech obarvení je 2^{21} .

Již při této úvaze je nasnadě toto zobecnění: barvy nejsou podstatné, můžeme jednu barvu „kódovat“ 0 a jednu 1. Tím dostaneme schéma 7×3

nul a jedniček, tj. sedm trojic nul a jedniček jakožto sloupce našeho schématu. (Jestli v tom student chce vidět čísla mezi 0 a 7 binárně zapsaná nebo ne, není v tuto chvíli podstatné. Takovýto pohled může někomu pomoci, někomu zase celou situaci zatemnit.) Kolik je však trojic nul a jedniček? Není obtížné si odvodit, že existuje 8 různých trojic nul a jedniček (tj. třemi ciframi ve dvojkové soustavě zapíšeme čísla 0 až 7). V našem schématu je sedm z osmi možných trojic. Mohou nastat dva případy:

1. V našem schématu existují dvě trojice (sloupce obdélníku), které jsou shodné.
2. V našem schématu se žádné dvě trojice (sloupce obdélníku) neopakují.

Ad 1. Jestliže ve schématu máme dva sloupce stejné, pak protože sloupec je trojice nul a jedniček, v tomto sloupci musí být dvě souřadnice stejné (v řeči čtverečků: dva čtverečky musí být obarveny stejnou barvou). Vezmeme-li nyní obdélník určený těmito stejnými souřadnicemi, dostaneme nede degenerovaný obdélník, který má v rozích buď samé nuly, nebo samé jedničky. To pro náš původní problém znamená obdélník, který má v rozích čtverce stejné barvy.

Ad 2. Jestliže se ve schématu žádné dvě trojice (tj. žádné dva sloupce) neopakují, pak se mezi nimi musí vyskytovat aspoň jedna z trojic 000, 111. Předpokládejme, že je mezi nimi trojice 000. Protože existují pouze čtyři trojice, které neobsahují aspoň dvě nuly, musí mezi zbylými šesti trojicemi být alespoň jedna trojice se dvěma nulami; označme tuto trojici t . Nyní trojice 000 a trojice t vytvoří hledaný obdélník.

Ukázali jsme, že v každém obarveném čtverci existuje podobdélník, který má v rozích čtverce stejné barvy.

Výhodou tohoto problému je fakt, že student (vzhledem k jednoduchosti formulace problému) je schopen provést všechny kroky potřebné k matematické formulaci sám. Shrňme „fakta“, která jsme užili k jeho vyřešení. Jsou to:

1. Všech možných obarvení 21 čtverečků je 2^{21} .
2. Existuje 8 různých trojic nul a jedniček.

3. Každá trojice z nul a jedniček obsahuje aspoň dvě souřadnice stejné.

Přitom není obtížné 3. fakt zobecnit na pozorování, že každá m -tice obsahující n různých prvků, kde $m > n$, má alespoň dvě souřadnice stejné. A odtud je jen krok k faktu, že neexistuje prosté zobrazení z n -prvkové množiny do m -prvkové množiny pro $n < m$.

Je ovšem pravda, že pro některé studenty je řešení obdobných problémů obtížnější (alespoň z počátku) než klasické úlohy typu:

Zintegrujte funkci $f(x) = \dots$

Což je ostatně známý fakt i ze základní školy; řešení slovních úloh bývá pro řadu dětí obtížnější než např. řešení rovnic. Jsem však přesvědčena, že pro schopnost studentů aktivně přistupovat k řešení problémů jsou právě takovéto úlohy důležité.

Literatura

- [1] Johnsonbaugh, R.: *Discrete Mathematics*, 4th Edition, Prentice-Hall, 1997.

POHLED NA ZPŮSOBY HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ V MATEMATICE

Ludmila Macháčová, Stanislav Kolda

V tomto příspěvku vycházíme z hodnocení, jehož účelem je

- ovlivnění studentova učení, aby směřovalo k úspěchu,
- klasifikace potvrzující absolvování zkoušky,
- rozhodnutí o přijetí či nepřijetí ke studiu.

Způsobem hodnocení jsou ve velké míře testy. V bakalářském stupni studia na FES Univerzity Pardubice se ustálila pravidla, vedoucí k úspěšné bakalářské zkoušce z matematiky. Sama bakalářská zkouška je ústní, probíhá před komisí, student se k ní může přihlásit až po získání dvou zápočtů, každého na základě aspoň 60 % úspěchu v zápočtové písemné práci. Každé zápočtové práci přitom předchází dva postupové testy. Student je tedy v akademickém roce před bakalářskou zkouškou šestkrát písemně testován. Termíny postupových i zápočtových testů jsou vyhlášeny na začátku semestru, stejně jako požadavky k jednotlivým tematickým celkům. Účast na přednáškách a cvičeních je pak velká, ačkoliv není kontrolována. Hojně navštěvovaný je rovněž volitelný matematický seminář. Pokračuje-li student po neúspěchu ve studiu, předmět si zapisuje znovu. Bakalářská zkouška z matematiky je první ze systému osmi bakalářských zkoušek. Systém uzavírá obhajoba bakalářské práce.

Testy jsou na FES také podkladem hodnocení znalostí uchazečů o vysokoškolské studium. Zatímco uchazeči o zápis ke studiu v 1. ročníku se dosud podrobovali testu z matematiky, v němž řešili úlohy, a tedy tvořili odpovědi, zájemci o druhý stupeň inženýrského studia v testu z matematických metod v ekonomii odpověď vybírali z nabídky. Tento způsob hodnocení se v poslední době v ČR rozšiřuje. Pro celé přijímací řízení je letos už podruhé použilo celé VUT Brno.

Přednostně pro závěr středoškolského studia se problematikou testů s výběrem odpovědi (multiple-choice) zabývá Scio-nadace na podporu

národních zkoušek. Proběhl třetí ročník dobrovolných Národních srovnávacích zkoušek (NSZ). Tyto zkoušky obsahovaly zprvu 60 úkolů na 180 minut. V Sondě MATURANT 1998 byl test zúžen na 30 úloh řešených po 90 minut, přičemž nabídka obsahovala vždy 5 odpovědí s jedinou správnou.

Uvedený typ testů s výběrem jediné správné odpovědi je u nás znám zejména jako zkušební test z pravidel silničního provozu [2]. V testu je obsaženo 27 otázek, ze 3 nabídnutých odpovědí je jediná správná, testu je vyhrazeno 20 minut.

Všimněme si matematického modelu testu, který obsahuje n úloh, na každou úlohu nabízí k odpovědí, z nichž jediná je správná. Předpokládejme nejprve, že řešitel nezná odpověď na žádnou z úloh. Při náhodné volbě odpovědi je pravděpodobnost, že byla zvolena odpověď

$$\text{správná} \quad p = \frac{1}{k}, \quad \text{nesprávná} \quad q = 1 - \frac{1}{k}.$$

Pokud řešitel hádá n odpovědí, ptejme se, kolik správných odpovědí uhodne.

Náhodná veličina X , která znamená počet x uhodnutých správných odpovědí, má binomické rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

se střední hodnotou $E(X) = np$, disperzí $D(X) = npq$.

Počet uhodnutých správných odpovědí se s pravděpodobností 0,99 pohybuje v intervalu

$$E(X) \pm 3\sqrt{D(X)}.$$

Experiment, který proběhl na FES se 154 posluchači na testu o 20 úlohách s nabídkou 3 symbolických odpovědí a, b, c, z nichž jediná byla předem označena za správnou, nedal důvod k zamítnutí hypotézy, že

$$p(x) = \binom{20}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{20-x}.$$

Pomocí binomického rozdělení pravděpodobnosti můžeme určit předem pravděpodobnosti pro počet uhodnutých správných odpovědí a z jejich znalosti stanovit požadavek na řešitelovu úspěšnost.

V uvedeném testu jsou střední hodnota počtu uhodnutých správných odpovědí $E(X)$ a disperze $D(X)$

$$E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{3} = 6,67, \quad D(X) = npq = 4,44.$$

Z 20 nabídnutých úloh se dá průměrně uhodnout 6,7. Počet uhodnutých správných odpovědí se dá očekávat v intervalu $6,67 \pm 3 \cdot 2,11$, tedy od 1 do 13.

Počet uhodnutelných správných odpovědí se dá snížit např. tak, že zvýšíme počet nabídnutých odpovědí nebo změňme úmluvu, že jediná z nabízených možností je správná. Tak v případě původního $n = 20$ při zvětšené nabídce $k = 5$ je $E(X) = 4$, $D(X) = 3,2$ a počet uhodnutých správných odpovědí se dá očekávat v intervalu $4 \pm 3\sqrt{3,2}$, tedy od 0 do 9. Oproti $k = 3$ se počet uhodnutelných odpovědí pro $k = 5$ snížil.

Pokud ponecháme $n = 20$, $k = 3$, připustíme však, že v nabídce tří odpovědí není počet správných omezen a připouští se i případ všech nesprávných, je

$$p = \frac{1}{8}, \quad E(X) = 2,5, \quad D(X) = 2,19$$

a počet uhodnutých správných odpovědí je v intervalu $2,5 \pm 4,5$, tedy od 0 do 7.

V Sondě MATURANT 98, kde bylo $n = 30$, $k = 5$, se dal očekávat počet uhodnutých správných odpovědí v intervalu $6 \pm 3 \cdot 2,19$, tj. od 0 do 13. Od úspěšného řešitele by se mělo proto požadovat více než 13 správných odpovědí.

Sestavit dobré testy s nabízenými odpověďmi je obtížné, oprava testů je však snadná a rychlá.

Ve výčtu trendů, které v roce 1991 zazněly na konferenci uspořádané Mezinárodní komisí pro vyučování matematice (ICMI) na téma Hodnocení ve vyučování matematice a jeho vlivy [1], se objevily i tyto celosvětové trendy

- od externího k internímu hodnocení,
- od otázek s výběrovou odpovědí k otázkám s tvorbou odpovědi a k otázkám s otevřeným koncem.

Ve Španělsku tak konference vybídla i k tomu, co obsahuje naše převážující školní zkušenost: interní hodnocení (hodnocení vyučujícím uvnitř instituce) a tvořené odpovědi.

Ve 30. letech byla váha hodnocení na státních československých reálných gymnáziích taková, že vysvědčení dospělosti, podepsané ředitelem, třídním a externím předsedou, obsahovalo i následující dovětek: „... byl uznán dospělým (s vyznamenáním), aby mohl být zapsán jako řádný posluchač na univerzitách a na vysokých školách technického směru.“

Podaří se nám vymezovat jednotlivým způsobům hodnocení přiměřené místo v procesu vzdělávání? Nepodceníme zejména negativní vlivy na studenty a na učitele?

Literatura

- [1] Burjan, V.: *Evaluácia a hodnotenie vo vyučovaní matematiky, súčasné svetové trendy*, PMFA, č. 3, č. 4, ročník 37, 1992.
- [2] Ryska, V. — Hajer, J.: *Pravidla silničního provozu a zkušební testy*, Naše vojsko, 1977.

SEKCE

PRÁCE S TALENTY
A
MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

O JEDNOM ZAHRANIČNÍM ZDROJI ZAJÍMAVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

Petr Emanovský

Jedním z prostředků vyhledávání a rozvíjení matematických talentů jsou nejrůznější matematické soutěže, v nichž žáci a studenti různých věkových kategorií prokazují nejen své matematické znalosti, ale především svůj důvtip a schopnost řešit i nestandardní matematické úlohy. Největší tradici u nás má bezesporu Matematická olympiáda, která letos proběhla na našich školách již po sedmačtyřicáté. Kromě této soutěže, která je zaměřena na ty opravdu nejtalentovanější žáky, existují i „méně náročné“ a masovější soutěže, jako je např. Pythagoriáda, různé matematické korespondenční semináře, nebo stále populárnější Matematický klokan.

Při přípravě soutěžních úloh, případně „tréninkových“ úloh řešených v rámci různých soustředění a letních škol řešitelů, stojí opakovaně organizátoři těchto akcí před problémem, kde stále brát dostatek originálních úloh. Kromě vlastní invence se mohou samozřejmě autoři úloh nechat inspirovat jinými prameny, např. úlohami ze starších ročníků jiných soutěží, knížkami zabývajícími se tzv. rekreační matematikou nebo úlohami objevujícími se v různých matematických i jiných časopisech. V tomto případě pochopitelně záleží na tvůrčím přístupu autora, který by neměl cizí úlohy pouze přejímat, ale měl by se je snažit maximálně upravit s ohledem na konkrétní účel, k němuž má být úloha použita. Ještě cennější je samozřejmě vznik nové, i když podobné úlohy.

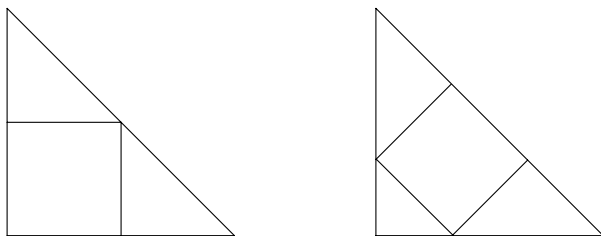
Na jeden takový zdroj inspirace jsem narazil při listování americkým časopisem *Mathematics Teacher* (ISSN 0025-5769, www.nctm.org), který pravidelně každý měsíc otiskuje soubor zajímavých řešených úloh pod názvem „Kalendář“. Název této rubriky zřejmě souvisí s faktem, že počet úloh je vždy roven počtu dní příslušného měsíce, tedy na každý den v měsíci je čtenářům nabízena jedna úloha k řešení. Příspěvky, z nichž jsou úlohy vybírány, může posílat prakticky každý, mimo jiné i na e-mailovou adresu infocentral@nctm.org.

Protože mne úlohy uvedené v tomto časopise zaujaly svým vtípem a svou použitelností v některých výše uvedených matematických soutěžích, dovolím si vás s několika z nich seznámit.

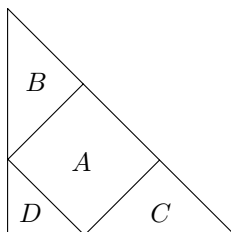
Úloha 1. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru dvou přirozených, ne nutně různých čísel od 1 do 50, bude jejich součtem prvočíslo menší než 50?

Řešení: Existuje celkem 15 prvočísel od 1 do 50: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 a 47. Zřejmě existuje právě $n - 1$ uspořádaných dvojic přirozených čísel, jejich součet je roven n (např. $5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$). Počet možností, jimiž lze těmito součty dostat uvedených patnáct prvočísel je tedy $1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 + 18 + 22 + 28 + 30 + 36 + 40 + 46 = 313$. Počet všech uspořádaných dvojic, které lze vybrat, je $50 \cdot 50 = 2500$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{313}{2500}$, což je přibližně $0,125 = \frac{1}{8}$.

Úloha 2. Na následujícím obrázku jsou znázorněny dva shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. Obsah čtverce vepsaného v levém trojúhelníku je 441 cm^2 . Jaký je obsah čtverce vepsaného do pravého trojúhelníka?



Řešení:



Zřejmě obsah čtverce vlevo je $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníka, do něhož je vepsán. Je tedy obsah velkého trojúhelníka vpravo 882 cm^2 . Pro obsahy částí A, B, C, D (viz obrázek) tohoto trojúhelníka platí $B = C = \frac{1}{2}A$, $D = \frac{1}{4}A$. Tedy $\frac{9}{4}A = 882 \text{ cm}^2$. Odtud $A = 392 \text{ cm}^2$.

Jiné řešení: Je-li obsah čtverce vlevo 441 cm^2 , má jeho strana délku 21 cm. Délka odvěsny velkého pravoúhlého trojúhelníka je tedy 42 cm a délka jeho přepony je $\sqrt{42^2 + 42^2} \text{ cm} = \sqrt{3528} \text{ cm}$. Strana čtverce vpravo má tedy délku $\frac{\sqrt{3528}}{3} \text{ cm}$ a tento čtverec má obsah 392 cm^2 .

Úloha 3. Rozhodněte, zda každý rok připadne na některý den třináctého pátek.

Řešení: a) Předpokládejme, že se jedná o nepřestupný rok. Třinácté dny v měsíci připadnou na následující dny v tomto roce: 13, 44, 72, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317 a 347. Protože $133 \equiv 0 \pmod{7}$, $225 \equiv 1 \pmod{7}$, $317 \equiv 2 \pmod{7}$, $164 \equiv 3 \pmod{7}$, $347 \equiv 4 \pmod{7}$, $103 \equiv 5 \pmod{7}$ a $286 \equiv 6 \pmod{7}$, vidíme, že třináctý den v měsíci připadne během roku alespoň jednou na všech sedm dnů v týdnu, tedy i na pátek.

b) Analogicky řešíme úlohu pro přestupný rok. V tomto případě si stačí uvědomit, že čísla 133, 225, 317, 164, 347, 103 a 286 odpovídají dnům po 28. únoru, musíme je tedy zvětšit o jedničku. Dostaneme $134 \equiv 1 \pmod{7}$, $226 \equiv 2 \pmod{7}$, $318 \equiv 3 \pmod{7}$, $165 \equiv 4 \pmod{7}$, $348 \equiv 5 \pmod{7}$, $104 \equiv 6 \pmod{7}$, $287 \equiv 0 \pmod{7}$. Opět je zřejmé, že třináctý den v měsíci připadne i v přestupném roce na všechny dny v týdnu.

Odpověď na otázku úlohy je tedy kladná.

Úloha 4. Čokoládové bonbóny jsou baleny pouze po 6, 9 a 20 kusech. Je tedy např. možné koupit přesně 15 těchto bonbónů, ale není možné jich koupit přesně 14. Určete všechny další „nemožné“ počty zakoupených bonbónů.

Řešení: Za uvedených podmínek lze zřejmě zakoupit pouze takový počet n bonbónů, který se dá zapsat ve tvaru $n = 6x + 9y + 20z$, kde x, y, z jsou celá nezáporná čísla označující počet balení po šesti, po devíti a po dvaceti bonbónech. Snadno zjistíme, že pro žádnou uspořádanou trojici (x, y, z) nezáporných celých čísel nelze dostat n rovno 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37 a 43. Naopak pro $(x, y, z) = (4, 0, 1), (0, 5, 0), (1, 0, 2), (0, 3, 1), (8, 0, 0)$ a $(0, 1, 2)$ dostáváme postupně $n = 44, 45, 46, 47, 48$ a 49. Odtud plyne, že všechny hodnoty n

větší než 49 jsou již možné. Tyto hodnoty lze vždy snadno obdržet pouhým přičítáním vhodných násobků šesti k některé z těchto šesti po sobě jdoucích čísel. Např. $200 = 44 + 26 \cdot 6$ apod. Kromě uvedeného čísla 14 tedy existuje dalších 21 počtů bonbónů, které nelze zakoupit.

U uvedených čtyř úloh se okamžitě nabízí celá řada modifikací a doplňujících otázek. Například úlohu 1 lze obměnit tak, že budeme uvažovat výběr nikoliv dvou, ale tří čísel, v úloze 2 můžeme místo obsahu vepsaného čtverce zadat obsah jednoho z menších pravoúhlých trojúhelníků apod. Úloha 3 pak přímo vybízí k řešení problému, na který měsíc konkrétního roku připadne onen nešťastný pátek, či zda mohou v určitém roce být takové pátky dva. Zajímavé by jistě byly i různé obměny úlohy 4.

Naznačené možnosti jsou samozřejmě jen nepatrným zlomkem nepřehledného množství zajímavých úloh, které je schopen vytvořit matematik vybavený dostatkem fantazie a vhodným inspiračním zdrojem, kterým výše popsaný matematický „Kalendář“ bezesporu je.

PRÁCE S ANTITALENTY ANEB POPULARIZACE MATEMATIKY

Jana Pradlová

Může se asi někomu zdát trochu zvláštní zařazení příspěvku Práce s antitalenty do sekce Práce s talenty. Ráda bych pohovořila o takových žácích a studentech, kteří se nejeví jako talenti v pravém smyslu slova. Nepatří totiž mezi úspěšné řešitele olympiád ani korespondenčních soutěží, přesto si rádi něco zajímavého o matematice a její historii přečtou, jejich oblíbenými jsou matematické kvízy v přílohách novin a časopisů, apod. Oni si — stručně řečeno — s matematikou rádi hrají.

A pak je tu ještě druhá skupinka neta-lentovaných žáků a studentů, kteří ani nevědí, že by mohli mít matematiku rádi. Nevědí nic o tom, že matematika je prospěšná i krásná zároveň. Proto před matematiky-vědci, matematiky-učiteli i matematiky-amatéry stojí úkol: ukázat cestu k matematice (a vědě obecně) těm, kteří ji teprve hledají. Je zřejmé, že toto stručné konstatování má svoji dlouhou historii¹, co však patří mezi novinky, tím je počátek systematického vytváření popularizace matematiky v několika posledních letech.



Kresba: Michal Cajthaml

Podnět k takové diskusi dala komise ICMI (International Commission on Mathematics Instruction) jako jedna z větví IMU (International Mathematical Union). V roce 1989 zorganizovala ICMI na anglické univerzitě v Leeds mezinárodní studijní seminář zaměřený na principy a metody popularizace matematiky. Výsledkem byl dokument ([1]) popisující jednotlivé specifické programy jako jsou např. hry, výstavy, přednášky, práce s tiskem, rozhlasem a televizí. Na tuto diskusi pak roku 1992

¹Za jednoho z prvních popularizátorů matematiky je možno považovat Davida Hilberta, který od r. 1921 připravoval populární přednášky pro studenty vracející se po válce zpět na univerzity.

navázal sedmý Mezinárodní kongres matematického vzdělávání (ICME) v Quebecu, kde bylo nastoleno několik základních otázek:

- jaký je vztah mezi popularizací matematiky a školskou matematikou,
- jaký je vztah mezi popularizací matematiky a popularizací vědy,
- jaká je úloha matematiků–vědců a matematiků–učitelů na projektech popularizace,
- jakým způsobem určit význam takových projektů.

Poprvé oficiálně se téma popularizace matematiky objevuje také na Mezinárodním kongresu matematiků (ICM) v roce 1994 v Zürichu jako součást sekce „Teaching and popularization of mathematics“. Důraz byl kladen na různé popularizační programy v jednotlivých zemích světa a bylo konstatováno, že je třeba tato národní specifika zachovat a dále podporovat. Nejde tedy o vytvoření jednotného mezinárodního systému, ale o harmonizaci historicky vzniklých a národně specifických popularizačních programů.

Domnívám se, že i u nás by bylo vhodné častěji diskutovat otázky týkající se seriózní popularizace matematiky, zamýšlet se nad našimi reálnými možnostmi jak prezentovat před školní mládeží (obecně před celou veřejností) význam a krásu matematiky. Za zmínku jistě stojí, že na posledním „Setkání matematiků všech typů a stupňů škol“ konaném v roce 1995 byl pouze jeden příspěvek věnován tomuto tématu ([2]). A právě naše setkání učitelů se jeví vhodné k širší diskusi nad u nás používanými metodami popularizace matematiky, které mají již svoji tradici, i nad těmi, které třeba teprve složitě vznikají. Je to totiž téma patřící zcela jistě na naše školy. Důkazem nám mohou být loňské výsledky studie TIMSS (The Third International Mathematics and Science Study), kde bylo mj. provedeno porovnání obliby matematiky mezi žáky 8. tříd základních škol ([5]). Jak je známo, u nás uvedlo ze všech zúčastněných zemí nejvyšší procento žáků (celkem 50 % testovaných), že mají matematiku neradi nebo velmi neradi. Velmi rádo ji má jen 8 % žáků! A přitom v celkovém vyhodnocení znalostí se naši žáci umístili na 6. místě, statisticky významně lepších výsledků dosáhli jen žáci Singapur, Koreje a Japonska. Máme tudíž na základních školách žáky, kteří

matematiku umí, dokonce ji umí velmi dobře, ale nemají ji rádi? Nevím, ale často se setkávám dokonce s nadanými studenty přicházejícími studovat na vysokou školu Matematicko-fyzikální inženýrství, pro které však není matematika krásná. Vidí ji jako překážku vhodnou ke zdolání, jako soutěž v kvantitě vypočítaných příkladů. Prožitek a radost chybějí.

Ráda bych tímto příspěvkem vyvolala diskusi o možnostech zvyšování zájmu o matematiku, konkrétně o využití popularizace matematiky při řešení zmiňovaného problému, diskusi o úloze jednotlivých typů škol na takové propagaci. Vybrala jsem tudíž na ukázkou několik konkrétních projektů fungujících v zahraničí. (V rámci ústní přednášky jsou jednotlivé programy podrobně popsány a doplněny příslušnými ilustracemi.)

- soutěže (California Math Show)
- hry (Multicultural Math Fair)
- výstavy (Mathematics and Knots)
- tisk (noviny, časopisy)
- rozhlas a televize (Fun and Games, Square One TV)
- různé další projekty (Rotary Club, The Math Forum)

Ale i u nás existuje jistě množství obdobných programů, je však třeba lépe se o nich navzájem informovat a především při jejich realizaci vzájemně spolupracovat minimálně na regionální úrovni. Takovou možnost nabízíme učitelům a žákům od základních až po vysoké školy v projektu „Mladý Sisufos“ organizovaný Západočeskou univerzitou v Plzni. (V rámci ústní přednášky je program podrobně popsán a doplněn příslušnými ilustracemi.)

Závěrem příspěvku si dovolím krátkou poznámku: přes různé problémy s popularizací vědy v našem státě jsou položeny její dobré základy v dílech některých našich významných popularizátorů. Zmínit bych chtěla jméno jednoho — Jiřího Grygara. Ten se stal v roce 1996 laureátem mezinárodní Ceny Kalinga za popularizaci vědy. Tuto cenu uděluje od roku 1952 generální ředitel UNESCO na návrh mezinárodní poroty. Je třeba zmínit, že mezi předešlé nositele patří např. George Gamow, David Attenborough, Arthur C. Clarke, Konrad Lorenz. Udělení ceny českému vědci je jistě výjimečnou událostí, srdečně blahopřejeme.

Literatura

- [1] Brown, R. — Porter T.: *Making a Mathematical Exhibition*, in The Popularization of Mathematics, edited A.G. Howson, J.P. Kahane, ICMI Study Series, Cambridge University Press, 1990.
- [2] Hozová L.: *Matematika vesele i vážně*, in 5. Setkání matematiků všech typů a stupňů škol, JČMF, Mariánské Lázně, 1995.
- [3] Pradlová J.: *Grupy geometrických transformací, užití ornamentálních vzorů ve výuce matematiky*, Kandidátská disertační práce, Praha, 1997.
- [4] Schneider J.: *Issues for the Popularization of Mathematics*, in International Congress of Mathematicians, Zürich, 1994.
- [5] Straková, J. — Tomášek, V.: *Výsledky žáků 8. ročníku v mezinárodním výzkumu matematického a přírodovědného vzdělávání*, Matematika-fyzika-informatika, č. 6, s. 289–294, 1996–97.

SEKCE

PŘÍPRAVA UČITELŮ
A
JEJICH DALŠÍ VZDĚLÁVÁNÍ

O PROSPĚŠNOSTI A SMYSLU MATEMATICKÉHO VZDĚLÁVÁNÍ

Emil Calda

V encyklopedickém slovníku jsem si přečetl, že vzdělání je to, co získáme osvojením systemizovaných poznatků a vědomostí a s nimi spojených intelektuálních i praktických dovedností a návyků. Co je to vzdělání matematické, jsem v tomto slovníku nenalezl, ale domnívám se, že to je to, co získáme osvojením systematizovaných poznatků a vědomostí matematických. Nedočetl jsem se tam také, co máme z toho, když tyto poznatky získáme, ale celkem dobře to znám z vlastní životní zkušenosti a čtenáři jistě také. Zabývejme se však raději duchovními a nikoli materiálními aspekty této záležitosti. Co tedy máme z toho, že jsme ve škole byli vzděláváni v matematice?

Jsme-li učitelé matematiky, je to jasné: k tomu, abychom byli úspěšnými pedagogy, jsou matematické vědomosti, poznatky a dovednosti nezbytné. Jsme-li matematiky, nebo pracovníky v oblasti, kde je znalost matematiky nutná, je to také jasné: nemůžeme dost dobře pracovat v oboru vyžadujícím matematické znalosti, aniž bychom je měli. A nepatříme-li ani do jednoho z těchto okruhů? Netroufám si odhadnout, kolik obyvatel České republiky starších patnácti let do žádného z těchto okruhů nepatří, domnívám se však, že to je určitě více než 50 %. A protože v ostatních zemích to bude nejspíše podobné, vzniká otázka, proč se nadpoloviční většina mládeže celého světa, což jsou jistě stovky milionů žáků a studentů, učí ve škole matematiku, když ji vůbec nebudou potřebovat!?

Zamyslím-li se nad tím, kdy jsem v běžném životě potřeboval matematiku, musím konstatovat, že takové případy sice jsou, ale že ve všech jsem vystačil s algebraickými i geometrickými znalostmi zcela elementárními. Při nákupu potřebuji umět sčítat a násobit, při vyplňování daňového přiznání jsem potřeboval procenta a když jsme doma zazdívali okno, potřeboval jsem vypočítat, kolik tvárnic bude zapotřebí koupit. Při stavbě garáže jsme nevytyčovali pravý úhel pomocí pythagorejského

trojúhelníku o délkách stran 3, 4, 5, a vzdálenost dvou bodů jsme obvykle určili přímým změřením a nikoli výpočtem pomocí sinové nebo kosinové věty. V běžném životě jsem nikdy neintegroval racionální funkci, nikdy jsem nepotřeboval Thaletovu ani binomickou větu a nikdy mi nepřišlo na mysl, že bych se měl zajímat o to, za jak dlouho se nádrž naplní dvěma rourami současně, když jednou z nich se naplní za dvě hodiny a druhou za pětasedmdesát minut. Znamená to snad, že vyučování matematice by se mělo omezit jen na základní poznatky, na to, co bude většina mladých lidí v běžném životě potřebovat?

Pomíňme otázku, jakým způsobem bychom tuto většinu stanovili, jaké poznatky bychom měli považovat za základní a jak určíme, které vědomosti budou nynější žáci a studenti během příštích několika desítek let potřebovat. Zůstala by takto okleštěná matematika ještě vůbec matematikou? A co kdybychom k této restrikci přistoupili i u ostatních vyučovacích předmětů? Vždyť přece z biologie mi také nikdy k ničemu nebylo, že zmije rodí živá mláďata, a poznatek, že vesmír vznikl před patnácti až dvaceti miliardami let Velkým třeskem, mi při rozhodování, kterou stranu mám v předčasných parlamentních volbách volit, také nijak nepomohl. Je snad dostatečně jasné, že tímto přizpůsobením se požadavkům holé užitečnosti a bezprostředního prospěchu bychom dosáhli podstatného snížení úrovně vzdělanosti, z čehož by mohl profitovat pouze známý televizní pořad „Nikdo není dokonalý“. Snížení úrovně vzdělanosti by však mohlo mít i horší následky: vzpomeňme fanatických nevzdělců, kteří počátkem 5. století zcela zničili knihovnu v Alexandrii a odstartovali tak tisíc let trvající dobu stagnace vědeckého bádání a poznávání světa. A co neméně fanatické davy, které v době poměrně nedávné pálily knihy na náměstích německých měst?

K čemu je tedy vyučování matematice, když velkou část vědomostí, které se ve škole žáci a studenti dozvídají, nemohou v praktickém životě vůbec použít a když jsme přitom přesvědčení, že o těchto poznatcích by se měli něco dozvědět, takže je nelze vypustit? Pokusme se na tuto otázku odpovědět.

1. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť základním cílem výchovy mladých lidí je rozvíjet a pěstovat schopnosti samostatného a kritického myšlení. Kde jinde než v matematice se dá v tak velké míře „brousit“ dětský rozum, kde jinde než ve vyučování matematice se dá tak dobře rozvíjet myšlení, kterým se

příslušníci lidského rodu odlišují od ostatních příslušníků živočišné říše? Nebude snad člověk, kterému to myslí, snadněji odolávat lákadlům a svodům moderní civilizace? Nebude snad člověk, který umí uvažovat, lépe čelit působení pochybných vzorů a scestných idejí?

2. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť matematika je součástí lidské kultury. Tak jako nelze být vzdělaným člověkem a nevidět nebo nečíst žádnou Shakespearovu hru, nezaslouchat se někdy do Beethovenovy symfonie a nezajít občas do obrazové galerie, nelze ani být vzdělaným člověkem a nevědět nic o tom, čím matematika přispěla k rozvoji lidské vzdělanosti a kultury. Vždyť např. vznik neeuklidovské geometrie vyvrátil a uvedl na pravou míru filozofické názory odvozené na základě subjektivních spekulací, které byly svého času mezi tzv. humanitními vzdělanci velice rozšířené. Je vůbec zajímavé si všimnout, jak nové vědecké poznatky — které by bez matematiky nebyly nikdy objeveny — se odrážejí v umění a jak je ovlivňují.
3. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť přirozenou lidskou vlastností je zvědavost. V jakém jiném školním předmětu může být zvědavost, která stojí na počátku každé tvůrčí činnosti a každého objevu, podporována a rozvíjena lépe a více než v matematice? Matematické činnosti, které v hodinách matematiky podněcují zvědavost žáků a studentů, nenásilně formují osobnost mladého člověka a vedou ho k aktivním životním postojům.
4. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť při něm nejde jen o předávání hotových výsledků a odpovědí, ale i o to, že žáci a studenti se učí sami klást si otázky. Člověk, který si umí položit otázku, který ji umí správně formulovat, se bude umět v problematické situaci orientovat mnohem lépe než člověk, kterému je od samého počátku všechno jasné a vůbec ho nenapadne, že existují okamžiky, kdy by si měl nějakou otázku položit.
5. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť nastavuje mladým lidem kritické zrcadlo. Na jedné straně je učí důvěře ve vlastní síly a schopnosti, na straně druhé jim ukazuje, že nejsou neomezené. Poznání svých možností a jejich hranic je nutnou podmínkou životního úspěchu.

6. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť k němu nevede královská cesta. Mladí lidé tak rozvíjejí i své vlastnosti morální a volní, učí se překonávat překážky, být vytrvalí a skromní.
7. Matematické vzdělávání je smysluplné a prospěšné, neboť matematické poznatky jsou pravdivé, hluboké a trvalé. Tento fakt nemůže nezanechat odraz na těch, kteří přicházejí s matematikou do styku. Většina z nich netrpí přemírou agresivity, velikášstvím ani egoismem, většina z nich se na situace, ve kterých o nic nejde, umí dívat s nadhledem.

Tento výčet důvodů, proč má matematické vzdělávání smysl a proč je prospěšné, není zcela jistě úplný. Domnívám se však, že je postačující.

Na závěr už jen krátké konstatování. Jeden z dětských hrdinů Poláčkovy knihy „Bylo nás pět“ formuluje svůj vztah ke vzdělávání takto: „Chodím do školy, že aby ze mně nebyl blbec.“ Tento pozoruhodný výrok se v souvislosti s předchozím dá doplnit: „A matematiku se tam učím, abych byl člověkem!“

VÝUKA STATISTIKY NA EKONOMICKÉ FAKULTĚ ZČU S VYUŽITÍM VÝPOČETNÍ TECHNIKY

Václav Friedrich

Autor tohoto příspěvku působí jako učitel statistiky na ekonomické fakultě Západočeské univerzity. Jako absolvent elektrotechnické fakulty ČVUT, obor elektronické počítače, i jako bývalý středoškolský učitel přinesl do své vysokoškolské pedagogické praxe poznatky a metody, o které by se chtěl se svými kolegy touto formou podělit. Úzká příbuznost statistiky a matematiky a obecnost některých presentovaných závěrů může učinit tyto poznatky zajímavými i pro učitele matematiky.

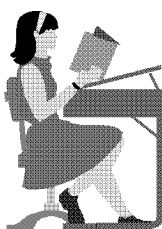
První poznatky

Kvantitativní a numerické metody získávají v poslední době v ekonomii stále větší význam. Právě rozvoj osobní výpočetní techniky v 80. a především 90. letech, který umožňuje zpracovat rozsáhlá data přímo na pracovišti (nebo doma) a nevyžaduje spolupráci se specializovaným výpočetním střediskem, znamenal nástup matematických metod — a tedy i statistiky, operačního výzkumu a ekonometrie — do každodenní ekonomické praxe. Rozvoj a komercializace Internetu znamená dostupnost dat, které by dříve člověk musel získávat pracně z bulletinů a statistických ročenek — s minimálním časovým zpožděním a bez ohledu na vzdálenost od zdroje dat. Stálá diskuse o tom, zda ekonomie je vědou spíše společenskou (nebo chcete-li humanitní) nebo exaktní, se tedy v poslední době posouvá ve prospěch exaktnosti. Solidní ekonomická úvaha se v současnosti neobejde bez doprovodných dat a jejich interpretace.

Studenti, kteří vstupují na naši fakultu, přicházejí často s mylnou představou, že se ve své ekonomické praxi (i během studia) s matematikou setkají pouze minimálně. Obvykle je zaskočí nebývalý rozsah „matematicky orientovaných“ předmětů a považují je za jakési nutné zlo, které je potřeba překonat, aby se konečně mohli věnovat té „své“ ekonomii a v duchu staré ekonomické školy rozvíjet především slovní argumentaci. Této filosofii odpovídá i struktura a obsah závěrečných prací, ve kterých

se pouze minimálně vyskytují matematické metody — výjimku tvoří snad pouze grafy, které v některých pracích dokumentují presentované číselné údaje.

Průzkum, který jsem anonymně provedl na cca 150 studentech 2. ročníku ekonomické fakulty v loňském roce (tedy po ukončení jednoročního kursu statistiky), mne přesvědčil o potřebě vytvoření názorového posunu u studentů — od odmítavého postoje ke statistice k jejímu akceptování (viz obr. 1). Přestože při výuce využívám pouze standardní středoškolskou matematiku, většina studentů považuje statistiku za náročný předmět z důvodů údajné obtížnosti použité matematiky. Ukazuje se, že studenti často neumí přecíst složitější vzorec, zejména obsahuje-li výraz pro sumu, velkým problémem je logické myšlení. Zejména v induktivní statistice se objevuje několik metod, pro jejichž nasazení se musíme rozhodovat na základě logického úsudku. V tomto případě studenti často berou první vzorec, do kterého se jim podaří dosadit, aniž by logicky zvážili jeho oprávněnost. Na cvičeních ze statistiky jsem zaznamenal i další „zlozvyk“ ze střední školy — pokud počítáme dva příklady vedoucí ke stejnému postupu při řešení, někteří studenti automaticky aplikují tento postup i na následující příklad, i když s předchozí problematikou vůbec nesouvisí.



nemám ráda matematiku
statistika je nutné zlo
statistiku v praxi nevyužiji



pochopila jsem, že statistika je užitečná
bez statistiky bych se neobešla
na té matematice přeje jenom něco je

Obr. 1: Potřebný posun myšlení typické studentky ekonomické fakulty

Častý a již zmiňovaný názor studentů je, že statistika je sice zajímavá, ale v praxi ji stejně nevyužijí (obráz. 2). Někteří studenti dokonce považují hodiny statistiky za promarněný čas a navrhují ji nahradit ji-

ným „potřebnějším“ předmětem — v této souvislosti se většinou vyskytuje návrh na rozšíření výuky cizích jazyků. Moje tvrzení, že bez znalosti kvantitativních nástrojů se v budoucnu se zahraničním partnerem stejně nedomluví, obvykle neberou vážně. V tomto směru jsou podporováni realitou kolem nás, kde se kvantitativní a ekonometrické nástroje skutečně využívají minimálně, stávající ekonomové, manažeři a marketéři je sami nevyužívají (a na stará kolena se už nic nového učit nebudou), firmy nabízející statistickou analýzu jsou drahé a v očích mnohých vedoucích pracovníků a šéfů firem jde o zbytečný luxus.

určitě využiji	možná využiji	nevím	asi nevyužiji	určitě nevyužiji
12 %	21 %	20 %	32 %	15 %

Obr. 2: Názor studentů na využití statistiky v budoucí praxi

Kroky k řešení

Je samozřejmě ilusiorní myslet si, že pouhou změnou přístupu ke studentům nebo pracovních metod lze zcela změnit myšlení studentů a jejich vztah ke statistice a „matematickým“ předmětům. Některé zakořeněné zlozvyky — např. vypěstovanou obavu z matematiky a čehokoliv, co ji jenom vzdáleně připomíná — lze odstranit stěží. Přesto jsem se pokusil vytipovat několik postupů a metod, které by mohly existenci statistiky a kvantitativních metod v očích studentů ekonomie obhájit. Jde především o tyto kroky:

1. využívat při výuce výpočetní techniku
2. používat příklady z ekonomické praxe (reálné hodnoty)
3. posílit samostatnou práci studentů

Výpočetní technika

Dříve se statistika učila pouze s logaritmickým pravítkem a statistickými tabulkami. Dnes logaritmické pravítko nahradila kalkulačka, ale ostatní přetrvává. Mnozí studenti dokonce ani netuší, že jejich kalkulačky obsahují nástroje pro statistickou analýzu (nebo je neumějí ovládat). Takové ruční zpracování dat je pochopitelně nezáživné, náchylné na numerické chyby a především neumožňuje v krátkém čase věnovaném výuce

zpracovat větší množství dat. Používat robustní nástroje statistické analýzy na soubory o deseti prvcích je zbytečné, vlastnosti takového souboru jsou obvykle viditelné na první pohled. Získat smysluplné ukazatele ze souboru obsahujícího několik desítek nebo dokonce stovek hodnot může být i pro matematicky nezaloženého studenta příjemným zjištěním.

Proto jsem na ekonomické fakultě v Chebu zavedl cvičení ze statistiky na počítači. V prvním semestru je polovina cvičení na počítači, polovina v klasické učebně. V druhém semestru jsou na počítači všechna cvičení. Toto rozdělení v prvním semestru bylo původně kompromisem z časových i organizačních důvodů, nakonec se ukázalo jako výhodné. Zejména v úvodních pasážích výuky jsou témata, která se mohou procvičovat bez počítačů, navíc si mohou studenti porovnat pracnost „ručních“ a „automatizovaných“ metod zpracování dat v praxi. Toto rozdělení vychází také vstříc výtkám (a musím přiznat, že někdy oprávněným) některých kolegů, kteří vidí v používání počítačů nebezpečí, že student se naučí ovládat program, aniž by tušil, co tento program dělá. (Jde o známý problém, kdy dovolit dětem používat kalkulačku, aby nezapomněly počítat 2×3 , a kdy umožnit studentům psát slohy v textovém editoru, aby nezapomněli pravidla českého pravopisu.)

Na některých školách se k výuce statistiky využívá speciální statistický software — například na VŠE v Praze je to Statgraphics. Tyto programy nabízejí velký komfort statistických nástrojů a funkcí, nevýhodou je jejich vysoká cena, která je činí pro běžného uživatele nedostupným. Vycházím-li z toho, že naši absolventi se nebudou statistikou živit, budou mít na svých počítačích především standardní kancelářský software. Tím je v současnosti jednoznačně Microsoft Office s textovým editorem Word a tabulkovým kalkulátorem Excel. Program Excel je již několik let standardně vybavován knihovnou statistických (analytických) nástrojů, které svými funkcemi pokrývají značnou část výuky statistiky. Excel umožňuje jednoduše importovat data i z jiných programů a zdrojů, například z databází (dBase, FoxBase) nebo z Internetu.

Jako program pro zpracování dat jsem tedy vybral Excel (nezávisle na mně stejné rozhodnutí učinili i kolegové na pedagogické fakultě Plzni). Díky připojení školní počítačové sítě na Internet se však nabízí i další možnost, a to získávat data pro výpočty přímo z reálného světa prostřednictvím Internetu. Na Internetu prezentuje své datové základny Český statistický úřad a další státní i nestátní orgány (např. pražská bursa cenných papírů). Díky celosvětové dostupnosti není problém vyhledat

data téměř o každé zemi světa, velmi dobře zásobený je například server Organizace spojených národů.

Praktické příklady

Určitým handicapem většiny stávajících učebnic statistiky je fakt, že jejich autoři jsou matematici, nikoliv ekonomové. Proto i skripta a publikace vydávané Vysokou školou ekonomickou v Praze obsahují paradoxně minimum skutečných ekonomických problémů. Do našich zemí rovněž ještě nedorazilo globální a projektové vyučování, takže uváděné příklady jsou malé, vytržené z kontextu reálného světa, neřeší daný problém do hloubky. V tomto směru se lze inspirovat některými zahraničními učebnicemi (např. americkými), které uvádějí skutečné statistické rozborů konkrétních ekonomických situací (např. vývoj podniku, situace na burse apod.) a přímo na těchto reálných příkladech a datech ukazují jednotlivé statistické nástroje a jejich použití.

Díky využití výpočetní techniky můžeme zpracovávat rozsáhlé soubory dat, díky Internetu máme po ruce téměř nevyčerpatelný zdroj analyzovatelných informací. Studenti proto v letošním roce zpracovávali na některých cvičeních skutečná data, která si museli vyhledat, a poté konfrontovali své závěry s obecně známými tvrzeními našich novinářů, ekonomů a politiků.

Samostatná práce

Na našich školách neustále převažuje frontální styl výuky. Student se tak stává pasivním elementem vzdělávacího procesu a ztrácí se zpětná vazba mezi ním a vyučujícím. Opět zde narážíme na známý problém: kvalitu a úroveň výuky nemůžeme měřit tím, co odučíme, ale tím, co si skutečně studenti zapamatují (a jsou schopni využívat).

Koncem roku 1991 vystoupil RNDr. Oldřich Botlík, CSc., s názorem, že by se pro zkvalitnění výuky matematiky na středních školách měly stávající přehruštěné závazné osnovy redukovat na 50 %. V té době se ještě nepoužívaly termíny jako „standard“ nebo „kurikulum“, ale šlo v podstatě o definici závazného minima. Na tento názor ostře reagovali vrcholní představitelé JČMF v čele s prof. RNDr. Nožičkou, Dr.h.c., kteří v tomto kroku viděli ohrožení „tradičně vysoké české vzdělanosti“, takže naši studenti jsou dodnes přetěžováni látkou, které stejně nerozumějí, a místo rozvoje logického myšlení si vytvářejí negativní vztah k matematice. O naší vzdělanosti pak jasně vypovídají srovnávací testy s ostatními zeměmi EU — náš student sice ví, co je to „erythrocyt“ a kdy začala třicetiletá válka, ale nenajde spojení v jízdním řádu.

Snahou o prolomení pasivní role studentů je jejich aktivizace. Místo povinných cvičení, kam často chodila „těla bez duší“ a někteří studenti se vytráceli ihned po prezenci s odůvodněním, že jdou pouze na WC, jsem zavedl v loňském školním roce praktické semináře, kde studenti konsultují s učitelem problém, který řeší. Na začátku semestru studenti dostanou několik příkladů, z nichž ten závěrečný vyžaduje jejich komplexní přístup — od vyhledání dat v literatuře nebo na Internetu přes jejich zpracování až po interpretaci a vyhodnocení. Tyto příklady řeší v rámci cvičení nebo samostatně. Na cvičení mohou využít konzultace s vyučujícím. Každé cvičení začíná úvodním slovem učitele, kde je vždy rozebrána problematika jednoho příkladu nebo jedné metody, a poté studenti pracují samostatně.

Aby student dostal zápočet, vypracuje všechny zadané úkoly s využitím standardních kancelářských programů (Excel, Word) na počítači a řešení odešle elektronickou poštou.

Závěr

Nemyslím si, že uvedenými popsány kroky se revolučně změní vztah studentů k matematice, statistice a dalším exaktním disciplínám. Samostatná práce se skutečnými ekonomickými daty na počítači a konfrontace výsledků s realitou by však měla rehabilitovat smysluplnost kvantitativních metod v praxi.

Aby se dosáhlo skutečného posunu v myšlení studentů, je třeba začít mnohem dříve. Třeba už tím, že si učitelé matematiky a metodici na ministerstvu a VÚP položí otázku, co je vlastně smyslem výuky matematiky a jestli tento smysl současné osnovy a metody výuky naplňují. Možná se dočkáme rehabilitace matematiky v očích „humanistů“ a znovuzavedení nelogicky zrušené maturity z matematiky. Možná se dočkáme toho, že studenti budou mít matematiku rádi. A možná se dočkáme i toho, že si filosofie a matematika podají ruce tak jako v antickém Řecku.

MATEMATIKA VESELE I VÁŽNĚ

Libuše Hozová

V roce 1994 jsem připravila pro učitele matematiky ZŠ cyklus seminářů s názvem „Matematika vesele i vážně“. Cyklus byl původně rozložen do dvou let, vždy jedno odpoledne v měsíci (od října do května), tj. celkem 16 seminářů. Témata těchto seminářů jsem již publikovala.

Protože posluchači projevíli mimořádný zájem o pokračování cyklu přednášek a jejich účast na jednotlivých seminářích byla velká, rozhodla jsem e v matematických seminářích pokračovat.

Ve školním roce 1996–97 jsem uspořádala 3. ročník seminářů s tématy:

1. Z historie matematiky
2. Problémové úlohy
3. Matematické hry
4. Dejme hlavy dohromady
5. Logické úlohy
6. Teorie grafů
7. Úlohy starověké matematiky
8. Úlohy středověké matematiky

Ve školním roce 1997–98 jsem uspořádala 4. ročník seminářů s tématy:

1. Úlohy starověké Číny, islámské úlohy
2. Matematické paradoxy
3. O mnohoúhelnících

4. Prostorové vidění a optické klamy v matematice
5. Matematické zebry
6. Motivující algebra
7. Apolloniovy úlohy
8. Zvláštnosti ze světa přirozených čísel

Protože zájem učitelů matematiky trvá i nadále, otevřela jsem v letošním školním roce již 5. ročník seminářů s tématy:

1. Do nekonečna
2. Člověk měří vesmír
3. Topologie a geometrie
4. Archimedovy zázraky
5. Svět v zrcadle
6. O řadách
7. O kongruenci
8. Křivky

Cílem jednotlivých setkání s učiteli matematiky je:

- seznámení s danou problematikou,
- vzbuzení zájmu o dané téma,
- didaktická pomoc při odstraňování chyb žáků,
- motivace pro práci učitelů s matematickými talenty.

ÚLOHY Z MATEMATICKÉ SOUTĚŽE A MOŽNOSTI JEJICH VYUŽITÍ

Bohumil Novák

Úvod

Dovednost řešit úlohy se obvykle považuje za jeden z hlavních indikátorů úrovně zvládnutí matematického učiva i matematických schopností žáků. Úloha nebo vhodně koncipovaný soubor úloh může mít ovšem také značný motivační náboj: dokáže vyvolat zájem žáků, vytvářet příznivé pracovní klima, v němž lze plně využít jejich tvořivých potencií. Jedním z prostředků rozvíjení zájmu o matematiku je řešení soutěžních úloh.

V našem příspěvku chceme uvést některé poznatky, které jsme získali během čtyř ročníků soutěže Matematický klokan při přípravě, realizaci a vyhodnocení výsledků řešení soutěžních úloh. Pozornost budeme věnovat úlohám kategorie Klokánek pro žáky 4. a 5. ročníků. Dále se chceme zamyslet nad tím, jak může získaných zkušeností využít učitel matematiky, případně učitel 1. stupně ZŠ, který učí matematiku (například jako užitečných informací o matematických kvalitách žáka „na výstupu“ primárního vzdělávání, nebo „na vstupu“ 2. stupně ZŠ či víceletých gymnázií), a zda lze některé poznatky uplatnit i v pregraduální vysokoškolské přípravě budoucích učitelů.

Podmínky šetření a soubor analyzovaných úloh

Test pro kategorii Klokánek obsahoval v roce 1998 celkem 24 položek s výběrem odpovědi z 5 nabídnutých alternativ. Za každou správnou odpověď v úlohách č. 1–8 získal řešitel 3 body, v úlohách č. 9–16 4 body a v úlohách č. 17–24 po 5 bodech. Za neřešenou úlohu nezískal žádný bod, za nesprávné řešení 1 bod ztratil. Do soutěže vstupoval s 24 body, aby ani teoreticky nemohl dospět k zápornému celkovému výsledku. Způsob hodnocení a penalizace, který je stejný ve všech účastnických státech a ve všech kategoriích, se ovšem ukázal stěží pochopitelným pro několik hodnotitelů z řad učitelů, takže se například objevily i záporné výsledky

některých účastníků. Žáci měli na řešení 60 minut, tedy 2,5 minuty každou úlohu včetně zaznamenání výsledku do karty odpovědí.

V letošním roce, 20. 3. 1998, se zúčastnilo soutěže v kategorii Klokánek (Écolier) celkem 63 049 žáků 4. a 5. ročníků z celé republiky. Předmětem podrobnější analýzy jsme učinili výsledky asi 13 % z nich, 8 232 řešitelů ze škol okresů Olomouc, Frýdek–Místek, Benešov, Liberec a Chomutov. Dále jsme využili kompletní řešení (tj. karty odpovědí i listy s „pomocnými“ výpočty) celkem 253 žáků ze 14 tříd některých olomouckých škol, získaných za pomoci studentů učitelství 1. stupně ZŠ Pedagogické fakulty UP, kteří zde konali v letním semestru pedagogickou praxi. Tato řešení poskytla cenný materiál, umožňující vedle kvantitativní analýzy celkových výsledků pokusit se stanovit, jaké postupy a způsoby řešení žáci uplatnili a jakých chyb se nejčastěji dopouštěli.

Test byl pro podmínky České republiky modifikován tak, aby neobsahoval učivo, přesahující matematickou komponentu vzdělávacího programu Základní škola do 4. ročníku. Kromě obvyklých úloh učebnicového typu byly zařazeny typické soutěžní úlohy, jejichž některý aspekt — námět, způsob prezentace nebo matematický obsah — byl pro žáky nestandardní a vyžadoval tvořivý přístup k řešení.

Úspěšnost řešení jednotlivých úloh v analyzovaném souboru žáků se pohybovala v rozmezí 62,0 % — úloha s nejvyšší úspěšností řešení, bude v dalším textu označena (1), až 9,6 % — úloha s nejnižší úspěšností řešení, (2). Dále si povšimneme úlohy s nejvyšší četností nesprávných řešení (3), a úlohy nejčastěji neřešené (4):

Úloha 1 Myslím si číslo. Odečtu-li od něj 40 a k výsledku přičtu 2 000, dostanu číslo 3 250. Jaké číslo si myslím?

A) 2 040, B) 1 690, C) 1 290, D) 3 210, E) 1 250.

Úloha 2 Ze zápalek o délce 5 cm máš složit čtverec o straně 1 m. Čtverec se má skládat z malých čtverečků, jejichž strany tvoří jednotlivé zápalky. Každé dva sousední čtverečky mají mít společnou jednu zápalku. Kolik zápalek budeš potřebovat?

A) 400, B) 480, C) 640, D) 840, E) 960.

Úloha 3 Kruhový dort má být rozdělen na 7 částí. Jakým nejmenším počtem rovných řezů to lze provést?

(Jednotlivé dílky nemusí být stejně velké.)

A) 2, B) 3, C) 4, D) 6, E) 7.

Úloha 4 Kolik trojčiferných čísel má ciferný součet roven pěti? (Např. číslo 1 998 má ciferný součet $1 + 9 + 9 + 8 = 27$.)

A) 10, B) 15, C) 20, D) 25, E) 30.

Analýza a interpretace zjištěných výsledků

Ze zjištěných výsledků jsme učinili některé dílčí závěry, o jejichž zdůvodnění se nyní pokusíme.

Jako poměrně málo přesný se ukázal odhad obtížnosti celého testu i jednotlivých úloh. Svědčí o tom skutečnost, že

- v kategorii Klokánek bylo 23 řešitelů, kteří získali plný počet bodů, tj. 120. Uvedený počet značně převyšoval počty vítězů v ostatních kategoriích — i když je třeba uvážit, že pro žáky 4. a 5. ročníku nabývá právě motivační aspekt soutěže mimořádného významu,
- nepřesný byl také odhad rozdělení úloh na tři, čtyř a pětibodové. Procento správných řešení tříbodových úloh činilo 38,9, u čtyřbodových to bylo 23,3 % (také úloha nejméně úspěšně řešená byla právě z těchto úloh) a u pětibodových 27,2 %.

Nejúspěšněji řešená úloha (1) je v učebnicích poměrně často frekvencovaná v různých obměnách. Žáci využili vlastností početních výkonů a inverzního charakteru sčítání a odčítání. Nabídka odpovědi umožnila ověřit správnost výsledku „dosazováním“:

$$1\,290 - 40 = 1\,250, \quad 1\,250 + 2\,000 = 3\,250.$$

Nejobtížnější úlohou se ukázala být (2), kterou správně vyřešila celá desetina žáků (9,6 %). Nejčastěji uváděnou nesprávnou odpověď bylo 400 zápalek — zřejmě jako výsledek úvahy: $100\text{ cm} = 5\text{ cm} \times 20$ (zápalek na jedné straně čtverce), $20 \times 20 = 400$ zápalek ve 20 řadách. Přitom z 90,4 % neúspěšných řešitelů bylo celých 34,3 % těch, kteří na otázku úlohy, snad z nejistoty a obav z penalizace za nesprávné řešení, vůbec neodpověděli.

Zajímavé poznatky přinesl rozbor žákovských řešení úlohy (3), která měla nejvyšší četnost nesprávných řešení (75,1 %). Nejčastější nesprávnou odpovědí bylo určení 6 řezů k rozdělení kruhu na 7 částí. Snad byli řešitelé vedeni neodůvodněnou analogií s řešením obdobné úlohy: *Kolik řezů je třeba k rozřezání desky na 7 částí?*, protože z pomocného nákresu k situaci bylo zřejmé, že kruh obvykle „nedělili“ třemi různoběžkami, ale šesti rovnoběžkami. Ovšem i při „krájení po různoběžkách“ se na řadě náčrtků žáků, kteří při grafickém řešení experimentovali, ukázalo, že se spokojili se 4 řezy. Jednou z příčin chybných řešení mohla být i nepřesná interpretace zadání: *nejmenší počet rovných řezů, délky nemusí být stejné velké*.

Nejčastěji neřešena z celého testu byla úloha (4), kterou neřešilo 34,3 %. Zjistili jsme, že řadě žáků činil obtíže pojem „ciferný součet čísla“ a úspěšnost řešení nezvýšil ani ilustrační příklad v závorce jako součást zadání. Přitom jiná úloha blízkého matematického obsahu (*Kolik různých trojciferných čísel lze zapsat pomocí číslic 3, 0, 7, použijeme-li každou číslici právě jednou?*), dosáhla úspěšnosti 44,4 %. Pokusy žáků o systematické hledání všech trojic sčítanců, jejichž součtem je číslo 5, byly řídké — spíše se žáci pokoušeli správné řešení „uhádnout“.

Několik námětů pro učitele matematiky a studenty učitelství

Naše poznatky ukazují značný zájem učitelů o soutěž Matematický klokan. Po prvních informacích o charakteru a zaměření soutěže v časopise Komenský a organizačním propracování přípravy, realizace i kvantitativní analýzy výsledků je zřejmé, že také v kategorii Klokánek má soutěž příznivý ohlas. Akcent na motivační aspekt, umožnění soutěžit i žákům, kteří by jinak v soutěžích typu Matematická olympiáda či Pythagoriáda neuspěli nebo se jí ani nepokusili zúčastnit, považujeme za jeden z hlavních faktorů, vyvolávajících zájem žáků i učitelů.

Nejde přitom, podle našeho názoru, pouze o absolutní výsledky, například ve smyslu reprezentace třídy nebo školy. Úlohy v soutěži obvykle nejsou běžného učebnicového typu: začíná se dokonce objevovat mezi učiteli označení „klokanská“ úloha jako synonymum nestandardních úloh, vyžadujících od řešitele vtipné řešení, úsudek, vhled do problému či experiment. Pro řadu žáků je „Klokánek“ také prvním setkáním s úlohami, které mají povahu testových položek s výběrem z více alternativ — rovněž správné vyplnění karty odpovědí patří k celkovému hodnocení žáků.

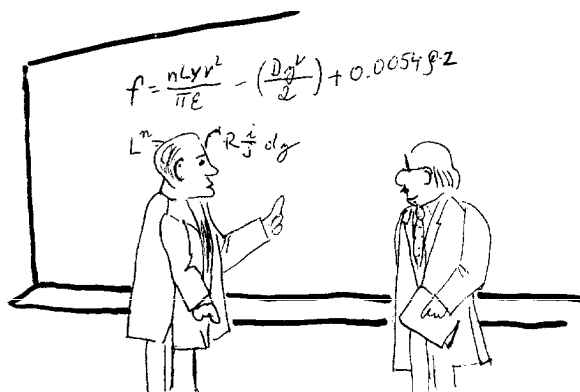
Všechny uvedené znaky úloh umožňují jejich širší bezprostřední využití ve vyučovacím procesu. Společná analýza řešení jednotlivých úloh po skončení soutěže nebo zařazení úloh ze starších ročníků do vyučování mohou vytvářet prostor pro diskusi, hledání i „obhajování“ žákovských řešení, používání i přijímání argumentů. Výsledky dosažené jednotlivými žáky — a ohlasy ze školské praxe to potvrzují — se mohou v některých případech lišit od jejich klasifikace v matematice. Tím mohou výsledky řešení soutěžních úloh přispět ke zpřesnění hodnocení žáků: pomoci učitelům diagnostikovat jejich dosud neodhalené schopnosti a možnosti a tak i korigovat dosavadní představy učitelů.

Řadu námětů k dalšímu rozpracování přinesly i zcela spontánní besedy a rozhovory se žáky i učiteli po skončení soutěže. Žákovské reflexe vlastního výkonu v odpovědích na otázky typu: kolik myslíš, že máš správně vyřešených úloh?, které úlohy byly nejlehčí a které nejtěžší?, čemu jsi v zadání nerozuměl?, poskytly mnoho dalších pedagogicky využitelných podnětů.

Učinili jsme rovněž pokus o využití soutěžních úloh ve vysokoškolské přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. V seminářích z didaktiky matematiky studenti úlohy řešili (ukázalo se, že často upřednostňují postupy dosažitelné svým žákům, aniž by využili například algebraický aparát), posuzovali a odhadovali obtížnost úloh před zadáním testu, identifikovali a interpretovali chybná řešení žáků a konfrontovali výsledky dosažené v soutěži se svými poznatky o jednotlivých žácích, jak je získali v průběhu pedagogické praxe. Získané zkušenosti budou moci být uplatněny také v přípravě příštích ročníků soutěže.

Literatura

- [1] Novák, B. — Molnár, J.: *Mezinárodní soutěž Matematický klokan*, Komenský, č. 5, č. 6, ročník 120, 1996–97.
- [2] Novák, B.: *Zkušenosti z mezinárodní soutěže Matematický klokan*, Komenský, č. 5, č. 6, ročník 121, 1997–98.



BUĎ TO PLATÍ VŽDY NEBO NĚKDY NEBO NIKDY.

NÁZORY MEXICKÝCH UČITELŮ A STUDENTŮ NA UŽITEČNOST ŠKOLSKÉ MATEMATIKY V PRAXI

Václav Sýkora

Využil jsem svého pedagogického působení v Mexiku a předložil skupině učitelů a studentů malou anketu s následujícími otázkami:

1. V čem spočívá užitečnost matematiky pro běžný život každého občana?
2. Která témata školské matematiky jsou výrazně potřebná pro běžný život každého občana (nemáme přitom na mysli matematiku, fyziku, inženýry nebo učitele, kteří užívají matematiku při své profesní práci)?
3. Bez kterých témat školské matematiky se, podle vašeho názoru, může každý občan v běžném životě obejít?
4. (a) Domníváte se, že školská matematika je jako celek nutnou součástí kultury moderního člověka, i když některé její poznatky ve svém běžném životě nepoužívá?
(b) V jakém smyslu zvyšuje jeho kulturní vyspělost?
5. Pokud jste odpověděl kladně na otázku 4 (a), domníváte se, že osnovy školské matematiky je možno redukovat, nebo je třeba je naopak rozšířit a vyučování matematice časově posílit?

Skupina respondentů nebyla nijak reprezentativní. 11 respondentů z řad učitelů byli převážně učitelé matematiky z Instituto Tecnológico v Zacatepecu, který připravuje inženýry různého zaměření a odpovídá v podstatě našim vysokým technickým školám. Dále odpovědělo 13 studentů 3. a 4. semestru tohoto institutu se specializací na výpočetní systémy a 38 studentů maturitního ročníku CEBETIS (Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios), kteří odpovídají studentům našich středních průmyslových škol (se zaměřením technici programování). Anketa byla dobrovolná, nikdo na ni nebyl předem připravován, studenti se o jejím obsahu dozvěděli až z mého úvodního slova.

Bezprostředním výsledkem ankety je zjištění, že v Mexiku patrně s rostoucím věkem respondentů výrazně klesá návratnost anketních odpovědí. Oslovil jsem totiž více než dvojnásobek učitelů a to několikrát. Anketa si nečinila nárok na exaktní zpracování problému, který ani exaktně formulovat nelze.

1. OTÁZKA

Učitelé v odpovědích na první otázku zdůvodňovali užitečnost matematiky její schopností řešit problémy (citace z prof. Vergnauda), zdůrazňovali tedy především otázku metody. Připomenuta však byla i role matematiky jako komunikačního jazyka. Objevily se obecné fráze o tom, že matematiku užíváme každou chvíli od probuzení až do chvíle, kdy se ukládáme k spánku. Bez matematiky se nemůže rozvinout osobnost člověka v jeho sociálním prostředí: takový člověk by jednoduše nemohl kupovat a prodávat. Studenti vysoké školy také soudí, že matematiku každodenně užíváme při nejrůznějších příležitostech, že prakticky neexistuje okamžik, kdy bychom s jejími poznatky nepracovali. Umožňuje analyzovat problémy, nedovedeme si bez ní představit obchodování, stavebnictví nebo výzkum. Nejběžnější problémy mají přímý nebo nepřímý vztah k matematice. Nevěděli bychom kolik můžeme denně utratit nebo za kolik nakoupit. Užíváme ji každý den a každou hodinu, aniž bychom si to většinou uvědomovali. Jenom jeden student drze prohlásil, že matematika moc velký užitek nemá. Studenti maturitního ročníku střední školy připomínali, že většina běžných činností člověka je založena na číslech. Ať už jde o příjmy rodičů, cenu předmětu, všechno je svázáno s ekonomikou ať už individuální nebo národní. Konkrétní příklady — pokud jsou uvedeny — se točí vesměs kolem peněz a jejich počítání. Objevily se poznámky o tom, že, pokud chceme něco poznat, dovoluje nám matematika najít vhodné vyjadřování. Aniž si to uvědomujeme, užíváme ji stále ve svých verbálních projevech. Jeden student konstatoval, že matematické poznatky, které ve svém životě nejvíc používáme, jsou vlastně jen poznatky ze základní školy.

2. OTÁZKA

Průnikem témat považovaných za nejdůležitější pro běžný život občana je ve všech třech kategoriích respondentů to, co učitelé nazývají „základy aritmetiky“ a středoškoláci „elementární operace“, tedy sčítání, odčítání, násobení a dělení. V pěti případech jsou k tomu připočítána

i procenta. K aritmetice přidávají učitelé algebru a geometrii (ve třech případech a v jednom případě trigonometrii). Jeden respondent uvádí výpočet obsahu a zlomky. Připomíná zároveň smlouvu, kterou má sedm mexických států uzavřenou se Světovou bankou a v níž se hovoří o projektu aplikované matematiky. U vysokoškolských studentů je kromě základních aritmetických operací připomenuta ve čtyřech případech geometrie (jedenkrát analytická), dále se pak v izolovaných výskytech objevují logika, množiny, aplikovaná matematika, finitní matematika, pravděpodobnost. Jeden student zdůrazňuje poznatky, které umožňují organizovat nebo obhospodařovat čas, prostor a peníze. Středoškolští studenti se v 60 % případů omezují na základní aritmetické operace. Sedmkrát se v odpovědích vyskytuje algebra, šestkrát geometrie. Jeden student považuje za nezbytnou celou školskou matematiku, v izolovaných výskytech se objevuje měření a rovnice.

3. OTÁZKA

Otázka poněkud rozděluje učitele a studenty. Učitelé zjevně hájí svůj chlebiček a jako méně podstatná témata uvádějí vyšší matematiku (od diferenciálního a integrálního počtu výš), popřípadě analytickou a deskriptivní geometrii. I v jejich odpovědích se však konstatuje, že pro přežití vystačí subjekt s aritmetikou a geometrií, že je možné obejít se bez těch témat, která neposkytují prostředky pro řešení reálných problémů. Polovina vysokoškolských studentů se domnívá, že není nezbytný diferenciální a integrální počet, ve dvou případech se objevuje analytická geometrie a trigonometrie, jeden respondent uvádí rovnice třetího a vyšších řádu. Pouze jeden student se domnívá, že není možno vynechat žádné téma. Naprostá většina středoškolských studentů považuje za nepotřebný diferenciální a integrální počet, trigonometrii ve třech případech, statistiku ve dvou případech, analytickou geometrii rovněž ve dvou případech. Jenom dva studenti se domnívají, že všechna témata jsou nezbytná.

4. OTÁZKA (a)

Prakticky všichni respondenti se shodují v tom, že matematika tvoří nezbytnou součást kultury moderního člověka. Někteří zdůrazňují životní důležitost této otázky. Učitelé uvádějí, že kultura v širším slova smyslu není myslitelná bez dalšího předávání matematických poznatků, i když zároveň připomínají, že subjekt vybavený pouze školní matema-

tikou nemůže být kulturním subjektem v pravém smyslu slova. Důraz je tedy kladen na kulturní kontext lidských aktivit. Vysokoškolští studenti připomínají, že matematika rozvíjí mentální dovednosti a pomáhá nám vizualizovat řešení problému od počátečního plánu řešení, přes užité metody až k odpovědi na daný problém. Matematika je ve velkém rozsahu součástí profesionální přípravy, i když pro občana, který se nezabývá specializovaně matematikou, je možno vypustit mnohá témata nebo je nestudovat do velké hloubky. Ze středoškolských studentů pouze jeden odpověděl na otázku „ne“. Některé odpovědi: „Protože kdo nic neví, není ničím“ nebo „Ano, protože přinejmenším obohacuje naši kulturu“ nebo „Ano, protože každodenně, aniž bychom si to uvědomovali, je pro nás nepostradatelná“ nebo „Ano, je životně důležité umět matematiku, nejenom historie je kultura, matematika má také velmi silný vliv“ nebo dokonce „Ano, protože všechno, co existuje v kosmu (en el universo) je matematika“.

4. OTÁZKA (b)

Učitelé soudí, že matematika „usnadňuje učení se jiným disciplínám“ nebo zvyšuje „schopnost analytického uvažování“ nebo nám umožňuje, abychom „byli více analytičtí a dokázali zkoumat jevy z různých hledisek“. Vysokoškolští studenti se domnívají, že vede k vyššímu mentálnímu rozvoji člověka. Navíc, prostřednictvím matematických modelů, můžeme vizualizovat ideální objekty, které v realitě neexistují. Matematika rozvíjí myšlení tím, že je činí více objektivní a analytické, umožňuje nacházet různé cesty pro dosažení řešení. Zvyšuje kulturní úroveň, protože vede k tomu, že více přemýšlíme o jevech v souvislosti s hledáním řešení problému. Středoškoláci připomínají, že matematické poznatky umožňují, aby každý sám mohl provádět výpočty a organizovat své záležitosti „aniž by ho ostatní podváděli (přitom to dělají tak často)“ — (poznámka autora: týká se jen Mexika). Umožňuje lépe rozumět lidem, kteří se věnují matematice a fyzice a usnadňuje porozumění tak důležitým záležitostem jako je ekonomika země. Jeden student poznamenává, že jakmile získává nové poznatky, zvyšují tím svou kulturní úroveň. Další uvádí, že ten, kdo chce dosáhnout vysokého postavení s velkou odpovědností a s množstvím podřízených osob, ten musí znát matematiku, bez ní by to nebylo možné. Matematika nám pomáhá osvojovat si s větším úspěchem jiné disciplíny. Znalost matematiky, vede k upevňování poznatků a ke zvyšování intelektuální úrovně. Mozek je čilejší a uvažuje s větší přesností.

5. OTÁZKA

Jeden učitel soudí, že nemá smyslu měnit stávající osnovy, další konstatuje, že problémy vyučování matematice nejsou jen v osnovách. Polovina zbývajících navrhuje rozšířit vyučování matematice a zvýšit počet hodin, váže to však na lepší přípravu učitelů a vyšší požadavky na znalosti studentů. Zbytek doporučuje analyzovat osnovy, zabývat se přípravou učitelů a více spojovat osnovy s diferenciací a specializací. Také většina vysokoškolských studentů doporučuje rozšíření výuky matematice a zvýšení počtu hodin, pozoruhodné však je, že se rovněž přimlouvají za zlepšení metod výuky a kladou důraz na aplikaci svých poznatků a řešení reálných problémů. Jeden z vysokoškoláků soudí, že pro občany, kteří neužívají matematiku profesionálně, by bylo možné osnovy redukovat. Mezi středoškoláky je sedm respondentů, kteří doporučují redukovat stávající osnovy. Polovina ze zbytku navrhuje jejich rozšíření včetně zvýšení počtu hodin věnovaných matematice. Druhá polovina se domnívá, že je účelné zachovat současný stav. Některé odpovědi jsou promyšlenější: „Zachovat současný stav, avšak důsledně plnit stávající osnovy, protože to by také přispělo ke kvalitnější přípravě studentů.“ Další, místo rozšíření, navrhuje prohloubení stávajícího učiva, několik respondentů se domnívá, že je třeba vynechat témata odtržená od praxe a naopak posílit ta, která mají těsnou návaznost na praktický život.

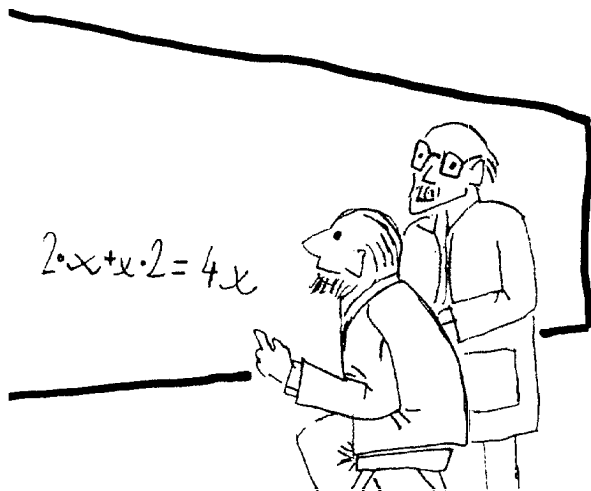
ZÁVĚRY

Zdá se, že mexičtí učitelé i studenti jsou v naprosté většině vnitřně přesvědčeni o tom, že matematika tvoří nezbytnou součást kultury současného člověka, že její poznatky využíváme vědomě či podvědomě ve svém každodenním životě prakticky neustále. Převažuje pojetí matematiky jako nástroje řešení problému, výrazně jsou zastoupeny i představy o tom, že matematika rozvíjí myšlení, usuzování, popřípadě i další duševní aktivity člověka. Poněkud v kontrastu s těmito představami je skutečnost, že při stanovení konkrétních tematických poznatků nezbytných pro běžný život „nematematického“ občana se naprostá většina respondentů omezuje na sčítání, odčítání, násobení a dělení. Zarážející je také velmi nízký počet odpovědí zahrnujících geometrické poznatky mezi matematické nástroje nezbytné pro běžný život. Osobně jsem se například domníval, že výrazné podceňování geometrie ve školské matematice, s níž se celosvětově setkáváme, je spíše záležitostí učitelů. Zdá se však, že ani studenti

o ni nejeví vyšší zájem. Mezi tématy, která je možno vynechat ze školské matematiky převažuje jednoznačně diferenciální a integrální počet. Zdá se, že někdo by se měl konečně už pokusit vysvětlit, proč v celosvětovém měřítku setrvává tato tematika v osnovách středních škol (v Mexiku dokonce až na úrovni studia implicitní funkce), jestliže ani vysoké školy ani studenti nepovažují zařazení těchto témat do školské matematiky za potřebné a užitečné. V anketě se objevilo několik velmi hezkých odpovědí týkajících se podílu matematiky na kulturním rozvoji člověka. Pokud jde o posílení nebo o redukci školské matematiky, projevila se v odpovědích patrně určitá profesní „zainteresovanost“ respondentů. Řada z nich však nevidí cestu v pouhém kvantitativním rozšíření matematiky, za nezbytné považují zkvalitnění výuky především z hlediska metod vyučování a zejména (což je pro současné Mexiko obzvláště důležité) také v kvalitnější přípravě učitelů. Několik odpovědí připomíná potřebu přizpůsobit učební plány a osnovy profesní specializaci studentů. Konstatovat můžeme také fakt, že pokud jde o konkretizaci představ o užití matematiky v běžném životě občana, potom uvedené příklady vesměs souvisí s ekonomikou nebo — řečeno bez obalu — s penězi. Zdá se, že peníze rozšiřují lidmi obývaný Einsteinův časoprostor na pětidimenzionální strukturu.

Není jistě na škodu zamyslet se nad tím, zda popsaná zjištění, byt' mají poněkud exotický zdroj, nemohou nějak posloužit našim úvahám o vyučování matematice. Především potvrzují skutečnost, že *poznatkově* je svět i v naší technické (v podstatě na matematice založené) době, matematicky **velmi nenáročný** na vybavenost „nematematického“ občana. Tato nenáročnost patrně ještě poroste s dalším nástupem informatické a výpočetní techniky. Například algoritmus dělení desetinných čísel patrně zmizí z běžné matematické vybavenosti absolventů základních a středních škol velmi rychle. Matematickou analýzu učíme v podstatě beze změn jistě nejméně sto let. Je však nutné učit se „ručně“ studovat průběh funkce nebo se prokousávat složitými metodami na výpočet integrálů nebo řešení diferenciálních rovnic? Všechno už zvládnou kalkulátory nebo počítače. Podobné závěry můžeme udělat pro analytickou geometrii nebo algebraické partie na střední škole. Jestliže se tedy všichni shodneme, že matematika tvoří nezbytnou součást kultury moderního člověka, měli bychom se asi snažit dohodnout na tom, že její kulturní přínos není v „poznatkovém“ obohacení lidského mozku. Patrně se bude v blízkém budoucnu jednat spíše o „formativní“ přínos k utváření studentovy osobnosti. Konec konců to více koinciduje s představou ma-

tematiky jako metavědy nebo jazyka věd. Pro školskou matematiku by to znamenalo urychlenou „poznatkovou“ redukci a hledání prostředků a metod k rozvíjení determinovaných osobnostních charakteristik studentů. O tom by však měla být zvláštní konference.



ALE PROF. NOVÁKU, NEMŮŽETE TOMU ŘÍKAT
NOVÁKOVA ROVNOST, JESTLIŽE JE TO ZNÁMÉ PO STALETÍ.

ZKOUŠKY UČITELSKÉ ZPŮSOBILOSTI V 19. STOLETÍ

Alena Šolcová

Podle tradice byla na konci 18. století úroveň učitelů venkovských škol velmi nízká. V některých zápisech se objevují zprávy o tom, že dokázali sotva slabikovat. Z tohoto pohledu se zdá paradoxní vysoká náročnost konkursních zkoušek a zkoušek učitelské způsobilosti v první polovině 19. století.

Pokusím se zkušební požadavky na budoucí učitele matematiky dokumentovat na dvou konkrétních příkladech:

Prvním z nich je Bernard Bolzano (1781–1848), který vstoupil do konkursu na učitele elementární matematiky filosofické fakulty po známém vlastenci Stanislavu Vydrovi v roce 1804.

Druhý příklad ukáže, jak František Weyr (1820?–1889), otec dvou budoucích profesorů matematiky, Emila (1848–1894), profesora vídeňské univerzity, a Eduarda (1852–1903), profesora pražské techniky, postupně skládal zkoušky učitelské způsobilosti, aby mohl vyučovat na rakouských reálkách.

Předběžné poznámky

Již na konci 18. století tereziánská reforma přinesla nejen povinnou školní docházku, ale také Felbigerovu metodickou příručku (Johann Ignaz Felbiger 1724–1788). Listování příručkou přerušíme u §3 kapitoly XIV. „*Kterak Učitelové žákům svým umění počtu vpraviti mají*“. V XV. kapitole pak diskutuje autor metodické příručky „*O povaze knih učebních*“ a odpovídá na otázku „*Mnoholi z Mathematiky v českých školách učiti míníme*“.

Pro učitele triviálních (název odvozen od trivium — čtení, psaní a počítání), hlavních a normálních škol byly zavedeny kursy při normálních školách, obvykle půlroční. Střední školy — gymnázia od roku 1775 — byly pěti- až šestileté. Učitelé byli připravováni na filosofické fakultě.

Od poloviny 18. století (1752) byly předepsány tereziánskou reformou univerzitního studia dvě hodiny matematiky denně. Ředitel filosofických studií Josef Stepling (1716–1778) sepsal požadavky a dohlížel na to, aby se zkouška z geometrie konala v červnu a další část na konci prvního ročníku v září. Latinské učebnice elementární matematiky vydali postupně: J. Jüngling (1747), St. Schmidt (1765), F. Zeno (1769). V roce 1763 byla zásluhou Steplingovou zřízena profesura vyšší matematiky a obsazena Janem Tesánkem (1728–1788), který zavedl výklad infinitezimálního počtu a newtonovské mechaniky.

Profesorem elementární matematiky se roku 1774 stal Stanislav Vydra (1741–1804). V roce 1776 se podle nařízení Marie Terezie v prvních ročnících všech rakouských univerzit přednášelo podle předepsané latinské učebnice Christiana Wolfa „*Mathesis Wolfiana* . . .“, vydané ve Vídni. Leibnizův žák Christian Wolf vydal tuto rozsáhlou učebnici původně německy již v roce 1710. Učebnice obsahovala i aplikace matematiky ve fyzice a technických oborech. Ve druhém ročníku si mohli přednášející volit obsah přednášky, měl být zaměřen k praxi. K tomuto volnému kursu vydal těsně před další reformou vlastní učebnici Stanislav Vydra.

V roce 1784 bylo studium na filosofických fakultách znovu reformováno. Bylo prodlouženo na tři roky a matematice bylo přiděleno 6 + 6 + 3 hodiny týdně. Výuka probíhala v němčině podle učebnice Gaussova učitele Abrahama Kästnera „*Anfangsgründe der Mathematik*“. První z deseti svazků této učebnice začal vydávat Kästner již v roce 1758. Bernard Bolzano ve své autobiografii uvádí, že jej zaujala zvláště spekulativní část Kästnerova kompendia. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) se o svém učiteli ale vyjadřoval spíše laskavě ironicky: „*Mezi matematiky byl básníkem a mezi básníky matematikem.*“

V roce 1787 byla k filosofické fakultě připojena stavovská inženýrská škola, kde vyšší matematiku přednášel Franz Josef Gerstner (1756–1832). V prvním ročníku přednášel Gerstner podle Eulera úvod do analýzy konečných a nekonečných, diferenciální a integrální počet, v druhém ročníku mechaniku a hydrauliku². Ve třetím ročníku se věnoval optice a teoretické astronomii podle pařížského astronoma Lalandy.

Gerstner se zájmem pozoroval pokroky nadaného žáka, četl jeho matematická pojednání, která mu Bolzano přinášel, a dal mu k dispozici svou knihovnu.

²Bolzano studoval první dva ročníky zároveň.

Neúspěšný Bolzanův konkurs

Během svých příprav na učitelskou dráhu složil Bolzano tři ze čtyř předepsaných zkoušek nezbytných pro doktorát z filosofie: v únoru 1804 rigoróza z matematiky a fyziky a v červenci téhož roku rigorózum z filosofie. Doktorát (nebo alespoň úspěšné vykonání větší části potřebných zkoušek) byl podmínkou pro připuštění kandidáta ke konkursu na místa profesorů při filosofických fakultách.

Na uprázdněné místo profesora elementární matematiky byl vypsán konkurs 6. září 1804³. Zkouška byla stanovena na 25. října a s kandidáty ji měl vykonat profesor Gerstner, který byl od Vydrova onemocnění v únoru 1803 suplujícím ředitelem matematicko-fyzikálních studií.

Ke zkoušce se dostavili jen dva kandidáti, Josef Ladislav Jandera a Bernard Bolzano, spolužáci a přátelé, oba žáci Vydrovi a Gerstnerovi. Janderův prospěch podporovalo, že Vydrovy přednášky suploval a že jej profesor Vydra při odchodu z univerzity doporučil pozornosti vlády. Bolzanovi byl nakloněn sám Gerstner.

V přípravě na konkursní zkoušku vybral Gerstner devět otázek a zaslal je zemskému guberniu, tam byly vybrány tři otázky a v zapečetěné obálce se vrátily studijnímu direktorátu. Gerstner později uvedl ve zprávě o průběhu a výsledku konkursní zkoušky, že vybral takové otázky, jejichž zpracování vyžadovalo zevrubnější znalost Kästnerovy učebnice, a že je vybral tak, aby měli kandidáti příležitost prokázat vyšší znalosti. Zkouška byla zahájena v 9 hodin ve stanovený den. Kandidáti dostali tyto otázky k písemnému vypracování:

1. Vypočítat z dané výšky kulové úseče a z průměru koule její povrch a objem.
2. Pojednat o důkazech věty o rovnováze na páce, uvést důvody a zhodnotit je.
3. Vypočítat, jakou rychlostí vytéká voda z malých otvorů velkých nádob, a napsat, jak může být tato rychlost teoreticky odůvodněna.

Kandidáti pracovali bez pomůcek pod dohledem profesorů filosofické fakulty. Jandera skončil práci v půl páté a Bolzano v šest hodin. Druhý

³Spisy o konkursu i konkursní práce jsou uloženy v SÚA, ČG Publ 1796–1805.

den v devět hodin se všichni sešli k ústní zkoušce: Kandidáti dostali za úkol vyložit 14. větu z Kästnerovy geometrie:

„Rovnoběžníky mezi rovnoběžkami nad jednou základnou mají stejný obsah.“

První odpovídal po krátkém rozmyšlení Bolzano. Vykládal asi půl hodiny a po něm Jandera. Jejich výklad poslouchalo 9 profesorů (včetně Gerstnera). V protokolu o zkoušce stojí, že Bolzano šel sice ve svém výkladu více do hloubky, že se však poněkud odchýlil od Kästnera v pořadí předpokladů: nauku o podobnosti trojúhelníků probral dříve, než ji probírá Kästner ve své učebnici. Janderův výklad byl srozumitelnější, držel se Kästnerova uspořádání a za stejnou dobu, jako vykládal Bolzano, odvodil i několik důsledků. Jednomyslně ocenili Janderův hlas vhodný pro velkou posluchárnu, silnější a vydatnější než Bolzanův. Písemné práce posuzovala komise až po měsíci, 20. listopadu. V komisi zasedalo pět profesorů exaktních a přírodních věd a tentokrát byly všechny hlasy ve prospěch Bolzana⁴. V Bolzanově práci oceňovali promyšlenost odpovědí, znalost matematické literatury a vlastní důkazy, které při řešení uvedl.

Gerstnerova zpráva končí politováním, že nemohou být obsazeny profesury dvě, jedna pro vyšší matematiku pro Bolzana a druhá pro elementární matematiku pro Janderu. 25. února 1805 císař rozhodl ve prospěch Jandery.

Přísné zkoušky Františka Weyra u komise ve Vídni

František Weyr (1820?–1889) studoval v letech 1833–1839 na gymnáziu v Hradci Králové, v letech 1840–41 na filosofické fakultě, pak se patrně živil soukromým vyučováním v okolí Náchoda a na Liberecku. V letech 1845–46 pokračoval ve studiu na stavovském technickém institutu. Složil zkoušky z praktické geometrie, mechaniky a nauky o strojích vesměs s výborným prospěchem. V roce 1847 získal místa asistenta na stavovské reálce. Po třech letech se stal suplentem matematiky a fyziky. V tomto postavení byl však potvrzen až v roce 1851. Teprve po třech letech se přihlásil ke zkoušce způsobilosti vyučování elementární matematice a přírodovědě na nižších reálných školách⁵. Nejprve dostal úlohy k domácímu zpracování:

⁴Jandera se dopustil chyby ve výpočtu objemu koule a odpověď na třetí otázku nevypracoval vůbec. Pro suplování hydrauliku zatím nestudoval.

⁵Dokumenty v archivu jednoho z potomků rodiny Weyrů, překlad A. Šolcová.

1. Sestavit nejobecnější pravidlo pro dělitelnost čísel a z něho odvodit speciální pravidla, konečně tato pravidla vyjádřit nezávisle na pravidle obecném.
2. Které čistě fyzikální přístroje našly dosud užitečné použití k technickým účelům. Jest popsati tyto přístroje a jejich hlavní použití.

Hodnocení domácí práce bylo příznivé, první otázka byla pojednána v úplnosti a dílo prokazuje znalost předmětu. V odpovědi na druhou otázku sice nepopisuje všechny přístroje, neprokazuje hlubší znalost literatury, ale popis a údaje o použití obsahují vše podstatné, takže je zřetelná obeznámenost s předmětem.

Poté František Weyr postoupil ke klauzurní zkoušce. Dostal tyto úlohy:

1. Známou hodnotu dané veličiny převést na hodnotu jiné dané veličiny.
2. Ze dvou rovnic
$$\begin{aligned}x^4 + y^4 &= 97 \\ x + y &= 5\end{aligned}$$
určit obě neznámé.
3. Dokázat, že jsou-li u dvou daných trojúhelníků dvě odpovídající si strany shodné, ale jimi sevřené úhly jsou různé, je třetí strana, ležící proti většímu z obou úhlů, také větší.
4. Dokázat, že obdélník, sestavený ze dvou stran trojúhelníka, je stejný jako obdélník sestavený z kolmice na třetí stranu trojúhelníka, ležící v průměru kružnice trojúhelníku opsané.
5. Ze tří stran trojúhelníka vypočítat průměr opsané a vepsané kružnice.

V hodnocení této části zkoušky se tvrdí: Při řešení těchto úloh se ukázala menší pohotovost v praktickém počítání, druhá vyžadovala určitou pomoc, až byla převedena do oblasti elementární matematiky. U třetí se po odvedení z neúčelné na počátku zvolené cesty ukázala velká zručnost a poslední dvě byly vyřešeny s pohotovostí a velkou jistotou.

Zkouška dále pokračovala opět německy otázkami z fyziky, z dějin náboženství a dogmatiky, z zeměpisu, dějin a přírodopisu. František Weyr odpovídal uspokojivě. Komise ocenila též vysvědčení o metodě výuky

z pražské reálky, v němž ředitel ústavu oceňoval Weyrovu snahu o ná-
zornost a přesvědčivost. Komise uznala, že i během zkoušky prozradil
kandidát své kvality — jasnost, preciznost, bezchybnou mluvu a dosta-
tečný hlas. Vysvědčení podepsala šestičlenná vídeňská komise. O tři roky
později skládal František Weyr zkoušku učitelské způsobilosti pro vyu-
čování fyzice na vyšších školách reálných. Zdali složil ve Vídni podobnou
zkoušku též pro matematiku, dnes zatím nevíme.

Snahy Gustava Skřivana o zřízení zkušební komise v Praze

V roce 1864 podnítl Gustav Skřivan (1831–1866) zřízení zkušební
komise pro kandidáty reálního učitelství v Praze (do té doby byla pouze
ve Vídni). Tento mladý profesor vyšší matematiky v české řeči na pražské
technice vydal na konci své životní dráhy v Praze dvě dnes málo známé
učebnice pro studenty českého původu: „*Základové analytické geometrie
v rovině*“, Praha 1864, a „*Přednášky o algebraické analýsi*“, Praha 1865.

Po jeho odchodu zvítězil v konkursu František Josef Studnička (1836
až 1903), který při svém dlouholeté působení na technice i univerzitě
vychoval desítky středoškolských učitelů. Do konkursu, který skončil ve
prospěch F.J. Studničky, se tehdy přihlásilo 7 kandidátů, mezi nimi např.
i Martin Pokorný, autor první české učebnice o determinantech a dlou-
holetý předseda JČMF, a Václav Šimerka. Byl ale to Studničkův starší
kolega, Gustav Skřivan, který inspiroval svého nástupce k sepsání učeb-
nice „*Základové vyšší matematiky*“ a dalším snahám v prohloubení vzdě-
lání budoucích učitelů matematiky na pražské univerzitě. Studničkovo
dlouholeté pedagogické působení se řídilo zásadou „*Napřed naučit cho-
dit a pak létat*.“ Jeho jméno zůstává v paměti učitelů i studentů. Ještě
ve třicátých letech našeho století deklamovali „*Logaritmy od Studničky,
jasnější nad světlo svíčky*.“

Literatura

- [1] Bolzano, B.: *Leben Franz Joseph Ritters von Gerstner*, Prag, 1837.
- [2] Pavlíková, M.: *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, UK Praha, 1985.
- [3] Šedivý, J. a kol.: *Antologie matematických didaktických textů*, Ob-
dobí 1360–1860, UK Praha, 1987.

PŘÍPRAVA UČITELŮ MATEMATIKY NA PRÁCI V PODMÍNKÁCH HUMANIZACE MATEMATICKÉHO VZDĚLÁVÁNÍ

Stanislav Trávníček

Dnes vzděláváme učitele již pro počátek 3. tisíciletí. To nás nutí zamýšlet se nad budoucími potřebami a možnostmi lidí této éry, a jak by se měly promítnout do obsahu a organizace studia na základních i středních školách. Odsud je pak třeba vyvodit obsah a organizaci vzdělávání učitelů i budoucích učitelů na těchto školách.

Humanizace matematického vzdělávání

Nové tisíciletí je provázáno hlubokými technologickými a společenskými změnami, které nutně vedou k požadavku, aby matematické vzdělávání, tj. jeho cíle, věcný obsah i průběh, jako integrální součást celkového vzdělávání, se stalo člověku bližší a potřebnější a aby tedy bylo řešeno z hlediska objektivních potřeb a zájmů člověka dneška a blízké budoucnosti. Proces naplňující tento požadavek nazýváme dále procesem *humanizace matematického vzdělávání* [1]. (Studiem tohoto procesu se zabývaly dva projekty Fondu rozvoje VŠ.) Humanizací jsou ovlivněny zejména tyto stránky vzdělávání žáků:

1. *Věcný obsah vzdělávání.* Zatím je to tak, že ve školním předmětu MATEMATIKA vybavujeme žáky a studenty mohutným matematickým aparátem, jehož většinu nebudou v životě nikdy potřebovat (tj. budou jej potřebovat zase jen někde ve škole). Přitom je nenaučíme používat žádoucím způsobem ani tu potřebnou část tohoto aparátu a zejména matematické ideje. Jsme velmi uvážliví, ale možná by se hodilo jiné přídavné jméno, než něco nového (obsahem či pojetím) do učiva vpustíme a než jsme ochotni něco vypustit. K hodnocení potřebnosti totiž nejsme vybaveni objektivními měřítky.

2. *Rozvoj osobnosti žáků.* Je třeba, jak to provedli již v některých jiných zemích, formulovat cíle i v této oblasti a podložit jejich naplňováním vhodným (vhodně pojatým) učivem. Někdy se však možná tato stránka vzdělávání zneužívá spíše pro odůvodnění setrvání některého objektivně snad méně potřebného učiva v osnovách — vždyť přece pěstuje u žáků to či ono (i když by se dosáhlo možná lepších výsledků využitím učiva jiného).
3. *Matematika, společnost a praxe.* Praktické aplikace jsou velikou slabinou matematického vzdělávání, a to ne až v poslední době, ale i v obdobích dřívějších. V učebnicích a sbírkách příkladů lze nalézt závěje příkladů v podstatě nesmyslných z hlediska praxe, ale nalezneme tu jen velmi málo příkladů, které se skutečně vztahují k reálné společenské praxi (pojem praxe se přitom někdy příliš zužuje).
4. *Didaktika matematiky.* Její úkoly z hlediska humanizace jsou rozsáhlé a takřka bezbřehé. Jedním z nejvýznamnějších úkolů didaktiky je působit, aby žáci nebyli tlačeni do pozice pasivních příjemců informací, ale právě naopak, aby jejich přístup k učivu mohl být aktivní a tvůrčí.

Komplexnost vzdělávání (časová a věcná) učitelů

Trvale měnící se technologické a společenské podmínky vedou k požadavku celoživotního vzdělávání všech lidí, kteří chtějí zůstat na úrovni přítomnosti. Není příliš mnoho profesí, kterých by se tento požadavek týkal více, než je profese učitelská. A právě zde je třeba začít včas. Stálý tlak na trvalé vzdělávání učitelů je třeba vyvíjet nejen povídáním a přesvědčováním, ale i hmotnými podněty a legislativními rámci. Na pregraduální studium musí navazovat další formy vzdělávání postgraduálního pracujícího s četnou nabídkou nejen studijních míst na univerzitách, ale i dalších příležitostí — kurzů, seminářů, řešení projektů, publikací v časopisech nebo akcí na počítačové síti.

Věcná komplexnost vzdělávání znamená požadavek, aby se vzdělávání neomezovalo jen na předmět odborného studia a nanejvýš jeho didaktiku, ale aby mělo záběr i do širšího věcného okolí spojeného s prací učitele (např. pedagogika, psychologie, sociologie, teorie systémů, výpočetní technika, elementy filozofie a práva aj.).

Tlak na časovou i věcnou komplexnost vzdělávání učitelů je vyžadován zejména požadavky procesu humanizace vzdělávání žáků. Učitel musí být všestranně na výši, má-li požadavkům humanizace vyhovět.

Změny ve vzdělávání budoucích učitelů na UP Olomouc

Tím vším jsou generovány nové problémy i pro vysokoškolskou přípravu učitelů. Mají-li učitelé učit v podmínkách humanizace, musí se na práci v těchto podmínkách připravit a musí tomu tedy odpovídat i jejich studium. Jde o opatření po stránce organizační, v odborné náplni a po stránce didaktické (resp. o pojetí oborů a studia), viz [2]. (Tento problém byl řešen jako projekt Fondu rozvoje VŠ.)

1. *Organizační stránka.* Na PřF UP již několik let realizujeme studium matematiky ve dvou cyklech. První cyklus (5 semestrů) je uzavřen písemnou a ústní soubornou zkouškou a poskytuje studentům základy matematiky. Pro druhý cyklus si každý student volí jeden ze tří oborů (algebra, geometrie, matematická analýza) jako hlavní zaměření a jeden jako další (vedlejší) zaměření. Druhý cyklus (5 semestrů) je uzavřen písemnou zkouškou z didaktiky matematiky a ústní závěrečnou zkouškou. Ve druhém cyklu absolvují studenti vedle předmětů hlavního a dalšího zaměření také další předměty jejich profesní přípravy, jako je např. didaktika.
2. *Věcná náplň odborných předmětů.* I když v souvislosti s novou úpravou studia došlo ke změnám v osnovách jednotlivých předmětů, nepovažujeme tuto stránku za vyřešenou. Stále ještě chybí dostatečně pevné mosty mezi tzv. učivem vysokoškolským a učivem středoškolským, tj. tím, kterým se budou absolventi celý svůj život zabývat. V pozadí je tu lidský faktor, který je vždy tím faktorem rozhodujícím, ale svou zápornou roli hraje i neujasněná koncepce středoškolského studia matematiky.
3. *Pojetí oborů a studia.* Vyučovací předměty studia jsou rozděleny do tří kategorií: A (povinné), B (výběrové — povinná volba z více možností) a C (doplňkové — fakultativní). To vše ovšem vytváří větší možnosti nabídky a diversifikace studia. Tento systém se osvědčil, snad až na jednu výjimku, a tou je kategorie C.

Když před několik lety došlo k radikálnímu omezení týdenního počtu hodin, bylo motivováno také tím, aby studenti měli více prostoru pro volbu a studium předmětů kategorie C, a to i na jiných fakultách. Tato myšlenka se ukázala jako poněkud idealistická. Předměty kategorie C, které měly vnést pestrost a obohacení studia, jsou využívány zcela nedostatečně a studenti získaný volný čas využívají jinak. Nápravu lze očekávat po zavedení kreditního systému, ale ten zatím v matematice na blízském obzoru není.

Několik námětů k matematickému vzdělávání

Konkrétní projevy humanizace zasahují až do samotné technologie vyučování. Uveďme několik příkladů.

1. *Matematické vyjadřování.* Prvním předpokladem úspěšného matematického vzdělávání je, aby žáci svému učiteli vůbec porozuměli, a to v několika rovinách: co vůbec říká (ukazuje, znázorňuje nebo jinak vyjadřuje), jaký je matematický smysl řečeného, jaký je smysl učiva, jak to zapadá do ostatních matematických poznatků. Zvláštní kapitolou je vyjadřování ve smyslu jazykovém či používání matematické hantýrky [3, 4]. Je také třeba pozorněji a důsledněji nakládat s matematickým materiálem. Např. u každého nového poznatku bychom měli dbát na to, aby si žáci uvědomili:

- co je to (na to odpovídá definice pojmu),
- jaké to má vlastnosti, jak to vypadá, s čím to souvisí (věty, geometrický nebo jiný význam),
- jak se s tím počítá (algoritmy a vzorce),
- k čemu to je (motivace a užití, příklady).

Požadavku porozumění (a samozřejmě věcné správnosti) musí být podřízen i výběr matematických vyjadřovacích prostředků.

2. *Matematické ideje a logika.* Měly by být jasně formulovány cíle, čeho chce matematika dosáhnout a proč, pro celky i jednotlivá témata. Při vlastním „probírání“ bychom pak neměli základní matematické ideje žákům utajovat. Např. při řešení úloh vždy jasně formulovat zadání, ideu řešení a jeho závěr, a přitom rozlišovat vlastní řešení od komentářů k němu. Při nové látce se soustředit

nejprve právě jen na to nové a to ostatní rozumně potlačit. Žáci by vždy napřed měli získat vlastní zkušenosti, než se začnou formulovat obecné závěry.

Měli bychom se vyhýbat vyjádřením, která zastírají logické vazby, jako je např. „číslo N musí být kladné“. Měli bychom si uvědomovat i smysl našich formulací pravidel: buď je vůbec neformulujeme anebo je formulujeme přiměřeně věku žáků a účelu pravidel. Nevyhýbejme se logice, znalost jejích základů potřebujeme v životě, ale také třeba v informatice.

3. *Algoritmy.* Chceme-li přiblížit matematické vzdělávání potřebám člověka, musíme si uvědomit, jakou klíčovou roli hrají algoritmy (postupy, pravidla) v praktickém životě člověka. Matematika má příležitost ukazovat, jak algoritmy vytvářet, zlepšovat, používat, přizpůsobovat a inovovat. Jde tedy o jiné pojetí učiva — neukazovat fakta, ale vytvářet algoritmy. Tohoto procesu by se žáci měli účastnit v aktivní roli. Nemusí samozřejmě všechno znovu objevovat, ale měli by získat pocit, že při „objevech“ na tomto procesu aktivně spolupracují. Toto pojetí ani nevyžaduje nový typ problémů, dá se použít dokonce i na tak klasické látky, jako je třeba řešení kvadratických rovnic [5].
4. *Kalkulátory a myšlení.* Moderní způsoby práce si vyžadují, abychom do výuky vhodně zapojili kalkulátory, počítače, resp. i počítačové sítě. Didaktika se s tímto fenoménem ještě zcela nespřátelila, osobní samostatné zkušenosti učitelů jsou tu proto velmi cenné. Často jsme však svědky chybného pojetí, kdy si učitel neuvědomí, že technika má podporovat, doplňovat a usnadňovat myšlení, ne je nahrazovat. Je např. třeba vést žáky k tomu, aby bezduše nespolehali na výsledek z kalkulačky, ale aby jej dovedli posoudit, tj. umět odhadnout výsledek, jeho přibližnou hodnotu nebo (u numerických výpočtů) alespoň řád.
5. *Zpracování informací.* Je to jedna ze základních potřeb dnešního člověka — jak informace získat, jak je zpracovat a vyhodnotit, jak výsledky vyjadřovat (i graficky). Neměl by také vznikat rozpor mezi běžným vyjadřováním a matematikou a v případě potřeby je třeba včas reagovat a vkládat do výuky nové ideje. Pokud např.

žáci ZŠ běžně používají slova „pravděpodobně“, měli by o pravděpodobnosti něco vědět i ze školního předmětu matematika (a dovést třeba posoudit, co to znamená, když je něco „málo pravděpodobné“). Pokud používají vyjádření třeba „asi deset“, měli by i v matematice slyšet o přibližných rovnostech. (Podobně by se matematika měla asi vyrovnat i s dalšími pojmy, i vágními, běžného života, třeba „nanejvýš polovina“, „skoro polovina“, „více než $2/3$ “, „skoro celý povrch koule je červený“, i když teorii fuzzy množin bych zatím do výuky nezařazoval).

Nové požadavky na učivo neznamenaají, že se má učivo co do objemu stále zvětšovat; jestliže si stanovíme zřetelné a přiměřené cíle, měli bychom umět — v souladu s těmito cíli — učivo i redukovat. I nad takovými náměty bychom měli naučit přemýšlet naše adepty učitelství.

Literatura

- [1] Trávníček, S.: *O humanizaci matematického vzdělávání*, MFI, č. 5, s. 257–265, ročník 7, 1997–98.
- [2] Trávníček, S.: *Ke vzdělávání budoucích učitelů matematiky*, Sborník ze semináře kateder fakult připravujících učitele matematiky „Závěr studia, PGS, další vzdělávání učitelů“, Zlaté Hory–Horní Údolí, září 1997.
- [3] Trávníček, S.: *Matematické úlohy jako součást literárních textů*, MFI, č. 3, s. 113–120 a č. 4, s. 169–178, ročník 6, 1996–97.
- [4] Trávníček, S.: *K technologii vyučování matematice (O jazyku učitelů matematiky)*, MFI, ročník 8, 1998–99, v tisku.
- [5] Trávníček, S.: *K technologii vyučování matematice (O algoritmech)*, MFI, ročník 8, 1998–99, v tisku.

SEKCE

OTÁZKY PRÁCE S 11–15LETÝMI ŽÁKY
A
PŘIJÍMACÍ POHOVORY
NA STŘEDNÍ ŠKOLY

PŘEDSTAVY ŽÁKŮ ZÁKLADNÍ ŠKOLY O POJMECH „VZDÁLENOST“ A „OBSAH“

Monika Barešová, Eva Weislová

Podle našich zkušeností z vyučování na ZŠ je v současném vyučování matematice jedním z největších problémů vyučování geometrii. Problematičnost tohoto vyučování spatřujeme v:

- **nezájmu** učitelů, a tedy i žáků, o tuto oblast matematiky — což vytváří tzv. „začarovaný kruh“, který lze jen velmi těžko přerušit;
- **špatné prostorové představivosti** žáků, která je způsobena nedokonalou propedeutikou planimetrie i stereometrie — žáci jsou pokládáni nejprve za příliš „malé“, aby byli schopni pracovat s geometrickými objekty, a potom (asi od patnáctého roku života) je už rozvoj prostorové představivosti zanedbán;
- **nekorektnosti definic pojmů** — na základní škole není možné budovat geometrii na základě axiomů, proto jsou pojmy zaváděny nekorektně, často též nepřesně, žáci tak mají pojmy zabudovány ve své poznatkové struktuře pouze nekomplexně a na intuitivní úrovni;
- **rozpor mezi „skutečným“ a „matematickým“ světem** — na rozdíl od „skutečného“ světa se v geometrii pracuje s idealizovanými objekty, pojmy v geometrii mají užší nebo jiný význam než v reálném životě, a tak u žáků často vznikají kuriózní spojení např. na otázku, zda jsou dvojčata z matematického pohledu podobná, žákyně odpověděla: „Ne, protože nemají rovnoběžné ruce.“

Chceme-li, aby geometrické pojmy byly správně a komplexně zabudovány v poznatkové struktuře žáků, je třeba tyto pojmy se žáky konstruovat na základě zkušeností a znalostí z běžného života.

Konstruováním poznatku rozumíme úsek individuálního či skupinového poznávání, při němž vzniká nový poznatek nebo stávající poznatek

je přehodnocen a doplněn nebo restrukturován, což se promítá do poznatkového schématu.

Na konstruktivismus budeme nazírat ze dvou významových hledisek:

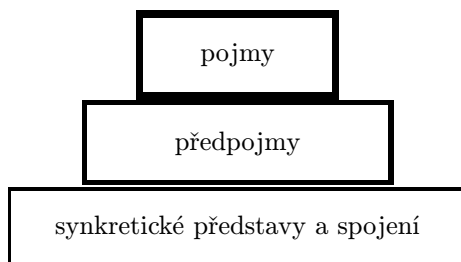
- jako na duševní činnost jedince vedoucí ke konstruování poznatků; jedinec je k této činnosti vnitřně motivován; tato činnost často probíhá nespojitě a dlouhodobě v různých kontextech, může být nezáměrně ovlivňována vnějšími faktory, např. změnou životních podmínek, komunikací s jinými osobami (altery) — konstruktivismus z tohoto pohledu můžeme nazvat **autokonstruktivismus**; nemůžeme sledovat celý průběh autokonstruktivismu ani předpokládat jedincovu konkrétní vývojovou úroveň poznatku, dokážeme ji však diagnosticky identifikovat a následně ovlivnit;
- jako na psychodidaktickou metodu, spočívající v záměrném působení na jedince při konstruování poznatku — konstruktivismus z tohoto pohledu můžeme nazvat **interkonstruktivismus**; jedincovu vývojovou úroveň poznatku můžeme předvídat nikoli však předpokládat její dosažení, protože zároveň s interkonstruktivismem probíhá i autokonstruktivismus, který je specifický pro každého jedince.

Poznatky zahrnují separované i univerzální modely. Mohou být pojmové (prekoncepty, pojmy, vlastnosti pojmů a vztahy mezi těmito vlastnostmi) nebo vztahové (vztahy mezi pojmy a objekty).

Synkretickými obrazy a spojeními nazveme nahodile získané a subjektivně zhodnocené vjemy a představy, týkající se tvořícího se pojmu. Mohou to být představy z minula, naivní teorie, dětská „věda“.

Předpojmy nazveme zobecnění několika konkrétních synkretických představ a spojení na intuitivní rovině, při jejich zobecňování klesá entropie.

Pojmy nazveme objektivně zhodnocené předpojmy v obecné rovině s podstatnými a jednoznačně vymezenými vlastnostmi a vztahy mezi těmito vlastnostmi.



Chceme-li ve vyučování matematice při zavádění nového pojmu uplatňovat metody interkonstruktivismu, je důležité provést vhodná šetření, která nám ukážou, do jaké míry už u žáků proběhl autokonstruktivismus tohoto pojmu, tedy jakou úroveň pojmového poznatku žáci mají.

V dalším textu se budeme zabývat úrovní pojmových poznatků vzdálenost a obsah u žáků 2. stupně základní školy, tj. do jaké míry proběhl u žáků autokonstruktivismus těchto pojmů.

Tyto matematické pojmy jsme pro náš experiment zvolily podle následujícího klíče:

- slova vzdálenost i obsah se kromě matematiky používají i v jiných vědních oborech a v běžném životě;
- pochopení významu pojmů vzdálenost a obsah je pro žáky ZŠ obtížné;
- pojmy vzdálenost a obsah mají v matematice obdobný význam v různých dimenzích.

Experiment probíhal ve dvou třídách ZŠ Campanus v Praze, a to ve dvou fázích — v červnu 1997 a květnu 1998. Žáci odpovídali písemně na otázku: „Co si představíš, když se řekne slovo vzdálenost (obsah)?“

Experiment byl zaměřen na vyjádření vlastních představ žáků o pojmech vzdálenost a obsah bez jakéhokoliv vnějšího zásahu a na myšlenkové procesy žáků v průběhu vybavování si vlastních představ.

K vyhodnocení testů byla použita pojmová mapa, na základě které můžeme diagnostikovat:

- úroveň chápání pojmového poznatku žákem, třídou nebo skupinou tříd v různých rovinách;

- sociální strukturu třídy ve vazbě na zkoumání úrovně osvojení daného pojmového poznatku;
- komunikativnost třídy ve vazbě na zkoumání úrovně osvojení daného pojmového poznatku;
- myšlenkové procesy žáka nebo třídy při vybavování si struktur daného pojmového poznatku.

Představy žáků o daném pojmu lze dle našeho experimentu zkoumat v několika rovinách:

- oborové — jaký vědní nebo společenský obor je v žákově myšlenkovém procesu asociován slovem vzdálenost. Žák vyjadřuje své zkušenosti ze „skutečného“ i „školního světa“. Ve „skutečném světě“ se pojmy vzdálenost a obsah vyskytují ve smyslu trajektorie, popř. „vnitřek“ objektu, složení; času nebo mezilidských vztahů, ve „školním světě“ nejčastěji v předmětech matematika, fyzika, chemie a jazykověda.
- významové — zda žák má ve své poznatkové struktuře zabudován poznatkový pojem pouze jako synkretickou představu, tj. slovo asociuje u žáka pouze slova se stejným nebo podobným základem slova či nesprávně transformované slovní spojení, nebo jako předpojem či pojem, tj. slovo u žáka asociuje i další slovní spojení. Je-li žákův pojmový poznatek na úrovni synkretické představy, řekneme, že daný žák chápe slovo vzdálenost nebo obsah v užším slova smyslu (např.: „Když je nějaká vzdálenost, to znamená určitý odstup dvou předmětů od sebe.“ nebo „Obsah mrazáku znamená, kolik litrů má mrazák obsah.“).
- postojové zda žák chápe pojmový poznatek vzdálenost jako něco na něm nezávislého nebo zda vysvětlení tohoto poznatku vztahuje ke své osobě — je egocentrický (např.: „Vzdálenost je něco co je ode mne ... na určitou délku vzdálené.“ nebo „Pod tímto pojmem si představím knížku Děti z Bullerbynu, ze které mi máma četla, coby škrvrněti.“).
- procesuálně-konceptuální (pouze pro pojmový poznatek vzdálenost) — zda žák chápe pojmový poznatek vzdálenost konceptuálně neboli staticky, tedy jako pojem (např. „vzdálenost je délka

mezi jedním a druhým předmětem“) nebo procesuálně neboli dynamicky, tedy jako proces, popř. výsledek procesu (např.: „vzdálenost od města k městu“ nebo „když musíme najít nějakou vzdálenost“.). Žák může pojmový poznatek vzdálenost chápat také jako procept, tedy jak dynamicky tak staticky, přičemž žákovo chápání tohoto pojmového poznatku je závislé na kontextu.

Podobnosti a rozdíly v pojmových mapách žáků, týkajících se pojmových poznatků vzdálenost a obsah ukážeme ve svém příspěvku.

Literatura

- [1] Barešová, M.: *Diagnostika úrovně osvojení pojmového poznatku vzdálenost*, disertační práce, Praha, 1998.
- [2] Barešová, M. — Skalická, L.: *Assimilation and Accommodation of Children's Conceptual Constructing Processes*, In: Didactics of Mathematics, Proceeding of the Doctoral Students, Římov, 1996.
- [3] Hasemann, K. — Mansfield, H.: *Concept mapping in research on mathematical knowledge development: background, methods, finding and conclusions*, In: Educational studies in mathematics, Academic Publisher, Kluwer, 1995.
- [4] Hejný, M.: *Development of Geometrical Concept*, In: Proceedings SEMT 1995, Praha, 1995.
- [5] Hejný, M.: *Components of mathematical knowledge*, In: Interakcja teorii i praktyki w nauczaniu matematyki, Rzeszów, 1997.
- [6] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990.
- [7] Hejný, M. — Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*, MFI, Praha, 1998.
- [8] Littler, G.H.: *Classroom mathematics in the United Kingdom*, A selection of material from The National Curriculum and The National Numeracy Project, nepublikovaná verze, 1998.

- [9] Matyášová, M. — Skalická, L.: *Asimilace a akomodace v procesu pojmového poznatku*, In: Sborník Dva dny s didaktikou matematiky, Praha, 1996.
- [10] Matyášová, M. — Skalická, L.: *Jak můžeme žákům odhalovat nové pojmy (Myšlenky konstruktivismu ve vyučování matematice)*, In: XIV. Vědecké kolokvium, Vyškov, 1996.
- [11] Mareš, J. — Křivohlavý, J.: *Komunikace ve škole*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.
- [12] Piaget, J.: *Psychologie intelligence*, SPN, Praha, 1966.
- [13] Piaget, J. — Inhelderová, B.: *Psychologie dítěte*, Portál, Praha, 1997.

Práce vznikla s částečnou finanční podporou Grantové agentury UK, grant č. 303/1998 (Aktivizující role projektů ve vyučování matematice).

PROBLÉM PŘECHODU Z PRVNÍHO STUPNĚ ZŠ NA DRUHÝ ANEB MATEMATIKA PRO ŽIVOT?

Michaela Kaslová

Úvod

Učitelka A v 6.A v říjnu 1996:

„Zamyslete se.“ Nic. „Přečtete si úlohu znovu. Přemýšlejte chvíli.“ Bez reakce. „To nikdo neví, jak dál? Ani ty?“ Žák: „Tak nám, paní učitelko, řekněte, jak se to počítá, spočítám to hned.“

Učitelka B v 7.C v dubnu 1997:

„Zase slovní úlohy,“ poznámka žáka. „ANO, slovní úlohy, bohužel je potřebujete k přijímačkám. Mně by stačilo, kdybyste uměli matiku. No pořádně počítat.“

Učitelka C v 5.A v září 1996:

„Co vás na prvním stupni naučili? Neumíte zapsat slovní úlohu, neumíte pořádně rýsovat, jednotky, desítky — je vám to jedno. Co z vás v životě bude?“

Matka usilující o zlepšení synovy známky — před třídní schůzkou 1996:

„On ten náš kluk není blbej. Počítat umí. Jen ty slovní úlohy mu nejdou.“

Učitelka D z 8. B: „A geometrie.“ Údiv.

5. třída při řešení úloh k naší studentce na praxi:

„My to nemůžeme řešit.“ „Jen to zkuste.“ „Naše paní učitelka nám vždycky řekne, jestli to máme psát pod sebe, do tabulky a tak. Na co je to úloha?“

Dotaz studentky externího studia učitelství 1. stupně 1998:

„Kdy a proč se má dítě naučit odlišit pomocnou konstrukci od vlastní? Po mě to chce zástupkyně, že je nic z geometrie nenaučíme.“ „Co jste odpověděla?“ „No, že v osnovách . . . , ale ona učí matiku.“

Telefonický dotaz učitelky E na katedru matematiky 1995:

„Jakou toleranci připouštíte v rýsování na konci prvního stupně? Oni totiž vaši absolventi na to moc nedbají a když je v osnovách měříme na mm, tak oni jsou při rýsování příliš tolerantní.“

Absolventka F na srazu po 5 letech 1998:

„Druhý stupeň s nimi nic neopakuje a pak se po dvou letech diví, že zapomněli převody. Že to není v učebnicích, neberu jako argument, zrovna tak jako že to od nás mají umět nadosmrti.“

Učitelka G z 1. stupně na kursu v rámci dalšího vzdělávání 1996:

„Jste vzdálení praxi, nemá smysl s dětmi modelovat, když to druhý stupeň nedovolí řešit jinak, než jsou oficiální postupy v učebnicích — to se na vás navíc sesypou i rodiče.“

Učitel H 1997:

„Vy s tím naděláte, buď to umí, nebo ne. Má dávat pozor. Kdyby se s tím na prvním stupni tak nepárali, byli by žáci lepší připravený i na život.“

Ve školním roce 1995/96 byli dotazováni chodci na různých místech a rodiče před jednou školou: **Co by měl umět žák z matematiky?**

200 odpovědí od 4 věkových skupin dalo jasně najevo, že nejdůležitější je umět násobku, případně násobit a dělit. Někteří to shrnuli pod termín počítat. O slovních úlohách (4 %), o geometrii (2 %) se nezmínil téměř nikdo. Odpovědi se více či méně týkaly názvů kapitol v učebnicích, někdy obohaceny o popis dovedností na mechanické bázi.

Přesto se mezi chodci objevili i učitelé (nebyl to záměr). Zajímavé bylo, že se odpovědi učitelů prvního stupně příliš nelišily od odpovědí laické veřejnosti. U učitelů druhého stupně se kromě důrazu na počítání objevil požadavek určité úrovně rýsování. Počet dotázaných učitelů byl však relativně nízký na to, aby se z něho daly dělat závěry. Odpovědi učitelů se lišily, pokud odpovídali na dotaz studentům a pokud mně. V druhém případě byla odpověď obsažnější a byly více použity termíny, které se vyskytují v osnovách.

Na podzim roku 1997 byla chodcům položena jiná otázka: **K čemu je matematika dobrá pro život?**

82 % Aby ... uměli dobře počítat.

63 % Aby ... je nikdo neošidil v krámkách, v podniku, ...

16 % Aby ... mohli podnikat.

12 % Aby ... se naučili myslet.

9 % Aby ... se dostali na školu, měli nějaké vzdělání.

4 % různé (aby na tom nebyli jako já, aby se měli lepší, je dobrá i pro jiné obory, aby s sebou nenechali vláčet, abych nenalítl, apod.)

Není zcela jednoznačné, kam zařadit odpověď: „Aby nebyli hloupí“, poněvadž v kontextu odpovědí z roku 1996 plyne, že nebýt hloupý je pro

většinu totéž jako umět násobit a dělit, nemuset používat kalkulačku. Charakteristika dotázaných (100 mužů, 100 žen):

- 20 % bezdětných mladších 30 let,
- 20 % dotázaných tvořili učitelé různých oborů,
- 20 % dotázaných byli muži produktivního věku, otcové,
- 20 % dotázaných byly matky v produktivním věku,
- 20 % tvořili důchodci.

Všech 200 dotázaných bylo starších 20 let. Někteří mluvili v první osobě (abych, díky tomu se, apod.), jiní převedli problém na žáka, dítě, absolventa — do 3. osoby (aby oni). Více než polovina uváděla dva argumenty, z nichž jeden se opíral o zkušenost z blízkého okolí. Tu také někteří z nich rozvedli.

Odpověď obsahující v různých formách požadavek na rozvoj myšlení se nejčastěji vyskytla u mužů mezi 20 a 30 roky a u učitelek ve věku 30–40 let.

K čemu je tedy dobrá matematika? Co vlastně má žák zvládnout? Jak má tomu všemu rozumět žák? (viz Úvod) Mají v tom učitelé jasno? Přeje si totéž veřejnost? Jsme schopni veřejnosti dát jasnou a přesvědčivou odpověď?

Hledání odpovědi bude nutné. Stačí si prohlédnout učebnice, hodnotit právě přijaté studenty na vyšší stupeň. (Hodnotíme vzhledem k tomu, co je čeká v osnovách nebo ...? Klesá úroveň žáků? V čem? V čem ne? Co to znamená?)

Hledání odpovědi by mělo usnadnit i komunikaci mezi prvním a druhým stupněm. Nedorozumění mezi učiteli prvního a druhého stupně se nutně odráží i na vztazích: učitel – žák, žák – škola, učitel – rodiče, ale i na vztahu **žák – matematika**.

Příčiny těchto nedorozumění můžeme hledat v přípravě učitelů: Zná dobře jedna skupina didaktické přístupy k učivu u skupiny druhé? Používají obě skupiny terminologii v tomtéž smyslu? Mají rozdílné cíle? V čem a proč? Co je považováno za chybu? atp. Příčiny mohou být i v nesystematickém dalším vzdělávání, ale především v neujasněnosti odpovědi na výše uvedené otázky.

Zkusili jste se někdy zeptat na totéž budoucích učitelů? Proč je pro některé rovnítko mezi termíny matematika a zkouška z matematiky? Jak to ovlivňuje jejich vztah k předmětu, postoj k vyučování, k formování hodnotící škály? Jak budou naši absolventi argumentovat v rozhovoru

s rodiči, když budou obhajovat své postupy, závěrečné hodnocení, když budou navrhovat terapii s ohledem na žákovy obtíže?

Současná obrovská volnost v interpretaci smyslu a cílů vyučování matematice a tlak veřejnosti umožňují realizaci i protichůdných pojetí. Je to záměr nebo omyl?

Literatura

- [1] Kaslová, M.: *Hodnocení v matematice*, Poster na konferenci ICME v Seville, 1996.
- [2] Kaslová, M.: *Dvojitá matematika? Jak ji vidí žák?*, In Sborník příspěvků konference JČMF Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let., s. 62–67, Frýdek–Místek, 1997.
- [3] Kaslová, M.: *Další vzdělávání učitelů*, Sborník konference CIEAEM, Neuchatel, 1998.

TRIÁDY JAKO NÁSTROJ VÝZKUMU MYŠLENKOVÝCH PROCESŮ PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ

Jana Kratochvílová

Úvod

Schopnost řešit problémy je pro člověka charakteristická [6, 7]. Její rozvíjení je třeba podporovat ve všech vyučovacích předmětech, zvláště pak v matematice. Chceme-li poskytnout žákovi možnost rozvíjet jeho schopnost řešit problémy, musíme co nejlépe porozumět myšlenkovým procesům, které při řešení problému probíhají. Problematika zkoumání myšlenkových procesů, které se objevují při řešení problému, je velmi široká a je zpracovávána v mnoha pracích, např. [1, 3, 5].

Když požádáme řešitele, aby dodatečně popsal, případně vysvětlil své myšlenkové postupy při řešení problému, většinou se mu to podaří jen rámcově, případně vůbec ne. Učitel či experimentátor je tedy odkázán na písemný (někdy i audiovizuální) záznam průběhu řešení a na svá vlastní pozorování a záznamy řešitelského procesu.

Vymezení výzkumu a jeho výsledky

Ve výzkumu, jehož jedné fázi je věnován tento článek, jsme se zaměřili na studium myšlenkových procesů žáků při řešení triád [2, 8]. Protože se žák v běžné výuce matematiky s takovými objekty nesetkává, nemá k dispozici algoritmy pro řešení úloh o triádách. *Je proto nucen vyhledávat vlastní postupy řešení, což nám umožňuje sledovat autonomii jeho myšlení a míru rozvoje jeho schopnosti nezbytných pro řešení nestandardních problémů.*

Definice Nechť a, b jsou libovolná čísla z množiny $\mathbb{N} - \{0\}$. **Triádou** nazveme každou uspořádanou trojici čísel $(a, b, a + b)$ (např. $(1, 5, 6)$, $(12, 9, 21)$, $(5, 5, 10)$).

Z jedné triády můžeme tvořit další triády různými způsoby. Pro náš výzkum jsme zvolili následující algoritmus (viz obr. 1):

1. Necht' triáda leží na jisté n -té úrovni (např. $[a, b, (a + b)]$ v obr. 1 leží na 1. úrovni, např. $(1, 5, 6)$ leží na 1. úrovni).
2. Při přechodu z n -té úrovně na $(n + 1)$ -ní úroveň provedeme postupně tyto kroky:
 - (a) – Vezmi 1. číslo z triády na n -té úrovni,
 - toto číslo je 1. číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni,
 - vezmi 3. číslo z triády na n -té úrovni,
 - toto číslo je 2. číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni,
 - 3. číslo nové triády je součet prvních dvou čísel této triády na $(n + 1)$ -ní úrovni, např.: z triády $(1, 5, 6)$ vznikne triáda $(1, 6, 7)$,
 - (b) – Vezmi 2. číslo z triády na n -té úrovni,
 - toto číslo je 1. číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni,
 - vezmi 3. číslo z triády na n -té úrovni,
 - toto číslo je 2. číslo nové triády na $(n + 1)$ -ní úrovni,
 - 3. číslo nové triády je součet prvních dvou čísel této triády na $(n + 1)$ -ní úrovni, např.: z triády $(1, 5, 6)$ vznikne triáda $(5, 6, 11)$.

1		$[a, b, (a + b)]$	
2		$[a, (a + b), (2a + b)]$	 $[b, (a + b), (a + 2b)]$
3	$[a, (2a + b), (3a + b)][(a + b), (2a + b), (3a + 2b)][b, (a + 2b), (a + 3b)][(a + b), (a + 2b), (2a + 3b)]$		

Obr. 1: Úrovně triád

Úloh, které vycházejí z této procedury, je celá řada. V našem výzkumu jsme se zaměřili na tyto úlohy:

Úloha 1. Pokračuj v proceduře, jestliže víš, jak z jedné triády na jisté úrovni získáš dvě nové triády na následující úrovni. Jak vypadají triády na n -té úrovni, kde $n = 3$?

Úloha 2. Kolik triád je na n -té úrovni, kde $n = 10$?

Úloha 3. Najdi nejmenší triádu na n -té úrovni, kde $n = 10$. Nejmenší triáda na n -té úrovni má taková tři čísla, jejichž součet dá nejmenší číslo ze součtů na n -té úrovni.

Úloha 4. Najdi největší triádu na n -té úrovni, kde $n = 10$. Největší triáda na n -té úrovni má taková tři čísla, jejichž součet dá největší číslo ze součtů na n -té úrovni.

Úlohy o triádách byly použity ve výzkumu, který je popsán v dalším textu. Stejně tak však mohou být použity ve škole učitelem, protože se domníváme, že jejich řešení prospěje v rozvoji žákových dovedností uvedených dále.

Cílem výzkumu bylo popsat a analyzovat řešitelské postupy žáka při řešení úlohy s triádami s důrazem na *uspořádání prvků v nově vytvořené triádě, dovednost interpretovat, dovednost zobecňovat, porozumění proceduře, schopnost proceduru vykonávat, porozumění úloze a schopnost aplikovat odhalené souvislosti*. Na základě podrobné analýzy žákova postupu řešení úlohy (ve všech případech žáci řešili úlohy v interakci s experimentátorem) můžeme lépe porozumět žakovým myšlenkovým procesům a konceptům.

Průběh experimentu

Modifikované úlohy 1 až 4 byly zadány třiceti 10–11letým žákům ve Velké Británii a v České republice. Do experimentu byli zařazeni žáci na základě návrhu vyučujících, kteří je hodnotili v matematice jako průměrné. Vycházeli jsme z předpokladu, že 10–11letý žák si již osvojil algoritmus sčítání dvou přirozených čísel.

Uspořádání

Náš výzkum ukázal, že koncept uspořádání sám o sobě má většina 10–11letých žáků uchopen dobře. Žák ví, co znamená první, druhý a třetí; zná slova jako nejmenší, menší, větší a největší. Přesto však nemusí dobře pracovat s jejich obsahy, a proto využití tohoto konceptu při řešení úloh s triádami některým řešitelům působí obtíže (viz ukázka dále).

Interpretace

Interpretací řešení úlohy či jistého tvrzení rozumíme schopnost vysvětlit, jak danou úlohu řešit nebo co jisté tvrzení znamená. Je-li žák schopen interpretovat řešení úlohy, budeme předpokládat, že jeho proces řešení je více zvědoměný a pravděpodobně je žák schopen větší sebekontroly. Schopnost interpretace považujeme pro řešení úlohy za nezbytnou. Současně nám tato schopnost poskytuje informaci, jak žák zadání úlohy porozuměl (viz ukázka dále).

Poznámky:

- Odpověď na otázku „Jak jsi dostal tyto triády?“ při řešení úlohy 1 je žakovou interpretací procedury, která současně signalizuje, jak žák proceduře rozumí.

- Úskalím úlohy 2 pro mnohé žáky je fakt, že žák vypisuje triády na každé úrovni v horizontálním směru, ale řešení úlohy 2 (počet triád na n -té úrovni, $n = 10$) je ve směru vertikálním (žák násobí počet triád na předcházející úrovni dvěma, aby získal počet triád na dané úrovni).
- Řešení úloh 3 a 4 pro případ, že v zadané triádě $(a, b, a + b)$ platí $a < b$, jsou umístěna ve směru „skoro vertikálním“ — postupujeme shora dolů, nejmenší triáda je vždy vlevo a největší triáda vždy vpravo od středu řádku. Fixace na horizontální směr při vypisování triád a atypický směr umístění nejmenších, resp. největších triád může žákovi při řešení úloh 3 a 4 např. pro $n = 10$ způsobit problémy.

Předchozí myšlenky dokumentujeme na ukázce z protokolu č. 4:

Škola: Bishop Lonsdale C. of E. (Aided) School, Derby, Velká Británie; Řešitelé: Klaine, Matthew; Třída: 5; Věk: 10;

Experimentátor: Mohl bys mi říci, co dostaneme z triády (1, 6, 7)?

Klaine: 1, 6. (Pauza 20 sekund.)

Exp.: Jedna je (1, 7, 8), kterou jsi správně napsal. Potom existuje ještě jedna triáda z triády (1, 6, 7). (Pauza 10 sekund. Klaine je nesoustředěný.)

Exp.: Přemýšlej. (Pauza 30 sekund.)

Exp.: Řekli jsme, že vezmeme první a třetí číslo, což je triáda (1, 7, 8). Potom vezmeme druhé a třetí číslo. Která jsou to čísla?

Matthew: 13.

Exp.: Ano. Celkem je to 13. Ale triáda je? (Pauza 10 sekund.)

Exp.: Triáda je (6, 7, 13). Klaine, prosím Tě, zapiš tuto triádu na 3. řádek. Triáda (6, 6, 12) není správná triáda. (Klaine má na třetím řádku triády (1, 7, 8), (11, 5, 16), (6, 6, 12), (11, 11, 12), nyní přibyla triáda (6, 7, 13).)

Exp.: Z triády (1, 6, 7) na 2. řádku jsi dostal triády (1, 7, 8) a (6, 7, 13) na 3. řádku. Dobře. Teď mi prozrad, jak jsi dostal triádu (11, 5, 16)?

Klaine: 11 + 5 je 16.

Experimentátor opět vysvětluje celou proceduru a Klaine je vyzván, aby našel nové triády z triády (5, 6, 11).

Zobecňování

Zobecněním řešení úlohy rozumíme nalezení zákonitosti (vzoru), což pro žáka znamená na základě několika konkrétních příkladů (separovaných modelů) vyjádřit obecný popis této zákonitosti (tvar, který je platný pro všechny separované modely). Zobecňování nevyužíváme jen

v matematice či v jiném vyučovacím předmětu, ale i v mnoha situacích běžného života. Žákovu schopnost zobecňovat považujeme za důležitou a nezastupitelnou součástí jeho osobnosti.

Zvládne-li 10–11letý žák všechny úlohy 1 až 4 o triádách bez potíží, je také schopen zobecňovat? Odpověď na tuto otázku můžeme hledat např. tak, že se žáka zeptáme, kolik triád se nachází na n -tém řádku a jak vypadá nejmenší triáda na n -tém řádku (v tomto případě n nebude nahrazeno žádným konkrétním číslem).

Porozumění proceduře a vykonání procedury

Porozumění proceduře by mělo předcházet před schopností proceduru vykonávat (nezabýváme se zde situací, kdy řešitel proceduru vykonává bez porozumění).

Schopností vykonávat proceduru rozumíme žakovu schopnost zapamatovat si a provádět všechny kroky předepsané procedury v požadovaném sledu [4]. Jestliže žák není schopen udržet v krátkodobé paměti všechny kroky procedury, učitel či experimentátor by měl proceduru rozdělit na jednodušší kroky, které je žák už schopen uchopit.

Při řešení úloh s triádami musí žák současně zohlednit:

- jaká čísla z triády budou vybrána do nové triády,
- kam tato čísla budou umístěna,
- jak lze získat třetí číslo, jestliže první dvě čísla nové triády jsou již umístěna.

Porozumění úloze

Teprve když žák rozumí proceduře tvorby triád, můžeme přejít k řešení úloh s triádami. Přitom je nutno stále sledovat, zda žák rozumí všem pojmům ze zadání, zda ví, co se od něho požaduje. Např. v úlohách 3 a 4 k tomu, aby žák mohl najít nejmenší a největší triádu, je třeba, aby rozuměl tomu, co je nejmenší a největší triáda na dané úrovni.

Aplikování odhalených souvislostí

Velmi důležitou schopností při řešení úloh je schopnost aplikovat již získaný poznatek v další úloze.

V našem výzkumu např. žák ví, že z každé triády vytvoří na následující úrovni dvě nové triády, ale už není schopen tuto myšlenku využít pro zjištění počtu triád na následující úrovni.

Zkušenosti z předexperimentu ve Velké Británii

Příprava, realizace a analýza experimentu s triádami ve Velké Británii (probíhal dřív než experiment v České republice) umožnila nejen lépe porozumět řešitelskému procesu žáků, ale ukázala na některé další otázky, kterými je třeba se zabývat. Vyplynula z nich také konkrétní doporučení pro přípravu podobných experimentů.

Předexperiment byl proveden se žáky, kteří na základě experimentátorova požadavku měli mít průměrné schopnosti v matematice. Potvrdilo se, že žáci podle učitelova mínění stejně schopní nemají stejné schopnosti při řešení těchto úloh. Zvláště výrazné rozdíly se projeví v míře porozumění prováděným algoritmům.

Nejvíce nás zajímají žáci, kteří měli problémy při řešení úloh, protože právě oni potřebují pomoci. Předexperimenty, kde byl experimentátor spolu se žákem neúspěšní, ukázaly, jak je důležité vcítění se učitele do role žáka, do úrovně jeho myšlenkových procesů a jazyka. Například je-li při vykonávání procedury triáda pojem pro žáka příliš náročný, pravděpodobně by místo zápisu triády, např. (1, 5, 6), pomohlo žákovi psát trojici čísel s příslušnými znaky $+$ a $=$ ($1 + 5 = 6$), které vysvětlují vztahy mezi čísly. Jakými dalšími způsoby se můžeme přiblížit k žákovu myšlení, abychom mu pomohli?

Při přípravě na experimenty je třeba neustále respektovat různé schopnosti žáků a fakt, že naše představy o myšlení žáků jsou vždy ovlivněny našimi vlastními zkušenostmi a schopnostmi. Při našich předexperimentech ve Velké Británii jsme se setkali s těmito situacemi:

- Žák některou úlohu vyřešil správně a bez zaváhání. Celý proces myšlení proběhl tak rychle, že jej experimentátor jen na základě pozorování žáka nebyl schopen analyzovat. Například jestliže žák našel rychle všechny triády na 3. úrovni, předpokládal experimentátor, že žák proceduru porozuměl; neočekával, že v dalších úrovních s větším množstvím triád žák nebude schopen proceduru vykonávat. Tento problém bylo možné odstranit např. tak, že by experimentátor žáka požádal, aby vyhledal triády na 4. úrovni.
- Experimentátor musí být připraven na situaci, kdy žák úloze neporozumí. Měl by mít připravené návodné otázky, kterými může zjistit příčinu žakových problémů. Není-li např. žák schopen pokračovat v proceduře tvorby nových triád, nestačí, aby experimentátor

tor opakoval pravidla pro vykonávání procedury, ale je třeba, aby zjistil, zda žák opravdu rozumí samotnému pojmu triáda.

Jedním z cílů probíhajícího výzkumu je provedení srovnávací analýzy řešitelských procesů při řešení úloh s triádami u 10–11letých žáků v České republice a Velké Británii. K tomu bylo nutno experiment systematizovat a standardizovat. Byla vytvořena poměrně rozsáhlá posloupnost kroků, kterými může experimentátor žákovi pomoci. Byl omezen počet proměnných faktorů, které mohou experiment ovlivňovat (např. počet žáků při experimentu, experimentátorovo formulování úloh a jejich pořadí, experimentátorova volba otázek při žákově řešení úloh). Uvedme příklady:

- Jak žáka, tak i experimentátora ovlivňuje, zda jsou spolu při řešení úlohy sami či zda je žák ve skupině spolu s dalšími žáky. Ve skupině se žák cítí méně osamocen, což může pozitivně ovlivnit jeho řešení ve srovnání se situací, když je při experimentu sám.
- Zadá-li experimentátor úkoly typu:
 - a) *Doplň triády* (3, 8, –), (23, 17, –), (–, 5, 10), (4, –, 16)
 - b) *Uveď tři příklady různých triád*,pak experimentátor vytváří jinou situaci, než když nezadá vyřešení podobných úloh a spoléhá se na to, že žák rozumí jeho vysvětlení pojmu triáda. V prvním případě experimentátor žákovi umožní upevnit si nový pojem a zároveň zjistí, zda může pokračovat v dávání dalších úloh.

Literatura

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava, SPN, 1990.
- [2] Hejný, M. — Stehlíková, N.: *Triády — nástroj modelování*, In: Sborník Dva dny s didaktikou matematiky 1998. Ed.: Jirotková, D. — Stehlíková, N., s. 36–40, PedF UK, Praha, 1998.
- [3] Kratochvílová, J.: *Thinking Processes Involved in Solving Combinatorial Problems*, In: Proceedings ERCME 97. Ed.: Hejný, M. — Novotná, J., s. 63–66, PedF UK, Praha, 1997.

- [4] Kubínová, M.: *Calculative Process as a Sequence of Operations*, In: Proceedings SEMT 95. Ed.: Hejný, M. — Novotná, J., s. 131–133, PedF UK, Praha, 1995.
- [5] Novotná, J.: *Cognitive Mechanisms and Word Equations*, In: Proceedings 32. Tagung für Didaktik der Mathematik. München, 1998. V tisku.
- [6] Polya, G.: *Mathematical Discovery 2*, USA, John Wiley & Sons, 1996.
- [7] Polya, G.: *How to Solve It*, Princeton Univ. Press, 1973.
- [8] Repáš, V. — Černek, P. — Pytlová, Z. — Vojtela, I.: *Matematika pre 5. ročník základných škôl. Prirodzené čísla*, Orbis Pictus Istropolitana ISBN, s. 4, Bratislava, 1997.

Práce vznikla s čiastočnou finančnou podporou Grantovej agentúry UK, grant č. 306/1998 (Analýza kognitívnych procesů žáků při řešení slovních úloh).

PROCES A KONCEPT V UCHOPENÍ ÚLOHY

Jarmila Novotná, Marie Kubínová

Motto: Čím častěji, důkladněji a čím rozmanitějšími způsoby nahlížíme do světa, tím dále posunujeme obzor.

Vopěnka, P.: Rozpravy s geometrií [6]

Úvod

V současné době přes všechny snahy a proklamace zůstává ve vzdělávacích programech pro základní školu dominantní složkou učebních osnov matematiky aritmetika a algebra. I když jsou v mnoha pracích [2, 3] dostupných běžnému učiteli prezentovány možnosti vizualizace, učitelé dávají přednost aritmetickým a algebraickým přístupům, výrazně preferují algoritmy.

Na druhé straně nelze přehlédnout, že v běžném životě je každý z nás vystaven proudům informací, z nichž velká část je v podobě obrázků, schémat, grafů a diagramů. Je tomu tak jistě i proto, že jde o efektivní možnost, jak předat velké množství informací v omezeném čase i prostoru, neboť „Obrazy přenášejí mnohem více informace než slova. Po mnoho let jsme odvykali žáky používat obrázky, protože ‚nejsou přesné‘. To je smutné nedorozumění. Ovšem, obrázky nejsou přesné, ale pomáhají myslet, a takovouto pomocí nelze opovrhovat.“ ([5], převzato z [2]).

Jedním z charakteristických rysů vyučování matematice je to, že si žák v jeho průběhu postupně osvojuje strategie, které mu mají umožnit úspěšně řešit typové úlohy. Četnost těchto strategií a možnost jejich aplikace u analogických typů úloh i jejich případný transfer na řešení netypové úlohy jsou ovlivněny mnoha faktory (např. přístupovou strategií učitele, koncepcí učebnic a učebních pomůcek, zkušenostmi žáka, ...), z nichž by mohl být každý předmětem samostatného výzkumu.

Ne vždy úlohy, které před žáka staví nejen vyučování, ale i situace v běžném životě, patří mezi typové. Často teprve při řešení nestandardních úloh se ukáže, zda je žák schopen provést transfer strategie, která je uložena v jeho poznatkové struktuře, nebo zda volí zcela odlišné prostředky, aby mohl nestandardní problém uchopit a řešit. Úspěšnost této

volby významně ovlivňuje škála různých reprezentací, které má v daném okamžiku žák nejen k dispozici, ale které je v daném okamžiku schopen aktivovat.

Charakteristickým rysem vyučování geometrii je využití vizualizace nejen při prezentaci problému, ale také jako možného prostředku jeho řešení. Ve vyučování aritmetice a algebře převládají v tradičním pojetí verbální přístupy a obrázek je odsunut do role ilustrace problému, v lepším případě demonstruje výukovou situaci. Proto jsme zaměřili náš výzkum na uplatnění vizualizace při řešení aritmetických a algebraických problémů.

V první fázi našeho výzkumu jsme realizovali předexperiment, jehož základem byla tato úloha:

Úloha Do prodejny přivezli velkou bednu s keramikou. V bedně je b menších bedniček, v každé bedničce je k krabic, v každé krabici r krabiček, v každé krabičce s balíčků a v každém balíčku v váziček. Vypočti, kolik keramických předmětů je v bedně.

Její zadání bylo modifikováno podle věku respondentů (žáků 3. až 9. ročníku základní školy) od aritmetické podoby přes smíšené aritmeticko-algebraické zadání až po ryze algebraické zadání. Záměrně jsme zvolili takový kontext úlohy, aby implicitně navozoval procesuální uchopení zadání.

Předexperiment mapoval:

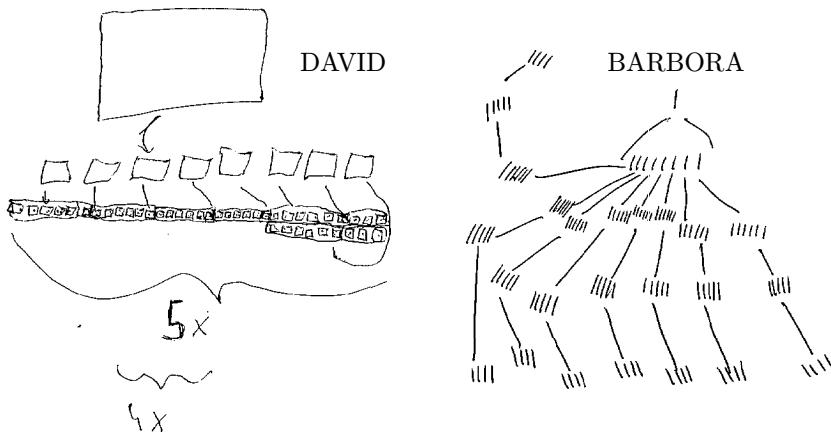
- Zda žák při řešení úlohy užije grafickou reprezentaci.
- Jaké typy grafické reprezentace žák volí (včetně rozlišení konceptu a procesu).
- Jak se grafické znázornění zadání úlohy promítá do strategie řešení.

Uchopení zadání úlohy

Vzhledem k rozsáhlosti výsledků předexperimentu můžeme v tomto článku uvést pouze některé z nich. Nebudeme se vůbec zabývat těmi, které nesouvisí s vizualizací zadání úlohy, při prezentaci ostatních se soustředíme především na to, zda žák uchopil zadání procesuálně nebo konceptuálně nebo při řešení úlohy přecházel od jednoho z nich k druhému.

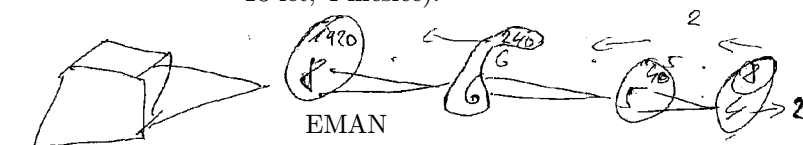
Procesuální uchopení zadání úlohy

Za *procesuální uchopení zadání* naší úlohy budeme považovat všechny žákovské výpovědi, kdy žák graficky znázorňuje, že alespoň některé obaly (krabice, krabičky, ...) „rozbalil“ (viz např. Adam, 11 let, 4 měsíce).



Zatím můžeme hovořit o třech různých úrovních grafického záznamu uchopení úlohy:

- Žák užívá vizualizaci pouze k nastartování procesu řešení (v aritmetické nebo algebraické podobě) nebo k evidenci všech vrstev „rozbalování“ (Eman, 14 let, 8 měsíců).
- Žák graficky manipuluje se schematicky znázorňnými předměty po celou dobu řešení úlohy a ve všech vrstvách „rozbalování“ (Barbora, 13 let, 8 měsíců).
- Žák nahrazuje na některé úrovni schematické znázorňování předmětů aritmetickými/algebraickými operacemi, dochází k abstrakčnímu zdvihu (David, 13 let, 4 měsíce).

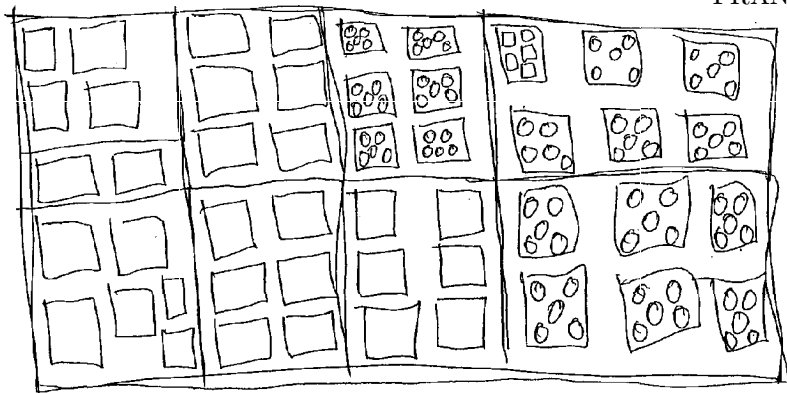


„Rozbalované“ předměty jsou nejčastěji znázorňovány jako obdélníky (Adam), někteří žáci abstrahují při znázorňování až k užití čárky jako symbolu pro jeden předmět (Barbora). Proces „rozbalování“ je obvykle prezentován orientovanou nebo neorientovanou „čarou“ a především umisťováním symbolů pro již „vybalené“ předměty mimo grafické znázornění předcházejícího obalu. Přitom někteří žáci odlišují jednotlivé vrstvy barevně.

Konceptuální uchopení zadání úlohy

Za *konceptuální uchopení zadání* naší úlohy budeme považovat všechny žákovské výpovědi, v nichž žák uchopil zadání úlohy jako celek a znázornil graficky uspořádání předmětů v největším obalu (viz např. Franta, 12 let, 4 měsíce).

FRANTA



Obdobně jako v předchozím případě můžeme hovořit o třech různých úrovních grafického záznamu uchopení úlohy:

- Žák užívá vizualizaci pouze k nastartování procesu řešení (v aritmetické nebo algebraické podobě) nebo k evidenci všech vrstev „rozbalování“ (Cyril, 15 let, 6 měsíců).

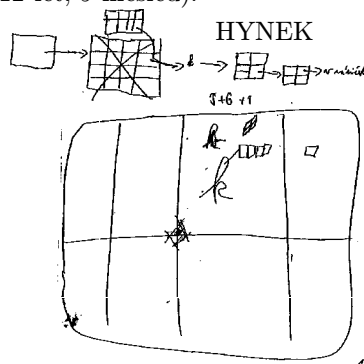
CYRIL

K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1
K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1	K. 5. 4. 1

- Žák interpretuje zadání úlohy jako hotové schéma rozložení předmětů ve vnějším obalu (Franta). Je-li v zadání úlohy větší počet vrstev, není zpravidla schopen strukturu detailně zaznamenat (např. proto, že volí nevhodné měřítko).
- U žáka, který znázorní schematicky několik vnějších vrstev, dochází k abstrakčnímu zdvihu a žák další vrstvy popisuje pomocí aritmetických operací (Cilka, 12 let, 9 měsíců).

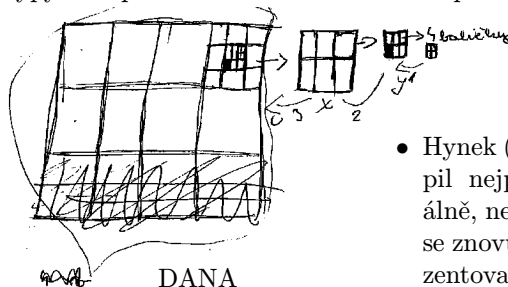
CILKA

5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4
5	4	5	4	5	4	5	4



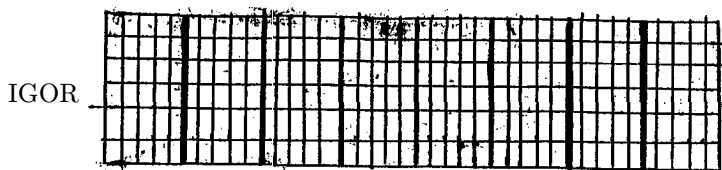
Procesuálně-konceptuální, resp. konceptuálně-procesuální uchopení zadání úlohy

Za *procesuálně-konceptuální*, resp. *konceptuálně-procesuální uchopení zadání* naší úlohy budeme považovat všechny žakovské výpovědi, v nichž se explicitně nebo implicitně odehraje alespoň jeden přechod mezi oběma typy uchopení zadání. Ukážeme to na příkladech.



- Hynek (14 let, 3 měsíce), který uchopil nejprve zadání úlohy procesuálně, nebyl při řešení úspěšný, proto se znovu vrátil k zadání úlohy a prezentoval ho konceptuálně.

- Dana (12 let, 9 měsíců) naopak nebyla schopna na základě konceptuální reprezentace zadání úlohu úspěšně uchopit, proto přešla k procesuálnímu uchopení.



- Grafická výpověď Igora (13 let, 8 měsíců) o jeho uchopení zadání úlohy je konceptuální, ale z kontextu obrázku usuzujeme, že tomuto uchopení předcházelo uchopení procesuální.

Závěr

V předchozím textu jsme charakterizovali různé typy grafické reprezentace slovně popsané situace z hlediska konceptuálního a procesuálního uchopení situace střídání a jejich prolínání.

Řada dalších otázek zůstává otevřená, např. uplatnění různých forem reprezentace (symbolická, grafická, tabulková, obrazová, ...) a vzájemné transformace těchto reprezentací, ale také míra věrnosti obrázku, míra podrobnosti obrázku, míra abstrakce nebo využití obrázku k nalezení strategie řešení úlohy.

Literatura

- [1] *International Handbook of Mathematics Education*, Ed. A. Bishop, K. Clements, Ch. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice*, Praha, SPN, 1989.
- [3] Kuřina, F.: *Deset pohledů na geometrii*, Praha, MÚ AV ČR, ALBRA, 1996.
- [4] Novotná, J.: *Using Geometrical Models and Interviews as Diagnostic Tools to Determine Students' Misunderstandings in Mathematics*, In: Sborník SEMT 97. Ed. M. Hejný, J. Novotná., s. 61–67, Prometheus, Praha, 1997.
- [5] Stewart, I.: *Concepts of Modern Mathematics*, rusky, Minsk, 1980.
- [6] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií*, Praha, Panoráma, 1989.

Práce vznikla s částečnou finanční podporou Grantové agentury ČR, grant č. 406/96/1186.

JAK ŽÁCI CHÁPOU SLOVNÍ ÚLOHY SE ZLOMKY

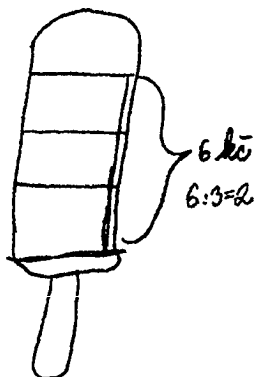
Marie Tichá

Zkušenosti z vyučování ukazují, že většina žáků má velké problémy s řešením slovních úloh a často se proto uchylují k ovládnutí návodů pro řešení určitých typových úloh. Uchopování slovních úloh s porozuměním, vytvoření představy, mentálního modelu, vhodný způsob reprezentace, volba strategie řešení je pro ně náročné. (Uchopováním úlohy rozumíme, stručně řečeno, proces probíhající ve vědomí člověka při vnímání úlohy. Jeho podstatnou součástí je nalezení klíčových objektů a jevů a vztahů mezi nimi a rozhodnutí se pro strategii řešení [2, 3]).

V tomto příspěvku uvedu několik poznatků ze školské praxe a z výzkumu zaměřeného na zjišťování vývojových trendů v chápání pojmu zlomek. Na příkladech žákovských řešení dvou příkladů slovních úloh ukážu, jak žáci přistupovali k jejich řešení, jaké strategie volili a také některé překážky pro uchopování těchto úloh.

Úloha 1. Prodavač snížil cenu nanuku o $1/4$ na 6 Kč. Jaká byla cena nanuku před zlevněním?

Úloha 2. Jirka a Martin mají dohromady 35 kuliček. Jirka jich má o $1/3$ více než Martin. Kolik kuliček má Jirka?



MARTINA 11

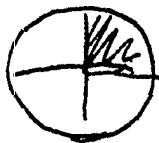
Pojem zlomek patří k nejtěžším pojmům. Žáci proto potřebují čas na získávání zkušeností a shromažďování modelů z různých oblastí. U těchto modelů můžeme sledovat nejméně tři polarity s ohledem na:

1. kvalitu prostředí, tzn. „diskrétní“ versus „kontinuální“ (kuličky versus stuha),
2. slovní vyjádření, tzn. „ n stejných částí“ versus „ n -tina“,
3. činnosti žáků, tzn. „evidence“ versus „konstrukce“.

Od konkrétních modelů majících původ v reálných životních situacích a od činnostních reprezentací žáci přecházejí postupně k obrázkové (ikonické) reprezentaci (čokoláda – obdélník; dort, koláč – kruh; tyč, provázek – úsečka). Některé modely tak přebírají roli univerzálních modelů [1] a ty pak žáci používají při vizuální reprezentaci slovních úloh (jako například MARTINA, ANNA a CYRIL při řešení Úlohy 1).

ANNA11 $6 + \frac{1}{4} = 8$

$\frac{1}{4} = 2 \text{ Kč}$



6 Kč

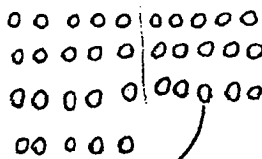
CYRIL10



Jak je vidět z předložených prací, vizuální (obrázková, ikonická) reprezentace může žákům pomáhat při uchopování slovních úloh.

Někteří žáci však používají obrázky ne pro vizuální reprezentaci, ale jako ilustraci. Úlohu nejprve vyřeší například úsudkem a teprve potom (ve snaze své řešení odůvodnit, ukázat, „jak to musí být“) své řešení ilustrují, doprovázejí obrázkem (PETRA, Úloha 2).

PETRA 11



reda pětice

Poměrně hodně žáků řešilo Úlohu 1 experimentálně (metodou pokus — omyl). Výsledek nejprve odhadli a potom zkoušeli, ověřovali, zda odhad odpovídá podmínkám úlohy (MARTA).

$6 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
 $6 - 4,5 = 1,5$

Před slovním naruk stal 4,5 Kč.

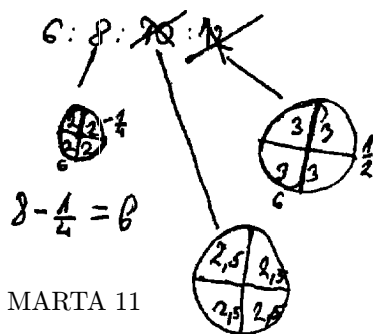


6 Kč

Vypočet
 a
 napisa-
 ný

LENKA 11

Nakreslení obrázku však ještě neznamená porozumění podmínkám úlohy, uchopení úlohy s porozuměním vedoucí ke správnému výsledku. Podstatné je vytvoření zdravé představy a odpovídajícího mentálního modelu. (Vizuální reprezentace zřejmě není vhodná pro všechny žáky. Některé zahraniční výzkumy dokonce upozorňují na to, že pro téměř 10 % populace je vizuální reprezentace nevhodná).

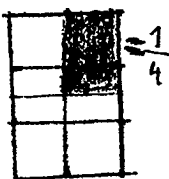


MARTA 11

Nejčastější žakovská řešení Úlohy 1 byla podobná těm, která předložili VOJTA, LENKA, RENATA a VĚRA. V jejich pracích se projevila největší překážka pro uchopení úlohy se zlomky s porozuměním — v textu není jasně deklarován celek a žáci nejsou schopni sami poznat, co je celek (základ) a co část. Potvrdilo se, že při řešení slovních úloh se zlomky jde především o pochopení vztahu „část — celek“.

VOJTA postupoval ve dvou krocích:

1. Zadání úlohy (obsahující přirozené číslo a zlomek) vyvolalo stereotypní jednání (výpočet: $1/4$ ze 6 Kč je 1,50 Kč).



VOJTA 11

$$\frac{1}{4} \text{ ze } 6 = 1,50$$

$$6 + 1,5 = 7,5$$

namuk stal dříve 7,50 Kč

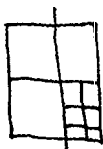
2. Původní cena byla vyšší, proto: 6 Kč + 1,50 Kč = 7,50 Kč.

Ve Vojtově řešení můžeme ukázat dvě překážky pro uchopení úlohy s porozuměním: Slovo „čtvrtina“ je signálem k provedení operace „děleno čtyřmi“. Teprve po provedení této operace se žáci rozhodují, co s výsledkem (číslem), který dostali. Pokud je v textu zlomek a přirozené číslo, pak zlomek je chápán jako operátor a přirozené číslo jako celek. (Pokud jsou v textu úlohy dvě čísla, pak jako celek je bráno větší z nich.)

Častým jevem je to, že žáci neřeší zadanou úlohu, ale podobně jako LENKA a RENATA úlohu, pro jejíž řešení znají standardní postup.

LENKA: Prodáváč prodával nanuk za 6 korun. Jeho cenu snížil o $1/4$. Kolik stojí nanuk nyní?

RENATA: Prodáváč snížil cenu nanuku o $1/4$, to je o 6 Kč. Kolik korun stál nanuk před zlevněním?



RENATA 11

$$\frac{1}{4} = 6 \text{ Kč} \quad 6 \cdot 4 = 24$$

$$\frac{1}{4} = 24 \text{ Kč}$$

Před zlevněním stál nanuk 24 Kč.

V Renatině řešení

se projevil další jev —

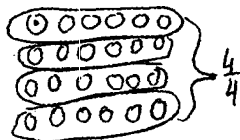
žáci nerozlišují čtyři

možnosti: „Změna o a/b , to je o x “ (a dále možnosti o – na, na – o, na – na). V běžných textech, které žáci čtou, hrají důležitou roli slovesa a podstatná jména. Tady mají významnou roli také předložky a spojky

(o, na, než) a těm žáci nevěnují pozornost.

$$4 \cdot 6 = 24$$

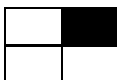
$$\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$



nanuk před zlevněním stál 24 Kč.

VĚRA 11

Uvedená žákovská řešení ukázala, že určitý obrázek ještě nemusí znamenat uchopení úlohy s porozuměním. Tentýž typ obrázku byl východiskem pro správná i chybná řešení.



3/4...6	4/4...6	4/4...6	1/4...6
1/4...2	1/4 ze 6 je 1,50	3/4...4,50	4/4...24
4/4...8	6 + 1,50 = 7,50		

Někteří žáci chtějí něco vypočítat a proto provádějí určité početní operace. Místo, aby se snažili uchopit úlohu s porozuměním, věnují energii provádění výpočtů. Znalost kalkulu se tak může stát překážkou uchopování, například u EVY vyvolala strategii „nasadit zlomky“. (Evin postup ale nemusí být ryze formální.)

EVA 11

$$\frac{6 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4} \text{ Kč}$$

$$\frac{35}{1} - \frac{1}{3} = \frac{105-1}{3} = \frac{104}{3} = 34 \frac{2}{3}$$

Podívejme se ještě jednou na ANNINO řešení. Jak máme rozumět jejímu zápisu? ANNA zde zřejmě chápe zápis „ $1/4$ “ ne jako zlomek, ale jako symbol k označení určitého objektu. Obrázek a další záznamy svědčí o vzhledu do situace a o uchopení úlohy s porozuměním. (S podobnými zápisy jsme se v provedeném šetření setkali poměrně často. Našli jsme

je také v řešeních úlohy 2 (ADÉLA). Žák rozdělí celek na n stejných částí. Jednu n -tinu chápe jako novou jednotku jiné kategorie, jako základ nového nazírání.)

ADÉLA 11

Jirka měl 20 kuliček, Martin měl 15 kuliček. Jirka měl $\frac{2}{3}$ z celku, Martin měl $\frac{1}{3}$ z celku. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ z celku. $20 + 15 = 35$. $35 : 5 = 7$. $7 \cdot 5 = 35$. $35 - 5 = 30$. $30 : 2 = 15$.

Mnoho (dá se říci většina) žáků chápe zadání Úlohy 2 stejně jako KAREL. V jejich řešení se projevuje další neporozumění. Žáci chápou formulaci „A má o jednu n -tinu víc než B“ tak, že A má $(p+1)$ n -tin a B má (p) n -tin a oba z téhož celku (nezáleží jim přitom na tom, zda n je liché nebo sudé číslo). Například úlohu Petr a Jirka zjišťují své úspory. Jirka má o $1/4$ víc korun než Petr. Dohromady mají 90 korun. Kolik korun má Petr? řešil jeden ze žáků takto:

Je tu $1/4$... 4 stejné díly ... $\square\square\square\square$

o $1/4$ víc ... $\square\square\square\square$

Petr Jirka

90... $90 : 5 = 18$... jeden díl

Petr ... 2 díly ... 36 Kč

Stejně jako Karel řešili Úlohu 2 i mnozí starší studenti. U nich se prokázala silná závislost na kontextu.

*Jirka má $\frac{2}{3}$ z 35.
Martin má $\frac{1}{3}$ z 35.
Dohromady: 35*



KAREL 11

Pokud jsme použili situace typu „Hanka vydělala o $1/3$ víc než Iva. Obě dohromady 3 500 Kč.“, byla všechna řešení správná. Během dalších dvou let jsme zadali stejné skupině žáků obdobné úlohy. Například:

Úloha 3. Eva utratila $1/4$ z ušetřených peněz za knihu. Zbylo jí 180 Kč. Jaká byla cena knihy?

Úloha 4. Honza zaplatil za mapu a knihu dohromady 105 Kč. Kniha byla o $1/3$ dražší než mapa. Kolik korun stála kniha?

Ukázalo se, že někteří žáci zůstávají u určité vyzkoušené a ověřené strategie (v tom smyslu, že tato strategie je zatím vždy dovedla ke správnému výsledku). Ve většině případů se dá ale říci: čím starší žák je, tím více tihne k šablonám. Žáci opouštějí vizuální reprezentaci, řešení úsudkem, experimentální řešení a přecházejí k symbolické reprezentaci, zvláště k rovnicím. Rozvoj dítěte přitom souvisí s rozvojem různých způsobů reprezentace a dovedností „překládat“ mezi nimi. Úroveň porozu-

mění lze dobře zjišťovat například tak, že úkolem žáků je formulovat slovní úlohu k dané aritmetické úloze. Ukažme si to na několika příkladech slovních úloh, které žáci sestavili k příkladu „ $2/3 + 1/4$ “.

Petr snědl $2/3$ koláče a pak ještě $1/4$. Kolik kousků koláče snědl?

$2/3$ žáků třídy jsou chlapci a $1/4$ jsou děvčata. Kolik je dětí ve třídě?

Tom snědl 2 ze 3 hrušek a 1 ze 4 jablek. Kolik dvanáctin snědl?

Předpokládala jsem, že na návštěvu přijde 12 lidí. Upekla jsem koláč a rozdělila ho na 12 stejných částí. Ale přišli pouze 3 lidé. Dva z nich chtěli každý $1/3$ a jeden chtěl $1/4$ celého koláče. Jakou část koláče snědli?

Znakový systém, symbolická reprezentace (především později algebra) je sice univerzální, ale do jisté míry brzdí tvořivost a schopnost konstruovat, vytvářet modely. To, že se žáci seznamují s algebrou a cvičí se v řešení rovnic, je nevede k rozvoji schopnosti uchopovat úlohy s porozuměním. Šetření prokázalo, že starší žáci nejsou při řešení slovních úloh úspěšnější než byli, když tyto úlohy řešili úsudkem, experimentálně, pomocí obrázků a pod., před probráním tématu zlomek, resp. rovnice. Zlepšila se jen jejich početní technika.

Pro reedukaci zjištěných nedostatků a chyb je třeba se zaměřit zvláště na posílení ideje celku například v následujících činnostech: Návrat k manipulacím, činnostním reprezentacím. Využití různých grafických znázornění, ikonických reprezentací. Provádění sémantické analýzy textu. Čtení textu úlohy (i s ohledem na předložky a spojky). Vysvětlování textu úlohy a podmínek samotnými žáky. Zařazení téhož problému do jiného kontextu. Překlady mezi různými způsoby reprezentace.

Žádnou z těchto činností není možné chápat jako ztrátu času.

Literatura

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1989.
- [2] Hejný, M.: *Zmocňování se slovní úlohy*, Pedagogika, 45, č. 4, s. 386–399, 1995.
- [3] Koman, M. — Tichá, M.: *Jak pomocí pravidelností a závislostí získávat vhled do situací*, In.: Sborník konference „5. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol“, s. 50–53, JČMF, 1995.

Práce vznikla s částečnou finanční podporou Grantové agentury ČR, grant č. 406/96/1186.

SEKCE

UČEBNICE A UČEBNÍ POMŮCKY

INFORMACE O PŘIPRAVOVANÉ SBÍRCE ÚLOH Z MATEMATIKY PRO SOŠ, STUDIJNÍ OBORY SOU A NÁSTAVBOVÉ STUDIUM

**Milada Hudcová, Libuše Kubičíková,
Růžena Blažková**

V roce 1991 vydal Prometheus *Sbírku úloh* ..., [1]. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, studijní obory SOU a nástavbové studium*, [2], o které vás chceme informovat, je přímým tematickým pokračováním sbírky [1] a navazuje na ni i pojetím. Obsahuje úlohy ze základních témat středoškolského učiva matematiky: *Číselné obory, absolutní hodnota reálného čísla, Mocniny a odmocniny, Výrazy, Rovnice a nerovnice a jejich soustavy, Funkce a jejich vlastnosti, Exponenciální funkce, Logaritmická funkce, logaritmus, logaritmické rovnice, Goniometrické funkce obecného úhlu a jejich užití, Komplexní čísla, Kombinatorika, pravděpodobnost, Vektorová algebra a analytická geometrie v rovině, Posloupnosti a řady, Kontrolní práce* a je opatřena výsledky úloh. Snažíme se v této sbírce poskytnout dostatek úloh k přípravě studentů v matematice

1. v oblasti základního středoškolského učiva,
2. k maturitní zkoušce,
3. k přijímací zkoušce na vysoké školy technického a ekonomického směru.

Sbírky [1] a [2] tvoří ucelenou soustavu na pomoc vyučování matematice využitelnou ve studijních oborech SOU, SOŠ, zejména pak v nástavbovém maturitním studiu.

Specifikou sbírky [2] je, že respektuje zvláštní podmínky, které jsou zatím v uvedených typech studia běžné (např. nižší vstupní dispozice studentů, malé počty vyučovacích hodin apod.). Proto uvádíme v rámečcích stručné přehledy základních poznatků, značný počet vzorových řešených úloh a dostatek úloh s rostoucí obtížností na procvičování znalostí a dovedností.

Předpokládáme, že sbírka [2] bude vhodná i pro samostatné studium studentů. Podmínkou úspěchu při práci s ní je však *pečlivý výběr z nabídnutých úloh*, který by měl provést vyučující podle zvláštních podmínek ve třídách, či u jednotlivců.

Poslední částí sbírky [2] jsou kontrolní práce monotematické a kombinované. Navíc jsou zde zařazeny kontrolní práce z planimetrie a stereometrie. Tato část s náročnějšími úlohami je určena zejména k přípravě maturujících z matematiky a k přípravě k přijímacím zkouškám na VŠ.

Některé úlohy jsou opatřeny vzorovým řešením pro případnou samostatnou práci studentů. Na řešené úlohy navazují úlohy s postupně rostoucí obtížností, jejich využití je zcela závislé na volbě vyučujícího. Poslední úlohy v kapitole jsou náročnější a využívají často i znalosti z jiných částí matematiky, jsou určeny pro maturující z matematiky a jako příprava k přijímacím zkouškám na VŠ.

Literatura

- [1] Hudcová, M. — Kubičková, L.: *Sbírku úloh z matematiky pro SOU a SOŠ*, Prometheus, Praha, 1991.
- [2] Hudcová, M. — Kubičková, L. — Blažková, R.: *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, studijní obory SOU a nástavbové studium*, předpokládá se Prometheus, 1999.

BUDEME MÍT DOST PŘÍKLADŮ NA KUŽELOSEČKY?

Karel Otruba

Je lákavé nazvat takto svůj příspěvek právě v době, kdy je v módě klást si hodně zvědavých otázek ohledně budoucnosti. A tohle je taková groteskní aplikace na starosti učitele matematiky. Nevím totiž, jaké jiné by mohl mít. Název se mi ale hned zdál dlouhý a proto jsem se pokoušel jej zkrátit. S úžasem jsem zjistil, že zkracování například ubíráním slov od konce nečekaně nastoluje otázky stále závažnější a závažnější:

Budeme mít dost příkladů?

Budeme mít dost?

Budeme mít?

Budeme?

V tomto okamžiku jsem se rozhodl, že celý původní název raději ponechám. Ono žertovat se dá i z jiné strany. Původní název totiž vzdáleně připomíná otázku, co si počneme, až budou všechny příklady vypočítané. Nebo dokonce přihlouplý dotaz jistého nejmenovaného studenta, proč vlastně stále znova a znova počítáme příklady, když je přece před námi už mnohokrát spočítali jiní.

Tento příspěvek volně navazuje na moji úvahu „Maturita nad Labem“, která zde zazněla minule. Jde o snad netradiční formu maturitního opakování, jehož hlavním cílem jsem si vytknul hledání souvislostí mezi partiiemi zdánlivě vzdálenými a nesouvisejícími.

Studenti by měli vědět, že kuželosečka je zadaná šesti reálnými koeficienty v rovnici

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

kde A, B, C nejsou současně nuly. Například $(10100 - 1)$ je jednotková kružnice se středem v počátku, $(a00b - 1c)$ je známá kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ (kde a není nula) atd. Omezíme-li nějak výběr koeficientů, lze si klást otázku, kolik kvadratických forem lze jejich užitím

vytvořit. Pripušte třeba jen pouhé nuly a jedničky a první úloha může vypadat takto:

1) Kolik uspořádaných šestic můžeme vytvořit, užijeme-li pouze nuly a jedničky?

Je to úloha kombinatorická, jejím výsledkem je číslo $2^6 = 64$ a ovšem ne všechny tyto šestice budou představovat kuželosečku. Další úloha tedy zní:

2) Které z těchto šestic neurčují kuželosečku a kolik jich je?

Jsou to všechny takové šestice, které mají na prvních třech místech samé nuly. Je jich tedy $2^3 = 8$. Na kuželosečky proto zbývá 56 možností.

Bylo by zajímavé zde otisknout všech 64 možností a postupně je rezebírat. Tím bychom ovšem ztratili hodně místa, a navíc mi redakce časopisu Učitel matematiky (jmenovitě RNDr. Dag Hrubý) v Hradci Králové na jaře slíbila, že všechny tyto šestice s jistou nenulovou pravděpodobností někdy otiskne. Zde se tedy omezím jen na výběr některých z nich. Neklame-li mne můj počítač, vypadá obecný přehled takto:

Mezi osmi vyřazenými možnostmi je jedna prázdná množina (000001), jedna celá základní množina — tedy celá rovina (000000) a šest přímek (například (000010) — osa x).

Kuželosečky pak jsou zastoupeny následovně:

Regulární		Singulární	
Elipsa	6	Dvě rovnoběžky	2
Parabola	8	Dvě různoběžky	10
Hyperbola	14	Dvojnásobná přímka	2
Formálně reálná	10	Bod	2
		Formálně reálná	2

Možná vás napadne, že „běžnými středoškolskými metodami“ se nedají všechny tyto kuželosečky klasifikovat, neboť obecný rozbor kvadratické formy se na středních školách neprovádí (s výjimkou tříd 01). K svému potěšení jsem však zjistil, že se všechny tyto kuželosečky naopak „odhalit“ dají, a to běžnými gymnaziálními metodami. Užívám záměrně slova „odhalit“, ne „klasifikovat“, poněvadž vycházíme ze znalostí kuželoseček zavedených gymnaziálním způsobem a z toho, že studenti mají o nich především vizuální představu. Podotýkám také, že před studenty nezatajuji existenci kuželoseček singulárních, která přirozeně vyplyne

hned v první hodině tohoto tématu z demonstrace „sekání kužele“ rovinou. Neváhám ani sdělit (a občas i používat) jejich starší český název, totiž „kuželosečky zvrhlé“.

Běžnou středoškolskou úpravou je třeba vytýkání před závorku. Tímto úkonem odhalíme například kuželosečky typů (110000), (100100) nebo (110100) — jde o dvě přímky.

Parabola jakožto graf kvadratické funkce je zadána například šesticí (100111). Záměna souřadných os, což souvisí s invertováním relace, odhalí další paraboly s „vodorovnými“ osami, k té předchozí by náležela (001111). Jsou vzájemně souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Jako grafy funkcí se dají odhalit i některé složitější případy. Mám na mysli některé hyperboly, které mají jednu asymptotu rovnoběžnou s osou y , například (110101). Dá se převést na tvar $y = -x - 1/x - 1$. Nyní můžeme nasadit běžné metody zkoumání průběhu funkce. Jde o hyperbolu, která má osu y za jednu asymptotu, druhou je přímka $y = -x - 1$. Středem je bod $S(0, -1)$. Průběh této funkce mohou studenti dobře odhadnout i na základě „pouhých“ limitních úvah, je snadné představit si chování grafu v okolí nuly a „velmi daleko od nuly napravo nebo nalevo“.

Podobně lze naložit třeba s hyperbolou (110111). Lze převést na tvar $y = -(x^2/(x+1)) - 1$. Zkoumání průběhu funkce je o něco pracnější, ale stále běžné.

Záměnou souřadných os lze pak opět dostat inverzní křivky jako funkce $x = f(y)$.

Další metodu jsem pracovně nazval metodou „tomografickou“. Spočívá v tom, že chápeme jednu ze souřadnic jako parametr. Dostaneme tak svazek rovnoběžek s jednou nebo druhou souřadnou osou, který nám „řeže“ zkoumanou křivku jako tomograf. Podle kvality průniku této přímky a zkoumané křivky lze pak usoudit, o jakou kuželosečku se jedná. „Středoškolská běžnost“ této metody by nemusela být na první pohled zřejmá, ale nejde o nic jiného než o staré známé kvadratické rovnice s parametrem, jen použité v jiné souvislosti. Vhodným příkladem je elipsa (111110), tedy

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = 0.$$

Považujme proměnnou y za parametr ($y = \text{konst.}$) z množiny $\mathbb{R}$. Rovnici pak upravíme na tvar $x^2 + (y+1)x + y^2 + y = 0$. Studenty ubezpečíme, že jde o starou známou kvadratickou rovnici s parametrem y a s koeficienty $a = 1$, $b = y + 1$, $c = y^2 + y$. Její diskriminant je $D = -3y^2 - 2y + 1$.

Zde jsme se dostali k opakování kvadratických nerovnic a snažíme se o co nejefektivnější řešení. Vyžadují především od maturantů, aby si dokázali udělat okamžitou představu o grafu kvadratické funkce podle koeficientů (zde zkoumáme kvadratickou funkci $z = -3y^2 - 2y + 1$). V tomto případě asi takto: Prochází bodem $(0, 1)$, přímka $z = -2y + 1$ je v tomto bodě tečnou, je „užší“ než graf funkce $z = y^2$, její vrchol je maximum (nebo „je otevřená směrem dolů“). Porovnání s nulou dá interval $(-1, 1/3)$. Vně tohoto intervalu je průnik prázdný, v krajních bodech jednoprvkový, uvnitř dvouprvkový. Studenti, kteří znají tvar kuželoseček v kartézské souřadné soustavě, snadno přijdou na to, že jde o elipsu. Problém je ovšem symetrický v proměnných, snadno tedy usoudíme, že jde o elipsu vepsanou do čtverce daného přímkami $x = -1$, $x = 1/3$, $y = -1$ a $y = 1/3$. Zde by některý bystřejší student mohl položit otázku, není-li to dokonce kružnice. Necháme ho tedy nalézt dotykové body křivky s výše uvedenými tečnami. Jednoduchý náčrt pak prozradí, že to kružnice není. Snadno dále najdeme osy a střed.

„Tomografickou“ metodou lze odhalit i paraboly (interval neprázdného průniku s vhodnou přímkou je z jedné strany neomezený), ale osm parabol v našich šesticích nul a jedniček lze vždy vyjádřit jako grafy funkcí proměnné x nebo y , tedy jednodušším způsobem. Poněkud opatrněji je nutno tuto metodu používat u hyperbol, ale na naše hyperboly stačí také metody jednodušší. Obdobně se prozradí prázdné množiny, například (111111) (záporný diskriminant) a bod (111000) (nulový diskriminant). Druhý zde přítomný bod, totiž (101000) je odhalitelný triviálně.

Doporučoval bych projít si postupně všech 56 kuželoseček. Inspirují nás k dalším rozšířením metod, třeba i po jednoduchých vylepšeních úpravou znamének či koeficientů, abychom se vyhnuli zlomkům či nešikovným „mínusům“.

Vrátíme-li se opět k otázce v nadpise, vidíme, že uvedených 56 (respektive všech 64) příkladů dává už dost možností k náplni značné části maturitního opakování nebo matematického semináře. A popustíme-li uzdu výběru koeficientů, zavalí nás kombinatorický výpočet dalším kvantem šestic. Vždyť přibereme-li jenom číslo -1 , dostáváme $3^6 = 729$ šestic, dopřejeme-li si ještě koeficienty 2 a -2 , máme dokonce 5^6 , to je 15 625 možností a tak dále.

Rád bych ještě podotkl, že existují další „běžné středoškolské úpravy“, užitečné v odhalování kuželoseček. Jsou to: Doplnění na čtverec, přidání

a ubrání vhodného výrazu, vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu, vzorec pro rozdíl druhých mocnin a mnohé další, samozřejmě i kombinace těchto úprav. Jimi se obvykle převede zpočátku „neprůhledná“ rovnice na známý (středový nebo vrcholový) tvar. Ověřte si, jak snadno se jimi dají odhalit kuželosečky

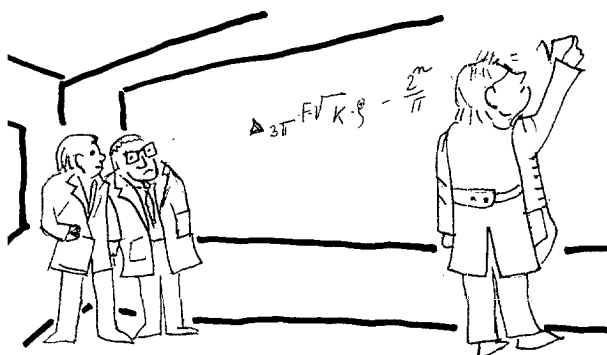
$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \quad (\text{dvě různoběžky})$$

nebo

$$xy + 2x - 3y - 7 = 0 \quad (\text{hyperbola})$$

a mnohé další, kterých si jistě sestavíme, kolik bude potřeba.

Domnívám se tedy, že otázku položenou v nadpise můžeme s klidným svědomím a mírným optimismem zodpovědět jednoznačně kladně.



DOMNÍVÁME SE, ŽE PROFESOR JE SÁM O SOBĚ IRACIONÁLNÍ ČÍSLO.

PAN NAČERADEC V TANEČNÍCH

Karel Otruba

K následujícím úvahám mne přivedl jeden příklad na kombinatoriku v učebnici [1]. Zní takto:

„V taneční síni jest 45 pánů a 48 dam (sic!). Kolik je tu možných rozličných dvojic?“

Tento příklad se mi zdál zpočátku jednoduchý a hned jsem si jej zpa-měti vypočítal. Je tam celkem 93 lidí, $93/2 = 46$ a jedna (jeden) zbude, tedy je možno vytvořit maximálně 46 dvojic. Že budou každé dvě takto vytvořené dvojice „rozličné“, je nábíledni. Následný pohled do výsledků mne ovšem překvapil. Je tam totiž číslo 2 160. Jak se k němu došlo? V rozpacích sáhnou po své oblíbené TZS („tlustá zelená sbírka“) [2]. Tady je příklad jiný, ale podobný: „Na maturitním večírku je 24 chlapců a 15 dívek. Kolik různých tanečních párů lze z nich vytvořit?“

Hledíme, tady se už požaduje, aby ty páry byly taneční. Pak je jich maximálně 15. Dámská volenka, každá dívka si jednoho chlapce vybere a devět chlapců zbude na ocet. Jenže ve výsledcích je zase jiné číslo, tentokrát 360.

Nehodlám již déle napínat vaši trpělivost, laskaví kolegové–čtenáři a spanilomyslné kolegyně–čtenářky. Všichni víme, o co jde, ale snad připustíte, že jsme oprávněni považovat uvedené formulace za neúplné až matoucí. A snad mi pomůžete zamyslet se nad tím, jak je zjednotřit.

Fascinuje mne (v Poláckově románu i jeho filmovém zpracování) opakování povzdech pana Načeradce [3]: „Co se chce ode mne?“ Ano, vědět co se ode mne chce, to by mělo být základním heslem a výchozím bodem všech řešitelů matematické úlohy, a to nejen kombinatorické. Především studentů, to všichni známe. Jenže některé formulace úloh naprosto jistou odpověď na tuto otázku nedávají. Zvláště v kombinatorice někdy vznikají pochybnosti. My učitelé těm formulacím rozumíme jaksi již zvykově. Ale studenti?

Předkládám svůj pokus o variace na téma uvedeného příkladu. Jak známo, bývají velké stíznosti v období tanečních na rozptýlenou pozornost studentů. Napadlo mne tedy, zda by naopak právě přes toto jejich upnutí mysli nebylo možno alespoň trochu je nalákat k provádění elementárních kombinatorických úvah.

Třída, kde jsem kombinatoriku právě učil, má pouhých 24 studentů, 11 chlapců a 13 dívek. Hned v prvních hodinách jsem jim zalichotil poznámkou, že tento počet je velmi vzácný. Odvodili jsme totiž, že počet způsobů, kterými se mohou seřadit do fronty na oběd, je přibližně $6,2 \cdot 10^{23}$, což je jen o chlup víc než proslulá Avogadrova konstanta. Tím se žádná jiná třída chlubit nemůže. Takto mírně vzrostla jejich zvědavost, jaké další nečekané podivnosti a hlouposti se ještě z té kombinatoriky mohou vyklubat. Hned jsem tedy příklad o tanečních aplikoval přímo na ně a položil otázku jen tak ledabyly od boku: „Kolik můžete vytvořit tanečních párů?“ Odvážný student Vocásek okamžitě vykřikl „jedenáct!“ a několik dalších hlasů souhlasně zamručelo. Zajásal jsem. Moje teorie o srozumitelnosti zadání uvedeného příkladu se začala potvrzovat.

Jak by musela být úloha formulována, aby číslo 11 bylo správným výsledkem? Třeba takto: „Milí studenti, jako váš třídní vás pověřuji, abyste nyní místo mé hodiny matematiky vytvořili dvojice typu dívka–chlapec a rozešli se po městě předat co nejvíce lidem pozvánky na náš slavnostní ples. Kolik dvojic bude běhat po městě?“ Evidentně jedenáct. Zbylé dvě dívky by mohly eventuálně tvořit dvojici dvanáctou.

Ale jak formulovat úlohu, aby vyšlo číslo ve výsledcích? Brzo jsem si povšimnul, že je tam vždy součin počtu „pánů a dam“. U naší třídy by byl výsledek 143. V jaké formulaci by se mohl jednoznačně skrývat průhledný pokyn k tomuto početnímu úkonu?

„Potřebujeme pro první stránku studentského časopisu obrázek nejkrásnější taneční dvojice ve vaší třídě“, spustil pan ředitel, v nečekaném okamžiku vstoupivší do hodiny matematiky. „Náš výtvarník profesor Voříšek je ale velmi náročný, jak víte, a chce v klidu pečlivě porovnat úplně všechny možnosti. Takže mu vytvořte všechny možné dvojice a on si každou zvlášť vyfotí“. Kolik fotek vznikne? Jistě je snadné zajistit, aby se na žádnou dvojici nezapomnělo. První chlapec v abecedě se nechá vyfotit postupně se všemi třinácti dívkami, pak totéž provede druhý, třetí atd. až po jedenáctého. A operaci $11 \cdot 13$ tu máme jako na dlani. Každá fotografie je prvkem matice o jedenácti řádcích a třinácti sloupcích (nebo naopak) a hned se to může na tabuli naznačit. A případně i nařadit

pojem „matice“, či znovu jej připomenout z jiné strany, byl-li naťuknut již dříve (například u soustav rovnic).

Při úvahách o výkladu dalšího pojmu se přede mnou vynořila jiná slavná postava: „Abych mohl případ zdárně dokončit, milý Watsone, potřebuji přesně vědět, kdo s kým v kritickém okamžiku tančil. Naštěstí přítomný fotograf celý parket zrovna v té chvíli zvětšil a obrázek jsem právě obdržel ranní poštou. Mimochodem — napadá vás, kolik různých fotografií takto mohlo vzniknout? Přesněji řečeno, kolik bylo různých možností, kdo s kým tančil ten osudný waltz?“

V naší třídě se to dá snadno zjistit. Stačí požadovat, aby si chlapci zadávali dívky po jednom. Hned jsme si jedno takové zadávání ve třídě vyzkoušeli. První měl volbu z třinácti dívek, druhý už jen ze dvanácti, třetí z jedenácti. . . a na volbu posledního zbyly dívky tři. Tedy celkem $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 3 = 3\,113\,510\,400$ možností. Doktor Watson by se asi opravdu nestačil divit. Studenti se už tolik nedivili, někteří si totiž vzpomněli, že je situace stejná jako v příkladě s počtem všech možných zasedacích pořádků ve třídě, když je víc židlí než žáků. To jsme řešili také v jedné z úvodních hodin. Před třídou se vytvoří zástup, žáci po jednom vcházejí a postupně obsazují prázdné židle.

Myšlenka s fotografováním se mi zdála být čím dál využitelnější. Ostatně i v Poláčkově románu se jedna překerní záležitost zdárně vyřeší díky spoušti fotoaparátu, stisknuté v pravý okamžik. Připustíme-li i situace mírně absurdní, které však studentskou obec obvykle poněkud rozveselí, můžeme na téma „fotografie z tanečních“ improvizovat dál. Třeba takhle:

Skupina chlapců se chce nechat vyfotografovat tak, aby každý tvořil dvojici s dívkou, se kterou se mu nejlépe tančí. To je zdánlivě nemožné, protože jedna dívka může být oblíbenou tanečnicí více chlapců. Ale někdo přišel na to, že dvojici by mohl tvořit chlapec a fotografie jeho oblíbené tanečnice. Tedy každá dívka si připraví (pro jistotu) 11 svých fotografií. Kolik různých fotografií skupiny chlapců s fotografiemi dívek může vzniknout? (Připomínám nutnost přesné formulace skutečnosti, že dvě fotografie jsou různé. Nejde například o to, kde který chlapec stojí apod.) První chlapec má 13 možností, druhý a každý další také 13 (nyní „dívek“ neubývá). Číslo 13^{11} je přibližně $1,8 \cdot 10^{12}$. Podobně všech možných fotografií skupiny dívek držících obrázek svého oblíbeného tanečníka by bylo 11^{13} , což je asi $3,5 \cdot 10^{11}$. Představa plesové fotografie chlapců držících v ruce obrázky svých oblíbených tanečnic (či naopak)

byla pro studenty daleko úsměvnější, než představa pouhého seznamu dvojic, který by tu práci také zastal. A výklad kombinatorického pojmu „s opakováním“ pomocí pojmu „oblíbená tanečnice“ (či tanečník) byl pro frekventanty tanečních velmi srozumitelný.

Další modely kombinatorických úloh vytvořené pomocí tanečních a fotografií nemusím jistě uvádět, podceňoval bych vaši obrazotvornost. Nedomnívám se také, že by to byly modely nedostižné dokonalosti. Já sám si velmi cením a rád užívám třeba příkladů vytvořených na modelu skupiny turistů, kteří přespávají v noclehárnách, objednávají si jídla v restauracích a podobně. Jsou ve skriptech Dr. Antonína Vrby [4] a každému je doporučuji.

Chtěl jsem vás především seznámit se svým pokusem o přeměnu okolností rozptylujících, jakými taneční kursy pro studenty jistě jsou, na okolnosti možná částečně soustřeďující a pomáhající. Jestliže se alespoň někdo z vás nad některým mým příkladem pousměje a zařadí jej — třeba i s dalším obohacením — ve své hodině, budu mít velkou radost. Ale především mne potěší, jestliže budeme vést studenty k tomu, aby se ona otázka slavného pana Načeradce „Co se chce ode mne?“ stala výchozím bodem jejich práce při řešení každé, nejen kombinatorické úlohy. A naše pečlivé formulace by jim odpovědi na tuto otázku měly usnadňovat.

Literatura

- [1] Bydžovský — Vojtěch: *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol*, JČMF, Praha, 1924.
- [2] Vejsada — Talafovs: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*, SPN, Praha, 1969.
- [3] Poláček, K.: *Muži v ofsajdu*, Československý spisovatel, Praha, 1968.
- [4] Vrba, A.: *Kombinatorika pro II. ročník gymnazií se zaměřením na matematiku* (skripta), SPN, Praha, 1975.

SLOVNÍ ÚLOHY V UČEBNICÍCH MATEMATIKY PRO DRUHÝ STUPEŇ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Marie Kubínová

Diskuse o trvalých změnách kvality vyučování v reálné škole, které v poslední době probíhají při různých příležitostech na celém světě, ukazují zcela jednoznačně, že těchto změn nelze dosáhnout změnou obsahu vyučování a že je proto nutné obrátit pozornost didaktiků matematiky i učitelů na proces nabývání vědomostí a dovedností a na prostředí, ve kterém k tomu dochází, tedy na žáka, učitele a třídu.

Přetrvávající instruktivní a na pouhém předávání informací založené přístupy k vyučování nelze celoplošně ve školách nahradit principy konstruktivního a podnětného vyučování, které mohou podle našich zkušeností významně přispět k vytvoření tvořivého klimatu v konkrétní třídě i na celé škole, žádným nařízením, byť by to bylo třeba i zákonnou normou. Náročnost realizace takové změny je dána tím, že tento problém nelze pozitivně vyřešit bez celkové změny postojů učitelů k vyučování i k jejich práci vůbec. A to je podle našeho názoru dlouhodobá záležitost. K jejímu vyřešení mohou významně přispět nejrůznější subjekty (ministerstvo školství, fakulty připravující učitele, střediska dalšího vzdělávání učitelů atd.), které podpoří uplatňování zkušeností s metodami a formami vyučování rozvíjejícími tvořivost žáků v pregraduální i postgraduální přípravě učitelů, v odborných i veřejnosti přístupných diskusích, při psaní učebnic apod.

Slovní úlohy zauímají ve školním vyučování na druhém stupni základní školy významné místo. Slovně formulované úlohy pro žáky najdeme v učebnicích a pracovních sešitech snad všech vyučovacích předmětů, tedy nejen v učebních matematiky, ale také v učebnicích fyziky, chemie, ... Jejich výhodou je, že jejich zadání bývá často formulováno jako popis skutečné reálné situace, se kterou se žáci běžně setkávají ve svém okolí. Tím je mnohdy na první pohled pro žáka obtížné zadání prezentováno jako přijatelnější a srozumitelnější, protože žák vidí vzájemné vztahy a propojení mezi „normálním“ světem a „teorií“, která

je předmětem školního vyučování. Tato vzájemná vazba mezi reálným a školním světem působí na žáky jako prvotní motivace ještě dříve, než je učitel seznámí s jednotlivými fázemi procesu řešení slovních úloh. Ukazuje se však, že ani tato prvotní (vnější motivace) není natolik silná, aby slovní úlohy patřily ve vyučování mezi oblíbené. Naopak řada výzkumů prokázala, že právě slovní úlohy patří tradičně k úlohám obtížným pro žáky, mnohdy k úlohám, které žáky stresují ještě dříve, než je žáci začnou vůbec řešit. Často to bývá proto, že byly opominuty nebo podceněny některé z kroků, které je nutno uskutečnit, abychom úspěšně vyřešili danou obtíž. Tedy v našem případě se žáci při řešení slovních úloh:

- nejprve musí seznámit se zadáním slovní úlohy, uvědomit si, co hledají a jaké prostředky mají k dispozici, zda již takovou nebo podobnou úlohu řešili a jakým způsobem. Jedná se o rozbor úlohy (vybrání podstatných znaků, zařazení úlohy mezi typové úlohy);
- dalším (pro žáky asi nejobtížnějším) krokem je nahrazení složitého systému (zadání úlohy) adekvátní úrovní, která je jednodušší, přístupnější pro řešení úlohy. Jedná se o transformaci slovního zadání úlohy do jazyka příslušného vyučovacího předmětu (např. do jazyka matematiky, matematických znaků, symbolů a operací), který jim umožní využít vhodný algoritmus k vyřešení úlohy. Nedílnou součástí této fáze je také zkouška v rámci kontextu daného vyučovacího předmětu s ohledem na kontext původní úlohy;
- poslední částí řešení slovní úlohy je opačná transformace, kdy jsou výsledky vyjádřené prostředky daného vyučovacího předmětu interpretovány slovně.

V dalším textu se budeme podrobněji zabývat slovními úlohami ve vyučování matematice. Nechceme ale v žádném případě otvírat diskusi o jejich postavení ve vyučování matematice (to je podle našeho názoru nesporné), ani se věnovat jejich klasifikaci (ta vzhledem k zaměření našeho článku dána předem). V několika následujících příspěvcích chceme stručně prezentovat výsledky semináře, ve kterém se doktorandi v oboru didaktika matematiky při Oborové radě pro didaktiku matematiky KMDM Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze zabývali analýzou různých typů slovních úloh, které jsou prezentovány v česko-slovenských a českých učebnicích matematiky pro základní školu od počátku tohoto století až do současnosti.

ÚLOHY O POHYBU

Ivo a Jana Horáčkovi

Tato analýza vznikla po prostudování celkem 60 učebnic pro II. stupeň ZŠ a nižších gymnázií vydaných v letech 1963–1997. V 39 z nich se vyskytuje alespoň jedna úloha o pohybu.

Vymezení pojmu „úloha o pohybu“

Za „úlohu o pohybu“ považujeme slovní úlohu, ve které se vyskytují informace o dráze, době pohybu a rychlosti nějakého objektu ve vzájemné kombinaci, to znamená, že k správnému vyřešení takové úlohy lze smysluplně použít vzorec $s = v \cdot t$ (kde s je dráha, v průměrná rychlost a t doba pohybu).

Existují úlohy, které na první pohled připomínají úlohu o pohybu, my je ale za úlohy o pohybu nepovažujeme (v příkladě se jedná o výpočet rychlosti jako aritmetického průměru tří hodnot, použití vzorce $s = v \cdot t$ není možné).

Úloha 1 Turista ušel první den 35 km, druhý den o 7 km víc než první den a třetí den o 9 km méně než druhý den. Kolik kilometrů ušel za tři dny? Kolik kilometrů ušel průměrně za jeden den?

V některých učebnicích se vyskytují úlohy na převody jednotek, které také nepovažujeme za úlohy o pohybu.

Úloha 2 Rychlost zvuku je 330 metrů za sekundu. Vyjádřete v kilometrech za hodinu.

Signální slova a slovní spojení

Signální slova pomáhají identifikovat úlohy o pohybu, tj. jsou to slova resp. slovní spojení, která se v těchto úlohách nejčastěji vyskytují, a to opět ve vzájemné kombinaci. Signální slova, která jsme v úlohách o pohybu zaznamenali, jsme rozdělili do tří skupin podle toho, ke které fyzikální veličině se vztahují. Čtvrtou skupinu tvoří ostatní signální slova a slovní spojení.

1. **dráha** — vzdálenost, jak daleko, kolik ujede (urazí, ujede, ...)

2. **rychlost** — průměrná, stejná (stálá) rychlost, x -krát rychleji, jak rychle
3. **čas** — o x minut později, (za) jak dlouho, kdy, v kolik hodin
4. **ostatní signální slova** — z místa A , do místa B , proti sobě, stejným směrem, zpět, objekty pohybu (automobil, vlak, cyklista, turista, ...)

Typové úlohy

Úlohy o pohybu jsme rozdělili na tři základní typy.

Mezi nejjednodušší úlohy o pohybu patří například takováto slovní úloha:

Úloha 3 Cyklista ujede za 3 hodiny 45 km. Kolik kilometrů ujede při stejné rychlosti za každou hodinu? Kolik kilometrů ujede při stejné rychlosti za 5 hodin?

Text úlohy hovoří o pohybu jediného objektu, jehož průměrná rychlost se během pohybu nemění. Takovou úlohu budeme považovat za úlohu **typu Ia**.

Úloha následující se předchozí značně podobá.

Úloha 4 Auto jedoucí rychlostí 75 km/h dojede do Znojma za 3/4 hodiny. Za jak dlouho tam dojede cyklista jedoucí rychlostí 25 km/h?

Rozdíl je v tom, že v této úloze se hovoří o pohybu dvou objektů (obecně jich může být více), jejichž průměrná rychlost se během pohybu nemění a jejichž pohyb spolu časově ani místně nesouvisí. Takovou úlohu označíme **typem Ib**. Úlohy typu Ib se řeší principiálně stejně jako úlohy typu Ia.

Další úloha je z hlediska zadání i řešení podstatně odlišná od předchozích dvou.

Úloha 5 Automobilista je na cestě z Prahy do Olomouce. První hodinu jízdy jede průměrnou rychlostí 135 km/h. Jakou rychlostí musí jet zbytek cesty, aby jeho celková průměrná rychlost byla 125 km/h? Vzdálenost z Prahy do Olomouce je 250 km.

Setkáváme se zde s objektem, který během pohybu mění svou rychlost. Budeme hovořit o úloze **typu II**.

V úlohách **typu III** se jedná o pohyb dvou objektů, jejichž průměrná rychlost je stálá a jejichž pohyb je časově i místně spjatý. Objekty mají společné výchozí místo pohybu (zpravidla urazí stejnou dráhu a mají

různou dobu pohybu — **typ IIIa**), nebo mají dvě různá výchozí místa (zpravidla se pohybují stejně dlouho — **typ IIIb**).

Úloha 6 Z továrny vyjelo nákladní auto v 8 hod 30 min s nákladem o velkém objemu průměrnou rychlostí 20 km/h. V 9 hodin vyjelo za ním osobní auto, které jelo průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin dohoní nákladní auto?

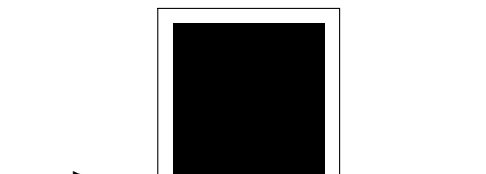
Úloha 7 Vzdálenost z Prahy do Olomouce je 257 km. Z obou měst vyjela současně proti sobě auta, auto z Prahy jelo o 800 metrů za hodinu pomaleji než auto z Olomouce, jaká byla průměrná rychlost aut, jestliže se setkala za 75 minut?

V některých učebnicích jsou za úlohy o pohybu považovány buď jen úlohy typu III, nebo úlohy typu II a III.

Zařazení do systému učiva

Úlohy typu I se vyskytují v 5.–7. ročníku, a to především v tématech týkajících se početních operací v různých číselných oborech a v tématu přímá a nepřímá úměrnost. Úlohy typu II a III se vyskytují až na výjimky výhradně v 8. a 9. ročníku v tématech: algebraické výrazy, lineární rovnice a soustavy rovnic, lineární funkce. Vyjíměčně jsou tyto úlohy zařazeny i do jiných tematických celků, a to např. kruh a kružnice, obvod a obsah obrazce nebo Pythagorova věta.

Úloha 8 Turista jde rychlostí 4 km/h. Po cestě má obejít lesní školku čtvercového půdorysu o výměře 1 km² (viz obrázek 1). Jak dlouho mu to bude trvat?



Obr. 1: Tvar lesní školky

Z hlediska způsobu řešení jsou úlohy o pohybu zařazeny do tematických okruhů takto:

1. **aritmetické řešení** — číselné obory (početní operace s celými čísly, desetinnými čísly a zlomky),
2. **algebraické řešení** — algebraické výrazy, lineární rovnice a soustavy rovnic, lineární funkce, přímá a nepřímá úměrnost,
3. **grafické řešení** — lineární funkce, lineární rovnice a soustavy rovnic.

Mezipředmětové vztahy

Úlohy typu I a typu II mohou najít své praktické využití v běžném životě například při cestování (otázka kdy vyjet, abychom včas dorazili do cíle, jakou jet rychlostí, apod.).

Pro úlohy typu III jsme nenalezli v běžném životě praktické využití, zdají se nám být příliš úzce zaměřené.

S úlohami o pohybu se žáci setkávají také ve fyzice, a to v sedmém ročníku v kapitole o pohybu a síle, kde blíže poznávají druhy pohybů a jejich vlastnosti. Fyzikální veličiny dráha, čas a rychlost jsou ve fyzice značeny písmeny s , v a t (to odpovídá i našemu značení v této práci). Stejně značení používají také autoři učebnic matematiky vydaných po roce 1989, zatímco v učebnicích vydaných dříve jsou tyto veličiny označovány obecně neznámými $(x, y, \dots)$, nebo jsou ponechány celé názvy těchto veličin.

V učebnicích fyziky pro sedmý ročník ZŠ se vyskytují úlohy typu I, které se objevují i v devátém ročníku v souhrnném opakování. Úlohami typu II a typu III se fyzika na ZŠ nezabývá.

S grafickým znázorněním závislosti dráhy na čase u rovnoměrného pohybu se žáci setkávají také v sedmém ročníku ve fyzice, kde jsou jednotlivé osy soustavy souřadnic označovány: $s(\text{km})$, $t(\text{h})$. V matematice se tato látka vyskytuje až v osmém ročníku, kde jsou osy souřadnic označovány stejným způsobem.

Nestandardní typy úloh

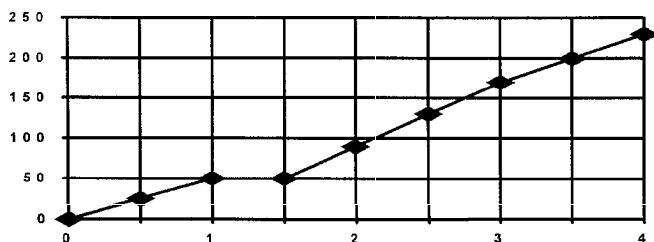
Především v učebnicích vydaných po roce 1989 se vyskytují úlohy, které jsou složitější z hlediska zadání. Typickým příkladem takové úlohy je např. tato:

Úloha 9 Děti se ptaly svého vedoucího, jak daleko je k zastávce vlaku. Ten jim odpověděl: „Půjdeme-li rychlostí 4 km/h, přijdeme tam

čtvrt hodiny po odjezdu vlaku. Jestliže však půjdeme rychlostí 5 km/h, přijdeme k zastávce 12 minut před odjezdem.“ Vypočtete, jak byla zastávka daleko.

V těchto učebnicích se také objevují úlohy, kde nejde jen o to graficky znázornit pohyb objektu pomocí jedné lineární funkce, ale také popsat složitější pohyb objektu znázorněný grafem.

Úloha 10 Na obrázku 2 je znázorněna závislost dráhy automobilu na čase. Popište jízdu automobilu mezi místy A a B.



Obr. 2: Závislost dráhy automobilu na čase

Dalším příkladem nestandardní úlohy je úloha 8 zmíněná v odstavci **Zařazení do systému učiva**. K vyřešení úloh tohoto druhu je potřeba využít ještě jiné dříve získané matematické poznatky. Řešení následující úlohy předpokládá znalost Pythagorovy věty.

Úloha 11 Z křižovatky dvou na sebe kolmých silnic vyjelo nákladní auto rychlostí 60 km/h. O deset minut později projelo křižovatkou v kolmém směru auto rychlostí 75 km/h. Vypočítejte vzdálenost automobilů po 30 minutách od výjezdu nákladního auta.

Posledním typem nestandardních úloh jsou úlohy, jejichž řešení je spojené s využitím jiných (ne matematických) dovedností.

Úloha 12 Určete průměrné rychlosti osobního vlaku číslo 8301 a rychlíku číslo 666 na trati z Jihlavy do Veselí nad Lužnicí. Potřebné údaje si najdete na obrázku části jízdního řádu ČD z roku 1995. Odpovědi udejte v kilometrech za hodinu. (Pozn. obrázek jízdního řádu byl součástí zadání úlohy.)

Závěr

Přestože jsme si vědomi toho, že tato studie není vyčerpávající, je snad zřejmé, že učebnice vydané po roce 1989 obsahují širší spektrum úloh o pohybu. Častěji v nich autoři kladou větší důraz na grafické vyjádření pohybu, na práci s informacemi (jízdní řády, vzdálenosti na mapě) a na logické myšlení.

SLOVNÍ ÚLOHY O OBSAHU V UČEBNICÍCH MATEMATIKY

Jiří Vaníček

Abstrakt

- Článek shrnuje výsledky analýzy učebnic, které byly ministerstvem schváleny a používaly se k výuce matematiky na 2. stupni základních škol, v měšťanských školách, v nižších ročnících víceletých gymnázií a SVVŠ na území České republiky v období od r. 1945 do současnosti.
- Podle zvolených kritérií porovnávání autor hodnotí jednotlivé učebnice či jejich celé řady s cílem zachytit nějaký obecný trend.
- Materiál k analýze vznikl prostudováním 47 učebnic matematiky.
- Součástí článku je příloha, která u každé knihy vypisuje podrobné údaje o slovních úlohách o obsahu. Tato příloha je vedena chronologicky po obdobích, ve kterých se podle daných knih vyučovalo. Přílohu lze nalézt na Internetu

<ftp://ftp.pf.jcu.cz/pub/vk/geobsah.doc>

Vymezení pojmu

Slovní úlohy o obsahu jsou v článku chápány jako úlohy, v nichž podstatnou část zaujímá uvažování o obsahu rovinného obrazce, případně jeho výpočet. Mezi tyto úlohy nebyly zařazeny úlohy na výpočet povrchu těles spíše z prostorových důvodů než z důvodů vymezení pojmu, ačkoliv v úlohách o povrchu bývá vždy nějakým způsobem zahrnuta prostorová představivost.

Typové příklady

Úlohy o obsahu nelze rozdělit do několika tříd, ale mezi množstvím a rozmanitostí těchto úloh lze nalézt několik charakteristických typů úloh:

- výpočet obsahu ze zadaných rozměrů či vzdáleností (i s převody jednotek)
- výpočet některé neznámé délky z obsahu
- určení obsahu obrazce ve čtvercové síti
- výpočet obsahu z naměřených údajů po předchozí konstrukci
- výpočet obsahu z okótovaného obrázku
- určení obsahu odhadem nebo z odhadnutých rozměrů
- výpočet obsahu složitějšího obrazce jeho rozdělením na jednodušší
- aplikace obsahu a úměry ve výpočtu např. ceny, hmotnosti apod.
- experimentování s obsahem s cílem objevit či dokázat některé geometrické tvrzení

Obecná charakteristika

V naší republice platila po roce 1945 až do r. 1990 praxe, že pro výuku matematiky se v daném ročníku používala jedna učebnice. Tyto učebnice tvořily řady učebnic pro celý druhý stupeň. V posledních letech je ministerstvem schvalováno více paralelních učebnic pro výuku téže látky v tomtéž ročníku, nejprve jako tzv. alternativní učebnice k učebnici původní. Vznikají také učebnice zaměřené tematicky, tedy nikoliv adresované jednotlivým ročníkům.

Existence jedné oficiální učebnice je velmi výhodná pro zkoumání a popis výuky matematiky v daném období, naopak současné množství učebnic a jejich kvalita neříká nic o úrovni výuky, dokud nemáme statistické přehledy o míře používání té které učebnice. Navíc příliš krátké období pro jejich zhodnocení (některé knihy jsou používány v tomto školním roce poprvé) nedává možnost zabývat se jejich dopadem do výuky matematiky na školách. Tyto knihy představují zde především zajímavý metodický materiál a často nové přístupy a pěkné příklady.

V minulých dobách byla matematika rozdělena a vyučována odděleně jako aritmetika (algebra) a geometrie a také učebnice byly takto děleny. Později s novou koncepcí z druhé poloviny 70. let byla témata obou těchto částí matematiky během roku pro starší ročníky střídána

a z té doby neexistují specializované učebnice geometrie. Nově vznikající monotematické učebnice zčásti nahrazují původní učebnice geometrie. Učebnice do velké míry určovaly a určují, co se bude ve vyučovací hodině odehrávat, jak bude žák pracovat a co bude nakonec umět. V době totality patrně ovlivňovaly výuku více než dnes, a to vzhledem k přísné nutnosti dodržovat osnovy, postupy z metodických příruček a přesný tematický plán, jenž byl neměnný a často učitelům diktovaný.

Tematické celky o obsahu

I když tématem práce je pouze rozbor slovních úloh, velký vliv na posuzování té které učebnice mělo umístění tématu, věková cílenost a didaktické zpracování a zavedení pojmů. Všechny tyto charakteristiky se promítly i do slovních úloh: do jejich formulace, do stanovení obtížnosti úloh vzhledem k věku, početním znalostem a dovednostem žáků i dalším matematickým schopnostem, závislým i na již probírané látce a na formě, kterou se vyučovalo.

Vzhledem k tomu, že počet ročníků na prvním stupni základní školy nebyl po celé zkoumané období neměnný, měly děti při příchodu na druhý stupeň rozdílné znalosti. Obecně lze říci, že z prvního stupně si děti přinášely intuitivní znalosti obsahu čtverce a obdélníku, i když tomu tak nebylo vždy. Stejně tak je tomu i u dalších matematických dovedností (např. dělení dvouciferným číslem), což mělo dopad i na složitost slovních úloh. V některých učebnicích tak nejsou zařazeny např. slovní úlohy na výpočet jedné strany obdélníku z daného obsahu možná právě z důvodu neznalosti dělení dvouciferným číslem u dětí toho věku.

Lze tvrdit, že témata slovních úloh pro výpočet obsahu jsou zastoupena ve všech studovaných řadách knih přibližně stejnou měrou a posloupností: nejprve obsah čtverce, obdélníku a převody jednotek obsahu, poté obsah trojúhelníka a čtyřúhelníka (nebo mnohoúhelníka, eventuálně lichoběžníku), teprve pak obsah kruhu.

Výuku jednotlivých obsahových témat ukazuje tabulka 1.

Trend přesunu témat

Na řadách učebnic od 2. světové války do r. 1990, kdy vycházely pro školy jednotné učebnice, lze pozorovat jasný trend přesouvání témat s obsahem do nižších ročníků (viz tabulka). Jestliže např. obsah trojúhelníka se učil v r. 1950 v osmé třídě, v roce 1980 již v šesté. Souviselo to patrně i se státní doktrínou v době zavádění nové koncepce vzdělávání, která tvrdila, že děti jsou vyspělejší než v dřívějších dobách a proto zvládnou náročnější učivo.

Téma	1945	1952–62	1962–79	1980–90	současnost
obsah čtverce, obdélníku	6.	6.	5., 6.	5.	variabilita
převody jednotek obsahu	6.	6.	6.	5.	
obsah rovnoběžníku	8.	6.	7.	6.	
obsah trojúhelníka	8.	6.	7.	6.	
obsah lichoběžníku	8.	6.	7.	7.	
obsah kruhu	8.	9.	7.	7.	

Tabulka 1: Výuka jednotlivých obsahových témat

Odrazem toho pak je, že děti sice zvládnou základní učivo, ale vzhledem k nedostatečně rozvinutému myšlení i nižšímu zisku matematických dovedností z jiných oblastí matematiky (počítání, číselné obory) nejsou schopny často řešit složitější příklady. Trend přesunu témat může být také jednou z příčin toho, že učitelé vidí dnešní generaci jako slabší než předchozí.

Výskyt úloh mimo hlavní téma

Slovní úlohy o obsahu se objevovaly i v jiných, např. negeometrických pasážích knih, i když méně než autor článku očekával. Vyskytovaly se nejčastěji v kapitolách o procentech, úměře a úměrnosti, o počítání s desetinnými čísly nebo se zlomky, v úlohách na rovnice či vyjádření neznámé ze vzorce.

Úlohy o obsahu se v ročnících, kde nebyl tématický celek na obsah, často neobjevovaly ani v aritmetické, ani v geometrické části učebnic. Tak se mohlo stát, že dítě za celý školní rok nespočítalo ani jeden příklad o obsahu. Teprve od 80. let lze pozorovat zařazování těchto úloh i k ostatním tématům. Není to ale pravidlem.

Úlohy na opakování, souhrnná cvičení

Je potřebné, aby úlohy počítané v tématických celcích byly po určité době znovu procvičeny. Prakticky ve všech učebnicích se na koncích témat vyskytují další opakovací úlohy, většinou však chybí procvičení po nějaké delší době. Od 80. let se v učebnicích objevovala kapitola Souhrnná cvičení, která jednou za určité období (většinou čtvrtletí) nabídla množství úloh k probraným tématům, mezi nimiž byla i řada úloh k tématům, která se ten daný rok nebo pololetí vůbec neučila, a umožnila žákům obnovit či upevnit si dávno nepoužívané dovednosti. Byla to výborná pomůcka učitele. Toto je jeden z velkých přínosů učebnic z let po r. 1982.

Charakter úloh — obecné historické srovnání

Velmi mnoho slovních úloh, především v knihách z období let 1962 a 1980, je sice napsáno slovně, jde ale jen o převyprávění matematického zadání, což ani nelze za slovní úlohu považovat (např. Vypočtete obsah čtverce o straně 25 cm). Do přehledu jsou zařazeny také, protože jednak se vyskytují v kapitolách slovní úlohy, jednak je jejich autoři za slovní úlohy považovali (např. chtěli odpověď).

V knihách vydávaných hned po válce najdeme velmi těžké příklady na obsah. Je zde patrný pohled na geometrii jako na vědu a příklady tomu odpovídají. Např. někde jsou požadovány důkazy některých netriviálních vlastností, které se v později vydávaných učebnicích již nevyskytují a přesunuly se do matematických olympiád a na střední školy (např. dokažte vzorec pro obsah rovnoběžníku z úhlopříček). Náměty úloh jsou často abstraktní a málo se vyskytují aplikace do běžného světa.

V knihách z padesátých let je kladen velký důraz na rýsování, slovní úlohy na obsah často vyžadují narýsování a odečet parametrů obrazce před provedením výpočtu. V těchto knihách je také kladen velký důraz na praktickou použitelnost a učebnice obsahují častěji motivační slovní úlohy z praxe jako uvozující téma.

V pozdějších učebnicích z 60.–80. let tento trend zřetelně chybí, i náměty jednotlivých úloh, pokud jsou voleny z reálného světa, příliš reálně nevyznívají. K praktickým úlohám se vrací knihy z poslední doby, mezi nimiž v tomto směru vynikají knihy Odvárkovy.

Slovní úlohy v poválečných knihách jsou celkově náročnější než v knihách pozdějších. Např. v knize Vyšínové je již v první úloze na obsah obdélníku v 6. třídě vyžadováno použití zlomků, v následující již počítání s rozdílnými jednotkami, téměř úplně chybí jednodušší příklady na aplikaci znalosti, jak obsah útvaru vypočítat. Avšak učebnice obsahovala řadu označených těžkých příkladů, které má žák přímo přeskočit nebo řešit pouze s učitelem.

V knihách ze 60. let začínají převažovat jednoduché příklady a úlohy na obsah většinou řešitelné aplikací vzorce. V 80. letech tento trend vrcholil tím, že knihy převážně obsahovaly úlohy šité na míru použití vzorce a v podstatě trénovaly dosazování do vzorců. Může to souviset s tím, jak bylo učivo během let přesouváno do nižších ročníků. Děti sice v nižším ročníku pochopily (=naučily se vzorec), ale nebyly schopny řešit žádné složitější úlohy samostatně.

Pro učebnice z 80. let je příznačné vědecké vyjadřování a snaha o vědeckou tvář knihy. Zadání příkladů byla natolik precizní, že leckdy přestávala být dětem srozumitelná (např. Zvolte za jednotku obsahu základní čtverec sítě. Určete obsahy mnohoúhelníků čtvercové sítě. Určete obsah sjednocení vyznačených mnohoúhelníků). Formální vlastnosti matematiky byl zdůrazněn více a praktické aplikace v řadě případů nezněly věrohodně (počítat obsah postříkané plochy zavlažovačem).

V současných učebnicích tento styl vědeckého jazyka vymizel, objevují se častěji tvořivější úlohy.

Další kritéria

V této části je většinou u kritéria uváděn jeden vybraný vzorový příklad, který velmi dobře toto kritérium demonstruje.

Text zadání Časem se vyvíjel pohled na zadání úlohy (od čistě geometricky abstraktního *narýsujte tětíivový čtyřúhelník KLMN a určete obsah* k pozdějšímu praktičtějšímu *určete výměru zahrady tvaru lichoběžníku* nebo také *kolik plechovek barvy potřebuji k vymalování stropu*). Je velmi málo příkladů, v nichž není na první pohled patrné, že se bude počítat obsah. Obsah je bohužel téma, kde je „zamaskování“ počítané veličiny složité. Někteří autoři se o to ani nepokoušeli (Čech, Vyšín), v některých pozdějších knihách např. místo otázky na obsah je otázka na výměru, jinde zní dotaz na cenu či hmotnost nějakého plošného předmětu.

Úloha 1 Je dána hmotnost tabulky skla, úkol určit hmotnost druhé tabulky z téhož skla (známy jsou rozměry tabulek).

Přesnost a odhad výpočtů Ve starších učebnicích se vůbec nevyskytují úlohy na odhad a cílevědomě k tomuto tématu přistupuje pouze Odvárko. Ve starších učebnicích z 50. let se často hodnota potřebná k výpočtu bere z měření narýsovaného obrazce, aniž by se kniha zabývala přesností či dávala instrukce, jak přesně se mají údaje měřit. Obráceně zase knihy z 80. let, které již požadovaly používání kalkulaček, nedostatečně upozorňovaly na potřebu zaokrouhlovat (zvláště u příkladů s dělením či odmocňováním).

Úloha 2 Nejprve odhadnout plochu podlahy třídy, poté ji vypočítat z odhadnutých rozměrů a nakonec rozměry změřit a obsah vypočítat.

Použité číselné obory Používání desetinných čísel v úlohách na obsah obdélníku se v různých obdobích měnilo podle toho, v kterém ročníku bylo zařazeno a zda již žáci desetinná čísla probrali. V některých knihách se objevují úlohy se zadáním ve zlomcích. Autoři měli patrně

na myslí procvičení operací v tomto číselného oboru nebo pro dosazování do vzorců, někdy ovšem zadání (délka obdélníku je $3\frac{5}{7}$ m) zní nepřesvědčivě a nereálně.

Jednotky obsahu Ve všech knihách se používají pouze základní a odvozené jednotky soustavy SI (pouze v knize Šarounové se jako zajímavost počítají obsahy ve starých českých jednotkách). V učebnicích z 80. let se před vlastním zavedením jednotek obsahu počítalo s obecnými jednotkami obsahu (j.o.) nebo s obecnými jednotkami čtverečními (j^2). Zde se mívá účinkem snaha ukázat, že naše jednotky obsahu jsou pouze námi zvolené.

Úloha 3 Určit obsah obrazců ve čtvercové síti o délce strany čtverce j . Obsah vyjádřit v j^2 .

Úlohy z praxe Na úlohy lze nazírat i z pohledu, jak řeší reálné situace běžného života. Dávají také žákům odpověď na otázku, proč se vlastně dané učivo ve škole učí, mají tedy velký vliv světonázorový.

Ve starších učebnicích se občas vyskytovaly úlohy ze života (*pes je uvázán řetězem ke kroužku navlečeném na přímém lanku, má se určit obsah plochy, po které se může pohybovat*) úlohy byly často nereálné nebo zněly neskutečně. Vyskytovalo se tehdy velmi mnoho abstraktních úloh (*V obdélníku ABCD známých rozměrů známe polohu bodů E, F na stranách BC, CD, máme určit obsah trojúhelníka AEF*).

V 60.–80. letech přibývalo úloh z praxe, v současnosti jsou úlohy ze života v knihách běžné. Některým úlohám se další praktické využití přímo nabízí, např. při určení procentuálního zastoupení barev na vlajkách různých států. Velice pěkné slovní úlohy z praxe nalezneme v knihách Odvárkových.

Úloha 4 Zjistit, který koberec do dětského pokoje je lacinější (u jednoho dána cena v m^2 , u druhého cena za běžný metr při dané šířce rovnající se šířce pokoje).

Mezipředmětové vztahy Úlohy z praxe často úzce souvisí s úlohami z interdisciplinární oblasti — v běžném životě přece nevystačíme s čistou geometrií. V učebnicích se objevují úlohy, v nichž se kombinují poznatky z geometrie např. s fyzikálními, zeměpisnými, v dnešní době i z jiných oborů (např. daňové hospodářství).

Úloha 5 Jak velkou silou tlačí voda na uzávěr? (je dán průměr a síla na každý cm^2 plochy uzávěru).

Kompletní a nekompletní zadání úlohy Určitou slabinou všech knih je, že dávají tzv. kompletní zadání úloh, neboli poskytují veškeré

údaje potřebné k vypočítání úlohy. Velice málo je úloh, které mají údaj nadbytečný, který je např. v části a) nepotřebný a v zadání je uveden, protože je potřebný k výpočtu v části b).

Nenašel jsem příklad, v němž by některé údaje chyběly a žák by je mohl třeba zvolit (zvláště kdyby volba byla z důvodů řešitelnosti omezena na nějaký interval).

Úlohy bez otázky U nás chybí úlohy, v nichž děti mohou otázky vymýšlet. Ve všech 47 učebnicích byla nalezena pouze jedna úloha, které chyběla otázka. Otázkou je, byl-li to záměr autorů či chyba tisku.

Úloha 6 Je dán kótovaný plán obdélníkové parcely s domem tvaru obdélníku. Třetina zbytku parcely bude dvůr, dvě třetiny zahrada.

Motivační úlohy Objevují se od 80. let na začátku kapitol věnovaných geometrickému obsahu, v dnešních knihách jsou daleko častější. Někdy se takové motivační úlohy objevují i mezi úlohami na konci kapitoly jako rozšiřující.

Úloha 7 Narýsujte ve čtvercové síti čtverec a dva obdélníky stejného obvodu a vypočítejte jejich obsah.

Manipulační úlohy Úlohy, při nichž žáci manipulují s předměty (např. vystříženými z papíru) a poté řeší zadání úlohy, se do r. 1990 vůbec nevyskytují — občas se takovýto postup objeví ve výkladové části — např. při vysvětlení vzorce pro obsah lichoběžníku. I dnes se vyskytují se velice zřídka.

Úloha 8 Z vystříhnutých papírových dílů skládačky sestavit rovnoběžník a poté jej přestavit na obdélník ze stejného počtu dílů.

Vlastní tvorba úloh žáky Úkoly na vytváření vlastních slovních úloh žáky nebo formulace otázek se nevyskytují, a to ani v současných učebnicích.

Příloha

Velmi rozsáhlá příloha k článku podrobně mapuje jednotlivé učebnice a představuje přehled příkladů pro výpočet obsahu. Přílohu ve formátu MS Word naleznete na Internetu na adrese

<ftp://ftp.pf.jcu.cz/pub/vk/geobsah.doc>

Literatura

47 učebnic matematiky, vydáno v letech 1945–1997. Abecední seznam je uveden v příloze (viz Příloha). Jména vedoucích autorských kolektivů (chronologicky):

1945–1952 Čech E.

1952–1962 Kraemer E., Kůst J., Pírek J., Rádl J., Vyšín J., Zedek M.

1962–1980 Havlík M., Macháček V., Šimek J., Toišl J.

1980–1990 Bobok J., Čižmár J., Kabele J., Müllerová J., Šedivý O., Zapletal F.

1990 Bušek I., Cihlář J., Houska J., Justová J., Kuřina F., Novotná J., Odvárko O., Šarounová A., Tichá M., Trejbal J.



JÉ, PANE PROFESORE, VŠICHNI VÁS HLEDAJÍ, UŽ TÝDEN JSME NEMĚLI
MATEMATIKU!

SLOVNÍ ÚLOHY O SMĚSÍCH

Barbora Černá

Příspěvek je věnován slovním úlohám o směsích ve vyučování matematice na základní škole. Tyto úlohy přesahují rámec matematiky a zasahují svým obsahem i do jiných vědních oborů (fyzika, chemie, ...).

S ohledem na výskyt slovních úloh o směsích jsem provedla analýzu učebnic, cvičebnic a sbírek úloh určených pro výuku matematiky na II. stupni ZŠ a v nižších ročnících víceletých gymnázií, které byly vydány v rozmezí let 1909–1998. Z celkového počtu 120 prostudovaných knih jsem slovní úlohy o směsích našla pouze v 28 knihách (vydaných v letech 1957–1997). Nejčastěji se tyto slovní úlohy vyskytovaly v 8. a 9. ročníku ZŠ a v různých sbírkách. Ukázkové řešené příklady jsem objevila jen v 9 z nich a ve 3 byl součástí zadání jednoduchý návod, jak danou úlohu vyřešit. Nejvíce se tento druh slovních úloh vyskytoval v tématických celcích, které souvisejí s rovnicemi (nerovnicemi) a soustavami rovnic (soustavami nerovnic), a dále v tématech, která byla pojmenována Slovní úlohy, kde se většinou objevila i samostatná kapitola Slovní úlohy o směsích. Jinými tématy, kde byly tyto slovní úlohy poměrně často použity, byly např. Lomené výrazy, Zlomky, Poměr, Procenta, Funkce či Souhrnné opakování. Některé příklady byly zařazeny i do méně typických celků pro slovní úlohy o směsích jako např. Základy statistiky a finanční matematiky nebo Práce s daty.

Jakou úlohu považujeme za slovní úlohu o směsích?

Jedná se o úlohy, kde zjišťujeme optimální složení směsí (teplota, koncentrace, cena, ...) nebo jejich jednotlivých složek. Výslednou směs nelze rozložit zpět (nebo jen obtížně) na jednotlivé dílčí složky. Za slovní úlohy o směsích považujeme takový typ slovních úloh, v jejichž zadání se obvykle setkáváme:

1. se smísením roztoků o různé koncentraci;
2. se sléváním různě teplých kapalin;

3. s přípravou slitin z kovů a směsí z různých surovin (potravin, krmiva, ...).

Rozbor zadání

Ve slovních úlohách je vždy důležité vědět, co znamenají údaje v zadání dané úlohy.

Např. (příprava slitiny)

Úloha 1 Ze zlata jakosti 0,840 a jakosti 0,580 slil zlatník zlato jakosti 0,750; potřeboval k tomu o 400 g více lepšího zlata než horšího. Kolik zlata každého druhu měl?

V úloze se hovoří o zlatě jakosti 0,840; to znamená, že ve slitině je 840/1000 čistého zlata, zbytek je stříbro, měď apod.

Např. (slévání různých teplých kapalin)

Úloha 2 V nádobě je 1,2 hl vody 8°C teplé. Kolik litrů vody 48°C teplé je třeba do této nádoby přilít, aby vzniklá směs byla 24°C teplá?

1. Danou úlohu můžeme vyřešit přímo, např. sestavením jedné rovnice o jedné neznámé, s použitím hodnot, které jsou uvedeny v zadání.
2. Jestliže známe fyzikální vzorec $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$ (kde m_1 je hmotnost vody s teplotou t_1 ; m_2 je hmotnost vody s teplotou t_2 ($t_1 < t_2$) a t je výsledná teplota smíchané vody), stačí do něj dosadit konkrétní hodnoty.
3. Uvědomíme si, že při ohřátí 1 kg vody o 1°C přijme voda přibližně 4,2 kJ (přesněji 4,186 kJ) tepla a 1 kg vody odpovídá 1 litru vody. Součet množství tepla v jednotlivých částech vody se rovná množství tepla ve směsi vody (tepelné ztráty nebereme v úvahu).

Úlohy o směsích jsou zvláštním typem úloh, v nichž často využíváme procenta.

Např. (smísení roztoků o různé koncentraci)

Úloha 3 Smísíme 1 litr 10% octa a 3 litry 2% octa. Jak silný ocet vznikne?

K vyřešení této úlohy si stačí uvědomit, že v 10% octu je 10 %, to je 1/10 (10/100) objemu, kyseliny octové a zbytek, 90 %, to je 9/10 (90/100) objemu tvoří voda. V 2% octu je octové kyseliny 2 %, tedy 2/100, a 98/100 vody.

Žáci by měli předtím, než přistoupí k matematickému zápisu slovní úlohy, začít s identifikací dané úlohy. Je důležité si uvědomit, že rozbor jakékoliv úlohy bude probíhat různým způsobem podle druhu úlohy, vzdělání a zkušeností řešitele. Jinak bude jistě hledat odpověď řešitel — laik, který se setkává s tímto typem slovních úloh poprvé, a jinak ten, který již zná a používá osvědčenou strategii, která ho vede k cíli. Žáci by tedy měli diagnostikovat, zda se vůbec jedná o slovní úlohy o směsích a o jaký konkrétní typ jde (roztoky o různé koncentraci, různé teplé kapaliny, příprava směsí). Po důkladném a pozorném přečtení zadání by měli zjistit podstatné znaky, objevit vzájemné souvislosti a uvědomit si, které početní operace budeme používat a proč jsou výhodné.

Domnívám se, že autoři učebnic tuto fázi řešení slovních úloh (rozbor úloh) opomíjejí a přistupují bez předchozího „varování“ přímo k vyjádření slovní interpretace pomocí matematických symbolů a pokračují následným výpočtem. Učitel se proto stává garantem toho, že žáci získají vhled do dané problematiky, budou schopni najít shodné prvky jednotlivých úloh, uvědomí si, že se jedná o modelovou situaci, a vybaví si vhodné strategie řešení, které by je efektivně dovedly až k správnému výsledku. Podstatnou složkou, kterou nelze opomenout, je určité působení motivace. Jestliže učitel podchytí zájem žáků o danou problematiku, dosáhne často rychlé pokroky v učení. Žáci jsou ochotni samostatně přemýšlet a hledat nové, efektivnější způsoby řešení.

Matematizace slovní úlohy

Strategie řešení ukázkových příkladů byla obdobná — většinou vedla k sestavení rovnice (nerovnice) o jedné neznámé či k soustavě dvou rovnic o dvou neznámých (soustava dvou nerovnic o jedné neznámé). K sestavení rovnic (nerovnic) či jejich soustav se došlo buď pomocí úsudku, kde se postupně rozebírá zadání úlohy, nebo pomocí přehledně vytvořené tabulky. V jednom případě bylo použito netradiční řešení tzv. křížové pravidlo.

Např. (smísení roztoků o různé koncentraci)

Úloha 4 V laboratoři je třeba smíchat 5 litrů roztoku ze dvou složek. První složka je 30% roztok a druhá 10% roztok téže látky. (Údaje v procentech se týkají objemu rozpuštěné látky.) Kolik litrů koncentrovanějšího a kolik litrů méně koncentrovaného roztoku je nutno smíchat, aby výsledný roztok byl více než 15% a méně než 20%?

1. Úloha je vyřešena pomocí soustavy **dvou nerovnic s jednou neznámou**. Počítáme v litrech.

$$(30 \cdot x + 10 \cdot (5 - x))/5 > 15$$

$$(30 \cdot x + 10 \cdot (5 - x))/5 < 20$$

2. Uvedenou soustavu nerovnic jsme mohli vyřešit také „najednou“:

$$15 < (30 \cdot x + 10 \cdot (5 - x))/5 < 20$$

Např. (slévání různých teplých kapalin)

Úloha 5 V nádobě je 1, 2 hl vody 8°C teplé. Kolik litrů vody 48°C teplé je třeba do této nádoby přilít, aby vzniklá směs byla 24°C teplá? Řešte úlohu bez použití fyzikálního vzorce i s jeho použitím.

1. Úloha je řešena pomocí tabulky: A je množství vody v litrech; B je teplota vody ve $^\circ\text{C}$; C je množství tepla ve vodě v kJ; D je označení tepla

	A	B	C	D
1. voda	120	8	$120 \cdot 8 \cdot 4,2$	Q_1
2. voda	x	48	$x \cdot 48 \cdot 4,2$	Q_2
Směs	$120 + x$	24	$(120 + x) \cdot 24 \cdot 4,2$	Q

Platí: $120 \cdot 8 \cdot 4,2 + 48 \cdot 4,2 \cdot x = 24 \cdot 4,2 \cdot (120 + x)$.

2. Řešeno pomocí **fyzikálního vzorce**: $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$, kde $m_1 = 120$ kg; $m_2 = x$ kg; $t_1 = 8^\circ\text{C}$; $t_2 = 48^\circ\text{C}$; $t = 24^\circ\text{C}$.

Např. (příprava směsí)

Úloha 6 Ze dvou druhů kávy v ceně 75 Kč a 105 Kč za kilogram máme připravit 20 kg směsi v ceně 90 Kč za kilogram.

1. K vyřešení úlohy byla sestavena jedna **rovnice o jedné neznámé**.

$$75x + 105(20 - x) = 90 \cdot 20$$

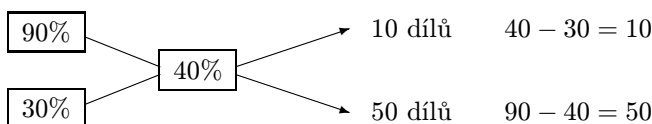
2. Nebo můžeme použít soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} x + y &= 20, \\ 75x + 105y &= 1800. \end{aligned}$$

Např. (smísení roztoků o různé koncentraci)

Úloha 7 Jak připravíme 120 gramů 40% roztoku H_2SO_4 z roztoku 30% a 90%?

Tato úloha je místo pracného řešení soustavou rovnic vyřešena netradiční metodou (tzv. **křížové pravidlo**), která je ale velmi snadná, přehledná a rychlá.



Na konci šipek zapíšeme absolutní hodnoty rozdílů požadované koncentrace směsi a příslušné složky. Směs tedy bude obsahovat 10 dílů 90% H_2SO_4 a 50 dílů 30% H_2SO_4 . Máme-li připravit 120 g směsi, musíme rozdělit číslo 120 v poměru 10 : 50.

Po správném rozboru a získání vhledu do zadání úlohy jsou žáci schopni ke slovnímu sdělení sestavit ekvivalentní matematický zápis. Při jeho řešení se mohou vyskytnout další nejasnosti a obtíže. Řešitelé jsou nuceni pracovat najednou s více znaky z oblasti matematiky (rovnice, procenta, zlomky, ...).

Lze konstatovat, že autoři většiny prostudovaných učebnic nevěnují dostatečný prostor ukázkovým, řešeným příkladům, ale spíše tento druh slovních úloh začleňují jen do cvičení. Žáci pak postrádají model řešení a občas ani nepostřehnou, že řeší speciální typ slovních úloh. Záleží tedy hlavně na vyučujícím, zda vůbec, jak kvalitně a kolik času věnuje tomuto učivu. Nestačí však jen pouhé opakování způsobu řešení, důležitá je samozřejmě i motivační část a celkové myšlenkové zpracování dané problematiky. Přístup učitele by měl zajišťovat, aby žáci nepřijímali hotové algoritmy, ale aby se aktivně účastnili při jejich formulování a odvozování. Cílem učitelů je, aby řešitelé pochopili podstatné vztahy (využívali logické paměti) a nespolehali se na pouhé mechanické osvojení učiva bez pokusu o pochopení. Odměnou pro ně bude skutečnost, že žáci používají vhodnou efektivní modelovou strategii a dokáží z několika postupů, které vedou ke správnému závěru, vybrat ten nejracionalnější. Jen stručně bych chtěla připomenout práci s chybou, která je pro svou poznávací funkci velmi důležitá ve vzájemné interakci učitel — žák.

Nadstavbové úlohy (slouží k obohacení učiva)

1. Mezi nestandardní typ úloh o směsích náleží úloha, jejíž řešení vede k sestavení soustavy dvou lineárních nerovnic (viz Matematizace slovní úlohy).
2. Algebraické zadání je pro řešitele zvláště komplikované, protože číselné hodnoty v zadání jsou nahrazeny jinými symboly (např. písmeny) a důsledkem toho se stává složitější kontrola výsledků.

Úloha 8 Do l litrů p -procentního roztoku byla přilita voda. Kolik vody bylo nutno přilít, aby vznikl roztok r -procentní?

3. K netradičně zadaným úlohám (bylo jich velmi málo) patří úlohy, které mají zadání zapsáno jako sled činností a informací (procesuální zadání).

Úloha 9 V nádobě A bylo 18 l jablečného moštu. Polovina tohoto moštu byla přelita do nádoby B , která byla zčásti naplněna rybízovým moštem. Čtvrtina této směsi byla pak z nádoby B přelita do nádoby A . V tom okamžiku byl objem moštové směsi v obou nádobách stejný.

- a) Kolik litrů rybízového moštu bylo v nádobě B před přeléváním?
- b) V jakém poměru byl ve směsi jablečný a rybízový mošt v nádobě A v jakém v nádobě B ?

Závěr

Domnívám se, že si slovní úlohy o směsích zaslouží více pozornosti než doposud, a to jak ze strany koncepce jednotlivých učebnic, tak i ze strany učitelů. Důvody jsou velmi prosté. Žáci se seznámí s poznatkami o řešení problému, osvojí si soubor modelových postupů a výsledkem je i celkové formování způsobu jejich života. Na závěr by chtěla konstatovat, že slovní úlohy nejen vycházejí z reálného života, ale mají i zpětnou vazbu do něj.

ÚLOHY O SPOLEČNÉ PRÁCI

Jana Ludvíková, Filip Roubíček

Většina matematických úloh v učebnicích je tzv. teoretických, tj. takových, které jsou určeny k procvičování jednotlivých matematických poznatků bez přímé vazby k reálným problémům. Některé úlohy jsou pro tento účel dokonce uměle vytvořeny. Přestože význam takových úloh pro osvojení vědomostí a dovedností a jejich následnou aplikaci je bezesporný, není z didaktického hlediska vhodné setrvávat pouze u těchto úloh, neboť význam matematiky v očích žáků degradují. Žáci v nich postrádají smysluplnou vazbu k reálnému životu, což často projevují otázkou „A k čemu nám to bude?“, většinou nepřijímají ani argument, že tyto úlohy napomáhají rozvíjet jejich myšlení, a v důsledku toho ztrácejí zájem o matematiku.

Tento problém mohou částečně řešit úlohy aplikační, jejichž řešení je založeno na komplexním využití získaných vědomostí a dovedností, nebo úlohy tzv. praktické, které popisují reálnou situaci a představují model problému z ní vycházející. Tak tomu je i v úlohách o společné práci. Společná práce subjektů s různou výkonností je pro životní praxi typická a je v ní také frekventovanějším případem než společná práce stejně výkonných subjektů, která je reprezentována např. slovními úlohami na nepřímou úměrnost. (Zjišťování výkonnosti — doby, za kterou je práce vykonána, má své uplatnění např. při plánování.) Otázkou však zůstává, nakolik je výkonnost subjektů neměnná v závislosti na pracovních podmínkách (délce pracovní doby, prostředí apod.). Proto je nutné poznamenat, že i v těchto matematických úlohách je reálný problém do jisté míry idealizován.

Polemika nad reálností úloh o společné práci ovšem neubírá nic na jejich významu a přínosu pro běžný život. Přínosem nejnížší úrovně je skutečnost, že žáci se mohou s případem společné práce popsaným v některé slovní úloze setkat ve svém životě. Dalším přínosem je možnost využít strategie osvojené při řešení úloh tohoto typu také při řešení jiných problémů. A koneckonců přínosem nejvyšší úrovně je získání dovednosti analyzovat problémy a efektivně aplikovat matematické vědomosti a dovednosti při jejich řešení.

Úlohy o společné práci se vyznačují tím, že v nich vystupují dva subjekty (případně tři i více subjektů) různé výkonnosti, které vykonávají společně či současně stejnou práci (činnost). Výkonností zde rozumíme dobu, za kterou subjekt vykoná danou práci. Hledanou veličinou bývá buď individuální, nebo společná výkonnost subjektů, eventuálně množství práce. Příkladem jsou následující dvě úlohy:

Úloha 1 Mistr sám natře plot za 10 hodin, učeň za 15 hodin. Za jak dlouho natrou společně celý plot? Jakou část plotu natrou za 4 hodiny společné práce?

Úloha 2 Mistr a učeň natrou společně plot za 6 hodin. Mistr sám natře plot za 10 hodin. Za jak dlouho natře plot učeň?

Pomůckou pro identifikaci úloh o společné práci jsou témata nebo frekventovaná slova a sousloví. Text slovní úlohy se většinou váže k následujícím tématům:

- společná práce lidí nebo skupin lidí,
- společná práce strojů,
- naplňování a vyprazdňování nádrží, bazénů apod.,
- spotřeba zásob.

V textu úloh o společné práci se často vyskytují slova a sousloví jako společně, dohromady, současně, zároveň, při společné práci, při současném použití apod. Skutečnost, že se jedná o společnou práci, nemusí být vždy vyjádřena klíčovými slovy, je zřejmá z kontextu. Témata a klíčová slova někdy zavádějí a tedy nezaručují správnou identifikaci, proto je třeba se řídit znakem, který je pro úlohy o společné práci specifitější. Takovým znakem je různá výkonnost subjektů vztažená ke stejné práci. Tato skutečnost bývá v zadání úloh zdůrazněna nebo vyplývá z kontextu.

Úlohy, v nichž výkonnost subjektů není přímo vztažena ke společné práci, ale je vyjádřena obecně množstvím práce za určitou časovou jednotku, např.

Úloha 3 Nádrž o objemu 15 hl má dva přívody. Jedním z nich přitéká 5 l za minutu, druhým 7 l za minutu. Za kolik minut se nádrž naplní oběma přívody současně?

nebo v nichž mají všechny subjekty stejnou výkonnost, např.

Úloha 4 Úroda by byla sklizena čtyřmi kombajny za 12 dní. Kolik kombajnů je třeba přibrat, aby úroda byla sklizena o čtyři dny dříve? nepovažujeme za úlohy o společné práci.

V úloze 3 je diskutabilní, zda se jedná o úlohu o společné práci či nikoliv. Úlohy tohoto typu mají s „klasickými“ úlohami o společné práci mnoho společných znaků, ovšem při jejich řešení se objevují výrazné rozdíly (ve tvaru rovnice), zvláště v případech výpočtu individuální výkonnosti. Řešení těchto úloh je reprezentováno lineární rovnicí, případně při modifikovaném zadání soustavou dvou lineárních rovnic. Při definování úloh o společné práci se přikláníme ke kritériu, které je podle našeho mínění z didaktického hlediska důležitější, tj. k aspektům řešení úlohy, a nikoliv k vnějším znakům. Přestože tyto úlohy mezi úlohy o společné práci nezařazujeme, přisuzujeme jim velký význam při propedeutice — v etapě vyvozování pravidla sčítání výkonů a sestavování rovnice.

Úloha 4 reprezentuje úlohy na nepřímou úměrnost, které nesplňují základní podmínku úloh o společné práci — rozdílnost výkonností subjektů, a výrazně se liší postupem řešení, jenž je založeno na poměru.

Úlohy o společné práci lze klasifikovat podle témat, otázek nebo náročnosti řešení. Klasifikace podle témat (viz výše) není didakticky natolik významná jako klasifikace podle otázek. Typ otázky (resp. hledané veličiny) určuje postup řešení. Dotaz na společnou výkonnost (SV), který bývá formulován větou *Za jak dlouho vykonají (subjekty) určitou práci společně?*, je častějším a početně jednodušším případem. Dotaz na individuální výkonnost (IV), který bývá formulován větou *Za jak dlouho vykoná určitou práci subjekt sám?*, představuje náročnější případ, zvláště ptáme-li se na individuální výkonnost několika subjektů. Výjimečně se v úlohách objevuje dotaz na množství práce (MP), formulovaný větou *Jaká část práce byla vykonána za určitou dobu?* (Vystupuje-li tato otázka v úloze samostatně, pak řešení získáme jako součet zlomků — výkonů.)

Dalším významným klasifikačním hlediskem je náročnost řešení. Případ, kdy všechny subjekty vykonávají společně celou práci (typ SP), je častější a početně jednodušší než případ, kdy subjekty vykonávají společně jen část práce, tj. kdy jde o kombinaci společné a individuální práce (typ SIP).

Náročnost řešení neovlivňují jen tyto dva zmíněné aspekty, ale také formulace zadání. Výkonnost subjektů nebývá vždy přímo zadána číselnou hodnotou, ale je vyjádřena určitým vztahem k výkonnosti jiného

subjektu, např. porovnáním (o kolik, kolikrát), procentem či zlomkem, poměrem, funkčním vztahem apod.

Řešení většiny úloh o společné práci je založeno na sčítání zlomků (resp. lomených výrazů) a vede na lineární rovnici. Takové úlohy považujeme za standardní. Úlohy, jejichž řešení vede na rozdílový typ rovnice (např. naplňování a současné vyprazdňování nádrže), soustavu dvou rovnic nebo kvadratickou rovnici, klasifikujeme jako nestandardní. Rovněž tzv. „úloha v úloze“, tj. úloha, která je součástí jiné slovní úlohy (např. na výpočet objemu nádrže), patří mezi nestandardní.

V případě algebraického zadání (kdy výkonnost je vyjádřena proměnnou) mluvíme o tzv. nadstavbových úlohách. Řešení takových úloh je pro žáky náročnější díky absenci konkrétních číselných hodnot umožňujících kontrolu výsledku.

Rozbor slovní úlohy, zvláště úlohy o společné práci, je velice důležitou fází jejího řešení. Rozbor úlohy je žáky mnohdy opomíjen, což se negativně projevuje při samotném řešení, zvláště při sestavování rovnic. Rozbor úlohy spočívá v důkladném seznámení se se zadáním úlohy, tj. zjištění daných a hledaných veličin, a zároveň v její identifikaci, tj. zařazení úlohy do skupiny úloh určitého typu. Konkrétně v rozboru úloh o společné práci zjišťujeme, které subjekty v úloze figuruji a co všechno o nich víme, tj. o jejich výkonnosti a vzájemném vztahu. Na základě těchto informací posuzujeme, zda zadání úlohy splňuje výše uvedená kritéria, zda jde skutečně o úlohu o společné práci. Dále upřesňujeme, o jaký typ úlohy se jedná — vykonávají-li subjekty celou práci (typ SP) nebo jen její část (typ SIP), a na co se v úloze ptáme — hledáme-li společnou výkonnost (SV) nebo individuální výkonnost (IV), případně další veličinu. V závěrečném kroku rozboru pak na základě těchto informací provádíme identifikaci, abychom mohli eventuálně využít již známé strategie řešení.

Důležitou součástí rozboru je také odhad výsledku a ověření, zda je úloha řešitelná, a to jak z hlediska zadaných hodnot, tak i z hlediska úplnosti zadání. Je rovněž vhodné si položit otázku, je-li zadání úlohy jednoznačné (tj. nemá-li úloha více řešení), případně nejsou-li v zadání nadbytečné údaje.

Řešení úloh o společné práci využívá dvou významných matematických nástrojů — zlomků a rovnic, přičemž zlomek je při řešení klíčovým pojmem. Řešení je postaveno na dovednosti pracovat s tímto prostředkem (tj. provádět s ním elementární početní výkony a úpravy) — rovnice

jsou jen jakýmsi nadstavbovým prvkem, který řešení výrazně zefektivňuje, není však při řešení nezbytný. Nabízí se nám tedy dva postupy řešení: úsudkem a rovnicí.

Řešení úloh o společné práci úsudkem by mělo předcházet řešení rovnicí (neboť umožňuje žákům pochopit podstatu problému a princip řešení). Je založeno výhradně na práci se zlomky a pravidlu, že pracovní výkony subjektů se při společné (současné) práci sčítají (jedinou výjimkou jsou úlohy o naplňování a současném vyprazdňování nádrží nebo o doplňování a současně spotřebě zásob, které vedou na rozdílový typ rovnice). Klíčem k řešení je otázka, jakou část (jaké množství) práce subjekt vykoná za danou časovou jednotku. Pracovní výkon je vyjádřen podílem práce a doby, za kterou subjekt tuto práci vykoná. Součtem pracovních výkonů jednotlivých subjektů dostáváme společný pracovní výkon — zlomek, který vyjadřuje, jakou část práce vykonají všechny zúčastněné subjekty společně za danou časovou jednotku, a z něho úsudkem určujeme dobu společné práce.

Řešení úlohy 1 (úsudkem): Mistr natře za hodinu $\frac{1}{10}$ plotu, učeň $\frac{1}{15}$ plotu. Společně natrou za hodinu $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ plotu, tzn. celý plot za 6 hodin.

Součástí řešení by měla být vždy zkouška.

Zkouška: Mistr natře za 6 hodin $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ plotu, učeň za stejnou dobu $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ plotu. Společně natrou za 6 hodin $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, tj. celý plot.

Při řešení úloh o společné práci rovnicí vycházíme ze stejné úvahy, ale dobu společné práce volíme jako neznámou a pomocí ní vyjadřujeme pracovní výkony jednotlivých subjektů. Z těchto údajů sestavujeme rovnici.

Řešení úlohy 1 (rovnici): Počet hodin společné práce označíme x . Mistr natře za hodinu $\frac{1}{10}$ plotu. Učeň natře za hodinu $\frac{1}{15}$ plotu. Za x hodin natře mistr $\frac{x}{10}$ plotu. Za x hodin natře učeň $\frac{x}{15}$ plotu. Za x hodin natrou společně $(\frac{x}{10} + \frac{x}{15})$ plotu. Za x hodin natrou společně celý plot. Sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned}\frac{x}{10} + \frac{x}{15} &= 1 \\ 3x + 2x &= 30 \\ 5x &= 30 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Celý plot natrou společně za 6 hodin.

Pokud řešitel postrádá vhled do podstaty problému a nerozumí významu jednotlivých částí rovnice, sestavuje rovnici mechanicky a používá

ji bezmyšlenkovitě, a tak úlohu o společné práci degraduje na pouhé řešení rovnic.

Na základě analýzy učebnic určených pro druhý stupeň základní školy (vydaných v letech 1953–98) jsme dospěli k závěru, že koncepce analyzovaných učebnic neumožňuje žákům získat vhled do dané problematiky. Úlohy o společné práci nejsou charakterizovány tak, aby si žáci mohli uvědomit jejich specifčnost. Autoři učebnic se nezabývají rozbořem úloh, ale přistupují rovnou k jejich řešení, a to téměř většinou jen pomocí rovnic, čímž žákům sice poskytují modelovou strategii, ovšem bez vysvětlení podstaty problému, které je důležité pro získání nového poznatku. Řešené příklady, pokud se v učebnici vůbec vyskytují, se většinou omezují na mechanický návod sestavování rovnic bez uvedení alternativních tvarů rovnic. Úlohy určené k procvičování nepokrývají vždy dostatečně problematiku úloh o společné práci v celé její šíři a nevyznačují se velkou tematickou ani typovou rozmanitostí.

Úlohy o společné práci jsou nejčastěji zařazovány do tematických celků: Lineární rovnice nebo Slovní úlohy (případně přímo úlohy o společné práci) v 8. a 9. ročníku ZŠ.

Výsledky sondy, kterou jsme realizovali v šesti třídách druhého stupně základní školy (ve dvou šestých třídách, v jedné sedmé třídě, ve dvou osmých třídách a v jedné deváté třídě), ukázaly, že úlohu typu

Oráč s koňským potahem zorá pole za šest dní. Traktorista zorá totéž pole za dva dny.

1. Jaký zlomek pole zorá oráč za jeden den?
2. Jaký zlomek pole zorá traktorista za jeden den?
3. Jak velkou část pole zorají oba dva za jeden den?
4. Za jak dlouho zorají celé pole, jestliže budou orat současně?

je možné zařazovat do učiva matematiky již v šesté třídě, a to díky rozšiřujícím otázkám 1), 2) a 3), které navádějí k řešení stěžejního problému úlohy (otázky 4). Dále ukázaly, že zaměření se na řešení výlučně pomocí rovnic vede žáky k jejich mechanickému používání bez porozumění podstatě problému a v důsledku toho se zvyšuje pravděpodobnost výskytu chyb.

Na základě získaných poznatků uvedených v tomto příspěvku považujeme za přínosné připravovat žáky na řešení složitějších slovních

úloh — seznámit je s jednoduchými úlohami o společné práci a jejich řešením úsudkem — již v šestém ročníku. Vhodnou propedeutickou úlohou o společné práci je výše uvedená úloha. V sedmém ročníku je možné přistoupit k úlohám vyžadujícím náročnější operace se zlomky a dále prohlubovat řešení úsudkem. V osmém ročníku, v okamžiku, kdy žáci již získali dostatečný vhled do podstaty problému, je vhodné začít řešit úlohy o společné práci rovnicí, přičemž rovnice by neměla být vnímána jako jediný prostředek řešení, ale jako efektivní nástroj pro řešení složitějších úloh. V devátém ročníku by měla být celá problematika završena řešením nestandardních úloh a úloh s algebraickým zadáním. Je velice důležité věnovat stále velkou pozornost rozboru úloh, což je úkolem především učitele. Úlohy o společné práci je vhodné zařazovat i do jiných tematických celků (např. zlomky, poměr, procenta, soustavy rovnic, kvadratická rovnice, algebra).

Na základě provedené analýzy úloh o společné práci se domníváme, že úlohy tohoto typu představují vhodný materiál pro rozvíjení dovednosti žáků analyzovat problémy a efektivně je řešit komplexním využitím získaných matematických poznatků.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Ausbergerová Marie KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48
Barešová Monika ZŠ Campanus, Jírovcovo nám. 1782 Praha 4, 148 00	02/71 91 12 19 monika.baresova@pedf.cuni.cz
Bauer Luboš KAMI ESF MU, Lipová 41A Brno, 659 79	05/43 52 31 11 lobos@econ.muni.cz
Bečvář Jindřich MÚ UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	02/21 91 32 51 becvar@karlin.mff.cuni.cz
Bláhová Ladislava CHVV VÚP, Fráni Šrámka 37 Praha 5, 150 00	02/90 02 11 16 02/57 31 77 88
Boček Leo MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 75	02/21 91 32 22 02/21 91 32 27 bocek@karlin.mff.cuni.cz
Brejcha Miloš ÚDV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 370, 019/74 21 421 019/74 21 419 brejcha@kma.zcu.cz
Brůnová Jitka SOU farmaceutické, Na vlčinci 3 Olomouc, 771 17	
Bušek Ivan Pedagogické centrum, Na Poříčí 4 Praha 1, 110 00	02/23 24 839, 24 23 02 36 02/24 22 83 34
Calda Emil KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	02/21 91 32 25 02/21 91 32 27 calda@karlin.mff.cuni.cz
Cipra Tomáš KPMS MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	02/21 91 32 88 cipra@karlin.mff.cuni.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Cutychová Jana Gymnázium, Jateční 22 Ústí nad Labem, 400 01	047/56 01 402 047/56 01 246
Černá Barbora KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48 barbora_cerna@pedf.cuni.cz
Černý Jaroslav KM FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	02/24 35 38 66
Daňková Jarmila FEK ZČU, Hradební 22 Cheb, 350 02	0166/31 074
Demlová Marie KMA FEL ČVUT, Technická 2 Praha 6, 166 27	02/24 35 34 40 demlova@math.feld.cvut.cz
Deylová Marie ZŠ, U Santošky 17 Praha 5, 150 00	02/54 51 04
Dittrich Jiří Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	05/41 32 13 17 05/75 77 09 gsn@gsn.anet.cz
Dolanský Petr KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 143 019/27 99 89 dolansky@kma.zcu.cz
Drahotský Petr Gymnázium, Pospíšilova 324 Hradec Králové, 500 03	049/55 14 691
Dvořák Karel Gymnázium, Milevsko, 399 23	0368/52 25 76 0368/52 14 16
Eliášová Lada VŠE, Chemická 957 Praha 4, 148 00	02/79 34 742 02/79 34 742

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Emanovský Petr KMA PdF UP, Žižkovo nám. 5 Olomouc, 771 40	068/56 35 704 eman@risc.upol.cz
Fantová Ivana Gymnázium, Husova 410 Benešov, 256 01	0301/21 710 0301/23 077 fantova@gbn.czn.cz
Fenclová Věra ZŠ, nám. Jiřího z Lobkovic 22 Praha 3, 130 00	02/42 46 06 02/71 73 78 04 zsjl@bohem-net.cz
Fridrichová Alena Gymnázium, Praha,	
Friedrich Václav KSO FEK ZČU, Hradební 22 Cheb, 350 02	0166/42 34 51 vaclav.friedrich@fek.zcu.cz
Fuchs Eduard KMA PF MU , Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	05/41 32 12 51 05/41 21 03 37 fuchs@math.muni.cz
Hanušová Dana Gymnázium, Studentská 896 Mnichovo Hradiště, 295 01	0329/77 16 01
Havel Hugo SOŠT, SOU a U, Lidická 31 České Budějovice, 370 01	038/56 501
Holý Jan Gymnázium, Masarykova 183 Broumov, 550 01	0447/21 276 0447/21 276
Horáček Ivo ZŠ Campanus, Jírovcovo nám Praha 4 - Chodov, 148 00	02/71 91 12 19 ivo_horacek@pedf.cuni.cz
Horáčková Jana ZŠ Campanus, Jírovcovo nám Praha 4 - Chodov, 148 00	

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Horák Karel MÚ AV, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 21 16 31 02/22 21 16 38 horakk@math.cas.cz
Hostinská Michaela Euroškola spol. s.r.o., Mariánská 605 Česká Lípa, 470 01	0425/20 560 0425/20 560
Hozová Libuše ZŠ, Otická 18 Opava, 746 01	0653/21 58 03
Hrubešová Hana ZŠ, Křivoklát, 270 23	0313/55 82 57
Hrubý Dag Gymnázium, A.K. Vitáka 452 Jevíčko, 569 43	0462/32 78 31 0462/32 78 31 gymjev@orcz.cz
Hudcová Milada SOU, nám. 9. května 2 Boskovice, 680 11	0501/45 30 41 0501/45 30 47
Ježek František KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 137 019/27 99 89 jezek@kma.zcu.cz
Jílek Petr SPŠS, Čáslavská 973 Chrudim, 537 01	0455/68 86 22 0455/68 86 21 jilek@spss-cr.cz
Justin Petr ZŠ, Sokolská 211 Zborovice, 768 32	0634/98 22 02
Kaslová Michaela KMDM PedF UK, Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 52 02/21 90 02 48
Kocianová Anna Gymnázium J. Keplera, Parlérova 2 Praha 6, 169 00	02/33 35 25 46

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Kočandřlová Milada KM FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	02/24 35 43 80 kocandr@fsv.cvut.cz
Kojecká Jitka kat. MA a AM PřF UP, Tomkova 38 Olomouc, 779 00	068/54 11 646-7 kl. 206 kojicka@matnw.upol.cz
Kolář Petr CHVV VÚP, Fráni Šrámka 37 Praha 5, 150 00	02/90 02 11 16 02/57 31 77 88
Koman Milan PedF UK Praha, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 49 milan.koman@pedf.cuni.cz
Kopaněv Oleg FVT TU, Plzenská 10 Prešov, 080 01	0421/91/72 13 60 0421/91/73 34 53
Kopecký František Gymnázium J. Nerudy, Hellichova 3 Praha, 118 00	02/53 94 27 02/55 10 92
Kopka Jan KMA PF UJEP, České mládeže 8 Ústí nad Labem, 400 96	047/52 14 417 047/52 12 053 kopkaj@pf.ujep.cz
Kott Dalibor KMA PF MU , Janáčkovo nám. 2a Brno, 662 95	05/41 32 12 51 05/41 21 03 37 kott@math.muni.cz
Kratochvílová Jana KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48 jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz
Krejčová Eva Gymnázium, Omská 1300 Praha 10, 105 00	02/67 31 13 17
Krejčová Marie ZŠ, Kollárova 30 Jihlava, 586 02	066/72 20 141

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Krupka Peter Gymnázium, Tř. kap. Jaroše 14 Brno, 658 70	05/45 32 12 82
Křen Jiří KME FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 118 019/27 17 44 kren@kme.zcu.cz
Křížek Michal MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 21 16 31 02/22 21 16 38 krizek@math.cas.cz
Kubáلكová Vlastimila Gymnázium, Čajkovského 9 Olomouc,	068/52 25 750
Kubát Josef Gymnázium, Dašická 1083 Pardubice, 530 03	040/66 50 715 040/66 51 560 gypced@supce.cz
Kubátová Lenka První české gymnázium, Národní 25 Karlovy Vary, 360 20	017/32 23 550 017/32 23 369 gymkvary@mbox.vol.cz
Kubeš Josef Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 301 54	019/72 26 747 josef.kubes@gymik.pilsedu.cz
Kubínová Marie KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 00 51 02/21 90 02 48 karel.kubin@mbox.vol.cz
Kuřina František PdF VŠP, Nám svobody 301 Hradec Králové, 500 02	049/50 61 153 frantisek.kurina@vsp.cz
Lauterbach Luboš Gymnázium, Arabská 14 Praha 6, 161 00	02/30 17 007 02/30 17 007
Littler Graham Haward University of Derby, Mickleover Derby, DE35GX	++44/3323/47 481 ++44/3323/ 51 43 23 g.h.littler@derby.ac.uk

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Ludvíková Jana KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48 jana_ludvikova@pedf.cuni.cz
Machačová Ludmila KM FES UPa, Studentská 84 Pardubice, 530 09	040/60 36 019
Macháčková Marie OA, nám. T.G. Masaryka 3669 Zlín, 761 57	067/72 10 759 067/36 707 academy@traveller.cz
Maňásková Eva Gymnázium L. Jaroše, Palackého 524 Holešov, 769 01	0635/21 098
Mašek Josef KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 139 019/27 99 89 jmasek@kma.zcu.cz
Meixnerová Zdeňka Gymnázium, Partyzánská 530 Liberec 11, 460 11	
Michnová Jarmila SPŠSE a VOŠ, Masarykova 3 Liberec, 460 84	048/51 00 113 048/51 00 063 sekretariat@spsselib.hiedu.cz
Míka Stanislav KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 135 019/27 99 89 mika@kma.zcu.cz
Molnár Josef KAG PrF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	068/41 22 10 molnar@risc.upol.cz
Mrvíková Stanislava Gymnázium, Mikulášské nám. 23 Plzeň, 301 54	
Novák Bohumil KMA PedF UP, Žižkovo nám. 5 Olomouc, 771 40	068/56 35 709 bohumil.novak@upol.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Novák Břetislav MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	02/21 91 32 54 bnovak@karlin.mff.cuni.cz
Nováková Marie Prometheus, Žitná 25 Praha 1, 117 00	02/61 21 54 09
Novotná Jarmila KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 51 02/21 90 02 48, 02/24 94 77 82 jarmila.novotna@pedf.cuni.cz
Odvárko Oldřich KDM MFF UK, Sokolovská 83 Praha 8, 186 00	02/21 91 32 24 02/21 91 32 27 odvarko@karlin.mff.cuni.cz
Otruba Karel Gymnázium, nám. Odboje 304 Dvůr Králové nad Labem, 544 01	0437/82 01 89
Pelantová Alena ZŠ Na Slovance, Bedřichovská 1 Praha 8, 182 00	02/85 89 718 02/85 89 718
Perný Jaroslav KMD FP TU, Voroněžská 13 Liberec, 461 17	048/53 52 285 048/53 52 332 jaroslav.perny@vslib.cz
Plzáková Bohumila ZŠ, Karla IV. 1024 Ústí nad Labem, 400 03	047-55 31 139 047-55 31 139
Polák Josef KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 145 019/27 99 89 polak@kma.zcu.cz
Polová Alenka 4. ZŠ, Jiráskovy sady 273 Příbram II, 261 01	0306/24 626
Pomykal Rudolf VOŠ s.r.o., Osvobození 699 Kunovice , 686 04	0632/54 90 18 0632/54 80 35 vos.zasred1@brn.pvnet.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Pomykalová Eva Gymnázium, Lesní čtvrť 1364 Zlín, 760 01	067/36 114
Pradlová Jana KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 147 019/27 99 89 pradlova@kma.zcu.cz
Procházka František SPŠS, Čáslavská 973 Chrudim, 537 01	0455/68 86 23 0455/68 86 21 prochazka@spss-cr.cz
Prokeš Josef Biskupské gymnázium, Jirsíkova 5 České Budějovice, 370 21	038/37 121 gybi-cb@jcu.cz
Půlpán Zdeněk KMA PdF VŠP, Víta Nejedlého 573 Hradec Králové, 500 03	049/50 61 153 kl. 111 zdenek.pulpan@vsp.cz
Randáková Ilona SOUT, U Panského dvora 1006 Ústí nad Labem, 400 01	0417/52 14 614 0417/52 09 738
Rašková Alena SPŠ oděvní, Vápenice 1 Prostějov, 796 01	0508/26 711 0508/29 767
Roubíček Filip KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48 filip.roubicek@pedf.cuni.cz
Rybová Juliana SZŠ a VZŠ, Palachova 35 Ústí nad Labem, 400 01	047/52 11 276 047/52 14 092
Smolařová Ivana 6. ZŠ, Bří Čapků 279 Příbram VII, 261 02	0306/23 506 0306/23 506
Smrčková Iva ZŠ, nám. Bří Jandusů 2 Praha 10, 104 00	02/67 71 08 28 02/67 71 08 28

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Staněk František Gymnázium, Na Vítězné pláni 1160 Praha 4, 140 87	02/42 54 35 02/42 34 89
Stehlíková Naďa KMDH PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 00 48 nada.stehlikova@pedf.cuni.cz
Sýkora Václav KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 50 , 02/22 21 12 02 02/21 90 02 48 vaclav.sykora@pedf.cuni.cz
Šedivý Jan Gymnázium J. Nerudy, Hellichova 3 Praha 1, 118 00	02/24 23 02 36 02/24 22 83 334
Šimčíková Oldřiška ZŠ, U Sýpek 1462 Kroměříž, 767 01	0634/21 164
Šíma František Soukr. OA, Zlatá stezka 240 Prachatice, 383 01	0338/31 41 12
Šnejdar Libor ZŠ, Archlebov, 696 33	0629/63 36 32
Šolcová Alena KMA FSV ČVUT, Thákurova 7 Praha 6, 166 29	02/24 35 43 88 solcova@mbox.cesnet.cz
Špůrová Jarmila SPŠ dopravní, Koterovská 85 Plzeň, 307 03	019/72 48 245 019/72 48 245 spsd@melmek.pilsedu.cz
Štefl Ondřej Scio nadace, Senovážné náměstí 24 Praha 1, 116 47	02/24 10 22 87 02/24 10 24 17 scio@alphanet.cz
Štěpánek Milan SZdrŠ, Tylova 18 Plzeň, 305 98	019/22 11 63 019/22 11 63

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Šváchová Jana Gymnázium, Husova 410 Benešov, 256 01	0301/21 710 0301/23 077 svachova@gbn.czn.cz
Švrček Jaroslav KAG PrF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	068/41 22 10, 41 26 04 068/54 11 643 svrcek@risc.upol.cz
Tichá Marie MÚ AV ČR, Žitná 25 Praha 1, 115 67	02/22 21 16 31 02/22 21 16 38 ticha@math.cas.cz
Tomášek Vladislav ÚIV, Senovážné nám. 26 Praha 1, 111 21	02/24 39 83 33 02/24 39 82 78 tomasek@alfa.uiv.cz
Trojan Ivo SUPŠ, Žižkovo nám. 1 Praha 3, 130 00	02/62 76 258, 62 76 274
Trávníček Stanislav KAG PrF UP, Tomkova 40 Olomouc, 779 00	068/41 26 04 travnice@risc.upol.cz
Tuchanová Milena KMA FAV ZČU, Univerzitní 22 Plzeň, 306 14	019/74 91 127 019/27 99 89 tuchanov@kma.zcu.cz
Vaněk Václav Gymnázium, 17. listopadu 526 Bílovec, 743 11	0655/41 10 71 0655/26 87 gbilovec@ostrava.cesnet.cz
Vaníček Jiří PF JČU, Jeronýmova 10 Č. Budějovice, 371 15	038/77 73 079 vanicek@pf.jcu.cz
Vlášková Jana Prometheus, Žitná 25 Praha 1, 117 00	02/61 21 54 09
Vodák Zdeněk Gymnázium, Slovanské nám. 7 Brno, 612 00	05/41 32 13 17 05/75 77 09 gsn@anet.cz

Příjmení a jméno adresa	tel: fax: E-mail
Všetečka Jiří AVTC – ČVUT, Trojanova 13 Praha 2, 120 00	02/29 66 37 02/29 68 36
Weislová Eva KMDM PedF UK, M.D. Rettigové 4 Praha 1, 116 39	02/21 90 02 48 02/21 90 02 48
Vůchová Radka Obchodní akademie, Lužická 412 Marianské Lázně, 353 42	0165/62 50 44 0165/62 50 45 akademie@mbox.vol.cz
Zajac Štefan JČMF, Žitná 25 Praha,	02/22 21 06 10 02/90 00 04 29 jcmf@math.cas.cz
Zhouf Jaroslav Gymnázium, Zborovská 45 Praha 5, 150 00	02/57 32 08 16 02/53 85 95 gyzb1-ab@hiedu.cz
Zimmermannová Taťána Gymnázium, Nám. Osvobození 20 Zábřeh, 789 01	0648/41 11 38 0648/22 380
Židek Stanislav , Hněvotínská 50 Olomouc, 779 00	068/54 15 375

Editoři: Marie Ausbergerová
Jarmila Novotná

Sazba a technická příprava: Miloš Brejcha

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Za obsah příspěvků plně zodpovídají autoři.

Vysázeno systémem L^AT_EX.