KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

MATEMATIKA A REÁLNÝ SVĚT

Sborník konference

Praha, 20. až 22. září 2012

Antonín Slavík (ed.)

matfyzpress
VYDAVATELSTVÍ
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Autoři

RNDr. Eva Davidová
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
doc. RNDr. Jan Chleboun, CSc.
prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc.
RNDr. František Kopecký
Bc. Radka Matěková
RNDr. Vlasta Moravcová
doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
Mgr. Vít Průša, Ph.D.
RNDr. Jarmila Robová, CSc.
RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková
PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Mgr. Jana Vlachová
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Recenzenti

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Mgr. Martin Melcer, Ph.D.
RNDr. Eliška Pecinová, Ph.D.
RNDr. Martina Štěpánová
RNDr. Dana Trkovská

ISBN 978-80-7378-231-3

ÚVODNÍ SLOVO

Ve dnech 20. až 22. září 2012 se v Profesním domě na Malostranském náměstí v Praze, v jedné z historických budov Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, konala celostátní konference *Matematika a reálný svět*. Organizovala ji Katedra didaktiky matematiky MFF UK,[1] spolupořadatelem byla Středočeská pobočka JČMF. Akce volně navazovala na konferenci *Jak připravit učitele matematiky*[2] pořádanou na stejném místě v roce 2010.

Konference byla určena pracovníkům fakult připravujících učitele matematiky, středoškolským učitelům matematiky, doktorandům a studentům vyšších ročníků, kteří se připravují na učitelskou profesi s aprobací matematika pro třetí stupeň, pracovníkům různých výzkumných institucí a dalším zájemcům o problematiku vzdělávání. Zúčastnilo se jí přes 100 učitelů středních a vysokých škol, z nichž se mnozí aktivně zapojili do zajímavé diskuse.

Konference byla zaměřena na následující okruhy:

- vliv praxe, potřeb společnosti a vědních a technických disciplín na vývoj školské matematiky a přípravu učitelů matematiky,
- spojení školské matematiky s reálným světem,
- aplikace matematiky v přípravě učitelů.

Součástí konference byla výstavka učebnic, učebních textů a dalších publikací, softwarových produktů, učebních pomůcek, bakalářských a diplomových prací studentů učitelství obhájených na KDM MFF UK, a prodejní výstava publikací nakladatelství Matfyzpress a Prometheus.

Tento sborník obsahuje texty většiny příspěvků přednesených na konferenci. Vybrané konferenční prezentace, seznam účastníků, fotografie a další materiály jsou k dispozici na webové stránce konference:

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/`

Děkujeme programovému a organizačnímu výboru za přípravu konference, řečníkům za přednesení příspěvků a dodání jejich písemné verze a recenzentům za pečlivou kontrolu všech textů a řadu podnětných připomínek.

---

[1] Programový výbor: Jindřich Bečvář (předseda), Martina Bečvářová, Leo Boček, Adolf Karger, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Alena Šarounová (KDM MFF UK), Dag Hrubý (Gymnázium v Jevíčku), František Kopecký (Gymnázium v Praze v Hellichově ulici)
Organizační výbor: Antonín Slavík (předseda), Alena Blažková, Zdeněk Halas, Jana Hromadová, Jakub Staněk, Petra Surynková (KDM MFF UK), Tereza Bártlová, Vlasta Moravcová, Luboš Moravec, Dana Trkovská, Lukáš Vízek (doktorandi a studenti)

[2] Texty příspěvků z této konference byly publikovány ve sborníku J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (eds.): *Jak připravit učitele matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2010. Jsou též k dispozici v elektronické verzi na webové stránce
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2010/`.

OBSAH

Úvodní slovo 3

Obsah 4

Program konference 5

A. Karger: *Geometrické úlohy inspirované robotikou* 7

O. Odvárko: *Aplikační úlohy ve výuce středoškolské matematiky* 18

J. Robová: *Finanční gramotnost žáků středních škol* 24

F. Kopecký: *Realita života učitele v pokusech o matematizaci reálných situací ve výuce* 36

E. Davidová: *Rozvoj abstraktního a praktického myšlení ve výuce matematiky* 39

J. Chleboun: *Naučme se počítat s nejistotou* 43

J. Zhouf: *Číselné průměry kolem nás* 49

V. Průša: *Tuhé a tekuté: možnosti a meze matematického modelování v mechanice kontinua* 56

A. Slavík: *Volební matematika* 62

J. Staněk: *Pravděpodobnost a hry* 70

M. Hykšová: *Hazardní hry a výuka pravděpodobnosti* 76

P. Surynková, R. Matěková, J. Vlachová: *Geometrické modelování* . . 82

Z. Halas: *Aplikace matematiky v běhu věků* 93

A. Šarounová: *Dláždění v nečekaných souvislostech* 99

V. Moravcová: *Matematika v mezipředmětových vztazích* 105

Program konference
MATEMATIKA A REÁLNÝ SVĚT

(Profesní dům, MFF UK, Malostranské nám. 25, Praha 1)

Čtvrtek 20. 9. 2012 (refektář Profesního domu)

9,00 – 10,00	Registrace účastníků
10,00 – 10,30	Zahájení konference, úvodní slovo děkana MFF UK
10,30 – 11,20	J. Nešetřil: *K čemu je moderní matematika*
11,20 – 12,10	M. Křížek: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím*
12,10 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,05	A. Karger: *Geometrické úlohy inspirované robotikou*
14,05 – 14,40	O. Odvárko: *Aplikační úlohy ve výuce středoškolské matematiky*
14,40 – 15,15	J. Robová: *Finanční gramotnost žáků středních škol*
15,15 – 15,50	Přestávka na kávu
15,50 – 16,20	J. Divoká, R. Řepka: *iPad a grafický kalkulátor v matematice*
16,20 – 16,55	F. Kopecký: *Realita života učitele v pokusech o matematizaci reálných situací ve výuce*
16,55 – 17,30	E. Davidová: *Rozvoj abstraktního a praktického myšlení ve výuce matematiky*
17,30 – 19,00	Přestávka na večeři
19,00 – 21,00	Hudební program v refektáři Profesního domu

Pátek 21. 9. 2012 (posluchárna S9 v 1. patře)

9,00 – 9,50	P. Drábek: *Jednoduché ekonomické a biologické modely v řeči diferenčních rovnic*
9,50 – 10,40	J. Chleboun: *Naučme se ve škole i v praxi počítat s nejistotou*
10,40 – 11,10	Přestávka na kávu
11,10 – 11,45	J. Zhouf: *Číselné průměry kolem nás*
11,45 – 12,20	V. Průša: *Tuhé a tekuté: Možnosti a meze matematického modelování v mechanice kontinua*
12,20 – 14,00	Přestávka na oběd
14,00 – 14,35	A. Slavík: *Volební matematika*
14,35 – 15,10	J. Staněk: *Pravděpodobnost a stolní hry*
15,10 – 15,45	M. Hykšová: *Hazardní hry a výuka pravděpodobnosti*
15,45 – 16,15	Přestávka na kávu
16,15 – 16,50	J. Mizerovský: *Zobrazování významných staveb*
16,50 – 17,25	M. Kapoun: *Hamlet aneb Členitost tvaru coby charakteristika literární postavy*
17,25 – 18,00	P. Surynková: *Geometrické modelování*
19,00 – 22,00	Společenský večer v respiriu MFF UK – Karlín

Sobota 22. 9. 2012 (posluchárna S9 v 1. patře)

9,00 – 9,50	Z. Halas: *Aplikace matematiky v běhu věků*
9,50 – 10,25	D. Hrubý: *Trigonometrie v praxi*
10,25 – 11,00	Přestávka na kávu
11,00 – 11,35	A. Šarounová: *Dláždění v nečekaných souvislostech*
11,35 – 12,10	V. Moravcová: *Matematika v mezipředmětových vztazích*
12,10 – 12,45	Závěrečná diskuse
12,45 – 13,00	Zakončení konference

GEOMETRICKÉ ÚLOHY INSPIROVANÉ ROBOTIKOU

Adolf Karger

V tomto příspěvku chceme ukázat, že při řešení praktických problémů se stále setkáváme s úlohami klasické geometrie. Situaci demonstrujeme na jednom problému z robotiky, na přímé úloze pro tzv. paralelní roboty. Podobné úlohy mohou sloužit jako inspirace pro vyučování geometrie na střední škole.

Příspěvek je rozdělen do tří částí:

1. Základní informace o robotech.
2. Přímá úloha pro rovinného robota.
3. Geometrické úlohy inspirované robotikou.

1 Základní informace o robotech

Robotikou v tomto příspěvku rozumíme odvětví techniky, které se zabývá pohyblivými mechanickými systémy, které vykonávají různé potřebné činnosti v nejrůznějších odvětvích lidské praxe. Budeme se striktně držet skutečnosti a současnosti, neuvažujeme žádnou virtuální realitu nebo science fiction.

Roboty získávají v posledních letech stále větší pole působnosti. Dnes už je tradiční použití robotů v automobilovém průmyslu. Velice slibné je užití robota při některých složitých operacích v lékařství. Než uvedu příklady robotů, popíšu stručně některé základní vlastnosti a třídění robotických systémů (manipulátorů).

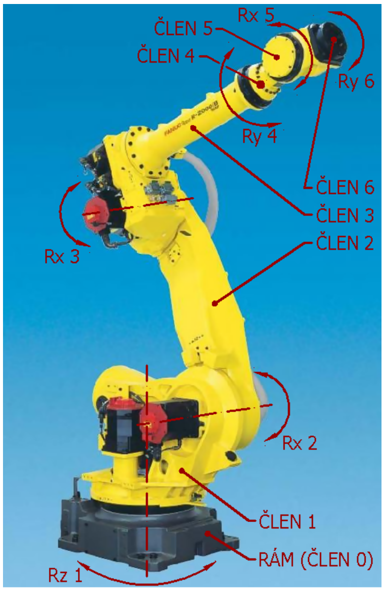
Rozeznáváme tři druhy robotických systémů – sériové, paralelní a smíšené.

Pro základní představu je uvedeme ve zjednodušení:

- sériový robot je betonová pumpa nebo prst,
- paralelní robot je pavouk nebo kůň,
- smíšený robot je třeba člověk nebo lidská ruka.

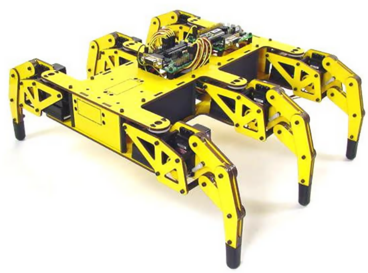
Pro sériový robot je typické, že pohyb posledního článku (tzv. efektoru) vzniká složením pohybů jednotlivých článků, u paralelního robota se jednotlivé členy pohybují nezávisle na sobě.

Systematický popis smíšených robotů je velice obtížný a teorie existuje pouze pro velice speciální případy. Například simulace lidské chůze je velice komplikovaný problém. V poslední době bylo v tomto směru dosaženo významných úspěchů. Dále se budeme zabývat pouze geometrickou stránkou problému vzhledem k aplikacím, které máme na mysli. Jedná se tedy o systémy, které vytvářejí přesně definovaný pohyb v prostoru (přesně, rychle a opakovaně), pomocí kterého manipulátor vykonává zadaný úkol. Ve speciálním případě může jít také o pohyb rovinný nebo "skoro" rovinný (betonová pumpa). Jedná se tedy o problém z geometrie prostoru nebo roviny. Není důvod, proč by se některé zjednodušené problémy nemohly objevit i ve školské geometrii. Třeba jenom jako ukázky, studenti se často ptají – „proč se to máme učit?“ a taková ukázka může poskytnout částečnou odpověď a určitou motivaci.



Obr. 1: Sériový robot s vyznačenými členy.

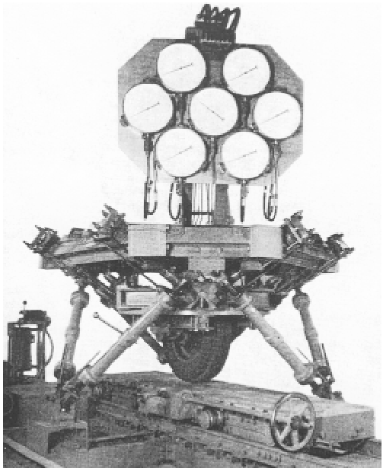
Na obrázku vidíme, jak se výsledný pohyb skládá z rotací jednotlivých členů robota.



Obr. 2: Příklad paralelního robota.

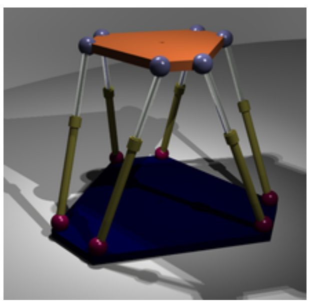
Zde vidíme, jak se každý článek pohybuje samostatně.

Jeden z prvních paralelních manipulátorů sestrojil D. Stewart, uvádíme jej pro zajímavost.



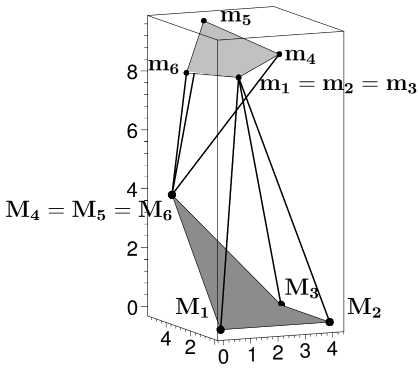
Obr. 3: Původní platforma sestrojená D. Stewartem.

Budeme se nyní zabývat pouze Stewart-Goughovou platformou, tj. paralelním manipulátorem, jehož pohybující se i pevná část má šest sférických kloubů, klouby v pevném a pohyblivém systému jsou spojeny šesti teleskopickými tyčemi. Změna délky těchto tyčí generuje změnu polohy pohyblivé části vzhledem k pevné části. Některé klouby mohou splynout, viz např. obrázek původní Stewartovy platformy.



Obr. 4: Schematický obrázek Stewart-Goughovy platformy.

Základní geometrickou úlohou pro tento typ manipulátoru je tzv. přímá úloha tj. nalezení polohy platformy (tj. pohyblivé části), jsou-li dány délky (nohou). Situaci vidíme na Obr. 5.



Obr. 5: Schematický popis platformy.

Malá písmena patří k pohyblivé části (platformě), velká k pevné části (bázi), na bázi i v platformě tři body splývají. V každé soustavě je šest bodů, protože těleso v prostoru má šest stupňů volnosti a jeho poloha tedy závisí na šesti parametrech (v našem případě délkách ramen).

Základní úlohu pro paralelního robota tedy můžeme geometricky popsat takto:

Jsou dány body $M_1, \ldots, M_6$ ($m_1, \ldots, m_6$) v pevném (pohyblivém) prostoru. Umístěte body $m_1, \ldots, m_6$ tak, aby vzdálenosti bodů m_i a M_i pro $i = 1, \ldots, 6$ byla daná čísla. Toto je úloha z klasické geometrie euklidovského prostoru. Není řešitelná euklidovskými prostředky, je stupně 40 a může mít skutečně 40 reálných řešení. Není pro školské účely vhodná, protože prostorové shodnosti překračují rámec středoškolské výuky. Budeme tedy uvažovat zjednodušenou verzi, budeme demonstrovat problém na rovinném paralelním robotu. Takové roboty se rovněž používají v praxi.

2 Přímá úloha pro rovinného paralelního robota

Uvažujme nyní zjednodušenou verzi předchozího problému, místo šesti bodů v prostoru uvažujeme tři body v rovině. Formulace úlohy je nyní mnohem názornější: Umístěte daný trojúhelník do takové polohy, aby každý jeho vrchol ležel na dané kružnici. Úloha je řešena na počítači s použitím software Maple VI, uvádíme nejen příkazy pro tuto úlohu, ale v komentáři i jejich smysl. Kde je to možné také příslušné rovnice.

```
Základní úloha pro konfiguraci rovinného paralelního robota:

Jsou dány dva trojúhelníky, jeden v nepohybující se soustavě

s vrcholy ABC.  Druhý je v pohybující se soustavě a má

vrcholy fgh. Dále jsou dány tři vzdálenosti, d1,d2,d3.

Trojúhelník fgh v pohybující se soustavě máme přemístit
```

do nové polohy FGH tak, aby vzdálenosti vrcholů byly rovny daným vzdálenostem, tj

d(A,F)=d1, d(B,G)=d2, d(C,H)=d3.

Souřadnice v pohyblivém systému označíme x,y, v pevném systému X,Y.

Vztah mezi pohyblivým a pevným systémem napíšeme ve tvaru

```
>         X:=r*x+s*y+p;Y:=-s*x+r*y+q;
```

kde r^2+s^2=1. Poslední vztah použijeme později.

Pro souřadnice trojúhelníků použijeme vhodnou souřadnicovou soustavu:

první bod je v počátku a druhý leží na první ose,

f=[0,0],g=[a2,0],h=[a3,b3].

Pro novou polohu pohybujícího se trojúhelníka máme

```
> F:=[subs(x=0,y=0,X),subs(x=0,y=0,Y)];
```

$$F := [p,\ q]$$

```
> G:=[subs(x=a2,y=0,X),subs(x=a2,y=0,Y)];
```

$$G := [r\ a2 + p,\ -s\ a2 + q]$$

```
> H:=[subs(x=a3,y=b3,X),subs(x=a3,y=b3,Y)];
```

$$H := [r\ a3 + s\ b3 + p,\ -s\ a3 + r\ b3 + q]$$

Zvolíme-li A=[0,0],B=[A2,0],C=[A3,B3], dostáváme podmínku pro vzdálenosti bodů

```
> r1:=X^2+Y^2-d1^2;r2:=(X-A2)^2+Y^2-d2^2;
r3:=(X-A3)^2+(Y-B3)^2-d3^2;
```

Po dosazení souřadnic bodů f,g,h, dostáváme výsledné rovnice rr1=0,rr2=0,rr3=0 a rr4=0 je zmíněná podmínka pro shodnost.

```
> rr1:=subs(x=0,y=0,r1);
```

$$rr1 := p^2 + q^2 - d1^2$$

```
> rr2:=expand(subs(x=a2,y=0,r2));
```

$$rr2 := r^2\ a2^2 + 2\ r\ a2\ p - 2\ r\ a2\ A2 + p^2 - 2\ p\ A2 +$$

```
     2    2  2                2    2
  A2  + s  a2  - 2 s a2 q + q  - d2
>rr3:=numer(expand(subs(x=a3,y=b3,r3)));
       2   2                          2   2
rr3 :=r  a3  + 2 r a3 p - 2 r a3 A3 + s  b3  + 2 s b3 p
               2              2    2   2
- 2 s b3 A3 + p  - 2 p A3 + A3  + s  a3  - 2 s a3 q
               2   2                            2
+ 2 s a3 B3 + r  b3  + 2 r b3 q - 2 r b3 B3 + q  - 2 q B3
      2     2
  + B3  - d3
> rr4:=r^2+s^2-1;
                                        2    2
                          rr4 := r  + s  - 1
```

Dostáváme čtyři kvadratické rovnice pro neznámé p,q,r,s.

Rovnice upravíme.

```
> rr2:=factor(rr2-rr1-rr4*a2^2);
                                               2           2
rr2 := 2 r a2 p - 2 r a2 A2 - 2 p A2 + A2  - 2 s a2 q -
  2    2    2
d2 + d1 + a2
>rr3:=factor(rr3-rr1-rr4*(a3^2+b3^2));

rr3:=2 r a3 p - 2 r a3 A3 + 2 s b3 p - 2 s b3 A3 - 2 p A3 +

- 2 s a3 q + 2 s a3 B3 + 2 r b3 q - 2 r b3 B3 - 2 q B3 +
   2    2    2     2     2     2
 A3 + B3 - d3  + d1  + b3  + a3
```

Dostali jsme dvě rovnice lineární v r a s, rovnice vyřešíme, výsledek přiřadíme a nezobrazujeme, je příliš dlouhý.

```
> solve({rr2,rr3},{r,s}):
> assign(%);
```

Zůstávají rovnice rr1=0, a rr4:=numer(factor(rr4)):

rr4 je čtvrtého stupně v neznámých p a q, za mocniny p dosadíme z rr1 a dostáváme novou rovnici f4=0 stupně jedna v p mající 554 členů.

```
> f4:=subs(p^4=(d1^2-q^2)^2,p^3=p*(d1^2-q^2),
      p^2=d1^2-q^2,rr4):
> f4:=factor(subs(p^4=(d1^2-q^2)^2,p^3=p*(d1^2-q^2),
      p^2=d1^2-q^2,f4)):
```

Z rovnice f4=0 vypočteme p a dosadíme do rr1.

```
> p:=factor(solve(f4,p)):
> rr1:=numer(factor(rr1)):
> degree(rr1,q);      6       nops(rr1);      15317
```

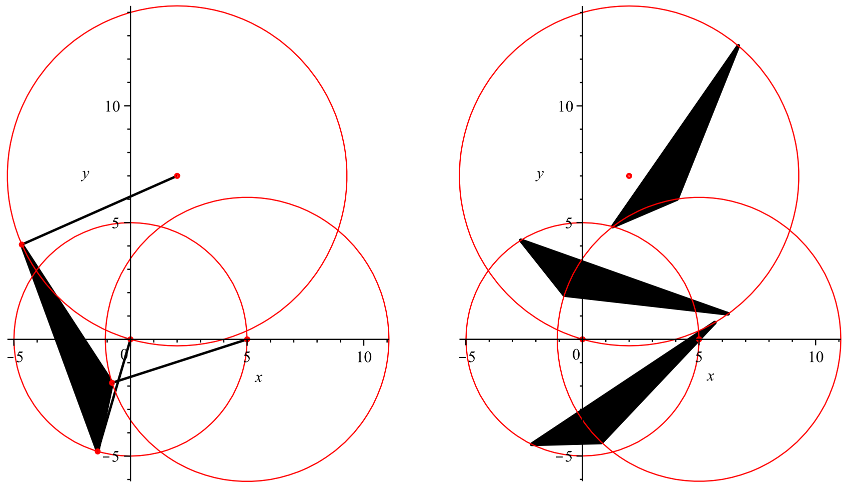
Příkaz nops( ) udává, kolik má daný výraz členů.

Nyní ještě ukážeme, že úloha může mít 6 reálných řešení. Zvolíme

```
> a2:=3;a3:=8;b3:=5;A2:=5;B3:=7;A3:=2;
> d1:=5;d2:=sqrt(37);d3:=sqrt(53);
```

Rovnice rr1=0 má 6 reálných řešení. Tato řešení zobrazíme.

```
> rr1:=factor(rr1);                                    5
rr1 := 28772478572544 - 16489450123776 q - 35370201600 q
                 3                  2                  4
+ 1530513466368 q  - 356047569408 q  - 153230731264 q
              6
+ 4969280000 q
> Q:=fsolve(rr1,q);
Q := -4.798210631, -4.499318370, 3.046116195, 4.242590777,
4.297376464, 4.829217476
```



Obr. 6: Řešení předchozí úlohy.

Na obrázku 6 vlevo vidíme jedno z řešení úlohy, vpravo jsou zobrazena tři řešení.

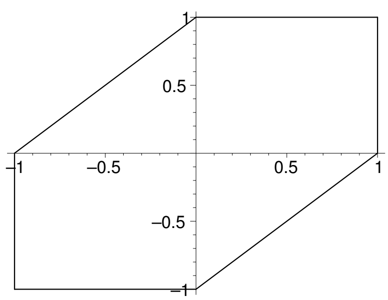
3 Úlohy inspirované robotikou

Viděli jsme, že některé geometrické úlohy v robotice jsou úlohy týkající se polohy geometrických objektů v prostoru nebo v rovině. Podobné úlohy se řeší i ve školské matematice, například sestrojení rovnostranného trojúhelníka, je-li dán jeden jeho vrchol a zbývající leží na daných přímkách (rovnoběžkách nebo různoběžkách). Další takové úlohy jsou:

a) Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholy na daných přímkách.

b) Sestrojte čtverec, jehož vrcholy leží na daných čtyřech přímkách.

c) Sestrojte afinně pravidelný šestiúhelník, jehož vrcholy leží na daných šesti přímkách. (Afinně pravidelný šestiúhelník je afinním obrazem pravidelného šestiúhelníka, má střed, viz Obr. 7.)



Obr. 7: Afinně pravidelný šestiúhelník.

Zmíněné úlohy je možné ještě dále modifikovat. Jako ukázku uvádíme počítačové řešení poslední úlohy. Je zajímavá tím, že má velké množství řešení a je elementárně řešitelná, protože její řešení je vyjádřeno pomocí lineárních rovnic.

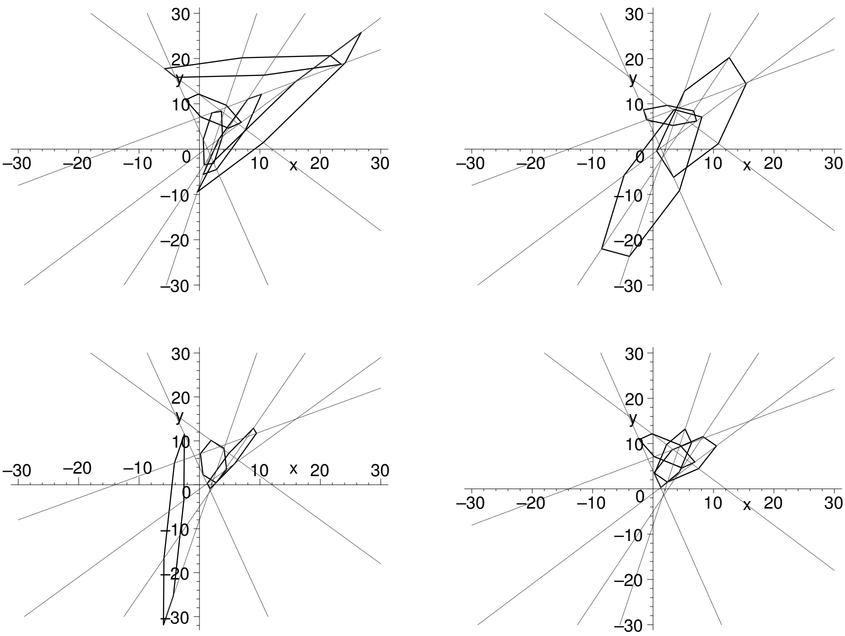
```
Sestrojte afinně pravidelný šestiúhelník jehož vrcholy leží
na daných šesti přímkách.
Zvolíme afinně pravidelný šestiúhelník pomocí vrcholů
A1,...,A6.
> A1:=[0,1];A2:=[1,1];A3:=[1,0];
  A4:=[0,-1];A5:=[-1,-1];A6:=[-1,0];
Zvolili jsme nejjednodušší vyjádření pravidelného
šestiúhelníka v afinních souřadnicích, abychom obdrželi
co nejjednodušší rovnice. Napíšeme rovnice obecné afinní
transformace a zapíšeme vrcholy nového šestiúhelníka.
> X:=a11*x+a12*y+a13;Y:=a21*x+a22*y+a23;
> X1:=subs(x=0,y=1,X);X2:=subs(x=1,y=1,X);
  X3:=subs(x=1,y=0,X);X4:=subs(x=0,y=-1,X);
  X5:=subs(x=-1,y=-1,X);X6:=subs(x=-1,y=0,X);
X1 := a12 + a13, X2 := a11 + a12 + a13, X3 := a11 + a13,
X4 := -a12 + a13, X5 := -a11 - a12 + a13, X6 := -a11 + a13

> Y1:=subs(x=0,y=1,Y);Y2:=subs(x=1,y=1,Y);
  Y3:=subs(x=1,y=0,Y);Y4:=subs(x=0,y=-1,Y);
  Y5:=subs(x=-1,y=-1,Y);Y6:=subs(x=-1,y=0,Y);
Y1 := a22 + a23, Y2 := a21 + a22 + a23, Y3 := a21 + a23,
Y4 := -a22 + a23, Y5 := -a21 - a22 + a23, Y6 := -a21 + a23
Zvolíme šest přímek:
> r1:=m1*x+n1*y+p1;r2:=m2*x+n2*y+p2;r3:=m3*x+n3*y+p3;
r4:=m4*x+n4*y+p4;r5:=m5*x+n5*y+p5;r6:=m6*x+n6*y+p6;
Nyní umístíme zvolené body na zvolené přímky:
> rr1:=subs(x=X1,y=Y1,r1);rr2:=subs(x=X2,y=Y2,r2);
  rr3:=subs(x=X3,y=Y3,r3);rr4:=subs(x=X5,y=Y5,r4);
  rr5:=subs(x=X4,y=Y4,r5);rr6:=subs(x=X6,y=Y6,r6);
```

```
rr1 := m1 (a12 + a13) + n1 (a22 + a23) + p1
rr2 := m2 (a11 + a12 + a13) + n2 (a21 + a22 + a23) + p2
rr3 := m3 (a11 + a13) + n3 (a21 + a23) + p3
rr4 := m4 (-a11 - a12 + a13) + n4 (-a21 - a22 + a23) + p4
rr5 := m5 (-a12 + a13) + n5 (-a22 + a23) + p5
rr6 := m6 (-a11 + a13) + n6 (-a21 + a23) + p6

Dostali jsme soustavu šesti lineárních rovnic pro neznámé
a11,a12,a13,a21,a22,a23, kterou snadno vyřešíme.
> solve({rr1,rr2,rr3,rr4,rr5,rr6},{a11,a12,a13,a21,a22,a23}):
> assign(%):
Úloha má obecně 60 řešení, přímky můžeme libovolně permutovat,
což dává 6!=720 možností. Afinity, které reprodukují
šestiúhelník, dávají stejná řešení. Je jich 12, což
dává 720/12=60. Několik řešení zobrazíme. Zvolíme šest přímek
a soustavu znovu vyřešíme:
> restart;
> with(plots):
> X:=a11*x+a12*y+a13:Y:=a21*x+a22*y+a23:
> r1:=x-y-1;r2:=2*x-y-5;r3:=x-2*y+14;
  r4:=x+y-12;r5:=3*x+y-4;r6:=4*x-y-8;
Postupujeme stejně jako nahoře,
> X1:=subs(x=0,y=1,X): Y1:=subs(x=0,y=1,Y):
  rr1:=subs(x=X1,y=Y1,r1):
> solve({rr1,rr2,rr3,rr4,rr5,rr6},{a11,a12,a13,a21,a22,a23}):
> assign(%);
> T13:=polygonplot([[X1,Y1],[X2,Y2],[X3,Y3],[X4,Y4],
[X5,Y5],[X6,Y6]],thickness=3):
Další řešení dostaneme permutacemi zvolených přímek.
```

Na následujících obrázcích je zobrazeno větší množství řešení dané úlohy, ale zdaleka ne všechna. Pro větší přehlednost jsou řešení rozdělena do několika obrázků.



Obr. 8: Některá řešení úlohy o šestiúhelníku.

prof. RNDr. Adolf Karger, DrSc.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
karger@karlin.mff.cuni.cz

APLIKAČNÍ ÚLOHY VE VÝUCE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Oldřich Odvárko

V učebnicích a sbírkách školské matematiky se často setkáváme se slovními úlohami. Zkusme nejprve alespoň zhruba charakterizovat, co znamená pojem slovní úloha.

Slovní úlohou budeme rozumět takovou úlohu, v jejímž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace z nejrůznějších mimomatematických oblastí. Sem spadá běžná denní praxe, různé vědní disciplíny mimo samotnou matematiku, technická praxe různého druhu apod.

A teď se zaměřme na to, proč vůbec slovní úlohy do učiva matematiky zařazujeme. Jaké funkce mohou plnit? Co mohou studentům přinést?

1. Slovní úlohy jsou prostředkem pro rozvoj schopností studentů matematizovat mimomatematické jevy a situace.
2. Jsou nástrojem pro rozvoj matematických dovedností studentů, pro rozvoj jejich dovedností a schopností řešit matematické úkoly.
3. Slovní úlohy lze využít jako zdroj zvyšování motivační úrovně studentů, rozvíjení jejich zájmu učit se matematiku.
4. Slovní úlohy mohou být jedním z prostředků poznávání různých mimomatematických oblastí a úkolů, které je smysluplné v příslušných oblastech řešit.
5. Slovní úlohy mohou hrát významnou úlohu jako příprava na řešení problémů, se kterými se student ve svém současném i budoucím životě bude setkávat.

Slovní úlohy můžeme rozdělit zhruba do tří skupin. V **první skupině** jsou takové úlohy, které jsou pouhými **hříčkami, hádankami** či **rébusy** – ty by měly splňovat první tři shora uvedená kritéria. Příkladem může být třebas tato úloha:

Otci je 52 let, jeho synové jsou staří 24 a 18 let. Za jak dlouho bude otci tolik let jako jeho synům dohromady?

Je to hezká hádanka, která může studenty i zaujmout; pro životní praxi sama o sobě tato úloha nemá ovšem bezprostřední význam.

Druhá skupina obsahuje úlohy, jejichž řešení splňuje všech pět uvedených kritérií. Označme je jako **aplikační úlohy**. A nyní se podívejme kriticky na tři slovní úlohy. Všechny jsou z tématu o dělitelnosti:

Vinař potřebuje rozlít ze dvou sudů víno do stejných lahví o co největším objemu. V každé lahvi má být víno jen z jednoho sudu, lahve mají být zcela *zaplněny. V prvním sudu je 10,5 litru a ve druhém 22,4 litru vína. Jaké budou objemy jednotlivých lahví a kolik jich bude?*

Z matematického hlediska je řešení jasné. Určíme největšího společného dělitele čísel 105 a 224 a odtud už snadno odpovíme na první část stanoveného úkolu: 0,7 litru. Dále jde už jen o pouhé dělení desetinných čísel.

Zajímavé ovšem je, k jak pěknému výsledku jsme došli. Kdyby měl vinař ve druhém sudu místo 22,4 litru vína například 28,4 litru, byl by při splnění všech požadavků z textu úlohy maximální objem lahví jen 0,1 litru. A to by našeho vinaře asi příliš nepotěšilo. Jak byla vůbec tato úloha vytvořena? Autor chtěl zřejmě ukázat praktické využití největšího společného dělitele. Rozhodl se tedy k tomuto pojmu, který má být procvičen, vyhledat a vytvořit *mimomatematický obal ze života*, v tomto případě z oblasti vinařství. K číslu 0,7 sestavil dva vhodné přirozené násobky a pak formuloval shora uvedenou úlohu. Popisovaná mimomatematická situace je samozřejmě zcela umělá a spojení matematiky s realitou jen předstírá.

Zdeněk zjistil, že všichni ve třídě mají celkem 324 učebnic a 486 sešitů. Všichni jeho spolužáci mají stejný počet učebnic, všichni mají také stejný počet sešitů. Kolik je ve Zdeňkově třídě žáků, víme-li, že jich je více než 20 a méně než 30?

Budeme-li brát tuto úlohu vážně, nikoli jen jako hádanku, pak se nelze ubránit údivu, co všechno Zdeněk musel zjistit, aby se dobral ke kýženému závěru, že žáků je 27. Postup tvorby této úlohy je zcela obdobný jako v předchozí úloze: Hledá se příklad ze života na společného dělitele, který patří do určitého intervalu. Tentokrát se toto matematické jádro obalí třídou, žáky, učebnicemi a sešity. Dovedeme si představit, že by skutečně někdo takto řešil uvedený úkol v praxi?

Sportovní výprava má 392 členů. K jejich přepravě můžeme použít autobusy různých společností. Společnost A nabízí autobusy s 44 místy, společnost B s 48 místy a společnost C s 56 místy. Zjistěte, se kterou z uvedených společností bude nejvýhodnější jet.

Výsledkem řešení je, že nejvýhodnější je jet se společností C, protože všechna sedadla v sedmi autobusech této společnosti budou obsazena (392 je dělitelné číslem 56), kdežto v autobusech společností A i B by některá sedadla v jednom autobusu zůstala volná. Koncepce této úlohy se naprosto míjí s realitou. Podstatné přece je, kolik si účtují jednotlivé společnosti za přepravu, a nikoli to, kolik sedadel zůstane neobsazených.

Uvedené tři úlohy reprezentují **třetí skupinu** slovních úloh, v níž jsou zahrnuty formální **pseudoaplikace**, které mohou mít vzhledem ke své nevěrohodnosti značně negativní vliv na žáky. Přispívají k tomu, že žáci chápou mnohé poznatky ze školské matematiky formálně, nevidí dostatečně užitečnost a významnost matematiky pro praxi. Jediným řešením tohoto nepříjemného problému je všechny pseudoaplikace bez výjimek odstranit a do výuky je nezařazovat. Když se však z učebnic matematiky a sbírek úloh všechny pseudoaplikace vyloučí, zbude ve většině tematických celků slovních úloh příliš málo. Proto je nutné systematicky vyhledávat zdroje a inspirace z reálné praxe pro aplikační úlohy vhodné pro úroveň školské matematiky.

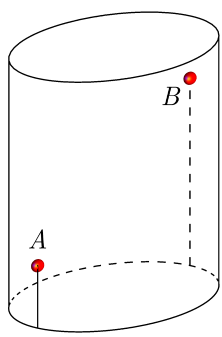
Takovýto úkol si stanovila i Katedra didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Byla vytvořena pracovní skupina ve složení (bez titulů a v abecedním pořadí) Jana Hromadová, Magdalena Hykšová, Oldřich Odvárko, Pavla Pavlíková, Jarmila Robová a Antonín Slavík, která připravuje sbírku aplikačních úloh z matematiky pro střední školy. Na této práci se intenzivně podílel rovněž RNDr. Ivan Saxl, DrSc. (zemřel 2009). Sbírka by měla pokrýt nejdůležitější partie matematiky, a to zejména základní pojmy (aritmetické operace, poměry a procenta), rovnice, nerovnice a jejich soustavy, funkce, jejich vlastnosti a grafy, planimetrii a stereometrii, goniometrii, pravděpodobnost a statistiku. Ke každému tématu jsou připravovány podrobně řešené vzorové příklady, za kterými následují neřešená cvičení.

Pro ilustraci uvedeme dva řešené příklady.

Příklad 1 (délka drátu). Na válcové nádrži, jejíž obvod je 10 m a výška 4 m, je třeba spojit drátem kontakt A (na vnějším povrchu, ve vzdálenosti 1,5 m ode dna nádrže) s ukazatelem výšky hladiny B (ve vzdálenosti 2,5 m ode dna nádrže). Zvažujeme dvě možnosti umístění ukazatele B:

a) na vnějším povrchu,
b) na vnitřním povrchu.

Kontakty leží na protilehlých povrchových přímkách válcové plochy. Jaká je nejkratší možná délka spojovacího drátu, musí-li být veden po stěně nádrže?

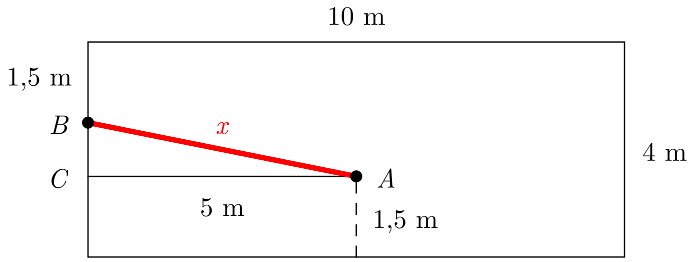


Řešení. Délku drátu určíme na rozvinutém plášti válce. Při rozvinutí pláště válce do roviny se délky křivek ležících na plášti zachovávají.

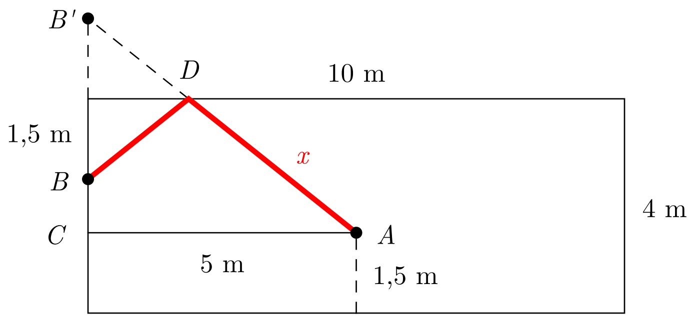
a) Nejkratší spojnice bodů A, B v rovině je úsečka spojující tyto body. Použijeme Pythagorovu větu pro trojúhelník ABC (viz první z následujících obrázků), kde $|AC| = 5$ m, $|BC| = (2{,}5 - 1{,}5)$ m $= 1$ m:

$$x^2 = (5^2 + 1^2)\ \text{m}^2,\ x = \sqrt{26}\ \text{m} \doteq 5{,}10\ \text{m}$$

Nejkratší možná délka drátu je tedy přibližně 5,1 m.



b) Spojujeme-li kontakt z vnější strany nádrže s kontaktem uvnitř nádrže, musíme drát vést přes horní okraj nádrže.



Na rozvinutém plášti válce tedy nehledáme nejkratší spojnici bodů A, B, ale bodů A, B', kde B' je obraz bodu B v osové souměrnosti podle horního okraje nádrže. Označíme-li D průsečík úsečky AB' s horním okrajem nádrže, platí $|AD|+|DB| = |AB'|$. Použijeme Pythagorovu větu pro trojúhelník $AB'C$, kde $|CB'| = 4$ m:

$$x^2 = |AB'|^2 = (5^2 + 4^2)\ \mathrm{m}^2,\ \ x = \sqrt{41}\ \mathrm{m} \doteq 6{,}40\ \mathrm{m}$$

Nejkratší možná délka drátu je tedy v tomto případě přibližně 6,4 m.

Příklad 2 (posvícenské koláče). Malá cukrárna se chystá péct posvícenské koláče. Krajová receptura požaduje, aby byly plněné mákem a tvarohem. Množství máku a tvarohu použité na jeden koláč v jednotlivých variantách uvádí tabulka:

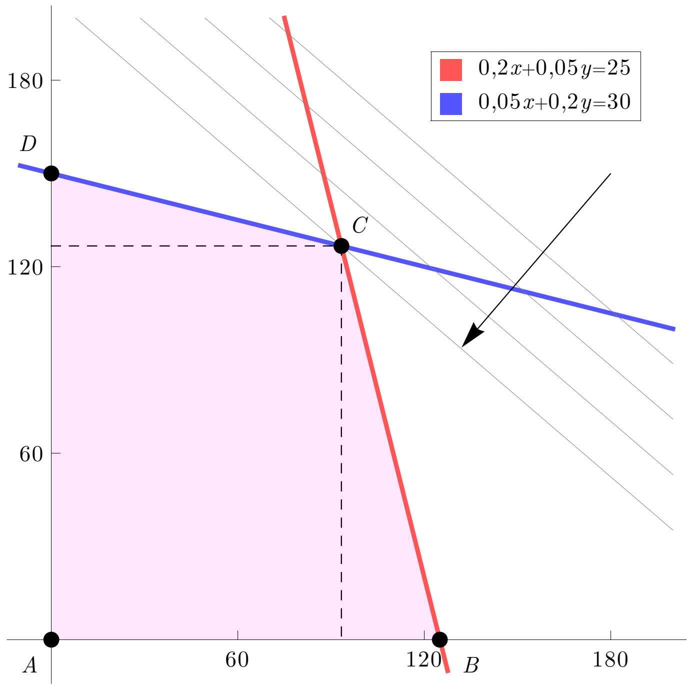
Koláč	**Mák**	**Tvaroh**
Makovo-tvarohový	200 g	50 g
Tvarohovo-makový	50 g	200 g

Jeden makovo-tvarohový koláč se prodává za 48 Kč, jeden tvarohovo-makový za 56 Kč. Spotřeba ostatních surovin je přibližně stejná v obou variantách. Vzhledem k tomu, že těsně před posvícením jsou obě suroviny v okolí rozprodány, musí cukrář vystačit pouze se zásobami – má k dispozici 25 kg máku a 30 kg tvarohu. Kolik má upéct koláčů od každého druhu, aby dosáhl maximálního zisku?

Řešení. Označíme-li x počet koláčů makovo-tvarohových a y počet koláčů tvarohovo-makových, hledáme maximum funkce $z = 48x + 56y$, která odpovídá zisku cukrárny (vyjádřenému v Kč). Omezené množství surovin vede k této soustavě nerovnic:

$$0{,}2x + 0{,}05y \leq 25$$
$$0{,}05x + 0{,}2y \leq 30$$

Ze zadání je navíc zřejmé, že $x \geq 0$, $y \geq 0$. Grafickým řešením této soustavy nerovnic je čtyřúhelník $ABCD$ v rovině, který je průnikem čtyř polorovin určených příslušnými nerovnicemi.



Doplníme-li do obrázku systém rovnoběžek o rovnicích

$$z = 48x + 56y,$$

kde za z dosazujeme různé kladné hodnoty, zjistíme, že přímka s největší hodnotou z, která se ještě „dotkne“ čtyřúhelníku $ABCD$, prochází bodem

$C = [\frac{280}{3}, \frac{380}{3}]$. Řešení úlohy by tedy odpovídaly hodnoty $x = \frac{280}{3}$, $y = \frac{380}{3}$. Získaný výsledek však nemá smysl, neboť x a y jsou počty koláčů. Proto potřebujeme najít správné celočíselné řešení. Pokud bychom vypočtené hodnoty zaokrouhlili na

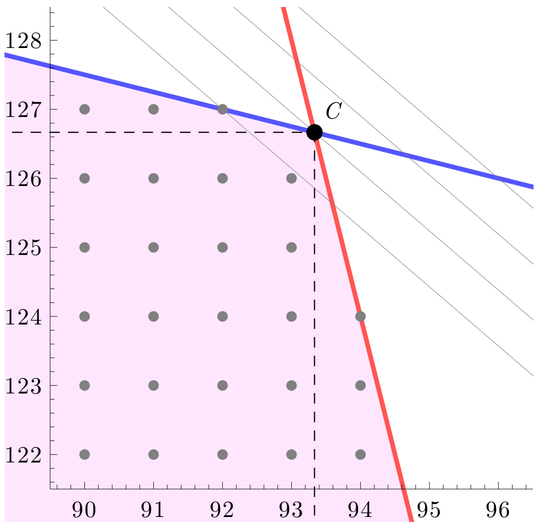
$$x \doteq 93, \quad y \doteq 127$$

a dosadili do podmínek úlohy, zjistili bychom, že druhá podmínka není splněna:

$$0{,}2 \cdot 93 + 0{,}05 \cdot 127 = 24{,}95 \leq 25$$
$$0{,}05 \cdot 93 + 0{,}2 \cdot 127 = 30{,}05 \not\leq 30$$

Vidíme, že při řešení úlohy s „celočíselnými" neznámými může zaokrouhlení na celá čísla vést k porušení požadovaných podmínek.[1]

Z obrázku můžeme správný výsledek úlohy získat tak, že se v rámci daného čtyřúhelníku omezíme pouze na „mřížové" body, tj. body, jejichž obě souřadnice jsou celočíselné. Mezi nimi najdeme optimální řešení podobně jako v předchozím postupu.



Maximálního zisku 11 528 Kč pekař dosáhne, pokud upeče 92 koláčů makovo-tvarohových a 127 koláčů tvarohovo-makových.

doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
odvarko@karlin.mff.cuni.cz

[1] Obecný postup, jak efektivně řešit úlohy tohoto typu (s „celočíselnými" neznámými) neexistuje.

FINANČNÍ GRAMOTNOST ŽÁKŮ STŘEDNÍCH ŠKOL

Jarmila Robová

1 Úvod

Finanční gramotnosti a finančnímu vzdělávání je v posledních letech u nás i ve světě věnována velká pozornost, neboť finanční vzdělávání hraje důležitou roli v prevenci zadlužování obyvatelstva. Občan s nízkou úrovní finanční gramotnosti není schopen orientovat se v záplavě nabídek obchodů, cestovních kanceláří, pojišťoven, bank apod. Neumí kriticky posoudit míru výhodnosti různých nabídek, nechává se zlákat různými reklamami, neumí si vybrat optimální variantu z nabízených finančních produktů. To často vede k finančním ztrátám a k zadluženosti [7]. Rozvoj a zvyšování finanční gramotnosti žáků je proto předmětem zájmu školských i dalších státních institucí, finanční gramotnost se tak stává důležitou součástí vzdělávání na základních i středních školách.

2 Stručný přehled vývoje výuky finanční matematiky

Zaměříme-li se na finanční vzdělávání na českých školách ve dvacátém století, zjistíme, že obsah i rozsah tohoto vzdělávání byl výrazně ovlivněn politicko-ekonomickou situací. Počátkem dvacátého století bylo finanční vzdělávání nedílnou součástí výuky matematiky na základních i středních školách. V rámci výuky žáci probírali jednoduché i složené úročení, půjčky, hypotéky, směnky aj. Na kvalitní výuku finanční matematiky navázalo ve dvacátých letech také prvorepublikové školství, finanční matematika byla rovněž důležitým tématem v tehdejších učebnicích [1].

Po druhé světové válce došlo na českých školách k devastaci výuky finanční matematiky. Tehdejší středoškolské učebnice obsahovaly pouze stručné poznámky z oblasti finanční matematiky, například složené úročení bylo zmiňováno pouze v souvislosti s geometrickou posloupností. V devadesátých letech dochází u nás postupně k obnově výuky finanční matematiky. V nově vydávaných sadách učebnic matematiky pro základní i střední školu se objevují úlohy, ve kterých se řeší každodenní situace související s penězi, cenami i spořením.

Na prvním stupni základní školy žáci dnes řeší úlohy související s používáním peněz v běžných situacích, a to zejména při nákupech a placení různých účtů. Učebnice matematiky od prvního do pátého ročníku obsahují klasické úlohy z cenové a rozpočtové oblasti. Jedná se zejména o typy úloh, ve kterých žáci určují celkovou cenu nákupu sestávajícího se z různých druhů zboží či rozhodují, co si mohou koupit, aby nepřekročili danou částku, případně určují částku, kterou jim při placení konkrétní bankovkou vrátí prodávající [1], [9].

Na druhém stupni základní školy se toto učivo postupně rozšiřuje o další témata, zejména procenta. Postupně se žáci učí v různých tématech řešit situace, které ukazují uplatnění finančních poznatků – konkrétně se jedná o úlohy ukazující, že levný nákup nemusí být vždy výhodný, o optimalizační úlohy, kdy žáci určují finančně nejvýhodnější variantu z hlediska konkrétní situace. Úlohy ze světa financí řeší žáci také v tématech zaměřených na přímou a nepřímou úměrnost (např. nárůst ceny nákupu se zvyšujícím se množstvím zboží, výpočet nákladů na jednoho účastníka akce při rostoucím počtu účastníků). Náročnější úlohy z oblasti finančního vzdělávání se objevují v okruhu věnovaném rovnicím a jejich soustavám. Řada učebnic pro devátý ročník obsahuje tematický celek *Základy finanční matematiky*, ve kterém se žáci seznamují s jednoduchým i složeným úročením a různými finančními produkty, jako jsou cenné papíry, úvěry, vkladní knížky [2], [4].

V gymnaziálních učebnicích převažují úlohy teoretického charakteru (řešte rovnici, určete podmínky), což je do jisté míry dáno zaměřením tohoto typu školy, která především připravuje k dalšímu studiu na vysoké škole. Obsah učebnic matematiky pro střední školy z hlediska budování a rozvíjení finanční gramotnosti lze stručně charakterizovat tak, že úlohy z této oblasti se objevují v tématech, kde se jejich zařazení přímo nabízí, a to při opakování učiva ze základní školy, v učivu o rovnicích a nerovnicích. V tematickém celku zaměřeném na posloupnosti se žáci seznamují s teoretickým odvozováním vztahů pro jednoduché a složené úročení. Současné učebnice pro střední školy obsahují ve srovnání s učebnicemi pro základní školy výrazně méně problémů a úloh ze světa financí. V současné době mají žáci i učitelé k dispozici řadu příruček, které se specializují na finanční matematiku [5], [6], [7], [8].

Současná podoba finančního vzdělávání u nás vychází z dokumentu *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách* [3], jehož součástí jsou rovněž *Standardy finanční gramotnosti*, které vymezují ideální úroveň finanční gramotnosti pro různé věkové skupiny. Podle uvedeného dokumentu se pod pojmem finanční gramotnost rozumí soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních služeb. Finanční gramotnost má tři složky – gramotnost peněžní, cenovou a rozpočtovou. Východiskem pro budování finanční gramotnosti je gramotnost peněžní. Ta zahrnuje kompetence nezbytné pro správu hotovostních a bezhotovostních peněz a transakcí s nimi. Jádrem rozvíjení finanční gramotnosti žáků je gramotnost rozpočtová. Ta staví na kompetencích nezbytných pro správu osobního a rodinného rozpočtu, finančních aktiv (např. vkladů, investic a pojištění) a finančních závazků (např. úvěrů nebo leasingu). To předpokládá orientaci na trhu finančních produktů a služeb, schopnost mezi sebou jednotlivé produkty či služby porovnávat a volit ty nejvhodnější s ohledem na konkrétní životní situaci. Cenová gramotnost vymezuje kompetence nezbytné pro porozumění cenovým mechanismům a inflaci [7].

Standardy finanční gramotnosti jsou již integrovány do rámcových vzdělávacích programů pro střední školy – na gymnáziích ve vzdělávacím oboru Člověk a svět práce, na středních odborných školách do oblasti společenskovědního a ekonomického vzdělávání. Jejich zapracování do *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* probíhá v současné době v rámci revize kurikula.

Předpokládá se, že finanční gramotnost bude zařazena na prvním stupni do oblasti *Člověk a jeho svět* a na druhém stupni *Člověk a svět práce.*

3 Testování finanční gramotnosti v ČR

Různá šetření finanční gramotnosti občanů v posledních letech ukazují, že znalosti ze světa financí jsou u většiny z nich nedostačující. Přitom, jak již bylo zmíněno v předchozí části, se již žáci druhého stupně základních škol ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* seznamují s důležitými pojmy finanční matematiky (úrok, úroková míra, zisk, jednoduché úročení aj.). Tyto znalosti by měly být dále teoreticky rozvíjeny na střední škole v tematickém celku o posloupnostech, kde se žáci dozvídají o matematickém modelu jednoduchého a složeného úročení. Následující zmíněné výzkumy však ukazují, že většina občanů má problémy nejen se základy finanční matematiky, ale i s orientací ve světě financí.

V roce 2007 zadalo *Ministerstvo financí ČR* společnosti STEM/MARK realizaci průzkumu *Finanční gramotnost* [11]. Průzkum byl zaměřen na zjištění úrovně finanční gramotnosti obyvatel ČR a jeho výsledky nebyly povzbuzující. Tento průzkum ukázal, že naprostá většina dotazovaných si ze školy neodnesla žádné znalosti v oblasti financí a bank (81 %) a že respondenti by jednoznačně uvítali výuku základních pojmů z oblasti financí na střední škole (93 %). Necelá polovina respondentů by toto učivo zavedla již na základní školy.

O tři roky později realizovalo *Ministerstvo financí ČR* ve spolupráci s *Českou národní bankou* kvantitativní výzkum *Finanční gramotnost v ČR* [12], který opět realizovala společnost STEM/MARK. Výzkum si kladl za cíl zmapovat finanční gramotnost dospělé populace ČR na základě objektivních znalostí v oblasti financí. K dalším cílům výzkumu patřilo zkoumání, nakolik lidé umí tyto znalosti využívat v běžné praxi, a také mapování postojů a chování české populace v souvislosti s rodinnými financemi, úsporami a zajištěním. K hlavním výsledkům tohoto výzkumu patří zjištění, že většina respondentů zná širokou škálu finančních produktů, ale převážně využívá jen základní produkty. Například z hlediska výběru úvěru respondenti zohledňují především výši měsíční splátky (80 %) a úrokovou sazbu (71 %), avšak jen 17 % respondentů dokáže správně vypočítat úročení úvěru. Z hlediska rodinných financí a zajištění jen 45 % domácností si dělá rozpočet, 60 % domácností má finanční rezervu. Poměrně alarmující je zjištění, že téměř třetina respondentů si nevytváří žádné rezervy na stáří.

Výše uvedené výzkumy byly zaměřeny na obyvatele starších osmnácti let. Testováním finanční gramotnosti žáků osmých a devátých ročníků základních škol a odpovídajících ročníků nižších gymnázií se u nás zabývá společnost AISIS ve spolupráci se společností SCIO v rámci projektu FINGR [13]. Jedná se o srovnávací testování, k jehož cílům patří mapování znalostí a dovedností žáků v oblasti finanční gramotnosti, získání podkladů a argumentů pro potřebnost zavedení výuky finanční gramotnosti a srovnání výsledků žáků v oblasti finanční gramotnosti před a po zavedení výuky na základě absolvování seminářů společnosti AISIS. Vzhledem k tomu, že se jedné o testování za poplatek, jsou jeho výsledky dostupné pouze testovaným žákům a jejich rodičům, dále učitelům a ředitelům zapojených škol.

Na jaře roku 2012 byl u nás i v řadě dalších zemí realizován výzkum PISA [14]. Tento výzkum je zaměřen na testování čtenářské, přírodovědné a matematické gramotnosti patnáctiletých žáků. V uvedeném roce byla testována matematická gramotnost, avšak poprvé byla součástí výzkumu také finanční gramotnost. Do testování finanční gramotnosti se zapojilo jen devatenáct států včetně ČR, test měl písemnou formu a na jeho vypracování měli žáci dvě hodiny. Test finanční gramotnosti byl zaměřen na peněžní transakce, plánování a řízení financí, rizika i znalosti finančního prostředí. Předpokládá se, že výsledky testů matematické gramotnosti budou zveřejněny v roce 2013, výsledky testování finanční gramotnosti včetně znění testových úloh budou publikovány později.

4 Testování finanční gramotnosti na středních školách v Praze

V letech 2010 až 2012 byl na Univerzitě Karlově v Praze realizován v rámci Operačního programu Praha-adaptabilita společný projekt Přírodovědecké fakulty a Matematicko-fyzikální fakulty s názvem *Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: Aktivně, aktuálně a s aplikacemi.* Projekt byl zaměřen na inovaci vzdělávacích programů v přírodních vědách a matematice na středních školách v Praze a k jeho základním cílům patřilo zvýšení zájmu žáků o přírodní vědy, geografii a matematiku. V rámci projektu byly realizovány vzdělávací moduly určené učitelům, jednotlivé moduly byly zaměřené na aktuální témata a aplikace daných oborů. V rámci modulů učitelé řešili nejen konkrétní úlohy, ale rovněž diskutovali formu a obsah vzdělávacích materiálů a pracovních listů pro žáky, které připravili členové řešitelského kolektivu. Součástí řešení projektu bylo vytváření, ověřování a finální úprava metodických i výukových materiálů určených pro výuku těchto vzdělávacích oblastí.

Jedním z modulů, který byl vytvořen při řešení projektu, byl modul *Matematika a budování finanční gramotnosti* [7]. Také pro tento modul byly vytvořeny metodické materiály určené pro učitele a sady pracovních listů pro žáky středních škol. Úlohy, které byly zpracovány ve formě pracovních listů, pokrývají z hlediska témat situace, se kterými se žáci mohou ve svém životě setkat, a to konkrétně v oblasti směny peněz, prodeje a slev zboží či nabízených služeb, termínovaných vkladů, cenných papírů a úvěrů.

K navrženým aktivitám projektu také patřilo testování úrovně finanční gramotnosti žáků středních škol v Praze. Postupně byly vytvořeny dva testy, jejichž forma i obsah byly konzultovány se středoškolskými učiteli zapojenými do projektu. Některé připravované úlohy byly ověřovány v rámci semináře z didaktiky matematiky, kde tyto úlohy řešili budoucí učitelé matematiky. Vzhledem k široké definici finanční gramotnosti jsme se rozhodli zaměřit na testování znalostí a dovedností, které souvisejí s porozuměním oblasti slev zboží (tj. peněžní gramotnosti) a oblasti úvěrů (tj. peněžní a rozpočtové gramotnosti).

Testování probíhalo v dubnu až červnu roku 2012 a zúčastnili se ho žáci ze středních škol v Praze, které byly zapojeny do projektu. Jednalo se zejména o žáky víceletých i čtyřletých gymnázií ve věku patnáct až sedmnáct let. Menší část testovaných žáků navštěvovala obchodní akademie a střední odborné školy. Vzhledem k odlišnému zaměření škol i různorodosti jejich školních vzdělávacích programů vycházeli jsme při zpracování testů z kvalitativního přístupu, důraz byl kladen na charakterizaci žákovských chyb a používaných postupů řešení.

4.1 Test zaměřený na slevy zboží

První test s názvem *Slevy* obsahoval pět uzavřených úloh. U každé úlohy byly nabízeny čtyři možnosti, z nichž právě jedna byla správná. Na vypracování testu měli žáci dvacet minut a při řešení úloh mohli používat klasické kalkulačky. Veškeré výpočty měli žáci zapisovat přímo do testu. Test na slevy psalo 1 020 žáků. Uvádíme zadání úloh.

---

1. Původní cena počítačového monitoru byla 7100 Kč. Monitor byl zlevněn o 30 %. Jaká je jeho cena po zlevnění?

   A) 2130 Kč   B) 3195 Kč   C) 4970 Kč   D) 2367 Kč

2. Mobilní telefon *Mansung 3M* nabízely dvě prodejny za stejnou cenu. První prodejna zlevnila telefon o 40 %, druhá na 40 %. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:

   A) Po slevě je cena telefonu nižší v první prodejně.
   B) Po slevě jsou ceny telefonu v obou prodejnách stejné.
   C) Po slevě je cena telefonu vyšší ve druhé prodejně.
   D) Po slevě je cena telefonu nižší ve druhé prodejně.

3. Prodejna nabízela notebook za 9900 Kč. V rámci prodejní akce ho zlevnila o 15 % a po čase zlevněnou cenu zvýšila o 15 %. Zjistěte, které tvrzení o ceně notebooku po zlevnění a následném zdražení platí:

   A) Výsledná cena notebooku je 9000 Kč.
   B) Výsledná cena notebooku je 9900 Kč.
   C) Výsledná cena notebooku je vyšší než 9900 Kč.
   D) Výsledná cena notebooku je nižší než 9900 Kč.

4. Prodejny A i B nabízely televizor *JVD* za stejnou cenu 14 500 Kč. V rámci výprodeje zlevnila prodejna A televizor jednorázově o 25 %. Prodejna B zlevnila televizor nejdříve o 15 % a po čase ještě o 10 %. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

   A) Po slevách byl televizor levnější v prodejně A.
   B) Po slevách byl televizor levnější v prodejně B.
   C) Po slevách byl televizor dražší v prodejně A.
   D) Po slevách stál televizor v prodejně A i B stejně.

5. V prodejně K stála myčka nádobí *White* 15 900 Kč, v internetovém obchodě E ji prodávali za 14 900 Kč. Prodejna K zlevnila myčku o 15 %, ve

stejnou dobu snížil cenu myčky internetový obchod E o 10 %. Které z následujících tvrzení platí?

A) Výsledná cena myčky je nižší v prodejně K.
B) Výsledná cena myčky je nižší v obchodě E.
C) Výsledná cena myčky je stejná v prodejnách K i E.
D) Výslednou cenu myčky nelze určit.

Podle reakcí od učitelů, kteří zadávali na školách podle našich pokynů test, žáci s řešením úloh neměli větší potíže, časová dotace byla dostačující. V některých třídách dokonce žáci končili s vypracováním úloh před vypršením časového limitu.

V testu jsme sledovali, zda žáci ovládají výpočet slevy (úloha 1), rozlišují pojmy „sleva o" a „sleva na" (úloha 2). Dále jsme se zaměřili na to, zda žáci chápou vliv základu pro výši slevy (úlohy 3, 4) a zda z hlediska finanční gramotnosti umí porovnávat výhodnost nabízených slev (úloha 5). I když po matematické stránce test vyžadoval pochopení pojmu procento, nepotřebovali žáci pro úspěšné řešení úloh žádné konkrétní vzorce. Většinu úloh bylo možné řešit na základě logických úvah.

Následující tabulka uvádí v procentech, kolik žáků řešilo danou úlohu správně, nesprávně či vůbec neřešilo. Do kategorie „Chybně" byly zahrnuty i ty odpovědi, ve kterých žáci zaškrtli více možností současně, nebo naopak žádnou, i když zapsaný postup výpočtu vedl ke správnému výsledku.

Úloha	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Správně	88,2 %	93,6 %	88,0 %	86,5 %	91,5 %
Chybně	11,6 %	6,3 %	11,2 %	12,9 %	7,9 %
Neřešeno	0,2 %	0,1 %	0,8 %	0,6 %	0,6 %

Tabulka 1: Výsledky prvního testu

Z tabulky 1 vyplývá, že žáci středních škol nemají problémy s řešením finančních situací uvedeného typu, neboť úspěšnost v jednotlivých úlohách byla vysoká. Nejúspěšnější byly při řešení úlohy 2 a 5. Vzhledem k tomu, že úlohy bylo možné řešit i zpaměti, někteří žáci zatrhávali v testu přímo konkrétní odpověď, aniž by uváděli svůj postup výpočtu. Z hlediska použitých metod žáci nejčastěji v úlohách volili výpočet „přes 1 %", jen zřídka používali trojčlenku.

Metodu „přes 1 %" žáci používali i při řešení *první úlohy*. Pouze v ojedinělých případech se objevil zápis řešení ve tvaru $0{,}7 \cdot 7100$, tj. jen malá skupina žáků řešila úkol na základě úvahy, že cena po slevě 30 % znamená 70 % původní ceny. K nejčastějším chybám patřilo, že místo ceny po slevě žáci počítali, o kolik bylo zboží zlevněno, což svědčí o jejich nepozornosti při čtení zadání úlohy.

Druhá úloha patřila k nejúspěšnějším. Žáci ve většině případů neuváděli žádný výpočet. Pokud byl výpočet uveden, jednalo se převážně o postup, kdy si žáci zvolili konkrétní cenu mobilního telefonu a aplikovali na ni zadání problému. Je zajímavé, že někteří žáci z této skupiny volili reálnou cenu telefonu (např. 3000 Kč), zatímco jiní volili cenu symbolickou ve výši 100 Kč. Je pravděpodobné, že žáci pracující se symbolickou cenou správně chápali rozdíl mezi uvedenou „slevou o“ a „slevou na“, ale daný výpočet jim umožnil jejich řešení prověřit.

Úspěšnost řešení *třetí úlohy* v rámci daného testu byla nejnižší, současně tuto úlohu neřešilo nejvíce žáků. K nejčastějším chybám patřili chyby numerické (59,8 % z chybných odpovědí), a to i přesto, že žáci směli používat kalkulátor. Mezi chybnými odpověďmi se často vyskytovala volba nesprávné odpovědi B (tj. sleva o 15 % a následné zdražení o 15 % vede k původní ceně), ačkoliv žáci na papír uvedli správný výpočet. To by mohlo svědčit o tom, že tito žáci nerozumí vlivu výše základu pro určení procentové části, neboť získaný výsledek nebyli schopni správně interpretovat.

Chyby, které jsme identifikovali ve *čtvrté úloze*, byly opět nejčastěji numerické. Z hlediska matematiky i finanční gramotnosti se však mezi žákovskými řešeními vyskytla závažná chyba. Konkrétně se jednalo o postup, kdy žák počítal v případě postupného zlevnění obě slevy ze stejného základu, tj. pracoval stále s původní cenou zboží (45,5 % z chybných odpovědí). Jde o stejný typ chyby jako v předchozí úloze, tj. o neporozumění vlivu základu na cenu zboží po zlevnění.

Obdobně i v případě *páté úlohy* patřily k nejčastějším příčinám volby nesprávné odpovědi numerické chyby. Současně se objevily případy, kdy žák na papír úlohu vypočítal správně, že cena zboží je nižší v prodejně E, avšak zatrhnul odpověď s nižší cenou v prodejně K (85,2 % z chybných odpovědí). To svědčí o nepozornosti žáků jak při čtení zadání úlohy, tak i při čtení nabízených odpovědí.

4.2 Test zaměřený na vklady a úvěry

Druhý test s názvem *Vklady a úvěry* obsahoval tři otevřené a tři uzavřené úlohy. V uzavřených úlohách byly nabízeny čtyři možné odpovědi, přičemž právě jedna odpověď byla správná. Na vypracování testu měli žáci třicet minut a při řešení úloh mohli opět používat kalkulačky. Veškeré pomocné výpočty měli žáci zapisovat přímo do testu. V záhlaví testu byla v rámečku uvedena pomocná informace o dani 15 % z úroků u termínovaných vkladů i dluhopisů. Tento test psalo 810 žáků, někteří z nich psali i první test. Opět uvádíme zadání úloh.

---

1. Milan vložil na termínovaný vklad na jeden rok částku 76 000 Kč s roční úrokovou sazbou 0,98 %. Banka úročí vklad jednou, v den splatnosti vkladu. Určete úrok před zdaněním a po zdanění. Výsledky zaokrouhlete na koruny.

2. Pan Vávra zakoupil dluhopis za 20 000 Kč. Doba splatnosti dluhopisu jsou 3 roky, úroková sazba činí 2 %, banka úročí jednou za rok. Po dobu tří let

dostával pan Vávra vždy po uplynutí jednoho roku úrok z částky 20 000 Kč. Na konci třetího roku obdržel spolu s úrokem i vloženou částku 20 000 Kč. Jaký byl celkový zisk pana Vávry z dluhopisu?

A) 400 Kč B) 340 Kč C) 1020 Kč D) 1200 Kč

3. Paní Nejedlá vložila 20 000 Kč na termínovaný vklad na 3 roky. Banka úročila jednou za rok. Po celou dobu byla úroková sazba neměnná a činila 1 %. Kolik korun obdržela paní Nejedlá v den splatnosti vkladu?

   A) 20 000 Kč.
   B) Více než 20 000 Kč a méně než 20 300 Kč.
   C) Více než 20 300 Kč a méně než 20 700 Kč.
   D) Více než 20 700 Kč a méně než 21 100 Kč.

4. Z inzerátu banky: „Při půjčce 50 000 Kč zaplatíte měsíčně jen 899 Kč.“ Kolik korun byste zaplatili ve splátkách celkem?

   A) 50 000 Kč B) 53 940 Kč C) 64 728 Kč D) Nelze určit.

5. Pan Novotný si chce v bance půjčit 100 000 Kč. Rozvažuje, zda má úvěr uzavřít na 5 let nebo na 7 let. Kolik korun by pan Novotný zaplatil celkem ve splátkách v jednotlivých případech? Potřebné údaje máte k dispozici v tabulce.

Počet měsíčních splátek	**12**	**36**	**60**	**84**
Úvěr (Kč)	**Výše splátky (Kč)**			
50 000	4 534	1 755	1 213	990
100 000	8 927	3 365	2 270	1 814
150 000	13 391	5 047	3 405	2 721
200 000	17 760	6 633	4 439	3 520

6. Hypoteční úvěr ve výši 1 000 000 Kč na dobu 5 let nabízí banka A s úrokovou sazbou 4 % a s měsíční splátkou 18 400 Kč. Banka B poskytuje stejný úvěr s úrokovou sazbou 5 % a s měsíční splátkou 18 871 Kč. Kolik korun celkem činí rozdíl v úrocích, které zaplatíme ve splátkách bance B a bance A? Úroková sazba je v obou případech po celou dobu neměnná.

Učitelé, kteří zadávali test na školách, nás informovali, že tento test byl pro žáky obtížnější, časový limit v průměru považovali za dostačující.

V testu jsme sledovali, zda žáci rozlišují úrok před zdaněním a po zdanění (úloha 1), zda porozumí principu dluhopisu jako příkladu investice na základě jeho popisu v zadání úlohy (úloha 2). Současně jsme sledovali, zda žáci chápou základní rozdíly mezi jednoduchým a složeným úročením (úloha 2 a 3). Dále jsme se zaměřili na to, zda jsou žáci schopni rozpoznat neúplné informace týkající se nabízeného finančního produktu (úloha 4, tato úloha byla inspirována běžně se vyskytující reklamou na finanční služby v denním tisku i televizi).

V dalších úlohách jsme rovněž sledovali porozumění nabízeným finančním produktům v souvislosti s orientací v informacích poskytovaných ve formě tabulek (úloha 5) i to, zda jsou schopni při řešení eliminovat nepotřebné, resp. nadbytečné, informace a vzájemně porovnat nabízené finanční produkty (úloha 6).

Následující tabulka uvádí v procentech, kolik žáků řešilo danou úlohu správně, nesprávně či vůbec neřešilo. Do kategorie „Chybně" byly opět zahrnuty i ty odpovědi, ve kterých žáci zaškrtli více možností současně, nebo naopak žádnou, i když uvedený postup na papíře vedl ke správnému výsledku.

Úloha	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Správně	39,2 %	51,1 %	61,7 %	67,4 %	73,6 %	64,0 %
Chybně	47,3 %	46,6 %	36,2 %	31,5 %	6,8 %	4,2 %
Neřešeno	13,5 %	2,3 %	2,1 %	1,1 %	19,6 %	31,8 %

Tabulka 2: Výsledky druhého testu

K nejúspěšnějším úlohám patřily úloha 4 (odhalení neúplné nabídky) a úloha 5 (určení nákladů spojených se splácením úvěru). Naopak, při řešení úlohy 1 dopadli žáci nejhůře. Na první pohled je z uvedených tabulek 1 a 2 zřejmé, že úspěšnost žáků v druhém testu byla nižší. V porovnání s výsledky prvního testu výrazně vzrostl počet žáků, kteří úlohy vůbec neřešili. To svědčí o tom, že úlohy pro žáky byly náročnější, ačkoliv z matematického hlediska k jejich řešení nebylo třeba složitých výpočtů. Uvedený výsledek tedy můžeme interpretovat tak, že k příčinám neúspěšnosti patřila neznalost uvedených finančních pojmů a produktů. Náš závěr se rovněž opírá o rozhovory s učiteli středních škol, kteří se do testování zapojili a kteří nás informovali, že žáci měli problémy s porozuměním zadání úloh z hlediska věcného obsahu. Tuto skutečnost dokládá i následující rozbor chyb.

Kromě numerických chyb se v žákovských řešeních *první úlohy* objevily závažné chyby, které svědčí o nepochopení zadaného problému. Tyto chyby lze charakterizovat jako nesmyslné nakládání s číselnými údaji (47,6 % z chybných řešení), neboť žáci zcela náhodně spojovali číselné údaje ze zadání (údaje sčítali, odčítali i násobili). Zmíněná skutečnost svědčí o neznalosti pojmů *úrok před zdaněním* a *úrok po zdanění*, tedy o neznalosti základních finančních pojmů. K dalším chybám, které se vyskytly v první úloze, patří určení výsledné částky namísto úroku, či určení úroku pouze před zdaněním.

Ve *druhé úloze* byla vysoká neúspěšnost zapříčiněna tím, že žáci vypočítali pouze zisk před zdaněním, tj. zapomněli zisk zdanit (83,5 % z chybných odpovědí). Jistou roli zřejmě sehrála skutečnost, že výše daně z úroků nebyla uvedena přímo v zadání úlohy. Tato informace však byla k dispozici žákům v záhlaví celého testu. Obdobně jako v první úloze, i zde vysoký výskyt zmíněné chyby souvisí s neporozuměním základním vztahům ve světě financí, tj. zdanění zisku.

Ve *třetí úloze* žáci často namísto složeného úročení používali jednoduché úročení (64,6 % z chybných odpovědí), někteří z nich současně špatně určený úrok ani nedanili. Nepozornost žáků při čtení zadání testu i formální chápání finančních situací dokládá případ čtyř žákovských řešení, ve kterých žáci napsali, že nepočítají úrok pro zdanění, neboť to není požadováno v zadání úlohy.

Z hlediska úspěšnosti žáků ve druhém testu patřila *čtvrtá úlohy* k těm nejlépe zvládnutým, avšak zarazila nás skutečnost, že téměř třetina žáků řešila tuto úlohu chybně. Nejčastější příčinou neúspěchu bylo, že žáci ve snaze vypočítat součet splátek si sami doplnili dobu splatnosti úvěru (tedy údaj, který v reklamě chyběl). Žáci volili nejčastěji dobu 5 či 6 let a s tímto údajem dále počítali. Několikrát se v žákovských řešeních objevila poznámka „Nerozumím, chybí mi údaje“. I když možnost „Nelze určit“ byla uvedena v nabízených možnostech, tito žáci ji přesto neoznačili.

Žáci si ve druhém testu nejlépe poradili s řešením *páté úlohy*. Chyby, který se žáci dopustili při jejím řešení, byly převážně numerické.

Šestá úloha zaměřená na porovnání hypotečních úvěrů u dvou finančních institucí se ukázala jako náročná na orientaci v problému jak z hlediska pochopení zadání, tak i z hlediska realizace výpočtu. Tuto úlohu vůbec neřešilo nejvíce žáků. Ti, kteří ji řešili chybně, se často dopouštěli numerických chyb. Největším problémem z hlediska porozumění žáků byl nadbytečný údaj s konkrétní roční úrokovou sazbou. Žáci se ve svých řešení snažili tento údaj využít, ačkoliv ho pro řešení vůbec nepotřebovali.

5 Shrnutí hlavních výsledků testování

Na základě zpracování výsledků obou testů můžeme konstatovat, že výrazně lépe si žáci vedli v prvním testu. Počty žáků, kteří dospěli ke správnému řešení, se v jednotlivých úlohách pohybovaly v rozmezí 86,5 %–93,6 %, zatímco v druhém testu se jednalo o rozmezí 39,2 %–73,6 % žáků. Je třeba však poznamenat, že z hlediska matematického učiva byl první test zaměřen na procenta, tedy na učivo, které již žáci probírali dříve a které se obvykle dostatečně na školách procvičuje.

Kvalitativní analýza žákovských řešení úloh z prvního testu ukázala, že testovaní žáci se poměrně dobře orientují v problematice slev zboží a služeb. Z hlediska klasifikace chyb se žáci dopouštěli zejména numerických chyb. Další početnou skupinu tvořily chyby, jejichž příčina zřejmě souvisela s nepozorností čtení zadání úloh i nabízených odpovědí. Žáci totiž často uváděli správný postup a výpočet, ale volili nesprávnou variantu odpovědi. Kromě těchto nedostatků se však vyskytly závažnější chyby, a to v úlohách na porovnání postupného a jednorázového zlevnění, resp. na zlevnění a následné zdražení. Jednalo se o chybu nejen z hlediska finanční gramotnosti, ale i matematiky, neboť žákovské výpočty svědčí o neporozumění vlivu základu (tj. původní ceny) na výslednou cenu po slevě, resp. po zdražení.

I když druhý test, obdobně jako ten první, z hlediska matematiky vyžadoval zejména porozumění pojmu procento (první tři úlohy), dosáhli v něm žáci horších výsledků. Obdobně jako v prvním testu, i ve druhém testu se žáci dopouštěli při řešení úloh numerických chyb. Vzhledem k tomu, že nejhůře dopadli žáci v prvních dvou úlohách, můžeme říci, že měli problémy z hlediska základů finanční matematiky, neboť se neorientovali v použitých finančních pojmech, jako je úrok před zdaněním, úrok po zdanění, daň z úroku, dluhopis. Neúspěšnost žáků ve druhé úloze, ve které byl princip dluhopisu detailně popsán, dokládá problémy žáků s porozuměním psanému textu. Dospěli jsme tak k závěru, že na středních školách by měla být věnována větší pozornost základům finanční matematiky, neboť výsledky testu naznačily, že žáci mají s úlohami ze světa financí málo zkušeností.

6 Závěr

Finanční vzdělávání je orientované na rozvíjení dovedností pro život, a proto by mělo vycházet ze situací, se kterými se žák může ve svém životě setkat. Výsledky testů, a to zejména druhého, poukázaly na skutečnost, že žáci se jen obtížně orientují v základních pojmech finanční matematiky a že s řešením úloh z oblasti finančních nabídek a služeb nemají zkušenosti.

Úkolem učitele je především rozvíjet finanční dovednosti, naučit žáky finančně myslet a postupně je seznamovat s různými situacemi ze světa financí. Znalosti finančních pojmů a vztahů jsou nezbytné, avšak finančně gramotný žák by měl tyto znalosti, postupy i dovednosti umět aplikovat ve svém životě [6].

Literatura

[1] M. Melcer, *Financial Mathematics in Czech Education Systems in the 20th Century.* In J. Šafránková, J. Pavlů (ed.), WDS'08, Proceedings of Contributed Papers, Part I, Praha, Matfyzpress, 2008, 43–48.

[2] J. Molnár a kol., *Matematika 6–9*, Prodos, Olomouc, 1998–2001.

[3] MŠMT, *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách*, 2008. `http://www.msmt.cz/vzdelavani/system-budovani-financni-gramotnosti-na-zakladnich-a-strednich-skolach`

[4] O. Odvárko–J. Kadleček, *Matematika pro 6.–9. ročník*, Prometheus, Praha, 1999–2001.

[5] O. Odvárko, *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, Prometheus, Praha, 2005.

[6] O. Odvárko, J. Robová, *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, Praha, Prometheus, 2005.

[7] O. Odvárko, J. Robová, *Matematika a budování finanční gramotnosti*, Praha, P3K, 2012.

[8] J. Radová, P. Dvořák, J. Málek, *Finanční matematika pro každého*, 7. aktualizované vydání, Praha, Grada, 2009.

[9] J. Robová, *Metodický portál*, Finanční gramotnosti v učebnicích matematiky [online], 2009.
http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/7347/financni-gramotnost-v-ucebnicich-matematiky.html/

[10] A. Hesová, E. Zelendová (eds.), *Finanční gramotnost ve výuce: Metodická příručka*, Praha, VÚP, 2011.

[11] Stem/Mark, *Finanční gramotnost: Kvantitativní výzkum pro MF ČR*, 2007.
http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/fintrh_fin_vzdelavani_34424.html

[12] Stem/Mark, *Finanční gramotnost v ČR: Kvantitativní výzkum – Finanční gramotnost obyvatel ČR*, 2010.
http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/fintrh_fin_vzdelavani_59012.html

[13] http://www.scio.cz/skoly/gramotnosti/financni.asp

[14] http://www.pisa2012.cz/

RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
robova@karlin.mff.cuni.cz

REALITA ŽIVOTA UČITELE V POKUSECH O MATEMATIZACI REÁLNÝCH SITUACÍ VE VÝUCE

František Kopecký

Ve svém příspěvku vycházím z jednačtyřicetiletých zkušeností výuky matematiky a fyziky. Z toho osmnáct let obou předmětů, dalších dvacet tři let výuky matematiky. Z těchto let zaujímala dvacet let navíc práce ředitele gymnázia. První dva roky jsem učil na odborném učilišti, zbytek na gymnáziích. Alespoň deset let se zúčastňuji Celostátních konferencí učitelů matematiky všech typů škol. Chci se podělit o některé zkušenosti, ale i o stále nezodpovězené otázky.

Už mnoho let si stěžujeme, že stále klesá zájem o matematiku i přírodovědné předměty. Trvale si kladu otázku, a stále není zodpovězena, jak učit, abych žáky zaujal, neodradil, přitom něco naučil a připravil ke studiu na vysoké škole tak, aby obstáli. Tyto požadavky se mi stále častěji jeví jako neslučitelné i vzhledem k počtu vyučovacích hodin. Charakterizoval bych situaci jako každodenní hledání dynamické rovnováhy mezi chtěným a možným.

Nejprve trochu historických souvislostí. Matematice a přírodním vědám rozhodně neprospělo, spíše ublížilo, že byly v minulosti úzce spojovány s tak zvaným *Vědeckým světovým názorem* a *Marxisticko-leninskou filozofií.* Výše uvedené předměty byly často zneužívány k propagandě těchto ideologií. Například v učebnici občanské výchovy z počátku 70. let minulého století stálo: „Dnes již každé dítě (každý žák) ví, jak vznikl svět, jak vznikl život…“ Nikdo to sice nevěděl, a navíc podstatná část populace si tyto otázky zcela přestala klást. Časté bylo odvolávání na „zdravý rozum“. Přesto už v té době byl hezký příklad v učebnici fyziky pro učně. Totiž představa atomu, jeho rozměrů v porovnání s rozměrem jádra, kde je soustředěna prakticky celá hmota atomu. Národní divadlo „prázdné“ a zrnko máku hmoty. Co zde zmůže zdravý rozum? Kybernetika byla označována za buržoazní pavědu, o teorii „Velkého třesku“ se nesmělo mluvit, vyvolávala totiž ideologicky závadnou otázku: „A co bylo před ním?“ Toto období bych ze svého pohledu nejspíše charakterizoval zdůrazňováním k čemu matematika není dobrá, k čemu nemá sloužit. Doporučoval jsem číst Pascalovy *Filosofické sešity.* Zaujala také interpretace Heisenbergovy relace neurčitosti, která je z matematického hlediska velmi jednoduchá (v podstatě funkce $y = k/x$) a prakticky popisuje „nepoznatelnost světa“. Tolik k minulosti.

Matematizace reálné situace ve výuce matematiky předpokládá znalost vlastního jazyka, převod do jazyka matematiky, řešení a převod zpět do běžného jazyka. Znalost vlastního rodného jazyka, dobrá slovní zásoba, pochopení významu pojmů se ukazuje být příliš silným předpokladem. Význam slov se rychle mění i v běžné mluvě. Příkladem mohou být stejně znějící slova politika před volbami a po volbách, ale i slova sport, láska, přítel, přítelkyně, … Slovník se zjednodušuje, viz SMS, PC, nečte se nahlas a podobně. Nedbá se na gramatickou správnost. Jsou nám nabízeny čistící prostředky, žehlící prkna, dokonce školící středisko. Všechny uvedené příklady a jim podobné využívám ve výuce k nácviku přesného vyjadřování. Při výkladu nové látky se musím vyjadřovat pouze v jednoduchých větách a daný pojem vysvětlit z různých stran v synonymech a zabránit žákům vyjadřovat se v jakési jejich hantýrce, která by vedla ke scestí. Na letech tradované frázi, že Komenský byl proti fyzickým trestům, lze ukázat, co způsobí vynechání jednoho slova. V originále bychom totiž našli, že byl proti neúměrným fyzickým trestům. K procvičování logiky jsou také vhodným zdrojem zákony, včetně Školského zákona, respektive jejich návrhů. Například v původním návrhu Školského zákona se objevily věty: „Ředitel školy doručí rozhodnutí o přijetí či nepřijetí žáka ke studiu do pěti dnů.“ „Ředitel školy zajistí uspokojení základních fyziologických potřeb žáka.“

V průběhu let došlo i ke značné změně v přístupu ke vzdělávání. Často je nám vyčítána encyklopedičnost a memorování. Mám opačné zkušenosti. Cituji: „Pane profesore, prosíme Vás, nevysvětlujte nám to, my tomu nepotřebujeme rozumět, řekněte nám, jak to je, my se to naučíme.“ A to v lepším případě. Na druhé straně je odmítání naučit se základní fakta a zvládat nezbytné operace, bez kterých se neobejdeme. S tím souvisí, že jsme pak ochotni věřit kdejakému nesmyslu a mnohé nesmysly považovat za originální řešení. Zvídavost, představivost, fantazie, radost z objevování jsou nějak potlačeny. Zajímavý je také význam rčení „zajímám se o to“. Většinou znamená, našel jsem si na internetu informaci, líbí se mi obrázky, ale tím je zájem vyčerpán. O hlubší poznání zájem není.

Úlohy s reálnými náměty vyžadují též přesný zápis rozboru i postupu řešení. To je považováno za vynucovanou zbytečnost či ještě něco horšího. Problémem pak je, jak docílit toho, aby si žáci alespoň přesně opsali to, co učitel napíše na tabuli. Často se ozývá „sešit je moje věc“. Stěží lze vynutit slušné zápisy do sešitů při značném sebevědomí současných žáků. O grafické úpravě nemluvě.

Ještě dovolte několik ukázek toho, co žáky alespoň krátkodobě zaujalo. Systém omalovánek k vysvětlení pojmu rovnosti. „Vzorce“ pomocí obrázků s vybarvováním, následně pak za obrázky dosazování konkrétních čísel či výrazů. Zajímavé je, že žáci s úsměvem a ochotně odříkají, že druhá odmocnina z druhé mocniny brambory je absolutní hodnota brambory, ale dosazení výrazu s proměnnými za bramboru se už nepodaří. Uspěl i beránek v krabičce z Exupéryho *Malého prince*, „nakresli mi beránka“, při objasňování iracionálních čísel. Zájem vzbudila i interpretace konvergentní posloupnosti při pojetí pravdy z díla Teilharda de Chardina *Místo člověka v přírodě.* Zájem vzbuzují i Weinbergovy *První tři minuty s úvahami*, že *Vesmír mohl být při svém vzniku mnohorozměrný.*

Zde se ovšem dostávám zpět na začátek a do kruhu. Doslova jde o boj se základními početními neznalostmi a časem…

Co s tím? Existuje jiný vyučovací předmět, třeba i dosud neobjevený, který by poskytl při rozvoji a kultivaci myšlení totéž co matematika a přitom byl tak zázračný, že by nevyžadoval úsilí, soustředění, píli, osobní kázeň?

Domnívám se, že se zde i do výuky promítá stav společnosti – vše hned a bez námahy. Ale buďme bezmezní optimisté!

Do budoucna bych navrhoval studovat aprobaci matematika v kombinaci s filozofií či teologií.

RNDr. František Kopecký
Gymnázium a Hudební škola hlavního města Prahy
Komenského náměstí 9
130 00 Praha 3
frantisek@kopeckych.cz

ROZVOJ ABSTRAKTNÍHO A PRAKTICKÉHO MYŠLENÍ VE VÝUCE MATEMATIKY

Eva Davidová

Reálný život je pro matematika jen speciální případ.

Vážené dámy, vážení pánové,

chtěla bych se s vámi podělit o své zkušenosti s pokusy o implementaci reálného života do školské matematiky na gymnáziu.

Na základní škole, respektive ve třídách nižšího gymnázia se celkem daří zpracovávat reálné situace do formy matematické úlohy. Zadání úloh jsou docela věrohodná, výsledky výpočtů jsou předvídatelné a logicky odůvodnitelné. Často používaným námětem je nakupování, ale tady je situace oproti minulosti horší v tom, že s vymizením haléřů ubyla možnost přirozeného tréninku pamětného počítání s desetinnými čísly.

S tím, jak ve výuce matematiky na základní škole stoupá náročnost probíraného učiva, ubývá témat z reálného života, která by se dala beze zbytku zpracovat na vhodnou slovní úlohu. Některé úlohy se ve školské matematice objevují už po generace. Možná si vzpomínáte – na úlohy o zástupech cvičenců, kteří nastupují do všelijakých víceřadů, často přitom nějaký chudák přebývá – na úlohy o směsích, o společné práci, o nádržích s různými přítoky i výpustnými ventily, kdy jsem vždy s napětím očekávala, že se opět někdo ozve s připomínkou, proč se ta cisterna najednou napouští i vypouští. Houby téměř vysušené do sebe znovu natáhnou vodu a opakovaně se dají sušit – pro procvičení látky o procentech je to lahůdka, ovšem fakticky by to jistě žádný hygienik nedoporučil.

Tyhle úlohy – i přes jejich nepříliš dokonalé spojení s realitou – mají ovšem neoddiskutovatelný přínos v tom, že jsou výborně využitelné z metodického hlediska. Většina žáků se nechá vést logickým rozborem úlohy, zpočátku se snaží reagovat na návodné otázky, později většinou dokážou sami nalézt správnou posloupnost kroků vedoucích k vyřešení úlohy. Když jsem před několika lety učila na nižším gymnáziu, byla jsem překvapena, že se žáci nad reálností situace v zadání úloh nikterak nepozastavují, přijmou a bez reptání počítají, co je jim předloženo.

Skladba studentů vyššího gymnázia doznala v posledních letech značných změn, které pozoruji mimo jiné právě v okamžiku, kdy se studenty řeším slovní úlohy vycházející z látky probírané na základní škole. V minulých letech většina studentů (poznamenaných přípravou na studium řešením sbírky dr. Bělouna) přistupovala k řešení slovních úloh na základě logického rozboru. K mému překvapení valná část dnešních studentů při zadání úlohy začne dolovat z paměti kdysi probíraná schémata typových úloh a řeší úlohu víceméně mechanicky podle nich. Titíž studenti pak mívají nezřídka problémy, aby v dalším studiu uspěli.

Při opakování slovních úloh jsem například vloni v 1. ročníku gymnázia narazila na problém, kdy si žáci nedokázali poradit se středně těžkou úlohou o společné práci. Začala jsem s nimi úlohu důkladně rozebírat, až jsme společně dospěli k řešení. Jedna dívka se skvělými studijními výsledky se pak ozvala, že už si vzpomíná, jak se to řeší – sestavila správnou rovnici, kterou sice nedokázala odůvodnit, ale protože má vynikající paměť, jediná ze třídy si na to vzpomněla. Když své řešení napsala na tabuli, třída zajásala – že „to je ono – tak se to má dělat". Mému řešení s detailním rozborem dalo přednost jen několik, zato těch nejchytřejších, žáků. Ostatní se raději přiklonili k řešení pomocí „vzpomenuté" rovnice. Nic nepomohly argumenty, že schéma rovnice se po čase opět vytratí, ale logická úvaha je posune dál.

Řešení slovních úloh má ve výuce matematiky významnou a nezastupitelnou roli. Rozvíjí osobnost žáka – ovšem pouze tehdy, je-li žák důsledně veden k rozboru řešení úlohy, efektivnímu zápisu, k hledání souvislostí, kdy nalezení správného řešení je logickým vyústěním řetězce úvah. Následovat pak ještě musí vyhodnocení reálnosti nalezeného výsledku.

Výhodou pro výuku na ZŠ nebo nižším gymnáziu je fakt, že v současnosti již existuje více kvalitních pracovních materiálů, ze kterých lze čerpat zadání slovních úloh, ať už jsou to klasické učebnice nebo pracovní sešity. Pokrytí oblasti slovních úloh pro vyšší gymnázium je neporovnatelně menší. Do základní řady učebnic pro SŠ se slovních úloh příliš nedostalo, je jich dostatek pro výklad, ale ne už těch, které by byly určeny pro samostatné procvičení studentům. Tuto mezeru zčásti zaplňují sbírky slovních úloh, avšak ty si studenti běžně nepořizují.

Ke zcela výjimečným patří velice fundovaně i vtipně pojatá sbírka „Repetitorium středoškolské matematiky ve slovních úlohách" pana Jindřicha Vocelky. Zadání nepůsobí archaicky, obracejí se ke studentovi svěžím jazykem, používáním přímé řeči jej přímo oslovují. Vybízejí studenta k logické úvaze, bez níž mu naučené postupy budou k ničemu. Sbírka však zatím, aspoň na mém gymnáziu, slouží spíše k práci v semináři než v běžných hodinách matematiky, kde stále zápasíme s nedostatkem času, který čím dál tím větší měrou potřebujeme k zvládnutí základního učiva. Na zařazování zajímavých aplikací – tedy i slovních úloh, pak nemáme dostatečný prostor.

Navíc je zadávání slovních úloh časově velice náročné. Je žádoucí, aby každý student měl zadání slovní úlohy k dispozici sám pro sebe. Jedině tak se naučí pracovat s textem, vybrat podstatné informace, zjistit, které ze zadaných údajů může využít k řešení a který by v textu naopak vůbec nemusel být. Proto velice oceňuji snahu pracovníků KDM MFF UK, kteří sbírky slovních úloh pro středoškoláky v současnosti připravují. Věřím, že nám naši práci do budoucna ulehčí.

Musím se přiznat, že když jsem před dávnými lety začala učit na gymnáziu, tak jsem si s vazbou školské matematiky na okolní svět příliš nelámala hlavu. Byla jsem tak natěšená ze svých vysokoškolských studií, že jsem nepociťovala potřebu se nějak hlouběji těmito otázkami zabývat. Připravovala jsem se tuším na svou výuku docela zodpovědně, ale mé cíle byly tenkrát rozhodně jiné, než kontakt s realitou, kterou jsem ráda ponechala za zdí školní budovy. Měla jsem ráda, když se nějaká partie matematiky pozvolna před studenty odkrývala, když se mnou postupovali od vymezení nových pojmů, přes důkazy potřebných tvrzení až k aplikacím poznaného. Měla jsem to štěstí, že se většinou našlo nemálo studentů, kteří dokázali se mnou sdílet radost z poznávání.

I dnes si stále myslím, že nejdůležitějším úkolem středoškolské matematiky je právě vedení studenta k logickému úsudku, pěstování jeho schopnosti abstraktního myšlení. Takto připravený student má pak větší šanci si s reálným problémem lépe poradit.

I přesto se nyní poměrně často snažím zařadit do výuky cíleně nějaký prvek spojující probíranou látku s reálným životem. První takovouto příležitostí je opakování dělitelnosti v prvním ročníku gymnázia. Studenti si přinesou do školy své občanské průkazy, probereme pravidlo dělitelnosti čísla jedenácti – a studenti si ověří, zda mají správně sestavené své rodné číslo. Pak si podle návodu zkontrolují výpočtem kontrolní číslici svého občanského průkazu. Uvádím jim ještě informativně další užití dělitelnosti – například výpočet kontrolní číslice bankovního účtu, jedinečnost VIN kódu automobilů apod. Materiál, který dávám k dispozici svým studentům, jsem sestavila z informací běžně dostupných na internetu a doplnila jej rozborem pravidel pro dělitelnost čísla sedmi a jedenácti. Tento materiál je rovněž k dispozici i účastníkům této konference (viz [1]).

Nebudu se zde vracet ke slovním úlohám podporujícím výuku rovnic a funkcí. Tam při nedostatku času používám osvědčené úlohy z učebnic a sbírek. Za velice užitečné pro rozvoj logického úsudku svých studentů pokládám řešení úloh z kombinatoriky a pravděpodobnosti, ale reálný podtext bychom v jejich zadání našli jen zřídka. S realitou všedního dne by ovšem měla výuka pravděpodobnosti souviset aspoň do té míry, aby si studenti uvědomili, že každý provozovatel kasina, loterie, sázkové hry apod., je pro ně nerovnocenný soupeř, který v dlouhodobém horizontu vždycky vyhrává.

Možnost těsnějšího kontaktu s realitou skýtá výuka statistiky. Zpracování dat v Excelu umožní zabývat se i zajímavějšími soubory, než jaké nabízejí školské učebnice. Na výuku statistiky máme vyhrazeno velice málo času, tak zadáváme studentům jako projekt provést korelační analýzu na souboru, který si sami vyberou. Data studenti nejčastěji získávají na stránkách ČSÚ, ale někteří zamíří i na zahraniční servery. Některé práce jsou opravdu zajímavé – jedna studentka např. vyšetřovala ziskovost dvaceti nejúspěšnějších hollywoodských filmů v závislosti na nákladech. S překvapením zjistila, že koeficient korelace je blízký nule.

Zajímavé je, že studenti, ačkoli si až na výjimky sami nevydělávají, většinou zbystří, když se začne hovořit o penězích a finančních produktech. Výpočty dlouhodobých spoření s pravidelnými úložkami je ale brzy přestanou zajímat, protože částka, ke které se na konci výpočtu doberou, je vede k poznání, že spoření na běžném účtu nedává v dnešní době valný smysl. Jejich každodenní realitou jsou všudypřítomné reklamní kampaně bank a splátkových společností. Nabudou dojmu, že dnes není nic snazšího, než si půjčit peníze – vždyť ty splátky, které za to splátkové společnosti chtějí, jsou docela nízké (viz reklamní kampaně stylu „50 000,– jen za 999 Kč měsíčně")!

Dříve jsem studenty vyzývala, aby přinesli letáky a inzeráty nabízející právě takové půjčky a společně jsme o nich pak diskutovali. Ale od doby, kdy společnosti musejí povinně uvádět RPSN, se člověk z inzerátů o nabízené půjčce mnoho nedozví. Proto nyní jako varování předkládám studentům výsledek průzkumu redaktorů deníku Dnes, kteří zadali bankám a splátkovým společnostem výpočet splátek půjčky se stejnými vstupními podmínkami a srovnání zveřejnili ve vydání Dnes 7. 12. 2010. Ze srovnání jednoznačně vyplynulo, že je vhodnější vzít si půjčku u banky než u splátkové společnosti. Studenty zejména šokovala celková částka, kterou by za půjčku zaplatili a která byla u některých splátkových společností dvojnásobná a v jednom případě dokonce trojnásobná vzhledem k vypůjčené částce. Jmenovaný článek přikládám pro zájemce ke stažení (viz [2]).

S kolegy na gymnáziu opakovaně řešíme dilema, zda při malé hodinové dotaci, při věčně odpadajících hodinách výuky, učit diferenciální a integrální počet v běžné matematice. Vím, že na mnohých školách se tato látka vyučuje ve volitelném semináři. Toto řešení se na našem gymnáziu nepodařilo prosadit, protože si nikdo z kolegů nenechal vzít příležitost, ukázat svým studentům krásu aplikačních úloh založených na nalezení extrému funkce s uplatněním diferenciálního počtu nebo výpočty ploch a objemů s užitím integrálního počtu apod. Při našich diskusích v předmětové komisi matematiky zaznělo, že právě „to je ta chvíle, kdy studentům ukážeme, k čemu ta matematika může být dobrá". Bohužel realita je taková, že neustále se zkracující maturitní „rok" ukrajuje i z těchto krásných vizí.

Ovšem na druhou stranu – když někdy nestihneme studentovi prostřednictvím matematiky dát nahlédnout do reálného světa, zbývá nám stále ještě naděje, že naše výuka měla na studenta tak výrazný formativní účinek, že napomohla ke zkvalitnění jeho schopnosti logicky myslet, lépe se rozhodovat, domýšlet důsledky svého konání… Snad nám tento efekt někdy nějaká spřízněná vědní disciplína exaktním výzkumem potvrdí.

Přílohy

[1] `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/p1.pdf`

[2] `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/p2.pdf`

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium
Čs. exilu 669
708 00 Ostrava-Poruba
eva.davidova@email.cz

NAUČME SE POČÍTAT S NEJISTOTOU

Jan Chleboun

Cílem příspěvku je přiblížit čtenářům (a) smysl úloh s nejistými vstupními daty, (b) jejich postavení v procesu matematického modelování a (c) různé způsoby popisu nejistot. Pozornost je věnována i zdarma dostupným softwarovým nástrojům, jež mohou být uplatněny ve výuce.

Příspěvek je rozdělen do tří částí:

- Matematické a výpočetní modelování; nejistota
- Nejhorší scénář, pravděpodobnost, náhodné a fuzzy množiny
- Volně dostupný software

1 Matematické a výpočetní modelování; nejistota

Řešení úloh s nejistými (vstupními) daty je odvěkou součástí lidského jednání. Vždyť například zbudování sídla na výhodném místě u řeky také znamenalo vzít v úvahu i výskyt povodní a možnost nejhoršího scénáře (viz dále). Rozvoj matematiky umožnil řadu situací a jevů popsat matematickým jazykem, vytvořit matematický model a jeho chování dále zkoumat s cílem získat informace použitelné v praxi – nejlépe pro předpovědi.

Na počátku procesu modelování musíme zvolit matematický popis a vytvořit matematický model studovaného jevu. Obvykle můžeme dospět k celé skupině modelů hierarchicky uspořádaných dle své složitosti, pak vybereme takový, jenž může dát odpovědi na naše otázky a jehož vyřešení (tedy získání přesného nebo, s použitím numerických metod, aspoň přibližného řešení) nebude nad naše síly.

Studiem vztahu mezi přibližným a přesným řešením se zabývá *verifikace*, jejímž cílem je, zhruba řečeno, získání oprávněného přesvědčení, že přibližné řešení je dostatečně dobrou aproximací řešení přesného.

Dalším krokem v procesu modelování by měla být *validace*, během níž posuzujeme, zda náš model dostatečně dobře vystihuje ty rysy studovaného jevu, o něž se zajímáme. Jinými slovy: sledujeme chování matematického modelu (zprostředkované ovšem verifikovaným numerickým modelem) v situacích, kdy o studovaném jevu máme dostatek informací, jež můžeme srovnávat s výstupy aproximačního (přibližného) modelu. Po verifikaci a validaci model používáme v nových, avšak modelu odpovídajících situacích a snažíme se z chování modelu předpovědět skutečný průběh studovaného jevu.

Uživatel modelu by měl získat nejen přibližné řešení, nýbrž i jeho kvalitativně vyšší verzi – zaručené řešení. Tím se, v zúžené interpretaci, myslí přibližné řešení se zaručenou přesností, tj. s odhadem velikosti rozdílu mezi přesným a přibližným řešením. Obecněji by však mělo jít i o odhad nepřesnosti zapříčiněné konkrétní volbou matematického modelu ze skupiny relevantních modelů.

Povšimněme si, že konkrétní matematické modely jsou obvykle zatíženy nejistotou, a to přinejmenším v hodnotách vstupních dat. Například neznáme přesně síly, které zatíží most, nebo vlastnosti materiálu historické stavby. Jiné údaje jsou přesné jen zdánlivě, kupříkladu tabulkové parametry oceli daného typu. Ve skutečnosti většina tabulek udává střední hodnotu několika měření, není snadné nebo levné získat statistické a pravděpodobnostní charakteristiky měřených veličin.

Můžeme rozlišit dva druhy nejistoty. *Epistemická* (též redukovatelná) nejistota je důsledkem naší neznalosti a je možné ji snížit kupříkladu lepším měřením. *Aleatorická* (též neredukovatelná) nejistota se vztahuje na situace, jimž je vlastní přirozená variabilita – jako příklad může sloužit působení přírodních podmínek (síla a směr větru, proměnnost teploty atd.). V praxi se oba druhy nejistoty často prolínají.

2 Nejhorší scénář, pravděpodobnost, náhodné a fuzzy množiny

Cílem *metody nejhoršího scénáře* je najít mezi všemi uvažovanými scénáři ten nejnevhodnější, a tím zjistit, lidově řečeno, co nejhoršího můžeme čekat, abychom se na to mohli připravit.

Matematicky je úloha sestavena takto:

A) Uvažované scénáře vycházejí z množiny dat, která použijeme jako vstupní údaje pro náš model; označme ji $\mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$.

B) Matematický model může být představován například rovnicí přímo závislou na parametru $a \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$ a symbolicky zapsanou $D(a)u_a = f$, kde f je známá pravá strana rovnice (také může záviset na nějakém nejistém parametru) a u_a je řešení rovnice, u něhož index a značí, že řešení také (nepřímo, prostřednictvím operátoru $D(a)$) závisí na parametru a. Předpokládáme, že pro každé $a \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$ existuje právě jedno řešení u_a.

C) Řešení u_a a hodnota vstupního parametru a jsou ohodnoceny reálným číslem $\Phi(a, u_a)$, které vyjadřuje sledovanou veličinu, tedy to, co nás na řešení a parametru a zajímá. Jelikož u_a je jednoznačné, můžeme hodnotit přímo vstupní data kriteriální funkcí $\Psi(a) = \Phi(a, u_a)$, kde $a \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$.

D) Maximalizace Ψ na $\mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$ (nejhorší scénář): najít $a^0 \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$, aby

$$a^0 = \operatorname*{arg\,max}_{a \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}} \Psi(a). \tag{1}$$

Vztah (1) říká, že pro data $a^0 \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$ nabývá Ψ svého maxima na množině $\mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$, tedy že hodnota $\Phi(a^0, u_{a^0})$ je nejvyšší; dostáváme nejnepříznivější řešení u_{a^0}. Označení nejhorší scénář vychází z inženýrské praxe, v níž vysoké hodnoty veličin (například mechanického napětí či teploty) ohrožují funkčnost konstrukce nebo přístroje. Znalost nejhoršího scénáře je předpokladem k dodržení inženýrské zásady bezpečnosti i za souhry nepříznivých okolností.

Můžeme hledat i nejlepší scénář $a_0 \in \mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$, kdy v (1) nahradíme maximum minimem. Znalost a_0 a a^0 nám pak poslouží k určení rozsahu, který sledovaná veličina nabývá na množině dat $\mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$:

$$I_\Psi = [\Psi(a_0), \Psi(a^0)]. \tag{2}$$

Příklad 1. Při cestě městem musí automobil projet deset světly řízených křižovatek. Předpokládejme, že na každé se zdrží nejvýše pět časových jednotek. Co můžeme říci o celkovém zdržení?

Při řešení metodou nejhoršího a nejlepšího scénáře množina

$$\mathcal{U}_{\mathsf{ad}} = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_{10}) |\ t_i \in [0, 5],\ i = 1, 2, \ldots, 10\}$$

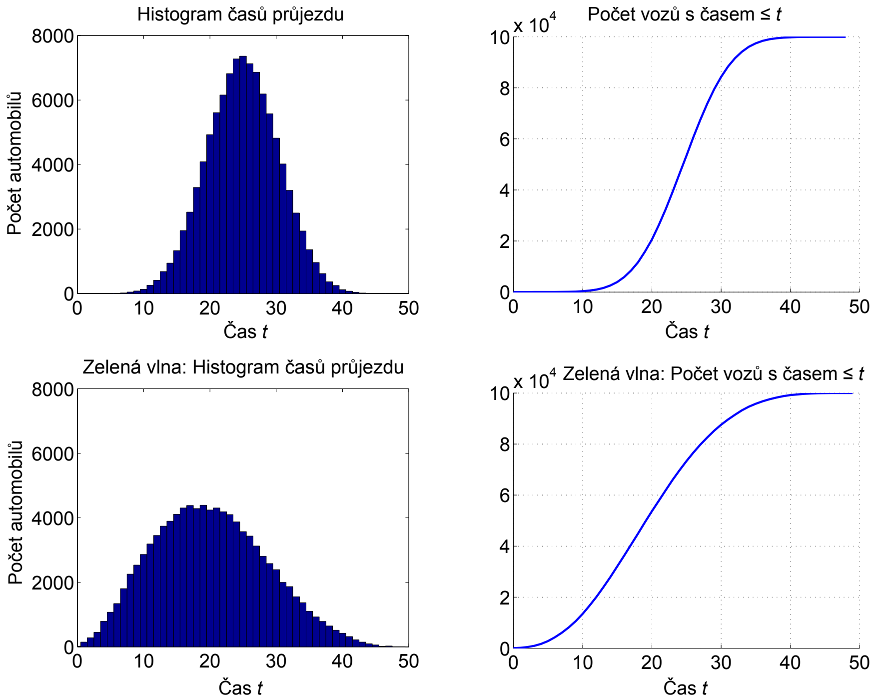
představuje možná zdržení na jednotlivých křižovatkách a $\Psi(t) = t_1 + \ldots + t_{10}$ je celkové zdržení; rovnice $D(a)u_a = f$ v této triviální úloze nevystupuje. Pak $\Psi(t_0) = 0$ je minimální a $\Psi(t^0) = 50$ maximální zdržení, kde t_0 sestává z nul a t^0 tvoří konstanty 5. □

V metodě nejhoršího (a nejlepšího) scénáře se všechna vstupní data považují za rovnocenná. Velmi často však lze vstupní hodnotě přiřadit nějakou váhu, tou nejobvyklejší je pravděpodobnost. Pak se ovšem snažíme získat váhu i u výstupů, zajímá nás kupříkladu pravděpodobnostní charakteristika hodnot $\Psi(a)$.

Statisticko-pravděpodobnostních přístupů k modelování nejistoty se nabízí velké množství od poměrně elementárních až po teoreticky a výpočetně složité metody. Oblíbenou a pro nenáročné úlohy jednoduchou metodou je metoda Monte Carlo. Je založena na generování vzorků dat z $\mathcal{U}_{\mathsf{ad}}$ s daným známým nebo aspoň předpokládaným rozdělením pravděpodobnosti. Pro každý vzorek a se vyřeší stavová úloha $D(a)u_a = f$ a vypočítá $\Psi(a)$. Takto vzniklý soubor hodnot sledované veličiny Ψ se statisticky zpracuje a ze získaných pravděpodobnostních charakteristik se odvozují pravděpodobnosti (ne)příznivých nebo zajímavých scénářů.

Příklad 2 (pokračování příkladu jízdy městem). Předpokládejme nyní, že na každé křižovatce vznikne náhodné zdržení 0, 1, 2, 3, 4 nebo 5 časových jednotek, a to vždy se stejnou pravděpodobností 1/6 (model A) nebo s pravděpodobností závislou na situaci na předchozí křižovatce (například při zdržení 0 se na další křižovatce s pravděpodobností 1/6 volí mezi zdrženími 0, 0, 1, 2, 3, 4 jednotky, model B, zelená vlna).

Postupujme metodou Monte Carlo. Myšlené auto necháme projet deseti křižovatkami, na každé křižovatce náhodně generujeme zdržení (kupříkladu vrhem kostky) a zapamatujeme si celkové zdržení při jednom průjezdu městem. Takových průjezdů uskutečníme např. 100 000 a výsledky statisticky zpracujeme. Výstižné jsou i grafy, viz Obr. 1 s histogramy celkového zdržení (vlevo) a s počtem vozů se zdržením menším nebo rovným času t (vpravo). □

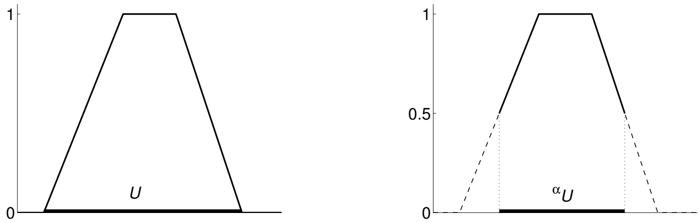


Obr. 1: K příkladu 2. Model A nahoře, model B dole.

S pravděpodobnostním pohledem na nejistotu částečně souvisí i *teorie náhodných množin (random sets)* (též *Dempsterova-Shaferova teorie*), v níž jsou váhy (připomínající pravděpodobnosti) přiděleny množinám vstupních dat. Pro každou množinu se vypočítá příslušný rozsah (interval) sledované veličiny (viz (2), zde se uplatní nejlepší a nejhorší scénář) a z vah množin vstupů se odvodí váha intervalu. Hlavním přínosem teorie však je možnost posuzovat, jak libovolně zvolené množiny (například libovolné intervaly) sledované veličiny souhlasí s informacemi, jež máme o vstupních datech a o intervalech výstupů. Tak je možné najít množinu, která vhodně reprezentuje nejisté chování sledované veličiny, a dokonce kvalitu této reprezentace vyjádřit číselně.

Kvůli krátkému rozsahu příspěvku se tomuto přístupu nebudeme dále věnovat. Uveďme jen, že v posledním desetiletí o rostoucím zájmu o náhodné množiny svědčí výrazný přírůstek počtu odborných prací včetně aplikačně zaměřených monografií.

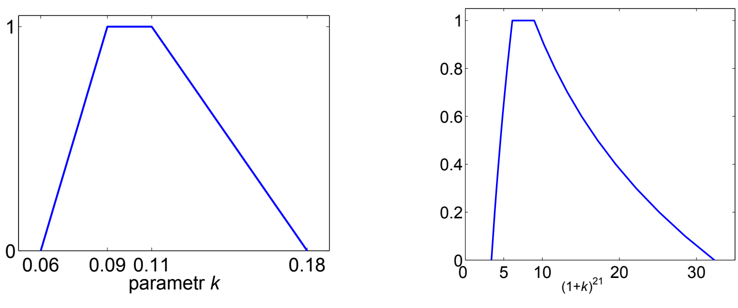
Další způsob popisu nejistoty – *teorie fuzzy množin* – nahrazuje čísla intervaly s definovanou funkcí příslušnosti, jež je zobecněním charakteristické funkce množiny. Hodnota funkce příslušnosti leží v intervalu $[0,1]$ a vypovídá o stupni příslušnosti argumentu funkce k dané množině, opět tady představuje jakousi váhu. Definují se podmnožiny ${}^{\alpha}U$ (α-řezy) fuzzy množiny U sestávající z těch prvků fuzzy množiny, jejichž hodnota příslušnosti je alespoň $\alpha \in (0,1]$, viz Obr. 2.



Obr. 2: Funkce příslušnosti (vlevo), α-řez (vpravo).

Při vyšetřování úlohy s fuzzy vstupními daty je cílem zjistit váhy hodnot sledované veličiny, tedy sestrojit její funkci příslušnosti. Postupujeme tak, že na α-řezech vstupních dat vypočteme rozsah sledované veličiny (opět nejlepší a nejhorší scénář, viz (2)), tím získáme α-řezy sledované veličiny, z nich sestrojíme funkci příslušnosti.

Příklad 3. Nechť šíření nákazy popisuje vztah $N_t = (1+k)^t N_0$, kde N_0 je výchozí počet nakažených a N_t je počet nakažených za t dnů. Zajímá nás N_{21} v případě, že k je fuzzy parametr; Obr. 3 (vlevo). Na základě α-řezů parametru k a výpočtu mocnin $(1+k)^t$, kde za k dosazujeme krajní hodnoty α-řezů, vypočteme α-řezy nejistého čísla $(1+k)^{21}$ a vykreslíme funkci příslušnosti odpovídající fuzzy hodnotě výrazu $(1+k)^{21}$, jenž je rozhodující pro rychlost šíření nákazy; Obr. 3 (vpravo). □



Obr. 3: K příkladu 3.

3 Volně dostupný software

Řešení úloh s nejistými daty usnadní vhodný software. Pro soukromé a školní potřeby je možné použít mocné nástroje pro symbolické a (nebo) numerické výpočty a vytváření grafů. Základní přehled získáme na Wikipedii [1] a [2]. Mezi nejpopulárnější systémy patří:

1) Maxima [5]. Především počítačová algebra, ale i numerické metody. Bohatá dokumentace různé náročnosti v angličtině, v češtině např. [6].

2) Euler [3]. Numericky orientovaný software integrovaný se systémem Maxima. Velká sbírka ukázkových příkladů. Kromě cizojazyčné dokumentace k seznámení se systémem poslouží i [4] v češtině.

3) Sage [10]. Obsáhlý systém, v prostředí jazyka Python integruje cca 100 softwarových balíků pro počítačovou algebru a numerické metody. Základní představu poskytuje i český text [11].

4) Octave [7]. Systém zaměřený zejména na numerické metody, dokumentace v angličtině, užitečný manuál v češtině [8]. Podobný je Scilab [12], [13].

Zmiňme ještě Python [9], moderní programovací jazyk s rozsáhlými možnostmi a specializovanými knihovnami, jehož popularita roste zejména v akademické a profesionální sféře. Bohatá literatura elektronická i papírová, a to jak v angličtině, tak v češtině.

Literatura

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_computer_algebra_systems`

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_numerical_analysis_software`

[3] `http://euler.rene-grothmann.de/index.html`

[4] `http://euler.euweb.cz/`

[5] `http://maxima.sourceforge.net/`

[6] `http://is.muni.cz/th/262630/prif_b/bakalarka.pdf`

[7] `http://www.gnu.org/software/octave/`

[8] `http://www.octave.cz/index.html`

[9] `http://www.python.org/`

[10] `http://sagemath.org/`

[11] `http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/Sage.pdf`

[12] `http://www.scilab-enterprises.com/`

[13] `http://elenar.ic.cz/SKOLA/Bakalarka/bakalarka.pdf`

doc. RNDr. Jan Chleboun, CSc.
Fakulta stavební ČVUT
Katedra matematiky
Thákurova 7
166 29 Praha 6
`chleboun@mat.fsv.cvut.cz`

ČÍSELNÉ PRŮMĚRY KOLEM NÁS

Jaroslav Zhouf

Obsahem tohoto příspěvku je prezentace několika typů průměrných hodnot počítaných ze zadaných číselných údajů. Každý průměr je dokumentován úlohou, aby byla zdůvodněna užitečnost této teorie ve škole i v praxi. Na závěr článku se objevuje úvaha, zda výpočet průměrné známky pomocí aritmetického průměru je ten nejsprávnější postup.

Příspěvek je rozdělen do čtyř částí:

- Úvod
- Úlohy na výpočet průměrných hodnot
- Vztahy mezi průměry
- Jak vypočítat průměrnou známku z předmětu

1 Úvod

Článek se zabývá řešením situací, kde se užívá aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický atd. průměr.

Článek vznikl jako reakce na mou dlouholetou zkušenost s neznalostí počítání průměrných hodnot lidmi, kteří už jsou mimo školu, ale i žáky ve škole, a dokonce i učiteli, kteří by měli tuto problematiku žáky učit.

Ptal jsem se žáků a studentů: „Počítali jste někdy ve škole nebo v životě aritmetický průměr několika hodnot?“ Odpověď zní „ano“. Ptal jsem se dále: „A počítali jste někdy geometrický, či harmonický, či kvadratický průměr několika hodnot?“ To už téměř nikdo nevěděl. Ptal jsem se i kolegů: „Počítáte ve škole úlohy na využití aritmetického, či geometrického, či harmonického, či kvadratického průměru?“ Odpověď na aritmetický průměr byla pozitivní, ale na ostatní průměry byla téměř vždy negativní. Ve skutečnosti se ale takové úlohy ve škole i kolem nás počítají.

Mám zkušenost, že žáci při přijímacích zkouškách na střední školu (a to dokonce do tříd se zaměřením na matematiku) počítají průměrnou rychlost auta, které jede z místa A do místa B stálou rychlostí 80 km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí 120 km/h, za oba úseky dohromady jako (80+120)/2 km/h = 100 km/h. Nebo když počítají délku hrany průměrné krychlové krabice, která má stejný objem jako soubor krychlových krabic s hranami délek 10 cm, 20 cm, 60 cm, 60 cm, 70 cm, 80 cm, jako

$$(10 + 20 + 60 + 60 + 70 + 80)/6 \text{ cm} = 50 \text{ cm}.$$

A stejně tak se chovají i mnozí dospělí, učitele nevyjímaje. Ve škole existuje řada úloh, kde počítáme nějaký průměr ze zadaných hodnot, např. „Vypočtěte průměrnou hodnotu z čísel 80 a 120." a míníme tím aritmetický průměr těchto dvou hodnot. Ve většině případů ale nezní úkol „Vypočtěte průměrnou hodnotu …", nýbrž opisuje se jinými slovy, např. „Jaká je délka hrany krabice, která má stejný objem jako šest krabic se zadanými délkami hran?" V učebnicích se nemluví o průměrné hodnotě, tak v okamžiku, kdy se zeptáme na průměrnou hodnotu, použije se jen jediný vzorec na výpočet aritmetického průměru. Kdybychom ale používali častěji otázku „Vypočtěte průměrnou hodnotu …", tak by se žáci více zamysleli, jaký vzorec to mají vlastně použít.

Dále se tedy zaměřím na správné způsoby počítání průměrných hodnot. Správný způsob výpočtu průměrné hodnoty nezávisí např. na mé náladě, ale vše je dáno logikou věci a přírodními zákonitostmi.

2 Úlohy na výpočet průměrných hodnot

Úloha 1. Vypočtěte průměrnou známku, jestliže žák dostal postupně známky 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, které mají stejnou váhu.

Řešení. Průměrná známka je

$$p = \frac{2+2+2+2+3+3+3+4+5}{9} = 3.$$

Úloha 2. Vypočtěte průměrnou rychlost p automobilu na celé své dráze, jestliže první hodinu jel rychlostí $a = 80$ km/h a druhou hodinu jel rychlostí $b = 120$ km/h.

Řešení. Průměrná rychlost se počítá jako podíl celkově ujeté dráhy a celé doby jízdy. V našem případě to je

$$p = \frac{a+b}{2} = \frac{80+120}{2} \text{ km/h} = 100 \text{ km/h}.$$

Počítali jsme podle vzorce

$$A(a,b) = p = \frac{a+b}{2},$$

čemuž se říká *aritmetický průměr* čísel a, b. Označili jsme ho $A(a,b)$.

Úloha 3. Určete průměrnou rychlost automobilu, který jede z místa A do místa B stálou rychlostí $a = 80$ km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí $b = 120$ km/h.

Řešení. Je-li s vzdálenost mezi místy A, B, dále t doba jízdy z A do B a u doba jízdy z B do A, je průměrná rychlost rovna

$$p = \frac{2s}{t+u} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}} \text{ km/h} = 96 \text{ km/h}.$$

Vidíme, že tato hodnota je menší než v předchozím případě. Počítali jsme podle vzorce

$$H(a,b) = p = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

čemuž se říká *harmonický průměr* čísel a, b. Označili jsme ho $H(a,b)$.

Úloha 4. Tři Popelky přebírají hromadu hrachu. První Popelka by ho přebrala za $a = 2$ hodiny, druhá za $b = 3$ hodiny a třetí za $c = 6$ hodin. Za jak dlouho by přebrala hromadu „průměrná Popelka"?

Řešení. První Popelka přebere za jednu hodinu 1/2 hromady hrachu, druhá 1/3 hromady a třetí 1/6 hromady. Celkem tedy za jednu hodinu přeberou všechny tři 1/2+1/3+1/6 hromady. Jelikož Popelky jsou tři, budou přebírat tři hromady a bude jim to trvat průměrnou dobu

$$p = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \text{ hodiny} = 3 \text{ hodiny}.$$

Opět je to harmonický průměr, tentokrát ze tří čísel

$$H(a,b,c) = p = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab + ac + bc}.$$

Úloha 5. Obdélník má rozměry $a = 2$ cm, $b = 8$ cm. Jaké rozměry má čtverec stejného obsahu jako obdélník, tj. jak se musí „zprůměrovat" hodnoty a, b?

Řešení. Je-li p strana čtverce, platí

$$p^2 = ab,$$

$$p = \sqrt{ab} = \sqrt{2 \cdot 8} \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

Je to méně, než kdybychom spočítali aritmetický průměr čísel a, b. Počítali jsme podle vzorce

$$G(a,b) = p = \sqrt{ab},$$

čemuž se říká *geometrický průměr* čísel a, b. Označili jsme ho $G(a,b)$.

Úloha 6. Kvádr má rozměry a, b, c. Jaké rozměry má krychle stejného objemu jako kvádr, tj. jak se musí „zprůměrovat" hodnoty a, b, c?

Řešení. Hrana hledané krychle je

$$G(a,b,c) = p = \sqrt[3]{abc}.$$

což je geometrický průměr čísel a, b, c.

Úloha 7. V posledních třech letech byla úrodnost osiva, tj. číslo udávající, kolikrát více se sklidilo, než zaselo, rovna 25, 30, 36. Jaká byla průměrná úrodnost v těchto třech letech?

Řešení. V prvním roce se z jednoho metrického centu získalo 25 metrických centů, z nich se pak získalo $25 \cdot 30$ metrických centů a z nich se nakonec získalo $25 \cdot 30 \cdot 36$ metrických centů. Při počítání průměrné úrodnosti p se prvním rokem získalo z jednoho metrického centu p metrických centů, z nich pak p^2 metrických centů a z nich p^3 metrických centů. Porovnáním obou hodnot dostaneme průměrnou hodnotu

$$p = \sqrt[3]{25 \cdot 30 \cdot 36} = 30,$$

a nikoli $(25 + 30 + 36)/3 = 30{,}333\ldots$.

Úloha 8. Určete délku p strany dvou průměrných čtverců, které mají dohromady stejný obsah jako čtverce o délkách stran $a = 10$ cm a $b = 70$ cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o čtvercových polích.)

Řešení. Má platit

$$2p^2 = a^2 + b^2,$$

$$p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2 + 70^2}{2}}\ \text{cm} = 50\ \text{cm}.$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$Q(a, b) = p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

což je *kvadratický průměr* čísel a, b. Označili jsme ho $Q(a, b)$.

Úloha 9. Určete délku p hrany šesti průměrných krychlí, které zaberou stejný objem jako krychle o délkách hran $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $c = 60$ cm, $d = 60$ cm, $e = 70$ cm a $f = 80$ cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o krychlových nádobách nebo kopání jam, kde každý den vykopeme jednu jámu a ptáme se na průměrnou jámu.)

Řešení. Má platit

$$6p^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3,$$

$$\begin{aligned} p &= \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3}{6}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{10^3 + 20^3 + 60^3 + 60^3 + 70^3 + 80^3}{6}}\ \text{cm} = 60\ \text{cm}. \end{aligned}$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$C(a, b, c, d, e, f) = p = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3}{6}},$$

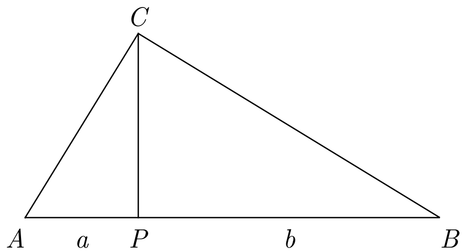
což je *kubický průměr* čísel a, b, c, d, e, f. Označili jsme ho $C(a, b, c, d, e, f)$.

Úloha 10. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky $p = \sqrt{6}$.

Řešení. Můžeme psát

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{1 \cdot 6} = \sqrt{4 \cdot 1{,}5} = \cdots ,$$

což znamená, že číslo $\sqrt{6}$ je geometrickým průměrem čísel 2 a 3, nebo 1 a 6, nebo 4 a 1,5 atd. Na sestrojení této úsečky pomocí dvou zadaných úseček nám může posloužit např. Euklidova věta o výšce. Její odvození je jednoduché i pro žáky základní školy. Na obrázku je pravoúhlý trojúhelník ABC svojí výškou CP rozdělen na dva podobné trojúhelníky ACP a CBP, pro něž platí $p/a = b/p$, neboli $p = \sqrt{ab}$. Sestojíme tedy úsečku délky $a + b$ a nad ní jako nad průměrem Thaletovu kružnici. V bodě P vztyčená kolmice protne kružnici v bodě C, čímž získáme úsečku délky p. Na obrázku je $a = 1{,}5$ cm, $b = 4$ cm.



Úloha 11. Vážíme maso na nerovnoramenných vahách. Nejprve ho položíme na levou misku vah a vyvážíme závažím $a = 2,25$ kg. Pak ho položíme na pravou misku vah a vyvážíme závažím $b = 1,44$ kg. Kolik váží maso skutečně, tj. jaká je průměrná hmotnost masa vypočtená z navážených hmotností?

Řešení. K řešení využijeme rovnováhy na dvojzvratné páce. Má-li levé rameno vah délku u a pravé rameno délku v a skutečná (průměrná) hmotnost masa je p kg, můžeme psát:

$$pu = 2{,}25v$$

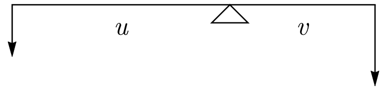
$$pv = 1{,}44u$$

Vynásobením obou rovnic a následnou úpravou dostaneme

$$p^2uv = 2{,}25 \cdot 1{,}44uv,$$

$$p = \sqrt{2{,}25 \cdot 1{,}44} = 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}8.$$

Skutečná hmotnost masa je 1,8 kg. Počítáme-li to pomocí aritmetického průměru, tak si myslíme, že jsme koupili 1,845 kg masa, což je pouhý psychologický moment.



Úloha 12. Odvoďte vzorec pro střední kvadratickou rychlost molekul plynu.

Řešení. Označme n počet molekul plynu v uvažovaném souboru, m hmotnost jedné molekuly plynu, v_1, v_2, …, v_n skutečné rychlosti jednotlivých molekul, v průměrnou rychlost všech těchto molekul. Pro skutečné a průměrnou kinetickou energii molekul souboru platí

$$n \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}mv_n^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}{n}},$$

což je kvadratický průměr rychlostí jednotlivých molekul.

3 Vztahy mezi průměry

Mezi uvedenými, ale i mezi dalšími, zde neuvedenými, průměry platí celá řada vztahů. Nejčastější z nich jsou nerovnosti mezi nimi. A z nich je asi nejznámější tzv. AG-nerovnost, která má pro libovolné kladné hodnoty a, b tvar:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Analogicky platí další nerovnosti pro dvě kladné hodnoty a, b:

$$\min(a,b) \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq Q(a,b) \leq C(a,b) \leq \max(a,b)$$

$$\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \max(a,b)$$

Rovnost v těchto nerovnostech nastane, právě když se průměrované hodnoty rovnají. Zde jsou uvedeny vztahy mezi průměry, když se průměrují jen dvě hodnoty. Analogicky to ale platí, i když se průměruje libovolný počet hodnot [1].

4 Jak vypočítat průměrnou známku z předmětu

Dostáváme se k zajímavé otázce, a sice jak bychom měli správně vypočítat výslednou známku z předmětu z několika daných známek. Viděli jsme, že máme větší množství možností, jak to udělat. Který průměr si tedy máme zvolit? Zkusme nejprve spočítat průměrnou známku ze dvou známek pomocí různých průměrů. Řekněme, že žák dostal dvě známky, a sice 1 a 5. V tom případě jsou hodnoty průměrů:

$$H(1,5) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 5}{1+5} \doteq 1{,}667$$

$$G(1,5) = \sqrt{1 \cdot 5} \doteq 2{,}236$$

$$A(1,5) = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$Q(1,5) = \sqrt{\frac{1^2+5^2}{2}} \doteq 3{,}606$$

$$C(1,5) = \sqrt[3]{\frac{1^3+5^3}{2}} \doteq 3{,}979$$

Vypočtené hodnoty potvrzují výše uvedené nerovnosti. Důležité je uvědomit si, že průměrná hodnota musí ležet mezi čísly 1 a 5, nemusí však být uprostřed. Hlavně však je vidět, že by žák mohl dostat jakoukoli známku od 1 do 5. Tady nás určitě napadne otázka, jaký výpočet bychom měli používat, která z vypočtených hodnot představuje tu správnou známku. Dvě zcela odlišné známky je krajní případ, který asi nenastane, vypočtěme tedy průměry známek pro reálnější případ, a to pro skupinu známek 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5:

$$\begin{aligned} H(2,2,2,2,3,3,3,4,5) &\doteq 2{,}647 \\ G(2,2,2,2,3,3,3,4,5) &\doteq 2{,}806 \\ A(2,2,2,2,3,3,3,4,5) &= 3 \\ Q(2,2,2,2,3,3,3,4,5) &\doteq 3{,}180 \end{aligned}$$

Při větším počtu známek a jejich rovnoměrnějším rozdělení už rozdíly nejsou tak veliké, takže je téměř jedno, podle jakého průměru známku počítáme, přesto tu rozdíly jsou a mohou ovlivnit výslednou známku z předmětu.

I přes tento víceméně pozitivní závěr z výpočtů různých průměrů se přiznám, že nevím, proč se nejčastěji počítá známka jako aritmetický průměr obdržených známek. Dovedu si představit, že si známku znázorním v zápisníku jako čtvereček o straně délky, která je rovna obdržené známce. Na závěr si pak udělám čtverec, který má obsah stejný jako součet obsahů všech dílčích čtverečků, čímž vlastně použiji kvadratický průměr. Též si umím představit, že známka bude představovat počet hodin, za které žák stihne udělat celkovou práci. Pak je to převedeno na harmonický průměr. Jediný důvod užívání aritmetického průměru je dle mého snad v jeho jednoduchém výpočtu.

Literatura

[1] H. J. Bartsch, *Matematické vzorce*, Mladá fronta, Praha, 2002.

doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.
Pedagogická fakulta UK
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

TUHÉ A TEKUTÉ: MOŽNOSTI A MEZE MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ V MECHANICE KONTINUA

Vít Průša

1 Úvod

Podivuhodný vztah matematiky a reálného světa dobře vystihuje následující historka převzatá z [5].

Po letech se na srazu absolventů střední školy setkají dva spolužáci a baví se o práci. Jeden z nich je statistikem a v průběhu rozhovoru ukáže spolužákovi, který nemá o matematice ani ponětí, svůj nejnovější článek o statistických charakteristikách populace. Článek, jak už to ve statistice bývá, začíná vzorcem pro Gaussovo rozdělení, a statistik začne spolužákovi vysvětlovat význam jednotlivých termínů jako je průměr a podobně. Spolužák si není příliš jistý, že si z něj statistik neutahuje a tak se ho zeptá, co znamená písmenko π v textu. „Tak to je π," řekne statistik, „souvisí to s poměrem poloměru kruhu k jeho obvodu." A spolužák má náhle jasno. „Tak teď už přeháníš, ne? Co má poloměr kruhu společného s charakteristikami populace?"

To je zajímavé pozorování, které lze v podstatě použít ke zformulování odpovědi na otázku, co je to matematika. V tomto smyslu je matematika nástroj na hledání a popis podobností mezi různými systémy. (V citovaném příběhu jde spíše o využitelnost jednoho matematického nástroje v mnoha zcela odlišných situacích, nikoliv o podobnost populace a kruhu.) V kontextu matematického modelování v mechanice kontinua, které je předmětem tohoto krátkého pojednání, lze s nadsázkou říci, že matematika umožňuje zkoumat chování jednoho fyzikálního systému – proudění tekutin – pomocí zcela odlišného fyzikálního systému, a sice PN přechodu v polovodičích. PN přechod je totiž přesně to, co je „uvnitř" polovodičových součástek v počítači.

2 Mechanika kontinua

Je zjevné, že mezi oběma fyzikálními problémy – proudění tekutin a fyzikální děje uvnitř polovodičových součástek – je obrovská propast a není úplně zřejmé, jakým způsobem ji překonat. Pojďme se tedy seznámit s tím, jak si s takovýmto úkolem poradit. Prvním krokem je matematické uchopení problému proudění tekutin. To je možné provést několika způsoby. Uvažujeme-li například plyn, můžeme se pokusit modelovat ho jako velké množství kuliček (atomů), které do sebe narážejí a řídí se přitom zákony newtonovské fyziky. Můžeme ale také zvážit popis plynu jako souboru částic, který se řídí zákony kvantové mechaniky. Nebo je možné plyn chápat jako spojitě rozprostřenou látku, kontinuum, pro kterou je důležité stanovit rychlost, tlak a teplotu v každém bodě oblasti, kterou plyn při proudění vyplňuje.

Posledně jmenovaný přístup nazýváme *fenomenologickým přístupem*, a to proto, že tento přístup si neklade za cíl vysvětlit, *jak přesně vypadá plyn při mikroskopickém pohledu*, ale cílem je pouze popsat, *jak se plyn chová, je-li vystaven nějakému makroskopickému působení*, tedy kupříkladu stlačování, ohřívání a podobně. Pro popis tohoto chování používá výhradně makroskopických veličin jako je tlak, teplota, rychlost a další, a odhlíží od mikroskopické interpretace těchto veličin. Tlak plynu lze samozřejmě vysvětlit jako nárazy atomů či molekul plynu do stěny nádoby, tedy jako nějaký makroskopický projev mikroskopického chování částic, ale není to bezpodmínečně nutné. V mnoha případech stačí pouze vědět, jaká je například souvislost mezi tlakem a teplotou, tedy dvěma makroskopickými veličinami přístupnými jednoduchému měření.

Fenomenologický přístup je výhodný v řadě prakticky zajímavých oblastech, kupříkladu při zkoumání proudění vzduchu okolo trupu a křídel letadel. Je ovšem důležité uvědomit si, že v jiných případech, například pro velmi řídké plyny, bude nejspíše lepší popsat plyn například metodami molekulové fyziky.

3 Matematické problémy v mechanice kontinua

Pokud se rozhodneme využít přístupu založeného na představě spojitého prostředí, je matematická formulace modelu poměrně jednoduchá, v podstatě stačí upravit Newtonovy pohybové zákony, zejména zákon síly $\vec{F} = m\vec{a}$, tak, aby byly použitelné pro popis spojitě rozprostřené hmoty. Zbývá však učinit jeden důležitý krok, a sice popsat jaký je vztah mezi napětím (rozložením sil) v materiálu a jeho deformací. Takovýto vztah nazýváme konstitutivní rovnicí a představuje popis vlastností materiálu. Je to stejná úloha jako určit, co je nutné dosadit do Newtonových rovnic jako $\vec{F}$, pokud chceme kupříkladu řešit pohyb planet. V případě pohybu planet vyjadřujeme sílu jako funkci vzdálenosti a hmotnosti, v mechanice kontinua může rozložení sil záviset na teplotě, hustotě materiálu, deformaci a podobně. Příkladem takovéhoto vztahu je patřičně zobecněný Hookeův zákon nebo stavová rovnice pro ideální plyn. Této navýsost zajímavé otázce se však nebudeme věnovat, podrobněji je o ní na populární úrovni pojednáno například v [1].

Výsledný matematický model je následně povětšinou zformulován jako poměrně rozsáhlý systém parciálních diferenciálních rovnic, jehož konkrétní podoba není v tuto chvíli důležitá. Nastíníme si pouze, jaké matematické otázky s tímto systémem rovnic souvisí, a využijeme k tomu jednoduchou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Mysleme si, že koeficienty v kvadratické rovnici jsou reálná čísla a ptejme se, pro jaké hodnoty a, b a c existuje řešení dané rovnice. To je otázka velice ošemetná, protože odpověď se může lišit v závislosti na tom, co chápeme jako řešení. Pokud trváme na tom, že řešením musí být reálné číslo, je zjevné, že existují takové kombinace koeficientů, kdy rovnice nemá řešení.

Pokud naopak připustíme „zobecněné řešení“, to jest budeme řešení hledat v oboru komplexních čísel, pak takovéto řešení najdeme vždy. V případě parciálních diferenciálních rovnic se tato situace do jisté míry opakuje. Můžeme se kupříkladu ptát, zda připustíme jako řešení nějakého problému nespojité funkce, tedy funkce, které nemají derivaci v klasickém smyslu. Je nasnadě, že z fyzikálního pohledu takovéto nespojité řešení potřebujeme, pokud chceme popsat například rázové vlny nebo lom materiálů. Na druhou stranu to znamená, že bude nutné vymyslet způsob, jak zobecnit pojem derivace pro nespojité funkce. Moderní matematika si naštěstí s takovýmito problémy umí poradit.

Pozoruhodné je, že o řešení rovnic můžeme získat mnoho informací, *aniž bychom rovnice přímo vyřešili*, tedy aniž bychom našli vzorec pro řešení dané rovnice. V případě kvadratické rovnice rozhoduje o existenci řešení diskriminant, což je nějaká kombinace koeficientů rovnice. Otázka existence řešení tedy v podstatě není zodpovězena tak, že najdeme návod na sestrojení řešení, ale pouze tak, že zformulujeme jednoduché kritérium pro jeho existenci. Stejně tak lze z rovnice mnoho vyčíst o kvalitativních vlastnostech řešení a to opět aniž bychom řešení přímo spočetli. Víme kupříkladu, jakou hodnotu bude mít součin obou kořenů a součet obou kořenů, vzpomeňme si na Viètovy vzorce.

Soustavy parciálních diferenciálních rovnic lze zkoumat stejným způsobem, kromě existence a kvalitativních vlastností řešení je však nadmíru důležitá i otázka *jednoznačnosti řešení*. Ponechme na okamžik stranou matematické otázky a podívejme se, pro pobavení, na problém jednoznačnosti řešení očima filozofie.

Pierre Simon de Laplace (1749–1827) v devatenáctém století vyvolal, v rámci myšlenkového pokusu, k životu obludu zvanou na jeho počest Laplaceův démon, viz [2], které přisoudil schopnost řešit přesně rovnice klasické fyziky. Pokud by démon znal stav vesmíru v daném čase (to jest polohy a hybnosti všech částic), mohl by si řešením Newtonových rovnic spočíst stav vesmíru v libovolně vzdálené budoucnosti či minulosti. Z toho mimo jiné plyne, že lidé nedisponují svobodnou vůlí, to jest nemohou se rozhodnout, co učiní, vše je určeno řešením Newtonových rovnic a stavem vesmíru v nějakém minulém čase.

Obvykle se v populárních textech mluví o tom, že démon není schopen výpočet provést, protože v principu nelze současně přesně změřit polohu a hybnost částic (Heisenbergův princip neurčitosti v kvantové mechanice). To znamená, že démon nemá a nikdy nebude mít k dispozici vstupní data pro výpočet a vlastně nám tak, díky kvantové mechanice, zbývá prostor pro svobodnou vůli. I bez kvantové mechaniky však máme k dispozici nástroj pro vymítání Laplaceova démona, a sice otázku *jednoznačnosti* řešení. Zdůrazněme, že i deterministický systém – v tom smyslu, že řešení je popsáno danými rovnicemi přesně bez jakékoliv statistické interpretace – totiž může mít více řešení, rovnice mohou předpovědět „mnoho“ různých budoucích stavů vesmíru. Zkoumání problému jednoznačnosti řešení tedy můžeme, pokud toužíme po obskurních interpretacích, chápat jako průzkum schopností Laplaceova démona.

Dalším z řady matematických problémů je otázka jak řešení, o kterém víme, že existuje, spočíst. Systém rovnic popisujících chování nějakého materiálu je natolik složitý, že nelze doufat v to, že pro řešení dokážeme odvodit nějaký explicitní vzorec. Jak se tedy k řešení můžeme dopracovat? Protože se zabýváme spojitým prostředím, je řešením problému nějaká funkce polohy a času. To ovšem znamená, že potřebujeme znát hodnotu dané hledané funkce (například tlaku) v nekonečně mnoha bodech, což je pravděpodobně nesplnitelný sen. Namísto toho se můžeme pokusit najít hodnoty funkce v několika málo bodech a pokud potřebujeme znát hodnoty řešení mimo tyto body, spočteme je prostou interpolací ze známých hodnot v blízkých bodech, ve kterých řešení známe. Namísto hledání přesného řešení se tedy zaměříme na hledání *přibližného* řešení.

To je naprosto ospravedlnitelný přístup i z ryze praktického hlediska. Pokud se zajímáme, dejme tomu, o průhyb nosníku při nějakém zatížení, lze si představit, že se v běžných situacích spokojíme s výsledkem, který je přesný na milimetry. Počítat s vyšší přesností je veskrze zbytečné. Zde opět vstupuje do hry matematika, která nám umožní určit, nakolik je přibližné řešení vzdáleno od přesného řešení, aneb jakou jsme do výpočtu zanesli chybu. Pojďme se opět podívat, jak by celý problém vypadal v případě kvadratické rovnice.

Zde si můžeme představit, že parabolu $ax^2 + bx + c$ nahradíme po částech lineární funkcí, která bude spojovat body $[x_i, ax_i^2 + bx_i + c]$, kde $i = 1, \dots, N$ a N je nějaké dostatečně velké číslo. A následně budeme namísto řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ hledat odpověď na otázku, kde se úsečky spojující body $[x_i, ax_i^2 + bx_i + c]$ protnou s osou $y = 0$. Není těžké uvědomit si, že pokud body x_i zvolíme špatně, tak žádná z úseček spojujících body $[x_i, ax_i^2 + bx_i + c]$ nemusí protnout horizontální osu a *to i v případě, že rovnice* $ax^2 + bx + c = 0$ *má řešení.*

Můžeme se tedy ptát, jak velké musí být N a jak musíme rozmístit body x_i, abychom, pokud má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ řešení, také dostali, v našem zjednodušeném případě, nějaké řešení. Uvedený příklad ukazuje, že otázka existence přibližného řešení zjevně bude přinejmenším stejně komplikovaná, jako otázka existence přesného řešení. A to jsme ani nediskutovali otázku, jak daleko bude toto řešení od přesného řešení. Moderní matematika umí, v mnoha případech, najít cesty, jak podobný problém řešit i pro soustavy nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Je však nutné přiznat, že existuje také mnoho aplikačně zajímavých parciálních diferenciálních rovnic, pro které zmíněná otázka není vůbec zodpovězena – právě na tyto rovnice se soustředí matematický výzkum.

Problémům s výpočtem řešení však není konec. Ve výše uvedeném případě jsme nějaký nelineární problém (řešení kvadratické rovnice) převedli na řešení lineárních problémů (průsečík úsečky s horizontální osou). To lze v principu udělat i pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic. Otázkou zůstává, jak řešit soustavy lineárních algebraických rovnic, což je problém, kterému budeme čelit, pokud se rozhodneme uplatnit cosi jako výše diskutovaný postup.

Naivní odpověď by mohla být, že soustavu lineárních rovnic „vyřešíme na počítači", a že to přeci není problém hodný matematika. Opak je pravdou. Soustavy lineárních rovnic, které takto dostaneme, mohou být obrovské, bez problémů mohou čítat milióny neznámých, a představa, že takovéto systémy lze přímočaře vyřešit Gaussovou eliminací, je zcela zcestná. (Počítače mimo jiné nepracují s reálnými čísly, pracují s konečným desetinným rozvojem, což znamená, že jsou náchylné k zaokrouhlovacím chybám, které mohou být pro takovýto výpočet smrtící.) A opět přišel čas na matematiku, která nabízí nástroje, jak se s tímto problémem vypořádat. Zásadní otázkou je, stejně jako výše, jaké chyby se na této úrovni dopustíme a nakolik nás tato chyba vzdálí od přesného řešení našeho původního matematického modelu.

4 Závěr

Z uvedeného je zřejmé, že důkladné uchopení celého řetězce matematického modelování – od návrhu modelu po numerické výpočty – vyžaduje zvládnutí mnoha matematických technik a zároveň hluboké znalosti fyziky. (Fyzikální aspekty modelování jsme v tomto pojednání zcela opomenuli. Jen podotýkáme, že základním nástrojem je nerovnovážná termodynamika – pro populární seznámení se s tímto oborem lze sáhnout například po knize [3].) Přes náročnost celého procesu však dnes existují fyzikální systémy, u kterých jsou zmíněné otázky dobře, ale nikoliv dokonale, zodpovězeny. Existují tak alespoň nějaké teoreticky důkladně podložené argumenty, na základě kterých lze usoudit, že barevné obrázky získané v numerických simulacích mají nějaký dobře definovaný vztah k fyzikální realitě. Pro vizuální představu o problémech, které je možné zvládnout alespoň na úrovni formulace modelu, stačí navštívit kupříkladu stránky projektu [4].

V jiných případech však odpovědi schází a jen samotné sestavení rozumných matematických modelů představuje velkou výzvu, jak pro matematiku, tak pro fyziku. Těmito problémy se ve světě zabývá mnoho skupin a jednou z nich je oddělení matematického modelování na Matematickém ústavu Univerzity Karlovy. Pokud chcete, ve smyslu historky citované v úvodu textu, vědět, kde všude v reálném světě ještě dokáže matematika skrýt π, a nebo byste chtěli vědět více o zmíněných otázkách, rádi si s vámi promluvíme. (Kontakt je uveden níže.)

Literatura

[1] J. Málek, V. Průša, *Nejdéle trvající vědecký experiment*, Vesmír, 91, 502–504, 2012.

[2] P. S. de Laplace, *Essai Philosophique sur les Probabilités*, Courcier, Paris, 1820.

[3] I. Prigogine, I. Stenghers, *Řád z chaosu. Nový dialog člověka s přírodou*, Mladá fronta, Praha, 2001.

[4] http://www.sph-flow.com/

[5] E. P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Commun. Pure Appl. Math, 13(1):1–14, 1960.

Mgr. Vít Průša, Ph.D.
Matematický ústav Univerzity Karlovy
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
prusv@karlin.mff.cuni.cz

VOLEBNÍ MATEMATIKA

Antonín Slavík

Představme si situaci, kdy ve volbách soupeří jistý počet kandidátů. Z voleb by měl vzejít jediný vítěz, pokud ovšem souboj neskončí remízou (v takovém případě je potřeba stanovit vítěze nějakým jiným způsobem, např. losem). Může se jednat o volbu prezidenta, senátora, papeže apod. Budeme se zabývat otázkou, jaký volební systém použít, aby výsledek voleb co nejlépe odrážel přání voličů. Poznamenejme, že za výsledek voleb obvykle považujeme stanovení celkového pořadí všech kandidátů, v některých případech se ale můžeme spokojit jen s nalezením vítěze.

I když budeme hovořit o volbách, uvědomme si, že stejný problém je potřeba řešit i v jiných situacích. Např. při hodnocení sportovců v disciplínách jako je krasobruslení nebo skoky do vody hodnotí porotci jednotlivé závodníky a na základě těchto dílčích hodnocení je pak potřeba sestavit celkové pořadí závodníků. Také při různých degustačních soutěžích je potřeba navrhnout způsob, jak ze známek přidělených jednotlivými degustátory sestavit výsledné pořadí ochutnávaných vzorků.

Volební matematikou se zabývá celá řada knih a časopiseckých článků. Jako úvod dobře poslouží např. velmi čtivě napsaná kniha [1], kde se čtenář dozví i mnoho zajímavých informací z historie. Další zdroje jsou k dispozici na internetu, viz např. [2] nebo anglickou verzi Wikipedie.

1 Příklady volebních systémů

Začneme stručným přehledem některých jednoduchých a v praxi používaných volebních systémů. V dalším textu předpokládáme, že ve volbách soupeří celkem n kandidátů.

- *Jednokolový většinový systém.* Každý volič hlasuje pro jednoho kandidáta, vítězem se stane kandidát s největším počtem získaných hlasů.
- *Dvoukolový většinový systém.* Každý volič hlasuje pro jednoho kandidáta. Získá-li někdo nadpoloviční většinu hlasů, je prohlášen za vítěze. V opačném případě se koná druhé kolo, ve kterém se rozhodne mezi dvěma nejúspěšnějšími kandidáty.
- *Bordův volební systém.* Každý volič seřadí kandidáty podle svých preferencí a přiřadí jim n bodů, $n-1$ bodů, ..., 1 bod. Vítězem se stane kandidát s největším počtem získaných bodů. Systém je pojmenován podle francouzského vědce Jeana Charlese de Bordy (1733–1799), byl však znám již dříve (je zmiňován např. v práci Mikuláše Kusánského De Concordantia Catholica z roku 1433).
- *Systém „každý s každým“.* Každá dvojice kandidátů se utká ve vzájemném souboji. Vítěz každého dílčího souboje získá bod, při remíze

oba soupeři půl bodu. Celkovým vítězem se stane kandidát s největším počtem bodů. Tento systém zmiňuje např. filozof Ramon Llull v díle Blanquerna (kolem 1283).
Celkový počet vzájemných soubojů je $\binom{n}{2}$. Aby volby netrvaly příliš dlouho, může se postupovat tak, že každý volič na hlasovacím lístku seřadí všechny kandidáty podle svých preferencí. Takové pořadí pak jednoznačně určuje výsledky dílčích soubojů (jestliže a voličů preferuje kandidáta A před kandidátem B, b voličů preferuje B před A, pak vítěze dílčího souboje mezi A, B získáme porovnáním čísel a, b).

Poznamenejme, že existuje řada dalších volebních systémů založených na vzájemných soubojích všech dvojic kandidátů. Porazí-li některý kandidát v těchto dílčích soubojích všechny své soupeře, pak je přirozené prohlásit jej za vítěze voleb; v této situaci používáme termín *Condorcetův vítěz*. Jednotlivé volební systémy předepisují různá pravidla pro případ, že Condorcetův vítěz neexistuje. Např. markýz de Condorcet (1743–1794), francouzský filozof a matematik, doporučoval odhlédnout od výsledku souboje, kde měl vítěz nejmenší převahu hlasů.

Ukažme si některé konkrétní příklady.

Příklad 1. Předpokládejme, že voleb se účastní tři kandidáti A, B, C. Preference voličů jsou popsány následující tabulkou:

8 voličů	C > A > B
7 voličů	B > A > C
6 voličů	A > B > C

Např. první řádek této tabulky znamená, že 8 voličů preferuje C před A a dále A před B. Není obtížné si rozmyslet následující skutečnosti:

- V jednokolovém většinovém systému zvítězí C.
- Ve dvoukolovém většinovém systému postoupí do druhého kola B a C, zvítězí B.
- V Bordově systému zvítězí A se ziskem $2 \times 8 + 2 \times 7 + 3 \times 6 = 48$ bodů, druhý je B s $1 \times 8 + 3 \times 7 + 2 \times 6 = 41$ body, poslední skončí C s $3 \times 8 + 1 \times 7 + 1 \times 6 = 37$ body.
- V systému „každý s každým“ vyhraje A (je to Condorcetův vítěz), na posledním místě skončí C.

Vidíme, že ve většinových systémech zvítězili jiní kandidáti, než při použití zbývajících dvou systémů. V jednokolovém většinovém systému dokonce vyhraje C, tedy kandidát, který by ve vzájemných soubojích zvítězil nejméněkrát. Čtenář by se měl v tomto okamžiku zamyslet, který výsledek mu připadá spravedlivý.

Následující příklad ukazuje, že vítěz v Bordově systému se nemusí vždy shodovat s vítězem v systému „každý s každým“.

Příklad 2. Voleb se opět účastní tři kandidáti A, B, C, přičemž preference voličů jsou následující:

30 voličů	C > A > B
1 volič	C > B > A
10 voličů	B > C > A
29 voličů	A > C > B
10 voličů	A > B > C
1 volič	B > A > C

Snadným výpočtem zjistíme, že v Bordově systému by vyhrál A se 190 body, poté by následoval C se 182 body a B se 114 body. Dále si povšimněme, že 41 voličů (tj. nadpoloviční většina) preferuje C před A a jen 40 voličů preferuje A před C. V systému „každý s každým" by zvítězil C, je to dokonce Condorcetův vítěz. Rozhodnutí, který výsledek je spravedlivější, ponecháme opět na čtenáři.

Zmíníme ještě stručně některé další paradoxní situace, ke kterým může ve volbách dojít. (Čtenář nechť si samostatně promyslí, kterých volebních systémů se tvrzení týkají.)

- Vítěz voleb nemusí být u žádného voliče na prvním místě.
- Účast outsidera (kandidáta, který je u většiny voličů na posledním místě) může změnit volební výsledek.
- Volební systém může být náchylný k manipulaci: Jestliže volič nehlasuje podle svých skutečných preferencí, může tím za jistých okolností dosáhnout lepšího výsledku.

Náchylnost volebních systémů k manipulaci představuje dobře známý jev: Jestliže např. volič na základě předvolebních průzkumů ví, že jeho favorit nemá šanci zvítězit, může raději hlasovat pro jiného kandidáta, který má naději uspět. K tomuto fenoménu se ještě později vrátíme.

Následující příklad je znám pod názvem *Condorcetův paradox.*

Příklad 3. Uvažujme tři voliče s následujícími preferencemi:

1. volič	A > B > C
2. volič	B > C > A
3. volič	C > A > B

Všimněme si, že většina voličů upřednostňuje A před B, B před C, C před A. Tento příklad tedy ukazuje, že relace „většina upřednostňuje" nemusí být tranzitivní. Při použití libovolného z našich čtyř systémů skončí volby remízou. Bude-li následně kterýkoliv kandidát prohlášen za vítěze (např. po výběru losem), většina voličů bude proti.

2 Neexistence ideálních volebních systémů

Paradoxní situace z předchozí části přirozeně vedou k otázce, zda existuje volební systém, který by podobnými nedostatky netrpěl. Tímto problémem se zabývali i matematikové a postupem času dospěli ke zjištění, že žádný volební není vůči paradoxům zcela imunní. První výsledek tohoto typu pochází od Kennetha Josepha Arrowa (nar. 1921), nositele Nobelovy ceny za ekonomii za rok 1972.

Ještě než přistoupíme k formulaci Arrowovy věty, pokusme se matematicky popsat, co rozumíme pod pojmem „volební systém“. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ je množina všech kandidátů, kteří se účastní voleb. Preference jednoho voliče můžeme chápat jako ostré lineární uspořádání množiny A (připomeňme, že pojmem ostré uspořádání se rozumí antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace na množině A; linearita znamená, že každé dva prvky A jsou v daném uspořádání porovnatelné). Jestliže připustíme remízy, pak výsledkem voleb bude neostré lineární uspořádání množiny A (neostré uspořádání je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace na množině A). Zaveďme pro jednoduchost následující označení:

- $\mathcal{L}(A)$ = množina všech ostrých lineárních uspořádání množiny A
- $\mathcal{L}^*(A)$ = množina všech neostrých lineárních uspořádání množiny A

Předpokládejme, že voleb se účastní N voličů. Volební systém pak můžeme chápat jako libovolné zobrazení $f : \mathcal{L}(A)^N \to \mathcal{L}^*(A)$.

Arrowova věta. Pro $n > 2$ neexistuje žádný volební systém $f : \mathcal{L}(A)^N \to \mathcal{L}^*(A)$ splňující následující podmínky:

1. Pokud každý volič preferuje a_i před a_j, pak výsledné uspořádání rovněž preferuje a_i před a_j.
2. Volební systém není diktaturou, tj. neexistuje $i \in \{1, \dots, N\}$ tak, aby pro každou N-tici $L_1, \dots, L_N \in \mathcal{L}(A)$ platilo $f(L_1, \dots, L_N) = L_i$.
3. Pokud voliči pozmění své preference, ale zachovají přitom vzájemné uspořádání kandidátů a_i, a_j, pak bude také jejich výsledné uspořádání zachováno. Matematicky můžeme tuto podmínku vyjádřit následovně: Nechť $L_1, \dots, L_N, L'_1, \dots, L'_N \in \mathcal{L}(A)$ a pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí
$$a_i < a_j \text{ v } L_k \iff a_i < a_j \text{ v } L'_k.$$
Pak $a_i \le a_j$ v $f(L_1, \dots, L_N) \iff a_i \le a_j$ v $f(L'_1, \dots, L'_N)$.

Ekvivalentně můžeme větu formulovat tak, že pokud soupeří více než dva kandidáti, pak diktatura je jediný volební systém vyhovující podmínkám 1 a 3. Přitom diktaturou se zde rozumí volební systém, kde výsledek voleb vždy kopíruje preference jistého pevně daného voliče.

Zastavme se ještě u třetí podmínky, která je nejsložitější. V angličtině je známa pod názvem *independence of irrelevant alternatives.* Zhruba řečeno říká, že skutečnost, zda se kandidát A umístí lépe než kandidát B, by měla záviset pouze na tom, kteří voliči preferují A před B, nikoliv na tom, jak hodnotí jakéhokoliv třetího kandidáta.

Příklad 4. Ve volbách soupeří tři kandidáti A, B, C a preference voličů jsou následující:

51 voličů	B > A > C
46 voličů	A > B > C
3 voliči	A > C > B

Při použití Bordova systémů získá A 249 bodů, B 248 bodů, C 103 bodů. Co se stane, jestliže voliči ve třetím řádku tabulky posunou C na třetí místo?

51 voličů	B > A > C
46 voličů	A > B > C
3 voliči	A > B > C

V této situaci získá A 249 bodů, B 251 bodů, C 100 bodů. Vidíme, že změna v hodnocení kandidáta C vedla k tomu, že kandidát B předstihl svého soupeře A. Bordův systém tedy nesplňuje třetí podmínku z Arrowovy věty.

Vidíme, že Arrowova třetí podmínka je dosti silná. Nechceme-li se smířit s diktaturou, nezbývá než na tuto podmínku rezignovat.

V předchozí části jsme zmínili náchylnost volebních systémů k manipulaci. Měli jsme tím na mysli jev, kdy volič nehlasuje podle svých skutečných preferencí a může tím v některých případech docílit lepšího výsledku. V této situaci se hovoří o tzv. taktickém nebo strategickém hlasování. Allan Gibbard a Mark Satterthwaite v této souvislosti dokázali větu o volebních systémech, které nepřipouštějí remízy; jejich tvrzení lze populárně zformulovat tak, že každý rozumný systém nepřipouštějící remízy je nutně náchylný k manipulaci. Gibbardova-Satterthwaiteova věta má spíše teoretický význam – v praxi je obtížné představit si spravedlivý deterministický volební systém, ve kterém nedochází k remízám. Věnujme proto pozornost obecnějšímu tvrzení, jehož autory jsou John Duggan a Thomas Schwartz.

Dugganova-Schwartzova věta je formulována v řeči volebních systémů, které nestanovují výsledné pořadí všech kandidátů, ale místo toho generují pouze vítěze. Přitom připouštíme remízy, proto může být vítězů více. Označíme-li symbolem $\mathcal{P}(A)$ množinu všech neprázdných podmnožin A, pak volební systém je libovolné zobrazení $f : \mathcal{L}(A)^N \to \mathcal{P}(A)$ (kde N je opět počet voličů).

Dugganova-Schwartzova věta. Pro $n > 2$ neexistuje žádný volební systém $f : \mathcal{L}(A)^N \to \mathcal{P}(A)$ splňující následující podmínky:

1. Pro každého kandidáta a_i existují preference $L_1, \dots, L_N \in \mathcal{L}(A)$ takové, že $f(L_1, \dots, L_N) = \{a_i\}$.
2. Volební systém není diktaturou; přesněji, neexistuje $i \in \{1, \dots, N\}$ tak, aby pro každou N-tici $L_1, \dots, L_N \in \mathcal{L}(A)$ platilo $\max L_i \in$

$f(L_1, \dots, L_N)$. (Jinak řečeno, i-tý volič je diktátor, pokud jeho nejlépe hodnocený kandidát je vždy mezi vítězi.)

3. Volební systém není náchylný k manipulaci: Pokud volič nehlasuje podle svých skutečných preferencí, nemůže tím v žádném případě dosáhnout pro něj příznivějšího výsledku.

Povšimněme si, že definice diktatury ve druhé podmínce se liší od způsobu, jak byla diktatura chápána v Arrowově větě. To je zcela přirozené, neboť hodnotami funkce f v Arrowově větě byla uspořádání, zatímco v Dugganově-Schwartzově větě jsou to množiny kandidátů.

Také třetí podmínka vyžaduje další komentář; je potřeba přesně definovat význam toho, že jeden výsledek je pro voliče příznivější než jiný. Situace je jasná, pokud mají volby v obou v případech jediného vítěze, komplikace však nastávají v případě remízy. Uvažujme např. voliče s preferencemi

$$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C} > \mathrm{D}.$$

Bez dalších informací nejsme schopni rozhodnout, zda je z pohledu tohoto voliče příznivější volba s výsledkem $\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\}$, nebo $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}$. V kontextu Dugganovy-Schwartzovy věty se proto zavádějí pojmy *optimistický volič* a *pesimistický volič*:

- Optimistický volič doufá, že pokud dojde k remíze a bude potřeba rozhodnout losem, pak vyhraje pro něj nejvhodnější kandidát. Tento volič se snaží maximalizovat hodnotu $\max f(L_1, \dots, L_N)$.
- Pesimistický volič v případě remízy počítá s nejhorší variantou, tj. že bude vylosován pro něj nejméně vhodný kandidát. Tento volič se snaží maximalizovat hodnotu $\min f(L_1, \dots, L_N)$.

Vrátíme-li se k výše uvedenému příkladu, pak pro optimistického voliče je výsledek $\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\}$ příznivější než $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}$, neboť

$$\max\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\} = \mathrm{A} > \mathrm{B} = \max\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}.$$

Naopak pro pesimistického voliče je $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ příznivější než $\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\}$, neboť

$$\min\{\mathrm{A}, \mathrm{D}\} = \mathrm{D} < \mathrm{C} = \min\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}.$$

Dugganova-Schwartzova věta platí jak v případě, kdy jsou všichni voliči optimističtí, tak v situaci, kdy jsou všichni voliči pesimističtí. Její tvrzení můžeme stručně shrnout tak, že pro více než dva kandidáty jsou všechny systémy s výjimkou diktatury náchylné k manipulaci. Zájemce o další podrobnosti odkazujeme na pěkný článek [3], kde lze najít důkaz věty a další zajímavé souvislosti.

3 Závěr

Po přečtení předchozí části by čtenář mohl nabýt dojmu, že situace je bezvýchodná a hledání lepších volebních systémů postrádá smysl. Pokusme se proto naši exkurzi do světa volební matematiky zakončit poněkud optimističtěji. Ve všech volebních systémech, o kterých jsme se doposud zmínili, byly preference jednoho voliče chápány jako lineární uspořádání množiny všech kandidátů. Uvědomme si však, že takové uspořádání ještě nedává úplnou informaci o voličových sympatiích či antipatiích. Zatímco pro jednoho voliče může být kandidát na prvním místě jasným favoritem, v případě jiného voliče se může jednat pouze o „nejmenší zlo“. Abychom tedy lépe zachytili voličské preference, je třeba místo volebních systémů založených na uspořádání použít systémy založené na známkování. Uveďme alespoň dva příklady:

- *Bodovací systém (range voting).* Každý volič ohodnotí všechny kandidáty jistým počtem bodů z předem stanoveného intervalu (např. 0 až 100 bodů). Vítězem se stane kandidát s největším počtem bodů.

- *Systém majority judgement.* Každý volič slovně ohodnotí všechny kandidáty výběrem jedné z předpsaných možností (např. výborný, chvalitebný, dobrý, přijatelný, nepřijatelný). Vítězem se stane kandidát s nejlepším mediánem známek; v případě shodnosti mediánů u dvou kandidátů se tyto shodné mediány postupně vynechávají.

Na systémy založené na známkování se nevztahuje Arrowova věta, neboť k jejich popisu již nestačí funkce $f : \mathcal{L}(A)^N \to \mathcal{L}^*(A)$. Bodovací systém je náchylný k manipulaci (takticky uvažující volič může dát přijatelnému kandidátovi málo bodů jen proto, aby neohrozil jiného kandidáta). Naproti tomu systém majority judgement je vůči manipulaci částečně odolný; např. voliči, kteří ohodnotili jistého kandidáta horší známkou než byl jeho medián, mohou zhoršit svá hodnocení, aniž by to ovlivnilo volební výsledek (medián se nezmění). Čtenáře s hlubším zájmem o tento typ volebních systémů odkazujeme na práci [4].

Matematická teorie voleb ukazuje, že pokud budeme v praxi i nadále používat jednoduché systémy založené na uspořádání kandidátů, pak musíme nutně počítat s výskytem různých paradoxních situací. Ani ostatní systémy sice nejsou ideální, rozhodně však netrpí tolika nedostatky jako např. většinové systémy. V praxi se již potvrdilo, že není potřeba podceňovat inteligenci voličů a obávat se, že by si se složitějším systémem neporadili.

V tomto příspěvku jsme se věnovali pouze jednomu vybranému problému volební matematiky. Snažili jsme se ukázat, jak může být matematika prospěšná při řešení problémů ze světa kolem nás. Jinou zajímavou úlohou z oblasti voleb je úloha o poměrném zastoupení, která se objevuje např. v parlamentních volbách: Známe-li počet hlasů získaných jednotlivými stranami, jakým způsobem je spravedlivě přepočítat na počty parlamentních křesel? Základní problém je v tom, že v typickém případě při použití přímé úměry každé straně připadne neceločíselný počet mandátů. Podrobnější rozbor úlohy by vydal na další samostatný text, proto čtenáře odkazujeme na knihu [1] a zdroje v ní citované.

Literatura

[1] George G. Szpiro, *Numbers rule. The vexing mathematics of democracy, from Plato to the present.* Princeton University Press, 2010.

[2] *The history of voting.* MacTutor History of Mathematics.
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Voting.html`

[3] Alan D. Taylor, *The Manipulability of Voting Systems.* American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 4 (2002), 321–337.

[4] Michel Balinski, Rida Laraki, *Judge: Don't Vote!*, Cahier du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 2010.

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`

PRAVDĚPODOBNOST A HRY

Jakub Staněk

Je obecně známo, že výuka podávaná formou hry upoutá pozornost studentů více než prostý výklad látky. Tento článek je věnován tomu, jak zavést hru do výuky pravděpodobnosti.

Motivací byla práce studentky Magdalény Tydrichové z gymnázia Jana Palacha v Mělníku s názvem „Strategie hry Mlsný kocour“ (viz [3]), která vznikla pod vedením PaeDr. Dany Hilské. Zároveň pak byla v rámci projektu „Nevšední matematika všedního dne“ vytvořena elektronická verze hry pro interaktivní tabuli, která je využitelná pro výuku. Tuto verzi lze stáhnout z webové stránky `http://www.nmvd.cz/kocour.zip`, náhled lze stáhnout z `http://www.nmvd.cz/kocour.pdf`.

První část se zabývá výše zmíněnou hrou Mlsný kocour, jejími pravidly a rozborem různých herních situací. Druhá část je pak věnována ruletě, konkrétně rozboru jednoho z nejpoužívanějších herních systémů s názvem Martingale.

1 Mlsný kocour

Hra je určena pro 2–4 hráče. Obsahuje 30 myší, a to šest od každé z barev: červená (5 bodů), oranžová (4 body), žlutá (3 body), zelená (2 body) a modrá (1 bod). Dále hra obsahuje čtyři kocouří hlavy, do nichž hráči ukládají své myši, a dvě hrací kostky s barevnými stěnami, přičemž pět barev odpovídá barvám myší a šestá – bílá – představuje žolíka (hráč si může za tuto barvu dosadit libovolnou jinou barvu dle svého uvážení).

Na začátku hry se umístí všechny myši do středu hracího pole a začíná házet první hráč. Tah jednoho hráče probíhá následujícím způsobem:

1. Hráč hodí oběma kostkami, odebere ze středu jednu či dvě myši (dle svého uvážení), které odpovídají barvám padlým na hracích kostkách, a odloží je na stranu.
2. Hráč se rozhodne, zda ukončí kolo a přesune nově získané myši do své kocouří hlavy nebo zda bude dál pokračovat v házení. V dalších hodech si totiž již nemůže vzít myši těch barev, které má aktuálně dané stranou. Toto rozhodnutí činí po každém hodu a odebrání myší.
3. V případě, že hráč nemůže sebrat po hodu žádnou myš (buď mu padly na obou kostkách barvy myší, které má již odložené na straně, nebo již myš příslušné barvy není ve středu hracího pole), přichází o všechny myši získané v rámci tohoto kola, vrací je zpět do středu a ve hře pokračuje následující hráč.

Hra končí, pokud ve středu zůstává méně než 5 myší. Vyhrává hráč z nejvyšším počtem bodů.

Příklad 1: Uvažujme situaci, kdy hráč již v tomto kole získal žlutou (3b), zelenou (2b) a modrou (1b) myš a rozhoduje se, zda má pokračovat ve hře a riskovat tak ztrátu těchto myší či zda má kolo ukončit (viz Obrázek 1 vpravo). Jelikož úkolem každého hráče je získat maximální počet bodů, lze při rozhodování postupovat tak, že si vypočítáme průměrný počet bodů po dalším hodu, srovnáme ho s aktuálním stavem a pak zvolíme tu variantu, která je pro nás v průměru výhodnější.

Pro matematický popis zaveďme následující značení:

- A_i … jev, že na první kostce padla barva i,
- B_j … jev, že na druhé kostce padla barva j,
- $\mathcal{S}$ … množina všech barev, které nám na kostkách mohou padnout,
- $\mathcal{S}_A$ … množina barev, které má hráč již dané stranou,
- $f_{\mathcal{S}_A}(i,j)$ … počet bodů, které hráč získá v případě, že ve stavu $\mathcal{S}_A$ pokračoval ve hře a padly mu barvy i a j.

Střední počet bodů po dalším hodu je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_{1k} &= \sum_{i,j} P(A_i \cap B_j) \cdot f_{\mathcal{S}_A}(i,j) \\ &= \frac{1}{36}(4(6+10) + 4(6+9) + 12(6+5) + (6+8) + 6(6+4)) \doteq 9{,}17, \end{aligned}$$

tedy prostý aritmetický průměr z hodnot zobrazených v Obrázku 1 vpravo. Jelikož $\mathrm{E}X_{1k} \doteq 9{,}17 > 6$, tedy průměrný zisk bodů po dalším kole je větší než počet bodů získaných do tohoto hodu, vyplatí se hráči pokračovat v kole (házení).

Obr. 1: Vlevo studenti hrající elektronickou verzi hry Mlsný kocour na interaktivní tabuli. Vpravo jeden z výstupů „screen“ z interaktivní tabule, který popisuje možný zisk bodů při pokračování hry za stavu popsaném v příkladu 1. Každé políčko popisuje jednu ze 36 možností, jak může následující hod dopadnout, přičemž číslo v daném políčku označuje zisk bodů v dané situaci.

Poznámka: Uvědomme si, že uvedená strategie platí pro situaci, kdy jsou ve středu hracího pole k dispozici alespoň dvě myši od každé barvy. V případě, že se hra blíží ke konci, je třeba do strategie započítat nejen nedostatek myší některé barvy, ale i aktuální stav ostatních hráčů a ne pouze maximalizovat (ve střední hodnotě) svůj počet bodů.

V následujícím příkladě si ukážeme situaci, v níž vzít jen jednu myš je pro hráče výhodnější než vzít obě.

Příklad 2: Nechť hráč již získal dvě myši – žlutou (3b) a zelenou (2b) – a v následujícím hodu mu padla oranžová a modrá barva. Jaká je optimální strategie v této situaci (ve smyslu maximalizace průměrného počtu získaných bodů)?

- Vezme-li hráč obě barvy, pak získá deset bodů. V takové situaci se již nevyplatí pokračovat v kole, protože

$$\mathrm{E}X_{1k} = \frac{1}{36}(4(10+10) + 16(10+5)) \doteq 8{,}89 < 10.$$

- Uloží-li však hráč pouze oranžovou myš, tj. navýší zisk na devět bodů, pak se pokračovat vyplatí, protože

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_{1k} &= \frac{1}{36}(4(9+10) + 12(9+5) + 4(9+6) + 6(9+1) + (9+2)) \\ &\doteq 10{,}42 > 9.\end{aligned}$$

Z předchozích výpočtů vyplývá, že v případě odebrání obou myší získá hráč jen deset bodů, zatímco v případě, že vezme pouze oranžovou myš a pokračuje v házení, získá v průměru 10,42 bodů. Proto je výhodné vzít jen oranžovou myš a pokračovat v kole.

2 Ruleta – herní systém Martingale

Hazardní hry mají pro lidi od nepaměti své kouzlo, a to i přesto, že riziko krachu – který je mnohem častější než výdělek – je dobře známo. Zařadit proto tyto hry do výuky pravděpodobnosti může být velice zábavné i užitečné.

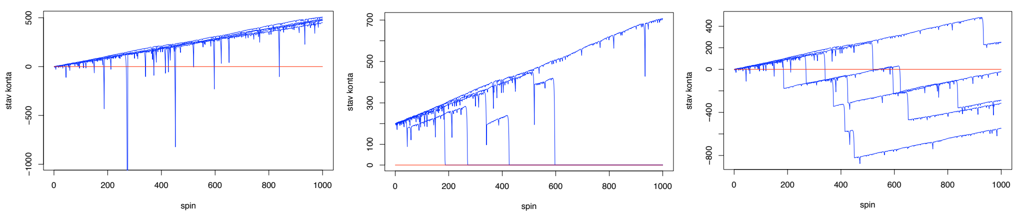
V této kapitole se budeme věnovat jednomu starému a velmi používanému hernímu systému rulety a ukážeme si zrádnost tohoto systému.

John Henry Martindale, po němž byl systém pojmenován a později byl název zkomolen na Martingale, vlastnil v 18. století casino v Londýně a nabádal své zákazníky, aby tuto hru v jeho casinu hojně hráli, kvůli čemuž se údajně dostalo jeho casino do vážných finančních problémů. V Monte Carlu v roce 1891 pak začal jistý Charles Wells hrát tuto hru s částkou 4000 franků a odnesl si z casina přes 1 mil. franků. Z těchto informací se může zdát, že tato hra je pro hráče velice výhodná.

Systém funguje následovně:

- Hráč vsadí jeden žeton na barvu.
- V případě prohry v daném kole hráč zdvojnásobí svou sázku, opět vsadí na barvu a tuto strategii opakuje až do doby, kdy poprvé vyhraje. Výhrou je dvojnásobek vkladu, což znamená, že hráč ukončuje jednu herní sérii se ziskem jednoho žetonu (neboť v případě, že hráč absolvoval n proher před první výhrou, celková částka, kterou vsadil, byla $1+2+4+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$, a jelikož poslední sázka byla 2^n, vyhrál v posledním kole $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, a tedy celkově získal jeden žeton).

Pět různých průběhů her tohoto systému je znázorněno na prvním grafu v Obrázku 2. Na první pohled vše vypadá dobře a hráč skutečně, až na občasné lokální propady, postupně navyšuje svůj kapitál. Zrádnost tohoto systému jsou však právě tyto lokální propady, které mohou hráče jednoduše přivést až ke krachu. Druhý graf v Obrázku 2 ukazuje, jak se průběh hry změní v případě, že hráč není schopen pokrýt libovolný propad. Je zde zobrazena situace, kdy hráč přišel do casina s 200 žetony a více vsadit nemůže. Další záludnost tohoto systému spočívá v tom, že casino obyčejně neumožní hráči vsadit libovolnou částku, ale pouze částku nepřevyšující stanovený limit. Jak se průběh her změní v případě tohoto limitu, je ukázáno v posledním grafu na Obrázku 2.



Obr. 2: Vlevo simulace pěti různých her systému martingale. Uprostřed přidáno omezení, že hráč začal s 200 žetony a nemůže jít se svým kontem do záporných hodnot. Vpravo průběh těchto her v případě, že limit na maximální sázku v casinu je 200 žetonů.

V následující části si ukážeme pár výpočtů.

Nejdříve předvedeme, jak určit střední dobu čekání na k proher v řadě (vycházíme z [1]). Zaveďme si následující značení:

- X_k … počet pokusů potřebných k výskytu k proher za sebou,
- B_{k+1} … jev, že po prvním výskytu k proher za sebou bude následovat další prohra,
- X_k' … počet pokusů, které musíme učinit po $X_{k-1}+1$ pokusech, aby se poprvé vyskytlo k proher v řadě za sebou,
- p … pravděpodobnost prohry $(\frac{19}{37})$.[1]

[1] $\frac{19}{37}$ je pravděpodobnost, že hráči v dalším hodu nepadne jím zvolená barva.

Vidíme, že

$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-1} + 1 && \text{za podmínky jevu } B_k, \\ &= X_{k-1} + 1 + X'_k && \text{za podmínky jevu } B_k^c. \end{aligned}$$

Střední doba čekání na k neúspěchů v řadě je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_k &= \mathrm{E}[X_k|B_k]P(B_k) + \mathrm{E}[X_k|B_k^c]P(B_k^c) \\ &= \mathrm{E}[X_{k-1}+1|B_k]P(B_k) + \mathrm{E}[X_{k-1}+1+X'_k|B_k^c]P(B_k^c). \end{aligned}$$

Z nezávislosti B_k s X_{k-1} a B_k s X'_k plyne

$$\mathrm{E}[X_{k-1}|B_k] = \mathrm{E}X_{k-1} \quad \text{a} \quad \mathrm{E}[X'_k|B_k^c] = \mathrm{E}X_k.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_k &= (\mathrm{E}X_{k-1}+1)p + (\mathrm{E}X_{k-1}+1+\mathrm{E}X_k)(1-p) = \frac{1}{p}(\mathrm{E}X_{k-1}+1) \\ &= \left(\frac{1}{p}\right)^{k-1}\mathrm{E}X_1 + \frac{p^{k-2}-1}{p^{k-2}(p-1)} = \left(\frac{1}{p}\right)^{k-1}\frac{1}{p} + \frac{p^{k-2}-1}{p^{k-2}(p-1)}. \end{aligned}$$

Příklad 3: Předpokládejme, že limit na jednu sázku je 1000 žetonů (tj. hráče by zruinovalo deset proher v řadě, neboť následná sázka by měla být $2^{10} = 1024$). Pak střední doba hry (tj. počet kol do chvíle, než hráč nebude moci zdvojnásobit sázku) je

$$\mathrm{E}X_{10} = \left(\frac{1}{p}\right)^9 \frac{1}{p} + \frac{p^8-1}{p^8(p-1)} = \left(\frac{1}{\frac{19}{37}}\right)^9 \frac{1}{\frac{19}{37}} + \frac{\frac{19}{37}^8 - 1}{\frac{19}{37}^8(\frac{19}{37}-1)} \doteq 1207{,}37.$$

Za tento počet kol hráč – v případě, že nedošlo ke krachu – získá v průměru pouze $1207{,}37 \cdot \frac{18}{37} \doteq 587{,}37$ žetonů.

K výpočtu pravděpodobnosti, že hráče postihne série alespoň k proher v řadě během m herních kol, využijeme teorii markovských řetězců (viz [2]). Stav 1 bude popisovat situaci, kdy hráč v poslední hře vyhrál, popřípadě hru právě začíná, stav $i, i = 2, ..., k+1$, popisuje situaci, kdy hráč po poslední výhře absolvoval sérii $i-1$ proher. Je-li hráč ve stavu $i, i = 1, ..., k$, pak s pravděpodobností p přejde po dalším spinu do stavu $i+1$ a s pravděpodobností $1-p$ do stavu 1. Stav $k+1$ je absorpčním stavem, neboť popisuje situaci, kdy hráč prohrál již k her za sebou a nemá na další sázku.

Z předchozího odstavce vyplývá, že matice pravděpodobností přechodu pro tento řetezec je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-p & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledáme-li pravděpodobnost, že hráče během m her postihla série alespoň k proher, pak vlastně chceme zjistit pravděpodobnost, že se dostaneme ze stavu 1 do stavu $k+1$ po m krocích. Hledáme tedy prvek $p_{1,k+1}^{(m)}$ matice $\mathbf{P}^{(m)}$, tedy matice pravděpodobností přechodu po m krocích, přičemž platí $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$.

Ačkoli získání obecného tvaru matice $\mathbf{P}^{(m)}$ není jednoduché, pro konkrétní volbu konstant k, m a p lze pomocí různých matematických softwarů tuto matici jednoduše spočítat. Například pro $m = 1000$ a $k = 10$ (tj. během tisíce her hráče postihne série alespoň deseti proher) je $p_{1,k+1}^{(m)} = p_{1,11}^{(1000)} \doteq 0{,}62$, neboli pravděpodobnost, že bude hráč potřebovat alespoň $2^{10} - 1 = 1023$ žetonů, aby tuto sérii překonal, je 0,62. Za 1000 kol však hráč v průměru získá přibližně 500 žetonů. Jinými slovy, začíná-li hráč s 1023 žetony, pak pravděpodobnost, že zkrachuje dříve, než zdvojnásobí svůj kapitál, je znatelně větší než $\frac{1}{2}$ (na zdvojnásobení svého kapitálu by totiž hráč potřeboval v průměru asi 2000 kol).

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] Z. Prášková, P. Lachout, *Náhodné procesy I*, Karolinum, Praha, 1998.

[3] M. Tydrichová, *Strategie hry Mlsný kocour*, 2012.

[4] `http://www.ruleta-systemy.com/`

RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`stanek@karlin.mff.cuni.cz`

HAZARDNÍ HRY A VÝUKA PRAVDĚPODOBNOSTI

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Narůstající množství peněz prohraných v různých hazardních hrách a loteriích velmi názorně dokládá, jak se v praxi projevuje zákon velkých čísel v kombinaci s nedostatečným všeobecným povědomím o elementárních principech počtu pravděpodobnosti. Příspěvek se snaží upozornit na význam výuky pravděpodobnosti na základních a středních školách a ukázat jednu z možností, jak lze žáky ke studiu této disciplíny motivovat.

1 Úvod

Pozice teorie pravděpodobnosti ve školské matematice je poněkud paradoxní. Na jedné straně se s ní setkáváme téměř neustále – ať už hovoříme o počasí, dopravních nehodách, vadách materiálů, složení hornin, nemocích a šancích na uzdravení či přežití, o rostlinách, tkáních či samotných lidských bytostech, o průzkumech veřejného mínění, finančních trzích, detekci spamů, hazardních hrách aj. Zdá se tedy, že teorie pravděpodobnosti je jednou z nejdůležitějších a nejzajímavějších disciplín, neodlučně spojenou s naším životem. Na druhé straně je však její výuka často omezena na úlohy týkající se házení mincemi či kostkami a vytahování koulí z osudí, tedy na problémy, které (alespoň na první pohled) vypadají značně vzdálené od skutečného života. To je patrně také hlavní důvod, proč tolik studentů (a dokonce i řada učitelů) nemá teorii pravděpodobnosti v oblibě, považuje ji za jednu z nejméně zajímavých, užitečných a pochopitelných částí školské matematiky a snaží se jí pokud možno vyhnout. Cílem tohoto příspěvku je alespoň trochu přispět k její „rehabilitaci“ a připomenout její význam pro motivaci výuky matematiky i pro všeobecnou finanční gramotnost – děti by měly ze školy vycházet vybavené přinejmenším základním „pravděpodobnostním“ uvažováním, aby později nepodlehly hráčské vášni tam, kde by stejně nemohly vyhrát, a aby si uměly vytvořit správnou představu o údajích, jimiž je budou zahrnovat politici, firmy provádějící průzkumy veřejného mínění, lékaři, farmaceutické firmy, biologové či provozovatelé heren, kasin a loterií. Zajímavé motivační příklady z nejrůznějších oblastí života lze nalézt v řadě publikací. V českém jazyce jsou dostupné například knihy [1], [5] a [6] autorů J. Anděla, E. a M. Kaplanových a J. S. Rosenthala; čtenářům, kterým nevadí četba v anglickém jazyce, lze doporučit například knihu [2] G. Gigerenzera. V tomto článku se omezíme na oblast hazardních her, která se možná jeví poněkud vzdálenější od reálného života, mnoha lidem však do něj zasahuje velmi výrazně: podle statistiky Ministerstva financí ČR lidé v roce 2011 prohráli v českých hernách, kasinech, loteriích a sportovních sázkách 31,1 miliardy korun.[1] O sociálních dopadech hazardu zde není třeba hovořit; v dalším se zaměříme přímo na výpočet pravděpodobností pro některé běžné hry.

[1]Celkem bylo prosázeno 126,8 miliardy, z toho 95,7 miliardy bylo vyplaceno zpět. Viz http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/loterie_statistika_71280.html.

2 Zákon velkých čísel – stálý příjem pro kasina

Je dobře známo, že trvalý zisk provozovatelům kasin, heren a různých loterií zaručuje zákon velkých čísel, který lze zjednodušeně zformulovat takto: opakuje-li se daný náhodný pokus dostatečně mnohokrát, pak se relativní četnost výskytu určitého jevu blíží jeho teoretické pravděpodobnosti s libovolnou přesností. Jinými slovy, budeme-li dostatečně dlouho házet nevychýlenou mincí, padne panna přibližně v polovině případů. Anebo: je-li pravděpodobnost, že hráč v jedné partii vyhraje, menší než 1/2 a hráč u hry vytrvá dostatečně dlouho, pak prodělá a kasino se obohatí. Jediné, co si tedy kasino musí zajistit, je to, aby šance v každé jednotlivé hře byly lehce vychýlené v jeho prospěch. Ne příliš mnoho, aby podmínky hráče neodradily, ale dostatečně na to, aby podnik slušně vydělával. Pak stačí jen trocha trpělivosti a o zbytek se „postará“ zákon velkých čísel. V následujících částech se podíváme na několik typických her a na odpovídající pravděpodobnosti, jimiž se při mnohonásobném opakování řídí. Jak lze očekávat, ve všech případech jsou šance vychýlené ve prospěch podniku, i když se na první pohled může zdát, že je tomu někdy jinak.

Zjednodušená formulace zákona velkých čísel a výpočty pravděpodobností jsou dobře přístupné i žákům základních škol. Přitom se jedná o téma velmi důležité. Snad většina lidí o zákonu velkých čísel někdy slyšela a má určitou představu o tom, co říká. Bohužel, tato představa je často poněkud pokřivená a vede k naivnímu optimismu, který lze vyjádřit takto: jestliže desetkrát po sobě padla červená, musí dříve nebo později padnout častěji černá, protože zákon velkých čísel nekompromisně vyžaduje, aby obě barvy padaly stejně často. Kulička v ruletě se však nedívá zpět, neví, kolikrát za sebou přistála na černém či na červeném políčku, a šance na výhru je stále stejná. Četnosti obou barev se vyrovnají až v mnohem delším časovém období. Snad nejvíc je tato zkreslená představa patrná u výherních automatů, do nichž jsou lidé ochotni házet další a další peníze ve víře, že teď už přece musí vyhrát; místo toho však prohrávají velké částky a často končí v dluzích.

3 Výherní hrací přístroje

Na klasickém výherním hracím přístroji, lidově hracím automatu, jsou tři okénka, za nimiž se otáčejí válce s různými obrázky. Zastaví-li se automat v okamžiku, kdy okénka ukazují některou z výherních kombinací, je hráči vyplacena určitá částka. Z pohledu provozovatele je výhodné nabízet vysoké, ovšem dostatečně málo pravděpodobné výhry, aby se nalákalo co nejvíc lidí. Existují však určitá technická i zákonná omezení: pravděpodobnost výhry lze snížit zvýšením počtu různých obrázků na válcích či přidáním dalšího válce, nelze v tom však pokračovat do nekonečna; podle zákona o loteriích platného v ČR pak musí automat zpět vyplatit 75 až 100 procent sázek a zároveň je stanovena maximální výše sázky a výhry.[2] Podstatnou překážku pro majitele výherních

[2] V restauracích, hernách a kasinech je nejvyšší povolená sázka v jedné hře po řadě 2 Kč, 5 Kč a 50 Kč a nejvyšší výhra z jedné hry 300 Kč, 750 Kč a 50 000 Kč.

hracích přístrojů přinesla také nutnost získat povolení obce s provozováním automatů. Firmy podnikající v herním průmyslu však rychle přišly na to, jak zákon obejít. Začaly provozovat interaktivní terminály řízené centrálními servery, které neodpovídají zákonnému vymezení pojmu *výherní hrací přístroj*. Pro tyto systémy neplatí omezení maximální prohry ani výhry; díky tomu, že jsou terminály propojeny, tvoří všichni hráči po celé republice společný jackpot, který může dosahovat závratných výšek; zároveň však lze hry snadno naprogramovat tak, aby pravděpodobnosti výher byly libovolně nízké. Souhlas s provozováním navíc uděluje ministerstvo financí, které tak dříve často činilo i v místech, kde předtím obec klasické výherní přístroje zakázala. Teprve nedávno vznikla ministerstvu povinnost respektovat obecní vyhlášky regulující provozování hazardu; i tuto povinnost však obce vymáhají jen velmi obtížně, firmy navíc mají na přemístění herny ze zákona tři roky. Mezi lety 2007 a 2011 tak došlo v oblasti tzv. technických her, kam vedle zmíněných videoloterijních terminálů patří také například elektromechanická ruleta, k mohutnému rozšíření – zisky v tomto období vzrostly ze 4 na téměř 19 miliard korun, zatímco zisky z klasických automatů poklesly přibližně o polovinu na necelých 7 miliard korun.

4 Ruleta

Hra na automatech je mezi mnoha lidmi velice oblíbená, z hráčského hlediska však příliš zajímavá není. Hráč pouze stiskem tlačítka nebo páky hru spustí a pak už jen čeká, jaké symboly se objeví. Z tohoto pohledu je zajímavější například ruleta, která je rovněž založená na náhodě, ale hráči již mají prostor pro vymýšlení různých strategií. Zároveň se na ní velmi jednoduše ukáže způsob počítání pravděpodobností výhry a důvod zaručených trvalých zisků kasin. Podrobněji se touto hrou zabývá příspěvek J. Staňka v tomto sborníku a autorčin článek [3]; zde proto jen poznamenejme, že vsadí-li hráč například 10 Kč na červenou barvu, pak v případě, že kulička skončí na některém z 18 červených políček, získá zpět svou sázku a k tomu navíc dalších 10 Kč (v tomto případě se říká, že sázka je vyplácena v poměru 1 : 1); zůstane-li však kulička na některém z 18 černých políček nebo na políčku zeleném, hráč o svou sázku přijde. Kdyby tedy hráč vytrvale sázel 10 Kč na červenou barvu, pak by v průměru v 18 z 37 případů vyhrál 10 Kč a ve zbývajících 19 případech by 10 Kč ztratil. Průměrná výhra, kterou za svou sázku získá, je proto rovna $10 \times 18/37 - 10 \times 19/37 \doteq -0{,}27$ korun. Podobně funguje i řada dalších sázek, například sázka na lichá čísla, na zvolený sloupec či na konkrétní číslo.

5 Craps

Jinou velmi oblíbenou hazardní hrou je hra *craps*, která vznikla z francouzské verze anglické hry v kostky zvané *hazard*; její pojmenování pravděpodobně vzniklo francouzským zkomolením anglického slova *crabs* (doslova *krabi*), slangového označení situace, kdy při hodu dvěma kostkami padnou dvě jedničky. Pravidla jsou o trochu složitější než v případě rulety, ani zde však není výpočet pravděpodobností příliš obtížný: hráč opakovaně hází dvojicí běžných šestistěnných kostek; čísla, která padnou, se pokaždé sečtou. Je-li součet v prvním hodu roven 2, 3 nebo 12, hráč okamžitě prohrává. Je-li součet roven 7 nebo 11, hráč okamžitě vyhrává. Je-li součet roven jakékoli jiné hodnotě, prohlásí se toto číslo za trefu. Hráč pak opakovaně hází dvojicí kostek, dokud svou trefu nezopakuje. Podaří-li se mu to dříve, než padne součet 7, pak vyhrává, v opačném případě prohrává. Sázky se vyplácejí v poměru 1 : 1. Pravděpodobnosti, s nimiž se v jednom hodu objeví různé součty, jsou znázorněny v následující tabulce:

Součet k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pravděpodobnost p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Například pravděpodobnost, že padne součet 2, je zřejmě 1/36, protože existuje jediná možnost, jak se to může stát (jednička na obou kostkách), zatímco všech možností je 36. Pro součet 3 existují dvě možnosti: na jedné z obou kostek jednička, na zbývající dvojka, tedy dvojice čísel $(1,2)$, $(2,1)$; podobné je to i v případě součtu 11. Nejvyšší pravděpodobnost potom vychází pro součet 7, kdy na kostkách mohou padnout dvojice čísel $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ nebo $(6,1)$. Pravděpodobnost, že hráč vyhraje v prvním kole, tj. napoprvé padne součet 7 nebo 11, je rovna $p_7+p_{11} = 8/36$. Ve zbývajících případech s výjimkou součtů 2, 3 a 11 hra pokračuje a hráč musí zopakovat trefu dříve, než mu padne součet 7. Pravděpodobnost, že se mu to podaří, je rovna

$$p_k + (1-p_7-p_k)\cdot p_k + (1-p_7-p_k)^2\cdot p_k + (1-p_7-p_k)^3\cdot p_k + \cdots = \frac{p_k}{p_7+p_k}\,.$$

K tomu si stačí uvědomit, že pravděpodobnost, že hráč trefu v hodnotě k zopakuje v prvním hodu, je p_k, pravděpodobnost, že ji zopakuje v druhém hodu, je $(1-p_7-p_k)\cdot p_k$ (nejprve padne součet různý od 7 a od k, v druhém hodu padne součet k), pro třetí hod to bude $(1-p_7-p_k)^2\cdot p_k$ atd. Celkem lze tedy pravděpodobnost výhry vyjádřit vztahem

$$P = p_7 + p_{11} + \sum_{\substack{k=4\\k\neq 7}}^{10} \frac{p_k^2}{p_k+p_7} \doteq 0{,}493.$$

Sázka na výhru se vyplácí v poměru 1 : 1. Kdyby tedy někdo opakovaně sázel například 10 Kč na hráčovo vítězství, pak by v průměru ve 49,3 % případů vyhrál 10 Kč a ve zbývajících 50,7 % případů by o stejnou částku přišel. Jeho průměrná výhra při sázce 10 Kč by proto byla $10\times 0{,}493 - 10\times 0{,}507 = -0{,}14$ korun. Ztráta je nižší než v případě rulety, kasina si to však vynahrazují (vedle dalších možných sázek) nabídkou sázky na hráčovu prohru, která je vyplácena rovněž v poměru 1 : 1. Diváci, kteří ji využijí, pak působí poněkud nezdvořile, protože se radují, když se hráči nedaří. Nejvíce se ovšem raduje kasino, které má i v tomto případě šance lehce vychýlené na svou stranu. Diváci sice mohou mít pocit, že sázkou na prohru se podílejí na zisku podniku, je zde však jedno nenápadné pravidlo, které způsobí, že pravděpodobnost výhry sázejícího je opět menší než 1/2: padne-li hráči v prvním hodu součet 12, pak prohraje, divák však nevyhrává, jen získává zpět svou sázku. Vsadí-li tedy například 10 Kč, pak místo aby v průměru vyhrál 0,14 Kč (jako kasino), o stejnou částku přijde.

6 Kurzové sázky

Dokonce i největší nepřítel teorie pravděpodobnosti tuší, že kurzy, které sázkové kanceláře vypisují na nejrůznější sportovní či společenské události, vyjadřují, kolik bude v případě úspěchu vyplaceno za každou vsazenou korunu, a čím nižší je kurz, tím vyšší pravděpodobnost bookmaker dané alternativě přisuzuje. Před zahájením olympijských her v Londýně v roce 2012 byl například vypsán kurz 1,17 na to, že americká basketbalová reprezentace vyhraje každý zápas, kurz 2,80 na možnost, že Usain Bolt obhájí tři zlaté medaile, kurz 10 na to, že hry naruší stávka zaměstnanců metra, anebo kurz 1000 na to, že se během zahajovacího ceremoniálu nad stadionem objeví mimozemšťané.

Představu o tom, jak výhodné je kurzové sázení pro sázkové kanceláře, popř. které nabídky jsou lepší a které horší, nám pomůže vytvořit tzv. *návratnost sázky*. Uvažujme například zápas české fotbalové reprezentace proti Maltě, na který byly vypsány následující kurzy: 1,07 na výhru ČR, 8,80 na remízu a 25,00 na výhru Malty. Představme si, že bychom vsadili takovým způsobem, aby nám bylo vyplaceno 100 Kč, ať už nastane jakýkoli výsledek. Abychom dostali 100 korun v případě výhry českého mužstva, museli bychom na tento výsledek vsadit 100/1,07 korun, podobně pro další možnosti. Celkem bychom tedy museli vsadit $100/1{,}07 + 100/8{,}80 + 100/25{,}00 \doteq 109$ korun, což je o 9 korun více, než bychom vyhráli. Návratností sázky se pak rozumí podíl výhry a celkové částky vsazené popsaným způsobem, tj. v našem případě

$$N = 1 \Bigg/ \left(\frac{1}{1{,}07} + \frac{1}{8{,}80} + \frac{1}{25{,}00} \right) \doteq 0{,}92 = 92\ \%\,.$$

Kdyby byla střední hodnota vyplacené částky za každou vsazenou korunu, tedy součin kurzu a pravděpodobnosti, že daný výsledek nastane, rovna opět jedné koruně, označili bychom sázku jako *spravedlivou.* Převrácená hodnota kurzu by pak byla rovna pravděpodobnosti, kterou bookmaker dané možnosti přisuzuje, a návratnost by byla rovna jedné. Jak si však můžeme povšimnout, návratnost je vždy menší než jedna a „deklarované pravděpodobnosti“ jsou oproti bookmakerovým odhadům poněkud nadhodnocené; dlouhodobě vydělávat tak může jen ten, kdo má lepší informace a odhady pravděpodobností než týmy zavedených společností. Jednou z možností (kterou ovšem nelze použít u obvyklých sázek v sázkových kancelářích), jak docílit spravedlivého kurzu, by bylo připustit i záporné hodnoty sázky. Pak by bookmakerovi hrozilo, že se sám ocitne v roli sázejícího; poměrně jednoduše lze ukázat, že k tomu, aby se v takovém případě vyvaroval zaručené ztráty, je třeba, aby převrácené hodnoty kurzů, které vypíše, splňovaly základní axiomy teorie pravděpodobnosti s výjimkou spočetné aditivity (požaduje se pouze aditivita konečná) – podrobnosti lze nalézt v knize [5] a na webové stránce [7], kde jsou k dispozici i další materiály.

7 Závěr

Zkoumání hazardních her a kurzových sázek v hodinách matematiky není myšleno jako jejich propagace. Studenty by naopak mělo přivést k zamyšlení nad otázkou, kdo na podobných hrách může vydělat, a k pochopení, proč je to z dlouhodobého hlediska jejich provozovatel. Uvědomí-li si to ještě předtím, než dospějí a budou moci hrát sami, existuje naděje, že se do takové aktivity raději ani nepustí – a když už ano, tak spíše pro pobavení, nikoli s vidinou zbohatnutí, kvůli níž by prosázeli nepřiměřené částky, nebo si alespoň vyberou takové hry, kde je průměrná ztráta co nejnižší, anebo se naučí například poker, kde mohou proti slabším soupeřům skutečně dlouhodobě vítězit. Odstranit problém hráčské závislosti je v našem „hazardním ráji"[3] velmi obtížné; vše, co k tomu alespoň trochu napomůže, však určitě stojí za zamyšlení.

Poděkování

Příspěvek vznikl v rámci grantu GAČR 401/09/1850.

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] G. Gigerenzer, *Calculated Risks. How to Know When Numbers Deceive You*, Simon & Schuster, New York, 2002.

[3] M. Hykšová, *Podivuhodný svět pravděpodobností*, In: Lávička M., Bastl B. (ed.), *Setkání učitelů matematiky*, JČMF, Plzeň, 2008, 127–133.

[4] M. Hykšová, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*, edice Dějiny matematiky, sv. 51, Matfyzpress, Praha, 2011.

[5] M. Kaplan, E. Kaplanová, *Chances are… Adventures in Probability.* Viking Penguin, New York, 2006 [český překlad: M. Čtrnáct, *Šance je, že… Dobrodružství v pravděpodobnosti*, Praha, Triton, 2008].

[6] J. S. Rosenthal, *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities*, Toronto, Harper Collins, 2005 [český překlad: M. Hykšová, *Zasažen bleskem. Podivuhodný svět pravděpodobností*, Praha, Academia, 2008].

[7] `http://euler.fd.cvut.cz/~hyksova/pravdepodobnost`

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky FD ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
`hyksova@fd.cvut.cz`

[3] Podle údajů sdružení Občané proti hazardu je v ČR 6,5krát více heren a kasin než v celém zbytku EU, obyvatel je přitom 47krát méně. Viz `http://www.obcaneprotihazardu.cz/`.

GEOMETRICKÉ MODELOVÁNÍ

Petra Surynková, Radka Matěková, Jana Vlachová

V příspěvku pojednáváme o použití počítačového modelování ve výuce geometrie. Naším cílem je zvýšit zájem o studium geometrie na všech stupních vzdělávání. Integrování počítačů do výuky geometrie je jednou z možností jak výuku zmodernizovat a zároveň docílit lepších výsledků. Porozumět složitějším prostorovým úlohám bývá často obtížné, vhodný 3D modelovací software nám s tímto nesnadným úkolem může pomoci.

Článek je rozdělen do několika částí

- Studium geometrie
- Ukázky počítačového modelování
- Studentské práce
- Shrnutí a závěr

1 Studium geometrie

Klasická syntetická a deskriptivní geometrie je základem mnoha technických oborů, v poslední době však nepatří mezi oblíbené partie školské matematiky, což má za důsledek její stále větší vytrácení z osnov jak středních tak vysokých škol. Abychom zpomalili tento neblahý trend, navrhujeme jako jednu z možností zlepšení této situace integraci počítačů do hodin deskriptivní a syntetické geometrie. Jelikož je nutné přizpůsobit se nárokům moderní doby, zdá se, že je tento postup pro studenty velice atraktivní a studium geometrie tak nabírá na zajímavosti a uplatnitelnosti.

Při použití moderních geometrických a modelovacích softwarů v hodinách geometrie a při studiu geometrie musíme být zároveň obezřetní. Počítači samozřejmě nelze nahradit vše. Znalost geometrických zákonitostí je nutná v každém případě. Projekce skutečných reálných objektů a situací, jejich zakreslování, navrhování objektů nových a jejich realizace opět pomocí nějaké projekce se nikdy neobejde bez znalostí prostorových vztahů. Navíc v těchto fázích se většinou spoléháme na ruční rýsování a črtání.

V žádném případě nelze zcela opustit klasické rýsování. Jistě se asi dnes nepřiblížíme standardům, které byly běžné ve výuce deskriptivní geometrie v minulosti, kdy zažívala své vrcholné období. Rysy, které studenti vytvářeli ručně, byly naprosto precizně zpracované s výtvarnou stránkou na velmi vysoké úrovni. Někdy se dá dokonce hovořit o skutečně uměleckých dílech. Rýsování tuší bylo samozřejmostí.

Dnes po nástupu počítačů se zdá, že je klasické rýsování rukou překonané. Ovšem opak je pravdou. Ruční rýsování nás učí preciznosti a zlepšuje koordinaci oka a ruky. Proto nesmíme ruční rýsování opomíjet a další navrhované didaktické přístupy brát jako jeho nadstavbu nikoliv náhradu!

2 Ukázky počítačového modelování

Podívejme se v následujícím oddíle na příklady využití počítačového modelování v různých oblastech deskriptivní geometrie – rovnoběžné a středové projekce, lineární perspektiva, modelování geometrického osvětlení nebo elementárních těles a skupin těles.

Veškeré obrázky obsaženy v tomto článku jsou vytvořeny v komerčním modelovacím softwaru Rhinoceros (NURBS modeling for Windows). Výstupy jsou využívány jako studijní a výukové materiály na MFF UK v hodinách deskriptivní geometrie. Rhinoceros je levný a dostupný software obsahující množství profesionálních modelovacích nástrojů a funkcí. Je také kompatibilní s jinými aplikacemi pro kreslení, design a modelovaní. MFF UK vlastní jeho licenci. Naši studenti v tomto softwaru rovněž sami modelují 3D objekty a geometrické situace a zpracovávají geometrické rysy.

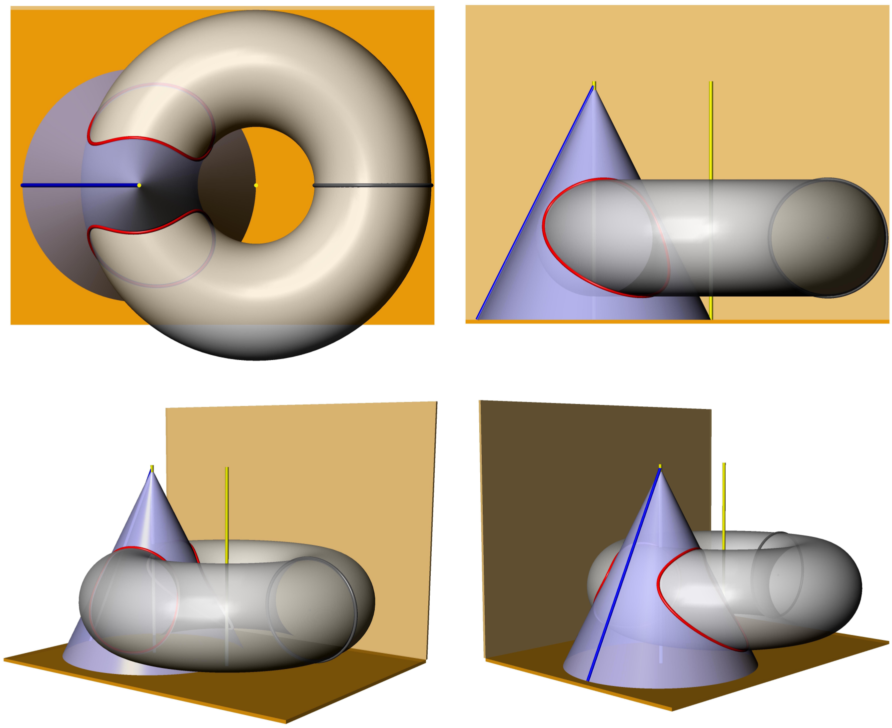
Dá se říci, že počítačové modely jsou v dnešní době dostupnější než modely fyzické a navíc nabízejí mnohé možnosti, které fyzické modely neposkytují. S 3D modelem můžeme v modelovacím softwaru hýbat, otáčet ho, zvýrazňovat určité detaily, část objektu lze také odstranit. 3D modely můžeme studovat z různých pohledů a odhalovat tak nejrůznější prostorové zákonitosti. Výhodou je i to, že takový 3D model může mít každý student k dispozici na svém počítači a může jej používat přímo při svém studiu. Samozřejmě nám takový virtuální model nikdy nenahradí onu zkušenost skutečného kontaktu s reálným objektem.

Na první sadě obrázků, viz obrázek 1, můžeme vidět klasickou úlohu deskriptivní geometrie – průnik dvou rotačních ploch v Mongeově promítání. Úkolem studentů je sestrojit průnikovou křivku těchto ploch. Prostorový model, se kterým lze v modelovacím softwaru hýbat, zlepšuje pochopení dané problematiky.

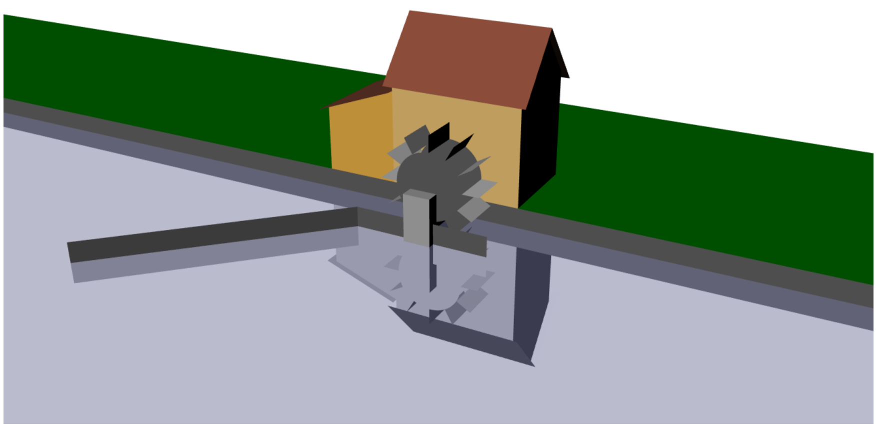
Na dalších obrázcích jsou znázorněny ukázky zrcadlení objektů ve vodní hladině zobrazených v lineární perspektivě. Úkolem studentů je narýsovat vše ručně, tj. v lineární perspektivě zobrazit skupinu objektů a vyřešit jejich zrcadlení. Na obrázku 2 můžeme vidět prostorovou situaci, na obrázku 3 výslednou lineární perspektivu a na obrázku 4 čárový obrázek, tj. takový výstup, který by studenti měli zvládnout ručně narýsovat.

Obrázky 5 – 10 ilustrují příklady geometrického rovnoběžného osvětlení elementárních těles – rotačního válce, kužele a sféry a osvětlení skupiny těles. Opět nám 3D modely v modelovacím softwaru mohou pomoci s pochopením prostorové situace. Rovnoběžné osvětlení lze chápat jako projekci v daném směru, jedná se tedy o obecné kosoúhlé promítání do roviny. Na obrázku 8 je ukázka ručně zpracovaného rysu s poměrně těžkým geometrickým problémem osvětlením sféry v lineární perspektivě. v tomto případě nám opět 3D modelování na počítači může pomoci nejen k řešení prostorové situace, ale také k pochopení principů zobrazování celé situace ve zvolené lineární perspektivě, jak ukazuje obrázek 9.

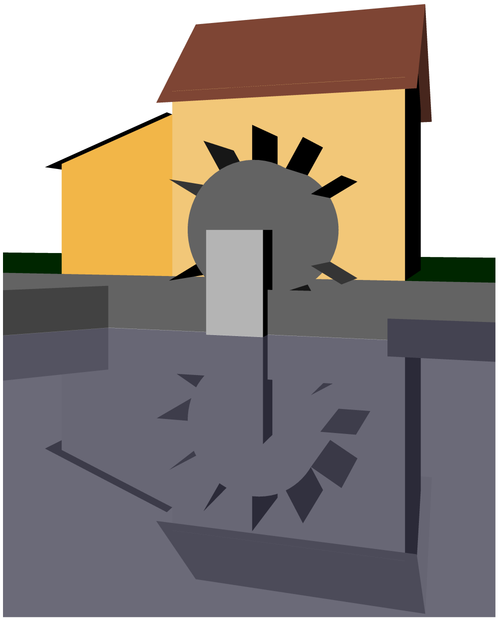
Galerii těchto a dalších 3D modelů je možné nalézt na webových stránkách `www.surynkova.info`. Kromě toho jsou zde také další odkazy týkající se zajímavých geometrických témat.



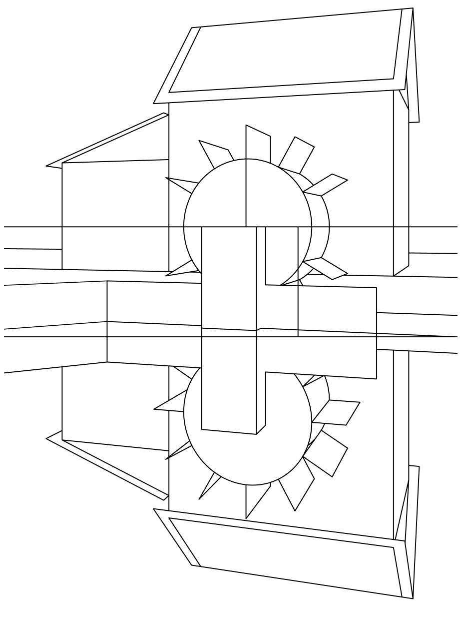
Obr. 1: Půdorys a nárys průniku dvou rotačních ploch. Prostorové modely umožňují lepší pochopení prostorové situace. V modelovacím softwaru lze s objekty libovolně hýbat, prostorovou situaci si tak můžeme lépe prohlédnout.



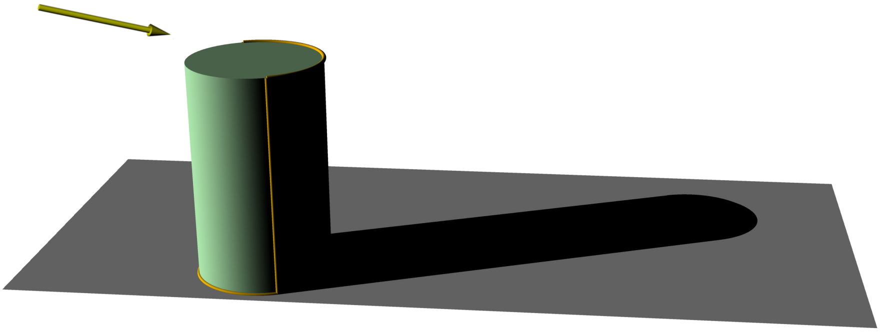
Obr. 2: Zrcadlení objektů ve vodní hladině – prostorová situace



Obr. 3: Zrcadlení objektů ve vodní hladině – obraz ve zvolené lineární perspektivě

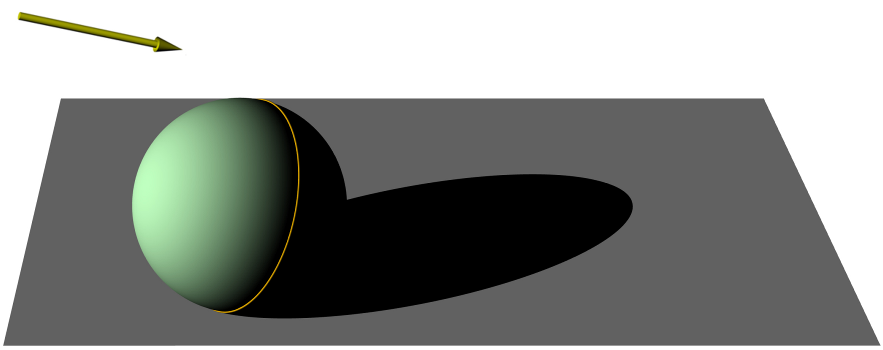


Obr. 4: Zrcadlení objektů ve vodní hladině – obraz ve zvolené lineární perspektivě, čárový výstup

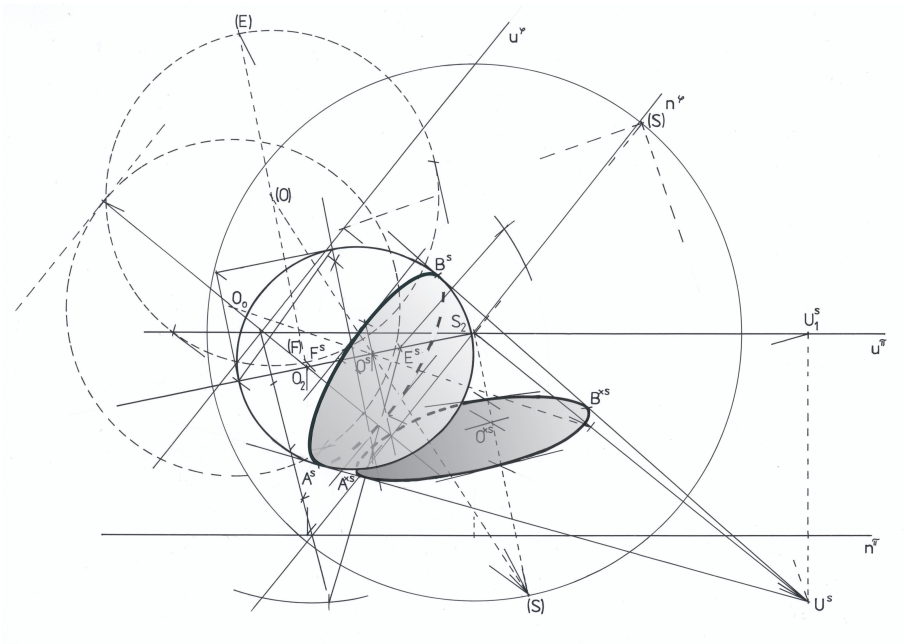


Obr. 5: Rovnoběžné osvětlení rotačního válce

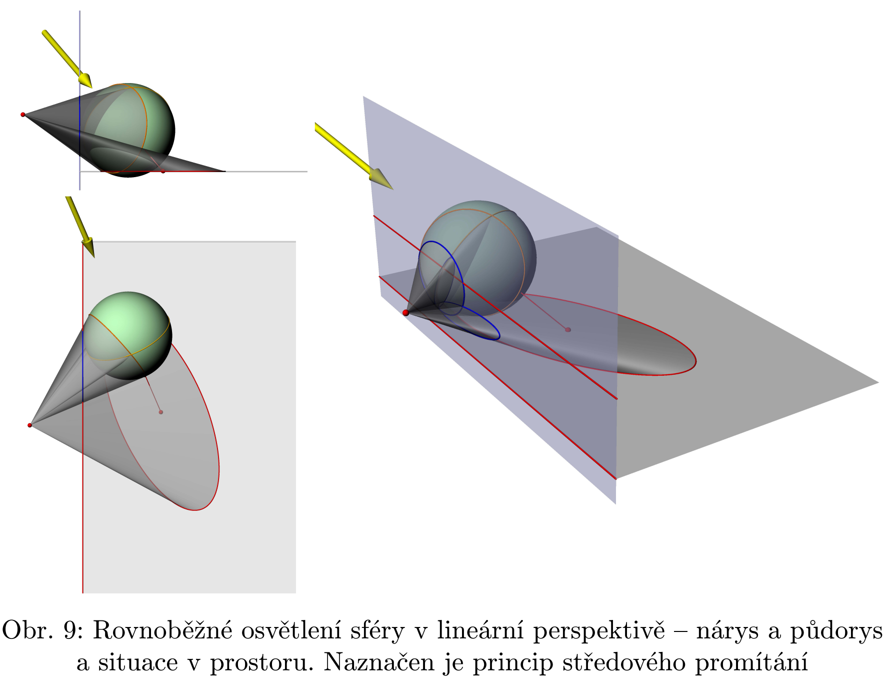
Obr. 6: Rovnoběžné osvětlení rotačního kužele



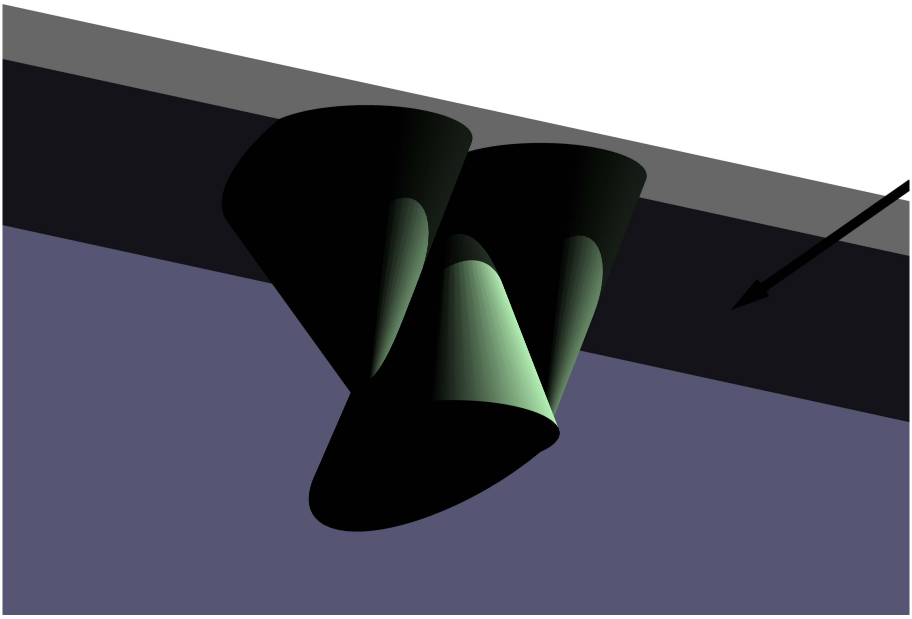
Obr. 7: Rovnoběžné osvětlení sféry



Obr. 8: Rovnoběžné osvětlení sféry v lineární perspektivě,
ručně rýsovaný rys, poměrně komplikovaný problém



Obr. 9: Rovnoběžné osvětlení sféry v lineární perspektivě – nárys a půdorys a situace v prostoru. Naznačen je princip středového promítání jednotlivých objektů do průmětny pomocí promítacích kuželů.



Obr. 10: Rovnoběžné promítání skupiny kuželů – prostorová situace

3 Studentské práce

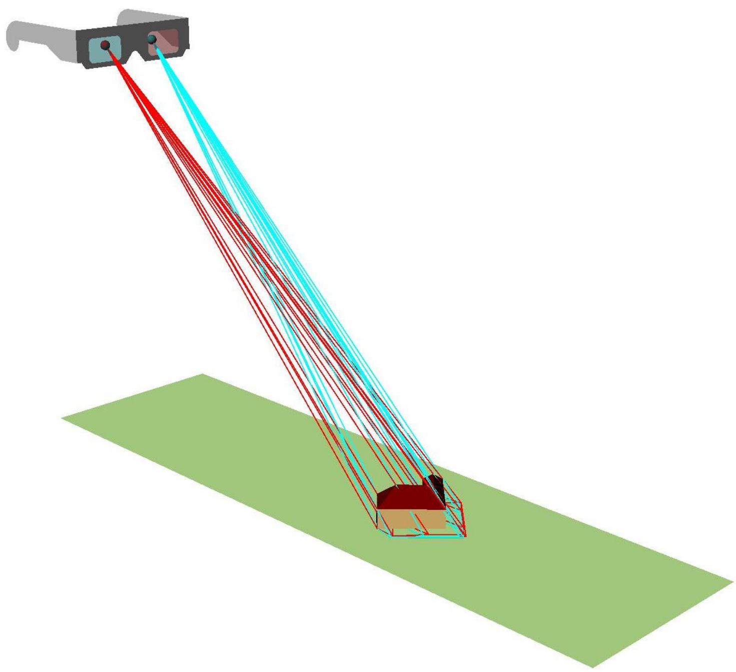
Počítačové modelování používají úspěšně také naši studenti ve svých bakalářských a diplomových pracích týkajících se rozličných geometrických témat. Uveďme si ukázky výstupů dvou prací – z bakalářské práce Radky Matěkové – Anaglyfy a jejich využití ve výuce stereometrie a z diplomové práce Jany Vlachové – Stereoskopické promítání. Za zmínku jistě stojí, že bakalářská práce Anaglyfy a jejich využití ve výuce vyhrála v roce 2012 mezinárodní soutěž SVOČ v kategorii bakalářských prací. Jana Vlachová bude se svou diplomovou prací jistě reprezentovat příští rok.

O anaglyfech

Anaglyfům by laik nejspíš řekl „3D obrázky“. Cílem zobrazovací metody, díky které anaglyfy vznikají, je zobrazit objekt v prostoru tak, aby při sledování jeho průmětů nastal prostorový efekt.

Nejdříve si zvolíme dvě středová promítání, ve kterých pak promítneme zobrazovaný útvar, viz obrázek 11. Obě promítání mají společnou průmětnu, tedy rovinu, do které se objekty promítají. Středy obou promítání se liší a jsou od sebe vzdáleny zhruba 6 cm. Tato vzdálenost není zvolena náhodně. Odpovídá vzdálenosti lidských očí. Středy volených promítání mají představovat právě lidské oči. Oba středy promítání jsou pak od průmětny vzdáleny stejně.

V takto zvolených středových promítáních zobrazíme útvar, jehož anaglyf chceme získat. Průměty odlišíme barevně. Průmět z pravého oka nakreslíme červeně (anglicky „red“) a průmět z levého oka nakreslíme světle modrou barvou (anglicky „cyan“). Máme-li anaglyf hotový, nastává čas nasadit si tzv. 3D brýle. Pro odlišení průmětů jsme použili barvy red a cyan, proto ke sledování anaglyfu využijeme 3D brýle, které mají před pravým okem světle modrý filtr a před levým okem červený filtr. Filtry způsobí, že oko vidí pouze jeden průmět, a to ten, který mu přísluší, druhý průmět se ztratí, jelikož je stejné barvy jako daný filtr. Díky tomu pak mozek má pocit, že vidí skutečný objekt v prostoru, nikoli pouze jeho dva různé průměty (vše popsané lze vidět na obrázku 11).



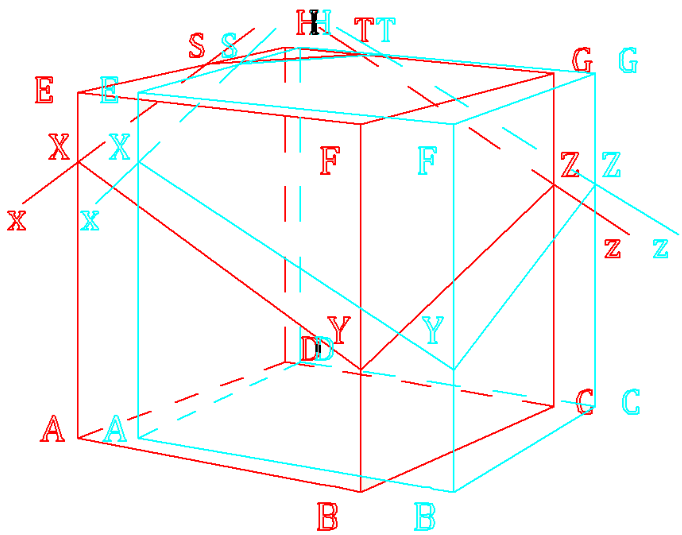
Obr. 11: Vznik anaglyfu – využití počítačového modelování

Anaglyfy vznikly koncem devatenáctého století ve Francii. V Čechách se používaly v první polovině dvacátého století v rámci výuky stereometrie a hlavně deskriptivní geometrie, postupem času však vymizely.

Vzhledem k tomu, že díky anaglyfům můžeme vidět objekty v prostoru, mohou být vhodným doplňkem výuky stereometrie či deskriptivní geometrie na střední škole. Stačí anaglyficky zobrazit daný problém, studentům půjčit 3D brýle a oni v prostoru uvidí, co si z pouhého náčrtku nedokázali představit. Na obrázku 12 vidíme anaglyf krychle a jejího již sestrojeného řezu rovinou XYZ. Tento anaglyf sledujte ze vzdálenosti cca 50 cm a na obrazovku počítače hleďte kolmo.

Jistě by bylo užitečné používat anaglyfy během výuky stereometrie na střední škole. Studentům by to pomohlo s prostorovou představivostí a řešením stereometrických úloh. Také nesmíme opomenout, že je to přitažlivé oživení vyučovací hodiny, které by studenty mohlo nadchnout. Navíc tvorba anaglyfů je opět zajímavou problematikou počítačového modelování.

Bakalářská práce Anaglyfy a jejich využití ve výuce stereometrie byla na Katedře didaktiky matematiky MFF UK obhájena v červnu 2012. Práce je momentálně dostupná v knihovně fakulty.

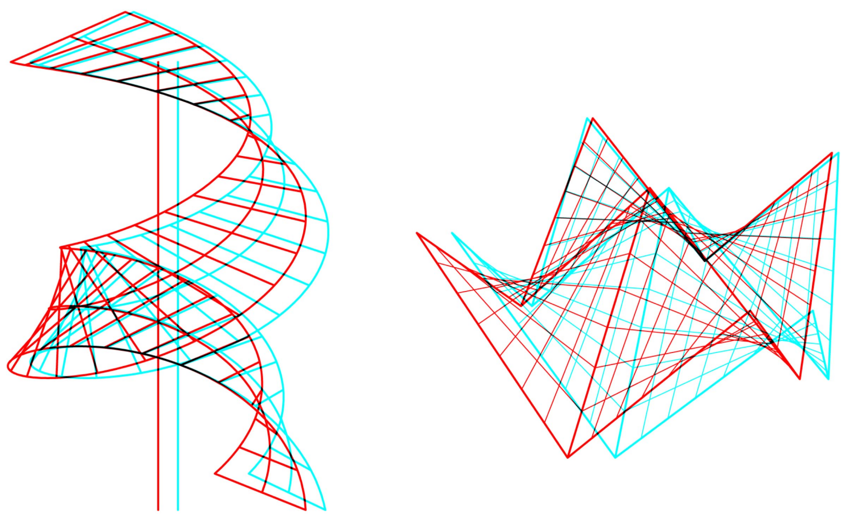


Obr. 12: Anaglyf krychle a jejího řezu rovinou XYZ

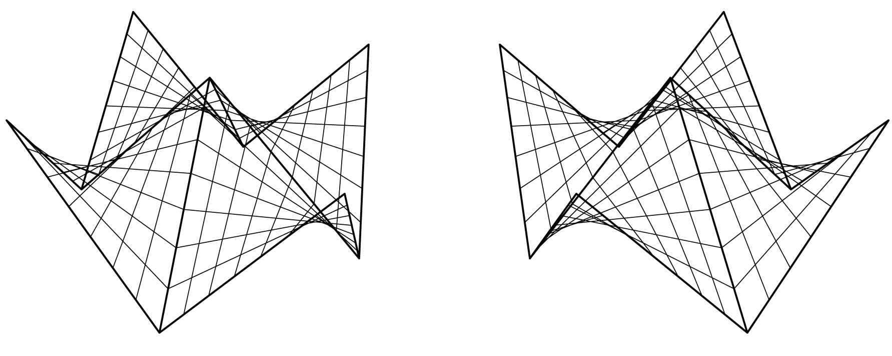
Stereoskopické promítání

Diplomová práce Stereoskopické promítání se zabývá speciálním případem dvojstředového promítání, při němž je poloha středů promítání a průmětny přizpůsobena podmínkám lidského vidění. Úvod práce stručně pojednává o historickém vývoji zobrazování a stereoskopie samotné. Dále práce seznamuje se základními biologickými a optickými vlastnostmi lidského oka a monokulárního i binokulárního vidění, jejichž znalost je nezbytně nutná pro odvození stereoskopického promítání a další popis jeho vlastností. Kromě definice základních parametrů stereoskopického promítání se tato část práce zabývá vlivem změny těchto parametrů na výsledný obraz. Hlavní část práce popisuje možné postupy tvorby stereoskopických rysů a fotografií spolu s metodami jejich pozorování včetně možností tvorby některých potřebných pomůcek pomocí běžně dostupných materiálů. Závěr práce je věnován možnostem využití stereoskopie nejen v praxi, ale především ve výuce deskriptivní geometrie. Práce obsahuje množství stereoskopických obrazů vytvořených s využitím dostupných počítačových programů.

Existují různé metody pozorování stereoskopických dvojic obrazů. Od toho se odvíjí různé typy stereoskopických dvojic obrazů – obrazy ve formě anaglyfů, obrazy určené k pozorování čočkovými brýlemi, metodou rovnoběžných nebo zkřížených očních os nebo metodou s použitím zrcadla. Obrázky 13 a 14 ilustrují dvě tyto možnosti. Na obrázku 13 se jedná o dvě dvojice stereoskopických obrazů ve formě anaglyfů a na obrázku 14 je to dvojice stereoskopických obrazů určená pro pozorování pomocí zrcadla. Anaglyfické obrazy pozorujeme pomocí brýlí s barevnými filtry. Obrázek 14 je nutné pozorovat tak, že mezi dvojici obrazů umístíme zrcátko kolmo k rovině obrazů tak, že jeho odrazová plocha směřuje k levému obrazu. Poté nasměrujeme oči pouze na pravý obraz. Levé oko vidí odraz v zrcadle, pravé oko vidí přímo pravý obraz. Tím nám opět vzniká prostorový obraz.



Obr. 13: Anaglyf šroubové plochy a soustavy hyperbolických paraboloidů



Obr. 14: Stereoskopická dvojice obrazů určená k pozorování s užitím zrcadla

Diplomová práce Stereoskopické promítání byla na Katedře didaktiky matematiky MFF UK obhájena v září 2012. Práce je momentálně dostupná v knihovně fakulty.

4 Shrnutí a závěr

V tomto článku jsme ukázali možné didaktické příspěvky ke zmírnění současného trendu mizení deskriptivní geometrie z technického vzdělávání na středních i vysokých školách pomocí zavádění počítačového modelování a geometrických softwarů do výuky. V praxi se nám opravdu osvědčuje, že studenti považují rýsování a modelování na počítači za vhodnou pomůcku a vnímají geometrii skutečně jako moderní disciplínu.

Moderní počítačový software mohou využívat jak učitelé, tak i studenti středních i vysokých škol. Proti používání profesionálního geometrického softwaru většinou hovoří také jeho pořizovací cena. Komerční software se však dá velice úspěšně nahradit freeware softwary, kterých existuje celá řada. Pro rovinnou geometrii lze s úspěchem použít GeoGebru, která je uživatelsky velice příjemná a i úplný začátečník si její principy a ovládání rychle osvojí. Pro prostorovou geometrii lze jako alternativní software k modelovacímu softwaru Rhinoceros používat Cabri 3D. Na Katedře didaktiky matematiky MFF UK také pracujeme v rámci diplomové práce na tvorbě nového 3D kreslícího programu podobného softwaru Rhinoceros, který bude volně dostupný všem zájemcům, učitelům i studentům a bude možné v něm k rýsování využívat metod deskriptivní geometrie. Rovněž bude tento software umožňovat 3D modelování, tvorbu rysů a testování správnosti geometrických postupů.

Věříme, že náš nový software a další předvedené techniky si najdou cestu do výuky geometrie na všech stupních vzdělávání.

RNDr. Petra Surynková
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
petra.surynkova@mff.cuni.cz

Bc. Radka Matěková
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
RadkaMatekova@seznam.cz

Mgr. Jana Vlachová
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
JanickaVlaska@seznam.cz

APLIKACE MATEMATIKY V BĚHU VĚKŮ

Zdeněk Halas

1 Matematické disciplíny v antice

V úvodu tohoto příspěvku uvedeme několik antických citátů, které ilustrují vztah čisté a aplikované matematiky ve starověkém Řecku.

Hérodotos ve své knize *Dějiny*[1] uvádí vyprávění o egyptském králi Sesóstrisovi, kde píše, jak vznikla geometrie z praktické potřeby vyměřování pozemků:

Tento král prý rozdělil půdu mezi všechny Egypťany a každému přidělil stejně velký čtverhranný díl; podle toho pak určil daně a nařídil, aby byly odváděny ročně. Jestliže řeka někomu kus pozemku urvala, přišel ke králi a oznámil, co se stalo. Král poslal své lidi, aby věc zhlédli a vyměřili, o kolik se pozemek zmenšil, aby pak jeho majitel platil nařízenou daň úměrně podle zbylé výměry. Myslím, že tak vzniklo zeměměřičství (geómetrié) a dostalo se do Řecka.

Zajímavé je také svědectví jednoho byzantského spisu[2], kde se píše o členění matematiky na jednotlivé disciplíny:

Kolik odvětví má matematika? Váženější a přední druh matematiky má dvě hlavní odvětví, aritmetiku a geometrii, a je šest odvětví toho druhu matematiky, která se zabývá objekty, jež jsou vnímatelné smysly: logistika (tj. počtářství), geodézie, optika, kanonika (tj. teorie hudebních intervalů), mechanika a astronomie. Že ani tzv. studium taktiky, architektury, provozování hudby a studium fází (Měsíce), ale ani mechaniky (se stejně znějícím názvem), nejsou, jak se někteří domnívají, součástí matematiky, to jasně a systematicky ukážeme …

Nejvýznamnější zástupci antické matematiky (např. Eukleidés, Archimédés, Apollónios) psali nejen díla týkající se geometrie nebo aritmetiky, ale také pojednání o hudební teorii, optice a astronomii. Tehdejší matematikové se tedy zabývali na vysoké úrovni čistou matematikou (geometrie, aritmetika), takto získané dovednosti pak využívali v dalších oblastech. Za příklad si vezměme astronomii. Nová pozorování tehdy přinášela vážné otázky, které se antičtí Řekové rozhodli řešit pomocí geometrických modelů. Tato cesta se ukázala jako velmi plodná a přinesla vynikající výsledky. Nebyla by však možná, pokud by nebylo před tím věnováno dostatek úsilí čisté geometrii, jejíž pěstování mohlo vypadat jako zcela odtržené od praxe.

Tehdejší filosofové hledali skutečné vzdělání, ne pouhou kvalifikaci. Nechtěli být redukováni na vykonavatele nějaké jedné konkrétní činnosti, k níž dostali

---

Práce byla podpořena grantem GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.*

[1] Hérodotos, *Dějiny,* přel. J. Šonka. Academia, Praha, 2004. Citován je odstavec II, 109.

[2] *Definitiones* 138,5. Jedná se o soupis definic a obecné pojednání o matematice. Později byl připsán mechaniku Hérónovi.

návod. Naopak, hledali obecné principy, tázali se po původu a příčině všech věcí. Vedlo je to k teoretickému studiu, které bylo zdánlivě nepraktické a neužitečné. Avšak poznání obecných principů a trpělivé studium, to vše jim nakonec umožnilo se zabývat těmi nejzajímavějšími aplikacemi a přistupovat k nim tvořivě.

Pozdější vývoj v době římské, byzantské a v raném středověku ukazuje, že vzdělání, které se příliš netrpělivě ptá, k čemu budou studované poznatky, zůstává na povrchu a nakonec cestu k opravdu zajímavých aplikacím a tvořivosti neotevře. Neboť *tam, kde upadá poctivé pěstování teorie, záhy upadá i praxe.*

Důležitost všeobecného vzdělání a poznávání obecných principů, na jejichž základě pak lze už snadno provádět praktické věci, podtrhuje také Proklos (5. stol. po Kr.).[3] Podobně a velmi stručně píše o matematicích pýthagorejský filosof Archýtás:[4]

Zdá se, že matematikové dosáhli pravého poznání a nelze se divit, že správně pochopili podstatu každé jednotlivé věci; neboť když pronikli k poznání celku, tak vidí v pravém světle také všechny jednotlivé části. Předali nám jasné poznání rychlosti pohybu hvězd, jejich východů a západů, také o geometrii, aritmetice a sférické geometrii a v neposlední řadě také o hudbě; neboť tyto nauky (mathémata) považujeme za sesterské.

V následujícím textu se zaměříme na jeden konkrétní případ spojení matematiky s praxí. Ukážeme si, jak pozorování nestejné délky ročních období vedlo k vytvoření modelů, jejichž matematické zpracování si vyžádalo vznik nové matematické disciplíny – goniometrie.

2 Počátky goniometrie a pozorování délky ročních období

Zmínku o prvním pozorování nestejné délky ročních období lze nalézt v Simplikiově komentáři k Aristotelovi[5], kde se píše o Metónovi a Euktémonovi[6], kteří už někdy kolem roku 430 př. Kr. věděli o tom, že se doby mezi slunovraty a rovnodennostmi liší. Přehled antických pozorování nestejné délky ročních období nacházíme na jednom papyru známém pod názvem *Eudoxī Ars Astronomica*[7]:

---

[3]Činí tak ve svém komentáři k první knize Eukleidových *Základů* (Prolog I, odst. IX), i když z pohledu novoplatónského filosofa.

[4]Citát z úvodu knihy *O matematice* pýthagorejce Archýty (první pol. 4. stol. př. Kr.) se nám dochoval díky tomu, že jej uvedl ve svém komentáři k Ptolemaiovým *Harmonikám* novoplatónský filosof Porfyrios, žák Plótína a vydavatel jeho spisů, který působil ve 3. stol. po Kr.

[5]I. L. Heiberg, *Simplicii In Aristotelis De caelo, Commentaria.* Berolini, 1894. Na straně 497, řádek 19 se nachází citát z Eudéma, který se zmiňuje o Metónovi a Euktémonovi.

[6]Metón a Euktémón jsou někdy považováni za zakladatele vědecké astronomie, a to díky pozorování letního slunovratu, které provedli v Athénách roku 432 př. Kr. Jedná se o první datované pozorování v antice.

[7]Vydal jej Fr. Blass roku 1887. Tento papyrus byl napsán v Egyptě mezi lety 193 a 165 př. Kr. Jedná se pravděpodobně o zápisky z přednášek. Ke konci tohoto papyru (sloupce 22 a 23) se nacházejí údaje o nestejných délkách jednotlivých ročních období u různých autorů. Pak už jen následuje seznam znamení zvěrokruhu a závěrečné poznámky, mezi nimiž si pisatel

	Jaro	Léto	Podzim	Zima	Rok
Eudoxos	91?	91?	92	91	asi 360 př. Kr.
Démokritos	?	–	91	91	asi 400 př. Kr.
Euktémón	tj. 93	90	90	92	asi 430 př. Kr.
Kallippos	tj. 94	92	89	90	asi 330 př. Kr.

Z tabulky shrnující tato pozorování je vidět, že Euktémonovo pozorování sice nebylo úplně přesné, přesto však ukázalo, že jaro[8] je nejdelším ročním obdobím. O pozorování Démokritově nemáme záznam úplný. Překvapující je, že vynikající matematik a astronom Eudoxos z Knidu pravděpodobně považoval rozdíly v délce jednotlivých ročních období za chybu měření a rozdělil rok na čtyři stejné díly (podzimu formálně přidal jeden den, aby získal počet 365). Mnohem přesnější pozorování provedl sto let po Euktémonovi Kallippos.

Slavný astronom Hipparchos provedl někdy před rokem 130 př. Kr. vlastní pozorování, která byla velmi přesná:

$$\text{jaro} \quad 94\tfrac{1}{2} \qquad \text{léto} \quad 92\tfrac{1}{2} \qquad \text{podzim} \quad 88\tfrac{1}{8} \qquad \text{zima} \quad 90\tfrac{1}{8}\,.$$

Tyto výsledky potvrdil Klaudios Ptolemaios[9] kolem roku 150 po Kr. svým vlastním přesným měřením, při němž odhalil nepatrnou nepřesnost umístění velkého bronzového prstence sloužícího k určování rovnodennosti, který byl umístěn v alexandrijské palaistře. V Ptolemaiově astronomickém kompendiu *Almagest* se nachází rozsáhlá citace Hipparchových výsledků měření a popis modelu, který Hipparchos na základě těchto výsledků vytvořil. Právě v matematickém popisu tohoto modelu nacházíme snad vůbec první použití „goniometrie“. Podobných aplikací pak nacházíme v antické astronomii celou řadu, přičemž právě takovéto astronomické výpočty byly motivem pro vytvoření celého nového odvětví matematiky, které dnes nazýváme goniometrie.

3 Volba modelu pohybu Slunce

Stále přesnější pozorování nestejných délek ročních období vedla k potřebě upravit nejjednodušší model pohybu Slunce: pohyb konstantní rychlostí po kružnici, v jejímž středu je Země. Jelikož bylo pro antického člověka těžké si představit, co by Slunce přimělo při svém oběhu snižovat a zvyšovat svou rychlost, případně co by jej mohlo vychýlit z kruhové dráhy, byly nové modely

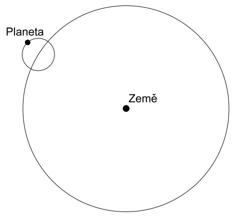
---

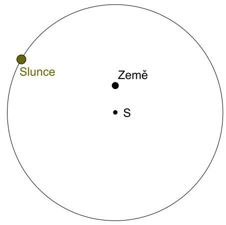
zaznamenal i pobídku přednášejícího k pilnému studiu, jež má studentům zajistit lepší život: *Namáhejte se, pánové, abyste pak nemuseli žít v námaze.*

[8] Dodejme pro úplnost, že délky ročních období se postupem času pomalu mění; dnes je nejdelším ročním obdobím léto.

[9] Alexandrijský astronom, autor velkého astronomického kompendia *Almagest* o 13 kapitolách, v němž shrnul, doplnil a systematizoval výsledky práce předchozích generací astronomů. Zdaleka nejvíce navazuje na Hipparcha. O Hipparchových výsledcích ohledně nestejných délek ročních období se dozvídáme právě díky tomu, že je Ptolemaios obsáhle cituje ve svém *Almagestu;* Hipparchově pozorování a teoretickému modelu věnuje kapitolu III.4., viz [5].

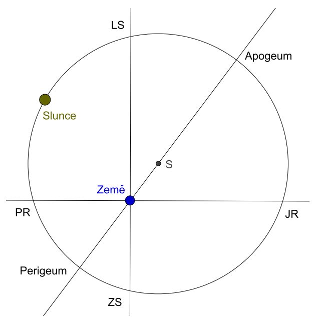
zaměřeny na modifikaci volby středu rovnoměrného kruhového pohybu. Vznikly tak dva modely, o nichž později Apollónios z Pergé kolem roku 200 př. Kr. čistě geometrickou cestou dokázal, že jsou ekvivalentní.





První model, který vznikl nejspíše při popisu pohybu planet[10], ponechal Zemi ve středu velké kružnice (tzv. *deferent*), po ní se však pohybovala svým středem jiná menší kružnice (tzv. *epicykl*), po níž teprve obíhalo jednou za rok Slunce. Jednalo se tedy o složení dvou rovnoměrných kruhových pohybů.

Druhý model byl založen na posunu středu kruhového pohybu. Slunce se tak pohybovalo konstantní rychlostí po kruhové dráze (nazývané *excentr*), která však měla střed mimo Zemi. Tento střed bylo potřeba nalézt tak, aby byl v souhlasu s pozorovanými údaji. Právě tento model si pro matematickou jednoduchost Hipparchos vybral. Navíc argumentoval tím, že nepovažuje za rozumné popisovat pohyb Slunce pomocí složení dvou pohybů, je-li jej možné popsat pomocí jediného rovnoměrného kruhového pohybu.



4 Hledání středu excentru

Nalezení středu excentru a jeho vzdálenosti od Země bylo problémem, který se Hipparchovi podařilo vyřešit pouze s využitím tehdy nově vzniklého odvětví

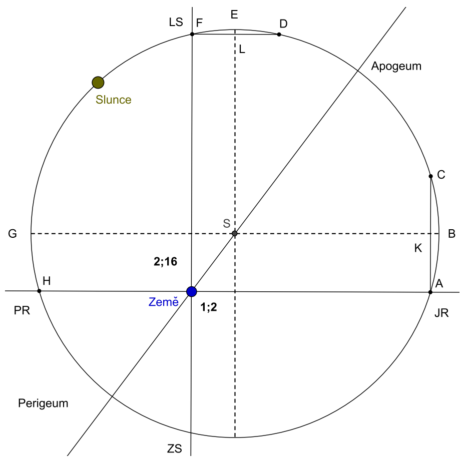
[10] Řekové je nazývali *planétes asteres* (toulající se hvězdy) díky tomu, že při pozorování ze Země vykazovaly opravdu podivné chování: při svém kruhovém pohybu se občas zastavily a nějakou dobu se pohybovaly opačným směrem (tzv. *retrográdní pohyb*), poté opět pokračovaly ve své dráze. Přesnější pozorování ukázala, že planety při svém pohybu opisují různě veliké smyčky. Popis těchto pohybů bylo možno uspokojivě modelovat složením rovnoměrných kruhových pohybů. Těch však se stále přesnějšími pozorováními přibývalo; právě těmito korekcemi nabyl tento model takové složitosti, že astronomové začali hledat uspokojivější vysvětlení. Postupem času se ukázalo, že Koperníkův heliocentrický přístup a Keplerova elipsa byly dobrým východiskem z krize středověké astronomie.

matematiky, jež se zabývalo určováním délek tětiv odpovídajích příslušným středovým úhlům (značíme $\operatorname{crd}\alpha$, z řec. *chordé,* struna ze střeva). Hipparchos dokonce sestavil jejich tabulku[11]. Ta je první tabulkou, jež přesně odpovídá dnešním tabulkám funkce sinus. Sinus je totiž polovinou délky tětivy (v jednotkové kružnici), délka tětivy $\operatorname{crd}\alpha$ v jednotkové kružnici je tedy

$$\operatorname{crd}\alpha = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Vzhledem k této jednoznačné korespondenci můžeme Hipparchovy výpočty pomocí délek tětiv snadno přeformulovat do moderní podoby pomocí dnešní funkce sinus. Celý výpočet uvedeme ve zjednodušené a modernizované podobě, přičemž budeme používat dnešní symboliku, aby se v komplikovaných antických způsobech zápisu neztratila přímá a jednoduchá aplikace sinu. V průběhu výpočtu také uvidíme, proč začala indická a arabská astronomie později místo délky tětivy používat její polovinu, což vedlo přímo k zavedení dnešního sinu (a ostatních goniometrických funkcí).

Celou dráhu Slunce v průběhu roku Hipparchos rozdělil mezníky jednotlivých ročních období: jarní a podzimní rovnodennost (JR a PR), letní a zimní slunovrat (LS a ZS). Tuto dráhu budeme považovat za kružnici o poloměru 60 (dědictví babylónské astronomie). Cílem je najít délky úseček AK a LF, čímž získáme polohu Země vůči středu excentru.



Přepočítáme-li délku trvání jara (94, 5 dne, tj. 94, 5 dílů z 365) na stupně, obdržíme 94, 5 dne $\sim \widehat{AF} \sim 93°9'$, pro léto potom 92, 5 dne $\sim \widehat{FH} \sim 91°11'$.

Celkem má tedy úhel odpovídající oblouku $\widehat{AFH}$ od jarní po podzimní rovnodennost velikost $\widehat{AFH} \sim 184°20'$, přímý úhel tak přesahuje o $4°20'$, čemuž odpovídá součet délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{GH}$. Oba tyto oblouky mají stejnou délku, a tak můžeme psát

$$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 2\widehat{AB} = \widehat{AC} \sim 4°20'\,.$$

[11]Výpočtům délek tětiv v antice je věnován článek [3].

Hledanou délku úsečky AK získáme jako polovinu délky tětivy AC, kterou dnes počítáme přímo pomocí funce sinus:

$$|AK| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \mathrm{crd}\, 4°20' = 60 \cdot \sin 2°10' \approx 2\frac{16}{60}\,.$$

Ve výsledcích zachováváme šedesátiny, které jsou odrazem šedesátkové soustavy, v níž Hipparchos počítal.

Podobně získáme délku úsečky LF. Oblouk $\widehat{AF}$ (délka jara) odpovídá úhlu $93°9'$, přesahuje tedy pravý úhel o $3°9'$, což odpovídá součtu délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{EF}$. Protože $\widehat{AB} \sim 2°10'$, dostáváme $\widehat{EF} \sim 59'$. Odtud již snadno dopočítáme délku úsečky LF:

$$2 \cdot |LF| = 60 \cdot \mathrm{crd}(2 \cdot 59') = 60 \cdot 2 \cdot \sin 59' \approx 2\frac{4}{60}\,,$$

neboli $|LF| = 1\frac{2}{60}$.

Výpočet excentricity e (tedy vzdálenosti středu excentru od Země) je díky kolmosti os v Hipparchově modelu přímou aplikací Pýthagorovy věty:

$$e^2 = |AK|^2 + |LF|^2 = \left(2\frac{16}{60}\right)^2 + \left(1\frac{2}{60}\right)^2 \approx 6\frac{12}{60}\,.$$

Po odmocnění odtud dostaneme přibližnou hodnotu $e \approx 2 + \frac{29{,}5}{60}$, po zaokrouhlení $e \approx 2\frac{30}{60} = \frac{60}{24}$, což představuje $\frac{1}{24}$ poloměru excentru (poloměr excentru zvolen 60).

Získali jsme tak všechny parametry modelu pohybu Slunce, který stál přímo u zrodu předchůdce dnešní goniometrie.

Literatura

[1] G. van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth*, PUP, Princeton, 2009.

[2] J. Evans, *The History and Practice of Ancient Astronomy*, OUP, Oxford, 1998.

[3] Z. Halas, *Výpočty hodnot goniometrických funkcí*, In: J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.): Matematika v proměnách věků VI, edice Dějiny matematiky, svazek č. 45, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 120–140. `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401740`

[4] D. Špelda, *Astronomie v antice*, Montanex, Ostrava, 2006.

[5] G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, PUP, Princeton, 1998.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
186 75 Praha 8
`halas@karlin.mff.cuni.cz`

DLÁŽDĚNÍ V NEČEKANÝCH SOUVISLOSTECH

Alena Šarounová

U mnohých geometrických témat můžeme pozorovat, že jejich „kořínky" vězí hluboko ve zkušenostech našich předků – a obdobně také v našem raném dětství. Vycházejí totiž ze zkušeností, které získáváme prostým pohybem po okolí, pozorováním všeho, co nás zaujalo jako příjemné či naopak nebezpečné, ale hlavně s čím jsme se setkali při vlastní „tvorbě", při přetváření materiálu vlastníma rukama. („Člověk je ze všech tvorů nejmoudřejší, protože má ruce" – pravil už ve starém Řecku filosof Anaxagorás.) Veškeré dětské hry s kostkami, papírem, pískem, provázky apod., práce zaměstnávající ruce od pečení koláčů po sochařskou tvorbu, od ručního psaní po nejjemnější restaurování starých tisků – to vše rozvíjí naše schopnosti v mnoha směrech. Četné z nich časem využijeme ve školním vzdělávání, velmi často právě v matematice, zejména v geometrii.

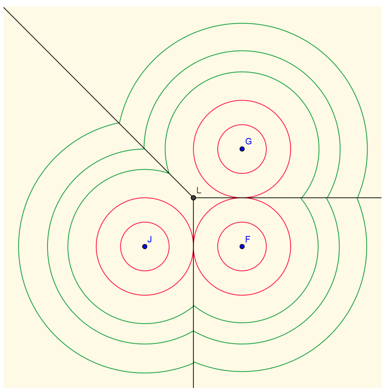
Velmi dobrým pomocníkem každého učitele může být znalost souvislostí dané učební látky s dalšími školními předměty, s různými obory i s tím, co běžně vídáme ve svém životním prostředí. Takových podnětů je kolem nás totiž mnoho, ale většinou si je neuvědomujeme, pokud nás na ně někdo neupozorní. Pokusím se na jedné takové „vývojové řadě" ukázat, co mám na mysli.

Běžnou činností, s níž se denně setkáváme, je zaplnění ploch daným materiálem. Může to být vyrovnání buchet do pekáče, rozvrstvení nakrájených hub na sítko k jejich usušení, vyložení dvorku kamením a pískem, abychom zpevnili jeho povrch, položení parket v pokoji nebo pokrytí střechy taškami… Matematici hovoří o pokrývání roviny (teselace, tessellation) a myslí tím takové pokrytí roviny rovinnými obrazci, které se nikde nepřekrývají, aby všechny body této roviny nějakému obrazci náležely. Tyto rovinné obrazce mohou mít specifické vlastnosti. Jsou např. všechny shodné, nebo je jejich různých tvarů jen konečný počet, jsou dána pravidla na jejich rozmístění (např. ornamenty – tapety, frýzy a rozety) apod. Na obr. 1 jsou ukázky takových pokrytí.

V přírodě se setkáváme s jiným pokrytím povrchu půdy. Je dáno vlastnostmi živých organizmů, které zde bojují o svůj životní prostor. Kdekoli se vyskytne „volné místo vhodné k životu", ihned se tam nějaký život šíří – a pokračuje tak dlouho, dokud nenarazí na hranice. Ty mohou být dané prostorově (fyzicky už není volné místo), proměnou úživnosti prostředí apod. Ukažme si modelový příklad:

Do laboratorní misky vysadíme na živnou půdu tři „zrnka" stejné plísně, která se bude šířit rovnoměrně a stejně rychle všemi směry, protože jsou v celé misce shodné podmínky (viz obr. 2), dokud na sebe kolonie plísně nenarazí. Postupně bude pokryta celá miska. Hranice mezi plísněmi mohou studenti sestrojit snadno pomocí os úseček spojujících dvojice původních zrnek výsevu plísně.

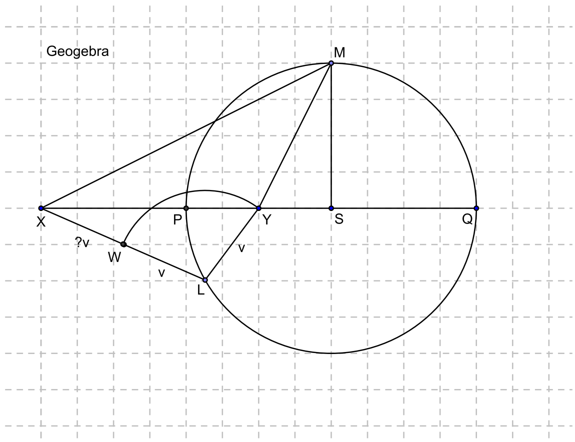
Obr. 1: Různé druhy pokrytí roviny či jejich částí a konstrukce dlažky – ptáka



Obr. 2: Trojice plísní na živné půdě – jejich postupný růst a vzájemné hranice

Složitější situace, kde bereme v úvahu různou rychlost šíření kolonií, můžeme modelovat např. na růstu „životního prostoru“ dvojice mravenišť (obr. 3): Mějme (opět v ideálním prostředí, které má všude stejné vlastnosti) dvojici mravenišť X a Y. Mravenci z mraveniště X jsou zdatnější než jejich sousedé z mraveniště Y, takže se jejich území rozpíná rychleji než území mraveniště Y. Pro jednoduchost předpokládejme, že poměr těchto rychlostí je 1:2. Vyznačme konečnou hranici mezi těmito mraveništi!

Tuto úlohu můžeme při vhodném zadání ve čtvercové síti použít už na ZŠ (viz obr. 3) nebo klasicky řešit v analytické geometrii při hledání množin bodů, které splňují dané vlastnosti (zde mají předepsaný poměr vzdáleností od bodů X, Y).



Obr. 3: Zadání úlohy a její řešení pomocí čtvercové sítě a GeoGebry

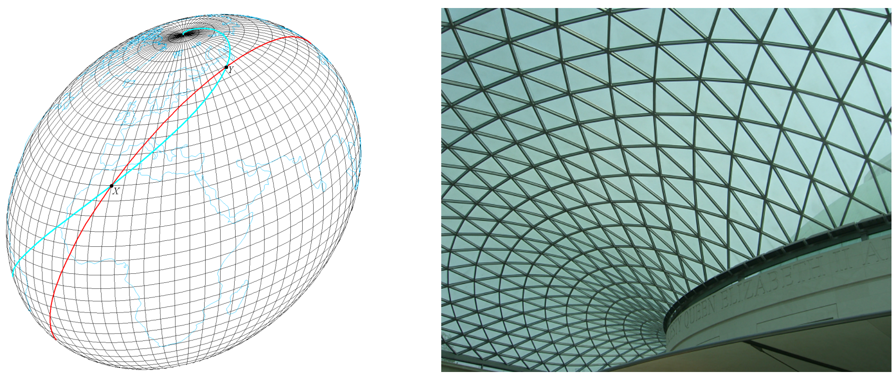
Stručný popis postupu řešení: Jako první bod hranice určí žáci jistě bod P a s mírnou pomocí i bod Q. To je upozorní, že hranice bude mít asi zvláštní tvar. Můžeme jim ukázat, že řešení musí být osově souměrné podle přímky XY, protože je podle ní souměrné celé zadání. Dále jim můžeme nabídnout bod M. K ověření faktu, že je bodem hranice, stačí znalost Pythagorovy věty (a ta čtvercová síť). A můžeme hledat a ověřovat hypotézy o tvaru hranice. Kružnice zde bývá první volbou (zkušenost s úlohou ze ZŠ). Volíme tedy libovolný (vhodný) bod L na kružnici. Dál lze postupovat dvojím způsobem. Buď se spokojíme „ověřením pomocí měření“ délek úseček LX a LY (s příslušným komentářem, že to ještě není důkaz, ale zatím nám to musí stačit) nebo s výhodou použijeme volný geometrický program GeoGebru. Z úsečky XL oddělíme pomocí „kružítka“ úsečku WL. Je-li bod L bodem hranice, musí být úsečka XW shodná s úsečkou LY, neboli bod W je středem úsečky XL. To v programu zjistíme příkazem „střed úsečky“.

Hranicí mezi mraveništi je zde tzv. Apollóniova kružnice, množina bodů, které mají od dvou různých bodů dané roviny stálý poměr vzdáleností. (Na Apollóniovu kružnici je vhodné upozornit při probírání kuželoseček v analytické geometrii.)

Vraťme se zpět k „biologickému významu“ našeho zjištění. Soužití takových dvou společenství, jako jsou naše mraveniště, nemá před sebou dlouhou budoucnost. Pomalejší (slabší, znevýhodněné) společenství je obklíčené sousedem, takže s ním buď musí splynout, nebo časem vyhynout, až vyčerpá svůj malý životní prostor.

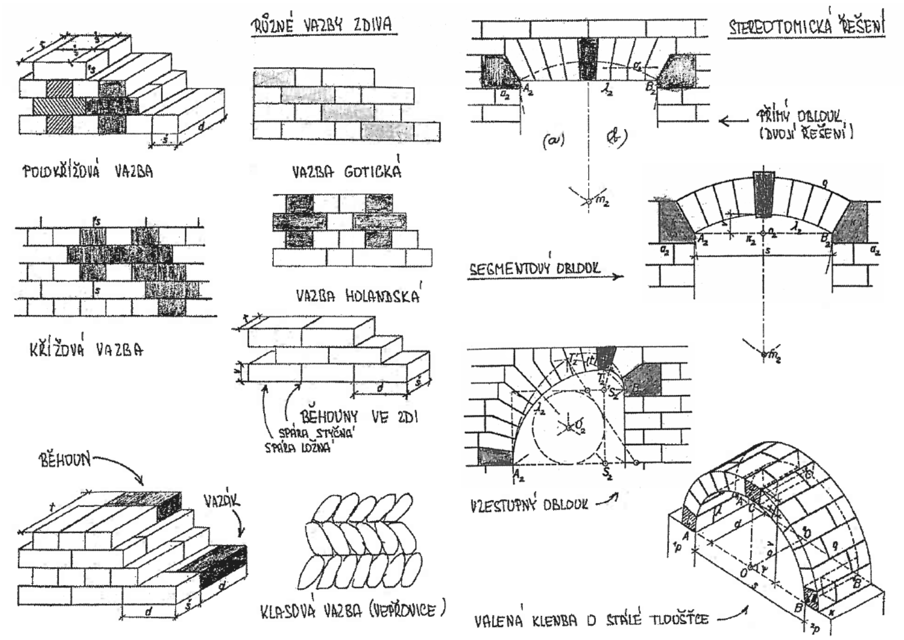
Podobným pokrytím území jsou státy s jejich hranicemi, postupy obydlování ještě neobsazených zemí apod. Zde ovšem není výsledný tvar hranic dán pouze jedním parametrem, ale souhrou dalších podmínek. Např. při osídlování území lidmi hrály velkou roli řeky, které usnadňovaly dopravu neprostupným terénem, při šíření zemědělství úrodnost půdy a nadmořská výška atd. (Pozor! Hovoří-li se o pokrytí území signálem, není to pokrytí v našem geometrickém smyslu. Zde se oblasti pokryté signálem z více zdrojů překrývají! Jde tedy o „inženýrský termín“.)

Podobně jako rovinu můžeme „pokrýt“ i jiné plochy (viz obr. 4). Známé je dělení glóbu pomocí sítí rovnoběžek a poledníků, hvězdné oblohy (pomyslné hvězdné sféry) na oblasti patřící vybraným souhvězdím – ale velmi přízemně lze pokrýt třeba krychli barevným polepem nebo lidské tělo cvičebním trikotem. Moderní stavební plochy a postupy umožňují architektům projektovat budovy s velmi odvážnými a zajímavými plochami. V reálné praxi se některé z nich mohou nahradit (lépe řečeno aproximovat) např. sítí trojúhelníků, jejichž vrcholy na těchto původně plánovaných plochách leží (obr. 4).

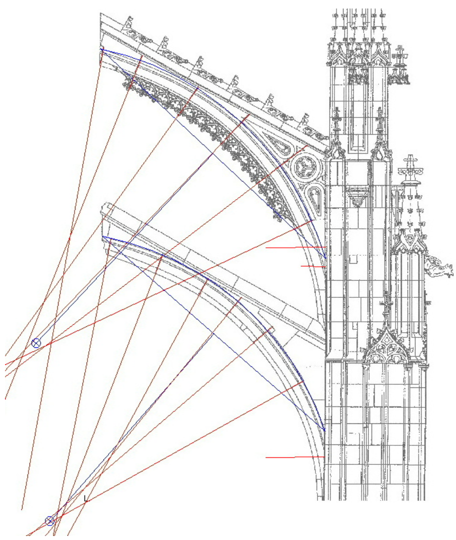


Obr. 4: Pokrývání nerovinných ploch – globus, zastřešení části britského muzea

Velmi často řešíme obdobné úlohy v prostoru. „Celý“ prostor $\mathbb{E}_3$ můžeme vyplnit např. krychlemi či některými jinými mnohostěny. V praxi zde řešíme spíše vyplnění části prostoru, např. dané bedny krabičkami se zbožím, nebo naopak rozřezání daného (nebo plánovaného) velkého tělesa na vhodné části. Klasickým příkladem je využití těchto principů v architektuře. Na obr. 5, 6 a 7 jsou znázorněny různé způsoby kladení cihel a dalších tvarovek a dělení opěrného gotického pilíře na menší kameny, s nimiž lze při stavbě manipulovat. V těchto případech je však nutné přihlížet k zátěži stavby a použité dělení nelze volit libovolně. (Možnosti a zákonitosti takové práce studuje stavební obor stereotomie.) Kromě geometrie zde má slovo i statika, druhy a vlastnosti materiálu atd.

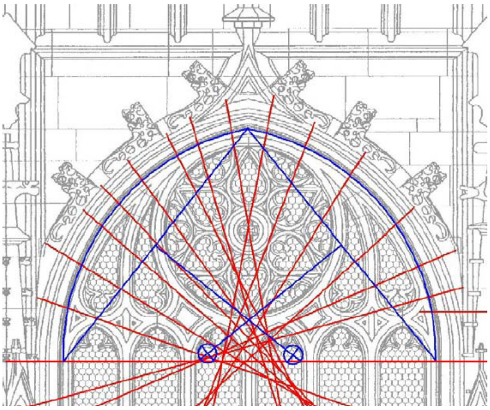


Obr. 5: Vyplňování či dělení daných prostorů ve stavebnictví



Obr. 6: Kontrola kamenořezu opěrného oblouku (M. Pospíšil)

S praktickým využitím všeho, co souvisí s pokrýváním ploch a dělením prostoru, se setkáváme denně. Jen si to málokdy uvědomujeme. Geometrie se ve svých aplikacích skrývá všude, kam pohlédneme – a denně ji (často nevědomky) užíváme.



Obr. 7: Stereotomie pozdně gotického okna (M. Pospíšil). Kamenořez nosné části oblouku je veden (s výjimkou spár vpravo u paty) mimo středy příslušných kružnic do vzdálenějších stereotomických středů, které by odpovídaly většímu poloměru zakřivení.

S pokrýváním částí roviny i s dělením těles se setkávají žáci na základní škole. Při výpočtech obsahu mnohoúhelníků často užíváme jejich rozdělení na vhodné části, z nichž lze složit jiné mnohoúhelníky stejného obsahu, pro něž už vzorce k výpočtu známe (kosodélník, trojúhelník a lichoběžník na obdélník atd.). Obdobně ve stereometrii můžeme ukázat rozložení krychle na tři shodné čtyřboké jehlany. V některých předválečných učebnicích byla uvedena obecnější varianta – rozložení čtyřbokého kosého hranolu (tzv. rovnoběžnostěnu) na tři jehlany stejného obsahu. Tentokrát ale již jsou jen dva jehlany navzájem shodné, takže tento model je méně názorný. Myslím, že pro většinu současných studentů středních škol by příliš vhodný nebyl.

Literatura

[1] Issam as-Said, Ayse Parman, *Geometrická koncepce v islámském umění*, Argo, Praha, 2008.

[2] J. Klíma, K. Šimek, *Kamenořez*, edice Cesta k vědění, svazek 29, JČMF, Praha, 1944.

[3] A. Šarounová, *Geometrie a náš svět*, Nakladatelství P3K, Praha, 2012.

[4] Š. Voráčová a kol., *Atlas geometrie*, Academia, Praha, 2012.

PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`sarounov@karlin.mff.cuni.cz`

MATEMATIKA V MEZIPŘEDMĚTOVÝCH VZTAZÍCH

Vlasta Moravcová

Podle [5] je pojem *mezipředmětové vztahy* definován jako *vzájemné souvislosti mezi jednotlivými předměty, chápání příčin a vztahů, přesahujících předmětový rámec, prostředek mezipředmětové integrace.* Tímto příspěvkem bych ráda ukázala, že matematika se v průběhu studia základní a střední školy prolíná s dalšími předměty, a to i s těmi, v nichž bychom ji možná nehledali.

1 Běžné mezipředmětové vztahy matematiky

Mezi známé a často uváděné mezipředmětové vztahy matematiky (naposled například ve *Školních vzdělávacích programech*) patří bezpochyby souvislost matematiky s fyzikou, dále s chemií (úlohy o směsích aj.), biologií (genetika aj.), zeměpisem (mapy, technické plány, výkresy aj.), deskriptivní geometrií (kuželosečky, volné rovnoběžné promítání aj.), výtvarnou výchovou (práce s náčrtkem, zlatý řez aj.) nebo základy společenských věd (finanční produkty, indukce a dedukce aj.).

2 Matematika v dalších předmětech

Vedle výše uvedených předmětů by se nemělo zapomínat na souvislosti matematiky s dalšími oblastmi vzdělávání. Učitel matematiky může vhodnými poznámkami doplňovat svůj výklad prakticky neustále a upozorňovat tak, mimo jiné, studenty na skutečnost, že se s matematikou setkávají téměř všude – ať už v dalším studiu či v zaměstnání (předejdeme tak oblíbené otázce *K čemu mi to bude?*[1]).

V současnosti je moderním a rozvíjejícím se předmětem **informatika** (či výpočetní technika). Zde se bez matematiky opravdu neobejdeme. Nezbytný je například pojem funkce, který žáci využijí při tvorbě tabulek v tabulkových procesorech (např. *Calc*, *Excel* apod.), ale také se s funkcemi setkají při určování složitosti algoritmu nebo při programování vůbec. Kdo se chce věnovat počítačové grafice, musí nutně pochopit základy analytické geometrie a mohla bych ve výčtu pokračovat dále.

Matematiku nalezneme také v **hudbě**. Stačí připomenout pojmy jako intervaly, ladění, rytmus, notový zápis, transpozice atd. Ze středoškolské matematiky lze uplatnit základní aritmetické operace, počítání se zlomky, poměry délek aj. Inspiraci lze nalézt například v [3].

Kdo má dojem, že matematika nemá mnoho společného s **češtinou** (či s jazykem obecně), patrně nikdy neslyšel o *matematické lingvistice.* Sice se s tímto

[1] Odpověď na tuto poměrně frekventovanou otázku lze řešit mnoha způsoby – viz [1].

předmětem na středních školách nesetkáme, avšak počítačové slovníky, překladače a další pomůcky, které se vyvíjejí právě díky této moderní vědě založené na matematice, používají už žáci základních škol. Není také náhodou, že žáci s vyvinutějším matematickým myšlením si většinou lépe poradí například s větnými rozbory v českém jazyce.

Jistě je bezesporný vliv vývoje dějin na rozvoj matematiky a současně vliv vývoje matematiky a technických věd na rozvoj lidstva. V hodinách lze ovšem zmínit i některé konkrétní případy z **historie** – například vývoj číselných soustav. Ne vždy si žáci sami od sebe uvědomí výhody poziční desítkové soustavy a užívání arabských číslic, popřípadě se domnívají, že se takto počítalo a zapisovalo odjakživa. Je dobré jim ukázat, že tak tomu není (problémy při počítání s římskými číslicemi, jiné číselné soustavy, egyptské kmenové zlomky, ...).

Krásnou souvislostí matematiky a **filozofie** je matematické vysvětlení problému Zénónových[2] aporií. Pro snadné a názorné vyvrácení tvrzení, že *Achilleus želvu nikdy nedohoní*, lze použít součet nekonečné geometrické řady. Aporie jsou také vhodnou příležitostí k vysvětlení rozdílu mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem.

S matematikou, dějepisem, zeměpisem a fyzikou souvisí vývoj kalendářů a měření času. Zde můžeme najít mnoho ukázek aplikace matematiky, užití logiky, různé způsoby zápisu čísel, použití různých číselných soustav, převody (netradičních) jednotek apod. Se základním povědomím o vzniku a vývoji kalendářů předchozích civilizací[3] si nebudeme myslet, že dle Mayského kalendáře nastane konec světa v roce 2012!

3 Závěr

Nakonec bych ráda uvedla, že jako učitelka nepovažuji za podstatné, kolik máme ve *Školním vzdělávacím programu* u matematiky uvedených mezipředmětových témat, a ani si nemyslím, že je třeba za každou cenu hledat uplatnění matematiky v dalších odvětvích. Stačí se dívat okolo sebe, všímat si přirozených souvislostí a být nadšený pro věc, protože toto nadšení se pak přenáší i na naše žáky.

Jako malý důkaz mohu uvést obrázek elipsy (obr. 1) „vyrýsované“ do záhonu, který mi před lety poslala má bývalá žákyně o letních prázdninách (tehdy absolventka primy šestiletého gymnázia) s komentářem, že se jedná o přípravu k založení skalky (v průběhu školního roku jsme si ukazovali zahradnickou konstrukci elipsy). Není podstatné, že tvar má k dokonalosti daleko. Mnohem důležitější je, že jsme měly obě radost z dobře odvedené práce.

---

[2] Řecký filozof Zénón z Eleje žil v 5. století př. n. l. Známé jsou jeho aporie (spory) *Neexistence pohybu*, *Achilleus a želva*, *Letící šíp* a *Stadion*. Podrobněji o Zénónových aporiích viz [2]. Na internetu je také k dispozici pěkně zpracovaná seminární práce *Matematika a logické paradoxy*, v níž je jedna kapitola věnována Zénónovým aporiím [`http://absolventi.gymcheb.cz/2008/sttezka/cssmatika/matika.html`].

[3] Podrobně a přehledně se této tematice věnuje monografie [4].

Obr. 1: Elipsa vytvořená zahradnickou konstrukcí

Poděkování:

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.*

Literatura

[1] J. Bečvář, *K čemu mi to bude? aneb Milý Pepíčku …* , Učitel matematiky 18 (2010), 111–118.

[2] J. Bečvář, *Hrdinský věk řecké matematiky*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.), *Historie matematiky II*, Prometheus, 1997, 7–28.

[3] R. Berger, B. Riečan (ed.), *Matematika a hudba*, Veda, 1997.

[4] M. Bláhová, *Historická chronologie*, Libri, 2001.

[5] J. Průcha, E. Walterová, J. Mareš, *Pedagogický slovník*, Portál, 2003.

RNDr. Vlasta Moravcová
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`morava@karlin.mff.cuni.cz`

Gymnázium Na Pražačce
Nad Ohradou 23
130 00 Praha 3 – Žižkov
`moravcova@gym-prazacka.cz`

MATEMATIKA A REÁLNÝ SVĚT
Sborník konference

Praha, 20. až 22. září 2012

Antonín Slavík (ed.)

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 425. publikaci

Vydání první
Praha 2012

ISBN 978-80-7378-231-3