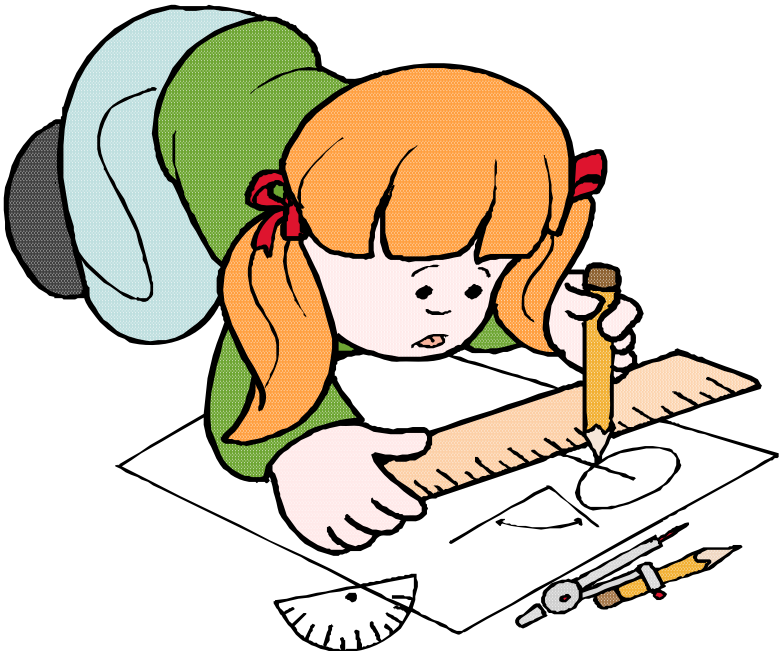
Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Letná škola z teórie vyučovania matematiky

P Y T A G O R A S 2003

Kováčová pri Zvolene, 1. 7. – 8. 7. 2003



Zborník príspevkov

Vydané s podporou grantu GAČR 406/02/0829
„Matematické vzdělávání orientované na žáka“

Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2003, ktorá sa konala v dňoch 1 .7. – 8. 7. 2003 v Kováčovej pri Zvolene pod záštitou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov.

ISBN: 80-968815-6-6

Zostavovatelia: Vladimír Burjan, Milan Hejný, Štefan Jány

Grafická úprava, tlač a distribúcia: EXAM ®, P. O. Box 215, Vranovská 6, 854 02 Bratislava 5
(+4212) 63 81 26 89, 63 82 49 52,
e-mail: info@exam.sk
Internet: www.exam.sk

Vydané s podporou grantu GAČR 406/02/0829 „Matematické vzdělávání orientované na žáka“

Za obsah príspevkov zodpovedajú ich autori.
Neprešlo jazykovou korektúrou.

Náklad: 150 ks
Nepredajné

Obsah

Hynek Bachratý: *Logika nápisov a tabuliek* 3

Hynek Bachratý: *Nové trendy v spoločenských hrách* 9

Katarína Bachratá, Hynek Bachratý: *Sezamko a MaK* 13

Dagmar Bartóková: *Montessori výchova pre predškolský vek* 19

Zuzana Berová: *Projekt vo vyučovaní matematiky na základnej škole* 21

Milan Hejný: *Diagnostika aritmetické struktury* 22

Milan Hejný: *První informace o problematice, která je řešena v rámci grantového projektu GAČR 406/02/0829 Matematické vzdělávání orientované na žáka* 43

Jana Kratochvílová, Eva Swoboda: *Analýza nedorozumění při komunikaci se žákem* 49

Ivan Kupka: *Nekonečne malé a veľké čísla rehabilitované* 56

Erika Kupková: *Nekonečne malé a veľké veličiny – historický vývoj pojmu* 59

Ladislav Kvasz: *Matematika a teológia* 64

Ivan Masaryk: *Ako odhadnúť čas podľa hviezd?* 70

Anna Michalcová: *Prečo sa bojíme chyby? Príprava dielne* 73

Eva Pavelová: *Priestorová predstavivosť a vyučovanie* 78

Naďa Stehlíková: *Ilustrace konstruktivistických přístupů k vyučování na vysoké škole* 83

Stefan Turnau: *Nowy podręcznik dla klasy czwartej* 89

Eva Zapotilová: *Sebereflexe – prostředek změny postoje studentů k matematice* 96

Oľga Zelmanová: *Vybrané partie z položkovej analýzy matematického testu z monitoru maturantov* 101

Ján Žabka: *Feuersteinov kurz inštrumentálneho obohacovania* 111

Peter Bero: *Večer hudby* 115

Ivan Masaryk: *Pre čo?... Prečo?* 116

LOGIKA NÁPISOV A TABULIEK
(Úlohy o autoreferenčných sústavách výrokov a viet)

Hynek Bachratý, Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina

Zaujímavé úlohy súvisiace s matematickou logikou zrejme majú svoje čaro a príťažlivosť. Páčia sa deťom (aspoň čo sa týka mojich skúseností), prinášajú dobrý pocit prednášateľom na matematických krúžkoch a táboroch, a priťahujú aj autorov – za všetkých (kvalitných) spomeňme Raymonda Smullyana.

Okrem toho, že sa páči, je táto oblasť matematického vzdelávania zrejme aj užitočná a otvorená konštruktivistickým prístupom. Nad paradoxom Kréťana je ochotný, aspoň na chvíľu, sa zamyslieť aj zásadný odporca matematiky a matematicky zapálené deti sú podobným úlohám ochotné venovať veľa času a energie.

Dobrým dôvodom je tiež skutočnosť, ako sa tejto oblasti venuje „školská“, hlavne stredoškolská matematika. Súdiac podľa jej výsledkov (napr. mojich študentov v 1.ročníku VŠ), ale aj spôsobu vyučovania a postrehov mnohých z nás často skĺzava k týždeň trvajúcemu formálnemu vypĺňaniu tabuliek pravdivostných hodnôt a nedôslednému matematickému vyjadrovaniu vo zvyšnom čase. Záujmová matematika tu môže pomôcť, či už prípravou pôdy alebo naprávaním prešľapov.

Pre istotu a upresnenie – keď budem v tomto článku hovoriť o logike, mám na mysli jej formu vhodnú pre žiakov II. stupňa ZŠ a študentov SŠ. Presnejšie uvažujeme o logike v tej forme, v akej ako dôsledok riešených úloh vzniká a „prebieha“ v ich hlavách. Bez nároku na úplnosť sa ju pokúsim charakterizovať týmito črtami:

- Uvažujeme o tvrdeniach a ich pravdivostných hodnotách (...a kráľ ešte povedal, že najviac jedno z jeho tvrdení je nepravdivé...).
- Zvažujeme konzistentnosť a vzájomný pravdivostný súvis viacerých tvrdení (...ale ak by bolo toto tvrdenie pravdivé, potom by muselo byť tamto tvrdenie tiež pravdivé...).
- Zvažujeme konzistentnosť tvrdení s nejakou reálnou situáciou (...ak by bola princezná vo vedľajšej miestnosti, potom by toto tvrdenie nebolo pravdivé...).
- Vytvárame a ďalej pracujeme s negáciami tvrdení (...ale ak klamal, potom musí platiť...).
- Vytvárame dlhé súvislé reťazce odvodení, argumentujeme veľmi presne (...ak by toto tvrdenie bolo pravdivé, potom by tu musel byť portrét, ale potom platí aj druhé tvrdenie, ale podľa neho...).
- Nachádzame logické spory a zmysel majú aj „negatívne“ výsledky (...ak by toto tvrdenie bolo pravdivé, muselo by byť zároveň aj nepravdivé, ale to je nezmysel, a preto musí byť pravdivé...).

Dostatok „materiálu“ na vyvolanie tohto spôsobu uvažovania nám poskytujú známe série úloh o klamároch a poctivcoch, krabičkách krásnej Porcie, ostrove Otázok, princeznách a tigroch atď. Ako zdroj nám najlepšie poslúžia skvelé knihy už spomenutého R. Smullyana. Okrem zaraďovania rôzne „prebalených“ úloh tohto typu do korešpondenčných seminárov a iných súťaží v riešení úloh majú veľký úspech aj prednášky komponované z kaskády takýchto úloh. Osvedčili sa nám najmä pre žiakov druhého stupňa ZŠ. Okrem obsahu za dôležitú a možno rozhodujúcu považujeme aj ich formu. Úlohy boli komponované do motivačného a dej posúvajúceho rozprávkového príbehu. Samotné riešenie úloh prebiehalo v 3 alebo 4 členných skupinkách (každá zodpovedala napr. jednému princovi hľadajúcemu princeznú), pričom úlohou skupiny bolo nájsť, navzájom si vydiskutovať a nakoniec sa zhodnúť na jednom spoločnom riešení. To potom prezentovali pred celým plénom. Prednášajúci, okrem posúvania deja a zadávania nových úloh, má za úlohu usmerňovať diskusiu,

zabezpečiť aby bol prezentovaný každý spôsob riešenia úloh a aby pred plénom aspoň raz vystúpilo každé z detí.

Posledným argumentom v prospech uvedenej témy je pohľad do histórie. Podľa všetkého sa logika narodila a kultivovala v prvom rade ako nástroj pre vedenie diskusií na agorách gréckych polis a až potom vznikla jej prvá formalizácia v Aristotelových prácach. Zdá sa preto, vzhľadom na známy súvis ontogenézy a fylogenézy, že vyššie popísaná forma prednášok a vek jej účastníkov je takmer optimálny.

Samozrejme bolo lákavé dobré skúsenosti z II. stupňa ZŠ preniesť aj na stredoškolákov. Pre ich potreby je ešte stále únosná „tímovo-prezentačná" forma prednášky, bolo ale potrebné zvýšiť obťažnosť a atraktívnosť úloh. Nasledujúca sada je mojim pokusom o vyriešenie tohto problému. Každá úloha spočíva v analýze pravdivosti viet uvedených na jednej tabuľke, pričom všetky tvrdenia sa týkajú práve pravdivosti viet na tejto tabuľke. Ide teda o rôzne varianty autoreferenčných tvrdení. V podstate kompletná sada úloh odznela na 1,5 hodinovej prednáške pre žiakov stredných škôl a hodinový výber úloh pre žiakov 8. a 9. ročníka ZŠ. Pre žiakov SŠ bol počet tvrdení na jednotlivých tabuľkách zväčša určený premennou, pre žiakov ZŠ bol tento počet konkrétny (zväčša desať viet). U stredoškolákov sme tiež rýchlo prešli na rôzne skrátené formy zápisu zadaní a riešení, smerujúce až k formalizácii podobnej štandardnej logike. V tomto článku úlohy uvediem v „ZŠ forme".

Väčšina úloh je uvedená vo viacerých variantoch (A, B, C), ktoré stupňujú alebo upevňujú postupy objavené a použité pri jej riešení. Celá sada úloh je dosť prirodzene gradovaná od ľahších k ťažším úlohám. Ku každej úlohe uvádzam okrem zadania aj stručný komentár. V optimálnom prípade by všetky uvedené a naznačené riešenia (a asi aj mnohé ďalšie) mali objaviť deti, úlohou prednášateľa je poskytnúť priestor na ich prezentáciu. Čitateľom odporúčam, aby sa najskôr pokúsili úlohy riešiť sami.

1A: **Na tejto tabuľke je presne jedno pravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú presne dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

(Pre SŠ posledná veta znela „**Na tejto tabuľke je presne *n* pravdivých tvrdení"**.)

Komentár: Úloha umožňuje osvojiť si prácu s kvantifikátorom „práve". Kľúčom k riešeniu je uvedomenie si, že jednotlivé tvrdenia sa navzájom vylučujú. Viacero detí objavilo len jedno riešenie (tie tvrdenia sú v spore, môže platiť len jedno z nich...). Na možnosť iných riešení ich môžeme upozorniť, alebo túto možnosť objavíme pri úlohe 1B.

1B: **Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.**
. . .
Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Zrušíme niekoľko z prvých viet úlohy 1A, čím prídeme o jedno z jej riešení. Pokiaľ sa deti v 1A príliš sústredili na formálnu zviazanosť viet, teraz je viac dôležité aj to, čo tvrdia. Vety 8 až 10 sa stávajú nepravdivé aj z iných ako „vylučujúcich" dôvodov, čo deti väčšinou nepostrehnú (a ani nepotrebujú k riešeniu).

1C: **Na tejto tabuľke je presne nula pravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je presne jedno pravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú presne dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri pravdivé tvrdenia.
. . .

Na tejto tabuľke je presne desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Pribudla zaujímavá prvá veta, je poučné znegovať si ju. Zmenila sa rola poslednej vety, ktorá už nehovorí o celej tabuľke. Stratíme druhé z riešení úlohy 1A.

2A: **Na tejto tabuľke je presne jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú presne dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri nepravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

Komentár: Na prvý pohľad ide o obdobu úloh 1A, deti zväčša aj použijú postup z nich (vety sa vylučujú..), ale záver riešenia je mierne odlišný. Aj pocitovo je zrejme práca s „nepravdivými" tvrdeniami mierne iná ako s „pravdivými".

2B: **Na tejto tabuľke sú presne štyri nepravdivé tvrdenia.**
. . .
Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

2C: **Na tejto tabuľke je presne nula nepravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je presne jedno nepravdivé tvrdenie.
Na tejto tabuľke sú presne dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú presne tri nepravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je presne desať nepravdivých tvrdení.

Komentár: Prínosom úloh je ďalšie jemné rozlíšenie podobností a rozdielov v porovnaní s úlohami 1. Na každej prednáške sa našiel jeden alebo dvaja žiaci, ktorí objavili izomorfizmus úloh 1 a 2. Ich riešenie (a pochvalu) sme prebrali individuálne, u ostatných zostal súvis úloh viac v intuitívnej polohe.

3A: **Na tejto tabuľke je práve jedno pravdivé tvrdenie.**

3B: **Na tejto tabuľke je práve jedno nepravdivé tvrdenie.**

(Ide o dve úlohy, teda aj dve tabuľky.)

Komentár: Pred týmito úlohami sa s deťmi zhodneme, že tabuľky z úloh 1 a 2 nám už teda nerobia žiadne problémy. V tom sa utvrdíme pri úlohe 3A a sklameme pri úlohe 3B. V nej si ujasníme „neriešiteľnosť" tabuľky a odložíme ju medzi nepodarky. Niektoré tabuľky proste nie je povolené vyrábať.

4A: **Na tejto tabuľke je aspoň jedno pravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú aspoň dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Zmena kvantifikátora zmení (pre niektoré deti prekvapujúco) spôsob riešenia úlohy, čo ich spätne upozorní na potrebu pozorného narábania s nimi. Podstata riešenia spočíva v „dedení" pravdivosti smerom k vrchu tabuľky (objavia všetci), resp. v dedení nepravdivosti smerom dole (napadne najskôr len niektorých). Medzi deťmi sa pre tento jav ujal termín „logická indukcia". Cesta od nej k objaveniu všetkých riešení je veľmi príjemná.

4B: **Na tejto tabuľke je aspoň nula pravdivých tvrdení.**
Na tejto tabuľke je aspoň jedno pravdivé tvrdenie.

Na tejto tabuľke sú aspoň dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Elegantné riešenie vychádza zo správnej analýzy pridanej prvej vety. To, čo nasleduje, deti spontánne nazvali logické domino.

4C: **Na tejto tabuľke sú aspoň tri pravdivé tvrdenia.**
. . .
Na tejto tabuľke je aspoň desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Malá zmena opäť zmení „fungovanie“ úlohy. Prvýkrát sa môže objaviť potreba prerátavania počtu viet v súvislosti s ich tvrdeniami. Úloha sa ešte zmení (a zjednoduší), ak začneme až s vetou o šiestich (alebo viac) tvrdeniach.

5A: **Na tejto tabuľke je najviac jedno pravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú najviac dve pravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú najviac tri pravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je najviac desať pravdivých tvrdení.

Komentár: Ďalšia zmena kvantifikátora spôsobí ďalšie komplikácie. Aj pre žiakov SŠ sme museli najskôr vyriešiť konkrétnu úlohu (pre 6 viet) a až potom sa vrátiť k tabuľke s n tvrdeniami. „Indukcia“ z úlohy 4A sa osvedčí aj v tejto úlohe, aj keď funguje opačným smerom a pocitovo bola pre deti práca s týmto kvantifikátorom mierne náročnejšia. Najskôr si pomohli určitým mechanickým prenesením postupov z úlohy 4A a potešili sa, ako rýchlo prišli k riešeniam. O to väčšie bolo prekvapenie, keď sa zistilo, že riešenia sú nesprávne. Rozdiel je v tom, že zatiaľ čo vety z úlohy 4A si súlad so svojim tvrdením a počtom príslušných viet na tabuľke zabezpečujú „svojpomocou“, v tejto úlohe musia siahnuť na „druhý koniec“ tabuľky. Pri tejto úlohe sa prvýkrát objavili nové postupy riešenia. Jedným z nich bolo preberanie „prípustných“ riešení a kontrola celkovej správnosť tabuľky, riešenie „od krajov“ tabuľky (pouvažujte o prvej a poslednej vete), „krížová“ kontrola a ovplyvňovanie jednotlivých viet (ak je prvá veta nepravdivá, potom to ovplyvňuje predposlednú vetu) atď.

Na tomto mieste by sa dali prirodzene doplniť úlohy 5B, 5C a prípadne „nepravdivé“ varianty úloh 4 a 5. Sú mysliteľné aj ich ďalšie úpravy, prechod na „párne“ varianty tabuliek, vynechanie niektorej (niektorých) viet z tabuliek atď. Riešiteľov týchto úloh určite čakajú vzrušujúce zážitky! V spomenutých prednáškach ale nebolo možné z časových (a ďalších) dôvodov tieto úlohy zaradiť, a pokračovali sme nasledujúcou úlohou.

6: **Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.**
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.

Komentár: Ide u uvedenie ďalšej „zakázanej“ tabuľky. Podrobná analýza oboch viet ukáže drobné odlišnosti v ich „problémovosti“. Niekedy si veta na vytvorenie sporu vystačí sama, niekedy potrebuje spoluprácu druhého tvrdenia. Ide tiež o prípravu na ďalšiu úlohu.

7A: **Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je aspoň osem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.

Komentár: Ide o úlohu z minuloročného ročníka KS SEZAM, ktorej vymýšľanie prerástlo do tejto série úloh. K jej riešeniu treba využiť väčšinu z vyššie získaných skúseností. Posledné dve vety analyzujte podobne ako v úlohe 6, čím sa vyjasní postavenie prvých dvoch viet. Nasledovať môže „preskakovaná“ analýza zvyšných viet, kde napr. pravdivosť ôsmej vety ovplyvňuje tretiu vetu atď.

7B: **Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.
. . .
Na tejto tabuľke je aspoň sedem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.

Komentár: Zlomová úloha. Minimálne vzhľadom na sľub, že úlohy budú nielen obtiažnejšie, ale aj atraktívnejšie. Zopakovanie postupu z predchádzajúcej úlohy nás opäť privedie k zisteniu, že pre prostrednú vetu predpoklad pravdivosti aj nepravdivosti vedie k sporu. Tabuľku teda treba zahodiť resp. zakázať. Na tomto mieste ale deti dostávajú závažnú otázku: „A kto nám sľúbil, že pre každú vetu napísanú na nejakej tabuľke sa musí dať určiť jej pravdivostná hodnota? Videli sme už tri prípady, kde to tak nebolo. Na tabuľke sa vtedy vždy nachádzala veta, ktorej pravdivosť aj nepravdivosť viedla k sporu. Pomenujme tieto tvrdenia **sporné** a prestaňme tajiť ich existenciu. Uvidíme, či sa nám takáto úprimnosť oplatí!“

8A: **Na tejto tabuľke je aspoň jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke sú aspoň dve nepravdivé tvrdenia.
Na tejto tabuľke sú aspoň tri nepravdivé tvrdenia.
...
Na tejto tabuľke je aspoň sedem nepravdivých tvrdení.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.

8B: **Na tejto tabuľke je práve jedno nepravdivé tvrdenie.**
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.

8C: **Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia nepravdivé.**
Na tejto tabuľke sú všetky tvrdenia pravdivé.
Na tejto tabuľke je aspoň jedno tvrdenie sporné.

Komentár: Zavedenie sporných viet znamenalo veľkú zmenu, ktorá deti upútala až fascinovala. Pridanie novej kategórie „pravdivosti“ viet znamenalo zmenu spôsobu riešenia úloh, v rámci ktorej sa ujasňoval význam tohto pojmu. Všetkých potešila „rehabilitácia“ zavrhnutých tabuliek, aj keď nebola triviálna. Samozrejme potešenie z riešenia týchto úloh už nechám na čitateľa.

Koniec prednášky priniesol aj krásnu otázku od jedného z poslucháčov: „A kto nám sľúbil, že každá veta musí byť pravdivá, nepravdivá alebo sporná? Čo ak každá možnosť vedie k sporu?“ Miestnosť sme opúšťali vo viacerých zanietene diskutujúcich skupinkách...

Na záver pár poznámok. Ďalšie rozvíjanie témy spočíva v hľadaní ďalších pekných úloh podobných úlohám 8. Všetky sa dajú ďalej modifikovať pridaním iného typu „sporných“ tvrdení („na tejto tabuľke je presne jedno tvrdenie sporné“, „na tejto tabuľke nie je žiadne sporné tvrdenie“ atď.). S každým z čitateľov sa rád podelím o nové objavy a skúsenosti v tejto oblasti.

Hlavný problém témy spočíva v jej rozsahu. Na prednáške pre stredoškolákov sme riešili všetky uvedené úlohy. Asi len ich výnimočná zdatnosť spôsobila, že sme sa vtesnali do 1,5 hodinového časového limitu. Zlom medzi úlohami 7 a 8 zapôsobil na deti ako živá voda, ale aj tak sme sa pohybovali na hranici ich únavy a pozornosti. Asi najschodnejšie pre ďalšie rozvíjanie témy je jej rozloženie do viacerých pokračovaní, čím sa ale môže stratiť je „údernosť“.

Pre žiakov ZŠ odzneli počas 1 hodiny úlohy 1A, 1C, 2A, 2C, 3A, 3B, 4A, 4B, 6, 7A, 7B (úlohu 7A všetci poznali a riešili v rámci korešpondenčného seminára) a 8A. Úlohy deti zaujali, ale zavedenie „sporných“ viet ich až tak neoslovilo (a nebolo na ne dosť času). Pri prípadnom opakovaní by som túto časť úplne vypustil a radšej sa sústredil na úlohy 5. Téma je ale asi vhodnejšia pre študentov SŠ.

A miesto záveru jedna prémia. Presnejšie, môj príspevok k problematike kozmických letov. Analyzujte pravdivosť tvrdení na nasledujúcej tabuľke:

Účastníci EXODu 2003 boli na výlete na Marse.
Predchádzajúca veta je nepravdivá.
Predchádzajúca veta je nepravdivá.
Predchádzajúca veta je nepravdivá.
Predchádzajúca veta je nepravdivá.
Väčšina viet na tejto tabuľke je nepravdivá.

e-mail: hynek@kst.fri.utc.sk

NOVÉ TRENDY V SPOLOČENSKÝCH HRÁCH
(Platónske telesá pre nás a našich žiakov)

Hynek Bachratý, Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina

Pravidelné mnohosteny, čo je iný názov pre Platónske telesá, sú súčasťou matematiky minimálne už od starého Grécka. V Euklidových „Základoch“ je im venovaná celá trinásta kniha, ktorá obsahuje nielen ich popis, ale aj dôkaz, že okrem tých „Platónových“ už žiadne ďalšie neexistujú. Na prvý odhad by človek očakával, že pôjde o dôkaz ťažký a zložitý. Opak je ale pravdou. Je prístupný už žiakom posledných ročníkov ZŠ (odhadom od 7. triedy podľa ich matematickej vyspelosti). V nasledujúcom texte je dôkaz dokonca trochu „prifúknutý“ – urobíme viac, ako by bolo nevyhnutne treba. Z matematického hľadiska je téma veľmi pestrá – obsahuje partie z rovinnej a priestorovej geometrie, intuitívne sa dotkneme teórie grafov a topológie, budeme zostavovať a riešiť rovnice, urobíme zopár kombinatorických úvah. Za dôležitú považujem ďalej ilustráciu vzájomných súvislostí a prepojenia na prvý pohľad vzdialených oblastí matematiky a to, že získame (minimálne z pohľadu detí) naozaj silný výsledok. Práve vzhľadom na rozmanitosť použitého aparátu pôsobí až monumentálnym dojmom.

V ďalšom budem text, zodpovedajúci priamej reči k deťom, uvádzať *kurzívou* (komentáre bežným spôsobom). Väčšinu oznamovacích viet môžeme samozrejme nahradiť otázkami a nechať hovoriť najmä deti. Úvodná motivácia témy vysvetľuje mierne mätúci názov článku. Slovo kocka budeme uvažovať v dvoch rôznych významoch (šesťsten a hracia pomôcka), ich rozlíšenie dúfam nebude robiť problém. Geometrická téma by si asi vyžadovala množstvo obrázkov. Tie ale s veľkou námahou zvládam voľnou rukou (a škaredo) kresliť na tabuľu. Odporúčam preto čitateľovi, aby si k čítaniu pribral papier s ceruzkou a ilustrácie si priebežne dopĺňal. Celé rozprávanie je zložené z niekoľkých relatívne samostatných blokov. Podľa úrovne poslucháčov, oblasti na ktorú sa chceme sústrediť, a často dostatku resp. nedostatku času počas rozprávania, pri každom z nich môžeme zvoliť hĺbku a aj časový rozsah, s akým sa mu budeme venovať. Na niektorých miestach v texte na túto možnosť ešte zvlášť upozorníme.

Na svete existuje množstvo spoločenských hier. Stavím sa ale, že jednu z nich hral každý z vás, a je určite najznámejšia. Je taká známa, že vám ani nemusím hovoriť jej meno. Pokiaľ by vám to vadilo, tak sa na mňa nesmie hnevať... Už viete, ktorá to je?

Tiež sa asi rýchlo zhodneme na tom, ktorá z pomôcok používaných pri tejto hre do nej vnáša najviac nervov, napätia a očakávania. Áno, je to kocka. Preto aj bádanie nad možnosťami ďalšieho rozvoja a zdokonalenia tejto hry začneme pri nej. Určite by sme privítali možnosť zahrať si človeče aj na iný počet ako 1 až 6 ťahov, nasadzovať napríklad na šťastnú sedmičku alebo prejsť na jeden hod 15 krokov. K tomu nám už stará dobrá kocka nebude stačiť a treba vymyslieť jej nové modely. To ale nie je jednoduché. Určite by ste protestovali, ak by niekto chcel na hru použiť rôzne nepravidelné a škaredé útvary, aj keď aj na tie sa dajú napísať čísla od 1 do vhodného čísla. Čím je teda kocka, s ktorou sme ochotní hrať, taká výnimočná? Aké vlastnosti by mali mať telesá, ktorými by sme ju mohli nahradiť? Existujú ešte aj iné ako kocka? A ak áno, koľko ich je a ako vyzerajú?

Na tomto mieste necháme deti formulovať (samozrejme s primeranou presnosťou) vlastnosti, ktoré budeme požadovať od pravidelných telies. Zbierka návrhov a diskusia okolo nich býva vždy veľmi bohatá. Určite padne návrh, že steny musia byť zhodné mnohouholníky. Poukazmi na potrebu pravidelného kotúľania a prevracania kocky sa rýchlo vyjasní, že mnohouholník musí byť pravidelný, často pribudne aj požiadavka na rovnaké stenové uhly pri každej hrane. Ak pridáme požiadavku, aby kocka postavená na vrchol padla s rovnakou pravidelnosťou na ľubovolnú z priľahlých stien, dostaneme potrebu „symetrického“ rozdelenia hrán vychádzajúcich z vrcholu. V rôznych formách sa tiež objavuje požiadavka, aby teleso v každom vrchole bolo „také isté“. Môže tiež padnúť pripomienka, aby sa dalo jasne určiť, ktoré číslo vlastne padlo, t. j. ktorá stena je „vrchná“. (Tento problém, vzhľadom napr. na štvorsten, navrhujem riešiť sklenenou doskou stola a prechodom na

„spodnú“ stenu.) Požiadavkou, aby kocka mohla padnúť na každú zo svojich stien, vylúčime rôzne duté, deravé a nekonvexné telesá. Tento názor je možné, a ak sa dá aj vhodné, doviesť až k názoru, že kocka vlastne predstavuje vhodne zdeformovanú guľu. Môžeme si tiež ujasniť, že v každej hrane sa budú stretávať práve 2 a v každom vrchole aspoň 3 steny.

Pre túto pasáž rozprávania treba mať pripravenú sadu rôznych odstrašujúcich telies alebo ich častí, ktoré deťom pripomenú niektoré dôležité a potrebné vlastnosti. Debata býva podnetná, potrebujeme si ju len postrážiť z časového hľadiska. Vzniknutý zoznam vlastností býva bohatý a väčšinou „predefinovaný“, pričom dodržanie mnohých vlastností by sme v ďalšom ani neboli schopní sledovať a dodržať. Môžeme sa preto obmedziť len na niektoré z nich (rovnaký počet zhodných pravidelných mnohouholníkov v každom vrchole, príbuznosť s guľou), zvyšné vlastnosti si môžeme overiť až na objavených telesách.

Než sa pustíme do hľadania tvarov našich nových kociek, mohli by sme si uvedomiť, z akých „súčiastok“ budú poskladané. Ktoré to podľa vás sú? (Vzhľadom na predchádzajúcu debatu sa rýchlo zhodneme, že ide o vrcholy, hrany a steny.) *A podobne ako pri plánovaní stavby domu, aj nám by pomohlo, ak by sme objavili pravidlá, podľa ktorých si tieto súčiastky treba pripraviť, ako spolu súvisia. Ako je to pri kockách a telesách, ktoré poznáme?* (Podľa času môžeme počítať a prípadne zapísať ich počet pre kocku, ihlany, kvádre. Situácia by ale mala byť neprehľadná, žiadnu súvislosť zatiaľ neobjavíme.) *Skúsme teraz jeden trik. Dohodli sme sa, že kocky môžeme vyrobiť z gule. Teraz to skúsme využiť naopak. Predstavte si ľubovolnú kocku vyrobenú z gumy - tú by sme si mohli nafúknuť do tvaru lopty. Vrcholy zostanú vrcholmi, hrany a steny sú síce zdeformované, ale ešte stále vieme čomu zodpovedajú. Takýmto obrázkom hovoria matematici grafy. Ten náš má jednu zvláštnosť – je nakreslený na guli. Vieme ho ale dostať do roviny. Predstavte si, že do vrchnej steny urobíme dieru, vopcháme do nej ruky a pomaly začneme dieru zväčšovať a guľu rozťahovať. Postupne z nej dostanem polguľu, a nakoniec ju „vyžehlíme“ naplocho do roviny.* (Tento postup je dobré bohato ilustrovať obrázkami.) *Vrcholy a hrany sa mi zachovali, stenám zodpovedajú oblasti ohraničené hranami. A pozor, stene, ktorú sme na začiatku prederavili, zodpovedá celé okolie grafu (a nesmieme na ňu zabúdať). Graf, ktorý sme dostali, musí mať aj jednu zaujímavú vlastnosť: jeho hrany sa dotýkajú len vo vrcholoch, nikde inde sa nepretínajú. Nakreslite si aj vy ľubovolný takýto graf. Máte? Skúste teraz urobiť takúto vec: spočítajte všetky jeho vrcholy, prirátajte ohraničené oblasti (aj s neohraničeným „okolím“) a odčítajte počet hrán. Koľko vám vyšlo? Dva? Všetkým?*

Opäť podľa času resp. schopností poslucháčov môžeme skončiť pri tomto dôkaze Eulerovej vety tzv. „matematickou sugesciou“, alebo si ho naznačiť určitou formou indukcie. Necháme deti popísať, akým spôsobom kreslili (mohli nakresliť) svoj graf. Začali asi tým, že nakreslili prvý vrchol. Pre túto situáciu vzorček platí. Ďalej sa dá postupovať niekoľkými jednoduchými úkonmi: dokresliť nový vrchol a spojiť ho novou hranou s už existujúcim vrcholom, novou hranou spojiť dva existujúce vrcholy, pridať nový vrchol na existujúcu hranu. Spolu s deťmi ľahko overíme, že pri každom kroku sa počet vrcholov, hrán a oblastí zmení tak, že vzorček „nepokazíme“.

V každom prípade túto pasáž musíme zakončiť uvedomením si, že každý rovinný graf spĺňa objavený vzťah a spätná deformácia na guľu a kocku nám zabezpečí platnosť Eulerovho vzorca V(rcholy) + S(teny) – H(rany) = 2 pre všetky nami hľadané kocky.

Keď sme si vyjasnili, aký je základný vzťah „stavebných kameňov“ našich kociek, všimnime si teraz inú vec. Dohodli sme sa, že v každom vrchole sa stretávajú aspoň 3 steny v symetrickej polohe. Pri pohľade zhora (napríklad ak je kocka zavesená na nitke upevnenej vo vrchole) by sme teda mali vidieť aspoň tri hrany zvierajúce rovnaký uhol. Aký ale bude tento uhol? Bude taký, aký je v skutočnom mnohouholníku tvoriacom stenu, teda napr. 60° v trojuholníku? Alebo ho budeme vidieť skreslený? A ako?

Na tomto mieste vyzveme deti, aby si vzali pravý uhol (list papiera) a pozorovali ho z rôznych polôh. Po chvíli zistia, že ho môžu vidieť ako ostrý aj tupý uhol, šikovní dokonca ako nulový alebo

priamy uhol. Teraz nasleduje otázka a analýza, z ktorých miest vidíme uhol menší a z ktorých miest väčší ako 90°. Opäť záleží od okolností, ako presne sformulujeme získané skúsenosti. Výsledkom tejto „pozorovacej etapy“ by malo byť zistenie, že pri pohľade na vrchol mnohostena (zhora) vidíme uhly väčšie. To si možno overiť na kocke, kde tri 90-stupňové uhly vidíme ako 120-stupňové. Rozprávanie postupne prechádza ku finále.

Teraz by sme už mali vedieť dosť na to, aby sme začali s výrobou kociek. Skúsme najskôr pohľadať tie, ktoré sú poskladané z pravidelných trojuholníkov. Tie majú 60-stupňové uhly. Koľko sa ich môže stretnúť vo vrchole kocky? Ak máme vidieť väčší uhol, môžu byť 3, 4 alebo 5. Ak by sa ich stretlo vo vrchole 6, videli by sme uhol 60°. Bude to ešte teleso?

(Mimochodom, parketáže roviny považoval za „nekonečné“ mnohosteny Kepler. Ak tieto úvahy prenesieme do priestoru, otvorí sa nám jedna z ciest do sveta 4-rozmerných pravidelných mnohostenov.) V ďalšom s deťmi preberieme možnosti „vrcholových konfigurácií“ a skladania mnohostenov zo štvorcov, pravidelných päťuholníkov, šesťuholníkov atď. Je možné a pri päťuholníku a sedemuholníku väčšinou aj nutné chvíľu sa venovať otázke veľkosti vnútorného uhla mnohouholníka. Na konci tejto pasáže nám zostane k dispozícii päť kandidátov na správne kocky. Každého z nich si najskôr „vypočítame“ a potom slávnostne predstavíme.

Vidíme teda, že výber sa zúžil len na 5 kandidátov. Zoberme si jedného z nich, napr. kocku, ktorá v každom vrchole spája 5 trojuholníkov. Vieme, koľko súčiastok je treba na jej zostavenie? Zatiaľ nie, ale poznáme už veľa ich vzájomných vzťahov. Označme si počet stien tejto kocky S. Aký bude potom počet jej vrcholov a hrán? Vieme to určiť? (V = (S.3) / 5, H = (S.3) / 2). *Tieto počty ale musia spĺňať podmienku nášho (a Eulerovho) vzorca, teda (S.3) / 5 + S – (S.3) / 2 = 2. Z toho vyrátame S = 20, a po dosadení V = 12 a H = 30. A existuje naozaj kocka, zložená z 12 vrcholov, 30 hrán a 20 stien v tvare trojuholníka? Nuž existuje, volá sa ikosaeder a tu je jej obrázok...*

Táto časť je vyvrcholením celej prednášky, treba si na ňu nechať dostatok času a venovať jej patričnú pozornosť. Samozrejme, najväčšiu časť rátania a objavovania nechávame na deti. Ako parameter pre výpočet a zostavenie rovnice môžeme použiť ľubovolné z čísiel V, H, S, k určeniu zvyšných dvoch parametrov vedú kombinatorické úvahy. Najľahší je postup od počtu vrcholov, najťažší asi od počtu hrán. Každý spôsob „precvičí“ trochu iný spôsob kombinatorických postupov a predstáv. Opäť podľa času a schopností poslucháčov môžeme zvoliť pre všetky telesá jednotný a najľahší postup, striedanie metód, prípadne (pre milovníkov kombinatoriky) každé teleso zrátame všetkými 3 spôsobmi. Tak isto je možné v tomto okamžiku deti rozdeliť do skupiniek a každú nechať objaviť jedno z telies.

Je vhodné zvoliť správne gradované poradie „objavovania“ telies. Základnou možnosťou je postupovať podľa počtu stien, t. j. v poradí tetraeder, hexaeder, oktaeder, dodekaeder a ikosaeder. Prvé dve až tri sú deti schopné aj samé nakresliť a spomenúť si na ne. Je potrebné mať prichystané pekné a rôzne obrázky všetkých telies, ak sú k dispozícii, hodia sa aj 3D modely. Samozrejme obrovské možnosti poskytuje internet, stačí si nechať vyhľadať heslo „regular polyhedra“ alebo „platonic solids“. Na konci článku uvádzam niektoré z mojich obľúbených stránok.

Ako som už spomenul, zmenšovať resp. zväčšovať rozsah a dĺžku prednášky môžeme už počas jej priebehu tým, do akej hĺbky sa budeme venovať jej jednotlivým častiam. V závere sa ešte oplatí (ale nie je to nutné) spomenúť dualitu objavených telies, ktorá uľahčí ich geometrickú predstavu a „ponúka sa“ aj z porovnania počtu ich súčiastok. Hlavne predstava osemstena vpísaného do kocky je veľmi názorná a užitočná.

S realizáciou témy mám množstvo a v zásade iba príjemných skúseností. Pre menej zdatných žiakov ZŠ a pri hodinovom rozsahu je celé rozprávanie na hranici „stihnuteľnosti“, niektoré časti treba prejsť rýchlejšie a vynechať detaily. Naopak, pokiaľ sa téme venujete 90 minút so šikovnými stredoškolákmi, vychutnáte si ju spoločne do posledného detailu. Určitým rizikom je „mudrlant“,

ktorý hneď na začiatku vykríkne „veď to sú tie platónove telesá“, ale zatiaľ sa vždy aj on nechal vtiahnuť do deja a na konci sa potešil aj „znovuobjavenej“ kocke.

Ďalšou výhodou témy je možnosť pokračovať v nej mnohými ďalšími smermi. Hlavne, ak máte možnosť dlhodobejšej práce s deťmi, či už na tábore alebo v triede. Uvediem niektoré možnosti:

- Medzi prezentované (prípadne rozdávané) obrázky zaradíme aj siete telies a vyzveme deti aby z nich zostrojili modely telies. Vyzdobili nám viacero táborov, doma teraz môžem obdivovať aj papierové modely kocky v osemstene alebo štvorstena v štvorstene.
- Archimedove („polopravidelné“) mnohosteny, ktorých steny môže tvoriť viac typov pravidelných mnohouholníkov. Veľmi prirodzené rozvinutie témy, smerujúce skôr do jej kombinatorických a „počtárskych“ častí.
- Siete pravidelných mnohostenov. Ako vyzerajú, koľko ich je, koľkými rezmi sa telesá rozpadajú na rovinnú sieť, úlohy na sieťach.
- Stereometria platónskych telies. Ich objemy, stenové uhly, vzdialenosti vrcholov (pre muchy aj mravce), rozmery vpísaných a opísaných gúľ.
- Duté a deravé telesá. Prechod od Eulerovej formuly k Eulerovej charakteristike. Aká je hodnota výrazu V + S – H pre telesá tvaru pneumatiky, gule s dutinou tvaru gule atď? Tu smerujeme skôr do oblasti topológie.
- Prechod do štvrtého rozmeru. Od populárnej štvorrozmernej kocky môžeme pokračovať až k teórii (pravidelných) štvorrozmerných telies a samozrejme aj ďalej. Aká dualita platí pre 4D telesá? Aký je 4D variant Eulerovej vety? Viete na tomto základe objaviť ďalšie 4D Platónske teleso? A čo ich siete?
- Nadšení programátori sa môžu pustiť do rôznych vizualizácií platónskych telies. Väčšinu dobrých nápadov už asi dostal niekto pred nimi, ale to ich hádam neodradí.
- A aby sme nezabudli, rôznymi úlohami o kvádroch, ihlanoch, počítaním ich „súčiastok“, úlohami o číslovaní vrcholov atď. si môžeme pôdu pre túto tému pripravovať vopred.

Miesto záveru (a obrázkov) sľúbené odkazy:

http://perso.wanadoo.fr/math.lemur/3d/poly.htm
http://www.scienceu.com/geometry/facts/solids/
http://www.friesian.com/polyhedr.htm
http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html

e-mail: hynek@kst.fri.utc.sk

SEZAMKO a MaK
(Nové žilinské aktivity v oblasti záujmovej matematiky)

Katarína Bachratá, Katedra informačných sietí, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina
Hynek Bachratý, Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina

KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR SEZAMKO

V septembri 2002 začal svoju činnosť SEZAMKO – matematický korešpondenčný seminár pre žiakov 5. a 6. ročníka ZŠ. Vznikol v spolupráci s pobočkou JSMF v Žiline, Fakultou prírodných vied ŽU a hlavnou oporou pri jeho vzniku boli skúsení a obetaví organizátori seminára SEZAM.

Dôvody pre jeho vznik boli rôzne: získať riešiteľov pre Sezam, zapojiť do záujmovej činnosti študentov FPV ŽU a nakoniec aj vytvoriť priestor rozvíjania sa v matematike pre vlastné dieťa.

Korešpondenčný seminár SEZAM, ktorý v regióne stredného Slovenska fungoval už vyše 10 rokov, sa vyprofiloval na seminár pre žiakov 7. až 9. ročníka ZŠ. Keď sa robili programy pre širšiu vekovú škálu účastníkov, išlo to buď na úkor kvality alebo bolo potrebné členenie, ktoré bolo kapacitne náročné a málo efektívne. Pretože deťom boli v 5.a 6. ročníku ponúkané iné semináre (MAX, PIKOMAT, MALYNÁR), pociťovali sme v posledných rokoch odliv riešiteľov SEZAMu. Veríme, že riešitelia SEZAMKa sa stanú riešiteľmi SEZAMu.

Prednedávnom vznikla Fakulta prírodných vied ako jedna z fakúlt ŽU. Na fakulte študujú okrem iného budúci učitelia matematiky v kombinácii s inými predmetmi, napr. informatika, angličtina, hudobná výchova. Mali sme možnosť presvedčiť sa, že práca v korešpondenčnom seminári je pre budúceho učiteľa matematiky veľkým prínosom. Preto sme sa rozhodli ponúknuť vedeniu fakulty spoluprácu.

Ukazuje sa, že my ako vlastní rodičia nedokážeme zďaleka tak motivovať nášho syna k riešeniu matematických problémov, ako to dokážu korešpondenčné semináre. Vďaka synovi naopak dokážeme pomerne dobre odhadnúť vhodnosť príkladov (alebo programov na sústredení) pre danú vekovú kategóriu.

Organizácia prvého ročníka SEZAMKa bola silno podporovaná vedúcimi seminára SEZAM. Pri materiálnom zabezpečení pomohli FPV ŽU (rozmnožovanie, rozoslanie prvej série na školy, príspevok na občerstvenie na stretnutí s riešiteľmi), JSMF (nákup obálok, papiera a honorár za prednášky na sústredení) a organizátori, ktorí si sami hradili cestovné, ubytovanie a stravu na sústredení.

Vlastnú činnosť sme začali výberom úloh do korešpondenčnej časti, ktorý urobili organizátori SEZAMu v spolupráci s manželmi Konrádovcami. Výber úloh prebiehal tak, že každý zo zúčastnených (cca 10 ľudí) priniesol 3–4 zaujímavé príklady. Všetky sa spoločne vyriešili a nakoniec sa vybrali dve série po 5 príkladov. K týmto príkladom sme vymysleli rozprávkový príbeh o čarodejníckom učňovi Henrym Monterovi, ktorý potom sprevádzal úlohy zimnej aj letnej časti. Hotové zadania sme poslali do škôl, kde ich učitelia ponúkli deťom. Po troch týždňoch nám deti poslali vyriešené úlohy, spolu s obálkou s nalepenou známkou a napísanou spätnou adresou. Ďalej sme už korešpondovali priamo s deťmi a nezaťažovali sme učiteľov. Po troch týždňoch sme deťom poslali opravené úlohy, vzorové riešenia, poradie a nové zadania.

Na opravovaní sa už podieľali aj študenti 1. a 2. ročníka Fakulty prírodných vied a niekoľko študentov vyšších ročníkov Fakulty riadenia a informatiky a Strojníckej fakulty ŽU. Opravovaniu série predchádzalo niekoľkohodinové stretnutie, kde sme so študentmi preriešili všetky úlohy a spolu s nimi vymysleli čo najviac možných nesprávnych riešení. Na základe toho sme spolu určili, ako budeme jednotlivé príklady bodovať a hlavne ako komentovať chyby v riešeniach. Komentáre boli z motivačného hľadiska dôležité nielen pre riešiteľov, ale aj pre opravujúcich. Ich úlohou bolo každé dieťa pochváliť za to, čo malo v riešení dobré a ukázať mu, kde spravilo chybu (resp. čím by sa jeho riešenie dalo ešte vylepšiť). To ich nútilo k inému pohľadu na žiaka než je ten, ktorý je ešte vždy rozšírený v našom školstve: „Nezaujíma ma, ako si to myslel! Ja ako učiteľ viem, ako to malo

byť správne a ty ako žiak sa máš snažiť urobiť riešenie, ktoré sa čo najpresnejšie priblíži mojim predstavám!“ Na opravenie úloh, vpísanie komentárov, výrobu nových zadaní a zostavenie poradia boli vyhradené dva týždne. Zadania druhej série sme už chystali spolu so študentmi, ktorí často lepšie ako my vycítili, kde by mohli mať deti nejasnosti a ktorému textu by mohli nesprávne porozumieť.

Po dvoch sériách zimnej časti sme v decembri zorganizovali niekoľkohodinové stretnutie najlepších riešiteľov s organizátormi súťaže. Priestory poskytla Žilinská univerzita a veľký podiel na zorganizovaní programu mali organizátori SEZAMu, ktorí už majú s akciami pre deti bohaté skúsenosti. Prostredie čarodejníckej školy sme priblížili vhodným oblečením a sedem hodín sme strávili spolu s deťmi a s matematikou. Na stretnutie prišlo 26 z 50 pozvaných detí (niektoré v sprievode rodičov). Pre tých sme zorganizovali hodinovú besedu s organizátormi. Program pripravilo desať vedúcich zo SEZAMu a desať vedúcich zo SEZAMKa im pri tom pomáhalo. Účastníkov sme hneď po príchode zadelili do štyroch družín, každú družinu mali na starosti dvaja vedúci. V prvom bloku deti riešili príklady. Za správne riešenia získavali body, ktoré im pomohli vyslobodiť Henryho z bludiska v podzemí. Potom nasledovali tri matematické prednášky, z ktorých si deti mohli vybrať. Nasledovalo športové zápolenie v telocvični a nakoniec súťaženie v hrách s vyhrávajúcou stratégiou. Stretnutie skončilo odovzdaním účastníckych listov a sľubom, že na konci letnej časti bude pre najlepších riešiteľov trojdňové sústredenie.

Príklady letnej časti súťaže vyberali v januári vedúci SEZAMu a SEZAMKa spoločne. V letnej časti prebehli 3 série a v každej z nich boli 4 príklady. Časový harmonogram bol podobný ako v zimnej časti. Tri týždne deti riešili a potom dva týždne trvalo opravenie úloh, spracovanie výsledkov, výroba a množenie nových zadaní a rozoslanie toho všetkého naspäť deťom.

Sústredenie pre najlepších riešiteľov letnej časti trvalo tri dni. Tri dni trvalo aj stretnutie, na ktorom sme ho chystali. Príprava spočívala nielen vo vymyslení programu, ale aj v jeho odskúšaní vedúcimi. Sústredenie už viedli len vedúci SEZAMKa bez pomoci vedúcich SEZAMu. Konalo sa vo Varíne pri Žiline a okrem 10 vedúcich na ňom bolo 34 detí (z Košíc, Sabinova, Prešova, Tvrdošína, Ružomberka, Rimavskej Soboty, Šamorína a samozrejme zo Žiliny, Oravy, Kysúc). Deťom aj vedúcim sa veľmi páčilo.

Po skončení prvého ročníka súťaže nemôžeme skonštatovať, či sme zabezpečili dostatočný nábor nových riešiteľov pre SEZAM (ešte nezačal ďalší ročník), ale videli sme ako práca na organizovaní súťaže menila študentov (budúcich učiteľov). Sme presvedčení, že štúdium budúcich učiteľov matematiky na vysokých školách je koncipované dosť nešťastne. Vychádza totiž z predpokladu, že na VŠ prichádza študent, ktorý bravúrne zvláda látku základnej aj strednej školy a má spočítaných množstvo príkladov. A úlohou vysokej školy je dať mu nad jeho vedomosťami vedecký nadhľad. Je síce pravda, že u nás existuje veľa stredoškolákov, ktorí tieto predpoklady spĺňajú, ale bohužiaľ väčšina nepatrí medzi budúcich študentov pedagogických fakúlt. Reálne prídu na VŠ študenti, ktorí majú sotva prerátané príklady zo základných učebníc (pričom napríklad najrozšírenejšie učebnice na ZŠ na Slovensku sú len zbierkou návodov na počítanie určitého typu príkladov a následných úloh na precvičenie tohto návodu). Neštandartných príkladov sa študenti boja. Na VŠ sú im, namiesto pochopenia súvislostí a získania istoty v riešení takýchto úloh, ponúknuté abstrakcie a zovšeobecnenia, ktoré stredoškolskú matematiku ani trochu nepripomínajú. Pedagógovia síce môžu vedieť, ako daná problematika rozširuje učivo ZŠ, ale nemajú čas to študentom vysvetliť. Možno sú aj iné dôvody prečo je tomu tak. Ale pravdou je, že zatiaľ čo v iných oblastiach boli naši organizátori (študenti pedagogického zamerania) rozhľadení a sebavedomí mladí ľudia, v matematike sa spočiatku veľmi úzkoprso držali jediného správneho riešenia a jediného správneho pochopenia príkladu. Báli sa s príkladmi hrať, pozmeniť zadanie a riešiť problémy spolu s deťmi. Báli sa, že by mohli niečo nevedieť. Báli sa polemizovať s deťmi o ich riešeniach. Myslíme si, že to sa po jednom ročníku organizovania korešpondenčného seminára dosť zmenilo. Takže sú prospešní nielen opravovatelia riešiteľom, ale aj naopak.

STREDOŠKOLSKÝ MATEMATICKÝ KLUB MaK.

Rok 2002 bol premiérový aj pre ďalšiu aktivitu v oblasti záujmovej matematiky v Žiline, stredoškolský matematický klub. Ide o ďalšie rozšírenie činnosti skupiny venujúcej sa organizácii KS SEZAM a SEZAMKO pre ZŠ a podieľajúcich sa na organizácii stredoškolského KS KMS.

Najskôr uvediem základnú charakteristiku činnosti klubu. Je primárne určený pre žiakov stredných škôl, samozrejme s predpokladaným záujmom o matematiku. Program sa pripravuje a zameriava na túto vekovú kategóriu. Ako prednášatelia, pozorní poslucháči alebo milí hostia prichádzajú aj starší účastníci, od študentov po učiteľov VŠ. „Členstvo“ samozrejme nie je žiadnym spôsobom formalizované, vítaní sú všetci. Činnosť klubu spočíva v pravidelných stretnutiach raz za mesiac. Zatiaľ máme pre ne vyhradený vždy posledný víkend v mesiaci. Z organizačného hľadiska je ťažiskom každého stretnutia predĺžené sobotné predpoludnie.

V čase od 8.00 do 9.00 prichádzajú a zvítavajú sa účastníci. Od 9.00 do 10.30 prebieha prvá paralelná dvojica prednášok, niekedy upresnená ako dvojica „ťažšia – ľahšia“ alebo „pre mladších – pre starších“. Od 10.30 do 12.30 sa presúvame do telocvične, kde zdokonaľujeme svoje fyzické schopnosti. Účastníci sa rozdelia do 3 – 4 skupín, ktoré navzájom zápolia vo volejbalovom, stolnotenisovom a „švihadlovom“ turnaji. Od 12.30 do 14.00 prebieha druhá dvojica prednášok.

Po 14.00 pokračuje voľnejšia časť stretnutia. Účastníci zväčša vo veľkom kolektíve a dobrej nálade prejdú mestom, prípadne sa stihnú naobedovať. Poobedie od 16.00 vyplní (podľa ročného obdobia) strhujúci zápas v niektorom z obľúbených športov, posedenie pri gitarách, spoločenské hry. Večer býva naplnený debatami v menších skupinkách, návštevami cezpoľných a miestnych účastníkov, ďalším výletom do mesta a pod. V nedeľu sa vydávame na viac či menej náročnú turistiku v okolí Žiliny, ktoré na to poskytuje dostatok možností.

Patrí sa spomenúť, že priestory pre sobotnú časť stretnutia poskytuje Žilinská univerzita, žilinská pobočka Jednoty slovenských matematikov a fyzikov honoruje prednášateľov. Relatívne najnáročnejšie je ubytovanie a stravovanie cezpoľných účastníkov, ktoré sa zabezpečuje „svojpomocne“, v ochotných rodinách niektorých organizátorov a účastníkov. Všetkým patrí za túto podporu vďaka.

Dôvodov, pre ktoré sme sa rozhodli a odhodlali rozbehnúť činnosť klubu je viacero. Uvediem najskôr tie, ktoré sú dôležité z pohľadu stredoškolákov:

- **„Vlastné odrastené deti“**: Pod týmto názvom myslíme veľkú skupinu detí, s ktorou sme sa dostali do kontaktu počas ich súťaženia v korešpondenčnom seminári SEZAM, na táboroch a sústredeniach. Každý rok ich prechádzajú zo ZŠ na SŠ desiatky. Väčšinou túžia zachovať si kontakty a možnosti stretávania sa s vedúcimi aj medzi sebou. Na druhej strane doteraz ponúkané aktivity pre žiakov SŠ, najmä KS KMS a ďalšie stredoškolské KS nestačia a nevedia pokryť tento záujem. Ich celková kapacita (a kapacita sústredení, kde dochádza k osobným stretnutiam) je menšia. Pre mnohých je náročnosť a obtiažnosť KMS už nad ich schopnosti a táto cesta sa definitívne uzatvára. Tak isto nárast školských povinností pri prechode na SŠ mnohým znemožní venovať dostatok času a energie záujmovej matematike. Naopak MaK z tohto hľadiska nevyžaduje viac ako jeden až dva voľné dni do mesiaca, a nemá žiadne kapacitné obmedzenia.
- **„Cudzie nedotknuté deti“**: Vyššie spomenutá skupinka poskytuje základný a výdatný prameň našich účastníkov. Na druhej strane, títo sa prechodom na strednú školu dostávajú do nových kolektívov (a často priaznivo „naklonených“ matematike, napr. vo výberových triedach), získavajú nových priateľov a tých privádzajú na stretnutia MaKu. Tak isto stretnutia MaKu propagujeme na žilinských gymnáziách, odkiaľ tiež prichádzajú noví záujemcovia. Tento typ účastníkov je často ešte nedotknutý témami a postupmi záujmovej matematiky a väčšinou sa do nich s chuťou zahĺbi. Možnosť prezentovať svoje obľúbené a zaujímavé témy novým poslucháčom („naše“ deti ich už často poznajú z táborov) je veľkým lákadlom aj pre prednášateľov.
- **„Kolektívne obdobie“**: Zatiaľ čo pre žiakov 5. alebo 6. ročníka je pri aktivitách v oblasti záujmovej matematiky nosný a najdôležitejší ich vzťah smerom k vedúcemu, s pribúdajúcim vekom vzrastá aj záujem a význam kolektívu ich vrstovníkov. Na strednej škole dosahuje táto

tendencia vrchol. Kolektív rovesníkov sa stáva najdôležitejším sociálnym prostredím, jeho kvalita a aktivity v ňom dôležitým spôsobom ovplyvňujú vývoj dieťaťa. Preto sme sa našim účastníkom snažili poskytnúť aspoň raz mesačne možnosť pobytu v kolektíve, o ktorom veríme, že je dostatočne kvalitný a inšpirujúci. Predpokladám, že možnosť stretnutia sa s obľúbenými priateľmi je asi najsilnejšou motiváciou pre návštevu klubu.

- **„Nefňukať“**: Skúsenosti hovoria, že veľa táborov a sústredení končí posledný deň aj slzami v očiach účastníkov. Veríme, že ide o smútok súvisiaci so skončením vydarenej akcie. Napriek tomu mám dojem, že týmto slzám treba klásť odpor. Obzvlášť krokodíliu veľkosť majú v očiach dlhoročných a najstarších účastníkov, ktorý odchádzajú zo ZŠ. Z ich pohľadu je už samotný prechod na SŠ dosť veľkým a zneisťujúcim krokom, ktorý spolu s predstavou „že už nikdy sa s touto skvelou partiou nestretnem“ asi naozaj stojí za kus pesimizmu. Podobné pocity sa nie vždy vyhnú aj vedúcim. Nuž, teraz sa s touto skupinkou detí lúčime pozvánkou na prvý septembrový MaK a slovami „uvidíme sa o 4 týždne“. Aj keď sa nezdá príliš významný, pocitovo bol tento dôvod jedným z najvážnejších pri úvahách o založení MaKu.
- **Perspektíva radosti (a aj práce)**: Jej význam pre každého z nás asi netreba zdôrazňovať. MaK ju poskytuje jednak z dlhodobého hľadiska. Už dnes sa mnohí ôsmaci tešia, aké to bude, „keď budú môcť chodiť na Mak“, stretnúť sa so svojimi o pár rokov staršími priateľmi, ktorí sa dočasne „stratili“ prechodom na SŠ atď. Veríme, že im dávame ďalší dobrý dôvod tešiť sa na strednú školu. Podobný význam má aj mesačný rytmus našich stretnutí. Už pri nedeľnom lúčení sa dohovárajú plány na ďalší mesiac a mnohí s chuťou počítame chýbajúce dni do ďalšieho stretnutia.
- **Bude to dobré:** V neposlednom rade sme verili, že vďaka našim doterajším skúsenostiam z práce s mládežou bude činnosť MaKu prínosom pre jej učastníkov...

Trochu inú skupinu dôvodov dostaneme, ak sa na situáciu pozriem z hľadiska vedúcich a organizátorov:

- **Voľné kapacity**: Skupina organizátorov KS SEZAM a KS KMS predstavuje viac ako 20 členný kolektív v zásade skúsených a kvalitných vedúcich so značnými skúsenosťami. Pritom samotnej „kontaktnej“ práci s deťmi sa venujú väčšinou len počas niekoľkých týždňov sústredení a táborov, pričom často pracujú s relatívne stabilnou skupinou detí. Organizačná forma MaKu pritom nekladie až také veľké nároky na počet vedúcich (najviac 4 prednášatelia na stretnutie), ich voľný čas (v zásade stačí 1,5 hodiny), dlhé cestovanie a pobyt (väčšina je zo Žiliny alebo okolia) atď. V podstate čas a energia potrebná k činnosti MaKu je v tomto kolektíve k dispozícii. Ozaj náročný je MaK pre trojčlenné organizačné jadro, ktoré tvorí spolu s autormi článku riaditeľ MaKu Jakub Daubner.
- **„Tréning“ vedúcich**: Systém práce s deťmi v rámci KS (spomenutý vyššie) na druhej strane prináša určité úskalia. Aj vedúci, ktorý pracuje v KS viac rokov, mohol počas sústredení prednieť len niekoľko prednášok. Naviac polročné „prestávky“ a žičlivá atmosféra týchto akcií môžu zakrývať niektoré nedostatky, neumožňujú systematickejšiu prípravu vedúceho atď. Na stretnutiach MaKu je príležitosť pre pravidelnejšie stretávanie a prácu s deťmi, otestovanie pripravovaných matematických tém atď.
- **Zlepšenie práce vedúcich**: V podstate ide o podobný dôvod ako v predchádzajúcom bode, motivovaný ale hlbším pohľadom na celú problematiku. Práca so stredoškolskou mládežou je v mnohých oblastiach náročnejšia ako práca so žiakmi ZŠ. Pokiaľ deťom neposkytujeme dostatočne kvalitný program, dajú nám to pocítiť. Tieto ťažkosti menej skúsení a ambiciózni vedúci často riešia ústupom od náročnejších výchovných a vzdelávacích cieľov a programov, prechodom k síce klimaticky príjemným, ale málo podnetným formám činnosti atď. MaK svojim vedúcim poskytuje nový priestor pre získavanie skúseností s týmto druhom práce a mal by prispieť k celkovému zvýšeniu jej kvality.
- **Osobná motivácia**: Pre autorov článku (a niektorých našich ďalších kolegov), ktorí sa pri svojej práci viac orientovali na žiakov ZŠ (a v zamestnaní na študentov VŠ), bola lákavá aj možnosť

rozšíriť si svoje skúsenosti s touto vekovou kategóriou. A v neposlednom rade je príjemná aj možnosť stretávať sa „na neutrálnej pôde“ aj s vlastnými, pomaly odrastajúcimi deťmi.

Aj vďaka motivačnej sile spomenutých dôvodov máme za sebou prvý rok fungovania MaKu. Môžeme konštatovať, že veľmi úspešný. Predpoklady, ktoré nás viedli k jeho založeniu, sa ukázali správne a dostatočne nosné. Uskutočnilo sa 10 stretnutí MaKu, vrátane čisto športového vianočného a záverečného júnového, spojeného s dvojdňovým prechodom hrebeňa Malej Fatry. Detaily si môže záujemca nájsť na adrese http://www.sezam.sk/~visni/mak/.

Na stretnutia prichádzalo od 20 do 40 účastníkov, celkovo databáza účastníkov obsahuje vyše 50 stredoškolákov a 15 „dospelých“. Veľkú časť tvorili študenti žilinských gymnázií, ale pravidelný účastníci prichádzali z priľahlých regiónov (Martin, Turčianske Teplice, Dolný Kubín, Považská Bystrica atď.), ako aj vzdialenejších miest (Košice, Prešov, Spišská Nová Ves, Banská Bystrica, Lučenec, Bratislava, Šamorín).

V rámci stretnutí odznelo celkovo 32 prednášok (okrem matematických tém bolo niekoľko venovaných fyzike a informatike), o ktoré sa podelilo celkovo 12 prednášateľov. Obsahom a významom ich môžeme rozdeliť do nasledujúcich skupín:

- **Propedeutika**: Spôsob a tempo vyučovania matematiky na našich školách tu nebudem komentovať. V každom prípade poskytuje dostatok oblastí, kde záujmová matematika môže pripraviť pôdu pre neskôr „direktívne“ vnášané vedomosti. Vzhľadom na vek účastníkov sme sa sústredili hlavne na propedeutiku infinitezimálneho počtu a v dvoch prednáškach na pravdepodobnosť a štatistiku. Tieto témy kládli veľké nároky nielen na poslucháčov, ale aj na prípravu vedúcich. Bohato sme načierali do histórie, prednášky boli inšpirované napr. postupmi Archimeda, Cavalieriho alebo Keplera.
- **Zapĺňanie dier**: Školská stredoškolská matematika pri svojom „šprinte“ k maturitám vynecháva viaceré pekné oblasti. S chuťou sme ich vypĺňali. Tak odznelo veľa pekných prednášok napr. z geometrie.
- **„Pekné“ témy**: Pre oblasť záujmovej matematiky sú charakteristické témy, ktoré nesledujú (aspoň nie v prvom pláne) žiadny „seriózny“ matematický cieľ. Jediným kritériom je, aby boli čo najkrajšie, najatraktívnejšie a priniesli ich účastníkom čo najpríjemnejší zážitok. Samozrejme sme sa týmto témam nevyhýbali, a okrem osvedčených „evergreenov“ objavili aj mnoho nových.
- **Prvá pomoc**: Dvakrát sa na nás účastníci obrátili s prosbou o prednášku z konkrétnej oblasti matematiky, ktorá im spôsobuje problémy v škole. Asi neprekvapí, že išlo o kombinatoriku a zavedenie logaritmov. Pomoc sme poskytli, samozrejme spôsobom, ktorý sme považovali za vhodný. Pri kombinatorike nás inšpirovala „žltá kniha“, pri logaritmoch sme si zopakovali Napierov postup pri ich vytvorení. Získaný vhľad (a snáď aj nadhľad) našich poslucháčov uspokojil.
- **Čo nebolo**: Asi náš jednotný a spoločný názor na tento druh práce s mládežou spôsobil, že žiadna z prednášok nebola venovaná príprave na MO, trikom na riešenie určitých typov úloh, klasickým „doučovacím“ témam a podobne.

Veľký význam má samozrejme aj nematematická, spoločensko-športová časť stretnutí. Význam kolektívu a aktivít v ňom pre túto vekovú kategóriu som spomenul vyššie, tu im je ponúknutý dostatočný priestor. Naše sobotné „návštevy“ telocvične majú za úlohu hlavne prečistiť hlavu medzi náročným matematickým programom, majú ale aj svoju športovú hodnotu. Niektorí naši účastníci sú skutočne pohybovo nadaní, niektorí zase robia česť rozšírenému predsudku „čo matematik, to drevo“. U nich sme ale po pár stretnutiach videli pokrok a možno práve na MaKu si prvýkrát zahrali športy, ku ktorým ich inak ich spolužiaci ani nepustia. Možno sme spôsobili aj pár predsavzatí „urobiť so sebou niečo“ aj v tejto oblasti. Nedeľná turistika naväzuje na dlhoročnú a úspešnú tradíciu matematických výletov. Býva plná pohody, veselých aj vážnych debát, špekáčikov, slaniny, vegetariánov a krásnych výhľadov. Vrcholom v tomto smere bol júnový MaK, ktorý spočíval v dvojdňovom prechode hrebeňom Malej Fatry, prednášalo sa na chate pod Suchým.

Ďalšie skúsenosti a postrehy zhrniem do nasledujúcich bodov:

- Zvolená organizačná a obsahová forma matematického klubu sa ukázala veľmi efektívnou. Zjednodušene povedané s relatívne malou vynaloženou námahou sme dosiahli (dúfam) slušné výsledky. Jednou príčinou tohto javu je kolektív kvalitných detí, ktorého silné jadro strháva a priťahuje nových účastníkov, druhou dostatočná „zásoba“ skúsených vedúcich na zabezpečenie organizácie a programu.
- Veľkú časť hlavne nematematického programu, propagácie, celkovú príťažlivosť a atraktívnosť činnosti klubu si vlastne zabezpečujú deti samé. (Včítane vytvorenia www stránky, za ktorú ďakujeme Mišovi Prusákovi.) Motivácia činnosti klubu a jeho účastníkov je veľmi prirodzená a organizátorov príliš nezaťažuje.
- Stretnutia MaKu sa stali skutočnou „dielňou“ pre prednášateľov. Mohli prezentovať modifikácie tém používaných pre žiakov ZŠ, otestovať prednášky pripravované na iné akcie a naopak, prezentovať témy vylepšené o už získané skúsenosti. Možnosť prednášať pre naozaj kvalitné deti bola veľmi inšpirujúca a motivujúca.
- Mesačná frekvencia stretnutí bola zvolená veľmi šťastne. Stretnutia na seba ešte stále naväzujú a majú určitú kontinuitu. Na druhej strane po mesiaci sú deti už patrične „vyhladnuté“ a na ďalšie stretnutie sa tešia. Frekvencia tiež vyhovuje kapacitám vedúcich.
- Študenti stredných škôl sú z mnohých hľadísk (myslím teraz na matematický program) ešte stále „deti“ a ich rozdiel od žiakov ZŠ je menší, ako sme očakávali. Osobne som bol zvedavý, či forma a obsah ponúkanej matematiky, bližšia skôr ZŠ, je vhodná aj pre túto vekovú skupinu. Zdá sa, že áno. Táto skúsenosť by si vyžadovala hlbšiu analýzu, mohla by ale zmeniť názor na jednu dosť rozšírenú predstavu: Pokiaľ idem niečo rozprávať kvalitným stredoškolákom, treba si pripraviť niečo seriózne, ťažké a užitočné. Napríklad nové typy dôkazov A-G (a ešte lepšie aj ťažších) nerovností, naučiť ich rýchlo derivovať a rátať tak úlohy na extrémy, alebo (keď sú takí šikovní) skúsiť niečo z prvého ročníka VŠ. Nuž, je to snáď možné, ale určite nie nutné.

Vzhľadom na termín písania tohto príspevku môžem skončiť potešujúcim konštatovaním. Pre pár dňami prebehol prvý MaK tohto školského roku. Viac ako 30 účastníkov si vypočulo 4 pekné rozprávania, zašportovalo si a 19 členný výber v nedeľu za krásneho počasia vystúpil na Kľak. Ak máte záujem, príďte sa nabudúce pozrieť. A ak máte chuť, príďte aj prednášať. Ale pozor, záujemcov je veľa a termíny sa rýchlo zapĺňajú!

e-mail: Katarina.Bachrata@fri.utc.sk, hynek@kst.fri.utc.sk

MONTESSORI VÝCHOVA PRE PREDŠKOLSKÝ VEK

Dagmar Bartóková, Trnava

Mária Montessori – talianska detská lekárka, ktorá žila na prelome 19. a 20. storočia, vypracovala ucelený výchovno-vzdelávací systém. Prosba jedného z detí: „Pomôž mi, aby som to dokázal sám“, sa stala jej životným krédom. Jedným zo základných cieľov je naučiť dieťa plniť vždy len jednu úlohu s tým, že sa jej venuje naplno a sústredene.

Základné pravidlá Montessori pedagogiky

Dieťa:

- sa učí v prostredí zameranom na dieťa
- sa učí všetkými zmyslami
- sa učí vlastným tempom a svojím vlastným spôsobom
- sa učí od konkrétneho k abstraktnému
- zvláda jednu vec po druhej
- sa učí spontánne a bez úsilia
- rozvíja svoj pozitívny obraz o sebe
- zvláda svoje prostredie, stáva sa viac sebestačným a nezávislým
- rozvíja svoje sebaprijatie a úctu k sebe i ostatným

Prostredie

Aby mohlo dieťa samostatne a koncentrovane pracovať, potrebuje dôsledne zorganizované prostredie. V prvom rade je to primerané množstvo podnetov na zmyslové vnímanie a vlastnú aktivitu. Nábytok v miestnosti musí byt primeraný k veľkosti dieťaťa, obrázky na stene vo výške jeho očí. Všetky predmety musia byť pre dieťa bezpečné, lákavé, kompletné a ľahko dostupné.

Senzitívne obdobia

Metodika Márie Montessori rešpektuje tzv. senzitívne obdobia vývoja dieťaťa. Sú to obdobia zvýšenej citlivosti, ktorá umožňuje spontánne vnímať a ľahko prijímať určité javy a podnety. Dieťa v tom čase absorbuje nové prvky zo svojho prostredie podvedome a teda bez akejkoľvek námahy. Každé senzitívne obdobie má pomalý začiatok, výrazný vrchol a pozvoľné doznievanie. Vo veku 0 – 5 rokov je to senzitívne obdobie rozvoja reči a zjemňovania zmyslov. Vek od 1 do 3 rokov je najvhodnejší čas na vytváranie psychického a fyzického poriadku. Senzitívne obdobie vývoja pohybových schopností trvá od narodenia do 4 rokov a najvhodnejšie obdobie na budovanie sociálnych vzťahov začína v 2 a končí v 6 rokoch.

Praktické cvičenia

Pracovať sa začína vždy s konkrétnym materiálom, ktorý dieťa pozná z každodenného života a dokáže ho zaujať tvarom, farbou, zvukom, ... Rodič alebo učiteľ využíva metódu predvádzania a napodobňovania: dieťaťu predvedie celý priebeh práce pomaly a plynulo a následne dieťa nechá vykonať činnosť samé. Praktické cvičenia Montessori školy sú rozčlenené do piatich základných skupín:

1. cvičenia každodenného života
2. cvičenia na rozvoj a zjemňovanie zmyslov
3. matematické cvičenia
4. jazykové cvičenia
5. kozmická výchova

Keďže mám praktické skúsenosti s prvými dvoma skupinami cvičení s trojročným dieťaťom, v ďalšom sa zameriam na ne.

1. Cvičenia každodenného života

Sú to prípravné cvičenia na koordináciu pohybov, koncentráciu, sebaovládanie a samostatnosť.

a) Chôdza
   - v rytme hudby
   - s predmetmi v ruke
   - po elipse
   - medzi nábytkom
b) Otváranie a zatváranie
   - dverí bez hluku
   - rôznych nádob a fľašiek
c) Starostlivosť o vlastnú osobu
   - presýpanie sypkých materiálov
   - prelievanie
   - prekladanie sypkých materiálov lyžicou
   - krájanie zeleniny
   - natieranie rohlíkov
   - pranie, vešanie a skladanie prádla
   - žehlenie
   - čistenie topánok
d) Starostlivosť o svoje prostredie
   - utieranie prachu
   - kŕmenie domácich zvierat
   - starostlivosť o kvety
   - prestieranie na stôl
   - leštenie

2. Cvičenia na rozvoj a zjemňovanie zmyslov

Rozvoj zmyslového vnímania udržuje dieťa v prítomnosti. Pri týchto cvičeniach dieťa objavuje fyzikálne vlastnosti predmetov a javov a v Montessori zariadeniach sa obvykle pri nich používajú špeciálne pomôcky, ktoré sú však pomerne drahé a nie ľahko dostupné. Druhou alternatívou je nenáročná výroba pomôcok doma. Pri mnohých nasledovných cvičeniach sa dajú použiť prázdne plastové obaly od kinofilmov.

a) Zrak
   - rozpoznávanie rozmerov (sada nádob rôznych veľkosti, sada závaží rôznych veľkosti)
   - rozpoznávanie farieb
   - rozpoznávanie tvarov (vkladanie rôznych geometrických tvarov do príslušných otvorov)
b) Hmat
   - rozpoznávanie predmetov (určovanie predmetov vo vrecku hmatom)
   - rozpoznávanie drsnosti (so zaviazanými očami hľadanie dvojíc šmirgľov rovnakej drsnosti alebo dvojíc rovnakých látok)
c) Sluch
   - rozlišovanie jemných zvukov
   - hľadanie dvoch rovnako znejúcich zvukov (sada dvojíc nádob naplnených rôznym materiálom, napr. ryža, fazuľa, kovové guľôčky, ...)
d) Čuch
   - zjemňovanie čuchových vnemov (určovanie vône korenín alebo byliniek v koreničkách)
   - hľadanie dvoch rovnako voňajúcich materiálov
e) Chuť
   - zjemňovanie chuťových vnemov (so zaviazanými očami určovanie rôznych druhov ovocia alebo zeleniny v šalátoch)
f) Zmysel pre váhu
   - rozlišovanie váhy telies (so zaviazanými očami porovnávanie váhy telies rovnakého objemu, napr. nádob naplnených rôznym množstvom soli)

e-mail: daska.bartok@nextra.sk

PROJEKT VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Zuzana Berová, Bratislava

Projekt ako vyučovací nástroj sa pomaly udomácňuje v našich školách a svoje miesto si postupne nachádza aj na základnej škole.

Stručne môžeme projekt charakterizovať ako **riešenie otvoreného problému** (riešenie problému nie je dopredu známe, nepoznáme spôsob jeho uchopenia, vedomosti a zručnosti potrebné na jeho riešenie nie sú bližšie špecifikované, poznáme skôr typ údajov potrebných na riešenie ako samotné údaje).

Prácu s projektom si učiteľ uľahčí, ak si pred jeho zadaním žiakom ujasní **základné charakteristiky projektu**. Sú to napríklad tieto parametre:

- *téma* projektu (názov),
- *veková kategória* riešiteľov projektu,
- *časové rozpätie* riešenia projektu,
- *forma práce* s projektom (individuálna, skupinová, ...),
- miera *zásahov učiteľa* počas riešenia projektu,
- *oblasť*, z ktorej je projekt zadaný (matematika – čistá/aplikovaná/história, nematematika, ...),
- *práca s literatúrou* (nie je / v obmedzenom rozsahu / podstatná súčasť práce),
- *povaha* projektu (sformulovaný okruh problémov, ktoré je potrebné vyriešiť / vymedzená téma alebo oblasť, o ktorej je potrebné získať a prezentovať informácie / vymedzený okruh alebo téma, ale nie sú sformulované problémy, ktoré treba vyriešiť),
- *forma výstupu* (ústny referát, písomná práca, poster, počítačový program, model, MG/ VHS nahrávka, ...).

Pri hodnotení projektu učiteľovi môže pomôcť, ak sa zameria napríklad na tieto tri ťažiskové oblasti:

- prístup k práci,
- matematický obsah,
- prezentácia výsledkov.

Na záver chcem apelovať na učiteľov základných škôl, aby sa nebáli práce s projektmi na vyučovaní matematiky. Žiaci nás dokážu častokrát veľmi prekvapiť tým, čo dokážu, ak im necháme dostatočný priestor na tvorivú prácu. Projekty môžu spríjemniť vyučovanie matematiky, môžu žiakom ukázať opodstatnenosť učenia sa matematiky, ak budú môcť svoje vedomosti použiť pri riešení konkrétnych problémov. V neposlednom rade projekty umožňujú učiteľovi naučiť žiakov také zručnosti ako samostatnosť, schopnosť kooperácie, práca s literatúrou, prezentácia výsledkov práce, a mnohé iné, ktoré v horizonte ďalšieho života žiakov majú ešte väčšiu váhu, ako konkrétne matematické pojmy, fakty a postupy, ktoré si osvojujú na vyučovaní.

e-mail: avalon@nextra.sk

DIAGNOSTIKA ARITMETICKÉ STRUKTURY[1]

Milan Hejný, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Abstrakt. Polarita procesního a konceptního přístupu k matematice je východiskem pro stručné představení teorie reifikace, teorie proceptu a teorie modelů (separovaných a univerzálních). Analýzou pěti žákovských řešení jsou identifikovány fenomény, pomocí nichž je popsána mentální aritmetická struktura. Konečně je ilustrován proces tvorby diagnostického nástroje zaměřeného na poznávání kvality kognitivní a meta-kognitivní oblasti aritmetické struktury žáka.

1. ÚVOD

Článek sleduje dva cíle. V prvních čtyrech kapitolách nabízíme čtenáři stručnou informaci o těch teoriích, které nejvíce vstupují do našich současných výzkumů. Tento teoretický exkurz není přehledem. Mnoho závažných myšlenek současné didaktiky matematiky v něm není vůbec zmíněno. Nejsou zde například jména jako Cobb, Dreyfus, Dubinsky, Fischbein, Hiebert, Kaput, … V dalších dvou kapitolách pak zkoumáme aritmetickou strukturu žáků a snažíme se ukázat, jak se tvoří diagnostický nástroj na poznávání této struktury.

1.1 Formulace problému

Jedním z nejzávažnějších nedostatků matematických znalostí (nejen) našich žáků všech stupňů škol je formalizmus. Termínem **formální poznatek** označujeme pamětí uchovávanou informaci, které člověk nerozumí, kterou nemá podloženu vlastní zkušeností.

Například žák ví, že se při řešení úloh o procentech pracuje se základem z, částí $č$ a procenty p. Zná vzorečky $p = 100č/z$, $č = p.z/100$, $z = 100č/p$, ale nevidí mezi nimi vazby. Pojmům nerozumí a vzorečky umí použít, jen když je v úloze uvedeno, které dvě veličiny jsou dány a která se hledá.

Neradostný stav je výzvou pro každého učitele, aby se snažil předcházet formalizmu a aby pokaždé, když jej u žáka objeví, hledal cesty, jak žákovi pomoci tuto kognitivní nemoc léčit. Ne vždy je lehké formalizmus odhalit. Nelze jej poznat, když žák bezchybně vyřeší standardní úlohu nebo přesně odříká definici nebo poučku. Formalizmus lze odhalit zejména tam, kde je potřebné daný poznatek použít v nestandardní situaci. Taková situace může být zaměřena na porozumění pojmu, na porozumění vztahu nebo vzorci nebo na porozumění souvislostem mezi poznatky. Právě poslední případ je cesta, kterou se pokusíme odhalovat formalizmus:

Hledáme diagnostický nástroj, kterým lze diagnostikovat aritmetickou strukturu žáka ZŠ, přesněji kvalitu propojení aritmetických poznatků.

1.2 Metoda

Nástrojem výzkumu je diagnostická úloha a její satelity. Úloha vyžaduje a) znalost několika dílčích poznatků a b) jejich součinnosti. Každý z dílčích poznatků je testován zvláštní úlohou, kterou nazýváme *satelitem* základní úlohy. Předmětem zkoumání jsou žáci, kteří bezpečně vyřeší všechny satelitní úlohy, ale u základní úlohy mají potíže. Postupy těchto žáků analyzujeme metodou atomární analýzy, která byla v poslední době rozpracována v sérii prací pražského semináře (např. Jirotková (1998); Hejný, Michalcová (2001); Kratochvílová, Swoboda (2002)) a popsána je v Stehlíková (2000). Dále hledáme soubor fenoménů (termín je upřesněn v 6.1), jimiž každé takové žákovské řešení můžeme hodnotit. Pomocí teorie proceptu, reifikace a modelů pak vysvětlujeme různé řešitelské postupy a hledáme příčiny případných omylů a selhání řešitele. Na základě těchto znalostí a zkušeností potom vytvoříme *klíč* k diagnostikování dalších žákovských řešení. Konečně si klademe otázku o možné reedukaci: jak žákovi pomoci odstranit nedostatky zjištěné diagnózou.

[1] Studie byla podpořena grantovými projekty GAČR 406/02/0829 a VZ J13/98:114100004

2. PROCESNÍ A KONCEPTNÍ VNÍMÁNÍ A MYŠLENÍ

2.1 Proces a koncept – osvětlení pojmů

Pojmy proces a koncept charakterizují dva duální nebo komplementární způsoby, jimiž naše vědomí *uchopuje* pojmy, vztahy, situace, jevy a události světa, *ukládá* je do zkušenostního pole a dále s nimi *pracuje*. Pojmu

proces odpovídá změna, pohyb, tvorba, operace, konstrukce, vznikání i zanikání, růst i úpadek, transformace i deformace, …

koncept odpovídá stav, neměnnost, stálost, existence, trvání, … .

Polarita proces – koncept byla výstižně, dokonce ostře antagonisticky, popsána již řeckou předsokratovskou filosofií. Filosofové eleatské školy, Parmenides (540 – 470) a Zenon (490 – 430) z Eley poukazovali na nespolehlivost informace, kterou nám poskytují naše smysly a na principiální nemožnost změny. Známá hádanka o želvě a Achillovi je jedním z argumentů, jimiž zpochybňovali existenci pohybu.

Na druhé straně Herakleitos z Efezu (?544 – ?483) hlásá permanentní proměnlivost světa. Výstižně říká, že „nelze vstoupit dvakrát do téže řeky…“ (Svoboda, 1962, s. 55). Má pravdu, jestliže řekou rozumíme vodu, která korytem teče právě v této chvíli. Jestliže ale řekou rozumíme její koryto, pak Herakleitos pravdu nemá, protože to je neměnné, stálé. Dvojí interpretace pojmu „řeka“, která je klíčem k heraklietovu argumentu, ilustruje důležitý moment vztahu proces – koncept. Spor o to, zda „řeka“ je tekoucí vodou nebo korytem, není sporem o podstatě věci, ale o její interpretaci. Stejně případný spor o tom, zda znak „5“ označuje množství pěti prvků, nebo ten konkrétní prvek, který je na pátem místě.

Zjištění, že adjektiva „procesní“ a „konceptní“ nevypovídají o skutečnosti ležící vně lidského vědomí, ale jen o tom, co je součástí vědomí konkrétního člověka, je pro naše další úvahy kruciální. Pomocí jazyka tří světů B. Bolzana a K. Poppera můžeme tuto tezi vyjádřit slovy: daná adjektiva nevypovídají o jevech Světa 3, ale o jevech Světa 2. (Idey Bolzana, 1981, s. 63 – 67 a Poppera, 1995, s. 173 jsou vyloženy v Hejný, Kuřina, 2001, s. 72 - 78.)

Přístupněji je možné oba duální pojmy osvětlit pomocí ilustrace, která se obrací k běžné zkušenosti člověka, k hudbě a výtvarnému umění.

Když člověk zpívá písničku, vybavuje se mu v každém okamžiku následující úsek písně. Je těžké zpívat jednotlivé části písničky na přeskáčku, skoro nemožné je zpívat ji pozpátku.

Když, na druhé straně, člověk hledí na obraz, jeho zrak těká z jedné části obrazu na jinou. Činnost vnímání obrazu, byť se sama odehrává v čase, nemá časově předepsaný sled pohledů. Jejím výsledkem je holistická (= celistvá) projekce objektu reality do vědomí člověka. Tato projekce je konceptem. Dodejme, že některé obrazy vypráví příběh a jsou tedy současně konceptem i procesem. Typickým příkladem je velkolepý obraz Pieter Bruegla Podobenství o slepcích (1568). Sérií slepeckých obličejů mistr popisuje proces narůstání strachu.

V životě se v naší mysli běžně objevují oba druhy myšlení, často se vzájemně doplňují, podporují. Například jedu vlakem do Martina. Vím, že tato stanice následuje hned po stanici Košťany n. Turcom (informace procesní) a že v Martině budu v 11:27 (informace konceptní).

Jindy si ze znalosti konceptu tvoříme ve své mysli příslušný proces nebo z procesu koncept. Tak kuchař ochutná jemu neznámé jídlo (koncept) a snaží se pak uhodnout recept na přípravu toho jídla, tedy netoliko ingredience, z nichž se jídlo skádá, ale i postup jeho přípravy (proces). V takovém případě budeme mluvit o transferu koncept → proces. Nebo si chci pamatovat posloupnost šipek

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow\leftarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\downarrow \qquad (*)$$

Představím si tedy cestu, kterou tato posloupnost popisuje na čtverečkovaném papíře, a zjistím, že je to čtverec o straně 6, z něhož jsou „vykousnuty“ všechny čtyři čtverečky v rozích. Kreslení, které jsem v mysli uskutečnil, bylo procesem a výsledný obrazec konceptem. Při této činnosti došlo v mém vědomí dokonce k dvojímu k transferu: nejprve jsem nápis (*), tedy koncept použil jako návod na cestování, tedy proces, pak jsem si uvědomil, že výsledkem cestování je pěkný obrázek, tedy koncept.

2.2 Proces a koncept v matematice

Žák na počitadle sčítá 2 + 3. Nejprve oddělí dvě kuličky, pak tři kuličky, pak obě skupinky spojí a říkankou zjistí, že kuliček je pět. Přitom se v jeho myšlení prolíná jak procesní, tak konceptní myšlení. Koncept množství 2 (resp. 3) použil, když oddělil skupinku 2 (resp. 3) kuliček. Když říkankou zjišťoval počet, použil proces. Propojení říkanky a pětice kuliček je příspěvkem k tvorbě konceptního vnímání pojmu „pět".

Uvedený příklad provází výzkum vztahu proces – koncept od jeho počátku u Z. Dienese. Několik dalších, heslovitě formulovaných příkladů, naznačí význam uvedeného vztahu.

objekt	interpetace procesní	interpetace konceptní
záporné číslo –3	výsledek odčítání 2 – 5	bod –3 na číselné ose
racionální číslo	5:21 je výzva k činnosti	5/21 vyvolává představu části kruhu
funkce	předpis pro přiřazování	množina uspořádaných dvojic
translace	posouvání jako proces	posunutí – stav výchozí a konečný
rovnice	výzva k řešení	vztah
úhel	výsledek otáčení polopřímky	část roviny
přímka	prodlužující se úsečka	nekonečně dlouhá přímá čára

Následující dva příběhy dokazují, že způsob uchopení[2] úlohy může výrazně ovlivnit proces jejího řešení i výsledek tohoto procesu. První příběh, jehož klíčovým objektem je pojem „otočení v rovině", je vzat z doktorské práce I. Malechové (1998, s.16 – 18). Druhý příběh, jehož klíčovým objektem je pojem „absolutní hodnota", je vzat z autorova archivu.

Příběh 1. Několika učitelům středních a základních škol i posluchačům MFF UK v Praze byla předložena následující úloha, jejíž autorem je M. Kočandrle.

Úloha 1. V rovině jsou dány navzájem různé body S_1, S_2, X a X'. Najděte otočení o_1 (se středem S_1) a otočení o_2 (se středem S_2) tak, aby platilo $o_2(o_1(X)) = X'$.

Pro některé řešitele byla tato úloha snadná, ale někteří úlohu vůbec nevyřešili. Řešitelé, kteří hledali bod $Y = o_1(X)$ tak, že zkoumali rovnoramenné trojúhelníky XS_1Y a YS_2X', neuspěli. Řešitelé, kteří nakreslili dvě kružnice – trajektorii bodu X při otáčení kolem bodu S_1 a trajektorii bodu X' při otáčení kolem bodů S_2, měli řešení i diskusi ihned před očima.

Úspěšní řešitelé uchopili otočení dynamicky jako jednu z nekonečně mnoha poloh procesu otáčení. Neúspěšní řešitelé nebyli schopni úlohu uchopit procesně a otočení vnímali jako statickou situaci reprezentovanou rovnoramenným trojúhelníkem. Jakmile byl neúspěšný řešitel vhodnou otázkou upozorněn na dráhu bodu X při otáčení kolem bodu S_1, většinou řešení ihned objevil.

Příběh 2. U přijímacích pohovorů na techniku řešili uchazeči rovnici $|x - 3| = |x + 1|$.

Konceptní řešení Bohouše. Na číselné ose hledáme bod x, který je stejně vzdálen od bodů –1 a 3. Je to střed úsečky s koncovými body 3 a –1. Rovnice má jediné řešení $x = 1$.

Procesní řešení Báry. Číselnou osu rozložíme na tři části $R = (-\infty,-1) \cup \langle -1,3\rangle \cup (3,\infty)$.

Pro $x \in (-\infty,-1)$ má daná rovnice tvar $-(x - 3) = -(x + 1)$. Tato rovnice nemá řešení.

Pro $x \in \langle -1,3\rangle$ má daná rovnice tvar $-(x - 3) = x + 1$. Tato rovnice má jediné řešení $x = 1$.

Pro $x \in (3, \infty)$ má daná rovnice tvar $x - 3 = x + 1$. Tato rovnice nemá řešení.

Výsledek: rovnice $|x - 3| = |x + 1|$ má jediné řešení $x = 1$.

Bohouš interpretuje rovnici jako pevnou geometrickou situaci, jako koncept. Bářina představa je procesní: je to návod, jak s absolutní hodnotou zacházet. Matematicky jsou správná obě řešení, ale Bohoušův postup je přehlednější, rychlejší a jasnější. Rozdíl obou postupů se projeví u náročnějších rovnic, např. $||x - 2| - 3| = ||x - 2| + 1|$. Pro Báru to bude hodně náročná úloha, ale Bohouš nejprve uvidí, že $|x - 2| = 1$ a pak najde ta dvě čísla, která jsou od čísla 2 vzdálena o 1. Jsou to 1 a 3.

[2] Uchopením úlohy rozumíme vytvoření si představy o tom, co je dáno, co je požadováno a jak na tuto výzvu reagovat. Uchopování úlohy je proces směřující k uchopení úlohy.

[1] Uchopením úlohy rozumíme vytvoření si představy o tom, co je dáno, co je požadováno a jak na tuto výzvu reagovat. Uchopování úlohy je proces směřující k uchopení úlohy.

2.3 Projekce komplementarity procesu a konceptu do vyučování matematiky

V úvodu své studie A. Sfard (1991) připomíná otázku, kterou na začátku 20. století položil Henry Poincaré: *Jak je možné, že jsou lidé, kteří nerozumí matematice?* Sfard poukazuje na aktuálnost výzvy a svoji studii chápe jako snahu proniknout hluboce k příčinám neradostného stavu. Na nosných pojmech školní matematiky zkoumá příčiny deformovaných představ žáků. Ukazuje na klíčovou roli operačního (procesního) a strukturálního (konceptního) myšlení:

> …there is a deep ontological gap between operational and structural conceptions. … it is very important to emphasize that operational and structural conceptions of the same mathematical notion are not mutually exclusive. Although ostensibly incompatible,…, they are in fact *complementary*. The term „complementarity" is used here in much the same sense as in physics, where entities at subatomic level must be regarded both as particles and as waves to enable full description and explanation of the observed phenomena. A. Sfard (1991, s. 4)

Naše dlouholetá pozorování i konkrétní výzkumy plně potvrzují tezi A. Sfard. Kvalita žákova poznání (pojmu, vztahu, či situace) je výrazně vyšší tam, kde toto poznání disponuje vzájemně propojenými složkami procesními a konceptními. Tam, kde jsou tyto složky odděleny nebo kde jedna složka absentuje, je dané poznání méně kvalitní.

Příměr s fyzikou je trefný a poučný. Některé jevy mikrosvěta chápeme uvnitř vlnové teorie a některé uvnitř korpuskulární teorie, ale komplexní pohled lze nabýt pouze propojením obou teorií. Podobně i v matematice některé situace lze lépe uchopit procesně, jiné konceptně, ale hluboký vhled se získává propojením obou přístupů.

Školská praxe často neguje vztah procesu a konceptu a legalizuje pouze jeden přístup „aby to slabší žáky nemátlo". V následujícím příběhu učitelka nepřipustí žákovo řešení založené na vhledu do situace (tedy na konceptu) a ostře trvá na standardizovaném procesním přístupu.

> Příběh 3. Albert (2. třída) je skvělý počtář. Bez problémů pracuje i s čtyřmístnými čísly. Potíže má se čtením a zejména s psaním. Alberta učí učitelka Astrová, která hocha dosti často napomíná, aby odpovídal celou větou. Příběh začíná úlohou napsanou na tabuli:
>
> Úloha 2. V tramvaji jelo 31 lidí. Na zastávce 4 osoby vystoupily a 13 osob přistoupilo. Kolik lidí jelo dále?
>
> Učitelka 1 (Přečte úlohu z tabule a obrátí se ke třídě): *Tak kdopak nám to půjde vyřešit?*
> Albert 1 (hlásí se, a je vyvolán a ihned odpoví): *Čtyřicet.* (vidí, že učitelka není spokojena, a tak dříve než ona cokoli řekne, odpoví celou větou): *Dále pojede čtyřicet osob.*
> Učitelka 2 (vyčítavě): *Copak takhle se řeší písemná slovní úloha? Bez znázornění, bez zápisu? Bez výpočtu? Bez písemné odpovědi? Pojď Alberte k tabuli.*
>
> Hejný, Kuřina (2001, s. 24)

Z analýz interakce učitel – žák (např. Domoradzki, Hejný 2002) víme, že častou příčinou nedorozumění mezi učitelem a žákem je různost přístupů k dané partii matematiky. Učitel, který má, řekněme, v oblasti kombinatoriky procesní vidění, vede žáky ke kombinatorickým poznatkům procesně a je pro konceptně založeného žáka málo srozumitelný. Učitel, který nahlíží na danou situaci jak procesně, tak konceptně, má předpoklady pro kvalitní komunikaci se všemi žáky.

Vztah proces – koncept je páteří většiny teorií, které se snaží tento proces modelovat. Tři z nich stručně vysvětlíme v dalším. Jako první uvedeme již zmiňovanou teorii reifikace Anny Sfard, pak teorii proceptu Eddie Graye a Davida Talla a nakonec naši teorii modelů. Teorii reifikace a teorii proceptu vyložíme tak, jak je chápeme a používáme. Je možné, že některé věci vidíme nepřesně. Proto nejlepší cesta pro čtenáře, který si chce o těchto teoriích utvořit vlastní představu, je přečíst si články Sfard (1991) a Gray, Tall (1994) a aplikovat tyto myšlenky ve vlastním výzkumu.

3. TEORIE REIFIKACE A TEORIE PROCEPTU

Výše citovaná myšlenka Anny Sfard o komplementaritě procesu a konceptu je vstupní branou k výkladu její teorie reifikace.

3.1 Od procesu ke konceptu a dále ke struktuře

Historii odhalování zákonitostí kognitivního řetězce

$$\text{proces} \rightarrow \text{koncept} \rightarrow \text{struktura} \qquad \text{(i)}$$

popisuje Sfard jako myšlenkový rámec pro zkoumání pojmotvorného procesu, vedoucího od konkrétních předmětných představ k představám obecným a abstraktním. Zkoumá několik důležitých matematických pojmů jako jsou funkce, souměrnost, kružnice a především číslo: přirozené, celé, racionální, iracionální, reálné i komplexní. Každý z těchto pojmů zkoumá jak v kontextu procesním (operačním), tak i v kontextu konceptním (strukturálním). Hledá zákonitosti, které vedou lidský mozek na cestě od poznání procesního ke konceptnímu. Opírá se přitom o experimenty jiných autorů, ale zejména využívá bohaté znalosti fylogeneze čísla. Slovo „reifikace“, které opisuje klíčový krok pojmotvorného procesu, dalo celé teorii jméno. Toto slovo je anglický novotvar a autorka jej osvětluje slovy:

> To sum up, the history of numbers has been presented here as a long chain of transitions from operational to structural conceptions: again and again processes performed on already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or **reified** (from the Latin word *res* – a thing) to become a new kind of self-contained static constructs. Our conjecture is, that this model can be generalized to fit many other mathematical ideas. Sfard (1991, p. 14)

Do češtiny bychom mohli slovo „reification“ přeložit novotvarem „zvěcnění“. Považujeme však za vhodnější i v češtině mluvit o „reifikaci“.

Analýzou pojmu číslo dochází Sfard k hlavnímu výsledku svého bádání, k mechanizmu pojmotvorného procesu, jehož páteří je posloupnost

$$\text{procesy na objektech} \rightarrow \text{interiorizace} \rightarrow \text{kondenzace} \rightarrow \text{reifikace} \rightarrow \text{nový objekt} \qquad \text{(ii)}$$

Sfard (1991) považuje tři prostřední úrovně (stages) pojmotvorného procesu (ii) za rozhodující a charakterizuje je následujícím způsobem (úryvky jsou ze stran 18, 19, 20):

> At the stage of **interiorization** a learner gets acquainted with the processes which will eventually give rise to a new concept (like counting which leads to natural numbers, subtracting which yields negatives, or algebraic manipulations which turn into functions). These processes are operations performed on lower-level mathematical objects. (p. 18) …
> The phase of **condensation** is a period of „squeezing“ lengthy sequences of operations into more manageable units. At this stage a person becomes more and more capable of thinking about a given process as a whole, without feeling an urge to go into details. (p. 19) …
> The condensation phase lasts as long as a new entity remains tightly connected to a certain process. Only when a person becomes capable of conceiving the notion as a fully-fledged object, we shall say that the concept has been reified. **Reification**, therefore, is defined as an ontological shift – a sudden ability to see something familiar in a totally new light. Thus whereas interiorization and condensation are gradual, quantitative rather qualitative changes, reification is an instantaneous quantum leap: a process solidifies into objet, into a static structure. (pp. 19,20)

Jak uvidíme dále, tento pohled je blízký autorovu chápání pojmotvorného procesu. Interiorizací se ve vědomí individua vytváří představa, kterou nazýváme separovaný model a kondenzací představa, kterou nazýváme univerzální model. Reifikaci potom odpovídá náš abstrakční zdvih. Teď obrátíme pozornost k teorii proceptu.

3.2 Procept jako amalgám procesu a konceptu

Teorie proceptu zavedena v práci Gray, Tall (1994) navazuje na studii A. Sfard a některé další práce a přináší dva nové prvky do poznávacího mechanizmu:

- posun od procesu ke konceptu doplňuje o **amalgám** obou prvků,
- nový amalgám reprezentuje znakem a tento mentální komplex nazve **proceptem**.

Podobně jako klíčový termín teorie A. Sfard – reifikace – je i klíčový termín teorie Graye a Talla – procept – jazykový novotvar. Vznikl jako amalgám anglických slov process a concept. Názorně, i když s jistou nepřesností, můžeme oba pohledy prezentovat graficky:

$$\text{proces} \rightarrow \text{reifikace} = \text{koncept} \qquad \text{(a)}$$

$$[(\text{proces} \leftrightarrow \text{koncept}) + \text{odpovídající znak}] = \text{procept} \qquad \text{(b)}$$

Na pohledu (a) je vidět nerovnováhu mezi prvotním generujícím procesem a následným finálním konceptem. Ve druhém pohledu se tato nerovnováha oslabuje a připouští se i postup opačný, od konceptu k procesu. I když to autoři nedělají, lze postup od konceptu k procesu evidovat u mnoha geometrických pojmů. Například proces konstrukce čtverce ze sirek může uskutečnit pouze to dítě, které již ve svém vědomí představu (koncept) čtverce má. Uvedenou ilustraci nelze však podle D. Talla spojovat s proceptem, protože zde schází znak, který je nutnou součástí proceptu.

Teorii proceptu představíme několika komentovanými citáty z Gray, Tall (1994). Nejprve základní termín „elementární procept“:

> We propose the following pereliminary definition: An **elementary procept** is the amalgam of three components: a process that produces a mathematical object, and a symbol that represents either the process or the object. (p.121)

Znakem, který amalgamuje proces i koncept, je například nápis „3 + 2“ diskutovaný již v odseku 2.2. Nápis lze vnímat jako proces sčítání i jako koncept součtu. Například v učebnici pro první třídu je nápis „3 + 2“ výzvou pro žáka k činnosti sčítání. V reportu o didaktickém experimentu se tento zápis může chápat jako informace „experimentu se zúčastnili tři dívky a dva hoši“. Daný znak tedy připouští, amalgamuje obě interpretace – procesní i konceptní.

Dvojí interpretaci nápisu provází čtyři charakteristiky

> In this paper we consider the **duality** between process and concept in mathematics, in particular, using the same symbolism to **represent** both a process (such as addition 3 + 2) and the product of that process (the sum 3 + 2). The **ambiguity** of notation allows the successful thinker the **flexibility** in thought to move between the process to carry out a mathematical task and the concept to be mentally manipulated as part of the wider mental schema. Symbolism that inherently represents the amalgam of process/concept ambiguity we call a procept. (p. 116)

Čtyři námi zvýrazněná slova představují hlavní charakteristiku pojmu procept. Předně je zde **dualita** (tedy partnerství, nikoli nadřazenost a podřazenost) procesu a konceptu. Pak je zde znak, který **reprezentuje** jak procesní, tak konceptní pojetí myšlenky. Znak je tedy **nejednoznačný**, ale právě proto umožňuje přecházet od jedné interpretace ke druhé, je **flexibilní**.

Z hlediska jasnosti pojmu procept za nejcitlivější z těchto tří složek považujeme složku znak. Její zranitelnost vystoupí, když se na ni podíváme pohledem tří světu K. Poppera: znak se v teorii proceptu jednou chápe jako objekt Světa 2 (svět výtvorů lidského ducha ležících vně lidského vědomí), jindy jako objekt Světa 3 (svět obsahů všech lidských vědomí), což se pozná podle kontextu. Podle našeho názoru procept a tedy i znak náleží do světa 3. To, že znak 3 + 2 lze vnímat jako výzvu k činnosti – spočti – tak i jako jiný zápis čísla 5 (a já dodávám že i jako informaci, že například v experimentu participovali 3 dívky a 2 hoši), není věcí toho, co leží na papíře, ale toho, co se odehrává v hlavně člověka, který na nápis hledí.

4. TEORIE SEPAROVANÝCH A UNIVERZÁLNÍCH MODELŮ

4.1 Historie

Hned po druhé světové válce Vít Hejný, autorův otec, napsal práci o příčinách potíží, které má s matematikou většina žáků střední školy. Ukázal, že příčina tkví v přístupu žáků, kteří, místo toho aby se snažili věci pochopit, učí se postupům a vzorcům zpaměti. K takovému přístupu vede žáky výuka, která již od první třídy klade důraz na výkon a zanedbává nabývání zkušeností, hledání podstaty jevů a spekulování. Tato otcova práce nebyla publikována.

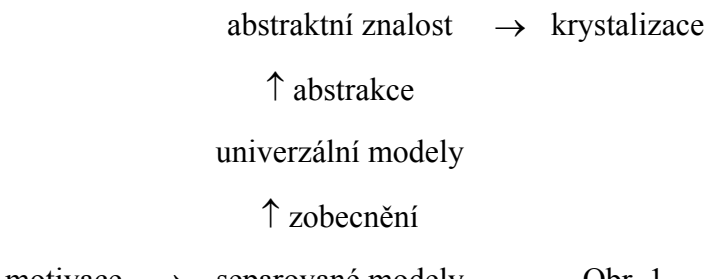
V druhé polovině šedesátých let se otec k práci vrátil a měl jsem možnost podílet se na dalším rozpracovávání jeho původních tezí. Materiálem pro naše bádání byly mnohaleté otcovy pedagogické zkušenosti, několik více méně příležitostných experimentů a historie matematiky. Hlavní naše pozornost byla zaměřena na osvětlení toho, jaké jsou příčiny vzniku „poznatku bez porozumění". Již sám tento termín je vnitřně sporný, protože poznatek nutně předpokládá porozumění. Pro označení tohoto jevu jsme zavedli termín „formální poznatek". Je to pamětí uchovávaná definice, instrukce, vzorec, tvrzení apod. bez propojení na zkušenost.

Snahou otce bylo najít argumenty, jimiž by podepřel a osvětlil svoji základní tezi, že totiž skutečné **poznání je nepřenosné, každý člověk si jej buduje pomocí vlastních zkušeností**. Porovnáním procesu učení se číst a psát s učením se počtům otec zjistil, že čtení/psaní je založeno na asociaci vizuálních a akustických představ, ale u počítání je potřebná navíc i mentální operace probíhající ve vědomí žáka. Tak otec vytvořil *orgán Vztahově Abstraktní Činnosti* (orgán VAČ) jako pomyslný mentální orgán odpovědný za „dělání matematiky". Společně jsme pak ukázali (Hejný, V., Hejný, M.,1972), že žák, který je v první třídě veden k rychlosti a přesnosti, se učí sčítací/odčítací spoje zpaměti (asociačně), vně svých zkušeností. Jeho orgán VAČ se nerozvíjí a žák se později jeví jako „žák bez buněk na matematiku".

V dalších letech jsme studovali matematické činnosti i u starších žáků (šlo o rovnice, analýzu a geometrii). Výsledkem výzkumu byl šestietapový mechanizmus poznávacího procesu. Nový nástroj nám dovolil osvětlit příčiny vzniku formálního poznání. Mechanizmus byl publikován v práci Hejný, V., Hejný, M. (1978), která vyšla po otcově smrti. V jazyce anglickém byl uvedený mechanizmus poprvé prezentován v práci Hejný (1988). Současná verze teorie modelů byla publikována v knize Hejný, Kuřina (2001, s.104 – 115) a její anglická, obsahově mírně obohacená verze v článku Hejný, Littler (2002, s. 9 – 26).

4.2 Kostra teorie

Proces nabývání poznatku, zejména pojmotvorný proces, je rozložen do pěti etap a dvou abstrakčních zdvihů. Znázornění na přiloženém schématu pochází od F. Kuřiny. Ukazuje, jak motivační impulz vede k nabývání zkušeností, k jejich zobecňování a abstrakci až po objevení abstraktní znalosti. Ta se pak v poslední etapě stává součástí již existující struktury znalostí člověka.



Obr. 1.

Sedm prvků schématu stručně popíšeme. Podrobnější rozklad celého mechanizmu najde čtenář v uvedené literatuře.

Motivaci chápeme jako tenzi, která vzniká z rozporu mezi existujícím a chtěným stavem. Nemám kolo a chci mít kolo – tento stav mne motivuje k činnosti zaměřené na získání kola. Motivace k matematické činnosti je dána rozporem mezi *neznám* a *chtěl bych znát*.

Motivace energetizuje psychiku a orientuje poznávací proces. Má proto zásadní důležitost. Přesto se zde motivaci věnovat nebudeme, neboť cílem našich úvah je jen oblast kognitivní.

Etapa **separovaných modelů** je dobou nabývání prvních zkušeností s příštím poznatkem. Pětileté dítě vidí, jak maminka dělí čokolády se slovy „tobě půlku a tobě taky půlku“. Dítě nemá ještě žádnou představu o pojmu polovina, ale právě nabytá zkušenost je prvním separovaným modelem tohoto příštího poznání. Když později uvidí dítě půlit jiné předměty, vytvoří si o činnosti půlení a polovině jako výsledku této činnosti již jistou představu. Na druhé straně, když slyší, že někdo říká „je půl čtvrté“, nespojuje tuto situaci nijak s operací dělení. Pak dítě samo použije slovo „rozpůlit“ a má na mysli činnost, kterou tenkrát maminka dělala s čokoládou.

Z uvedeného je vidět, že etapu separovaných modelů můžeme rozložit na 3 podetapy:

1. První konkrétní zkušenost s modelem, zárodkem příštího poznatku.
2. Poznávání dalších separovaných modelů; některé modely začnou na sebe poukazovat.
3. Prodiferencovávání souboru poznaných modelů; některé modely se navzájem shlukují do skupin, jiné zůstávají izolované.

Pak přijde objev jevu, který osvětlí příčinu shlukování. Modely stojící dosud izolovaně se propojí. Člověk **zobecněním** objeví to, co je všem modelům skupiny společné: univerzální model dané skupiny. Tím se začíná etapa **univerzálních modelů**. Nejčastěji je univerzálním modelem skupiny jeden její separovaný model. Ten je pak používán jako reprezentant jiných separovaných modelů skupiny. Například k počítání různých předmětů použije dítě prsty. Ty jsou běžným univerzálním modelem pro počítání s malými přirozenými čísly.

Univerzální model plní vzhledem ke skupině separovaných modelů tři funkce:
Vyjadřuje podstatu této skupiny, to, co je všem separovaným modelům společné.
Zastupuje jiné modely této skupiny.
Je reprezentantem této skupiny navenek, směrem k dalším pojmům a poznatkům.

U těch poznatků, u nichž se komunita separovaných modelů dělí na oddělené skupiny, má každá skupina svého vlastního reprezentanta, svůj vlastní univerzální model. Tak například pro pojem „půl“ měl můj šestiletý vnuk aspoň tři univerzální modely: půl osmé – čas odchodu do školky (velká ručička hodin ukazuje dolů), půl koláče – díl, který dostane každý ze dvou bratrů (kruhový koláč je rozkrojen rovným řezem přes střed), půl hrnku – hrnek, který není plný. Tyto tři univerzální modely neměl hoch ještě propojeny. U nepřesného dělení koláče věděl, že jedna část je více a druhá méně než půl; u hodin věděl pouze, kdy je a kdy není půl, a nevěděl, zda v čase 9:35 je více než půl nebo méně než půl; u hrnku slovo půl používal volně – půl hrnku pro něj znamenalo, že hrnek není ani plný, ani prázdný.

V etapě univerzálních modelů se v jisté míře opakuje to, co se odehrálo v předchozí etapě separovaných modelů: univerzální modely se navzájem propojí a začnou vytvářet novou vyšší jednotu. Navíc, a to je pro následující krok příznačné, dochází k **abstrakci.** Nový jev, který se objeví jako sjednocující myšlenka dosavadních univerzálních modelů, leží ve vyšší abstraktní rovině a není závislý na světě smyslové zkušenosti. K takovému abstraktnímu zdvihu došlo u mého vnuka, když poznal, že „půl“ může být i číslo bez sémantického propojení. Ve věku osmi let mu již bylo jasné, že 0,5 nebo 3,5 jsou čísla, jejichž součet je 4 a rozdíl je 3. Věděl, že 0,50 Kč je veličina, ale ve vazbě na objekt, například na koláč nebo kupu kuliček je 0,5 operátor. Dodejme, že čísla 0,5 a 3,5 se stala separovanými modely příštího hochova poznatku „desetinné číslo“. Hoch zatím neví, co je to 3,2, ani co je 3,2 m, ale ví, že 3,20 Kč jsou tři koruny a jeden dvacetník.

Závěrečná etapa poznávacího procesu, **krystalizace**, zkoumá domestikaci nové znalosti v existující již poznatkové struktuře. Příkladem může být poznatek, že tvar čtverce lze vytvořit ze sirek. Sirky zdůrazňují hranici čtverce a nový separovaný model přispívá k vzniku univerzálního modelu čtverec. Někdy nová znalost danou poznatkovou strukturu mění. Tak objev záporných čísel mění představu, že od menšího čísla nelze odečíst větší a objev komplexních čísel mění představu, že ne každá kvadratická rovnice má řešení.

5. PROPEDEUTIKA ARITMETICKÉ STRUKTURY

Termínem **aritmetická struktura** označujeme objekt druhého Popperova světa – strukturu, která je uložena ve vědomí jistého člověka, nejčastěji žáka.

5.1 Poznávání matematické struktury žáka

Matematická struktura vzniká propojováním jednotlivých poznatků. Jestliže si dílčí poznatky představíme jako uzlíky na rybářské síti a kousky provázků spojující uzlíky jako vazby mezi poznatky, pak ona síť bude strukturou. Čím je síť hustší, tím je struktura, kterou síť představuje, kvalitnější. Tam, kde je předivo vazeb husté, je i struktura kvalitnější, kde je předivo řidší, je struktura méně kvalitní. Tak žáci prvního ročníku mají jistě soubor vazeb čísel do 10 bohatší, než soubor vazeb druhé nebo dokonce třetí desítky čísel.

Přirovnání matematické struktury člověka k rybářské síti je nepřesné v tom, že na rozdíl od sítě, matematická struktura je a) mnohovrstvová a b) stále se mění. Jestliže například mluvíme o poznatku 2 + 3 = 5 jako o uzlíku sítě, pak nutno dodat, že tento vznikl opakováním činnosti, na níž se podílely čtyři jiné poznatky: znalost symbolu 2 (je to mnohost ••), znalost symbolu 3 (je to mnohost •••), znalost činnosti „dát dohromady“ (operace •• a ••• je •••••) a znalost „určit písemný nebo slovní znak přiřazený mnohosti •••••“ (například říkankou).

Nový poznatek svým příchodem do rodící se mentální struktury přispívá
objemem – je to další „stavební kámen“ struktury,
podněty pro běžící rozvojové procesy a
spouštěcími impulzy nových rozvojových procesů.

Například když čtyřletý Ivo ke svým třem korunám dostal další dvě, řekl „i dvě a tři je tolik“. Asi si aktuální situaci „ke třem přidám dvě“ propojil s dřívější situací „ke dvěma přibudou tři“. Můžeme se pouze dohadovat, proč k tomu došlo a co se tím v Ivově vědomí dotvořilo a co rozeběhlo; např.: a) první uzření proceptu „pět je spojení dvou a tří“, b) interiorizace toho manipulativního procesu, který je naznačen výše pomocí teček, c) kondezace procesů „spojím dvě a tři“ a „ke dvěma přidám tři“ do konceptu „dvě a tři“, d) uzření prvního separovaného modelu komutativity sčítání atd. atd.

Vztah mezi poznatky a strukturou, kterou tyto vytváří, můžeme připodobnit i k šachové hře. Šachista, který ještě nemá zcela jasno o tazích jednotlivých fugurek, například nemá jistotu u tahů koně, nemůže moc úspěšně šachově kombinovat. Stejně i žák, jehož dílčí znalosti jsou nepevné, nemůže úspěšně danou oblast strukturovat. Proto jsou dobré a bohaté představy základních pojmů nutnou podmínkou rozvoje příslušné struktury.

K tomu, aby byl šachista úspěšný ve hře, nestačí, aby znal tahy všech figurek. Potřebuje mít zkušenosti o součinnosti figur v šachovém boji. Stejně žák, který má z jisté matematické oblasti mnoho dílčích znalostí, může neuspět při řešení úlohy, která vyžaduje součinnost těchto znalostí (viz fenomén řetězení v kapitole 5.6).

Našim cílem je zkoumání schopnosti žáka propojit jednotlivé aritmetické poznatky. Nástrojem zkoumání budou úlohy, které takové propojení vyžadují.

5.2 Nástroj

Následující úlohy 3, 4 a 5 a různé jejich modifikace byly a jsou používány v našich výzkumech zaměřených na poznávání aritmetické struktury člověka, zejména žáka základní školy. Úloha 6, určená středoškolákům, byla poprvé použita v dílně na SEMTu a byla účastníky vysoce hodnocena.

Úloha 3. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte dvě dvoumístná čísla, jejichž součin je největší možný.

Úloha 4. Z čísel 5, –6, 7 a jedné operace násobení a jedné operace odčítání a případně i jedné nebo více závorek vytvořte číselný výraz, jehož hodnota je největší možná.

Úloha 5. V sedmimístném čísle 4 650 937 škrtni jednu číslici tak, aby zbylé šestimístné číslo bylo a) co největší, b) co nejmenší.

Úloha 6. Kolik nul je v součinu $100\ldots002 \times 300\ldots004$ jestliže počet nul v prvním součiniteli je m a ve druhém n.

V této studii se omezíme pouze na úlohu 3. Její formulace není bezchybná, neboť nežádá, aby každá z číslic 1, 2, 3, 4 byla použita právě jednou. Když žák napíše řešení 44 × 44 = 1936, nelze jej zamítnout. Později jsme text úlohy doplnili o uvedenou podmínku, ale vylepšená verze se ukázala pro mnohé záky jako méně srozumitelná. Proto jsme používali původní textaci s tím, že v průběhu rozhovoru experimentátor zadání upřesnil (viz dále příběh 5).

Co vlastně úloha 3 testuje? Kvalitu části aritmetické struktury žáka. Zejména to, do jaké míry dokáže navzájem propojit tři dílčí poznatky:

a) porozumění výzvě „z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte dvě dvoumístná čísla“;
b) znalost „součin je tím větší, čím větší jsou jeho činitelé“;
c) znalost, že o velikosti dvoumístného čísla primárně rozhoduje číslice na místě desítek.

Řešitel, který tyto poznatky dobře propojí, najde některé ze tří řešení: 43 × 21 = 903, 42 × 31 = 1302 a 41 × 32 = 1312. Ten, který je prověří všechny, zjistí, že poslední výsledek je nejlepší.

Abychom neztráceli čas se žáky, kteří uvedené tři dílčí znalosti nemají, rozhodli jsme se vždy týden před experimentem prověřit tuto věc pomocí satelitních úloh následujícího typu:

Úloha 3a. Z pěti číslic 6, 0, 1, 1 a 7 sestav jedno dvoumístné a jedno trojmístné číslo.
Úloha 3b. Z pěti číslic 6, 0, 1, 1 a 7 sestav největší možné pětimístné číslo.
Úloha 3c. Z čísel 15, 42, 33, 51 vyber dvě tak, aby po vynásobení dala největší výsledek.

Žák, který úlohu 3 vyřeší, zná nejen tři dílčí poznatky, ale i jejich vzájemné propojení. Žák, který vyřeší všechny satelitní úlohy, ale základní úlohu nevyřeší, má nižší kvalitu propojení poznatků (viz Filip z příběhu 7 dále). Tito žáci budou předmětem našeho dalšího zkoumání. U žáků, kteří úlohu dobře vyřeší, nás bude zajímat jejich řešitelská strategie a případná bloudění, ke kterým v procesu řešení u nich došlo.

Později jsme zjistili, že formulace úlohy 3c nebyla přesná, protože neobsahovala slovo součin, které se vyskytuje v úloze 3. někteří žáci jej zaměnili za součet (viz příběh 8 dále). Úloha pak byla přeformulována tak, že slova „po vynásobení dala největší výsledek“ byla zaměněna za slova „jejich součin byl největší možný“.

5.3 Proces řešení úlohy 3 a jeho analýza

Příběh 4. Cyril (březen, 4. ročník) má zálibu v číselných hrátkách. Vlastní kalkulačku (ta byla v té době vzácnost) a rád si s ní hraje. Hoch zná zpaměti mnoho vztahů, např. 11 × 11 × 11 = 1331. Přesto učitelka týden před experimentem prověřila, že hoch umí řešit tři satelitní úlohy 3a – 3c.

Rozhovor se odehráva v kabinetě, kde je kromě Cyrila a autora pouze jedna učitelka, která něco píše u vzdáleného stolu. Rozhovor není ničím rušen. Atmosféra je pohodová. Hoch se na experiment těšil. S experimentátorem se trochu zná, teď poprvé spolu mluví o matematice. Po úvodních větách experimentátor klade před Cyrila text úlohy

Ex 5: *Podívejme se na tuto úlohu* (pomalu čte, Cyril očima sleduje čtený text.) *Z číslic …. možný.*
Cyril 5: (Po 4 vteřinách bere kalkulačku a něco počítá, dvakrát se očima krátce vrací k zadání.)
Ex 6: Všechno, co dáváš kalkulačce, musíš dát i na papír, abych viděl, jak to řešíš.
Cy 6: *Tak jo* (píše 43 × 21 = 903), *je to devětset…* (zarazil se; asi 3 vteřiny uvažoval, pak napsal 42 × 31 a pomocí kalkulačky dopsal = 1302; po 2 vteřinách pod to napsal 41 × 32 = 1312, opět použil kalkulačku; nahlédl do zadání). *No jo, to je chyták* (číslo 1312 podtrhnul), *to je nejvíc.*
Ex 7: Tak dobře. A jseš si tím jist?
Cy 7: Jsem to tady (ukazuje na číslo 903) zapomněl, že to mám prohodit. Tady musí být čtyři a tady trojka (ukazuje místa desítek prvního i druhého čísla). Nebo tady čtyřka a tady trojka (ukazuje čísla prohozeně) to je na stejno. Tak je takto (ukazuje součin 42 × 31), ale takto je to ještě víc (ukazuje součin 41 × 32).

Analýza. Matematické znalosti i schopnosti hocha jsou výrazně nadprůměrné. Hoch projevil čtyři znalosti (tři z nich mají obecný charakter, čtvrtá je konkrétní) a pět schopností.

	Znalosti		Schopnosti
1	Čím větší jsou činitelé, tím větší je součin.	5	Uchopování úlohy.
2	O velikosti dvoumístného čísla rozhoduje číslice na místě desítek.	6	Hledání řešitelské strategie.
		7	Orientace v kombinatorické situaci.
3	Násobení je komutativní.	8	Citlivost na přítomnost chyby.
4	Na místě desítek činitelů musí být číslice 4 a 3.	9	Zvládání chyby.

Konstrukce řešitelského mechanizmu, tj. naše představa o řešitelském procesu Cyrila.
Hoch uchopil úlohu správně a rychle. Jistě zde přispívá i vysoká míra motivace. První, jeho separovaný model hledaného součinu (43 × 21 v Cy 6) je tak zdařilý, že je zároveň i modelem univerzálním. Cyril demonstruje znalosti 1, 2 i 3 a schopnosti 5 a 6. K správnému uchopení úlohy tedy dochází velice rychle; Cyril dokonce tento součin považuje chvíli za řešení. Svědčí o tom jeho slova *je to devětset.* (Cy 6). V jeho úvaze se zde objevuje chyba. Rychlý zásah mentálního *agenta bdělosti*[3] (anglicky *alert*) vede k rychlé korekci. Evidujeme schopnosti 4 a 5. Cyril vidí, že prohozením číslic 3 a 2 výrazně zvětší druhého činitele a málo ubere z prvního. Tato část procesu je nejvýznamnější, protože jako jediná je evidována meta-kognicí. Jednak v Cy 6 hoch ukazuje, že byl objevem překvapen (*No jo, to je chyták*), jednak v Cy 7 přesně hodnotí svoje selhání (*Jsem to tady zapomněl*). Poslední součin 42 × 31 hoch prověřuje. Uvědomí si, že existuje ještě i další kandidát na největší součin: 41 × 32. Porovnání obou kandidátů probíhá na úrovni rutinní práce.

Nejdůležitější edukační momenty: vysoká motivace, rychlé uchopování situace, dobrá práce agenta bdělosti, schopnost učit se na vlastních chybách jejich zvědomováním.

5.4 Čtyři další příběhy o řešení úlohy 3

Příběh 5. David (duben, 4. ročník); podle vyučující je dobrý počtář, nemá dost sebedůvěry. Zde i u dalších protokolů klimatický rozhovor neuvádíme a vstupy číslujeme od jedné.
David 1: (Dvakrát přečetl polohlasem zadání a napsal 44 × 44 = 1936): *Takhle?*
Ex 1: No to není úplně dobře (vidí žákovy rozpaky), žádná číslice se ti nesmí opakovat.
Dd 2: (Ihned napsal 43 × 43 = 1849): *A musím vzít i tu dvojku a jedničku* (ukazuje na zadání)?
Ex 2: Musíš vzít každou z číslic jedna, dvě, tři a čtyři, ale každou jen, každou právě jednou.
Dd 3: (Napsal 12 × 34 = 408, po 5 vteřinách napsal 421 × 3 = a zaváhal): *To tak může být taky*?
Ex 3: (Položil prst na slovo „dvoumístná“ v zadání.)
Dd 4: (Škrtl 421 × 3 = a napsal 43 × 12. I to škrtl a napsal 43 × 21 = 309): *Je to nejvíc; jo?*
Ex 4: (S intonací pochybnosti): *Určitě*? (po chvíli) *Je to víc i než toto* (ukázal na číslo 408)?
Dd 5: (Kalkulačkou prověřil výpočet, číslo 309 přepsal na 903, to výrazně podtrhnul): *Toto.*
Ex 5: (S jistou intonací nedůvěry): Tak dobře. Tvůj výsledek je devětset tři.
Dd 6: *To je nejvíc. To … čtyřicet tři je víc než třicet čtyři a dvacet jedna je víc než dvanáct.*

Příběh 6. Eva (duben, 4. ročník); podle vyučující je trochu zbrklá, upovídaná a líná.
Eva 1: (Jednou hlasitě a pak potichu čte zadání.) *Jako že* (píše 12 × 43), *nebo tak?*
Ex1: Ano, tak nějak.
Eva 2: *Tak to je* (píše 43 × 2 , po chvíli škrtá), *ne, raději* (píše 42 × 31 = 1302) *to je největší.*
Ex 2: (Bere papír, na který se dívka s hrdostí podepsala a váhavě říka) *Jseš si jista?*
Eva 3: (Podívá se na zadání, ale nečte jej. Rychle odpoví) *Jsem. Je to třináctset dva*.
Ex3: Tak jo. No dobře, ale kdybys to tady (ukazuje na číslice 2, 1) prohodila?
Eva 4: *Čtyřicet dva krát třicet jedna nebo třicet jedna krát čtyřicet dva to vyjde na stejno.*

Příběh 7. Filip (květen, 3. ročník); podle vyučující vzorný žák.
Filip 1: (Po trojím hlasitém čtení úlohy, zahanbeně, pod tlakem selhání): *Já tomu nerozumím.*
Ex 1: (Povzbudivě): Umíš napsat nějaké dvoumísté číslo?
Fp 2: (Stále nejistě, krasopisně píše 25.)
Ex 2: Výborně! Ano, to je dvoumístné číslo. Ale tu pětku zde (ukazuje na zadání) nemáme.

[3] Termín „agent“ podle Minsky (1988). Podrobněji viz Hejný, Michalcová (2001, s 47-50).

Fp 3: (Dívá se na zadání a krasopisně píše 12, 23, 34): *Dvanáct, dvacet tři a třicet čtyři.*
Ex 3: *Skvěle! Tak si přečtěme úlohu*. (pomalu čte) *Z číslic jedna, ...* (utichne, neboť vidí, že Filip si čte sám; čte opakovaně; experimentátor položí prst na slovo „součin“)
Fp 4: (Čte úlohu, napíše 12 a 23; čte opětovně, napíše 12 × 23; vypočte bez kalkulačky 276.)
Ex 4: (Radostně): No výborně! (pauza) Teď vezmi všechny čtyři číslice. Jako napří…(pauza)
Fp 5: (Již uvolněně; skočí experimentátorovi do řeči): *Jako* (píše 12 × 34 a čte, co píše).
Ex 5: Přesně tak. (pauza) Uměl bys napsat i jiný takový součin z těch číslic? Tak, aby výsledek byl co největší (ukazuje na poslední slova v zadání).
Fp 6: (Napíše 34 × 12 a s vědomím, že úkol splnil, dívá se na experimentátora.)
Ex 6: Jistě, ale můžeš vzít i jiné (píše 21 × 34), nebo (píše 32 × 14) a další. Chápeš?
Fp 7: *Například i* (píše a čte, co píše 24 × 13, 42 × 31, 31 × 42, …)
Ex 7: Výborně! Vidíš, že takových součinů můžeme napsat velice mnoho. Tyto jsou (připisuje k nim výsledky 408, 408, 448, 312, 1302, 1302). Uměl bys najít ten součin, který je největší?
Fp 8: To bych počítal na kalkulačce.

Příběh 8. Gitka (duben, 4. ročník); stejně jako Cyril, má již zkušenosti s těmito úlohami.
Gitka 1: (55 vteřin si potichu čte a v mysli řeší úlohu; napíše 42 + 31 = 73): *To je nejvíc.*
Ex 1: (pauza): *Pečlivě si přečti zadání.* (Po 20 vteřinách ukáže prstem na slovo součin.)
Ga 2: *A jo, násobit* (přepíše znaménko „+ na „×“, vše škrtá a píše 42 × 31 = 1302).
Ex 2: (S intonací provokace): Jseš si jista, že tisíc třista dva je největší možné číslo?
Ga 3: (20 vteřin je ticho, pak píše 41 x 32 = 1312, předchozí škrtá.): *Toto je víc. Je to nejvíc?* (Experimentátor mlčí, dívka ještě asi 5 vteřin uvažuje.) *Víc se udělat nedá. Z těch čísel.*

5.5 Analýza příběhů 5 – 8

Podobně jako jsme analyzovali postup Cyrila, budeme teď analyzovat další čtyři řešitelské procesy. Tentokrát však nám půjde i o identifikaci obecných fenoménů, které jsou v daném řešení přítomny a které pak budeme hledat i u dalších řešitelů.
David
Hoch úlohu interpetoval po svém a ihned vyřešil. Odhalil tím vágnost formulace úlohy 3 a upozornil na fenomén *interpretace* textu úlohy. Svému řešení příliš nevěří, protože je příliš jednoduché, až primitivní. Proto žádá souhlas experimentátora. Ten řekne, že číslice se nesmí opakovat. David i tuto informaci pochopí jinak, než byla myšlena. Opět si není jist a opět žádá autoritu o odsouhlasení výsledku. To poukazuje na potřebu zavést meta-kognitivní fenomén *míra jistoty* a s ním propojené fenomény *zřídla pochybností* a *zřídla jistoty*. David ukazuje nízkou míru jistoty u úloh, které jsou strukturálně náročnější, jeho pochybnosti pramení ze zkušeností – z předchozích neúspěchů, jistotu hledá u autority. I tam, kde může chybu opravit opětovným čtením textu (u nápisu 421 × 3 v Dd 3) se obrací na experimentátora.

Vstup Ex 1, ve kterém experimentátor upřesňuje text úlohy, ukazuje, že je potřebné zavést i fenomén *dodatečné upřesnění textu,* který ale není fenoménem řešitelského procesu. Budeme pracovat jen s podfenoménem *interpretace dodatečné informace* fenoménu *interpretace.* V Dd 2 k takové interpretaci dochází. Ani tato není v souladu s představou experimentátora.

Vstup Dd 3 je bohatý na diagnostické informace. David udělá dva pokusy o řešení. První sám shledává neúspěšným a o druhém pochybuje, protože se na jeho legálnost dotazuje experimentátora. Položme si otázku, co je příčinou prvního a co je příčinou druhého hochova neúspěchu? Separovaný model 12 × 34 nelze považovat za chybu. Je to první hochův úspěšně vytvořený objekt: součin dvou dvoumístných čísel utvořených z číslic 1, 2, 3, 4 tak, že každá číslice se zde objeví právě jednou. Když David zjistil výsledek 408, uvědomil si, že zapomněl na podmínku, která byla u jeho prvních pokusů dominantní – maximálnost výsledku. Po pěti vteřinách napsal tedy nový součin 421 × 3, který respektuje podmínky „každá z číslic 1, 2, 3, 4 se objeví právě jednou“, „čísla jsou dvě“, „hledáme součin“ a která nadějně hledá maximální součin, ale opomene podmínku „čísla jsou dvoumístná“. Když toto Davidovo bloudění člověk vidí, má dojem, že hoch záměrně chybuje. Ale to není pravda. Ta je v poznání, že David nedokáže ve svém vědomí najednou zpřítomnit sérii pod-

mínek kladených na jeden objekt a takový objekt vytvořit. Na popis této schopnosti zavedeme fenomén *součinnost podmínek.* Na základě mnoha našich experimentů jsem přesvědčen, že absence schopnosti *přecházet od jednotlivin k větším celkům* je meta-kognitivní nedostatek, který výrazně brzdí proces tvorby aritmetické struktury. Uvedený fenomén je v teorii Sfard propojen s termínem kondenzace.

Každá podmínka, která se při konstrukci hledaného součinu objevuje, je fenoménem. Většinou jsou to právě tyto fenomény, které se objevují v popisech běžných žákovských řešení nejčastěji.

Numerická chyba v Dd 4 byla způsobena zrcadlovým opsáním čísla z kalkulačky. Stačil náznak (Ex 4) a hoch ihned prověřil přesně to místo, kde se chyba objevila. To ukazuje, že hoch si je této své systematické chyby (špatně opsat číslo) vědom. Toto poznání vede na dvě nové charakteristiky již známých fenoménů: charakteristika *systematičnost* obohatí fenomén *chyba* a charakteristika *uvědomování si své systematické chyby* obohatí fenomén *alert.*

Rada učiteli: zvyšovat intelektuální sebevědomí žáka tím, že mu umožníme prožívat radost z úspěšně vyřešené lehčí úlohy. Budovat schopnost kondenzace (ve smyslu teorie reifikace).

Dodejme, že nápověda Ex 3 byla asi zbytečně silná; stačilo vyzvat hocha k přečtení zadání. První analýza byla podrobná, analýzy dalších tří případů budou stručnější.

Eva

Eva uchopila úlohu rychle a komplexně. Pomocí separovaného modelu, který dobře odpovídá tvaru zkoumaných objektů, se ujistila, že úloze rozumí. Asi i ona cítila, že text není zcela jednoznačný a tak se raději zeptala. První pokus o řešení (43 × 2) byl přerušen poznáním, že součin lze zvětšit tím, že číslice 3 a 4 budou na místě desítek u činitelů. Další řešení (42 × 31 = 1302), které dívka prohlásila za nejlepší, je již skutečně skoro nejlepší. Snaha experimentátora spochybnit Evinu víru v dokonalost tohoto řešení byla neúspěšná. Překvapivý byl výrok (Eva 4) s unáhleným a nepravdivým tvrzením. Experimentátora tak překvapil, že nenašel cestu, jak v rozhovoru pokračovat. Stačilo, kdyby požádal dívku, aby svoje tvrzení ověřila, a mohl ji sledovat v situaci, kdy zjistila, že v úvahách má chybu.

Příběh má ještě epilog. Když jsem opouštěl školu, čekala mne Eva u východu. Měla řešení. Uvedla, že ji *popletlo to slovo komutita.* Měla na mysli komutativitu. Ukázala, že pro sčítání skutečně platí 42 + 31 = 41 + 32. Pro násobení to ale neplatí. Dodejme, že stejný omyl jsme evidovali u více žáků, ale slovo „komutativita“ se již jinde neobjevilo.

Zde nacházíme dva fenomény. První patří do rodiny podfenoménů fenoménu „chyba“ a nazýváme jej *chybný přenos*. Druhý fenomén nazýváme *signál* a o obou píšeme v dalším textu.

Rada učiteli: Nedostatky – ukvapené závěry a nízká bdělost – leží spíše v meta-kognitivní než v kognitivní oblasti. Žádat od dívky písemná řešení náročnějších úloh a nedokonalá řešení jí vracet bez poukazu na lokalitu chyby. Vysoce hodnotit zlepšení v pečlivosti práce.

Filip

Hoch nedovede číst sevřený matematický text s porozuměním. Experimentátor postupně vede hocha k uchopení prvků. Ten si představu o hledaném objektu tvoří pomalu po krocích pod přímým vedením experimentátora: dvoumístné číslo (Ex 1 a Fp 2); pouze číslice 1, 2, 3 a 4 (Ex 2 a Fp 3); součin dvou takových čísel (Ex 3 a Fp 4 – zde je největší samostatnost žáka); nutno použít všechny čtyři číslice (Ex 4 a Fp 5); takových objektů je více (Ex 5 a Fp 6); je jich mnoho (Ex 6 a Fp 7); hledáme ten s největším výsledkem (Ex 7 a Fp 8). Rozhovor již u Fp 6 byl zralý na ukončení, protože bylo jasné, že úloha jako celek přesahuje intelektuální kapacitu Filipa. Experimentátor pokračuje až do konce, protože se snaží přesněji popsat to, co je příčinou úplného Filipova selhání. Analýza ukázala, že příčinu nutno rozložit do tří vrstev.

V první, kognitivní vrstvě, je to jev *řetězení.* I když experimentátor pomůže hochovi pochopit každou z dílčích podmínek, Filip si nedokáže vytvořit ve vědomí celkový obraz o úloze. Tomuto fenoménu věnujeme v dalším zvláštní pozornost.

Druhá vrstva je meta-kognitivní. Žák nemá rozvinutu schopnost vnímat jistou situaci jako výzvu k intelektuální činnosti hledání ukrytého objektu. Fenomén, který tuto potenci popisuje, nazveme *přijetí (matematické) úlohy,* nebo obecněji *přijetí (intelektuální) výzvy.* Snížení schopnosti přijetí

intelektuální výzvy jsme evidovali spíše u dívek než hochů a často se objevila jako důsledek nebo průvodní jev autoritativní výchovy. Žák si je své chyby často dobře vědom, ale vnímá jej osudově, jako genetickou danost, se kterou nelze nic dělat. Proto je zde pokus o reedukaci velice složitý.

Třetí vrstva je osobnostní nebo hodnotová nebo postojová. Žák se na matematiku dívá jako na oblast, ve které je schopen uspět, jestliže se od něj žádá imitace a reprodukce. Matematiku, která od žáka žádá tvořivost nebo autonomní intelektuální výkon, považuje Filip za nedostupnou. Fenomén, který opisuje tuto vrstvu nazveme *smysl matematiky.* Přesněji bychom asi měli mluvit o smyslu učení se matematice.

Filip je orientován na nácvik algoritmů a rezignuje na autonomní intelektuální práci. Tato skutečnost je alarmující. Jestliže je svojí učitelkou hodnocen jako vzorný, jeví se další jeho matematický vývoj velice pochmurně.

Rada učiteli: poohlédnout se po jiném zaměstnání. Rada pro dalšího Filipova učitele: vést Filipa k samostatným myšlenkovým výkonům, nejprve pochopitelně pomocí velice jednoduchých úloh.

Gitka

Při uchopení úlohy došlo k posunu interpretace: součin pochopila jako součet a tuto lehčí úlohu vyřešila dobře. Překvapivé je skoro minutové mlčení dívky na začátku. Naše původní analýza o tom uvádí: „Dívka je zřejmě zvyklá řešit úlohy v hlavě a proto na začátku dlouho nic nepíše. Záměna součinu za součet je asi dílem nepozornosti. Upozornění na přítomnost chyby nevedlo ke korekci, bylo třeba na chybu ukázat. Konstatujeme slabou práci Gitčina agenta bdělosti."

Později, asi po dvou dnech jsme s dětmi opět rozmlouvali v uvolněné atmosféře. Zde nám Gitka vysvětlila, že si u této úlohy dlouho nebyla jista, jaký je rozdíl mezi číslem a číslicí a to ji zdrželo. Bála se zeptat. Když pak ji experimentátor žádal, aby si přečetla zadání pečlivě (Ex 1), byla si jista, že to popletla. Byla překvapena, když experimentátor ukázal na slovo součin.

Po tomto dodatečném vysvětlení jsme původní analýzu změnili. Především jsme identifikovali důležitou a již dříve často evidovanou charakteristiku fenoménu *komunikace* a to *strach ptát se.* Pak jsme změnili původní analýzu takto: „Příčinou dlouhého mlčení dívky na začátku byla nejistota termínu číslice. Tato nejistota do té míry odčerpala dívce energii, že záměna součtu a součinu byla důsledkem jevu vytěsnění.

Pokračujeme v analýze. Vstup Ex 2 byl ukvapený, dívka neměla čas si svůj výsledek prověřit. Strukturu aritmetických představ má dívka rozvinutu nadprůměrně. Pozoruhodné je, že dívka si dělá neobvykle málo poznámek, značnou část úvah uskutečňuje v představě. Tato skutečnost je nový fenomén, který nám analýza nabízí. Nazveme jej *užívání vnější krátkodobé paměti* nebo krátce *vnější paměť*. Někdy je příčinou tohoto jevu překotnost myšlenkového pohybu, jindy strach z chyby: „jakmile něco napíši, může to být chybně". Zde byla asi příčina v tom, že úsporné používání krátkodobé paměti je součást řešitelského stylu dívky.

Rada učiteli: Zjistit 1) proč se dívka snaží úvahy i výpočty dělat převážně v paměti a 2) zda nepřesné čtení textu bylo náhodné, nebo je to systematický nedostatek dívky. Z obou zjištění vyvodit případné reedukační zásahy. Návrh: je-li to realizovatelné, vytvořit situaci, ve které Gitka něco vysvětluje své kamarádce. Lze očekávat, že zde by psala více.

5.6 Jevy: vytěsňování, chybný přenos, signál a řetězení

Efekt vytěsňování

evidujeme i v běžném životě. Na něco intenzivně myslím a zapomenu pozdravit kolegu. Příčina vytěsňování je zřejmá. Vědomí nedokáže pojmout a propojit více myšlenek. Nemá dost energie. Uchová myšlenky naléhavější a ostatní ignoruje.

Když například při písemném sčítání 87 + 38 žák dojde k výsledku 115, je velice pravděpodobné, že zapomněl přenést jednotku ze součtu 7 + 8 = 15 do řádu desítek. Nejdříve sčítal 7 a 8, zapsal na papír číslici 5, a do krátkodobé paměti si uložil „1 zbyla". Pak začal sčítat 8 + 3 a z paměti zmizela tam uchovávaná informace. Například proto, že na její uchování nebylo dost energie. Žák, který má spoj 8 + 3 = 11 automatizován, nepotřebuje na tento mentální výkon skoro žádnou energii a z jeho paměti se tam uložená informace neztratí.

Žáci měli upravit výrazy a) $(4a + 6)/(2a + 3)$ i b) $(x - \sqrt{2})/(x\sqrt{2} - 2)$. U výrazu a) většina žáků napsala výsledek 2 i s podmínkou $2a \neq -3$. U výrazu b) podmínku $x \neq \sqrt{2}$ napsal jediný žák. U dalších řešitelů náročnost úpravy spotřebovala tolik energie, že na podmínku ji již neměli.

Učitel má mnohé znalosti a postupy automatizované. Proto často nedokáže odhadnout míru energetické náročnosti intelektuálního výkonu žáka, který touto automatizací nedisponuje a někdy naléhá na urychlení žákova výkonu. Tím jej nechtě orientuje na paměťové učení se.

Chybný přenos

Myšlenkové schéma (představa, postup, …) je přenášeno ze známé oblasti do oblasti nové, kde již neplatí, nebo aspoň ne v plné šíři. Například úprava typu $7\times(a + b) = 7a + 7b$ vytváří ve vědomí žáka schéma „to, co je naznačeno pro celek, mám udělat pro každý prvek celku“. Toto schéma pak žáci často přenáší do dalších kontextů, v nichž neplatí: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$. Didakticky velice zajímavý příklad chybného přenosu procesuálního schématu je popsán v článku Kratochvílová (2002), (viz Kratochvílové článek v Pytagorovi 2001).

Prevencí proti této chybě je konstruktivistické zavádění nových schemat, v nichž se nové myšlenky nejprve zkoumá v různých kontextech a její nácviková prezentace se odsouvá co nejdéle. Bohužel tento postup učitelé odmítají s poukazem na nedostatek času.

Signál

označuje znak, slovo nebo idiom, který vyvolá (asociuje) ve vědomí člověka představu nebo dokonce proceduru. Každé běžné slovo jako „pes“, „vítěz“, „běží“,… nějakou představu vyvolá. Nám jde o ty signály, které se týkají matematiky a vyvolávají deformované představy. K těm patří dosti často ty termíny, u nichž vyučující vyžaduje, aby je žák uměl „definovat“. Pak se stane, že se termín „rovnoramenný trojúhelník“ ve vědomí žáka asociuje se sloganem „je to trojúhelník, jehož dvě strany, které nazýváme ramena, jsou shodné“, ale žák nemá o tomto objektu žádnou vizuální představu. Běžně se signál objevuje u slovních úloh, kde žák místo snahy o vytvoření si představy o celé situaci, vyhledá v úloze čísla a signální slovo. Například když jsou v úloze čísla 10 a 6 a slovo „prohrál“ asociované s odčítáním, tak žák napíše $10 - 6 = 4$.

Řetězení

Lenka (6. ročník) uměla z obsahu čtverce zjistit délku jeho strany i z délky strany zjistit obvod čtverce, ale úlohu „obsah čtverce je 49 cm^2, jaký je jeho obvod?“ nevyřešila. Neuměla oba dílčí poznatky zřetězit a vytvořit tím jeden řešitelský tah. Když ji ale učitelka napověděla otázkou „uměla bys najít aspoň stranu toho čtverce?“ Lenka úlohu vyřešila. Filip z příběhu 7 nedokázal z několika dílčích vlastností poskládat hledaný objekt a ani pomoc experimentátora nebyla v tomto případě účinná. Proč? Z mnoha našich experimentů soudíme, že příčina tkví v nepřipravenosti žáka na úlohy, které vyžadují schopnost samostatně tvořit myšlenkové celky z dílčích poznatků. Těchto úloh se nedostává na prvním stupni a na druhém je již pro mnoho žáků pozdě. Jeden zajímavý případ jsme zaznamenali u žáka 4. ročníku. I když bez problémů vyřešil satelitní úlohu 3a, úlohu 3 neuchopil, protože neporozuměl slovnímu spojení „dvě dvoumístná“. Když jej experimentátor žádal, aby utvořil jedno dvoumístné číslo a pak ze zbylých číslic druhé, žák úlohu uchopil.

6. OD ANALÝZY K DIAGNOSTICE

6.1 Výzkum verzus diagnostika

Cílem výzkumu je hledání zákonitostí, jimiž se řídí a) vznik a rozvoj matematických představ ve vědomí žáka, b) matematické myšlenkové pohyby žáků i učitelů, c) vývoj matematických znalostí a schopností žáka, d) vzájemná interakce mezi participanty procesu učení a učení se matematice, e) vliv učitele a jeho hodnotového systému na kvalitu vyučování, f) vliv učebnic, klimatu třídy a klimatu školy na kvalitu vyučování atd.

Stručně řečeno, úlohou výzkumníka je poznávat. Jeho občanskou povinností je nabízet a občas i vnucovat výsledky svého bádání těm, kterým mohou být užitečné: učitelům, aby jim i žákům

dělala jejich společná práce více radosti; decizní sféře, aby lépe řídila školství; autorům učebnic, aby využili poznatky k napsání působivějších a srozumitelnějších textů,…

Experimentální kvalitativní výzkum, který je zaměřen na kognitivní strukturu žáka (což je i náš případ) obsahuje a) formulaci problému, b) přípravu nástroje včetně způsobu jeho aplikace (např.: žák/žáci písemně řeší úlohu, žaci spolu diskutují o jistém problému, jeden žák vysvětluje nějaký pojem, postup, problém, schéma,… jinému žákovi, experimentátor rozmlouvá se žákem/žáky, …), c) realizaci experimentu, d) pečlivou evidenci, všeho co se během experimentu odehrálo, a konečně e) analýzu evidovaného materiálu.

Analýza se orientuje zejména na hledání kognitivních i meta-kognitivních fenoménů, jejich hlubší poznávání, charakterizování a mapování, na jejich organizování do hierarchicky vrstvených kategorií. Po této spíše rozkladové části analýzy nastupuje část syntetizující. Jejím cílem je popsat řešitelské mechanizmy, které jsou schopny osvětlit myšlenkové procesy řešitelů u celé třídy případů. Konečně jsou hledány možnosti aplikace výsledků zejména do výuky.

U diagnostiky jde o pedagogickou aplikaci výzkumem odhalených zákonitostí. Řešitelský proces žáka je i zde evidován co nejpodrobněji, ale pak je zkoumán odlišně. Jestliže výzkumník během experimentu často původní scénář přizpůsobuje aktuální situaci, diagnostik postupuje standardně. Objeví-li se nečekaná reakce žáka, diagnostika končí nebo se mění na experiment.

Diagnostický nástroj, stejně jako výzkumný nástroj, má čtyři složky:
výzvu, která může iniciovat dobře sledovatelnou myšlenkovou činnost žáka,
implementaci výzvy, způsob, kterým bude žákovi nebo žákům výzva předložena,
evidenci, popis toho, jak bude činnost žáka a případný rozhovor s ním zaznamenán,
zpracování získaného materiálu, což je na celé práci to nejdůležitější.

Nejdůležitější je poslední složka. Výzkumník hledá fenomény, jejich charakteristiky a jejich organizaci, diagnostik vyhodnocuje žákovu práci pomocí připraveného **diagnostického klíče** úlohy. Ten se skládá ze souboru parametrů a vyhodnocovacího klíče. Tyto termíny přesněji vymezíme.
Fenomén je mentální prvek, který najdeme v chování řešitele. Zde zkoumáme fenomény kognitivní a meta-kognitivní, ale důležitější než tyto jsou fenomény komunikační, postojové, hodnotové a osobnostní. Ty ovšem vyžadují rozsáhlejší výklad. Fenomén doplněný o **charakteristiky,** různé jeho výskyty, projevy, typy,…, je **parametr** dané úlohy. Parametr, který má komplexní charakter rozkládáme na **podparametry**. Některé parametry, jejich charakteristiky a podparametry doplňujeme o **interpretace.** Ty osvětlují, co evidované informace vypovídají o řešiteli. Celý soubor parametrů, podparametrů, charakteristik a interpretací nazýváme **vyhodnocovací klíč.**

Vyhodnocovací klíč je subjektivní. Různí autoři vytvoří k téže úloze různé klíče. Domníváme se, že další cesta v rozvoji metodologie této činnosti vede přes komparaci několika nezávisle na sobě vytvořených diagnostických nástrojů.

Konstrukce parametru je založena na dobré znalosti příslušného fenoménu. V následujících dvou kapitolách si podrobněji všimneme ty fenomény, které se nám jeví jako nejdůležitější a doplňujeme je o charakteristiky, čímž z nich tvoříme parametry. Rozlišování termínů fenomén – parametr je zde často jen otázkou vkusu. Přitom uvažujeme o vyhodnocovacím klíči obecněji a ke konkrétnímu klíči úlohy 3 se vrátíme až v 6.5.

6.2 Přijetí a uchopování úlohy

Žákův řešitelský proces začíná přijetím úlohy, uchopováním úlohy a uchopením úlohy.

1. Přijetí úlohy. Parametr má tři charakteristiky: žák úlohu

- *přijal,* jestliže úlohu uchopil (ať již očekávaně, nebo alternativně) a pokusil se úlohu řešit,
- *přijal proteticky*, jestliže se pokusil řešení opsat nebo vědomě řešit jinou úlohu,
- *nepřijal,* když se o žádné řešení nepokusil, například proto, že nebyl schopen úlohu uchopit.

U žáka, který úlohu nepřijal nebo přijal proteticky, nelze zkoumat jeho práci. Zde se ptáme na

- *příčiny nezdaru* (nezájem, neznalost, nedostatek sebevědomí, zlá atmosféra, sociální tenze, …),
- případnou *změnu postoje* (původní nepřijetí se mění na protetické přijetí nebo dokonce na přijetí), iniciátora změny (nová informace, změna atmosféry, vliv experimentátora,…)

- *důsledky změny postoje* (zvýšená motivace, zvýšené sebevědomí,…).

U žáka, který úlohu přijal, pokračuje diagnostický proces analýzou komplexního parametru

2. Uchopování úlohy. Je to proces, jehož první fáze začíná čtením textu úlohy a končí okamžikem, kdy si žák vytvořil představu o úloze a začíná ji řešit nebo si představu vytvořit nedokázal a rezignuje. Běžně pak následují další fáze uchopování – návraty řešitele k textu úlohy. Ty eviduje podparametr

členění uchopování – rozdělení celého procesu na *fáze*, resp. *uchopovací tahy*. Fáze jsou vzájemně oddělené. Někdy bývá několik fází propojeno stejnou myšlenkou. Tuto posloupnost fází nazveme uchopovací tah. Každou fázi i uchopovací tah považujeme za nový parametr a identifikujeme u něj:

příčinu, která vedla řešitele k návratu k textu zadání (bezradnost, potřeba kontroly, nebo korekce, nebo doplnění informace, …)

cíl, který má tři charakteristiky podle míry změny původní představy:

- *žádná* – jde jen o upřesnění informace (vztahu, objektu, čísla), uvnitř již vytvořené představy,
- *částečná* – jde o restrukturaci části představy nebo celé představy,
- *úplná* – jde o vytvoření nové představy o úloze.

kvalitu, která má opět tři charakteristiky: žák úlohu

- *uchopil standardně***,** tedy ve shodě s některou z představ experimentátora,
- *neuchopil,* tedy jeho úsilí vytvořit si představu o úloze nebylo úspěšné.
- *uchopil nestandardně*, tedy v rozporu s představou experimentátora.

Poslední charakteristiku považujeme za nový, a dodejme že diagnosticky významný, parametr:

Odlišné (nestandardní) uchopení. Další analýzu evidované odlišnosti určují čtyři podparametry.
věcná korektnost, (například první uchopení Davida bylo nestandardní, ale věcně přípustné),
míra odlišnosti. Charakteristika tohoto podparametru je určená počtem podmínek úlohy, které žák

- *změnil* (např. Gitka jednu podmínku změnila – místo součinu uvažovala o součtu čísel),
- *opomenul* (např. David v Dd 3 zapoměl na to že čísla jsou dvoumístná).

U našeho vzorku pěti žáků stačí k měření odlišnosti zavést tříprvkovou stupnici: 0 (bez odlišnosti), 1 (jedna změna), 2 (jedno opomenutí). Je nasnadě, jak lze tuto stupnici obohacovat. Dále zkoumáme

příčiny odlišnosti. Mohou spočívat v neznalosti faktů, neznalosti pojmů, deformované představě, zlém čtení textu, a mnoha dalších oblastech. Například Rebeka (3. ročník, září) došla k výsledku 12 x 13 = 156 tak, že si napsala třináct dvanáctek a ty postupně sčítala. Ukázalo se, že dívka úlohu pochopila dobře, ale protože ještě neuměla násobit dvě dvoumístná čísla, byla pro ni hlavní výzvou otázka nalezení součinu jakýchkoli dvou dvoumístných čísel. Vše ostatní se jí jevilo podružné.

Poslední položkou zkoumání parametru „odlišné uchopení úlohy“ je jeho podparametr
následky. Změna zadání může náročnost úlohy

- *nezměnit,* např. kdyby u úlohy 3 řešitel místo daných čísel pracoval s čísly 2, 3, 4, 5,
- *snížit*, např. první interpretace úlohy 3 u Davida i u Gitky,
- *zvýšit,* např. jedna velice schopná dívka si při přepisování úloh z tabule spletla text dvou úloh a hledala součet dvou různých součinů; po delším počítání dospěla k výsledku $42 \times 31 + 41 \times 32$.

6.3 Hledání strategie, výpočet, artikulace výstupu a vnější pomoc

Po uchopení úlohy pokračuje řešitelský proces hledáním strategie, výpočtem a artikulací výstupu. Tyto při etapy jsou diagnosticky méně záludné, než byly předchozí dvě etapy. Proto jim věnujeme podstatně méně prostoru.

3. Hledání strategie. Diagnostická hodnota tohoto parametru podstatně závisí od úlohy. Silná je tam, kde existuje série různých řešitelských stratégií. Takové bývají slovní úlohy, kde lze použít rovnic, obrázků, tabulek, dramatizace,… U úloh, kde existuje jediná řešitelská strategie (taková je i úloha 3), je charakteristika tohoto parametru chudá. Jednotlivé strategie se liší pouze úplností a ta je navíc přesněji popsány jinými parametry.

4. Výpočet. U kalkulativních úloh, jako je úloha 3, lze přehledně jednotlivé kroky výpočtu brát jako zvláštní parametry. Proto výpočet rozkládáme na soubor těchto dílčích kalkulativních parametrů. Z nich se lehce vytvoří parametry, protože charakteristika takového kalkulativního kroku je dána polaritou správně x chybně. V případě, že je ve výpočetním kroku chyba, diagnostikujeme ji podle parametru „chyba“ analyzovaném v odseku 6.4.

5. Artikulace výstupu bývá zajímavá u slovních úloh. Často se až v odpovědi dovíme, jak vlastně řešitel úlohu uchopil. U úlohy 3 je artikulace jednoduchá. Je to číslo, popřípadě provázené slovy. Charakteristika parametru má pět položek, které upřesňují, zda výstup je číselný, slovní, obrázkový, tabulkový, hybridní (tabulkový a slovní,…) a jiný.

Prvních pět základních fenoménů postihuje řešitelský proces. Další dva základní parametry jsou průřezové. Jsou to vnější pomoc a chyba.

6. Vnější pomoc. U diagnostického rozhovoru se jedná především o pomoc experimentátora. Když se podíváme na pět rozhovorů uvedených výše, pomoc experimentátora nacházíme u těchto vstupů: Příběh David (Ex 3, Ex 4), příběh Eva (Ex 3), příběhy Filip a Gitka (všechny vstupy Ex). Za pomoc nepovažujeme upřesňování zadání, jako vidíme ve vstupu Ex 1 příběhu David. Za pomoc ale považujeme povzbuzování, zvyšování sebevědomí.

U tohoto parametru evidujeme čtyři podparametry. První je
iniciace. Ta má dvě základní charakteristiky: žák pomoc vyhledal, nebo o ni žádal a pomoc nabídl experimentátor. U začínajících experimentátorů běžně dochází i k vnucované pomoci. Žák o řešení ještě přemýšlí nebo vysloví nějakou nesprávnou myšlenku a experimentátor vstupuje do interakce ve snaze uvarovat žáka před chybou. Takový vstup negativně ovlivní experiment a někdy jej zcela znehodnotí. Stává se, že i zkušený experimentátor udělá chybu a nabídne žákovi pomoc příliš brzy, protože se domnívá, že žák již nic nedělá, jen sedí a na pomoc čeká. Dodejme, že takové chování žáka, který tím, že utichne a přestane pracovat, žádá o pomoc, není vůbec výjimečné.

Dalším podparametrem je
způsob pomoci. Základní charakteristiky jsou zde dvě: žák si pomoc našel sám, pomoc přišla od experimentátora. (Jedna dívka ze šesté třídy u řešení jiné úlohy ochabovala v práci. Řešení ji nešlo a již to vypadalo, že dívka bude rezignovat. Pak najednou se vzchopila a docela dobře v práci pokračovala. Později uvedla, že povzbudil ji její talisman, monˇičák – jak jej vzala do ruky, hned věděla, jak dál. I to je možný způsob pomoci.) Důležitým dalším podparametrem je
druh pomoci. Jednalo se o povzbuzení, naznačení správnosti resp. chybovosti žákova postupu, potvrzení správnosti postupu, upozornění na přítomnost chyby, poukaz na lokalitu chyby, odpověď na položenou konkrétní otázku, vysvětlení pojmu, vysvětlení vztahu, vysvětlení situace, rada metodologického charakteru,… V tomto případě je seznam možných charakteristik značně dlouhý.
Konečně evidujeme i to, do jaké míry byla pomoc účinná. Tento podparametr nazveme
účinnost pomoci. Charakteristika je zde evidentní – míra účinnosti se měří podle dalšího pokračování.

Konečně parametr ze všech nejvýznamnější, chyba. Přesněji:

6.4 Chování žáka při objevení se chyby

Slovem „chyba“ zde rozumíme i chybné opsání (misprint), přehlédnutí, špatnou představu, nejasnost, nepřesnost, strategické bloudění, selhání paměti,… Za chybu nelze považovat nižší matematickou zralost žáka. Například „chyba“ Rebeky uvedená na předchozí straně žádnou chybou nebyla. Od dívky jsem žádali poznatkové věci, s nimiž se ještě nesetkala.

U tohoto parametru evidujeme šest podparametrů. Nejprve dva parametry týkající se typu chyby.

Matematický typ chyby klasifikujeme podle matematického poznatku, kterého se chyba týká: uchopení úlohy, nalezení strategie, konkrétního kroku (malé násobilky, dělení nulou, roznásobení závorky, práce se znaménkem mínus, …); charakteristika tohoto parametru je výrazně závislá na dané úloze, proto její položky nelze zde taxativně vypsat.

Psychologický typ. Pokud se omezíme na kognitivní a meta-kognitivní oblast, bude charakteristika parametru dána trojicí polarit: paměťová/kauzální, systematická/příležitostní, procesní/konceptní. Někdy však uvedené omezení znemožní dobrou diagnostiku. Například když žák řeší úlohu pod psychickým tlakem, může být kognitivní klasifikace jeho chyb zcela druhořadá a diagnosticky zavádějící. Proto zde dokládáme i jeden obecnější parametr: psychické naladění žáka.

Vědomost o přítomnosti chyby. Rozlišujeme tři hlavní případy podle toho, zda řešitel o přítomnosti chyby vůbec neví nebo ji aspoň tuší nebo dokonce o ni ví. Například když řešitel napíše výsledek „na dvoře bylo 6,35 slepic a 7,65 psů“ pak je jasné, že asi o své chybě ví.[4]

Žák, který o chybě ví, nemusí vědět, kde se chyby dopustil. To eviduje další parametr.

Hledání lokality chyby. Jde o způsob hledání. Charakteristika má těchto 5 položek: žák

- krok za krokem *prochází existující řešení* a hledá v něm chybu,
- vše škrtá a počítá podle stejné strategie *od začátku*,
- vše škrtá a hledá nový přístup a *mění řešitelskou strategii*,
- vrací se k některému *konkrétnímu kroku* řešení a ten kontroluje, protože
  - již v průběhu výpočtu žák cítil, že zde je možná chyba, nebo
  - ví o sobě, že často chybuje u některé operace, kterou ve výpočtu uskutečnil,
- *žádá o radu* experimentátora.

Reakce žáka na chybu. O reakci na chybu můžeme mluvit jen tam, kde je chyba žákem aspoň tušena. Zde rozlišujeme tyto základní případy:

- *rezignace*; podrobnější analýzu děláme jako u stejné položky parametru „přijetí úlohy“.
- *žádost o pomoc* při
  - lokalizaci chyby,
  - odstarňování chyby (žák na základě předchozích zkušeností s interakcí s učitelem očekává, že učitel mu ukáže, jak to má být správně)
- pokus o *samostatné* řešení situace: nalezení a odstranění chyby.

Důsledky chyby. Tento parametr nutno evidovat jen tam, kde chyba odstraněna nebyla, například proto, že si jí žák nebyl vědom. Nacházíme tři podparametry: překážka, náročnost, uzření chyby.

Překážka má dvě položky: chyba se stala/nestala překážkou pro další postup.
Náročnost. Evidujeme vznik nové úlohy i vzhledem k původní a) snažší, b) náročnější, c) stejné.
Uzření chyby. Evidujeme, zda další postup umožnil řešiteli uvidět chybu.

Sebereflexe. Při řešení žák zřídka komentuje své vlastní počínání z nadhledu meta-kognice. Stávají se ale případy, kdy v tomto směru něco poznamená. Například žák komentuje vlastní chybu slovy „to já stále dělám”. K tomu mohlo dojít ve vstupu Dd 5, kde David opravuje 309 na 903. Taková sebereflexní poznámka má velikou diagnostickou cenu. Naznačuje autonomii žákova přístupu k matematice a pravděpodobně i k dalším předmětům.

U všech výše uvedených případů parametru přijetí i parametru uchopování se ptáme na dvě věci: evidujeme druh a míru vnější podpory (pomoc experimentátora).

6.5 Úloha 3 jako diagnostický nástroj

Implementace. Diagnostikovaný žák již dříve úspěšně vyřešil úlohy 3a, 3b i 3c, má k dispozici kalkulačku a umí s ní zacházet. Po klimatickém úvodu ukáže experimentátor žákovi úlohu 3 a popřípadě mu ji i sám přečte. Text úlohy zůstává ležet před žákem. Žák pracuje zcela samostatně. Experimentátor vstupuje pouze, když je tázán nebo když žák projevuje delší bezradnost a v jeho chování je nepřímá žádost o pomoc.
Evidence. Výpočty, které dělá žák na kalkulačce, stejně jako jeho gestikulaci, mimiku a pohyby se experimentátor snaží zaznamenat. Zvuk je nahráván na magnetofon a později přepsán do protokolu. Vše, co žák napsal, je evidováno a opatřeno časovými údaji, zejména je důležité vědět v jaké časové následnosti byly jednotlivé zápisy kladeny na papír.

[4] Žákyně 8. ročníku, které tento výsledek vyšel, spolužačce tvrdila, že *teoreticky* je to správně.

Soubor parametrů vytvořený po analýze jednadvaceti protokolů žáků 3. až 5. ročníku měl dvacet sedm položek. Z nich pro ilustraci uvádíme těchto čtrnáct kognitivních a metakognitivních parametrů:

P00	Uchopení úlohy.	P07	Mám najít největší z nich.
P01	Mám vytvořit dvě čísla.	P08	Pro činitele AB je nutně A > B.
P02	Čísla musí být dvoumístná.	P09	Na místě desítek jsou číslice 3 a 4.
P03	Čísla obsahují jen číslice 1, 2, 3, 4.	P10	Jsou dvě možnosti: 42 x 31 a 41 x 32.
P04	Žádná číslice se nesmí opakovat.	P11	Porovnám výsledky 1302 a 1312.
P05	Vytvořená čísla musím vynásobit.	P12	Násobení je komutativní.
P06	Podobných součinů existuje více.	P13	Chyba.

Seznam charakteristik parametrů P01 – P12. Znakem „ex.“ označujeme experimentátora.

+ = bez chyby
ji = jiná interpetace dané informace
p! = překážka dalšího řešitelského postupu
sl = žák nerozumí některému slovu
ss = žák nerozumí slovnímu spojení
nn = chyba, již si žák není vědom
nt = chyba, kterou žák tuší
nv = žák o chybě ví, nezná její lokalitu
no = chyba je žákem opravena
hn = žák hledá a najde řešení
žs = žák si není jist a žádá ex-a o souhlas
žr = žák žádá ex-a o radu
žv = žák žádá ex-a o vysvětlení
ep = ex. dá přímou odpověď
en = ex. dá náznakovou odpověď
em = ex. dá meta-odpoveď
up = ex. upozorní na přítomnost chyby
un = ex. upozorní na chybu

Parametr P00 je provázen parametry P01 – P06, které lze chápat jako jeho podparametry. Např. chyba nepochopení slova „dvoumístná“, bude evidována v P02 a charakterizována „sl“. Parametr P00 dále obohatíme o 6 podparametrů a každý uvedeme i s charakteristikou.

1. Přijetí úlohy – ihned/po předchozím váhání/po přesvědčování/nepřijetí.
2. Příčina váhání nebo nepřijetí úlohy – kognitivní/jiná.
3. Pomoc experimentátora při přijetí úlohy – ano/ne.
4. První porozumění zadání – míra samostatnosti, čas, kvalita.
5. Další porozumění zadání – počet, míra samostatnosti, čas, kvalita.
6. Návraty k textu – počet, důvody, efektivita.

Parametr P13 je provázen všemi parametry, v nichž se objeví řešitelova chyba. Dále parametr P13 obohatíme o 6 podparametrů a každý uvedeme i s charakteristikou.

1. Poznání přítomnosti chyby – samostatné/s náznakem/s upozorněním
2. Určení lokality chyby – samostatné/s náznakem/s poukazem
3. Příčina chyby – formalizmus, neznalost, neschopnost, nesystematičnost, chybný návyk, …
4. Typ chyby – kalkulativní, strategická, artikulační, pojmová, procedurální, grafická,…
5. Reakce na přítomnost chyby – rezignace, řešení od začátku, hledání chyby, žádost o radu,…
6. Následek chyby – změna náročnosti dalšího postupu, strategický, …

Studii končíme aplikací vytvořeného diagnostického klíče na pět našich žáků.

Následující tabulka přehledně klasifikuje parametry P01 – P12 a náznakově parametry P00 a P13 u všech pěti uvedených žáků. Znak Ch v posledním sloupci říká, že chybu je nutno analyzovat.

Parametr	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
Cyril	+	+	+	+	+	+	+	+	+	hn	hn	+	+	+
David	ji	+	žs en	+	žs ep	+	+	+	hn	p!			+	Ch
Eva	žs	+	+	+	+	+	+	+	+	hn	p!		+	Ch
Filip	žv	3	1	2	4	3	5!	6						Ch
Gitka	ji	+	+	+	+	up	+	+	+	+	up		+	+

Literatura:

[1] Bolzano, B. (1981). Vědosloví. Praha, Academia.

[2] Gray, E. M. – Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, s. 116-141.

[3] Hejný, V., Hejný, M. (1972). Formovanie matematických představ. Matematické Obzory 2, s. 9-20.

[4] Hejný, V., Hejný, M. (1978). Prečo je matematika taká ťažká? Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, (XXIII), č. 2. s. 85-93.

[5] Hejný, M. (1988). Knowledge without understanding. In (Eds.) H. G. Steiner, M. Hejný: Proceedings of the International Symposium on Rresearch and Development in Mathematics Education. Bratislava, Komenského Univerzita, s. 63-74.

[6] Hejný, M., Kuřina, F. (2001). Dítě, škola a matematika. Praha, Portál 2001.

[7] Hejný M., Littler, G. H. (2002). Introduction in Empowering mathematics teachers for the improvement of school mathematics (EMTISM). Praha Sokrates, the Comenius Action 2 – programme, s. 5-26.

[8] Hejný, M., Michalcová, A. (2001). Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Metodické centrum Tomášikova 4, Bratislava.

[9] Jirotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomí, 43, č. 4, s. 326-334.

[10] Kratochvílová, J. (2002). Building the Infinite Arithmetic Structure. In: Proceedings CERME2. Ed. J. Novotná, Prague, Charles University Press, s. 25-34.

[11] Kratochvílová, J., Swoboda, E. (2002). Analiza interakcji zachodzacych podczas badaň z dydaktyki matematyki, In: Dydaktyka matematyki, No. 24, ed. S. Turnau. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Kraków, s. 7-39.

[12] Malechová, I.(1988). Analýza studentských řešení úloh o transformacích. Kandidátská disertační práce, Karlova univerzita, Praha, MFF.

[13] Minsky, M. (1988). The Society of Mind. Simon & Schuster.

[14] Popper, K. R. (1995). Věčné hledání. Praha, Vesmír.

[15] Popper, K. R. (1997). Budoucnost je otevřená. Vyšehrad, Praha.

[16] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, s. 1-36.

[17] Stehlíková, N. (2000). Atomární analýza. In: Novotná, J. Analýza řešení slovních úloh. Karolinum, Praha.

[18] Svoboda, K. (1962). Zlomky předsokratovských myslitelů. Československá akademie věd.

e-mail: milan.hejny@quick.cz

PRVNÍ INFORMACE O PROBLEMATICE, KTERÁ JE ŘEŠENA V RÁMCI GRANTOVÉHO PROJEKTU GAČR 406/02/0829 MATEMATICKÉ VZDĚLÁVÁNÍ ORIENTOVANÉ NA ŽÁKA

M. Hejný, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Uvedený grantový projekt, řešený v letech 2002 až 2004 navazuje na předchozí projekty řešené v letech 1993 až 1995, 1996 až 1998 a 1999 až 2001. Řešitelem projektů byl autor tohoto příspěvku a v týmu spoluřešitelů, který se mírně personálně měnil, působili (jména uvádíme bez titulů) Darina Jirotková, Milan Koman, Jana Kratochvílová, Marie Kubínová, František Kuřina, Jiří Mareš, Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková a Marie Tichá.

V této první informaci chceme naše kolegy na Slovensku informovat nikoli o dosažených výsledcích, ale o několika tématech, na nichž pracujeme i v současnosti. Spolupráci nabízejí čtyři kolegové. Věříme, že tato informace se pro některé čtenáře stane podnětem k zájmu o vzájemnou spolupráci.

V příštím roce se podobným způsobem pokusíme představit práci dalších kolegů.

Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)

Formulace problému. Zkušenosti získané v průběhu kurzů geometrie na naší fakultě ukázaly, že mnozí posluchači primární pedagogiky mají deformované představy o základních geometrických 3D pojmech jako vrchol, hrana, strana, stěna, objem, povrch, … . Tyto nedostatky znemožňují posluchačům porozumění i jednoduchých prostorových situací. Krásným příkladem je výpočet objemu krychlové krabice bez víka jedné studentky: $V = a^3 - a^2$. Uvedená situace je výzvou pro výzkum. Najít příčiny vzniku těchto představ a hlouběji proniknout do myšlenkových procesů žáků v prostředí 3D. Tento komplexní problém má mnoho rozmanitých podproblémů, mezi něž patří **zkoumání koordinace mezi komunikací a zrakovou a hmatovou percepcí těles a její vliv na utváření prostorových představ.**

Nástroje výzkumu a sběr dat. 1. V individuálním řízeném rozhovoru student identifikuje hmatem tělesa a o činnosti diskutuje s experimentátorem. Komunikace je nahrávána na magnetofon resp. videozáznam a doplněna záznamy o pozorování.
2. Skupina žáků/studentů se formou otázek a odpovědí typu ano, ne, někdy snaží uhodnout myšlený geometrický objekt (hra SOVA). Evidence jako u předchozího nástroje.

Metoda výzkumu. Získaný materiál (zvukové i video nahrávky, písemné záznamy probantů i písemné poznámky experimentátora) jsou pečlivě protokolovány. Protokoly experimentů jsou podrobeny kvalitativní analýze, která používá tyto techniky: atomární analýza, komparativní analýza, klasifikační a jazyková analýza. Práce probíhá ve třech hlavních fázích.
První fáze je zaměřena na stránku jevovou. Jsou evidovány všechny výrazy, které nesou geometrický význam. Z kontextu jsou odhalovány jejich možné interpretace. Tento soubor je dále organizován s použitím některých kognitivních teorií (APOS, procept, separované a univerzální modely, úrovně geometrického myšlení Van Hieleho, …) (Jirotková, 2002, Daňhelková, Jirotková, 1999). Část výzkumu je věnována komunikačním šumům a nedorozuměním (Jirotková, Swoboda, 2001, Jirotková, Kratochvílová, Swoboda, 2002).
Druhá fáze analýz je zaměřena na hledání kognitivních, metakognitivních i interaktivních jevů provázejících myšlenkové pohyby řešitelů. Tyto jevy jsou tříděny, popsány a některé vysvětleny a aplikovány.
Třetí fáze analýz probíhá v současné době a zaměřuje se na vazbu manipulace s 3D objekty bez účasti vizuální percepce – komunikace – představy.
Výzkum se projektuje i do výuky kurzu geometrie pro studenty primární pedagogiky a studentů speciální pedagogiky.

Výsledky. Byly identifikovány a jazykem kognitivních mechanizmů popsány některé mentální procesy související s činnostmi v kontextu 3D (Jirotková, Littler, 2002). Byl získán hodnotný materiál osvětlující proces „geometrické komunikace“ a byly ukončeny jeho první analýzy.

Možná témata diplomových prací. 1. Využít připravený nástroj (soubor diagnostických úloh) i rozpracovanou metodologii a v jiném věkovém prostředí zopakovat výše popsané výzkumy komunikace a percepce v prostředí 3D.
2. Uskutečnit sérii her SOVA, zpracovat slovní výrazy, které použijí žáci v jazyce slovenském, resp. maďarském, a komparativní analýzou zjistit kulturní shodnost resp. odlišnost dvou jazykových prostředí ve vazbě na představy 3D.

Výhledy do budoucna. Všechny výše uvedené problémy jsou v současnosti „živé“, ale hlavní směr výzkumu bude orientován k problematice komunikace. Zde dojde k silnému propojení mezi prostředím 2D a 3D. Nabídku na spolupráci uvítáme.

Jana Kratochvílová (e-mail: jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz)

Problém. Kombinatorika tradičně patří k neoblíbeným partiím školské matematiky. Příčinou strachu z kombinatoriky je způsob vyučování zaměřený na nácvik čtyř vzorečků. Podle našeho přesvědčení podstatou kombinatorického myšlení je schopnost a) jasně vymezit soubor objektů, b) najít cestu jak do souboru zavést organizaci, c) organizaci realizovat a popřípadě d) zjistit, kolik prvků má celý soubor, nebo některý jeho podsoubor. Věříme, že vyučování kombinatoriky se může výrazně zlepšit změnou edukační strategie. Výzkum k tomu může přispět hledáním odpovědí na otázky

- **Jak ve vědomí žáka (ale i učitele) narůstá schopnost řešit kombinatorické situace?**
- **Jaké faktory tento vývoj urychlují a jaké je brzdí?**

Jedná se o experimentální, kvalitativní výzkum, jehož těžištěm je analýza žákovských řešení úloh.

Nástroj. Úloha nebo série úloh typu Abracadabra (viz Polya, G. (1966) Mathematical Discovery. USA, John Wiley & sons, inc.). Úloha bývá někdy vložena do motivačního příběhu. Formulace úlohy je přiměřena žákově zkušenosti. Tématika Abracadabra situací nabízí velikou paletu úloh a jejich variací (od zcela jednoduchých po značně náročné). To je její veliká přednost. Uvedeme jednu konkrétní úlohu ve vysokoškolské dikci.

Úloha. Kolika způsoby lze z bodu $A(0,0)$ přejít do bodu $Z(m,n)$ $(m,n \in N)$ tak, že jdeme z mřížového bodu (bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla) do sousedního mřížového bodu buď vektorem (1,0) nebo vektorem (0,1)?

Metoda. V individuálním řízeném rozhovoru žák (9-10 let, resp. 13-14 let) řeší úlohu pro parametry ($m \times n = 2 \times 2$, resp. 3×3). Písemný projev žáka je archivován, rozhovor nahráván na magnetofón, nebo dokonce na video. Pak je záznam protokolován. První zpracování bývá uskutečněno metodou atomární analýzy, ve které jde o co nejdetailnější popis všech myšlenkových kroků, které žák při řešení uskutečnil. Další analýzy pak hledají odpovědi na otázku, proč žák postupoval tak, jak postupoval, a snaží se dospět k co možná nejobecnějšímu popisu řešitelského mechanizmu dané úlohy. Zde je potřebné srovnávání řešitelských postupů několika žáků. U této analýzy používáme myšlenky APOS, reifikace, proceptu, separovaných a univerzálních modelů apod.

Výsledky. 1. Byly odhaleny fenomény vhledové (nápad, jak další cestu hledat), evidenční (jak nalezené cesty zapsat), organizační (jak zápisy uspořádat) i komunikační (jak svá odhalení popsat pro jiného člověka); např: idea symetrie, idea mantinelů, idea prvního kroku, jazyk barvy, šipky, lomené čáry, abstraktní schéma,… . 2. Byly popsané řešitelské strategie (strategie symetrie, strategie barev, ...); celkem bylo zatím popsáno 13 strategií. 3. Byla rozpracována metodika výzkumu.

Možné téma diplomové práce. Opakovat experiment se změnou věku žáků a/nebo „geometrie hřiště“ (ve čtvercové síti jsou některé křižovatky zakázány jiné předepsány, nebo čtvercová síť je nahrazena trojúhelníkovou nebo jinou). Využít již rozpracovanou metodiku výzkumu.

Možné téma rozšířeného výzkumu. 1. Doplnit soubor fenoménů a strategií, popsat řešitelské mechanismy, popsat komunikační nástroje žáka. 2. Na základě existujících výsledků vytvořit diagnostický klíč na diagnostikování kombinatorického myšlení žáka. 3. Popsat hlavní developmentální charakteristiky kombinatorického myšlení u úloh typu Abracadabra. 4. Udělat podobný výzkum pro jiný kombinatorický kontext a výsledky obou výzkumů vzájemně porovnat.

Jarmila Novotná (e-mail: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz)

Problém. Analýza vlivů na řešitelské strategie pro slovní úlohy – identifikace příčin vlivu formulace slovní úlohy na změny řešitelských strategií u žáků, vytvoření nástrojů pro jejich studium a pro určení překážek způsobených formální strukturou zadání.

- Nástroj. Slovní úloha o dělení celku na tři nestejné části, kde je dán celek a vztahy mezi jednotlivými částmi jsou multiplikativní.
- Metoda. Použití proměnné *složitost slovní úlohy,* která vychází z volby velikosti jedné části jako referenčního údaje.
- Hypotéza. Řešitelé budou pro každou variantu úlohy vybírat referenční údaj, s nímž bude nejmenší úroveň složitosti. Odchylky od tohoto principu bude možné vysvětlit pořadím informací v zadání a lexikálními vyjádřeními (více a méně).
- Výsledky pro algebraická řešení. Každá z variant vyvolala jiné preference ve volbě referenčního údaje. Nejčastější strategií byl výběr nejmenší části (vyžaduje pouze počítání v oboru přirozených čísel). Parametry, které hlavně ovlivňovaly výběr strategie, byly: minimální úroveň složitosti, preferování vyjádření s „více“; dále působily proměnné „uspořádání informací“ a „možnost transformovat *méně* na *více*“.
- Možné téma diplomové práce. Provést podobný výzkum pro jiný typ slovní úlohy a výsledky obou výzkumů vzájemně porovnat.
- Možné téma rozšířeného výzkumu. Zaměřit se na analýzu aritmetických řešení úlohy a zjistit, které činitele ovlivňují výběr referenční proměnné u aritmetických řešení.

Hlavním cílem výzkumu, který probíhá ve spolupráci s P. Nesher a S. Hershkovitz z Izraele, je identifikovat *podstatné prvky úlohy*, které podmiňují její řešení. Doposud bylo naším cílem porozumět tomu, které (kognitivní) proměnné mají vliv na výběr „referenční proměnné v zadání“, tj. té neznámé, v závislosti na níž jsou pak vyjádřeny další neznámé (tuto volbu budeme dále nazývat volbou strategie). Výběr strategie zřejmě ovlivňuje matematickou složitost rovnice, která popisuje situaci.

Při dosavadním výzkumu jsme použily úlohu o dělení celku na tři nestejné části s multiplikativními vztahy mezi částmi. Na tomto základu lze vytvořit 24 variant úlohy, jestliže uvažujeme změnu pořadí vztahů, jejich vyjádření v přirozeném jazyku (méně, více), druh a uspořádání vztahů mezi částmi vybrané pro popis situace. Pro každou variantu jsme určily hodnoty její vnitřní struktury (zadané vztahy, schéma vztahů) a jejich vnější struktury (pořadí uvedení vztahů, typ vztahu podmět – predikát, slova popisující vztahy).

Nově jsme vytvořily novou proměnnou, složitost použitých strategií, která v sobě zahrnuje dříve studované proměnné vnitřní a vnější struktury. Můžeme ji charakterizovat pomocí ukazatele, který je založen na výrazech v řešení popisujících porovnání k jednomu referenčnímu údaji. Každý vztah totiž vyjadřuje jednu část jako funkci jiné; podle toho, která je vybrána jako referenční, vyjádření vztahu má složitější nebo jednodušší tvar. V průběhu řešení může žák použít funkce tak, jak jsou uvedeny v zadání (z) nebo použít funkci inverzní k této funkci (i) nebo několik dalších funkcí (s). Koeficient složitosti řešení specifický pro tento druh úloh je definován takto:

- každému použitému vztahu je přiřazen *příspěvek* ke složitosti závisející na transformaci, kterou žák musel provést z původním vztahem, aby ho mohl použít, příspěvek (z) = 1, příspěvek (i) = příspěvek (s) = 2,

- sečtou se takto získané příspěvky pro každou fázi řešení.

Provedly jsme předexperiment, kterého se zúčastnilo 104 učitelů, z nichž každý řešil čtyři varianty. Tento vzorek byl rozdělen tak, aby byla rovnoměrně zastoupena řešení 12 z vytvořených 24 variant.

Samotného experimentu se zúčastnily dvě skupiny řešitelů: skupina 167 učitelů (první stupeň) a skupina 132 patnáctiletých žáků, kteří se právě učili řešit rovnice s jednou neznámou. Každá skupina byla rozdělena na 6 podskupin, v níž každý člen řešil 4 ze všech 24 variant. Rozdělení skupin variant mezi účastníky bylo náhodné. Každá varianta tak byla řešena asi 30 učiteli a 20 žáky.

Výsledky

a) *Nealgebraická řešení.* Učitelé (řešitelé „experti"), kteří nepoužili algebraické řešení, použili řešení aritmetické. Naproti tomu žáci (řešitelé „neexperti") se k tomuto prostředku neuchylovali: aritmetické řešení používali zřídka a většinou neúspěšně.

b) *Algebraická řešení.* Naše zkušenosti potvrdily, že každá z variant vyvolala jiné strategické preference. Potvrdilo se, že řešení nelze uvažovat jako překlad (z jazykového materiálu do matematického modelu), ale jako pojmové zpracování.

Srovnání mezi algebraickými řešeními učitelů a žáků ukázalo, že obě skupiny reagují za stejných „matematických okolností" velmi podobně.

V další fázi společného výzkumu s P. Nesher a S. Hershkovitz máme v úmyslu:

- zaměřit se na analýzu aritmetických řešení naší úlohy,
- zjistit, zda výběr referenční proměnné je u aritmetických řešení ovlivněn stejnými činiteli jako v algebraickém případě,
- prohloubit nebo objasnit analýzu získaných výsledků pomocí statistických zpracování.

První výsledky naznačují, že nejdůležitější proměnnou by mohla být *stálost* zvolené strategie pro všechny řešené úlohy. Tento výzkum pokračuje.

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)

Problém. Mezi výzkumníky v didaktice matematiky převládá přesvědčení o potřebě výraznější přítomnosti konstruktivistických přístupů ve vyučování (např. Hejný, Kuřina, 2001). Hledají se postupy, které by tyto přístupy podporovaly, formulují se jejich zásady a principy. Zejména na ZŠ a méně již na SŠ, ale, pokud je nám známo, velice řídce na VŠ. Na Pedagogické fakultě UK v Praze se o zavádění konstruktivistických přístupů snažíme již déle. Přepracovali jsme kurz Analytická geometrie pro budoucí učitele matematiky 2. stupně základních škol a středních škol (Hejný, Jirotková, Stehlíková, 1997; Stehlíková, 2002b). Autorka tento kurz již několik let vyučuje a snaží se přitom, aby poznatky nebyly studentům předávány jako hotové, ale aby si je studenti sami v co největší míře konstruovali. Nový přístup s narůstající naléhavostí vyvolává potřebu ověřovat svoji účinnost, a to nejen z hlediska kognitivního i metakognitivního (co si vlastně studenti ze studia odnesou), ale též z hlediska emocionálního a postojového. Proto byl v letním semestru roku 2002/03 v kurzu „Geometrické transformace metodou analytickou" proveden experiment s cílem:
Vytvořit nástroj, kterým je možné evaluovat účinnost konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice, a v konkrétním případě určitého kurzu na úrovni vysoké školy tuto účinnost popsat.

Metoda. Výchozím materiálem byla případová studie. Tři studenti, kteří předmět navštěvovali a zodpovědně přistupovali ke studiu (jejich matematické znalosti odpovídají klasifikaci známkou 1, 2 a 3) docházeli každý týden na setkání s autorkou a referovali o své domácí přípravě, tedy o řešení úloh zadaných v průběhu přednášek a seminářů. Mezi studenty a autorkou se vytvořil dobrý vztah. Setkání probíhala individuálně s každým studentem a trvala 13 týdnů semestru. Rozhovory byly nahrávány a studenti poskytli autorce fotokopie všech svých domácích výpočtů. Studenti se též vyjadřovali k průběhu přednášek a seminářů, k vhodnosti zadaných úloh apod.

Další materiál k případovým studiím: (a) autorčiny přípravy jednotlivých přednášek a seminářů, (b) autorčiny zápisky z přednášek a seminářů týkající se reakcí studentů, (c) transkripce závěrečného rozhovoru se studenty, který byl zaměřen na jejich celkové pocity z předmětu (byli mimo jiné vyzváni, aby formulovali výhody a nevýhody takto vedeného předmětu, svůj postoj k předmětu apod.), (d) pojmové mapy, které studenti vytvořili po skončení výuky v semestru, (e) poznámky studentů, které si zapsali v době přípravy na zkoušku z předmětu.

V současné době byl dokončen sběr materiálu, který bude dále tříděn a podroben atomární analýze (Hejný, Michalcová, 2001; Stehlíková, 2000). Dále bude použita metoda ‚abstraction in context' (viz Stehlíková, 2002a; zde jsou odkazy na relevantní literaturu).

Výsledky. Proběhla jen první fáze projektu a zatímní výsledky jsou jen dílčí.

Výzkumná metoda ‚abstraction in context' byla úspěšně použita pro přípravu výuky. Umožnila přehledně organizovat znalosti – co má být studenty zkonstruováno a jakými prostředky. Ukázala se vhodná i jako nástroj na popis toho, jak si studenti v průběhu semestru znalosti konstruovali.

Pravidelná setkání s vybranými studenty měla význam nejen pro výzkum, ale i pro výuku a pro rozvoj zmíněných tří studentů (podle jejich vlastních slov jim umožnila ‚uspořádat' si myšlenky a přinutila je skutečně pracovat v průběhu celého semestru).

V závěrečném hodnocení se studenti vyjadřovali vesměs pozitivně k motivačnímu účinku takto vedeného předmětu, i když zmiňovali velkou časovou náročnost, kterou vyžadovalo řešení zadaných úloh. Zmiňovali se o pocitu nejistoty, protože vyučující jim nepředával hotový a správný poznatek. Byl to spíše poradce, který je často nechal hledat a tápat. Studenti často museli sami rozhodnout, zda myšlenka, kterou vyslovil jejich kolega, je správná či ne. Domníváme se, že tato nejistota může působit na některé studenty i demotivačně.

V průběhu semestru se vynořila řada matematických otázek, které nebyly autorkou nadneseny a ani předpokládány. Ty potom otevřely nové problémy. Z pozorování průběhu hodin je zřejmé, že přinejmenším někteří studenti takové problémy řešili s větším nadšením než jiné, které zadal učitel.

Perspektiva do budoucna, nabídka spolupráce. Materiál získaný v průběhu semestru bude podroben analýzám z hlediska cílů výzkumu. Metodologie výzkumu bude dále rozpracována a výzkum bude zopakován v letním semestru školního roku 2003/04 ve stejném předmětu. Dále předpokládáme využití výsledků studie jako zpětné vazby pro vedení zmíněného předmětu a k jeho zkvalitnění.

V příštím školním roce se k výzkumu připojí i D. Jirotková a M. Hejný. Uskuteční podobné případové studie ve svých předmětech, které vedou v duchu konstruktivistických přístupů. Po odděleném vyhodnocení budou všechny tři studie podrobeny komparační analýze a bude hledán obecnější způsob, který je možno využít pro ověřování účinnosti konstruktivistických přístupů, a tato účinnost pro danou skupinu předmětů bude do určité míry zhodnocena. Je pochopitelné, že další zájemci o spolupráci jsou vítáni. Jejich případné studie by rozšířily výchozí materiál dalšího výzkumu.

Literatura:

[1] Daňhelková, J., Jirotková, D. (1999). Nejen hravé učení. Učitel matematiky, 8, 1, s. 44-53.

[2] Hejný, M., Jirotková, D., Stehlíková, N. (1997). Geometrické transformace (metoda analytická). Praha, PedF UK.

[3] Hejný, M., Kuřina, F. (2001). Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha, Portál.

[4] Hejný, M., Michalcová, A. (2001). Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Metodické Centrum, Bratislava, Tomášikova 4.

[5] Hershkovitz, S., Nesher, P., Novotná, J.: Given a problem, what is the x? In Gagatsis, Athanasios and Makrides, Gregory. Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education. Nicosia: Cyprus Mathematical Society, Cyprus Pedagogical Institute, 2000. p. 36-46.

[6] Hershkovitz, S., Nesher, P., Novotná, J. (2002). Cognitive Factors Affecting Problem Solving. In Novotná, Jarmila. Proceedings CERME 2, Mariánské Lázně, 24.-27.2.2001. Praha p. 466-475.
[7] Jirotková, D., Swoboda, E. (2001). Kto kogo nie rozumie. NiM Naucziele i Matematyka, č. 36, s. 9-12
[8] Jirotková, D., Littller, G. (2002). Investigating cognitive processes through children´s handling with solids. In Cockburn, A., Nardi, E. (eds), PME 26 Proceedings, UEA Norwich, UK, s. III/145-152.
[9] Jirotková, D. (2002). Hra ANO-NE a čtverečkovaný papír. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds) Dva dny s didaktikou matematiky. KMDM PedF UK, Praha, s. 28-34.
[10] Jirotková, D., Kratochvílová, J., Swoboda E. (2002). Jak se učíme rozumět svým žákům. In: Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds) Dva dny s didaktikou matematiky. KMDM PedF UK, Praha, s. 98-102.
[11] Jirotková, D., Littler, G. (2003). Insight into pupil´s structure of mathematical thinking through oral communication. In: CERME 3 (Conference on European Research in Mathematics Education 3, Group 3), Bellaria, Italy, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3. in print
[12] Kratochvílová, J. (1995). Strategie řešení jedné kombinatorické úlohy. Diplomová práce. PedF UK, Praha, s. 103-105.
[13] Kratochvílová, J. (1995). Pupil's Strategies in Abracadabra problem. In: Proceedings SEMT 95. Ed.: M. Hejný - J. Novotná, PedF UK, Praha, s. 103-105.
[14] Kratochvílová, J. (1997). Thinking processes involved in solving combinatorial problems. In: Proceedings ERCME 97. Ed.: M. Hejný - J. Novotná, PedF UK, Praha, s. 63-66.
[15] Kratochvílová, J. (2002). Příklad dialogické přístupové strategie – jev „nedorozumění". In: Sborník „Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy". Ed. M. Uhlířová, PedF UP, Olomouc, s. 92-96.
[16] Nesher, P., Hershkovitz, S., Novotná, J. (1999). Three-Term Comparison. In Schwank, Inge. European Research in Mathematics Education I. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Vol. 2. p. 64-74.
[17] Nesher, P., Hershkovitz, S., Novotná, J.: Situation Model, Text Base and What Else? Factors Affecting Problem Solving. Educational Studies in Mathematics, 52, 151-176.
[18] Novotná, J., Hershkovitz, S., Nesher, P. (2003). Cognitive Factors Affecting Problem Solving at the Pre-Algebraic Level. In Proceedings CERME 3, Bellaria, Italy, 28.2.-3.3.2003. (V tisku.)
[19] Stehlíková, N. (2000). Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. In Novotná, J. Analýza řešení slovních úloh, PedF UK Praha, 98-117.
[20] Stehlíková, N. (2002a). Building an internal mathematical structure, interpretation via the theory of Abstraction in Context. In Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds.), Zborník príspevkou z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras, Exam Bratislava, 59-65.
[21] Stehlíková, N. (2002b). Geometrické transformace – konstruktivistický přístup. In Ausbergerová, M., Novotná, J. (eds.), 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, JČMF Praha, 281-287.

e-mail: milan.hejny@quick.cz

ANALÝZA NEDOROZUMĚNÍ PŘI KOMUNIKACI SE ŽÁKEM[1]

Jana Kratochvílová, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Ewa Swoboda, Řešovská Univerzita, Řešov, Polsko

Abstrakt. Popíšeme nástroj, jež pomáhá výzkumníkovi, resp. učiteli reflektovat svou práci z experimentu, resp. vyučování zaměřenou na interakce mezi experimentátorem, resp. učitelem a žákem/studentem, kteří komunikují o matematice. Nástroj umožňuje analyzovat myšlenkové procesy obou účastníků komunikace, jak experimentátora, tak žáka, a tudíž by mohl odpovědět na mnohé otázky, jež si klademe. Např. jak takováto vzájemná interakce ovlivňuje žákovské myšlení. Jedním z cílů výzkumu je odhalení příčin vzniku nedorozumění mezi experimentátorem a žákem. Uvedeme jeden příklad analýzy nedorozumění využívající tento nástroj.

1. ÚVOD

Nedorozumění se neděje pouze v situacích, kdy se bavíme se žákem o matematice. Ale dochází k němu i mezi dospělými a v jiných oblastech života. To, že se stane, je naprosto běžné, ale to, co následuje už může být různé. Samozřejmě v pozitivním případě pokud komunikanti jsou si vědomi toho, že si nerozumí, a chtějí si porozumět, tak pokračují v diskusi tak, aby si vše vyjasnili. Na druhé straně může dojít např. k tomu, že jeden z komunikantů nerozumějící druhému vyhodnotí rychle celou situaci a řekne, že ten druhý nemá pravdu a odmítá dále o problému diskutovat, a k takové situaci často dochází při komunikaci mezi dítětem a dospělým, ve škole mezi žákem a učitelem. Žák odpoví na učitelovu otázku, učitel vyhodnotí žákovu odpověď jako nepravdivou a reaguje odmítnutím žákovy odpovědi, např. „Nemáš pravdu, není to tak a je to tak a tak“. V takových situacích dochází k jakémusi intelektuálnímu znásilňování. To, že dítěti nerozumíme, ještě neznamená, že ono nemá pravdu nebo, že si myslí právě to, co my v daném okamžiku soudíme o jeho myšlení. Právě učitel by měl být citlivý na taková nedorozumění a žáka neznásilňovat v jeho myšlení. Domníváme, se že jednou z metod, jak se stát citlivými na nedorozumění se žákem, je analýza těch nedorozumění, které se staly přímo nám samým.

2. TEORETICKÝ ZÁKLAD PRO NÁŠ VÝZKUM

Růst zájmu o vše, co se děje ve třídě během vyučování matematiky, ovlivnil následující perspektivy současných výzkumů v didaktice matematiky: vnitřní perspektiva (výzkumy v duchu konstruktivistických paradigmat) a vnější perspektiva týkající se podmínek procesu učení v matematice (výzkumy inspirované socio-kulturní teorií). Cobb [s. 13, 1994] tvrdí, že obě dvě perspektivy jsou poloviční, pokud je nevyužijeme komplementárně: „Socio-kulturní perspektiva poskytuje informaci o teoretických podmínkách umožňujících proces učení, zatímco teorie rozpracované konstruktivisty hovoří o tom, jak se žák učí a jak proces učení probíhá.“

V takovém pojetí zvláštní místo zaujímá problém jazyka a komunikace. Předpokládá se, že žák na jedné straně konstruuje své matematické znalosti v rámci jazyka, který vlastní [Brown, 1997], a na druhé straně individuální možnosti rozvoje žáka jsou ve velké míře dány kulturními podmínkami určujícími způsob tvoření, prezentování a užití myšlenky. Jazyk i řeč vytváří prostor, v rámci kterého dochází k formování myšlení [Bussi, 1998]. Jazyk je více vnímán jako most propojující dvě perspektivy výzkumu: socio-kulturní i konstruktivistickou. Proto komunikace v matematice je jedna z hlavních oblastí současného výzkumu v didaktice matematice [Boero a kol., 1998; Brown, 1997; Bussi, 1998; Dormolen, 1986; Hejný, Michalcová, 2001; Jirotková, Littler, 2002; Pirie, 1998; Steinbring, 1998].

Náš zájem o komunikaci se neobjevil náhodně. Když jsme analyzovaly vlastní experimenty, odhalily jsme mnoho různých fenoménů charakterizujících interakce v průběhu komunikace.

[1] Článek byl vypracován s podporou grantu GAUK č. 309/2002 APP

U těchto analýz jsme využily především tyto kognitivní teorie: APOS, reifikace, procept, separované a univerzální modely. Poslední tři jsou popsány v [Hejný, 2003]. Zvláštní pozornost jsme věnovaly rozdílným způsobům porozumění dané situace mezi experimentátorem a žákem, a to ve dvou sférách: matematické (později jsme ji označily jako kognitivní), a sociálně-emocionální (později jsme tuto sféru rozdělily na dvě – sociální a emocionální), např. způsob zadání úlohy, způsob formulování odpovědi, neverbální způsob přenosu informace, role – v jaké roli se účastník experimentu cítí a v jaké je vnímán. Analyzovaly jsme schopnost využít získanou informaci a vliv této informace na proces myšlení jak experimentátora, tak žáka. Ukázalo se, že kromě kognitivního stavu naší mysli a sociální role, ve které při komunikaci vystupujeme, i emoce ovlivňují komunikaci o matematice a tudíž matematické myšlení.

Při analyzování protokolů našich experimentů sehrál velký význam problém metodologie. Využily jsme metodu atomární analýzy, kterou lze najít v pracích [Jirotková, 1998; Kratochvílová, 2003; Stehlíková, 2000]. Ovšem výsledkem našich vlastních úvah je pokus o mnohovrstvovou analýzu experimentu z pohledu jak výzkumníka (který byl zároveň experimentátorem), tak i žáka. K tomu nám pomohla speciálně zkonstruovaná tabulka, do které jsme zapisovaly identifikované fenomény.

3. METODA

Myšlenka tabulky se zrodila díky studiu prací, v kterých se autoři různým způsobem pokoušeli syntetizovat výsledky jazykových analýz nebo analýz interakcí zaměřených na matematiku [Dekker, Elshout-Mohr, Pijls, 1998; Schwarz, Herskowitz, Dreyfus, 2001; Brandt, 2001, Steinbring, 1999; Dormolen, 1986; Sensevy a kol., 2001]. Tabulka má tradiční uspořádání – řádky a sloupce. Řádky jsou určené na prezentaci a analýzu po sobě jdoucích částí protokolu. Sloupce z levé strany jsou určené na analýzu fenoménů, které se týkají experimentátora, a analogicky z pravé strany těch, které se týkají žáka. Rozlišily jsme čtyři základní sféry (umístěné ve sloupcích): kognitivní (K), jazyková (J), sociální (S) i emocionální (E).

- Kognitivní sféra: Mysl rozhoduje o činnosti a jazyku. Zde se odehrává matematika a všechny činnosti v dané situaci jsou určeny existující sítí složenou z poznatků a vazeb mezi nimi [Hejný, 2003, 9. strana článku]. V této sféře najdeme: cíle, očekávání, poznatek jistým způsobem asociovaný s pojmem, schémata a koncepty v činnosti [Skemp, 1979, Vernaud, 1998].
- Jazyková sféra: Jazyk je nástroj pro vyjádření vlastních myšlenek (existujících v kognitivní sféře). A zároveň je to nástroj pro komunikaci (provázanou též se sociální sférou). Ne všechny myšlenky jsou verbalizovány, ani neexistuje totožnost mezi myšlenkou a slovy vyjadřující myšlenku.

  V mnoha výzkumech zaměřených na jazykovou analýzu najdeme nejen různé klasifikace slovních výpovědí, ale i přehledy různých funkcí jazyka [Dormolen, 1986; Pirie, 1998; Skemp, 1979]. Pro naši potřebu jsme využily a nepatrně rozšířily jazykovou klasifikaci Pirie [1998]. Pirie rozlišuje: 1. každodenní jazyk, 2. matematický verbální jazyk, 3. matematický symbolický jazyk, 4. vizuální jazyk, 5. neverbální jazyk, 6. kvazi-matematický jazyk. Tuto klasifikaci jsme převzaly a v článku [Kratochvílová, Swoboda, 2002] jsme jednotlivé kategorie vymezily vlastními interpretacemi, doplnily o své ilustrace (Doufáme, že jsme nezměnily významy kategorií popsané Pirie) a navíc jsme na každou z těchto kategorií nahlížely ze dvou oblastí:
  m – matematická (výpověď je bezprostředně provázána na matematiku),
  s – sociální (výpověď je bezprostředně provázána na svět mimo matematiku).
  V tabulce jsme použily zkratku obsahující číslo – jedna z kategorií od Pirie a písmeno – „m“ nebo „s“ pro jednu z oblastí, matematická nebo sociální (např. 4m znamená, že účastník experimentu použil vizuální jazyk týkající se matematiky – např. načrtnul číselnou osu).

- Sociální sféra: Učení se matematice a její vyučování (i experimentální práce v didaktice matematiky) se odehrává v sociální sféře. Rozvoj matematických pojmů je umístěn v síti

mentálních a sociálních vazeb [Presmeg, 1998], což má vliv na epistemologický status matematiky jako vědy (školní matematika není logicky oddělená od matematiky jako vědy [Steinbring, 1998]). Matematika je určitý typ „hry“, ve které není tak důležité *znát*, ale především *dojít k poznání* [Arzarello a kol., 1999], a je to problém jak pro žáka, tak pro učitele. Dodejme, že všechny interpretace slov a chování jsou zatížené sociálně, ale i kulturně.

- Emocionální sféra: Intelektuální činnosti, z nichž se skládá každý poznávací proces, se uskutečňují na pozadí emocí, které mohou vyvolat nejrůznější reakce. Mimo jiné též ovlivňují dosahování úspěchů či neúspěchů [Žeromska, 2000]. Proto výzkumník zabývající se interakcemi v komunikaci by neměl opomenout na emocionální pozadí celého experimentu.

4. PŘÍPADOVÁ STUDIE KUBA

4.1 Experiment

Cílem experimentu bylo zkoumat žákovské schopnosti použít matematický poznatek o podobných útvarech v atypických situacích. Jedna z nich poskytovala možnost chápat podobnost v každodenním smyslu nebo ve smyslu jejího matematického vymezení. Nástrojem výzkumu byla sada předmětů, které nebyly podobné ve smyslu matematickém, ale všechny bylo možné označit jako náramky, které byly však o různém průměru, různé tloušťce a vyrobené z různých materiálů.

Kuba (14 let) se ve škole učil pouze jednu definici podobnosti rovinných útvarů a těles. O půl roku později se zúčastnil experimentu, jehož průběh je popsán v dalším textu.

4.2 Protokol[2]

Ex 01: (ukazuje několik náramků) *Řekni mi, zda tyto předměty mají nějaký vztah s matematickým pojmem podobných útvarů.*
Kuba 01: (rychle reaguje) *Ty jsou podobné.*
Ex 02: *Matematicky?*
Ku 02: *Ano. Z matematického pohledu.*
Ex 03: (překvapení v hlase) *Z matematického pohledu?*
Ku 03: *Ano.*
Ex 04: (překvapeně se dívá) ….
Ku 04: *Protože v běžném jazyce oni nejsou vůbec podobné.*

4.3 Analýza experimentu

V protokolu evidujeme následující jevy: 1. Ve vstupu Ex 03 byla experimentátorka překvapena. 2. Použila stejných slov, které již použil Kuba v Ku 02, pouze s tím rozdílem, že je vložila do otázky. 3. Po vstupu Ku 03 experimentátorka nereagovala. 4. I tak Kuba reagoval (Ku 04).

Tato evidence nám umožňuje formulovat otázky, na něž se pokoušíme odpovědět při analýze: Proč v Ex 03 byla experimentátorka překvapena? Proč experimentátorka nereagovala (Ex 04) na Kubu (Ku 03)? Proč i tak potom Kuba zareagoval (Ku 04)?

V níže uvedené tabulce (Tab.1) prezentujeme naši analýzu. Tučně jsou vyznačena jak ta místa, která mají vliv na míru porozumění mezi experimentátorkou a žákem v další komunikaci, ale i ta místa, kde cíle a očekávání se u obou liší.

Vlivy sfér na neporozumění

Je zcela zřejmé, že jeden účastník experimentu ovlivňuje druhého a naopak (žák ⇔ experimentátor). Toto ovlivňování pochází ze všech výše zmíněných sfér, odkud zároveň pochází i nedorozumění. Z naší tabulky ilustrujeme několik příkladů vlivů sfér na nedorozumění postupně se vyvíjející v experimentu.

[2] Jedná se o experiment provedený v Polsku, tudíž protokol je zde uvedený v překladu.

Tab.1

Experimentátorka					Protokol	5. ŽÁK			
Sféry						Sféry			
č.	**K**	**J**	**S**	**E**		**K**	**J**	**S**	**E**
1	**Dvě porozumění slova „podobný“:** 1.Každodenní chápání slova “podobný” 2. matematická relace mezi troj-rozměrnými útvary		**Vnímaná role ve vztahu se žákem: účastnice experimentu – experimentátorka – výzkumník**		*Příprava experimentu*	**Jedno porozumění slova „podobný“** jako matematický vztah mezi geometrickými objekty		**Vnímané role: žák – učitel**	
2	Dva modely podobnosti: 1. matematická relace mezi troj-rozměrnými útvary 2. každodenní význam **Dominantou formulace je slovo „podobný“**	4m 4s 2m			Ex 01: (ukazuje několik náramků) Ex: *Řekni mi, zda tyto předměty mají nějaký vztah s matematickým pojmem podobných útvarů.*	**Slovo „matematický“ je dominantou ve vyslechnuté formulaci.** „Matematický“= matematizovat, projektovat do světa matematiky			
3	Nedorozumění – Jaký model podobnosti vybral Kuba?			Překvapení	K 01: (rychle reaguje) *Ty jsou podobné.*	Model podobnosti: matematická relace mezi dvojrozměrnými útvary (kružnice)	4m 2m		Sebejistota
4	**Matematicky = existující v oblasti matematiky, kde pojem „podobný“ je definován podle formálních kritérií**	2m	**Signál nesplněného očekávání versus víra v matematické schopnosti žáka. Prosba vysvětlení.**	Podráždění z nedorozumění	Ex 02: *Matematicky?*	„Matematicky“= matematizovat, projektovat do světa matematiky		**Vnímání experimentátorky jako učitelky ve „školní hře“ – učitelka mne kontroluje**	Sebejistota

Experimentátorka					Protokol	6. ŽÁK			
	Sféry					Sféry			
č.	**K**	**J**	**S**	**E**		**K**	**J**	**S**	**E**
5					Ku 02: *Ano.* *Z matematického pohledu.*	Náramky = předmětné modely reprezentující kružnice	2m	Vstříc očekávání experimentátorky/ učitelky	Sebejistota
6	**Umístění formulace „Z matematického pohledu“ do stejného schématu jako formulace „Matematicky“**	5s 2m	Vyslání informace, že odpověď není správná	**Gradování podráždění z nedorozumění i nesplnění očekávání**	Ex 03: (překvapení v hlase) *Z matematického pohledu?*			Obdržení signálu nesplněného očekávání	
7					Ku 03: *Ano.*	Náramky = předmětné modely reprezentující kružnice	1m	Vytvoření prostoru pro experimentátorku/ učitelku	Sebejistota
8	Neshodnutí se žákovy odpovědi s žádným experimentátorčiným modelem podobnosti	5m 5s	Očekávání vysvětlení	Bezradnost	Ex 04: (překvapeně se dívá) ….			Obdržení signálu o očekávání experimentátorky/ učitelky	
9					Ku 04: *Protože v běžném jazyce oni nejsou vůbec podobné.*	**Dva způsoby užití relace podobnosti: 1. u náramků projekce do kružnic, 2. v každodenním chápání pohlížíme na objekty bez projekce**	6m	Pokus vysvětlit vlastní ideu	

I. Vliv kognitivní sféry. Experimentátorka očekávala dva typy odpovědí od žáka: „ne, tyto objekty nejsou podobné“ ve smyslu matematického vymezení podobnosti nebo „tyto objekty jsou trochu podobné“ ve smyslu každodenního chápání slova „podobný“. Avšak žák slovo „podobný“ – v kombinaci s tím, že experimentátorka je vnímána žákem jako učitelka (před půl rokem byla jeho učitelka) – propojuje na matematický pojem podobnosti, který se učil ve škole, kde byl dán důraz na podobnost rovinných útvarů, především mnohoúhelníků.

II. Vliv jazykové sféry. Pro experimentátorku slovo „matematicky“ se týkalo všech pojmů existujících v oblasti matematiky. V její mysli toto slovo bylo propojeno na matematické vlastnosti podobných těles. Tělesa jsou pro ní předmětné objekty. Pro žáka slovo „matematicky“ se týkalo procesu – matematizace, což je proces abstrahování jednotlivých vlastností z různých reprezentací pojmů a vztahů. Žák uskutečnil projekci předmětných objektů do geometrických útvarů – kružnice o různém poloměru nebo do pojmu kružnice. Jedna z uvedených možností byla asociována s pojmem podobnosti.

III. Vliv sociální sféry. Rozdílné sociální interpretace rolí obou účastníků experimentu zapříčinilo rozdílné porozumění zadávaného problému. Žák znal experimentátorku jako učitelku matematiky. Experimentátorka znala žáka jako velmi chytrého chlapce a v době experimentu nepovažovala za podstatné, že byla jeho učitelka. Proto očekávání obou účastníků bylo rozdílné: Experimentátorka očekávala, že žák porozumí problému jako situaci na rozhraní mezi matematikou a běžným životem. Žák si myslel, že experimentátorčiným zájmem je pouze matematika.

IV. Vliv emocionální sféry. Nesoulad mezi experimentátorčiným očekáváním a žákovými reakcemi zapříčinil, že experimentátorka reagovala emocionálně. Žákovská reakce (Ku 02) byla tak překvapivá pro experimentátorku, že použila žákových slov do otázky (Ex 03) s překvapením v hlase. Tato reakce silně vypovídá o tom, že taková žákova odpověď nebyla očekávána. Navíc experimentátorčino schéma situace společně s její emocionální reakcí vytvořilo překážku v porozumění žákovi a hledání adekvátní reakce na jeho odpověď. Na otázku „Matematicky?“ žák odpověděl: „Ano. Z matematického pohledu.“ Tato odpověď mohla experimentátorku vyprovokovat k hledání jiné interpretace podobnosti než té, co bylo v její mysli. To se bohužel nestalo.

5. ZÁVĚR

Z této analýzy je možné vidět, jak se jednotlivé sféry ovlivňují navzájem. Odlišné sociální vnímání rolí v experimentu hned od počátku ovlivnilo nejen obě interpretace zadaného problému, ale i chování jak experimentátorky, tak žáka.

Literatura:

[1] Arzarello F., Dorier, J.L., Hefendehl-Hebeker, L. & Turnau, S. (1999). Mathematics as a Cultural Product. In I. Schwank (Eds.), Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME I), Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück, vol. 1, s. 73-80.

[2] Boero, P., Pedemonte, B., Robotti, E. & Chiappini, G. (1998). The “Voices and Echoes Game” - the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a Vygotskian perspective: ongoing research. In: Proceedings of PME XXII (International Group for the Psychology of Mathematics Education), Stellenbosch, vol. 2, s. 120-127.

[3] Brandt B. (2001). Classroom interaction as multi-party interaction: Methodological aspects of argumentation analysis, Proceedings of European Research in Mathematics Education II, Marianske Laznie, Czech Republic, s. 377-385.

[4] Brown, T. (1997). Mathematics Education and Language, Interpreting Hermaneutics and Post-Structuralism. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

[5] Bussi, M.B. (1998). Verbal Interaction in the Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis. In H. Steinbring et al. (Eds.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Reston, Virginia.

[6] Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivists and socio-cultural perspectives on mathematical development. In: Educational Researcher, 23 (7), s. 13-19.
[7] Dekker M., Elshout-Mohr M., Pijls M.,(1998). Interaction, self-regulated learning and the process of level raising. The interactions in the mathematics classroom, proceedings of the CIEAEM 49, Portugal, s. 27-34.
[8] Van Dormolen, J. (1986). Textual Analysis. In B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte & D. Reidel (Eds.), Perspectives on Mathematics Education, Publishing Company, s. 141-171.
[9] Hejný, M., Michalcová, A. (2001). Skúmanie matematického riešitel´ského postupu. Metodické centrum Tomášikova 4, Bratislava.
[10] Hejný, M. (2003). Diagnostika aritmetické struktury. V tomto sborníku: Zborník príspevkov Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2003, Kováčová při Zvolene, ed. V. Burjan, M. Hejný, Š. Jány.
[11] Jirotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 43, č. 4, s. 326-334.
[12] Jirotková, D., Littler, G.H. (2002). Investigating Cognitive and Communicative Processes through Children`s Handling of Solids. In: Proceedings of PME XXVI (International Group for the Psychology of Mathematics Education), Norwich, vol. 3, s. 145-152.
[13] Kratochvílová, J., Swoboda, E. (2002). Analiza interakcji zachodzacych podczas badaň z dydaktyki matematyki, In: Dydaktyka matematyki, No. 24, ed. S. Turnau. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Kraków, s. 7-39.
[14] Kratochvílová, J. (2003). Strategie komplementu a mechanismus jejího vynoření. In: Disputaciones scientificae, Ružomberok, Katolická Univerzita, s. 45-50.
[15] Pirie, S. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (slippery) Stepping-Stones. In H. Steinbring et al. (Eds.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, s. 7-29.
[16] Presmeg, N. (1998). Balancing Complex Human Worlds: Mathematics Education as an Emergent Discipline in its Own Right. In: Mathematics Education as the Research Domain: A Search for Identity. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), ICME Study. Book 1, Kluwer Academic Publishers, Great Britain, s. 57-71.
[17] Schwarz B., Hershkowitz R., Dreyfus T. (2001). Emerging knowledge structures in and with algebra, Proceedings of Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CREME 2, Marianske Laznie, Czech Republic, s. 81-91.
[18] Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.L. (2001). A Model for Examining Teachers' Didactic Action in Mathematics, the Case of Game "Race to 20", Proceedings of Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CREME 2, Marianske Laznie, Czech Republic, s. 420-433.
[19] Skemp, R. (1979). Intelligence, Learning and Action. A Foundation for Theory and Practice in Education, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto.
[20] Steinbring, H. (1998). Epistemological Constraints of Mathematical Knowledge in Social Learning Settings, In: Mathematics Education as the Research Domain: A Search for Identity, In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), ICME Study. Book 2, Kluwer Academic Publishers, Great Britain, s. 513-526.
[21] Stehlíková, N. (2000). Atomární analýza. In: Novotná, J. Analýza řešení slovních úloh. Karolinum, Praha.
[22] Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. In: Mathematics Education as the Research Domain: A Search for Identity, In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), ICME Study. Book 2, Kluwer Academic Publishers, Great Britain, s.227-242.
[23] Žeromska, A. K. (2000). Wybrane cele nauzcznia matematyki a process rozwiazywania zadaň. Nepublikovaná disertační práce, Krakow.

e-mail: kratochj@alfa.cuni.cz, eswoboda@univ.rzeszow.pl

NEKONEČNE MALÉ A VEĽKÉ ČÍSLA REHABILITOVANÉ

Ivan Kupka, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava

V devätnástom storočí matematici prestali používať vo svojich úvahách nekonečne malé a veľké veličiny. Nahradili ich aparátom limít. Tým matematika získala tak dlho hľadanú presnosť a jasnosť úvah. Matematika ale aj čosi dôležité stratila. Definície pojmov sa stali abstraktnejšími a vzdialenejšími od intuitívneho geometrického názoru. Dôkazy mnohých tvrdení sa stali nenázorné, zdĺhavé. Niektoré dôležité pojmy, vypracované fyzikmi použitím nekonečne malých veličín, museli byť teraz zložito modelované prostriedkami vyššej matematiky.

Dnes sa matematika ku infinitezimálnemu počtu vracia, a to v korektnej podobe, v rámci neštandardnej analýzy. Po dvojsemestrovom kurze neštandardnej analýzy by vysokoškolák vedel postupy z príkladov 1. až 3. v článku [Kup] preformulovať do korektnej podoby. A vzhľad týchto príkladov by sa príliš nezmenil! Aká je história neštandardnej analýzy?

V druhej polovici dvadsiateho storočia pristáva prvý človek na Mesiaci (1969). Zhruba v tomto období sa na matematickej scéne objavujú neštandardné modely teórie množín. Práce Abrahama Robinsona (1966), Edwarda Nelsona (1977), Petra Vopěnku a ďalších autorov vytvorili nové, rozšírené matematické svety. V týchto svetoch je dosť miesta aj pre nekonečne malé a nekonečne veľké veličiny. Priblížme si dva základné princípy, pomocou ktorých sa takéto svety dajú skonštruovať. Situáciu budeme ilustrovať na objektoch, ktoré sú nám dostatočne známe: na číslach.

Staviteľský prístup (postup inšpirovaný Robinsonom)

Nové, neznáme objekty sa v matematike často konštruujú pomocou už zavedených, známych. Napríklad pomocou tried ekvivalencií. Zopakujme si tento princíp na známej situácii. Predstavme si, že sme v rámci teórii množín už zaviedli celé čísla. Teraz pomocou nich skonštruujeme čísla racionálne:

Všimneme si, že niektoré usporiadané dvojice celých čísel majú čosi spoločné: Napríklad dvojice (2, 3), (–2, –3), (4, 6), (–4, –6) atď. Množina všetkých takýchto dvojíc vytvorí nový objekt, číslo 2/3. Buďme presnejší. Na množine usporiadaných dvojíc celých čísel vytvoríme reláciu Q. Budeme písať $(a, b)Q(c, d)$ práve vtedy, ak $a \cdot d = b \cdot c$. Relácia Q je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Je to relácia ekvivalencie. Vytvoríme triedy ekvivalencie podľa Q. Napríklad trieda $[(1, 3)]$ bude reprezentovaná množinou všetkých dvojíc (c, d), pre ktoré platí, že $1 \cdot d = 3 \cdot c$. Teda dvojicami typu (–1, –3), (20, 60), atď., vo všeobecnosti všetkými dvojicami tvaru $(k, 3k)$,kde k je celé číslo.

Princíp vzniku nových objektov je dostatočne jasný. Technické zjemnenia a detaily (v menovateli nesmie byť nula, na novej množine treba definovať operácie sčítania a násobenia a zistiť ich vlastnosti ...) sú už len otázkou trpezlivého rozvíjania pôvodnej myšlienky.

Využime ten istý princíp – princíp vytvorenia tried ekvivalencie – na rozšírenie reálnych čísel o nové objekty. Všimnime si, že niektoré postupnosti reálnych čísel majú čosi spoločné: Napríklad postupnosti 1, 1/2, 1/3, ... , $1/n$, ... ; 5, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ...; 1, 1/2, 48, 1/4. 1/5, ..., $1/n$, ... Tieto tri postupnosti majú „pre dostatočne veľa indexov *n*“ *n*-tý prvok rovnaký. Množina, trieda ekvivalencie takýchto postupností vytvorí nový objekt, „hyperreálne číslo“ $\delta = [1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots]$. Ak toto číslo porovnáme s kladným reálnym číslom ε reprezentovaným triedou ekvivalencie $[\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]$ vidíme, že od určitého indexu n platí
$1/n < \varepsilon$. Teda $[1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots] < [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]$ a δ je menšie ako ε. Prirodzene, δ je kladné, pretože platí $\delta = [1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots] > 0 = [0, 0, 0, \ldots]$.

Práve sme načrtli konštrukciu nekonečne malého kladného reálneho čísla. (Znovu, problémy typu akú konkrétnu reláciu ekvivalencie v tomto prípade použijeme a čo znamená výraz „pre dostatočne veľa indexov *n*“ sa dajú primerane technicky ošetriť.) Prirodzene, ak δ je nekonečne malé, $1/\delta$ reprezentované triedou ekvivalencie $[1, 2, 3, \ldots, n, \ldots]$ je nekonečne veľké. Na novej množine

hyperreálnych čísel sa zavedú operácie sčítania, násobenia, ukáže sa, že nová štruktúra zdedí od pôvodnej množiny reálnych čísel všetky rozumné vlastnosti.

Konštrukcia, ktorú sme načrtli sa udiala v rámci klasickej teórie množín. Je korektná do tej istej miery, ako akákoľvek iná klasická konštrukcia.

Prístup filozofa a logika (postup podľa Nelsona)

Predstavme si, že máme k dispozícii klasický matematický svet, ktorý zahrňuje bežný model reálnych čísel. Zrazu sa na reálnu priamku zahľadíme lepšie, zrakom ostrejším, ako kedykoľvek predtým. S údivom zistíme, že vidíme nové objekty. Medzi týmito objektmi sú aj nekonečne malé a nekonečne veľké čísla. Nemusíme ich konštruovať. Boli tu odjakživa. Len sme si ich prítomnosť neuvedomovali!

Takýmto spôsobom objavuje neštandardné objekty vo svojej práci [Ne] Nelson. Čo robí jeho zrak ostrejším, ako zrak klasických matematikov? Sú to tri axiómy, ktoré pridáva ku bežne používaným axiómam teórie množín. Táto nová sada axióm je takisto korektná a bezosporná ako pôvodná. Nové axiómy hovoria okrem iného o tom, že teraz máme možnosť dozvedieť sa o každom objekte, čísle, či je štandardné (také a len také sme poznali v rámci klasickej teórie), alebo nie.

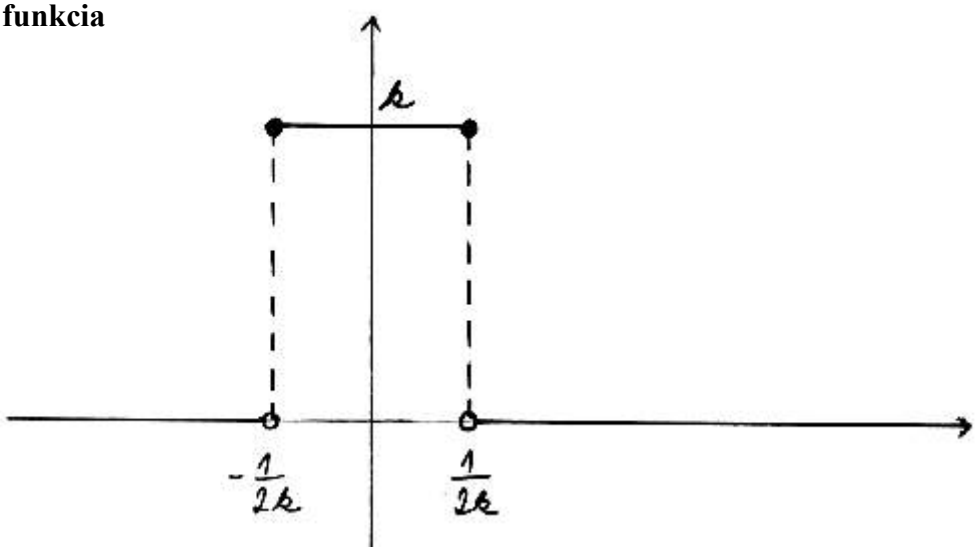
Nelsonov prístup je geniálne vynachádzavý. Vezmime si dvoch oteckov, ktorí sa rozhodnú, že svojim deťom ukážu prírodu, akú ešte nikdy nevideli. Prvý, pán Robinson, minie všetok našetrený majetok a vezme deti na nákladný výlet do Brazílskej džungle. Druhý, pán Nelson, jednoducho kúpi mikroskop. Nové svety nájde doma v obývačke – na vlastnom vlase, v kvapke vody, na zrnku prachu.

Pohľad do budúcnosti? Dva príklady na záver

Český matematik Vopěnka sa nazdáva, že vhodná teória nekonečne malých a veľkých veličín je matematikou budúcnosti. Neschopnosť matematikov, domyslieť a dotvoriť pôvodnú Newtonovu a Leibnitzovu koncepciu vraj spôsobila, že vyššia matematika bola pár storočí na scestí. Nekonečne malé a veľké veličiny sú dnes rovnako korektne zavedené matematické objekty, ako čísla 1, 2, e alebo π. V rámci neštandardnej analýzy sú infinitezimálne veličiny používané pri úvahách a dôkazoch, ktoré korektným spôsobom oživujú pôvodnú intuíciu starých majstrov. Úvahy získavajú na prehľadnosti a intuitívnej jasnosti. Odbúrava sa zbytočný arzenál „superštruktúr“, tak často používaný v bežnej epsilon-delta analýze. Nasledovateľ Nelsona Périare sa snaží zdokonaliť cestu, ako o matematike rozprávať jazykom, bližším ľudskému jazyku.

Postupy neštandardnej analýzy môžu pri prvom stretnutí pôsobiť exoticky. Čoskoro však oceníme ich názornosť, stručnosť a priamočiarosť. Bude štandardný kurz matematickej analýzy v budúcnosti prednášaný za pomoci nekonečne veľkých a malých veličín? Podobnými postupmi, ako sú použité v nasledujúcich záverečných príkladoch?

Príklad 1. Diracova funkcia



Obr. 1

Funkcia f nakreslená na obrázku 1 je definovaná týmto predpisom:
$f(x) = k$ na intervale $<-1/2k,\ 1/2k>$, $f(x) = 0$ inde. Ak zvolíme kladné reálne číslo e tak, že $e > 1/k$, budú platiť nasledujúce rovnosti:

$$(*)\quad \int_{-e}^{e} f(x)dx = 1,\ \int_{-\infty}^{-e} f(x)dx = 0,\ \int_{e}^{\infty} f(x)dx = 0$$

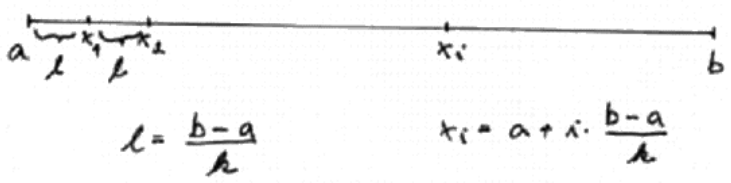
Predstavme si teraz, že číslo k je nekonečne veľké, t. j. väčšie ako ľubovoľné „štandardné" reálne číslo. Potom pre každé štandardné e kladné platí samozrejme nerovnosť $e > 1/k$ a teda aj rovnosti (*). Funkcia f videná nedokonalou štandardnou optikou by sa však pozorovateľovi javila takto: Jej hodnota je nulová v každom nenulovom reálnom čísle, v bode nula má hodnotu nekonečno a pre každé kladné e spĺňa rovnosti (*).

Príklad 2. Spojitá funkcia na uzavretom intervale

Spojitosť funkcie v štandardnom reálnom čísle x je definovaná takto: ak $t \approx x$ (t je nekonečne blízko x), tak $f(t) \approx f(x)$. Relácia nekonečnej blízkosti $\approx$ má pritom nasledujúcu vlastnosť: ak p, r sú štandardné (klasické) reálne čísla a s, t ľubovoľné hyperreálne čísla, tak platí: ak $s \approx p$, $t \approx r$ a $s \geq t$, tak $p \geq r$. Použijúc tento poznatok, načrtnime neštandardný dôkaz Bolzanovej vety:

Ak f je spojitá funkcia definovaná na uzavretom intervale $<a, b>$ taká, že $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, potom existuje číslo c z vnútra intervalu také, že $f(c) = 0$.

Vezmime nekonečne veľké prirodzené číslo K. Rozdeľme interval $<a, b>$ týmito deliacimi bodmi:
$x_0 = a,\quad x_1 = a + (b - a)/K, \ldots ,\quad x_i = a + i\cdot(b - a)/K, \ldots x_K = a + K\cdot(b - a)/K = b.$



Obr. 2

Každý z intervalov tvaru $<x_i, x_{i+1}>$ je nekonečne malý, pretože má dĺžku $(b - a)/K$. Každé z deliacich čísel je nekonečne blízko nejakého štandardného reálneho čísla patriaceho do $<a, b>$. Zvoľme teraz také prirodzené číslo spomedzi čísel 1, 2, ..., K, pre ktoré platí:
$f(x_j) > 0$ a pritom pre každé $i < j$ $f(x_i) \leq 0$. Také j musí existovať – skúmame len situáciu v K bodoch. Body x_j a x_{j-1} sú nekonečne blízko nejakého reálneho čísla c patriaceho do $<a, b>$. Zo spojitosti dostávame $f(c) \approx f(x_j)$ a z nerovnosti $f(x_j) > 0$ vyplýva $f(c) \geq 0$. Podobne vzťahy $f(c) \approx f(x_{j-1})$ a $f(x_{j-1}) \leq 0$ implikujú $f(c) \leq 0$. Preto platí $f(c) = 0$.

Literatúra:

[De] Devis, M.: Prikladnyj nestandardnyj analiz, Mir, Moskva, 1980 (rusky)
[Di] Diener F., Reeb G.: Analyse Non Standard, Hermann, Paris, 1989.
[Kup] Kupková E.: Nekonečne malé a veľké veličiny – historický vývoj pojmu, Letná škola vyučovania matematiky Pytagoras 2003, Zborník príspevkov.
[Ne] Nelson E.: Internal Set Theory: a New Approach to Nonstandard Analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 83, 1165-1198, 1977.
[Pe] Péraire Y.: Théorie relative des ensembles internes. Osaka J. Math. 29 (1992), 267-297.
[Ro] Robinson, A.: Nonstandard Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966.
[Vo1] Vopěnka, P.: Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín, Alfa, Bratislava, 1989.
[Vo2] Vopěnka P.: Calculus infinitesimalis pars prima, Práh, Praha, 1996.
[Zl] Zlatoš P.: Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou, Iris, Bratislava, 1995.

e-mail: Ivan.Kupka@fmph.uniba.sk

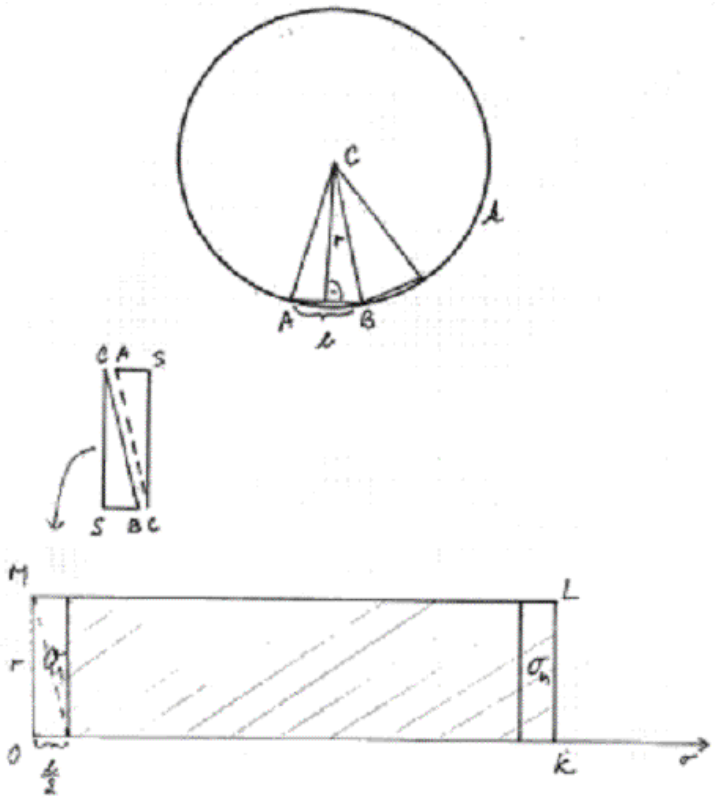
NEKONEČNE MALÉ A VEĽKÉ VELIČINY – HISTORICKÝ VÝVOJ POJMU

Erika Kupková, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava

Aký je prínos poznatkov o nekonečne malých a veľkých veličinách pre učiteľa? Prvým dôvodom na ich štúdium je, že v rámci fylogenézy matematických pojmov zohrali tieto veličiny dôležitú úlohu. Môžu preto pomôcť aj pri štúdiu ontogenézy matematického myslenia študentov. Poznatky o nich môžu poslúžiť ako *spestrenie* hodiny. Môžeme pomocou nich študentom prezentovať *alternatívne pohľady* na matematické problémy. Vhodne vybrané príklady z tejto oblasti prinášajú študujúcim *estetické zadosťučinenie*. Práca s nimi môže byť užitočná aj ako názorný *spôsob odvodzovania a pamätania si vzorcov*.

Pri prezentovaní vzorcov často nepotrebujeme podať presný dôkaz. Považujeme však za užitočné ukázať hlavnú myšlienku odvodenia založenú na geometrickej intuícii. Uveďme na úvod dva príklady odvodenia vzorcov. Prvý má charakter „odôvodnenia“. Druhý vyzerá skôr ako nekorektné šarlatánstvo, ale vedie k výsledku.

Príklad 1. Plocha kruhu

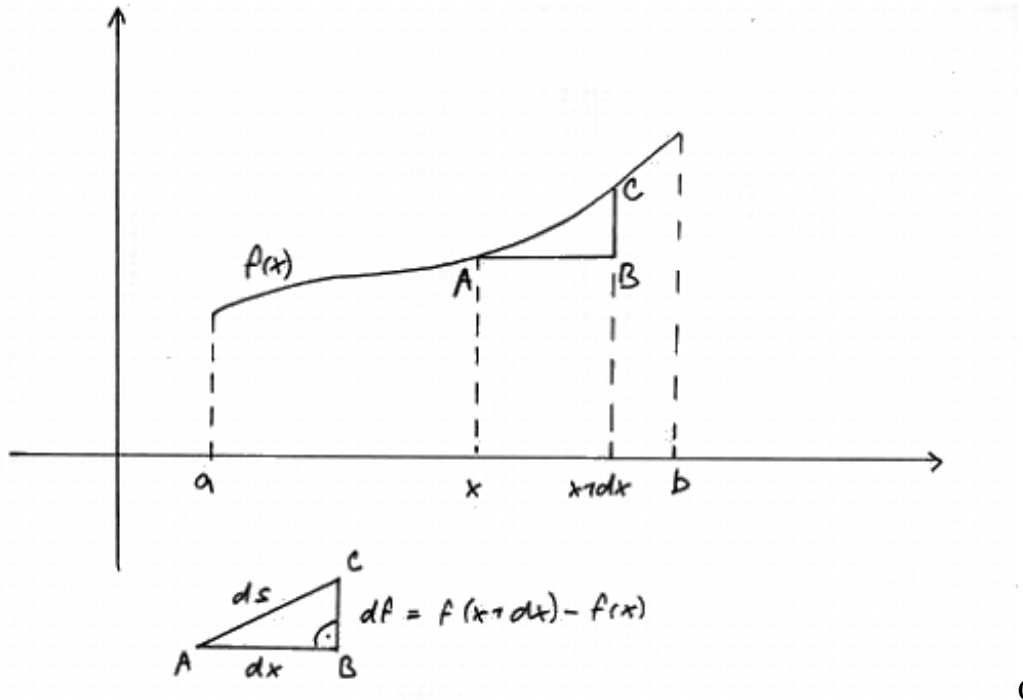


Obr. 1

Predstavme si, že do kruhu na obrázku je vpísaný pravidelný n-uholník, zložený z n trojuholníkov. Pritom n je veľmi veľké číslo. Také, s akým nikdy žiaden človek ešte nepracoval, ani nebude pracovať. Teda n môžeme považovať za nekonečne veľké prirodzené číslo. V takomto prípade základne trojuholníkov „splynú“ s príslušným úsekom oblúka kružnice. Na takom malom úseku kružnica nemá čas zakriviť sa. Rozdiel medzi plochou kruhu a súčtom plôch všetkých trojuholníkov je teda nekonečne malý.

Poukladajme všetky trojuholníky do obdĺžnika, aby sme ľahko vypočítali súčet ich plôch. Prvý trojuholník, *ABC*, rozdelíme na dva rovnaké trojuholníky *SBC* a *ASC*. *ASC* pretočíme a priložíme k *SBC* tak, aby vznikol obdĺžnik O_1. Tento obdĺžnik so základňou dĺžky l/2 a výškou dĺžky *r* uložíme na začiatok polpriamky *o*. Taký istý obdĺžnik urobíme aj z druhého trojuholníka. Obdĺžnik priložíme vedľa obdĺžnika O_1. Takto vedľa seba naukladáme všetkých *n* obdĺžnikov. Vznikne obdĺžnik *OKLM*. Jeho výška sa rovná *r*. Dĺžka jeho základne je rovná polovičke súčtu dĺžok základní všetkých trojuholníkov. (Trojuholníky sme na polpriamku ukladali poskladané). Súčet dĺžok základní je ale rovný $2\pi r$, t. j. dĺžke kružnice *k*, pretože základne trojuholníkov s touto kružnicou splývajú. Dĺžka úsečky *OK* je preto rovná $2\pi r/2 = \pi r$. Celkovo: plocha obdĺžnika *OKLM* a teda aj kruhu s polomerom *r* je $\pi r \cdot r = \boldsymbol{\pi r^2}$.

Príklad 2. Dĺžka krivky



Obr. 2

Na obrázku 2 vidíme krivku reprezentovanú grafom funkcie *f* definovanej na intervale <*a, b*>. Predpokladajme, že funkcia *f* má na celom intervale deriváciu. Deriváciu budeme chápať podobne ako Newton alebo Leibniz. Ak by sme napríklad na intervale <*a, b*> zaznamenávali čas, hodnota *f*(*x*) pre nás znamená dĺžku prekonanej dráhy v čase *x*. Okamžitú rýchlosť v čase *x* nazveme deriváciou a označíme *f'*(*x*). Vypočítame ju takto: zvolíme nekonečne krátky časový úsek *dx*. Za tento úsek sa dráha zmenila o hodnotu

$$df = f(x + dx) - f(x).$$ (Okamžitá) rýchlosť je podiel dráhy a času, t. j. $f'(x) = df/dx$.

Ako vypočítame dĺžku krivky na obrázku 2? Vypočítajme najprv dĺžku úsečky *AC*, t. j. nekonečne malú dĺžku, ktorú krivka vykreslí za čas *dx*. Krivka sa za tento čas nestihne zakriviť a splynie s danou úsečkou. Dĺžku *AC* vypočítame z Pytagorovej vety:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + df^2)} = \sqrt{(1 + df^2/dx^2)} \cdot dx = \sqrt{(1 + f'(x)^2)} \cdot dx.$$

Celkovú dĺžku krivky si môžeme predstaviť ako súčet všetkých takýchto úsekov *ds* „cez všetky *x*“, t. j. ako výraz $\sum_{x \in <a,b>} \sqrt{(1 + f'(x)^2)} \cdot dx$. Takáto suma však predstavuje integrál. Dĺžka krivky je rovná

$$s = \int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)} \cdot dx.$$

Antický a stredoveký pohľad na nekonečno

Ľudia v antike považovali svet za taký, aký sa im javil. Preto oblasti, ktoré vnímali ako neostré a neurčité, za také aj považovali. Grécke slovo "apeiron" zahŕňalo v sebe tieto významy: nekonečné, neurčité, neohraničené, nevymedzené. Hovoriť teda o nekonečne veľkých či malých číslach, či vôbec matematizovať nekonečno – apeiron bolo pre Grékov nemysliteľné. Aj grécky argument na existenciu atómov je príznačný: Hmotu predsa nemožno deliť do nekonečna! Po čase musí proces delenia zastať úplne. V určitom momente už ďalšie delenie už nie je možné.

Zaujímavým faktom je, že keď západná veda dosiahla v 15-17. storočí úroveň porovnateľnú s antickou vzdelanosťou, novoveká matematika nebola len obnovením antickej tradície. Novovekí matematici sa už nebáli nekonečna.

Priblížme si dva odlišné prístupy, ktoré zaujali Zenóna a Oresme k tomu, čo by sme dnes nazvali sčítavaním geometrického radu $1/2 + 1/4 + ... 1/2^n + ...$

Zenón tvrdí, že takýmto spôsobom si dráhu letiaceho šípu (ktorý preletí najprv polovičku dráhy, potom polovičku z polovičky atď) jednoducho predstaviť nemôžeme. Veď to by sme pracovali s nekonečnom! Radšej musíme uznať, že šíp do cieľa nikdy nedoletí.

V štrnástom storočí Oresme vymýšľa úlohy o pohybe, ktorý trvá nekonečne veľa dní. Prejdená dráha sa rovná súčtu geometrického radu $1+ 1/2 + 1/4 + ... 1/2^n + ...$, teda dvom. Oresme verí, že dvojka je správny súčet. Nezľakne sa nekonečnosti súčtu.

V čom je rozdiel medzi zmýšľaním gréckeho a novovekého matematika? Rozdiel je predovšetkým v rozličných presvedčeniach o tom, či sa nekonečno dá alebo nedá matematizovať. Čo tento rozdiel spôsobilo?

Novoveký matematik, na rozdiel od antického, už nepovažuje svet za taký, aký sa mu javí. Pod vplyvom monoteistického náboženstva a teológie chápe svet ako dokonalé božie dielo, božskú realitu. ([Kv]). My možno mnohé veci jasne nevidíme, ale boh áno. Pre boha nie je problém vidieť také malé a veľké veličiny, aké my nikdy nebudeme schopní zhliadnuť. To, ako matematici s nekonečne veľkými veličinami pracovali, zachycuje nasledujúci príklad.

Príklad 3. Súčet nekonečného radu $1 + 1/2^2 + 1/3^2 +... + 1/n^2 + ...$

V príklade používame mierne upravený Eulerov postup. Najprv si ujasnime, čo pre nás bude symbol $1 + 1/2^2 + 1/3^2 +... + 1/n^2 +$ **...** znamenať. Bude to pre nás také reálne číslo s, pre ktoré platí, že pre každé nekonečne veľké prirodzené číslo m je s nekonečne blízko čísla s_m, kde $s_m = 1 + 1/2^2 + + 1/3^2 +... + 1/m^2$.

Z hľadiska „dokonalého pozorovateľa" nie je problém súčet s_m vypočítať. Veď ide len o presne definovaný súčet m čísel. Poznamenajme, že rozdiel čísel s_m a s_{m-1} je rovný $1/m^2$ a teda nekonečne malý. Takže ak je s nekonečne blízko čísla s_m, je tiež nekonečne blízko čísla s_{m-1} a podobne aj s_{m+1}.

Vezmime teraz rovnosť

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + ... + (-1)^{n+1} x^{2n+1}/(2n+1)! + ...$$

ktorá predstavuje rozvoj funkcie $\sin(x)$ do nekonečného radu.

Zvoľme ľubovoľné, nekonečne veľké, párne prirodzené číslo m. S nekonečne malou stratou presnosti môžeme písať: $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + ... + (-1)^{m+1} x^{2m+1}/(2m+1)!$

Na pravej strane rovnosti máme polynóm, ktorého korene sú tvaru $0\cdot\pi$, $1\cdot\pi$, $(-1)\cdot\pi$, $2\cdot\pi$ atď.

Upravme rovnosť na tvar

$$\sin(x)/x = 1 - x^2/3! + x^4/5! + ... + (-1)^{m+1} x^{2m}/(2m+1)!$$

Na pravej strane rovnosti máme polynóm, ktorého korene sú tvaru

$$x = 1\cdot\pi, (-1)\cdot\pi, 2\cdot\pi, (-2)\cdot\pi \text{ atď.}$$

Urobme na pravej strane substitúciu $x^2 = t$

Podľa predchádzajúcich úvah má rovnosť

(*) $p(t) = 1 - t/3! + t^2/5! + ... + (-1)^{m+1} t^m/(2m + 1)! = 0$

riešenia $t = \pi^2, 2^2\cdot\pi^2, 3^2\cdot\pi^2$ atď. Keďže $p(t)$ je polynóm stupňa m, má presne m koreňov, konkrétne $k_1 = 1^2\cdot\pi^2, k_2 = 2^2\cdot\pi^2, ... , k_m = m^2\cdot\pi^2$. Preto je možné $p(t)$ vyjadriť v tvare

(**) $p(t) = a(t - k_1)(t - k_2)\cdot ... \cdot(t - k_m)$.

Zabudnime teraz na to, že m je nekonečne veľké číslo a pracujme s $p(t)$ ako s obyčajným polynómom stupňa m.

Vyjasnime si, ako budú po roznásobení výrazu $a(t - k_1)(t - k_2) \cdot \ldots \cdot (t - k_m)$ na tvar $a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ vyzerať čísla a_0 a a_1.

Z (*) a (**) vieme, že $a_0 = 1 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m \cdot (-1)^m$.

Pre m párne $a = 1/ k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$. Číslo a_1 má podľa (*) hodnotu $-1/6$, podľa (**)

$a_1 = a \cdot (- (k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_m) - (k_1 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_m) - (k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \ldots \cdot k_m) - \ldots - (k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{m-1})) = - (1/k_1 \cdot + 1/k_2 \cdot . + \ldots + 1/k_m)$.

Keď dosadíme za korene ich konkrétne hodnoty, dostávame rovnosť

$-1/6 = - (1/1^2 \cdot \pi^2 \cdot + 1/2^2 \cdot \pi^2 \cdot + \ldots + 1/m^2 \cdot \pi^2)$.

Po vynásobení číslom $-\cdot\pi^2$ dostávame

$\pi^2/6 = 1/1^2 \cdot + 1/2^2 + \ldots + 1/m^2$

Práve sme ukázali, že ak zanedbáme nekonečne malú veličinu, pre každé nekonečne veľké číslo m je súčet s_m nekonečne blízko čísla $\pi^2/6$. Preto platí

$$\mathbf{1/1^2 \cdot + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots = \pi^2/6}.$$

V úvahách matematikov 15. – 18. storočia nájdeme množstvo podobných postupov, ako sú tie, prezentované v príkladoch 1 až 3.

Opísané modernou rečou: Kuzánsky pri dôkaze trojjedinosti boha použije argument, že kružnica, zväčšená do nekonečna stráca svoju krivosť a mení sa na priamku. Fermat používa nekonečne malé veličiny na nájdenie extrémov funkcie. Galileo pracuje s nekonečne malými úsekmi času. Kepler vyjadruje objemy telies ako súčet nekonečne veľa nekonečne malých pravidelných podobjemov. Euler používa binomickú vetu pre n nekonečne veľké. A hlavne: Newtonov a Leibnizov ***infinitezimálny počet***, hádam najväčší objav v dejinách matematiky, je opisovaný a zdôvodňovaný za pomoci nekonečne malých a veľkých veličín. Ďalšie ilustračné príklady možno nájsť najmä v knihách [Be], [He], [Zn], [Ve].

Postupy, ktoré sme v predchádzajúcom texte opísali, poprípade predviedli na príkladoch, možno ľahko podrobiť kritike. Ako napríklad vieme, kedy môžeme nejaké číslo – veličinu zanedbať (položiť rovné nule) a kedy s ním máme viesť výpočty, ako keby nulou nebolo? Ako to, že v príklade 2 krivke nedovolíme na nekonečne malom intervale zakriviť sa, ale na druhej strane nepredpokladáme, že by musela byť na takomto intervale absolútne rovná, rovnobežná s osou x? Ako vôbec presne uchopiť, definovať nekonečne veľkú (malú) veličinu?

Leibniz sa zbytočne snažil presne opísať charakter nekonečne malých veličín, ktoré používal. Newton miesto pojmu „nekonečne malý“ hovoril o „medznom pomere prchavých prírastkov“. Prvú ostrú kritiku Leibnozových úvah podáva v 17. storočí geometer Nieuwentijdt, v 18. storočí prichádza s vypracovanou kritikou Newtonových postupov biskup Berkeley.

Ako vieme, matematika túto krízu, spôsobenú nejasnosťou pojmov a nepresnosťou úvah, prekonala. Diferenciálny a integrálny počet sa podarilo zachrániť. Matematici vypracovali teóriu aproximácií. V devätnástom storočí sa vďaka prácam d'Alemberta, Cauchyho a Weierstrassa vybudoval pojem limity. Nekonečne malé a veľké veličiny skončili na smetisku dejín. Navždy? Dnes už vieme, že nie.

Literatúra:

[Be] Bero P.: Matematici, ja a ty, Bratislava, Mladé Letá 1989.

[He] Hejný M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské Pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

[Ji] Jirotková, D.: Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 43, č. 4 (1998), 326-334

[JiLi] Jirotková, D., Littler, G.: Student´s concept of infinity in the context of a simple geometrical construct. Pateman, N. A., Dogherty, B. J., Zilliox, J., (Eds.) PME 27+PME-NA 25, Honolulu, Colledge of Education, University of Hawaii, USA, (2003), p. 3-123-132.
[Ku] Kuzánsky M.: O učenej nevedomosti, Pravda, Bratislava, 1979.
[Kv] Kvasz L.: Matematika a teológia. Obzory matematiky, fyziky a informatiky Vol. 31, No 4 (2002), 32-39.
[Ve] Veselý J.: Matematická analýza pro učitele, První díl, Matfyzpress, Praha. 1997.
[Vo] Vopěnka P.: Calculus infinitesimalis pars prima, Práh, Praha, 1996.
[Zn] Znám Š. a kol.: Pohľad do dejín matematiky, Alfa, Bratislava, 1985.

e-mail: kupkova@fmph.uniba.sk

MATEMATIKA A TEOLÓGIA

Ladislav Kvasz, Katedra humanistiky FMFI-UK, Mlynská dolina, Bratislava

V dejinách matematiky existuje niekoľko tém, v rámci ktorých dochádza k priamemu dotyku matematiky s teológiou. Asi najznámejšou je *vznik teórie množín* a s ním spojený prechod od potenciálneho nekonečna k nekonečnu aktuálnemu a *vznik matematickej logiky* a s tým súvisiaca tradícia logickej kritiky dôkazov Božej existencie. Teória množín je príkladom priamej pozitívnej teologickej motivácie, keď sa matematici púšťajú do úvah, ktoré tradične patrili do teológie. Naproti tomu v matematickej logike teológia vystupuje skôr negatívne, ako predmet, na ktorého kritike sa vyjasňujú niektoré so základných princípov matematickej logiky. Vedľa priameho dotyku medzi matematikou a teológiou existovalo však v dejinách aj skrytejšie, ale nemenej významné ovplyvnenie matematiky teológiou. Na mysli mám otázku porozumenia pre to, čo je vôbec matematizácii prístupné a čo sa jej naopak vymyká.

1. POSUN HRANÍC MATEMATIZÁCIE SVETA V NOVOVEKU

Keď chceme uchopiť implicitný, nepriamy spôsob, ako monoteistická teológia ovplyvnila vývin západnej matematiky, je vhodné porovnať matematiku, s ktorou sa stretáme na sklonku antiky, s tou, ktorá pred nás predstupuje v 16. a 17. storočí, keď západná veda po storočiach úpadku a stagnácie opäť dosiahla úroveň porovnateľnú s antickou vzdelanosťou. Pozoruhodná je pritom skutočnosť, že novoveká matematika nebola jednoducho obnovením antickej tradície. Matematika na sklonku antiky sa od matematiky 16. a 17. líši v celom rade aspektov, ktoré možno podľa nášho presvedčenia pripísať práve pôsobeniu teológie. Aby sme tieto aspekty pochopili jasnejšie, sústredíme sa na päť pojmov, ktorých chápanie sa od sklonku antiky zásadným spôsobom zmenilo. Sú to nekonečno, náhoda, neznáma, prázdno a pohyb.

1. 1 Apeiron – nekonečno

To, čo dnes v matematike označujeme termínom nekonečno, spadalo v antike pod pojem *apeiron* (απειρον). *Apeiron* bol však pojem s nepomerne širším významom ako náš pojem nekonečna. Označoval nielen to, čo je nekonečné, ale vo všeobecnosti to, čo nemá hranicu či medzu (περας). Nekonečné tak podľa chápania antických učencov bolo čosi, čo bolo neohraničené, nevymedzené, a teda neurčité. Preto akékoľvek matematické skúmanie nekonečna bolo nemysliteľné, veď matematika bola náukou skúmajúcou práve to, čo je jasne vymedzené, čo je určité a jednoznačné. Čo je neostré, čo nemá *peras*, to nemožno pomocou jasných a jednoznačných pojmov matematiky uchopiť. Preto sa v antických matematických textoch možno stretnúť s dôkazmi, ktoré nemožnosť určitého objektu dokazujú ukázaním, že pri jeho konštrukcii alebo pri jeho vymedzení sa nevyhnutne stretávame s nekonečnom. V očiach antického matematika to totiž znamenalo, že príslušný objekt je neurčitý, nevymedzený, a teda nemôže existovať.

Novoveká matematika naproti tomu ostro odlišuje nekonečné od neurčitého. Nekonečné sa napriek tomu, že nemá koniec, považuje za jednoznačne určené, za presne vymedzené, a preto prístupné matematickému skúmaniu. Či už ide o nekonečne rozľahlé objekty, ako je priamka[1], alebo o nekonečne malé veličiny, všetky sa so samozrejmosťou považujú za súčasť matematiky. Možno tak povedať, že antický pojem *apeironu* sa v novoveku rozdelil na dva pojmy, na *nekonečno* v užšom slova zmysle, ktoré je odvtedy stálou súčasťou matematiky, a na *nevymedzené*, ktoré podobne ako v antike ani dnes do matematiky nepatrí.

1. 2 Tyché – pravdepodobnosť

Ďalší pozoruhodný zlom medzi novovekou a antickou matematikou nastal v chápaní náhody (τυχη). Podobne ako pojem *apeironu*, aj pojem *tyché* mal v antike omnoho širší význam ako náš moderný pojem náhody a vedľa náhodnej udalosti označoval aj šťastie a nešťastie a vo

všeobecnosti ľudský osud. Preto je prirodzené, že nebol prístupný matematickému poznaniu. *Tyché* spadá skôr do kompetencie veštenia ako do kompetencie matematiky. Pre bežného smrteľníka je poznanie osudu zastreté.

Od 16. storočia sa v európskej matematickej literatúre začínajú objavovať pojednania o hazardných hrách a v priebehu 17. storočia z tejto tradície vyrástol počet pravdepodobnosti. Z pohľadu antiky je matematická teória *tyché* rovnako absurdná ako matematická teória *apeironu*. A zdá sa, že v prípade *tyché* sa novovekým matematikom prelom podaril rovnakým spôsobom ako pri *apeirone*. Antický pojem sa rozdelil na dva pojmy, na pojem náhody, ktorá sa stala predmetom matematickej teórie pravdepodobnosti, a na pojem osudu, ktorý rovnako ako prv zostal za hranicami matematiky.

1. 3 Aritmos – neznáma

Tretia zmena, o ktorej chceme hovoriť, súvisí so vznikom algebry a špeciálne so vznikom pojmu neznámej, ktorá sa od čias Descarta označuje písmenom *x*. Zrod algebry sa udial v arabskej civilizácii, ako o tom svedčí aj samotný názov algebry, pochádzajúci z arabského *al gabr*. Arabská civilizácia je však monoteistická, podobne ako západná, a tak z hľadiska nášho argumentu o vplyve monoteistickej teológie na formovanie novovekej matematiky možno pojem neznámej postaviť vedľa pojmu nekonečna a pravdepodobnosti. To, na čo chceme poukázať, je opäť skutočnosť, že antická matematika nepoznala pojem neznámej v jej plnom, algebraickom zmysle.

Samozrejme, aj v antike existoval celý rad praktických úloh, v ktorých bolo treba nájsť určité neznáme číslo. Toto číslo Gréci označovali termínom *aritmos* (αριθμος). Podstatné však bolo to, že pri riešení spomínaných úloh postupovali synteticky, teda používali iba známe veličiny, uvedené v zadaní, a s ich pomocou sa postupne dopracovali k hodnote neznámeho čísla. Neznáme číslo, keďže bolo neznáme, nemohlo vstupovať do aritmetických operácií, v čom sa práve zásadne odlišuje od moderného *x*. Isté nábehy k pojmu neznámej existovali, avšak nie v aritmetike, ale v logike a geometrii. V logike Aristoteles zaviedol *písmená* na označovanie pojmov, aby tak vynikla logická štruktúra sylogizmov (ak Každé A je B, a Každé B je C, tak Každé A je C), a mnohí túto skutočnosť mylne považujú za vznik pojmu neznámej. Aristoteles však s písmenami nerobil žiadne operácie, a preto to nie sú neznáme v algebraickom slova zmysle, ale skôr označenia miest v sylogizmoch. Aristotelovo používanie písmen je preto skôr analogické tomu, ako sa v geometrii označujú body. O niečo ďalej pokročil v geometrii Euklides, keď zaviedol čosi ako *úsečku neurčitej dĺžky*. Keď riešil nejaký problém z teórie čísel, nakreslil úsečku, ktorej dĺžku ponechal neurčitú (v tom zmysle, že neudal jednotku, pomocou ktorej sa meria, a úsečka tak mohla reprezentovať ľubovoľné číslo). Ale ani tu nemáme neznámu v striktnom zmysle slova, lebo úsečka nakreslená na obrázku má pevnú dĺžku a práve vďaka tejto pevne určenej fyzickej dĺžke ju možno vziať do kružidla a robiť s ňou všetky aritmetické operácie.[2] V skutočnosti je teda príslušná úsečka jednoznačne určená a vďaka tomu s ňou možno robiť matematické operácie. Euklides s ňou iba narába tak, ako keby jej dĺžka určená nebola. Kým teda Aristotelove písmená označovali *všeobecné „miesta"* v sylogizmoch (miesta, na ktoré sa mohli klásť ľubovoľné pojmy), u Euklida ide o veličiny *„akoby" neurčité* (teda o celkom určité úsečky, s ktorými sa len pracuje, ako keby boli neurčité). Preto možno povedať, že antická tradícia nedokáže spojiť všeobecnosť s neurčitosťou. Všeobecné uchopuje ako všeobecné miesto, kam možno hocičo umiestniť (Aristoteles); toto miesto je však neprístupné aritmetickým operáciám. Na druhej strane neurčité (Euklides) je vyjadrené iba metaforicky, pomocou celkom určitého, s ktorým sa len narába tak, ako keby určité nebolo.

Idea spojiť tieto dve myšlienky (Aristotelovu myšlienku vyjadrenia všeobecného pomocou písmena, za ktoré možno dosadiť akýkoľvek výraz, a Euklidovu myšlienku podrobenia neurčitého rovnakým aritmetickým operáciám, akým sa podrobuje určité) sa v plnej sile zrodila až u Arabov v 8. storočí. Základom novej algebry je pojem neznámej, reprezentovaný písmenom a podliehajúci takým istým aritmetickým operáciám ako čísla. Zmyslom pojmu neznámej je umožniť vyjadriť neznáme veličiny vystupujúce v matematickej úlohe pomocou symbolov a ďalej už s nimi pracovať tak, ako keby to boli celkom určité čísla. Algebraická symbolika tak vlastne ruší epistemologickú bariéru, ktorá oddeľuje, to čo poznáme, od toho, čo nepoznáme. V algebre s oboma veličinami, so známymi aj s neznámymi, pracujeme ako s rovnocennými. Z pohľadu antickej matematiky je to

čosi absurdné, veď keď určitú veličinu nepoznáme, nemôžeme s ňou vykonávať aritmetické operácie. Aritmetické operácie predsa vyžadujú, aby to, s čím sa narába, bolo jednoznačne určené. Najďalej, ako sa dalo v antickej matematike zájsť, bola Euklidova úsečka neurčitej dĺžky. Táto úsečka bola totiž z geometrického hľadiska jednoznačne určená, a práve vďaka svojej jednoznačnej určenosti sa s ňou dali vykonávať aritmetické operácie. To, čo nie je určité, čo nie je jednoznačne dané, to podľa antického chápania nemôže byť predmetom matematiky. Tak sa zrod algebry, aj keď sa udial v rámci Arabskej civilizácie, radí vedľa vzniku matematickej teórie nekonečna a teórie pravdepodobnosti ako tretie významné prelomenie medzí jednoznačne určeného, ktorými antické chápanie vymedzovalo svet matematiky.

1. 4 Kenón – priestor

Analogické preladenie ako v prípade nekonečna, náhody a neznámej nastalo pri prechode od antickej k novovekej matematike aj v chápaní pojmu priestor. Najbližšie k tomu, čo dnes označujeme pojmom priestor, je antický pojem prázdna (κενον). Pre antických filozofov, až na atomistov a epikurejcov, bol však pojem prázdna problematický. Prázdno je tam, kde nič nie je, a teda vlastne označuje čosi, čo nemá žiadne konkrétne atribúty, ktoré by sme mohli poznať. A ani atomisti, ktorí existenciu prázdna pripúšťali, veľa o ňom povedať nevedeli. Nech už je to teda s existenciou prázdna akokoľvek, prázdno rozhodne nie je čosi, čo by mohlo tvoriť predmet matematického poznania, ktoré sa vyznačuje práve jasnosťou a určitosťou.

Naproti tomu novoveká veda je vybudovaná na matematickom pojme priestoru. U Newtona, zakladateľa novovekej fyziky, je absolútny priestor jednou so základných kategórií jeho systému. V *Scholium Generale*, doplnenom pri druhom vydaní *Philosophia naturalis principia mathematica* roku 1713, Newton píše: „*Boh je jeden a ten istý boh vždy a všade. Všadeprítomný je nielen podľa akcidencie, ale aj podstatou, lebo akcidencia nemôže jestvovať bez podstaty. V ňom spočíva a pohybuje sa všetko, ale bez vzájomného pôsobenia. Boh nie je vystavený pôsobeniu pohybu telies a telesá nie sú vystavené odporu od božej všadeprítomnosti... Preto je tiež celý sebe podobný, celý je okom, celý je uchom, celý je mozgom, celý je ramenom, celý je schopnosťou vnímania, chápania a jednania, ale spôsobom ani trocha nie ľudským, spôsobom ani trocha nie telesným, spôsobom nám úplne neznámym.“* (Newton 2001, s. 353). Nás tu teraz nezaujíma priamy súvis medzi teológiou a Newtonovým chápaním priestoru ako *Sensorium Dei*, ale ide nám o posun, ktorý je skôr implicitný a prebieha paralelne so zmenou chápania nekonečna, náhody a neznámej. V prípade priestoru, v úplnej analógii s predošlými tromi prípadmi, dochádza v novovekej vede k matematizácii určitého regiónu, ktorý sa podľa antického pojatia matematizácii vymykal. Matematizácia pritom prináša opäť určité zúženie pojmu *kenón*, podobne ako v prípade *apeironu* či *tyché*. O priestore môžeme povedať, že je trojrozmerný, orientovateľný, súvislý a spojitý. Ťažko by sme však mohli podobné atribúty pripísať prázdnu.

1. 5 Kinesis – pohyb

Podobný posun, aký nastal medzi antickým a novovekým chápaním v oblasti nekonečna a náhody, nastal aj v prípade pohybu. Grécky pojem *kinesis* (κινησις), označujúci pohyb, je podstatne širší než náš moderný termín a zahŕňa vedľa priestorového premiestnenia predmetu aj rast, starnutie či zmenu farby. Preto je rozumnejšie prekladať ho ako „zmena“. Rovnako ako *apeiron* či *tyché*, aj *kinesis* sa podľa antického chápania vymykal matematizácii a Aristoteles jeho matematickú neuchopiteľnosť aj podrobne zdôvodnil. Matematická teória zmeny je pre antické myslenie absurdná asi tak, ako matematická teória neurčitého či matematická teória náhodného. Novoveká matematizácia pohybu u Galileiho má pritom mnohé črty analogické s matematizáciou nekonečna či náhody. Všeobecný antický pojem *kinesis* sa opäť rozdelil na dve časti, na užšiu, zahŕňajúcu iba zmenu miesta (tzv. miestny pohyb), a zvyšok. Galileo sa vo svojich *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze; attenenti alla mecanica i movimenti locali* venuje matematizácii práve tohto užšieho pojmu miestneho pohybu (*movimenti locali*), a tým zakladá novú vednú disciplínu – kinematiku.

2. MONOTEISTICKÁ TEOLÓGIA AKO ZDROJ POSUNU HRANÍC MATEMATIZÁCIE SVETA

V predošlej časti sme ukázali, že v matematike sa v priebehu 15. – 17. storočia sformovali tri nové disciplíny (algebra, teória pravdepodobnosti a kinematika) a došlo tiež k zásadnej zmene v chápaní nekonečna a priestoru. Tieto zmeny však neprebiehali úplne súčasne a väzby medzi nimi nie sú jednoznačné. Tesnejšie prepojenie existuje snáď len medzi vznikom kinematiky a zmenou chápania priestoru, kým napríklad zrod počtu pravdepodobnosti sa udial nezávisle od oboch týchto zmien. Preto netvrdíme, že tu existujú historické paralely, založené na vzájomnom ovplyvňovaní novovznikajúcich disciplín. Domnievame sa však, že keď trocha poodstúpime a uvedených päť zmien zasadíme do širšej epistemologickej perspektívy, možno tu predsa len nájsť viaceré spoločné črty.

V zásade ide o sprístupnenie piatich oblastí skutočnosti matematickému skúmaniu, pričom sú to oblasti, ktoré z hľadiska antického chápania s matematikou buď vôbec nesúvisia, alebo sa jej metódam vymykajú. Ich matematizácii bránili vážne konceptuálne zábrany. Navyše, z epistemologického hľadiska majú spomínané zmeny či preladenia viaceré spoločné črty. Prvou z nich je to, že antický pojem (*apeiron*, *tyché*, *kenón*, *kinesis*) bol omnoho širší ako moderný pojem (nekonečna, náhody, priestoru, pohybu), ktorý matematizuje novovek. Novovek striktne rozlišuje nekonečné od neurčitého, náhodu od osudu, prázdno od priestoru či pohyb od zmeny. Z antického pojmu sa teda vyčlenila určitá jeho časť, ktorá sa od zvyšku oddelila a po tomto oddelení došlo k jej matematizácii. Druhou spoločnou črtou spomínaných zmien je to, že aj keď takto vzniknuté zúžené pojmy (nekonečno, náhoda, priestor či pohyb) aj naďalej obsahujú istý stupeň neurčitosti, táto neurčitosť je podstatne slabšia, ako bola neurčitosť pôvodného antického pojmu. Keďže práve neostrosť a neurčitosť zvádzala Grékov k tomu, že regióny *apeironu*, *tyché*, *kenón* a *kinesis* vyhlásili za nematematizovateľné, spočívalo jadro úspechu modernej matematiky práve v tom, že našla spôsob, ako túto neostrosť po jej spomínanom oslabení definitívne prekonať.

Domnievame sa, že práve v prekonávaní neostrosti a neurčitosti spomínaných regiónov zohrala monoteistická teológia vďaka pojatiu Božej vševedúcnosti rozhodujúcu, i keď často len implicitne preukázateľnú úlohu. V prípade nekonečna je úloha teológie v preladení západnej kultúry vo vzťahu k tomuto pojmu jasne doložiteľná. Kým pre antické porozumenie bolo nekonečno negatívnym pojmom, súvisiacim s blúdením, pre stredovekého človeka sa cesta do nekonečna stala cestou k Bohu (pozri Vopěnka 1991 s. 19). Boh ako nekonečná bytosť je napriek svojej nekonečnosti celkom určitý, dokonalý, a preto jeho nekonečnosť nemá v sebe ani stopu negativity, ktorú v sebe skrýva antický pojem *apeironu*. Tým, že sa pojem nekonečna vztiahol na Boha, stratil svoju temnosť a neostrosť. Teológia pojem nekonečna presvetlila, čím tento pojem získal úplnú ostrosť a jednoznačnosť. Všetky nejasnosti a neurčitosti v poznávaní nekonečna boli pochopené ako dôsledok ľudskej konečnosti a nedokonalosti. Samotné nekonečno je úplne jasné a určité, a preto nič nebráni jeho matematizácii.

Podobne v prípade náhody Božia vševedúcnosť spôsobuje, že neurčitosť pojmu náhody stráca svoj ontický rozmer a redukuje sa na čisto epistemologickú negativitu. Boh vie, aké číslo padne pri ktoromkoľvek hode kockou, a len konečnosť ľudského poznania spôsobuje, že nám toto poznanie ostáva skryté. Preto náhodná udalosť je, aspoň pre Boha, jednoznačne určená, ostrá, a teda matematicky uchopiteľná. Celá neostrosť skrytá v tomto pojme má epistemologickú povahu a súvisí s ohraničenosťou ľudského poznania. Preto nie je náhoda, že idea úplnej determinovanosti prírody a klasická interpretácia pravdepodobnosti sa zrodili u toho istého učenca, u Pierra Simona de Laplacea. Sú to totiž iba dva aspekty tej istej skutočnosti – determinizmus je ontologická a pravdepodobnosť epistemologická stránka sveta. Svet je podľa Laplacea vo svojom bytí jednoznačne determinovaný, avšak človeku je v dôsledku jeho obmedzených schopností odkrytý iba v pravdepodobnostnom zmysle.

Rovnaké napätie medzi ontickou určenosťou (umožňujúcou aplikáciu aritmetických operácií) a epistemologickou neurčitosťou je aj v pojme neznámej v algebre. Neznáma je neznámou pre nás, konečné bytosti. Pre Boha žiadne neznáme neexistujú, lebo ten, akonáhle zahliadne zadanie algebraickej úlohy, hneď vidí aj hodnoty neznámych. Podobne ako v prípade počtu pravdepodobnosti,

aj v algebre sa teda *ontologická neurčitosť*, ktorá Grékom bránila v matematizácii tejto oblasti, mení na *neurčitosť epistemologickú*, prameniacu v ľudskej konečnosti. Epistemologická neurčitosť však už použiteľnosti matematiky na opis príslušného regiónu nebráni. Pritom premena neurčitosti z ontologickej na epistemologickú sa deje na pozadí teológie, v rámci ktorej je nositeľom bytia sveta Boh, v dôsledku čoho sa toto bytie stáva určitým a všetka neostrosť sa stáva neostrosťou prameniacou v ľudskej konečnosti.

Pri vzniku kinematiky ako matematickej teórie pohybu je situácia analogická. Pohyb je síce spojený s neustálou zmenou, s procesom neustáleho vznikania, ale vo svojom bytí je toto vznikanie jednoznačne determinované. To, že sa nám pohyb javí ako čosi neostré a nejasné, je iba dôsledkom neostrosti ľudského vnímania, ktoré nedokáže pohyb vidieť naraz celý, nahliadnuť všetky jeho okamihy súčasne. Boh, samozrejme, žiadne problémy v tomto smere mať nemôže.

V prípade priestoru sú teologické korene opisovaného preladenia opäť celkom explicitné. Ako ukazuje citát z Newtona, priestor je podľa neho *Sensorium Dei*, a teda jeho ostrosť a jednoznačnosť a s tým spojená matematizovateľnosť vyplýva priamo z Božej dokonalosti.

Videli sme, že uvedených päť zmien hranice matematizácie sveta má mnoho spoločných čŕt. Pre antického človeka vládla medzi ontológiou a epistemológiou jednota. Antický človek považoval svet za taký, ako sa mu javil[3]. Preto oblasti, ktoré vnímal ako neostré a neurčité, za také aj skutočne považoval. U novovekého človeka sa ontológia a epistemológia zásadne rozchádzajú. Svet je taký, ako ho vidí Boh, kým človeku je v poznaní daný svet iba neostro a jeho poznanie je falibilné. Práve tento rozpor medzi epistemológiou a ontológiou otvára priestor pre matematizáciu regiónov, ktoré sú človeku otvorené ako neostré a neurčité. Keď sa všetka neostrosť a neurčitosť pripíše na vrub človeka, t. j. vyloží sa epistemologicky, v ontologickej rovine sa otvára možnosť ich matematizácie.

To jasne ukazuje, že teológia mala na zrod novovekej matematiky podstatne zásadnejší vplyv, než ako sa väčšinou pripúšťa. Keď sa otázka vplyvu teológie na vývin matematiky vôbec diskutuje, redukuje sa na niekoľko zaujímavých epizód.[4] Podľa nášho názoru malo teologické pozadie pre vývin matematiky omnoho väčší význam, ako len ovplyvnenie zopár matematikov. Monoteistická teológia umožnila zásadné preladenie celkového epistemologického pozadia, a tým nepriamo aj zrod modernej matematiky s jej pojmami nekonečna, náhodnej udalosti, neznámej, priestoru a pohybu. Rozdiel, ktorý človek cíti keď porovnáva novovekú matematiku s antickou a ktorý by sa dal vyjadriť ako *prelomenie hraníc jednoznačne daného a otvorenie sveta matematiky smerom k javom nekonečna, náhody, priestoru a pohybu*, má teologické korene.[5]

Poznámky

1 – Antická geometria nemala pojem priamky, ale hovorila iba o rovnej čiare (ευθεια), ktorá mala konečnú dĺžku, dala sa však na každom konci podľa ľubovôle predĺžiť.

2 – V antickej matematike sa aritmetické veličiny reprezentovali spravidla geometricky, pomocou úsečiek, a aritmetické operácie mali potom podobu geometrických konštrukcií. Tak napríklad sčítanie predstavovalo priloženie jednej úsečky k druhej.

3 – To, samozrejme, nevylučuje existenciu vyššieho sveta, napríklad platónskeho sveta ideí, ktorý sa od bežného sveta líši, a to ako v ontologickej, tak aj v epistemologickej rovine.

4 – O niečo komplexnejší pohľad na uvedenú problematiku možno nájsť v knihách P. Vopěnku a P. Zlatoša, uvedených v zozname literatúry. Predkladanú stať možno chápať aj ako pokus nadviazať na ich analýzy. Domnievame sa, že keď vedľa otázok geometrie a teórie množín, ktoré diskutujú uvedení autori, postavíme podobný rozbor teórie pravdepodobnosti, algebry a kinematiky, jasnejšie vynikne jednotný charakter všetkých týchto zmien, a tak sa celkový ráz prechodu od antickej k novovekej matematike stane ľahšie pochopiteľným.

5 – Tento rozdiel nie je rozdielom v spôsobe transcendencie. V stati Dejiny náboženstva a matematika sme sa pokúsili charakterizovať rozdiel medzi egyptskou a gréckou matematikou ako rozdiel vo forme transcendencie, ako rozdiel v tom, čo matematik pri svojej práci hľadá. Rozdiely, ktoré opisujeme v predkladanej stati, sa spôsobu transcendencie netýkajú. Ako antická, tak aj novoveká matematika hľadajú striktne dokázanú pravdu. Preto z hľadiska transcendencie sú

identické, svet daného prekračujú rovnakým spôsobom. Rozdiel spočíva v tom, že novovekej matematike sa podarilo jasne a ostro (teda matematicky) uchopiť oblasti, ktoré by antického človeka ani nenapadlo matematizovať. Sme tu preto svedkami zmeny v odkrytosti sveta, svedkami prelomenia horizontu jeho matematizovateľnosti. Regióny sveta, ktoré antika považovala za matematizácii neprístupné, novovek našiel odvahu matematizovať. Základnou tézou predkladanej state je téza, že zmena odkrytosti sveta vo vzťahu k možnosti matematického opisu bola umožnená monoteistickou teológiou.

Novovek prináša aj zmenu formy transcendencie, ale tá nie je predmetom predkladanej state. Zmena spôsobu transcendencie v novoveku je spojená so zrodom experimentálnej vedy, teda s prechodom od matematického ideálu deduktívne zdôvodneného poznania k ideálu experimentálne verifikovateľného poznania, ktorý je regulatívnou ideou fyziky. Rekonštrukcii zrodu fyziky sme venovali sériu troch samostatných statí (Kvasz 2000, 2001 a 2003) a otázku vplyvu náboženstva na tento proces sme stručne načrtli v stati *Dejiny náboženstva a matematika*.

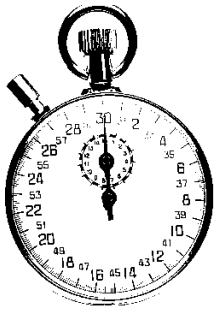
Literatúra:

[1] Kvasz, L. (1997): Dejiny náboženstva a matematika. Hieron II. / 1997, s. 115-129.
[2] Kvasz, L. (2000): Galileovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. Filosofický časopis, 2000/3, s. 373-399.
[3] Kvasz, L. (2001): Descartovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. Filosofický časopis, 2001/2, s. 213-240.
[4] Kvasz, L. (2003): Newtonovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. Zaslané do Filosofického časopisu.
[5] Newton, I. (2001): Matematické základy prírodnej filozofie, vybrané partie 3. vydania z r. 1726. Preložil M. Žabka. Filozofia Vol. 56, s. 341-354.
[6] Vopěnka, P. (1991): Druhé rozpravy s geometrií. Práh, Praha.
[7] Zlatoš, P. (1995): Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Iris, Bratislava.

e-mail: ladislav.kvasz@fmph.uniba.sk

AKO ODHADNÚŤ ČAS PODĽA HVIEZD?

Ivan Masaryk, Nadácia Ingenium, Bratislava

Úvod		jablko, predstava, spolupatričnosť
Slnečná sústava		ťažisko, Slnko, Mesiac, Zem
Krátkodobý odhad		princíp, príklady
Všeobecný odhad		vzorec

Prednášanie sa začína vonku: (pomôcky netreba zatiaľ žiadne)

Postavme sa do kruhu a pochytajme sa za ruky. Poprosím vás, aby ste si všetci zatvorili oči! Výborne. Všetci máme zatvorené oči a teraz si skúste si predstaviť JABLKO. Vaše jablko by už malo mať TVAR, vaše jablko by už malo mať aj FARBU a VEĽKOSŤ. Vaše jablko by malo mať aj CHUŤ, VÔŇU a tiež TVRDOSŤ. Môžete mať teda vaše jablko SYPKÉ, alebo ŠŤAVNATÉ. Vaše jablko by malo byť predovšetkým KRÁSNE. Ak už také je, máte výhodu a nemusíte na ňom nič meniť.

Skúste vaše jablko PRIBLÍŽIŤ a teraz VZDIALIŤ. Pokúste sa jablko ZVÄČŠIŤ a teraz ZMENŠIŤ. Vidíte v tom nejaký rozdiel? Predstavujete si vaše jablko DVOJROZMERNE alebo TROJROZMERNE? Má vaše jablko ZADNÚ STRANU? Pokúste sa vaše jablko rozkrojiť na polovicu. Počujete ten zvuk, cítite vôňu? Výborne, tak teraz môžete jablko opäť zaceliť.

Predstavte si vaše jablko normálne PRED sebou. Teraz si ho predstavte NAD sebou, VPRAVO, VĽAVO, PRED sebou, ZA sebou a znovu PRED sebou. Má vaše jablko stopku? Ak nemá, tak mu ju dorobte. Máte teda pred sebou jablko so stopkou. Chyťte ho pravou rukou za stopku a mierne ho nakloňte doprava. Výborne, výborne, výborne. Pravou rukou stále držíte mierne naklonené jablko a teraz skúste ľavou rukou pomaly roztočiť jablko smerom k sebe. Zoberiete ľavý bod jablka a idete s ním k sebe, doprava, dozadu a doľava. Pustite jablko oboma rukami, ale nechajte ho vznášať sa v priestore a nechajte ho aj točiť sa.

Akej farby je vaše jablko? Skúste mu zmeniť farbu. Predstavte si ŽLTÉ, naklonené, točiace sa jablko, ZELENÉ, ČERVENÉ, STRAKATÉ a teraz MODRÉ. Ak sa vám to podarilo, (aj keď nie) môžete zmeniť tvar jablka na guľu. Tí z vás, ktorí si myslia, že je to teraz model zemegule myslia správne.

Môžete OTVORIŤ OČI.

Existuje domnienka, že už dávno pred Koperníkom a Brunom za čias starovekého Grécka nejaký roľník prišiel na to, že sa netočí Slnko okolo Zeme, ale Zem okolo Slnka. Zamyslime sa podobne ako on. Zaujímať nás bude najmä trojuholník Slnko, Mesiac, Zem. Uvedomte si, že keď je spln, znamená to, že uhol Slnko, Mesiac, Zem je veľmi malý. Naopak ak je bezmesačná noc, teda nov, uhol Slnko, Mesiac, Zem je takmer 180°. Nás však zaujíma prípad, keď je osvetlená práve polovica mesiaca. Aký veľký je uhol Slnko, Mesiac, Zem v tomto prípade? (čakám odpoveď 90°) Ak nie je všetkým jasné, prečo 90°, vytvorím model, najlepšie z nejakých ľudí. Výborne. Máme teda pravouhlý trojuholník Slnko, Mesiac, Zem, s pravým uhlom pri vrchole Mesiac. Je veľmi zaujímavé, že niekedy vidno na oblohe zo Zeme tak Mesiac ako i Slnko. (znázorníme na modely) Spomínaný roľník si to pravdaže všimol a dokonca sa mu podarilo tento uhol aj zmerať. Hádajte, aký uhol nameral v trojuholníku Slnko, Zem, Mesiac (SZM) pri vrchole Zem? (očakávam odpoveď 90°, respektíve takmer 90° napríklad 89°). Skúste si v mysli nakresliť trojuholník, ktorý bude mať uhly (90°, 89°, 1°). Tvrdenie je potom jednoduché:

Ak sa zo Zeme javia Slnko i Mesiac ako rovnako veľké kotúče, ale sú vrcholmi veľmi natiahnutého trojuholníka, tak Potom musí byť Slnko strašne obrovské v porovnaní s Mesiacom. Veľkosť Zeme a Mesiaca je však rádovo rovnaká a preto je Slnko oveľa, oveľa väčšie ako Zem. Ďalšia úvaha roľníka hovorí, že by bolo potom dosť čudné, keby taká malá Zem bola stredom vesmíru, a také veľké Slnko obiehalo okolo nej. Skôr to bude naopak, teda Slnko bude v strede a Zem bude obiehať okolo neho.

Dnes už vieme, že to tiež nie je úplná pravda. Ak chceme uvažovať v inerciálnej vzťažnej sústave (tam platí $F = m*a$), tak v sústave (Slnko, Zem) sa točí Zem okolo spoločného ťažiska a tiež i Slnko sa točí okolo spoločného ťažiska Slnka a Zeme. Heliocentrický model je pre predstavu priateľnejší, lebo ťažisko Zeme a Slnka je aj tak tesne pri Slnku, či dokonca priamo v Slnku. (samozrejme, že nie v strede) Nasleduje demonštrácia a následné vytočenie bývalého triedneho, pána Jodasa.

Našou úlohou teraz bude vytvoriť spoločný čo najvernejší model slnečnej sústavy (Slnko, Zem Mesiac) a preto sa snažte spomenúť si na čo najviac faktov, ktoré o tom poznáte a potom sa ich budeme snažiť zapracovať. Dúfam, že ste ešte nezabudli na našu Zem – Jablko. Očakávam, že deň má 24 hodín, mesiac má 28 dní, rok má 365 dní. Mesiac vidno zo Zeme vždy z rovnakej strany. Zemská os je vychýlená, teda nie je kolmá na priamku Slnko Zem. Zem obieha okolo Slnka po elipse. Zem je bližšie pri Slnku v zime ako v lete. Po splne vidno C po nove D z Mesiaca. Zem sa točí zo západu na východ. Vzdialenosť Zem – Slnko je asi 500 svetelných sekúnd a vzdialenosť Zem – Mesiac je asi jedna svetelná sekunda. (Vytvoríme ľudský model, buď spoločný alebo v trojiciach.) Mesiac sme doteraz používali ako dekoratívny doplnok a čo sa týka odhadu času podľa hviezd, nehrá v ňom žiadnu rolu. Dúfam, že mu to nebudete zazlievať. Teraz môžeme na Mesiac úplne zabudnúť. Vráťme sa teda k nášmu modrému jablku, k našej Zemi.

Zem sa neustále točí okolo svojej vlastnej osi a jej os ukazuje stále na Severku, Polárku alebo večernicu. Očakávam opravu, že večernica je Venuša a nie Severka. V modeli použijeme namiesto Severky vzdialený vrchol kopca alebo vrchol vysokého stromu. Zemská os je napríklad ruka ukazujúca na Severku. Treba si uvedomiť, ktorým smerom sa točí obloha a na nej i všetky hviezdy. Na severnej pologuli je pohyb oblohy proti smeru hodinových ručičiek. Na južnej pologuli je pohyb oblohy v smere hodinových ručičiek. Ďalšie úvahy budeme robiť už len na severnej pologuli. Ak zatiaľ neuvažujeme pohyb Zeme okolo Slnka, tak o jeden deň bude vyzerať hviezdna obloha úplne rovnako. Teda za 24 pozemských hodín sa hviezdy otočia o 360° a teda o 12 hviezdnych hodín. Ak sa teda hviezdy posunú o 2 hviezdne hodiny, znamená to, že v skutočnosti prešli hodiny 4.

Prednáška pokračuje vnútri: (ako pomôcky doporučujem pero a papier)

Čo sú to vlastne hviezdne hodiny a ako sa pomocou nich odhaduje čas? Máme veľké šťastie, že máme jasné súhvezdie Veľkého voza, ktorého dve posledné hviezdy smerujú na Severku. Tieto dve hviezdy z Veľkého voza tvoria malú ručičku hviezdnych hodín a Severka je prirodzene stredom hviezdnych hodín. Ak sa hviezdne hodiny posunú o jednu hodinu, v skutočnosti prešli hodiny dve. Ak bolo na hviezdnych hodinách 1.7.2003 o 23:00 hod. hodín deväť, tak o polnoci bude koľko hodín? (pól deviatej) Koľko hodín bude na hviezdnych hodinách o piatej ráno? (šesť) A naopak koľko bude hodín, ak na hviezdnej oblohe bude sedem? (3:00)

Pre krátkodobé odhady teda môžeme písať, že:

Čas = (Konštanta(1.7.) – 2*Hviezdny čas) mod 24
23 = (Konštanta(1.7.) – 2*9) mod 24
1.7.2003 o 23:00 bolo 9:00 – hviezdneho času
41 = Konštanta(1.7.) Potom platí pre ďalšie príklady
0 = (41 – 2*8,5) mod 24
5 = (41 – 2*6) mod 24
3 = (41 – 2*7) mod 24

Ak uvažujeme aj obiehanie Zeme okolo Slnka musíme si uvedomiť, že ak bolo 1.7.2003 na hviezdnych hodinách o 23:00 (Čas) deväť (Hviezdny čas) tak 1.1.2004 budú o 23:00 (Čas) tri (Hviezdny čas), lebo za deň nerátame otočku o 360°, ale od poludnia do poludnia teda (360+1/360)° inak by bolo povedzme v lete o 12:00 poludnie – deň a v zime o 12:00 by bola polnoc – noc. Keďže takýto fenomén nepozorujeme, platí zrejme tvrdenie predchádzajúce.

Každý deň sa teda pohne obloha o 1/360°. Z pozorovania sa zistilo, že počas roka sa obloha na severnej pologuli posúva takisto proti smeru hodinových ručičiek (pozerajúc zo Zeme na Severku). Ak teda poznáme Konštantu(1.7.) ľahko vypočítame Konštantu(1.1.) i iné Konštanty.

Platí napríklad, že:

Konštanta(1.1.)	=	Konštanta(1.7.) – 12 +24	=	53
Konštanta(1.8.)	=	Konštanta(1.7.) – 2	=	39
Konštanta(1.4.)	=	Konštanta(1.7.) – 18 +24	=	47

Každých 30 dní sa hviezdny čas zmenší o 2 hodiny a preto na o 1 deň sa zmenší konštanta o 1/15 čo je 2*(1/30).

Ak má potom niekto potrebu zovšeobecniť konštantu, tak ak **pd** si označíme poradie dňa v roku, **d** deň v mesiaci, **m** mesiac, **hč** hviezdny čas, tak

Čas	=	Konštanta	–	2*(hč + pd / 30)
Čas	=	Konštanta	–	2*(hč + {30 * (m – 1) + d} / 30)
Čas	=	Konštanta	–	2*(hč + m – 1 + d / 30)

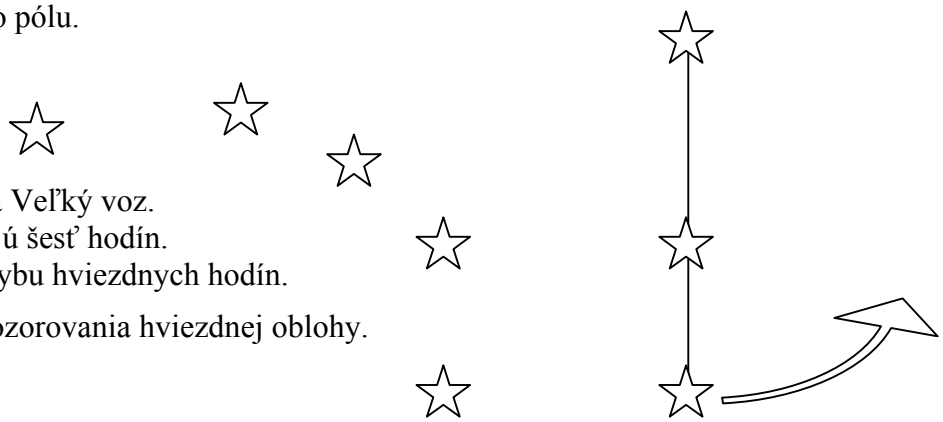
Túto všeobecnú Konštantu dopočítame z ľubovolného pozorovania. Podľa presnosti pozorovania potom budú vychádzať aj odhady času. 1.7.2003 som pozoroval, nie úplne presne, na hviezdnej oblohe 9 hodín. Moja Konštanta teda bude:

Čas	=	Konštanta	–	2*(hč + m – 1 + d / 30)
23	=	Konštanta	–	2*(9 + 7 – 1 + 1 / 30)
Konštanta	=	53,03		

Nesmieme však zabudnúť, že v lete máme SELČ (stredoeurópsky letný čas) a v zime SEČ. Tu platí jednoduchý vzťah SEČ = SELČ – 1

Zimná Konštanta = 52,03

Mohlo by sa zdať, že vzorec pre odhad času sa bude meniť aj zo zemepisnou šírkou, či dĺžkou. A naozaj to tak aj je. Ak budeme na druhej strane severnej pologule, tak na hviezdnych hodinách neuvidíme 3 hodiny ale 9 hodín, čo spôsobí posun o 12 hodín. Na Zemi však máme časové pásma a preto nám zemepisná dĺžka nespraví väčšiu odchýlku v odhade času ako 1 hodinu. Čo sa týka zemepisnej šírky, tá takmer nevplýva na odhad, aj keď isté nepresnosti spôsobuje, hlavne v okolí severného magnetického pólu.



Na obrázku je Severka a Veľký voz.
Hviezdne hodiny ukazujú šesť hodín.
Šípka ukazuje smer pohybu hviezdnych hodín.

Prajem vám príjemné pozorovania hviezdnej oblohy.

e-mail: masaryk@ingenium.sk

PREČO SA BOJÍME CHYBY? (PRÍPRAVA DIELNE)

Anna Michalcová, Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Errare humanum est.
Mýliť sa je ľudské.

Úvod

Chybu pociťujeme ako jav nežiadúci. V bežnom živote, ale najmä v škole. Snažíme sa chybám vyvarovať, a keď sa objavia, rýchlo ich korigovať. To sa vzťahuje ako na žiakov, tak aj na nás, učiteľov. Na druhej strane ale vieme, že bez chýb by skutočný pokrok vôbec neexistoval. Keď sa batoľa učí chodiť, nutne musí padať. Dokonca možno povedať, že čím častejšie padá, tým skôr začne chodiť. Popísaná disharmónia – bojíme sa toho, čo nám pomáha napredovať, je predmetom našich ďalších úvah.

Výskum, ktorého výsledky v ďalšom uvádzam, sa rozbehol na jar v roku 2000, ale základné myšlienky, ktorými bol výskum orientovaný a ktoré pochádzajú od Víta Hejného, sú ďaleko staršie, niektoré z roku 1943. Po prvý raz som súhrnne o tejto problematike prednášala vo februári 2002 na Pedagogickej fakulte v Prahe (Michalcová, 2002).

Impulz k výskumu, ktorý popíšeme, vzišiel z jednej skutočnej príhody. Udiala sa v mojej triede. Výskum prebiehal potom i v iných triedach na Slovensku, v Čechách a v Poľsku. Metodiku výskumu rozpracoval M. Hejný s podporou výskumného zámeru VZ J13/98/114100004 a grantu GAČR 406/02/0829. V rámci týchto grantových projektov boli na Pedagogickej fakulte v Prahe uskutočnené i ďalšie tematicky blízke výskumy (pozri literatúru). Súčasťou výskumu boli aj semináre a dielne uskutočnené s učiteľmi.

Zámer článku

Spoločnosť, ktorá sa pravidelne stretáva na letnej škole Pytagoras, predstavuje veľký potenciál ako v oblasti intelektuálnej sily, tak v oblasti pedagogických skúseností. Je preto pochopiteľné, že v tomto prostredí je možné pre daný výskum získať ďalšie podnety a informácie. Rada by som v roku 2004 pripravila dielňu, ktorej cieľom by bolo mobilizovať existujúce skúsenosti kolegov, získať cenný príkladový materiál a inšpiračné impulzy. Verím, že aspoň niektorí kolegovia si nájdu čas nazrieť do tohoto článku a prísť na stretnutie Pytagoras v roku 2004 s peknými príbehmi a nápadmi.

Vstupný príbeh

Na jar roku 2000 som v 1. ročníku nášho štvorročného gymnázia riešila tento didaktický problém. Matematicky šikovný chlapec Miro, ktorého reakcie v triednych diskusiách boli pohotové a presné, sústavne robil v písomkách mnoho chýb. Sám bol z toho nešťastný. Hľadala som spôsob, ako mu pomôcť. V tej dobe sme s M. Hejným pracovali na knižke Hejný, Michalcová, (2001), tak som ho požiadala o radu. Problém nás oboch značne zaujal a prof. Hejný pripravil projekt výskumu, zameraného na fenomén „chyba“, pričom prvé otázky, na ktoré sme hľadali odpoveď, sa týkali vnímania chyby žiaka či učiteľa žiakmi či učiteľmi. Jednalo sa o pokračovanie výskumu, ktorý už v šesťdesiatych rokoch zahájil Vít Hejný.

Začiatky výskumu

Moja spolupráca na výskume začala v jeseni roku 2000, keď som viedla dvojdňový seminár MC Banská Bystrica najprv vo Zvolene, potom v Žiline. Na seminároch sa zúčastnilo asi tridsať učiteľov matematiky stredných a základných škôl. Účastníci boli požiadaní, aby si so sebou priniesli niekoľko písomiek vlastných žiakov s tým, že žiacke práce budú predmetom spoločných analýz. Ukázalo sa, že pojmu analyzovať chybu žiaka učitelia rozumejú v zmysle – poukázať na chybu a navrhnúť, ako žiakovi vysvetliť správny postup. Len veľmi pomaly prijímali učitelia našu výzvu hľadať príčiny žiakovho chybného myšlienkového postupu. Bolo potešiteľné evidovať, že skoro

všetci účastníci prijali tézu o didaktickej závažnosti skúmania žiackych chýb, ale len malý počet z nich bol schopný už v priebehu seminára takúto analýzu samostatne uskutočňovať.

Začiatkom septembra 2001 som urobila prvý experiment so žiakmi 1. ročníka štvorročného gymnázia. Žiaci písomne formulovali svoje názory na chybu, ktorej sa dopustí žiak alebo učiteľ, aj na chybu človeka vo všeobecnosti. Z analýzy žiackych odpovedí vyplynulo viacero zaujímavých skutočností, medzi nimi dve, ktoré tu uvediem: za najzávažnejšiu chybu učiteľa považujú žiaci to, keď zosmiešňuje žiakov, keď ich ironizuje. Školskú chybu sú žiaci skôr ochotní tolerovať učiteľovi, ako sebe alebo spolužiakovi. O výsledkoch analýz som informovala žiakov týždeň po tom, čo dotazník písali. Zdôraznila som, že ani trestanie, ani zhovievavé odpúšťanie nepovažujem za najlepšiu reakciu na chybu. Podľa nášho názoru najlepšia reakcia na chybu je jej analýza s cieľom získať z chyby poučenie (bližšie o troch uvedených prístupoch k chybe pozri Hejný, 2001a).

Na konci novembra 2001 a začiatkom februára 2002 som viedla dielne pre učiteľov.

Príprava seminára 28. 11. 2001

V pozvánke na seminár dostali účastníci dva podnety k zamysleniu:

1. zoznam didaktických chýb, ktorý vytvorili poľskí učitelia (pozri Domoradzki, Hejný, 2002)
2. nasledujúce tri výzvy:
   - Pozrite si zoznam chýb, ktoré vo svojej práci našli poľskí učitelia – elementaristi. Rozmyslite si, ktoré z týchto chýb považujete za najzávažnejšie, ktoré za podružné a prečo.
   - Zamyslite sa nad vlastnými chybami a hľadajte medzi nimi takú, ktorá v poľskom zozname nie je.
   - Napíšte stručný príbeh, v ktorom vyrozprávate skúsenosť s chybou učiteľa. Môže to byť príbeh, v ktorom Vy vystupujete v roli učiteľa, či v roli žiaka alebo iba v roli pozorovateľa.

Zoznam chýb od poľských učiteľov

Poľský výskumník Dr. S. Domoradzki (Univerzita Rzesów) urobil anonymný prieskum medzi učiteľmi prvého stupňa, týkajúci sa toho, ako oni sami vnímajú vlastné metodické chyby. Výsledkom jeho bádania je rozsiahly zoznam, z ktorého vyberáme nasledovné položky:

1) Som urečnená.
2) Moralizujem (nabádam žiakov k intenzívnejšej práci).
3) Kladiem si rečnícke otázky, na ktoré sám odpovedám.
4) Na opakovacích hodinách sa málo pýtam.
5) Príliš rýchlo vysvetľujem (inštruujem).
6) Odpovedám za žiaka.
7) Skáčem žiakovi do reči.
8) Som netrpezlivá, keď žiak nešikovne rysuje na tabuľu; radšej rysujem sama.
9) Nemám dosť trpezlivosti so slabými žiakmi.
10) Otázky detí typu „mám písať do zošita?, farebne?, podtrhávať?…" ma rozčuľujú (4. trieda).
11) Rýchlosť výkladu určujem podľa dobrých žiakov. Neskoro zistím, že slabí žiaci nechápu a potom opakujem výklad.
12) Príliš veľa času venujem slabým žiakom.
13) Nevšímam si úroveň slabých žiakov.
14) Mám výčitky svedomia, že nechám slabých žiakov prejsť.
15) Nedôsledná kontrola žiakov.
16) Som zhovievavá k dobrým žiakom, mnoho im toho prepáčim.
17) Pri kontrole domácej úlohy si nevšímam, čo žiak napísal.
18) Som príliš zhovievavá, nedávam päťky, bojím sa pýtať slabých žiakov.
19) Pôsobí na mňa počasie. Pri vysokom tlaku prácu urýchľujem, pri nízkom spomaľujem.

Priebeh prvej časti seminára 28. 11. 2001

Celodenného seminára v Banskej Bystrici sa zúčastnilo 11 učiteľov stredných a základných škôl. V prvej časti som viacej rozprávala ja o rôznych názoroch na jav chyby, či už v bežnom živote alebo v škole. V druhej časti prešla aktivita na účastníkov.

Všeobecné názory rôznych autorít, najmä tri základné prístupy k chybe – starozákonný, novozákonný, anticko-judaistický som ilustrovala na troch príbehoch. Príbeh Dano je prevzatý z (Hejný, Michalcová, 2001, str. 29). Príbehy Oldřich a Patrik sú prevzaté z (Hejný, Kuřina, 2001).

Príbeh Oldřich. Zítra bude Oldřich psát rozhodující písemku. Napíše-li ji aspoň na dvojku, bude mít na vysvědčení samé jedničky. Napíše-li ji hůře, bude mít na vysvědčení z matematiky dvojku a rodiče mu nekoupí horské kolo, po kterém velice touží. Celý den sedí Olda nad učením, ale nemůže se soustředit. Myšlenky mu těkají, má strach. V noci má těžké sny a ráno se cítí nemocen. Má teplotu 38,1° C. Zůstane doma, písemku psát nebude. Ví, že kolo nedostane, ale to je mu už jedno. Hlavně, že odezněl strach z neúspěchu.

Môj komentár (podľa citovanej literatúry). Osudovosť situácie pripomína osudovú klímu hriechu zo Starého zákona. To nie je dané písomkou, ale ostro postavenými okolnosťami, ktoré tvoria prísny a „spravodlivý" učiteľ a perfekcionalistická rodina – tá najmä. Pôvodný Oldřichov cieľ – získať bicykel – bol v dôsledku tlaku osudovosti nahradený cieľom vyhnúť sa stresovej situácii, nadobudnúť opäť duševnú rovnováhu.

Príbeh Dano. Prvák Dano na otázku pani učiteľky „Koľko je šesť a sedem?" po krátkom váhaní povedal „pätnásť". Učiteľka káravo povedala: „Dano, Dano, už by si sa to mal naučiť! Pozri na Dianu. Tá to už pred mesiacom vedela, ako keď bičom plieska. A ty?" Dano stál so sklonenou hlavou. Povedal: „Keď ja to bez prstov neviem," a rozplakal sa. Učiteľka ho povzbudzovala: „Si šikovný chlapec, keď budeš chcieť, naučíš sa to."

Diskusia. Druhý príbeh som už neanalyzovala a vyzvala som účastníkov, aby sa pokúsili charakterizovať reakciu učiteľky na Danovu chybu a navrhnúť prípadné lepšie pokračovanie. Počínanie učiteľky jednoznačne charakterizovali ako novozákonné – chlapca pokarhala, a potom mu odpustila. Zhodli sa aj v tom, že učiteľka nemala chlapca karhať, ale vyzvať ho, aby na počítadle výpočet preveril. Zákaz počítania na prstoch všetci považovali za vážnu didaktickú chybu učiteľky. Toto spontánne stanovisko ma potešilo a spôsobilo, že som sa sama dopustila didaktickej chyby. Nevyužila som možnosť opýtať sa na následky chybného prístupu učiteľky a sama som túto myšlienku povedala: učiteľka násilne narušuje prirodzený kognitívny vývoj chlapca, nedovoľuje mu budovať aritmetické predstavy a núti ho nahradiť ich pamäťovým záznamom – vedie ho k formálnemu poznávaniu. Nevyužila som ani šancu opýtať sa na príčiny, ktoré vedú učiteľku k tomuto chybnému didaktickému prístupu. Náš názor na túto situáciu je uvedený v (Hejný, Michalcová, 2001, str. 29, 30) a v (Hejný, Kuřina, 2001, str. 95, 117, 118).

Příbeh Patrik. Při hledání součtu šesti čísel 4, 12, 15, 3, 1, 7, napsaných na tabuli všichni žáci druhé třídy přičítali postupně čísla zleva doprava: 16, 31, 34, 35, 42. Patrik počítání přerušil vykřikem, že je to 45. Na dotaz učitelky ukázal, jak to počítal: sečetl 15 + 4 + 1 = 20, pak 12 + 3 = 15, dohromady 35, dále 3 + 7 …. Teď se zarazil. Objevil, že číslo 3 počítal dvakrát. Chviličku mlčel, pak řekl *to je špatně*. Učitelka přesto hocha pochválila a řekla, že *šikovné počítání „na přeskáčku" může urychlit práci. Jen je nutno dát pozor, abychom počítali každé číslo a žádne nepočítali dvakrát. Můžeme si například počítaná čísla zaškrtávat*. Pak požádala hocha, aby našel součet pomocí své metody na tabuli ještě jednou. Patrik to rychle udělal.

Diskusia. Vyzvala som kolegov, aby posúdili konanie učiteľky. V tomto prípade bolo hodnotenie učiteľky účastníkmi veľmi pozitívne. Niekoľko minútovú diskusiu možno sumarizovať do štyroch téz:

1. Učiteľka správne oddelila nápaditý Patrikov objav a jeho chybnú realizáciu.
2. Správne hierarchicky nadradila objav nad chybou.
3. K chybe pristúpila v duchu anticko-židovskom, analyzovala jej príčiny a poradila chlapcovi, ako sa chybe v budúcnosti vyhnúť.
4. Povzbudila do budúcnosti ostatných žiakov, aby sa nebáli svoj objav ukázať.

Priebeh druhej časti seminára 28. 11. 2001

Cieľom druhej časti seminára, dielne, bolo mapovanie a hierarchizácia didaktických chýb učiteľov. Bolo možné hneď začať s analýzou chýb z poľského zoznamu, ale obávala som sa, že prílišná všeobecnosť takej práce by nebola dobrým začiatkom dielne. Preto som zvolila trochu iný prístup. Rozdala som účastníkom Príbeh Albert a požiadala som ich, aby sa pokúsili vypísať didaktické chyby, ktorých sa učiteľka Astrová dopustila a aby tieto analyzovali. Rovnaký postup urobíme aj na našej dielni v roku 2004. Príbeh prevzatý z knižky (Hejný, Kuřina, 2001, str. 21-26) dostanú všetci účastníci.

Učitelia vytvorili nasledujúci zoznam chýb:

- Chýbala pochvala za rýchlosť a správnosť.
- Skákanie do reči žiakovi.
- Vnucovanie vlastného názoru.
- Nevhodné napomínanie.
- Žiak v roli zapisovateľa, nie riešiteľa.
- Odpovedá si sama.
- Nezaujíma sa o názor triedy.
- Nepripustí názor žiakov.
- Odmena slepej poslušnosti.
- Zaškatuľkovanie žiaka.
- Nepriznanie si vlastnej chyby.
- Znevážení žiaka.
- Direktívnosť.
- Kladie dôraz na maličkosti.
- Hodnotenie v mene celej triedy.

Po dlhšej diskusii, v ktorej porovnávali mieru závažnosti jednotlivých chýb, účastníci seminára spoločne sformulovali dve najdominantnejšie chyby učiteľky Astrovej:

- Nezáleží jej na deťoch.
- Znevažuje prácu detí.

Výzva porovnať náš zoznam s poľským zoznamom chýb, nenašla u účastníkov odozvu. Chyby, ktoré nachádzali v poľskom zozname považovali za podružné. Radšej zvolili formu skupinovej práce a snažili sa vytvoriť zoznam najzávažnejších učiteľských chýb a tieto prepojiť na príslušné spoločenské, kultúrne, mravné hodnoty a edukačné ciele.

Výsledok skupinovej práce bol sumarizovaný na tabuli nasledujúcim zoznamom:

- Znevažovanie žiakov.
- Direktívnosť postupov.
- Neumožnenie vyjadrenia.
- Zaškatuľkovanie.
- Absencia pochvál.
- Nepriznanie vlastnej chyby.
- Sústavné moralizovanie.
- Výklad bez spätnej väzby.
- „Neodbornosť“ – je chyba?
- Nedostatočná príprava – flákač.

Posledné dve položky tohto zoznamu sa ukázali ako diskutabilné, niektorí kolegovia považovali ich zaradenie do tohto zoznamu za nepatričné. Vraveli, že ich charakter sa od predchádzajúcich ôsmich položiek dosť značne odlišuje.

O hodnotách a edukačných cieľoch, prepojených na jednotlivé chyby horného zoznamu sa v podstate nediskutovalo. Účastníkom nebolo jasné, o akú analýzu ich žiadam a ja som sa rozhodla

odsunúť tento vážny bod našej práce na februárový seminár. Diskusia o chybách uvedeného zoznamu mala všeobecnejší charakter, ale viedla k zaujímavým záverom:

- Všeobecne popísaná chyba je veľmi vágna. Treba poznať okolnosti, vek žiaka, aj osobnú charakteristiku účastníkov interakcie.
- Takéto diskusie sú pre učiteľa podnetné a potrebné. Žiaľ, podobným diskusiám sa často vyhýbajú práve tí učitelia, pre ktorých by účasť na podobnom seminári mohla priniesť najväčší osoh.

Jeden z účastníkov v záverečnom hodnotení uviedol:
„Nielenže si priznať chybu, poďakovať sa za upozornenie, ale ju aj analyzovať (čo bolo pre mňa novinka) pred žiakmi.“ Tento kolega aj v závere seminára výstižne sumarizoval pocit nás všetkých, keď povedal, že hlavným edukačným cieľom učiteľa má byť nezištná láska a šťastie detí.

Záver

Uvedené myšlienky a názory kolegov – učiteľov budú východiskom našich úvah. Závažný problém, ktorý sme v popísanej dielni vôbec neriešili, je vývoj, ktorým prechádza vnímanie chyby vo vedomí nášho žiaka od prvej triedy až po absolvovanie vysokej školy.

Literatúra:

[1] Domoradzki, S., Hejný, M. (2002): Chyba v interakcii učiteľ - žiak. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 3/2002 (31), s. 1-13.

[2] Hejný, M., Kuřina, F. (2001): Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha, Portál.

[3] Hejný, M., Michalcová, A. (2001): Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Bratislava, MC Tomášikova 4, Bratislava.

[4] Hejný, M. (2001a): Chyba jako pedagogický fenomén. In: Dítě, škola, učitel, Sborník k životnímu jubileu prof. PhDr. Zdeňka Heluse, DrSc. Eds: Z. Hadj Moussová, S. Štech, Univerzita Karlova, Praha 2001.

[5] Hejný, M. (2001b): Chybo, budiž vítána. In: eds: M. Hejný, D. Hrubý, H. Lišková, N. Stehlíková, V. Sýkora: Sborník konference Jak učit matematice žáky ve věku 10-15 let, JSMF, Litomyšl, s. 30-42.

[6] Kratochvilová J., Swoboda E., (2002): Analiza interakcji zachodzących podczas badań z dydaktyki matematyki, Dydaktyka Mateamtyki 24, s 7-39.

[7] Michalcová, A. (2002): Ako my učitelia vnímame chybu vlastnú i chybu žiaka. In: Sborník ze semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2002. Eds: D. Jirotková, N. Stehlíková, Univerzita Karlova, Praha, s. 14-21.

e-mail: michalc@golem.gymzv.sk

PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ A VYUČOVANIE

Eva Pavelová, KDG Svf TU, Košice

Hybnou silou matematickej tvorivosti nie je usudzovanie, ale predstavivosť.
A. de Morgan

Geometria je akýmsi koníčkom, ktorého nám dala príroda,
aby nás potešoval a zabával v temnotách.
d´Alembert

Úvod

Medzi najťažšie úlohy, ktoré sa precvičujú na cvičeniach DG, patria úlohy o rezoch a prienikoch telies. Študent k úspešnému riešeniu takejto úlohy potrebuje okrem iných aj:

1. vedomosti o telesách
2. vedomosti o vzájomných polohových vlastnostiach priamok a rovín
3. poznatky o princípoch premietania
4. priestorovú predstavivosť na dostatočnej úrovni

Ukazuje sa, že vedomosti študentov z geometrie sú z roka na rok slabšie a formálnejšie. Predpokladáme, že nedostatky študentov môžu spôsobovať mnohé faktory, napr.:

1. zníženie počtu vyučovacích hodín venovaných stereometrii na ZŠ a SŠ
2. na SŠ sa znížilo alebo úplne vylúčilo vyučovanie deskriptívnej geometrie
3. učitelia matematiky nemajú kladný vzťah ku geometrii a úlohám zo stereometrie
4. študenti získavajú formálne vedomosti

Študenti sa počas semestra naučia riešiť dané úlohy, no v mnohých prípadoch opäť len formálne. Preto je potrebné predísť tomuto stavu. Na ZŠ používať vo väčšej miere modely telies, nechať žiakom čas na pochopenie daného učiva, rozvíjať priestorovú predstavivosť a vhodnou motiváciou ukázať, kde sa využijú vedomostí z geometrie v praktickom živote.

Priestorová predstavivosť

Priestorová predstavivosť je zavedená v mnohých publikáciách a vedeckých prácach rôznymi spôsobmi. V psychologickej literatúre je popisovaná ako súčasť inteligencie (priestorová inteligencia). **Schopnosť vytvoriť si predstavu o priestorovom usporiadaní sveta/objektov a pracovať, tvoriť využívajúc túto predstavu je priestorová predstavivosť** (Atkinson, R.L.et al: Psychologie. Victoria Publishing, Praha 1995). Každú schopnosť je možné rozvíjať a zdokonaľovať. Učitelia, zadávaním vhodných úloh, pomáhajú žiakom a študentom dosiahnuť jej vyššiu úroveň. Je tiež dôležité zadávať úlohy, ktoré sú primerané veku a správne motivovať žiakov. My sme sa pokúsili úlohami nadviazať na praktickú skúsenosť detí, ktorú získali pri hrách so stavebnicami rôzneho typu.

Geometria a priestorová predstavivosť

Rozvíjať priestorovú predstavivosť je možné a potrebné aj na prvom stupni ZŠ. Psychológia tvrdia, že sú dve obdobia vo vývoji dieťaťa, ktoré sú pre rozvoj priestorovej predstavivosti najvhodnejšie. Prvé je v 5. a 6. roku života a druhé medzi 10. až 14. rokom. Z tematických plánov a osnov pre vyučovanie matematiky od prvého po piaty ročník ZŠ je vidieť, že sa kladie dôraz na osvojenie si učiva z planimetrie. Len okrajovo sa venuje pozornosť stereometrii. Stereometria nastupuje až na druhom stupni ZŠ. Toto rozloženie zodpovedá ontogenéze i fylogenéze. Myslíme si, že mnohé úlohy zo stereometrie môžu riešiť žiaci už v nižších ročníkoch ZŠ. Prvý ročník kladie na dieťa veľkú záťaž, hlavne prechodom do nového prostredia a nutnosti naučiť sa učiť sa. V druhom ročníku sa dieťa stabilizuje a adaptuje na školské prostredie. S úlohami na rozvoj priestorovej predstavivosti z týchto dôvodov sme začali až v treťom ročníku. Pokúsili sme sa skompletizovať úlohy, ktoré sa vyskytujú v stereometrii a rozdelili sme ich do skupín podľa spôsobu zadania a predpisu na riešenie.

Úlohy zo stereometrie – rozdelenie do skupín

I. Delenie podľa spôsobu zadania úlohy

A. úloha zadaná modelom
B. úloha zadaná obrázkom
C. úloha zadaná verbálnym – popisom
D. úloha zadaná písomným – popisom

II. Delenie podľa spôsobu riešenia

1. riešenie modelom
2. riešenie obrázkom – (delenie podľa manuálnej zručnosti v kreslení):
a) žiak nekreslí, vyberá správnu možnosť z narysovaných riešení
b) žiak dokresľuje do neúplného riešenia
c) žiak narysuje (nakreslí) riešenie
3. riešenie verbálnym zdôvodnením (opisom)
4. riešenie písomným zdôvodnením (opisom)
5. riešenie výpočtom

III. Delenie vzhľadom na pohyb v priestore

α. *teleso nemení polohu a nemení sa ani pohľad naň*
β. *teleso mení polohu* ♠ – *rotuje okolo svojej osi*
♣ – *kotúľa sa*
♥ – *rotuje a kotúľa sa súčasne, ale nemení sa pohľad naň*
γ. *mení sa pohľad na teleso, ktoré nemení polohu*
δ. *teleso mení polohu a mení sa aj pohľad naň*

Typy úloh sme podľa tohoto delenia rozpracovali pre jednotlivé vekové skupiny. V každom type úlohy je možné zmenou zadania, alebo predpísaným spôsobom riešenia, dosiahnuť iný stupeň náročnosti. Týmto spôsobom sme vytvorili sériu propedeutických úloh, ktoré predchádzajú úlohám o objemoch a povrchoch telies, rezoch a zrezaných telesách, pohybe v priestore a zobrazovaniu telies do roviny. Niektoré z nich sme odskúšali so žiakmi v treťom ročníku ZŠ v školskom roku 2002/2003. V ďalšom školskom roku chceme v tomto procese pokračovať.

Tretiaci ZŠ a stereometria

V treťom ročníku ZŠ sme sa po dohode s vyučujúcou rozhodli zaviesť jednu vyučovaciu hodinu dvakrát do mesiaca zameranú na úlohy, ktoré rozvíjajú priestorovú predstavivosť (spontánna stereometria). Žiaci tejto triedy boli veľmi šikovní a tak im pani učiteľka musela zadávať viac práce, aby boli vyťažení. Keďže žiaci v tomto ročníku poznajú kocku, no nemajú hlbšie vedomosti zo stereometrie a majú problémy so zobrazovaním telies, úlohy sa riešili hravou formou modelom alebo obrázkami. Podľa [1] má mechanizmus poznávacieho procesu 6 etáp: **motivácia, tvorba separovaných modelov (získavanie skúseností), tvorba univerzálneho modelu,** vznik poznatku, jeho kryštalizácia, automatizácia. My sme sa zamerali hlavne na prvé tri etapy.

Úlohy sme rozplánovali na jednotlivé vyučovacie hodiny. V tomto článku uvádzame úlohy na kockové telesá.

Začali sme prácou s modelom kocky. Každé dieťa dostalo svoj model kocky a spoločne sme popisovali kocku (steny, hrany, vrcholy). Modely kocky mali rôznu veľkosť. Deti zhodnotili, že nech je kocka akejkoľvek veľkosti, má vždy rovnaký tvar a stály počet stien, vrcholov a hrán.

Potom si každý žiak vyrobil svoj model kocky zo siete. Naučili sa vyrobiť si základný tvar siete odvaľovaním kocky po papieri a zakreslením každej novej polohy steny. Danú sieť vystrihli a zlepili. *Pri zhotovovaní siete sa ukázali rôzne stupne manuálnych zručností pri obkresľovaní, strihaní a lepení modelu. Hotový model bol pýchou každého žiaka.*

V ďalšom kroku sme z kociek stavali stavby. Tie, v ktorých sa malé kocky dotýkali stenami, sme nazvali „kockovými" telesami. Žiaci boli rozdelení do skupín a riešili rôzne úlohy:

◊ *Podľa predlohy (modelu) postav rovnakú stavbu.*
◊ *Na základe obrázku postav stavbu.*
◊ *Postav stavbu takého tvaru, ktorá ešte nebola postavená.*
◊ *Zisti počet kociek, ktoré bolo nutné použiť na danú stavbu*.

Na nasledujúcej hodine sme riešili úlohy typu:

◊ *Máš rôzne počty (2, 3, 4, 5 atď.) malých kociek, postav z nich rôzne stavby.*
◊ *Vytvor kocku, ktorá je zložená z malých kociek.*

V ďalšom kroku sme niektoré vystavané kockové telesá zlepili. Vytvorili sme aj väčšiu kocku, ktorá bola zlepená z 8 malých kociek. Tu sme zisťovali, či je možné zlepiť veľkú kocku z 2,…, 7 malých kociek.

V tomto štádiu sme prešli od modelov k obrázkom. Žiaci riešili úlohy typu:

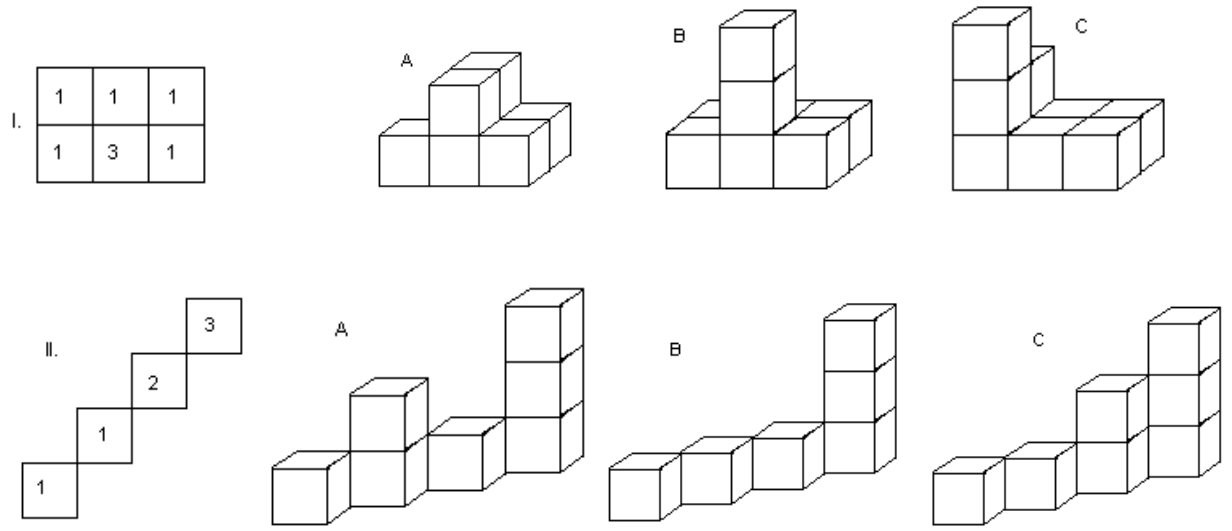
◊ *Sú osobitne nakreslené tri poschodia kockového telesa. Zakrúžkuj správne teleso, ktoré z nich môžeme postaviť.*
◊ *Vyfarbi rôznymi farbami jednotlivé poschodia v telese. Očísluj jednotlivé fázy výstavby telesa. Spočítaj počet stavebných dielov.* (Teleso bolo stavané z rôznych hranolov i kociek a bolo zakreslené v jednotlivých fázach stavania poschodí).
◊ *Spočítaj z koľkých malých kociek je zložené nakreslené kockové teleso.*
◊ *Kocka je zložená z 8 malých kociek. Zakrúžkuj, ktoré zo zakreslených kockových telies dostaneme, ak z nej vyberieme 1, 2, 3 alebo 4 malé kocky.*

V ďalšom kroku sme zaviedli pojem „mapa" kockového telesa. (Je to pohľad zhora na teleso – pôdorys, v ktorom sú číslom zapísané počty kociek v jednotlivých stĺpcoch). Žiaci riešili úlohy:

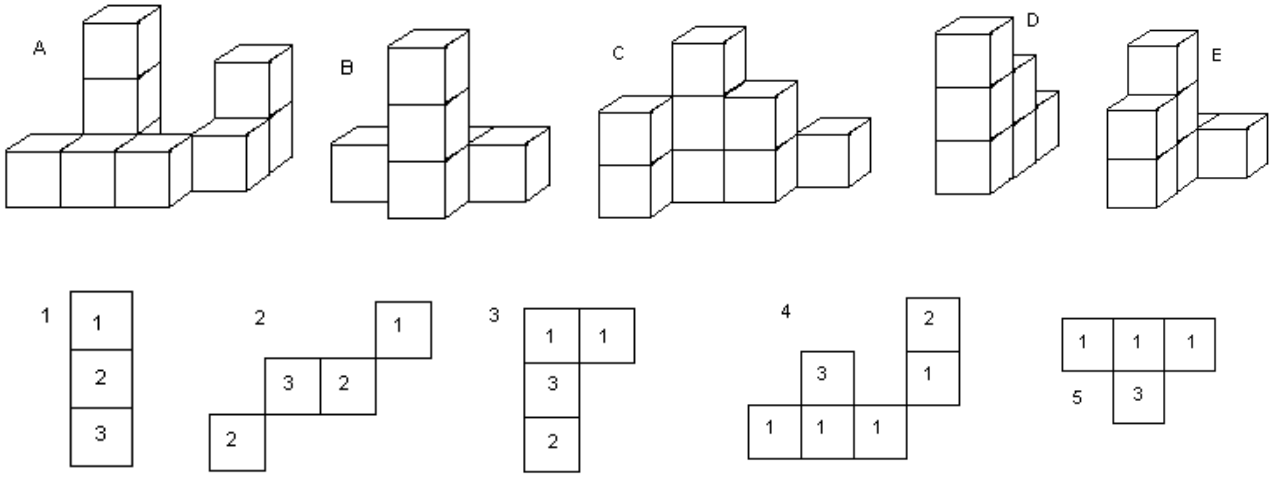
◊ *Priraď k nakreslenému kockovému telesu správnu mapu.*
◊ *Priraď k mape správne kockové teleso.*
◊ *Doplň mapu, aby zodpovedala kockovému telesu.*
◊ *Zakresli mapu zobrazeného kockového telesa.*
◊ *Nakresli akékoľvek kockové teleso a jeho mapu, ak je zložené z 3 kociek.*

Zadania úloh mali žiaci predkreslené na pracovných listoch a riešili ich samostatne**.** Mohli sa pýtať na čokoľvek, čo im bolo nejasné. Niektoré príklady z pracovných listov predkladáme na ukážku.

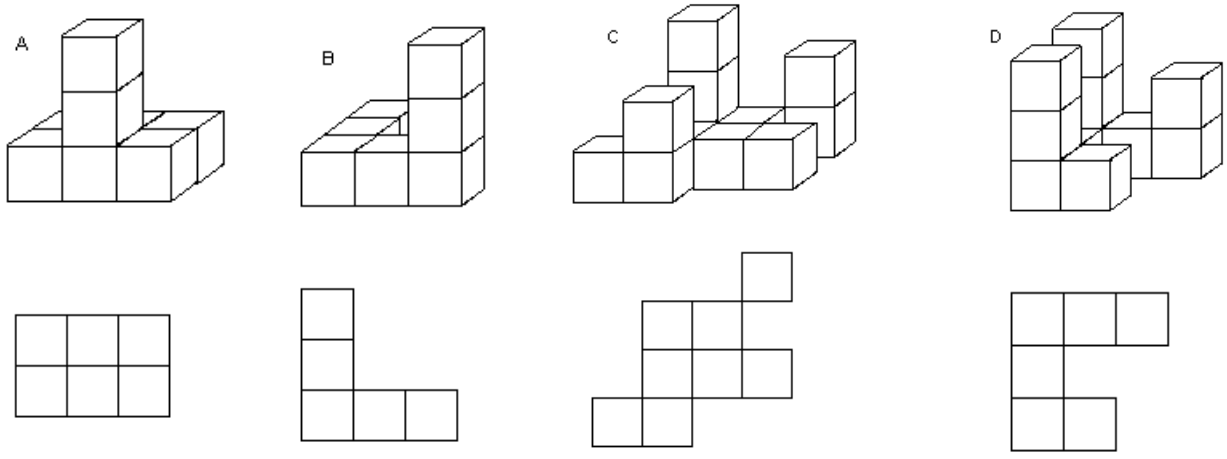
Príklad 1.: Je daná mapa. Vyznač zakrúžkovaním, ktoré teleso k nej patrí.



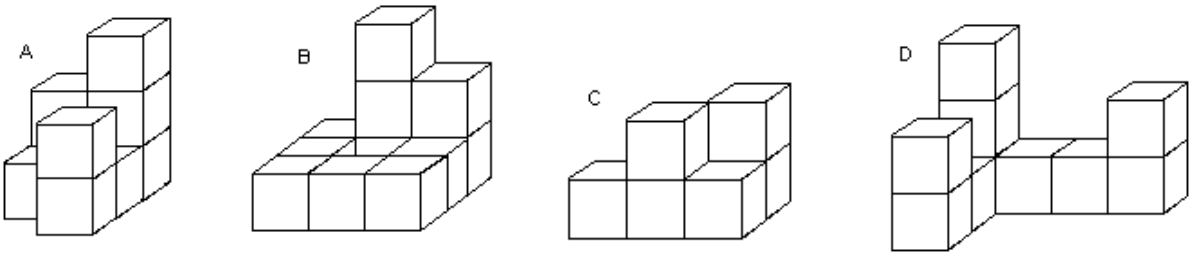
Príklad 2.: Sú dané mapy a telesá. Priraď mapu a teleso, ktoré patria k sebe.



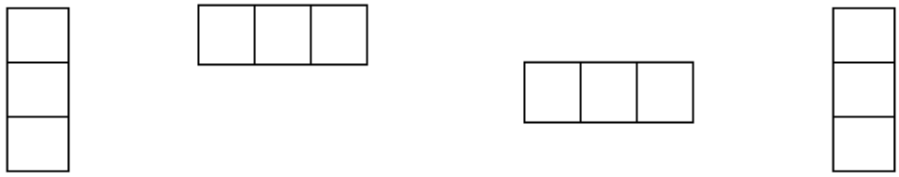
Príklad 5.: Je dané teleso a pod ním jeho mapa. Doplň mapu, aby zodpovedala telesu.



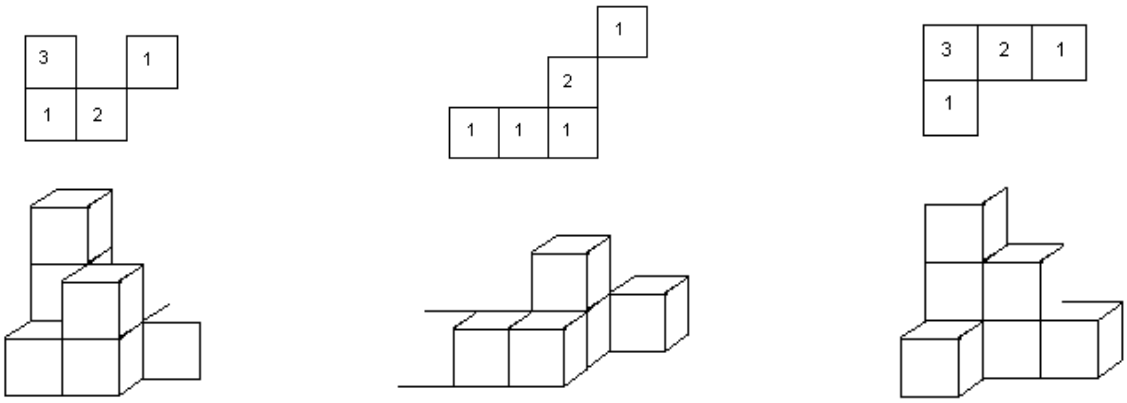
Príklad 6.: Dokresli a doplň mapu telesa.



mapa:



Príklad 9.: Podľa mapy dokresli teleso.



Záver

Všetky úlohy boli zadávané podľa nášho rozdelenia niektorou formou z I. – A, B, C, D. Aj riešenie sme vyžadovali v jednej z foriem II. – 1, 2, 3, 4, 5, vždy s ohľadom na vek detí. Pri kockových telesách sme v tomto roku nemenili pohľad ani polohu. Takéto úlohy sú plánované až v 4. ročníku. Žiaci riešili úlohy s radosťou, po odovzdaní pracovných listov medzi sebou búrlivo diskutovali.

Cieľom nášho snaženia bolo ukázať učiteľkám a žiakom ZŠ, že matematika nie je len bezduché počítanie, algoritmus, vzorec a predpísaný postup. Chceli by sme, aby obe skupiny spoznali radosť z objavovania nového. Učiteľkám sme umožnili iný pohľad na vedomosti a schopnosti svojich žiakov. Žiakom dali úlohy možnosť prejaviť sa, ale hlavne naučiť sa obhájiť si svoje názory a myšlienky.

Literatúra

[1] Hejný M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, SPN, Bratislava, 1990
[2] Piaget J., Inhelderová B.: Psychologie dítěte, Portál, Praha, 2000
[3] Košč L.: Psychológia matematických schopností, SPN, Bratislava, 1972

e-mail: pavelovae@post.sk

ILUSTRACE KONSTRUKTIVISTICKÝCH PŘÍSTUPŮ K VYUČOVÁNÍ NA VYSOKÉ ŠKOLE[1]

Naďa Stehlíková, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, Praha

Abstrakt: V tomto příspěvku budeme ilustrovat na konkrétním případu – objevování vztahu mezi afinními zobrazeními a obsahem útvaru – konstruktivistické přístupy k výuce matematiky na vysoké škole. Konkrétně se jedná o kurz analytické geometrie pro budoucí učitele 2. stupně základní školy a střední školy, který je tímto způsobem vyučován již několik let. Proces objevu zmíněného vztahu je podrobně popsán a okomentován. V závěru jsou zhodnoceny názory několika studentů na takto vedený kurz.

Úvod – kurz analytické geometrie

Konstruktivistické přístupy (viz např. Hejný, Kuřina, 2001) k výuce matematiky postupně pronikají do výuky matematiky základní a střední školy. I studenti – budoucí učitelé matematiky se s nimi seznamují v předmětu didaktika matematiky. Jen málo z nich však mělo možnost tento způsob výuky prožít. Proto bylo na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze rozhodnuto změnit pod vedením prof. Hejného koncepci kurzu analytické geometrie pro budoucí učitele matematiky na 2. stupni základní školy a na střední škole, vedený do té doby tradičním způsobem ‚definice – věta – důkaz', směrem ke konstruktivistickému způsobu. Na této změně se dále podílela autorka tohoto příspěvku a D. Jirotková. Změna mimo jiné znamenala výraznou redukci obsahu kurzu a větší důraz na hloubku porozumění a proces abstrakce. Vzniklo skriptum Hejný, Jirotková & Stehlíková (1997), které pokrývá obsah jednoho semestru výuky analytické geometrie zaměřené na geometrické transformace. Základní charakteristikou skripta je to, že na začátku kapitoly nenajdeme přehledně sepsané definice, věty a důkazy. Většina vět je formulována jako výsledek řešení úloh, případně studentova samostatného objevování. Teprve pak jsou dokazovány. Některé věty musí student formulovat sám.

Skriptum je tedy primárně určeno jako banka úloh a doplněk přednášek. Nedá se říci, že by výuka kurzu byla každý rok stejná. Naopak, často se směr úvah mění podle toho, kam zavede studenty jejich vlastní zkoumání. Skriptum nebylo zpracováno tak, aby mohlo být využito jako referenční kniha pro vyhledávání informací. Jde o to, že student si má vytvářet svou vlastní strukturu poznatků z analytické geometrie samostatným zkoumáním a řešením vhodně připravených úloh. Pokud během semestru nepracuje a chce se připravit ‚tradičním' způsobem na zkoušky (tedy na konci semestru memorovat učivo za celý semestr), je odsouzen k nezdaru.

Cílem kurzu není naučit studenty co nejvíce pojmů, definic a vět a ukázat studentům ukončenou ‚stavbu' Eukleidovské a afinní geometrie, ale pootevřít jim svět geometrických transformací a přivést je k metodám, které jim umožní ve studiu transformací víceméně samostatně dále pokračovat. Tímto způsobem doufáme, že se předmět pro ně stane živější, že prožijí radost z odhalení matematických poznatků a tyto se pro ně stanou smysluplnější.

Kurz předpokládá základní znalost shodností a podobností (v našem případě se vyučují v kurzu syntetické geometrie v 1. ročníku), teorie grup a lineární algebry (matice). Kurz začíná shodnostmi v Eukleidovské přímce a rovině a pokračuje k afinním transformacím v (afinní a Eukleidovské) přímce a rovině.

Teoretický základ kurzu je zpracován v příspěvku Hejný (2002), jeho popis lze nalézt i v Stehlíková (2002a, b). Zde se blíže podíváme na jednu část kurzu, která podle našeho názoru dobře ilustruje výše uvedené úvahy. Jedná se o část týkající se souvislosti afinních transformací v rovině a obsahu útvaru.

[1] Příspěvek byl podpořen výzkumným záměrem J13/98:114100004 "Kultivace matematického myšlení a vzdělanosti v Evropě".

Ilustrace – konstrukce vztahu mezi afinitami v rovině a obsahem

Pojem obsahu se ve výše zmíněných skriptech nevyskytuje. Autorka se však rozhodla, že to je téma natolik zajímavé, že ho v letním semestru 2002/03 do výuky zařadí. Výuka probíhala formou jednohodinové přednášky a jednohodinového semináře týdně. Pojetí přednášky se však od pojetí semináře příliš nelišilo, jen zřídka vyučující, tj. autorka, prezentovala hotové poznatky.

Afinita v rovině byla studentům zavedena jako geometrické zobrazení, které lze vyjádřit maticí[2] $\begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $ad - bc \neq 0$. Všechny vlastnosti afinit si studenti museli odvodit sami.

Níže popíšeme podrobně způsob, kterým si studenti zkonstruovali poznatky obsažené ve Větě:

> Označme $A\left[E^2\right]$ množinu všech afinit v E^2. Nechť je dána afinita $f \in A\left[E^2\right]$ a trojúhelník ABC. Pak obrazem trojúhelníka ABC v afinitě f je trojúhelník $A'B'C'$ a pro jeho obsah platí $S_{\triangle A'B'C'} = \det F \cdot S_{\triangle ABC}$, kde $\det F$ je determinant matice afinity f.

Ke konstrukci věty nedošlo najednou, ale postupně vyplynula v průběhu několika přednášek a seminářů, během nichž se probírala i další témata z geometrie afinních transformací[3].

Seminář 7, zadání Ú1

Ú1: Jazykem syntetické geometrie charakterizujte zobrazení daná následujícími maticemi: $A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$, $z \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $z \neq 0$.

Jedná se o afinity zachovávající počátek, proto stačí pracovat s maticemi 2x2. Očekáváním vyučující bylo, že si studenti uvědomí, že podobně jako shodnosti lze i afinity charakterizovat invarianty – samodružnými body a přímkami. Předpokládala, že studenti použijí jim známé postupy z předchozího studia na hledání samodružných bodů a přímek, případně najdou obrazy několika útvarů a z nich se pak budou snažit usuzovat na syntetické vlastnosti afinit. Ukázalo se však, jako už ostatně mnohokrát při konstruktivistickém způsobu vyučování, že úloha vygenerovala naprosto jiný problém.

Seminář 8, prezentace řešení Ú1, zadání Ú2 a Ú3

Žádný ze studentů nehledal samodružné body, ale většinou hledali obrazy jednotlivých bodů a z nich se pak snažili uhodnout, zda se jedná o jim známou geometrickou transformaci. Když studentka Marie prezentovala své výsledky u tabule, u matice B se zmínila, že afinita určená touto maticí podle všeho zachovává obsah útvarů. Zeptala se vyučující, zda má tuto vlastnost každá afinita. Vyučující tuto otázku přivítala, protože sama měla v plánu se v budoucnu problematice obsahu věnovat. Neodpověděla však a formulovala nový problém pro všechny.

Ú2: Zjistěte, zda afinita zachovává obsah.

[2] V první části kurzu studenti odvozovali analytické vyjádření shodností v rovině pomocí rovnic a pomocí matic a postupně se dohodli, že vyjádření maticemi je pro ně kalkulativně výhodnější (např. pro skládání afinit a hledání inverzní afinity). Proto výše uvedená definice afinity byla logickým pokračováním (zevšeobecněním) matic shodností. O souvislosti třetího řádku matice s projektivními souřadnicemi se studenti dozvědí na konci semestru, do té doby je přítomnost tohoto řádku dána kalkulativními důvody.

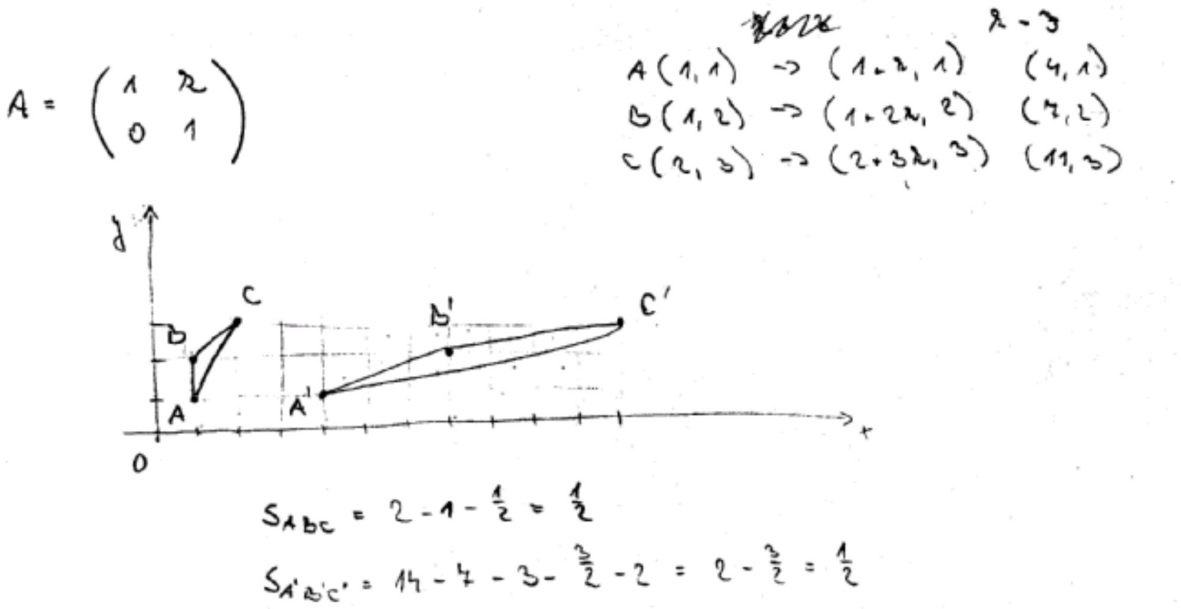
[3] Tedy popisujeme-li, že v průběhu semináře 7 došlo k zadání úlohy 1, neznamená to, že se za celý seminář nic jiného neudělalo. Zde si vybíráme jen ty části seminářů a přednášek, které se týkají vztahu afinit a obsahu.

Nikdo nedokázal zatím rozhodnout, ani navrhnout plán, jakým způsobem je možno úlohu uchopit. Proto vyučující zadala úlohu 3.

Ú3: Zjistěte, zda zkosení[4] zachovává obsah.

Seminář 9, prezentace řešení Ú3, zadání Ú4

Studentka Petra ukázala, že zkosení zachovává obsah tím, že našla obsah trojúhelníka a obsah jeho obrazu ve zkosení. Prozkoumala však jen jeden konkrétní případ (viz obr. 1). Studenti pak sami dospěli k tomu, že je nutné prozkoumat i jiné polohy trojúhelníka.



Obrázek 1

Vyučující se znovu zeptala, zda je tomu tak u každé afinity. Nikdo nereagoval, proto zadala úlohu 4.

Ú4: Zjistěte, zda a jak se změní obsah trojúhelníka, zobrazíme-li ho v afinitách, které jsou dány těmito maticemi: $R=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}4&2\\1&4\end{pmatrix}$.

Seminář a přednáška 10, zadání Ú5

Seminář a přednáška číslo 10 byly spojeny a studenti pracovali v počítačové laboratoři s programem Cabri Geometrie II. Ve skupinách řešili úlohy, které dostali na zvláštním listu a které se týkaly osových afinit a jejich vlastností a skládání. Jednou z úloh byla i úloha 5.

Ú5: Zjistěte, zda a jak osová afinita mění obsah. Zjistěte, zda existuje nějaká osová afinita, která obsah zachovává.

Studenti měli k dispozici makra, která umožňovala najít obraz bodu a mnohoúhelníka v osové afinitě a jejích speciálních případech – elaci a involutorní osové afinitě.

[4] Zkosení podél osy x je dáno maticí $\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$, zkosení podél osy y maticí $\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$.

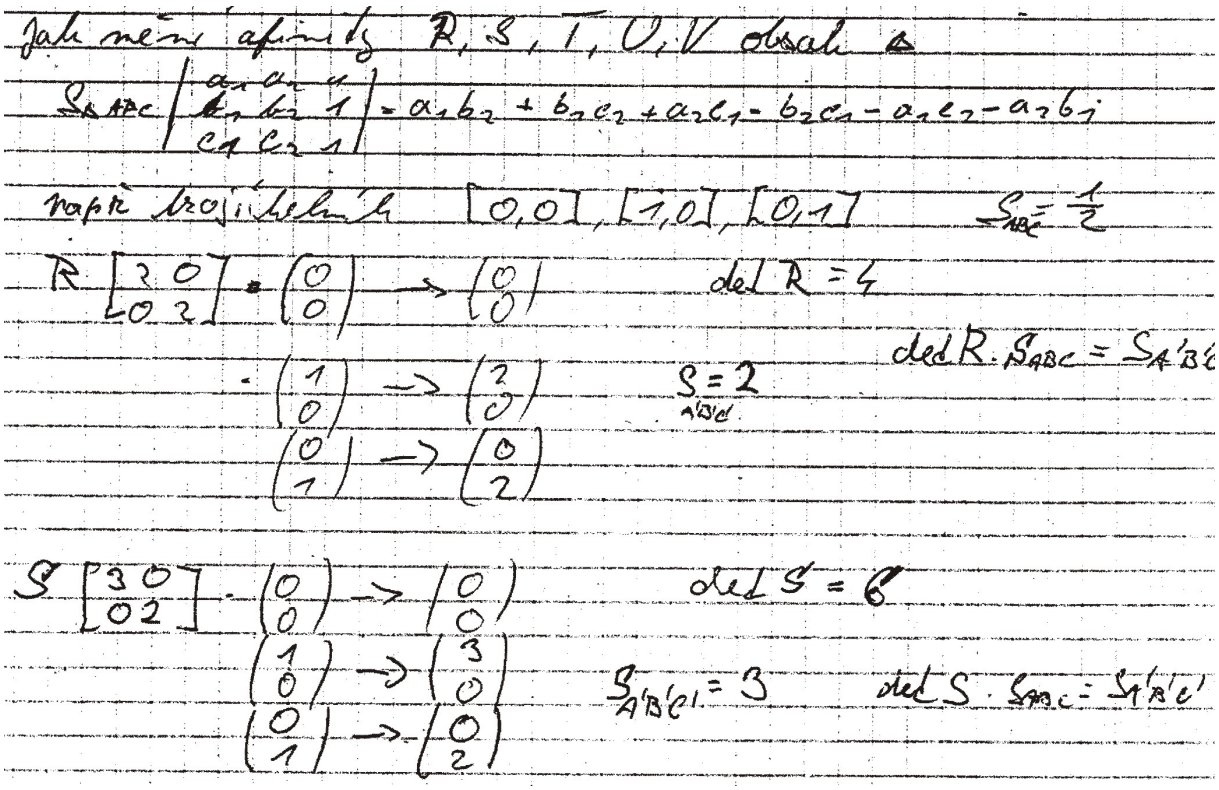
Přednáška 12, prezentace řešení Ú5

Studenti prezentovali výsledky práce z laboratoře a jedna z hypotéz, která zazněla, byla, že elace a involutorní osová afinita zachovávají obsah útvaru. K tomu dospěli většinou použitím funkce „zjisti obsah útvaru“, která je v Cabri Geometrii k dispozici.

Přednáška 13, prezentace řešení Ú4, zadání Ú6

Pavel přednesl své řešení úlohy 4 (část je na obr. 2)[5]. Uvedl, že hledal souvislost mezi obsahem obrazu trojúhelníka *OIJ* a determinantem matice afinity, protože determinant se přímo nabízí jako základní vlastnost matice. Navíc jsme hodnotu determinantů zjišťovali v průběhu práce několikrát, abychom např. zajistili, že daná matice je opravdu matice afinity (determinant musí být nenulový). Společně pak studenti formulovali (matematicky nepřesnou) hypotézu, že „afinita násobí obsah trojúhelníka hodnotou determinantu své matice“. Z toho logicky vyplynula úloha 6.

Ú6: Dokažte hypotézu o vztahu afinity a obsahu.



Obrázek 2

Přednáška 13, prezentace řešení Ú6

Marie nejdříve vyslovila Větu (viz výše) a pak navrhla důkaz pomocí vztahu pro zjišťování obsahu trojúhelníka, který využil Pavel. Stanovila i základní postup, ovšem vlastní důkaz byl dělán společně s celou skupinou, protože, jak se ukázalo, studenti již „pozapomněli“ pravidla úprav determinantů, které probírali v lineární algebře.

Komentář k ilustraci

Zde shrneme celý proces a kurzívou uvedeme stručně princip konstruktivistického způsobu vyučování, k němuž se daný komentář vztahuje.

[5] Vztah pro obsah trojúhelníka *ABC* v Pavlově řešení je zapsán nesprávně, chybí koeficient ½. Nicméně při počítání obsahu trojúhelníka *OIJ* se této chyby nedopustil.

Jak je ukázáno výše, věta, která je v tradičním vyučování vyslovena jako hotový poznatek a studenti ji mají pouze dokázat a procvičit na příkladech, vyplynula celkem přirozeně z řešení úloh v průběhu několika přednášek a seminářů (*konstrukce poznatků je dlouhodobá záležitost*). Úlohy mohou zůstávat nevyřešené nebo jen zpola vyřešené po několik seminářů, než se naskytne vhodná příležitost k jejich znovuotevření. Ovšem podle našeho názoru je žádoucí, aby se v přiměřené době všechny problémy uzavřely.

V naší ilustraci je důležité, že prvotní motivace pocházela od samotných studentů. Problematika obsahu tedy nebyla nastolena uměle učitelem (*poznatky jsou konstruovány tehdy, kdy je jich třeba; studenti formulují vlastní úkoly; obsah hodin nelze dopodrobna předpokládat*). V ideálním případě by studenti měli být schopni sami formulovat i návodné úlohy, které je dovedou k řešení problému. V našem případě tomu tak nebylo, musela zasáhnout vyučující (*učitel je významným činitelem konstruktivistického vyučování*). V případě úlohy Ú3 se domníváme, že tato byla formulována příliš brzy po obecné úloze Ú2. Zde měla vyučující projevit více trpělivosti. Je možné, že při domácím studiu by některý ze studentů přišel s vlastním návrhem postupu.

Vyučující neprozradila studentům správné řešení problému, když se tento objevil, ani nespěchala s jeho řešením. Pokračovala s tématy, které byly rozdělány předtím, a teprve, když to bylo vhodné, k problému se vrátila (*trpělivost učitele*). Z hlediska studenta se konstruktivistická výuka může jevit jako chaotická a postrádající strukturu a je úkolem učitele, aby měl na paměti, jaké poznatky si mají studenti zkonstruovat, a aby měl také plán, jakým způsobem je k tomu povede (*učitel jako předkladatel problémů*). Vyučování není tedy „živelné“.

Komunikace v hodinách a *dialog* se studenty jsou velmi důležité. Z ilustrace vyplývá, že studenti byli často vyzýváni k prezentaci svých, byť i nehotových výsledků před třídou a k jejich diskusi. Pokud to bylo možné, vyučující se zdržela hodnotících komentářů a nechala hodnocení správnosti na studentech. Na druhé straně je ovšem někdy nutné uvést na pravou míru poznatek, který by si jinak studenti osvojili nesprávně. V takovém případě je dobré vznést protipříklad.

Proces konstrukce je na jedné straně *individuální*, tedy každý si konstruuje poznatky sám, na druhé straně je to však i záležitost *sociální*. Studenti mohou nějaký poznatek přejmout od svých spolužáků a použít ho při vlastní konstrukci něčeho nového. Jeden přijde na řešení konkrétního problému (např. Ú4), další je pak schopen na jeho základě řešit obecný problém (Ú6). Velmi cenné je, když studenti konstruují nové poznatky ve vzájemné diskusi.

Hodnocení a závěr

Ukazuje se, že konstruktivistické způsoby budí v mnoha studentech pocit nejistoty a nedůvěry. V letním semestru 2002/03 jsme provedli sondu, jíž se zúčastnili dva studenti (P a J) a jedna studentka (D). Hlavním cílem bylo ověřit, jak se na tento způsob výuky dívají studenti a zda si z výuky odnášejí to, co si vyučující představuje. Byli vybráni studenti různých schopností, ale takoví, kteří skutečně v průběhu semestru pracovali a řešili zadané úlohy. Jednou týdně s nimi vyučující provedla individuální rozhovor zaměřený na uplynulý týden z hlediska jejich vlastní práce doma i práce v hodinách. Studenti byli tázáni i na hodnocení předmětu, a to zejména v průběhu rozhovoru, který proběhl až poté, když složili i ústní zkoušku. Otázky byly velmi volné typu „Napadá vás ještě něco, co byste mi chtěl(a) k předmětu a způsobu jeho vedení sdělit?“. Zde jsou některé jejich reakce seřazené do kategorií.

Náročnost předmětu

D: „Musela jsem věnovat mnohem více času přípravě. Ovšem před zkouškou už tolik ne, když to porovnám s ostatními předměty. [...] Nemusela jsem se učit tolik teorie.“

P: „Musel jsem se pravidelně připravovat. Nemusel jsem se učit zpaměti, stačilo jen projít úlohy a chápat řešení. [...] Musel jsem to ale chápat víc, v jiných předmětech často stačí naučit se to nazpaměť.“

J: „Nemohl jsem si dovolit nepřipravovat se. Pak by se člověk už nechytil. [...] Před zkouškou jsem ale byl překvapený, že jsem se nemusel moc učit, že to chápu.“

Nedostatek struktury

D: „Nevadilo mi, že to nebylo dělané strukturovaně. Před zkouškou jsem si udělala přehled všeho, co jsme se učili. To dělám vždycky."
P: „Nelíbilo se mi, že jste nedělala závěry v kapitolách. [...] Měla jste nám dát shrnutí, co jsme se vlastně naučili. [...] Musel jsem si to udělat sám před zkouškou."
J: „V jiných předmětech je to pěkně strukturovaný, když jsou tam definice, věty, důkazy. Tady jsem si nebyl jistý."

Nedostatek učitelovy expozice nové látky

D: „Líbil se mi způsob práce, kdy jsme měli hodně pracovat doma a v hodinách jsme to jen shrnuli."
P: „Afinity se mi zdály udělané dobře, že jste neřekla, co to vlastně je, ale měli jsme to prozkoumat úlohama. Bylo pak lehký tomu porozumět."
J: „Bylo to zajímavější, ale kdyby to tak bylo v každým předmětu, tak bychom to časově nezvládli. [...] Bylo to zajímavější, protože jste neřekla, ‚je to tak a tak', ale ‚co se stane, když' a my jsme si to už objevili."

Celkový dojem těchto tří studentů je pozitivní, i když vezmeme v úvahu jejich připomínky. V příštím semestru se chceme pokusit o další vylepšení vedení předmětu a např. nabídnout studentům možnost shrnutí látky na konci semestru. Zdálo by se, že to je v přímém rozporu s konstruktivistickými přístupy, ovšem cítíme, že někteří studenti prostě potřebují větší míru pomoci a jistě není v zájmu studentů, aby prožívali celý semestr v nejistotě a v nedostatku sebedůvěry. Je úkolem učitele vytvořit jakýsi kompromis mezi tím, v účinnost čeho věří, v tomto případě v konstruktivistický způsob výuky, a mezi potřebami většiny studentů. Zmiňovaná sonda účinnosti našeho přístupu k výuce analytické geometrie bude pokračovat i v tomto školním roce.

Literatura:

[1] Hejný, M. (2002). Konstruktivistická koncepce geometrie u budoucích učitelů. In Ausbergerová, M., Novotná, J. (eds.), 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, sborník příspěvků, JČMF, Praha, 113-119.
[2] Hejný, M., Jirotková, D., Stehlíková, N. (1997). Geometrické transformace (metoda analytická). Praha, PedF UK.
[3] Hejný, M., Kuřina, F. (2001). Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha, Portál.
[4] Stehlíková, N. (2002a). Geometrické transformace – konstruktivistický přístup. In Ausbergerová, M., Novotná, J. (eds.), 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, sborník příspěvků, JČMF, Praha, 281-287.
[5] Stehlíková, N. (2002b). Geometrical Transformations – Constructivist Analytic Approach. In Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Wiley, Greece.

e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

NOWY PODRĘCZNIK DLA KLASY CZWARTEJ

Stefan Turnau, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów

1. Wprowadzenie. Praktycznie wszystkie współczesne projekty dydaktyczne są przepojone, wywodzącą się od Piageta, ideą **konstruktywizmu**. W mniejszym czy większym stopniu tak organizują one pracę nauczyciela i uczniów, by ci ostatni **dochodzili** do nowej wiedzy w wyniku samodzielnego lub kierowanego przez nauczyciela poszukiwania odpowiedzi na postawione wcześniej ptyania. Renesans psychologii Vygotskiego i jego koncepcji społeczno-historycznego charakteru wiedzy spowodował, że konstruktywizm jako idea dydaktyczna jest dzisiaj pojmowany bardziej realistycznie niż w czasach jego powstania. Nie postuluje się, by **cała wiedza** i **wszystkie umiejętności** ucznia były wynikiem procesu ich konstruowania. Jednak we wszystkich projektach ten proces odgrywa ważną, a nawet dominującą rolę. Pojawiło się też pojęcie **konstruktywizmu społecznego**, gdzie uwzględnia się rzeczywistość szkolną, tj. społeczny charakter przebiegającego tu procesu dydaktycznego.

Na koncepcję podręczników serii „Matematyka dla Ciebie", którą tu naszkicuję, wpłynęła głównie konstruktywistyczna teoria i metodyka nauczania matematyki – Realistyczne Nauczanie Matematyki.

2. Realistyczne nauczanie matematyki (Realistic Mathematics Education). Ta koncepcja powstała pod wpływem idei i poglądów Hansa Freudenthala i jest przez współpracowników i uczniów rozwijana od ok. 30 lat w Instytucie Freudenthala w Utrechcie (Holandia). Nazwa ta bywa trywializowana przez określanie nią każdej sytuacji na lekcji czy fragmentu podręcznika, gdzie pojawia się realny kontekst. Naprawdę zaś jest to złożony i wciąż zmieniający się program (w sensie A. Sierpińskiej) badań i praktyki dydaktycznej, posiadający jednak wyraźnie określoną ideologię i wywodzące się z niej zasady. Oto sformułowana przez Treffersa charakterystyka tej koncepcji

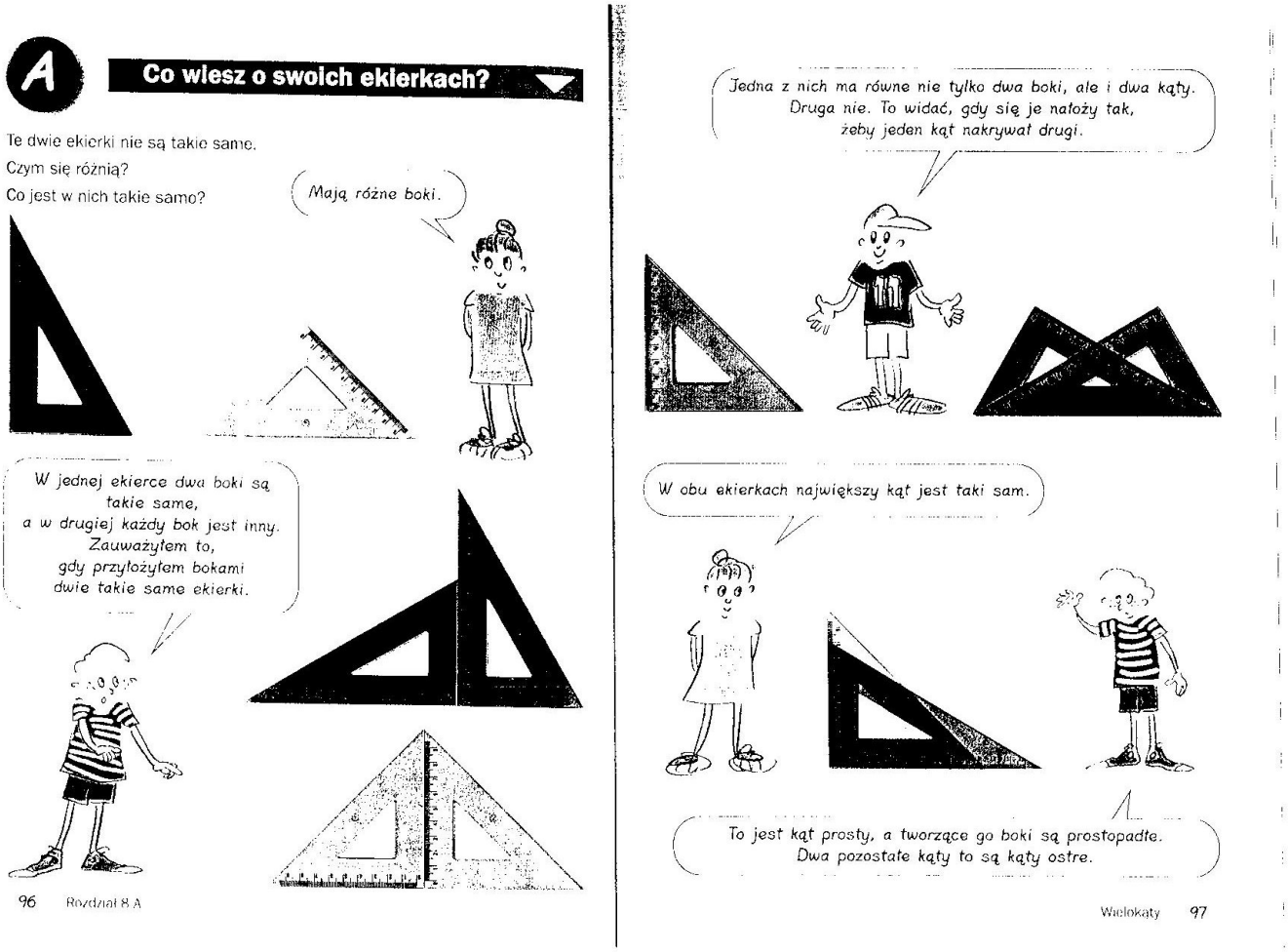
- aktywność: uczenie się matematyki przez uprawianie matematyki,
- różnicowanie: indywidualne uczenie się matematyki,
- pionowe planowanie: uczenie się matematyki w określonej kolejności,
- charakter strukturalny: treści matematyczne,
- aspekt językowy: język matematyki,
- zastosowania: używanie matematyki,
- dynamika: matematyka w nieustannym rozwoju.
- specyficzne podejście: metoda matematyczna.

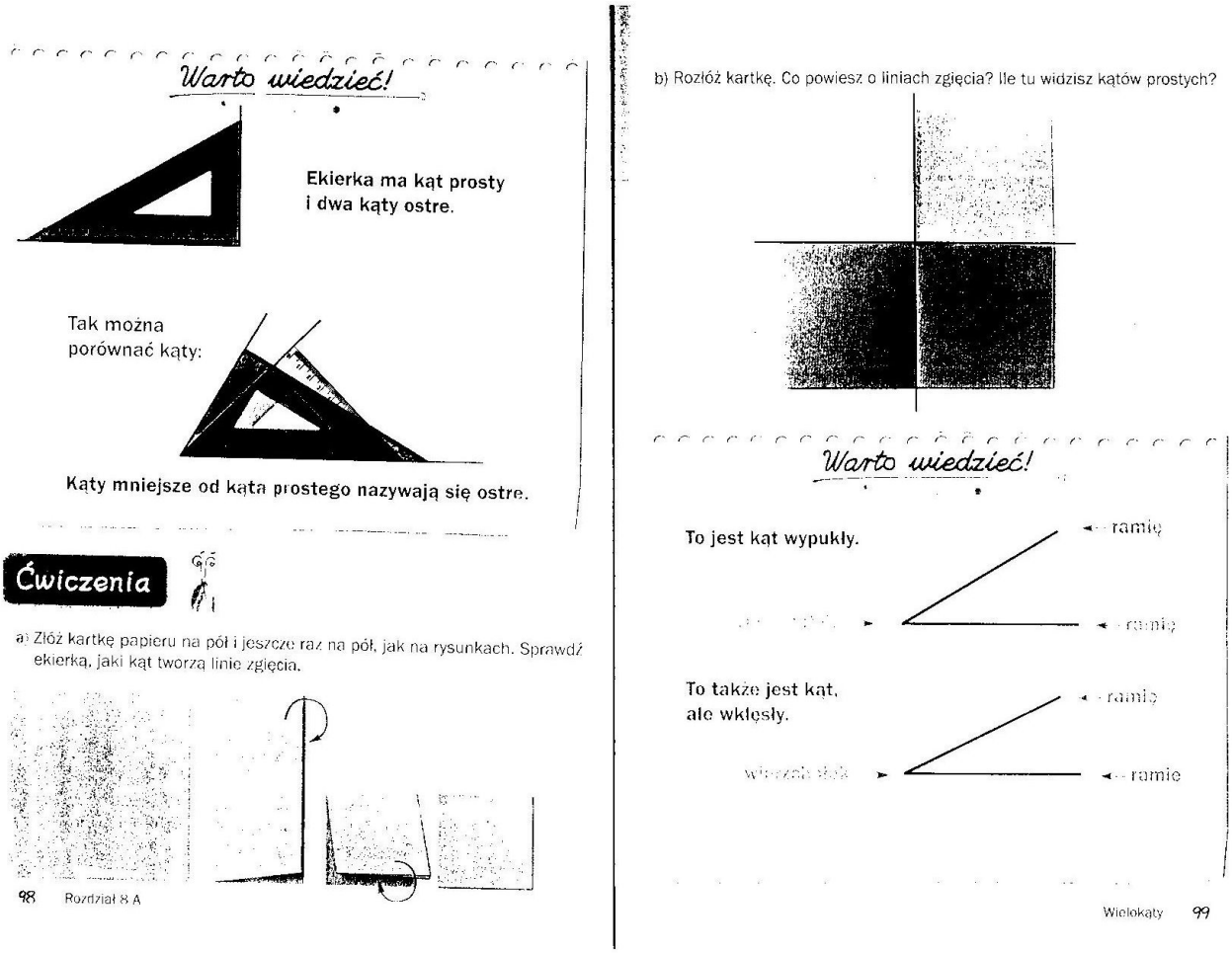
Nie jest to metodyka łatwa. Jeżeli pamiętać, że celem jest rozwijanie matematycznych pojęć i matematycznego myślenia, a nie sprawne radzenie sobie z problemami odpowiedniego typu, łatwo widać, jak trudno zachować należytą równowagę między samodzielnym działaniem uczniów a pracą pod wyraźnym kierunkiem nauczyciela, różnicowaniem a integrowaniem, trzymaniem się realnego kontekstu a uogólnianiem i abstrahowaniem, dopuszczaniem dowolności w terminologii i symbolice a uczeniem ogólnie przyjętych, akceptacją dowolnej argumentacji uczniów a faworyzowaniem argumentacji logicznej itd. Dodajmy, że praktykowanie realistycznego nauczania matematyki wymaga bardzo dobrego wielostronnego przygotowania nauczyciela i jego wysokich dydaktycznych umiejętności.

3. Podręcznik „Matematyka dla Ciebie". Tworząc podręcznik dla klasy czwartej wychodziliśmy z założenia, że przeciętny nauczyciel matematyki nie jest przygotowany do nauczania innego niż dominujący w szkołach „absolutyzm". Nauczyciel jest w klasie wyrocznią. Zapytany uczeń wie, że jest tylko jedna dobra odpowiedź, ta, którą ma na myśli nauczyciel. Stara się więc na nią trafić stosując wszelkie dostępne strategie, z matematycznym rozumowaniem często mające

niewiele wspólnego. Także nauczyciel stara się ucznia na tę jedynie dobrą odpowiedź „naprowadzić", co często odbywa się według – jak to nazwał Bauersfeld – „schematu lejka": kolejne pytania zawężają zakres odpowiedzi aż do jedynej możliwej. Gdy padnie, uczeń otrzymuje niezasłużoną pochwałę, a nauczyciel ma poczucie dydaktycznego sukcesu. Nauczanie w duchu – częściowo choćby – konstruktywistycznym wymaga przełamania tej „absolutystycznej" postawy, a więc dopuszczenia uczniów do głosu w swobodnej rozmowie, gdzie każdy wypowiada to, co myśli, nie starając się zadowolić innych rozmówców, w tym nauczyciela. Ta zmiana postawy nie jest łatwa i nauczyciel musi się jej świadomie uczyć. Podręcznik, będący jego przewodnikiem w organizowaniu lekcji, powinien mu w tym pomóc.

Dlatego każdy rozdział podręcznika zaczyna się otwartą sytuacją i krótkim dialogiem na jej temat czworga dzieci, rówieśników uczniów w klasie. Ten dialog ma na celu głównie zachęcić uczniów i nauczyciela do swobodnej, otwartej wymiany myśli, zadawania pytań i szukania na nie odpowiedzi, bez lęku o możliwość popełnienia błędu. Oto pierwsze dwie strony rozdziału wprowadzającego pojęcie kąta w wielokącie i porównywanie kątów.



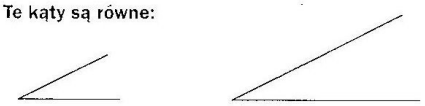


Jak zobaczymy, na lekcji uczniowie odkryli dużo więcej własności ekierek niż to, co zauważają Ania, Kuba i Tomek.

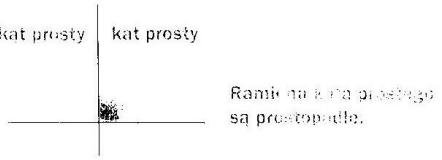
Na trzeciej stronie znajduje się bardzo krótkie podsumowanie rozmowy i ostrożna formalizacja: wprowadzamy termin „kąt ostry” i jego definicję. Nie jest to tekst przeznaczony do werbalnego zapamiętania. Uczniowie powinni go tylko w skupieniu przeczytać i obejrzeć rysunki.

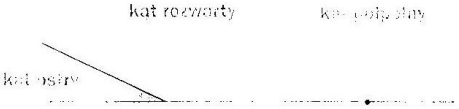
Warto wiedzieć!

Te kąty są równe:



Rysunki przedstawiają kąty wypukłe: prosty, ostry, rozwarty, półpełny.

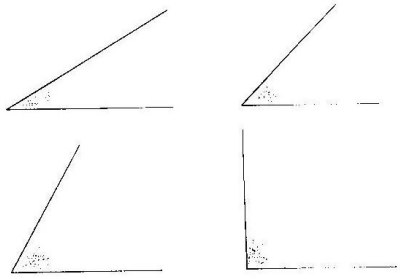




Kąty większe od prostego, a mniejsze od półpełnego nazywają się rozwarte.

Zadania

▸ 1. a) Sprawdź, że narysowane kąty są takie, jak w ekierkach.



b) Złóż kartkę na pół.
Na złożonej kartce obrysuj kąty obydwu ekierek.
Wytnij te kąty (masz teraz każdy w dwóch egzemplarzach).
Ułóż kąty kolejno od najmniejszego do największego.

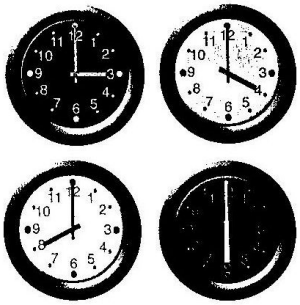
c) Najmniejszy kąt dosuń do drugiego takiego samego.
Sprawdź, że otrzymałeś kąt taki, jak jeden z pozostałych.
Które jeszcze kąty można otrzymać w taki sposób?

d) Czy można dosunąć do siebie takie dwa kąty, które razem utworzą kąt prosty? A kąt większy od kąta prostego?

e) Dosuń do siebie dwa kąty proste. Otrzymałeś kąt półpełny.
Czy można utworzyć kąt jeszcze większy?

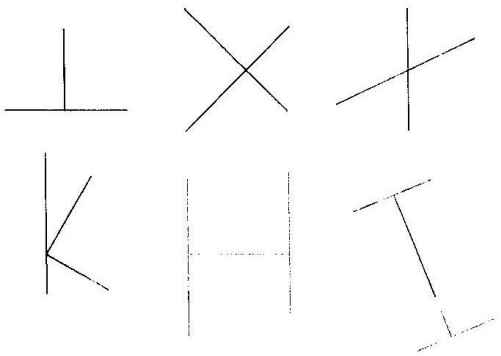
Po *Warto wiedzieć* następują *ćwiczenia*. Są to polecenia do wykonania i także ewentualnego omówienia. I kolejna porcja nowych terminów i definicji.

▸ 2. O której godzinie wskazówki zegara tworzą kąt prosty?
O której kąt ostry?
O której kąt rozwarty?
O której kąt półpełny?
O której kąt większy od półpełnego?



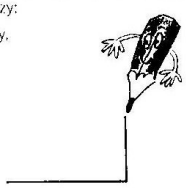
▸ 3. Sprawdź, że brzegi twojego zeszytu, książki, ławki są prostopadłe.

▸ 4. Sprawdź, które z narysowanych tu linii są prostopadłe.



▸ 5. Weź taką ekierkę, jak na rysunkach w książce.
Obrysuj ją z zewnątrz. Przesuń ekierkę i obrysuj ją wewnątrz.
Co możesz powiedzieć o bokach otrzymanych trójkątów?
A co o kątach?

▸ 6. Narysuj takie kąty, jakie mają ekierki, od najmniejszego do największego.
Przykładając odpowiednio ekierki, sprawdź, czy:
a) trzy najmniejsze kąty dają razem kąt prosty.
b) dwa większe kąty dają razem kąt prosty.



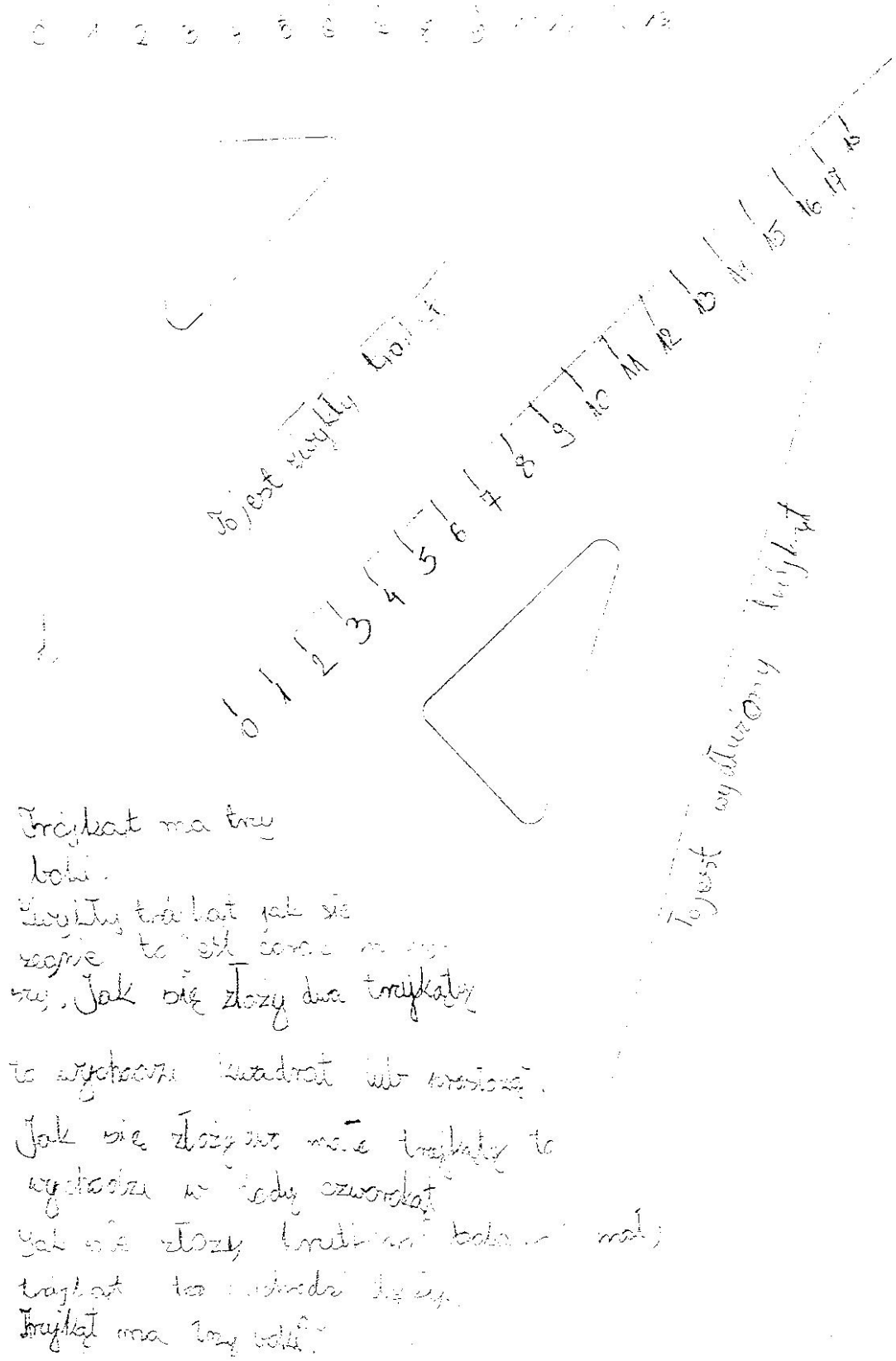
Dla dociekliwych

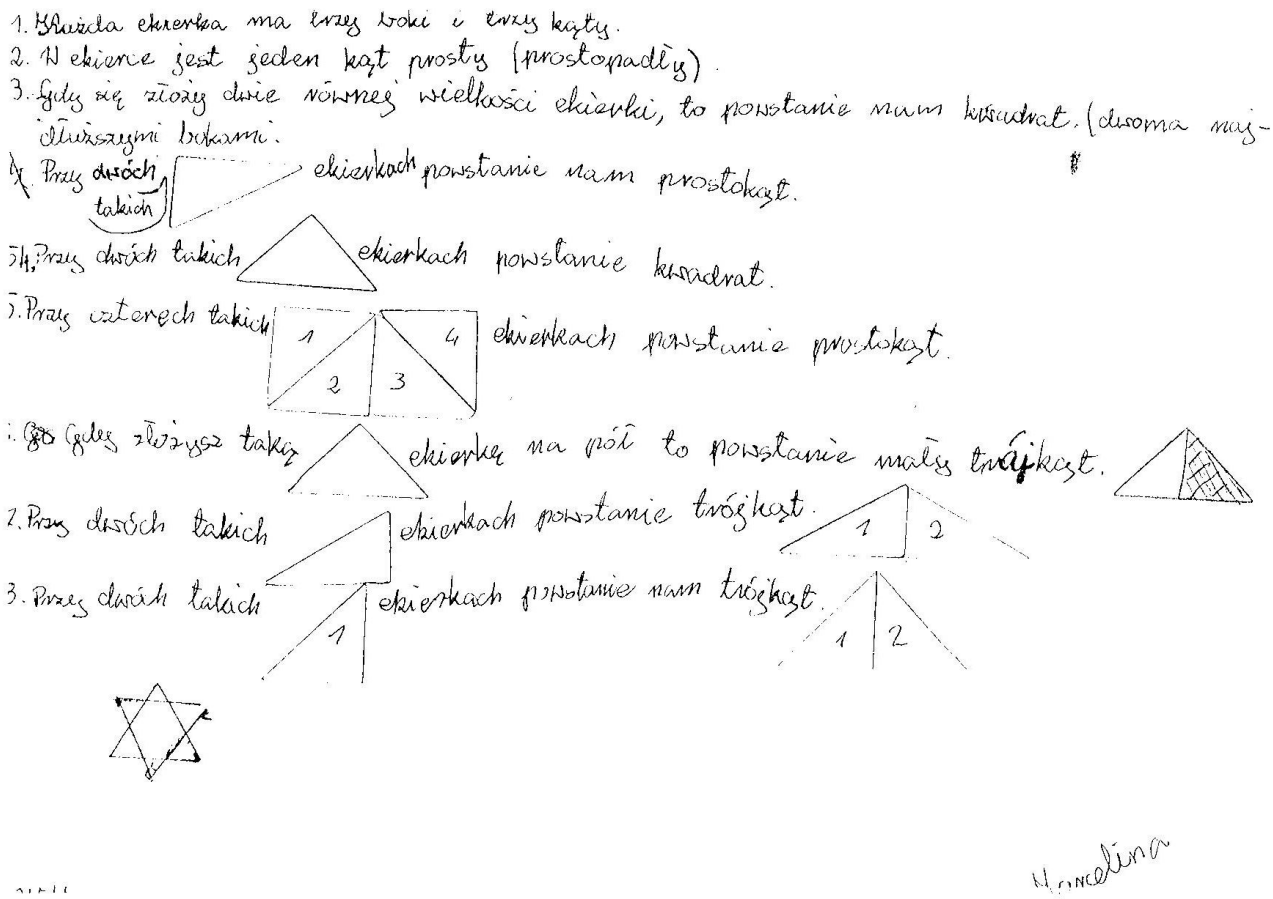
7. Czy można narysować trójkąt, który będzie miał dwa kąty proste?

8. Czy można narysować trójkąt, który będzie miał trzy kąty jednakowe?
Czy mogą one być takie, jak jeden z kątów ekierki?

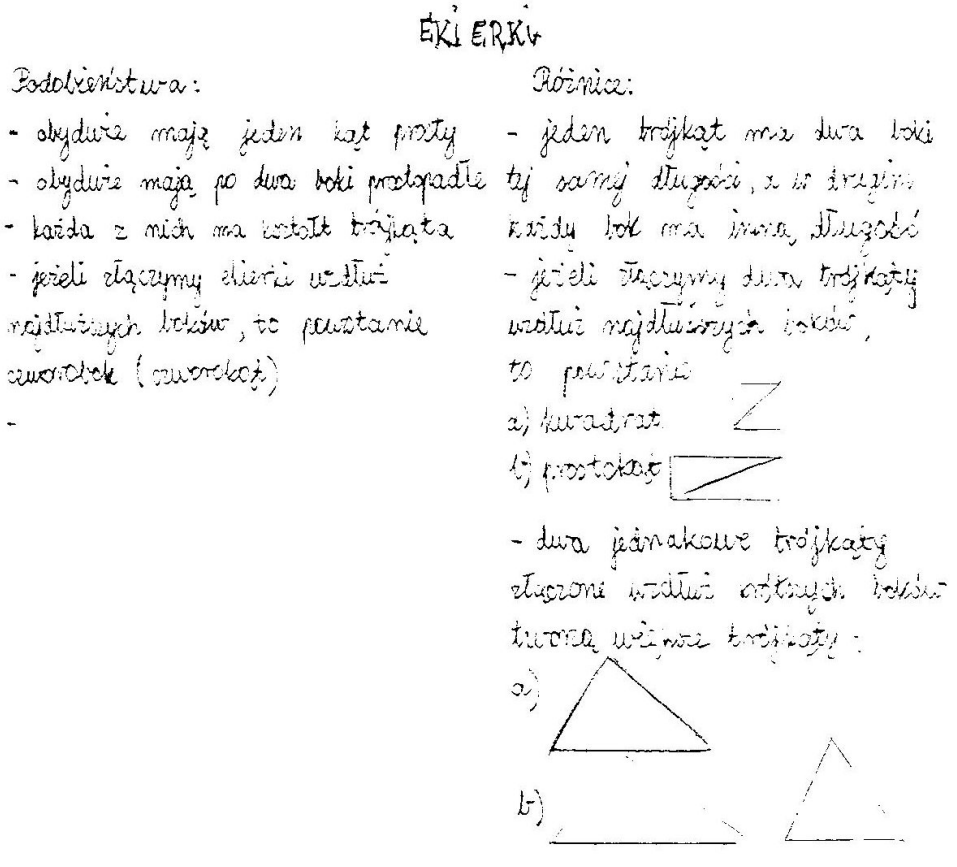
9. Ile razy w ciągu doby wskazówki zegara tworzą kąt prosty?

4. Lekcja „Ekierki”. Lekcja została przeprowadzona w klasie trzeciej jednej ze szkół w Krakowie, pod koniec roku szkolnego. Uczniowie otrzymali ekierki dwóch typów, plastikowe i wycięte z kolorowego papieru. Otrzymali polecenie zbadania ekierek i znalezienia jak największej liczby cech upodobniających i cech różniących je od siebie. Pracowali w grupach dwuosobowych. Lekcja była wideo-filmowana z dwóch kamer: jednej obserwującej całą klasę i nauczyciela i drugiej obserwującej wybraną parę uczniów. Na filmie widać, jak uczniowie stopniowo zaciekawiają się zadaniem i coraz żywiej dyskutują, a wyniki dyskusji zapisują. Oto dwa arkusze z rysunkami i zapisami uczniów.





Na koniec lekcji dokonano podsumowania obserwacji uczniów, zapisując podobieństwa i różnice między ekierkami w dwóch kolumnach. Oto co znalazło się w zeszycie jednego z uczniów.



Lekcja, o której tu mowa, została przeprowadzona przez nauczycielkę niemającą doświadczenia w takim stylu nauczania. Obecność kamery i nieznanych uczniom osób dodatkowo zakłócała jej przebieg. Film pokazuje jednak, że uczniowie łatwo dają się wciągnąć w otwarte badanie nowej dla nich sytuacji i otwarte wypowiadanie swoich poglądów. Pewnie łatwiej niż niejeden nauczyciel...

Podkreślić chciałbym na koniec, że w naszej propozycji postulujemy, by **wszystko, co uczeń robi, zawsze miało dla niego sens**. Dotyczy to także formalizacji języka: **formalizować można tylko wtedy, gdy uczeń może zrozumieć sens i przydatność formalizmu**.

Wykorzystane książki i artykuły:

[1] Alrø, H. and O. Skovsmose, Dialogue and Learning in Mathematics Education, Kluwer Academic Publ. 2002

[2] Ciosek M., Legutko M., Turnau S. Urbańska E., Matematyka dla Ciebie, podręcznik dla klasy IV, Nowa Era 2002

[3] Sierpińska, A., Dokąd zmierza dydaktyka matematyki? Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej 9. 2002

[4] Treffers, A., Three dimentions. A Model of Goal Description in Mathematics Instruction, Reidel Publishing Co. 1978

e-mail: stefanturnau@gazeta.pl

SEBEREFLEXE – PROSTŘEDEK ZMĚNY POSTOJE STUDENTŮ K MATEMATICE

Eva Zapotilová, Karlova Univerzita, Pedagogická fakulta

Úvod

Před třemi lety jsme z podnětu prof. Hejného začali zadávat v prvním ročníku studia učitelství pro l. stupeň základní školy v rámci disciplíny Úvod do studia matematiky seminární práci na téma: „Sebereflexe postoje k matematice“. Úkolem studenta je popsat svá setkání s „matematikou“ od předškolního věku až po současnost. Pokusit se charakterizovat především změny svého postoje k matematice spolu se zamyšlením nad tím, čím nebo kým, byl postoj k matematice ovlivněn. Při zadávání této seminární práce jsou zpravidla studenti zaraženi a neumějí si představit, že mohou na uvedené téma napsat práci v rozsahu 3 – 5 stran.. Sami jsou pak v závěru semestru překvapeni, kolik zážitků z matematiky jim utkvělo v paměti.

Sebereflexe jako didaktický nástroj přípravy budoucích učitelů

Studenti většinou oceňují možnost zamyslet se nad svým postojem k matematice, neboť si uvědomují, že takto lépe poznávají důležitou složku své budoucí práce, totiž vliv učitele na utváření žákova vztahu k matematice i spekulativnímu myšlení vůbec. Sebereflexe studentů jsou přínosné i pro nás vysokoškolské učitele. Dovídáme se, že většinou pozitivní postoj žáka k matematice utvořený během vyučování na 1.stupni ZŠ se mění někdy již na 2. stupni ZŠ, většinou však během studia na SŠ. Zejména na gymnáziích se stává negativním, až výrazně negativním. Toto poznání je přínosné i pro studenty oborového studia matematiky, budoucí učitelé matematiky na 2.stupni ZŠ a středoškolské profesory matematiky. Oni se též budou s největší pravděpodobností setkávat se studenty tohoto typu a mohou se pokusit změnit neradostný stav postupného zhoršování vztahu žáků k matematice.

Toto poznání může být zajímavé i pro čtenáře, učitele matematiky z terénu. Proto si dovolujeme uvést několik ilustrací , fragmentů ze studentských seminárních prací.

První série ukázek ze seminárních prací studentů

∗ Na gymnáziu jsem se zpočátku matematiku denně učila, ale zjistila jsem, že matematice věnuji více času než předmětům, které mě baví a kterými bych se chtěla v budoucnu zabývat. Dodnes si myslím, že spousta věcí, které se na gymnáziu učí, je zbytečná a pokud nebudeme matematiku vyloženě studovat, stejně ji brzy zapomeneme. Po gymnáziu jsem studovala vyšší odbornou školu sociální práce a z gymnaziální matematiky jsem po celé dva roky nepoužila nic. To mě v mém názoru pouze utvrdilo.

∗ Nevím, co mi středoškolská matematika dala do života? Snad stres, že jsem hloupější než ostatní a tím pocit méněcennosti, zjištění mé pomalosti, neschopnosti, čistou prohru sama nad sebou.

∗ Dodnes si pamatuji na svoji první kompozici z matematiky na gymnáziu, z které jsem dostala svoji první čtyřku v životě. Od té chvíle jsem byla u vyučujícího zapsána jako velmi slabá. Bylo mi hrozně. Na písemky jsem se připravovala, ale byla jsem pomalejší a to se na gymnáziu netolerovalo. Měla jsem pocit, že učitel nové učivo vysvětluje těm chytřejším a námi se nezabývá. Píšu námi, protože těch slabších byla v naší třídě více než třetina. Hrozila jsem se dnů, kdy jsem měla být zkoušena. Mívala jsem sny o matematice, snažila jsem se matematice všemožně vyhnout, dokonce se musím přiznat, že ze strachu z písemek jsem chodila za školu. Někdy jsem učivu rozuměla a byla jsem ráda, že jsem příklad vypočítala sama a dobře, ale učitel mi nevěřil, že jsem na to přišla sama. Úplně jsem proto ztratila zájem o tento předmět.

∗ Z našeho profesora na gymnáziu jsme měli od začátku strach. Později jsme zjistili, že za svou přísností schovává nejistotu, myslím, že matematiku příliš neovládal a nebavila ho. Jediné, co jsme při hodinách řešili, byly vzorové příklady z učebnice. Když jsme se zeptali na nějakou jinou úlohu, byl v úzkých a se slovy „takže si doma tuto úlohu promyslete“ nás odbyl. Ovšem jeho silnou stránkou byly definice. Ty ovládal a tvrdě je od nás vyžadoval. Podle jeho představ byla matematika jen spousta definic.

∗ Když se vracím ke špatné zkušenosti s matematikou, resp. učitelkou matematiky, chtěla bych dodat, že arogantní, povýšená a věčně se vysmívající učitelka mnohem více ovlivnila, samozřejmě v negativním smyslu, ty, kterým matematika nešla. Její posměšné výstupy, kterými se projevovala snad každou hodinu, neustále srážely tyto žáky a díky nim v nich čím dál víc převládala hrůza z matematiky. Měli strach se na něco zeptat, aby nebyli vystaveni ironickým poznámkám, které je nemilosrdně ponižovaly. Myslím, že právě tato učitelka je pravým důkazem toho, že většina žáků, kteří se bojí matematiky, nemají ve skutečnosti strach z matematiky jako takové, ale z učitele, který si zřejmě mnohdy neuvědomuje, že někomu trvá pochopení příkladu déle, ale že proto ještě nemusí být úplně ztracený případ, kterému nepomůže žádná rada ani pomoc.

∗ Problémy s matematikou nastaly až na gymnáziu .Dostali jsme jednu z nejhorších učitelek, o které kolovaly pověsti po celém městě. Více než polovina studentů měla čtyřku. Vždy, když se někdo přihlásil, že danému problému nerozumí, učitelka začala vztekle bušit do katedry a hystericky nadávala dotyčnému, že pokud nedokáže pochopit tento triviální příklad, na gymnázium nepatří. Samozřejmě jsme se ptát přestali a nechali jsme učitelku vykládat. Ta si nás nevšímala a pokračovala si po svém. Postupem doby jsme si vybudovali k matematice silný odpor a vůbec jsme se neučili. Nyní je mi jí líto, ale tříd, kterým pomohla vytvořit averzi k matematice, bylo za její kariéru asi mnoho. Přestože jsme se mnohokrát pokusili o dialog, dozvěděli jsme se, že chyba je v nás.

∗ Tenkrát na gymnáziu jsem poprvé zažívala pocity strachu. Vždy, když se ozvalo zvonění, které ohlásilo hodinu matematiky, seděli jsme všichni v lavicích se zatajeným dechem a očekávali jsme klapání podpatků naší paní učitelky. Její nepříjemný hlas vykládal celou hodinu fakta a definice, které jsme pouze opisovali z tabule a snažili se doma marně látku pochopit. Její výbušná povaha a náš strach z toho, že se opět rozzlobí, až se někdo z nás přihlásí s tím, že látku nepochopil, v celém kolektivu vybudovala odpor k tomuto předmětu. Dnes – s odstupem času – jsem vděčná nejen hodným a kvalitním kantorům, ale poděkovat bych měla i této paní učitelce, která mi do mého nitra vštípila jistotu, jak jednou určitě nebudu učit a vychovávat děti.

Charakteristika sebereflexí postoje k matematice

Uvedené ukázky představují nejčastěji se vyskytující postoje. Objevují se i práce, v nichž studenti charakterizují svůj postoj k matematice jako převážně neutrální, proměnlivý podle toho, zda pochopili, či nepochopili právě probíranou látku, dále v závislosti na většinou četných změnách vyučujících matematiky. Studenti, kteří s láskou vzpomínají na hodiny matematiky a všechny učitele, či profesory matematiky jsou pouze výjimkou. Jistě to úzce souvisí s kvalitou studentů, kteří jsou přijímáni ke studiu učitelství pro 1. stupeň ZŠ na PedF UK v Praze.

Vstupní kvalita studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky se vzdala možnosti konat přijímací zkoušku z matematiky. Dáváme tím šanci všem uchazečům, kteří vyhověli v disciplínách, které jsou součástí přijímací zkoušky (český jazyk a literatura, hudební výchova, výtvarná výchova, tělesná výchova). Všichni přijatí studenti se však musí v úvodu studia podrobit vstupnímu testu z matematiky. Jeho úspěšné absolvování je podmínkou pro zápis do kursu Úvod do studia matematiky. Do vstupního testu zařazujeme zpravidla zajímavé, nestandardní úlohy ze soutěží pro žáky 4. – 5. ročníku ZŠ (např. Klokánek), dále pak standardní úlohy 2. stupně ZŠ. Úlohy klasické středoškolské matematiky zpravidla nezařazujeme nebo pouze v omezeném počtu, protože značnou část studentů tvoří

absolventi středních pedagogických škol, což vzhledem k jejich očekávanému budoucímu uplatnění nepokládáme za nevhodné.

Studenti, kteří nezískají stanovený počet bodů jsou zařazeni do „výběrového“ semináře, jehož cílem je zlepšení kvality základních matematických vědomostí a dovedností studenta tak, aby v opakovaném testu, vyhověli a mohli se zapsat do kursu Úvod do studia matematiky v letním semestru 1. ročníku svého studia na fakultě.

Obsah a cíl kursu úvod do studia matematiky

Výuka v disciplíně Úvod do studia matematiky je zaměřena především na řešení problémů v kaskádách úloh s narůstající složitostí, které umožňují studentům zažít pocit radosti z „objevení“ řešení jednodušších problémů a získávat postupně sebedůvěru, že mohou vyřešit další, již složitější problémy.

Řešení problémů s reflexí postupu

Problémy nejsou řešeny pouze v hodinách kursu ÚSMA, ale studenti zpracovávají během semestru seminární práci v rozsahu 5 až 10 stran, která obsahuje :

1. rozbor problému („uchopování“ problému a první nápady řešitele),
2. řešení problému (další nápady a popis myšlenkového procesu),
3. evidenci chyb, jejich identifikaci a přehled objevů, vedoucích k jeho řešení

Seminární práce může obsahovat i pozorování dvou žáků při řešení vybraných úloh.V tomto případě musí obsahovat i stručné údaje o provedeném pozorování, charakteristiku žáků a podmínek experimentu.

Hodnocení kursu Úvod do studia matematiky

Vzhledem k tomu, že studenti odevzdávají své seminární práce na téma Sebereflexe postoje k matematice zpravidla v závěru semestru, spontánně reagují v řadě případů na změny svého postoje během prvního semestru studia na pedagogické fakultě, i když k tomu nebyli při zadávání seminární práce vyzváni. Tím se dozvídáme, jak studenti vnímají a prožívají hodiny matematiky na fakultě, zda se nám daří ovlivnit jejich postoj k matematice.

Druhá série ukázek ze seminárních prací studentů

∗ Dostala jsem se na svou vysněnou vysokou školu. S hrůzou jsem očekávala první hodinu matematiky. Byla jsem příjemně překvapena. Nečekaly nás žádné nepřekonatelné příklady. Kdyby se mě někdo zeptal, co se učíme, s určitostí bych ho opravila, že my se neučíme, ale my si hrajeme. Sice ne v pravém slova smyslu, ale my si hrajeme s matematikou.

∗ Tato matematika se naprosto nedá srovnat s matematikou na střední škole. Můj postoj se naprosto změnil k lepšímu. Matematika mi začala být srozumitelná a jasná. Oceňuji výběr příkladů, rozvíjejí naše myšlení. Mohli jsme se na cokoli zeptat a nikdy na nás nebylo nahlíženo jako na neinteligentní tvory, jako na střední škole.

∗ Můj postoj k matematice se výrazně zlepšil po příchodu na fakultu. Učivo je zajímavé. Celý semestr jsem se na hodiny matematiky těšila. Co se týče obtížnosti, myslím,že je střední, spoustu věcí zvládnou i slabí a lepší studenti je dovedou do obecnosti. Je to pestré pro každého. Rozvíjí se naše logické myšlení.

∗ Tento seminář mi dal úplně jiný náhled na matematiku. Když si vybavím, jak jsme se vždy museli učit vzorečky a vše řešili podle předem daného postupu, je mi z toho nanic. Zde jsem se naučil věci odvozovat logicky.

∗ Nikdy bych si nemyslela, že mě matematika zaujme. Vždy mi šla lépe čeština. Bavilo mě to, měla jsem chuť do učení, chtěla jsem vše pochopit. Dala jste všem stejnou šanci, nikoho neponižovala, o to jde.

∗ Můj vztah k matematice se díky tomuto kursu změnil, a za to jsem vděčný. Rád bych proto začal s matematikou pracovat jinak než dosud, chápat její souvislosti. Díky osobnímu přístupu a hlavně uctivému ke studentům matematicky nezdatným si myslím, že k tomu mám konečně velkou příležitost.

∗ Mé hodiny matematiky na střední škole byly kritické. Měla jsem naučené vzorečky a věděla, do kterého příkladu který dosadit. Tady na VŠ jsem pochopila, že úloha může mít několik řešení a že na to mohu přijít sama. Nikdo mě nedirigoval a připadám si tady svobodně. Mám možnost říct svůj názor a nemusím se stydět, i když je to špatně. Konečně vím, co matematika znamená a nemusím říkat, že z ní mám strach. Matematika mě začala bavit.

∗ Hodiny matematiky na VŠ mě mile překvapily. Je to nesrovnatelný rozdíl s gymnáziem. Strach a nervozita se vytratily a začala jsem se těšit na příští hodinu. Vážím si vyučující, která nikdy nikoho nepodcenila, nezaškatulkovala, naopak dodávala sebevědomí, že každý má šanci uspět.

∗ Oproti středoškolské matematice, která se mi zdála nezáživná, nudná a zbytečná, mě hodiny matematiky na VŠ příjemně překvapily. Řešíme zajímavé úlohy, které alespoň k něčemu jsou, rozvíjejí naše myšlení.

Dodatek

Nevím, zda se čtenáři dostala do rukou kniha Edvarda de Bona: Pravdu mám já, určitě ne ty. Na mne některé myšlenky zde uvedené silně zapůsobily a to i v souvislosti s tím, čemu byl věnován tento článek. Na jedné straně ukazují, že lze a dokonce úspěšně rozvíjet myšlení i méně nadaných jedinců. Na druhé straně nám umožňují alespoň částečně pochopit arogantní chování některých vyučujících matematiky, které studenti ve svých sebereflexích, bohužel ne ojediněle, popisují. Nejen chování samo, ale i jeho důsledky. Kéž by to byla pouze zmíněná arogance inteligence a ne arogance jako charakteristický rys osobnosti pedagogů.

Čtenáře, který knihu nezná, si dovolím upozornit na několik citátů ze str. 167-169.

„… domníváme se, že lidé s vyšší inteligencí už nemusí pro své myšlení nic dělat. Myslíme si, že lidem se skromnější inteligencí není pomoci.“

„Inteligentní člověk si dokáže udělat názor na určitý problém a tento názor velmi obratně hájit. Čím lépe je schopen svůj názor obhájit, tím méně je nakloněn tomu, aby se skutečně problémem zabýval. Takže vysoce inteligentní člověk se může chytit do pasti jediného názoru, a to jednak vinou své vlastní inteligence a jednak vinou naší obvyklé logiky, která nám říká, že máte-li pravdu, pak ji nemůžete mít víc. Méně inteligentní jedinec si je méně jistý svou pravdou, a proto je při zkoumání problému i ostatních stanovisek mnohem svobodnější.“

„Velmi inteligentní člověk obvykle vyrůstá s přesvědčením o své intelektuální nadřazenosti a potřebuje, aby ostatní viděli, že má pravdu a je chytrý. Inteligentní lidé často podléhají dojmu, že negativita se rychle vyplácí. Pokud napadnete cizí myšlenku nebo nápad, můžete dosáhnout okamžitého úspěchu a pocitu převahy.“

„Inteligentní mozek pracuje rychle, někdy až příliš rychle. Vysoce inteligentní člověk může po několika prvních signálech dospět k závěru, který není tak dobrý jako ten, ke kterému dospěje někdo pomalejší, kdo musí přijmout více signálů, než k závěru dokáže dojít.“

„Peníze se hodí, když si chceme koupit rychlé auto. Geny jsou užitečné, když chcete být inteligentní. Ale pouze to, že máte rychlé auto, z vás neudělá dobrého řidiče. I silný vůz můžete řídit špatně, ale někdo jiný může výborně řídit mnohem skromnější vůz. Síla motoru a konstrukce automobilu poskytují potenciál. Tento potenciál se uplatňuje díky zručnosti a schopnostem řidiče. Podobně i inteligence je takový potenciál mysli a uplatňuje se díky myšlenkovým dovednostem. I silný mozek lze špatně používat, zatímco mnohem skromněji vybavený mozek lze řídit velmi dobře.“

„Myšlení lze definovat jako schopnost ovlivňovat působení inteligence na zkušenost. Potřebujeme rozvinout myšlenkové dovednosti, abychom s jejich pomocí dokázali plně využít potenciál, který nám zkušenost nabízí. Nadaní studenti (jedinci s velmi vysokým IQ) potřebují myšlenkové dovednosti rozvíjet stejně jako všichni ostatní – a snad i o něco víc, aby tak dokázali překonat přirozenou aroganci své inteligence.“

e-mail: Eva.Zapotilova@pedf.cuni.cz

VYBRANÉ PARTIE Z POLOŽKOVEJ ANALÝZY MATEMATICKÉHO TESTU Z MONITORU MATURANTOV

Oľga Zelmanová, ŠPÚ Bratislava

V ŠPÚ sa v posledných rokoch venuje zvýšená pozornosť evaluácii vedomostí žiakov. V rámci medzinárodných meraní sa Slovensko zúčastnilo štúdií TIMSS (matematika a prírodné vedy 14-roční), PIRLS (čítanie s porozumením), CIVIC (občianske uvedomenie 14-roční), SITES (informatizácia na školách), PISA (matematická gramotnosť 15-roční). V rámci národných meraní sa uskutočnil monitor v 5. ročníkoch z matematiky, v 9. ročníkoch z matematiky a slovenského jazyka. Monitor maturantov je však doposiaľ najkomplexnejšie a najrozsiahlejšie meranie vedomostí žiakov cca 18-ročných, maturantov, ktoré prebieha už od roku 1999. Po fázach vytvárania testu, merania, zberu údajov prichádza fáza analýzy údajov a tento článok sa venuje práve možnostiam analýzy testu.

Analyzujeme jednotlivé položky, t. j. úlohy testu matematického testu M12002, určeného pre Monitor maturantov z gymnázií v roku 2002. Test sa skladá z dvoch častí.
V prvej časti sa nachádza 30 dichotomických úloh, čiže úloh, za ktoré sa dá získať 0 alebo 1 bod. Tieto úlohy sú členené na uzavreté úlohy s voľbou distraktorov (1...20) a na úlohy s krátkou odpoveďou (21...30).
V druhej časti testu sa nachádza 6 kvantitatívnych úloh u1, u2, u3, u4, u5a, u5b s maximálnym bodovým ziskom 5, 5, 5, 6, 9, 9 bodov. Bolo treba riešiť len päť úloh, lebo úlohy u5a, u5b boli alternatívne.
Test bol vyrobený v dvoch formách A a B. Preto sme sa v našej analýze zamerali aj na porovnanie jednotlivých foriem. Toto porovnanie môže slúžiť ako podklad úvah o tom, nakoľko má vplyv vzájomné poradie jednotlivých testových úloh na úspešnosť v teste, podobne pozícia správnej odpovede medzi distraktormi.

Uvádzané tabuľky a grafy majú slúžiť ako podklady pre následnú pedagogickú analýzu.

Obťažnosť testu

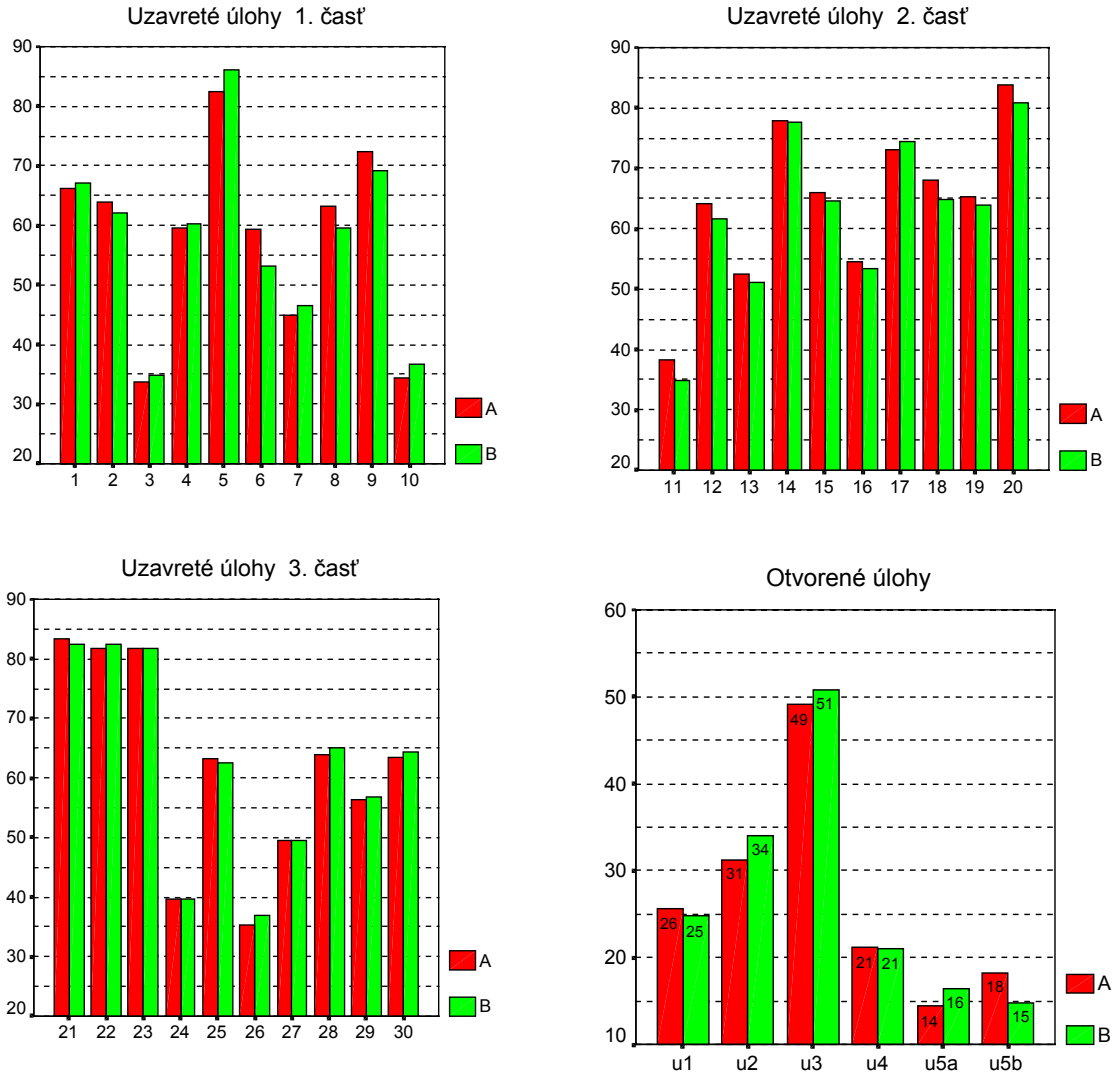
Porovnaním úspešnosti žiakov v oboch častiach testu aj v celom teste aj z matematiky podľa formy sme zistili, že medzi formami A a B **nie je** štatisticky rozlíšiteľný rozdiel. Viď tabuľka

Group Statistics

	FORMA	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Úspešnosť 1. Časť testu	A	1095	61,394%	21,5310%	,6507%
	B	935	60,834%	21,6144%	,7069%
Úspešnosť 2. časť testu	A	1095	26,487%	20,6383%	,6237%
	B	935	27,283%	21,6566%	,7082%
Úspešnosť	A	1095	43,941%	18,9954%	,5740%
	B	935	44,059%	19,8491%	,6491%

1) Tabuľka úspešnosti v teste M12002

Z metodického hľadiska nás však zaujímala otázka, či aj úspešnosť v jednotlivých úlohách testu (obťažnosť) bude štatisticky nerozlíšiteľná.



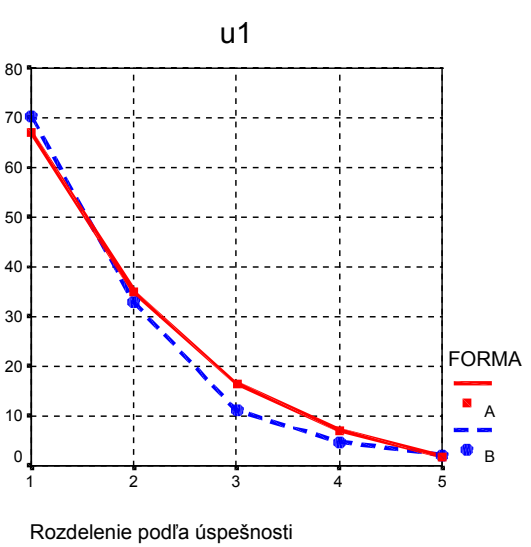
2) Komplet štyroch stĺpcových grafov porovnania obťažnosti úloh podľa formy

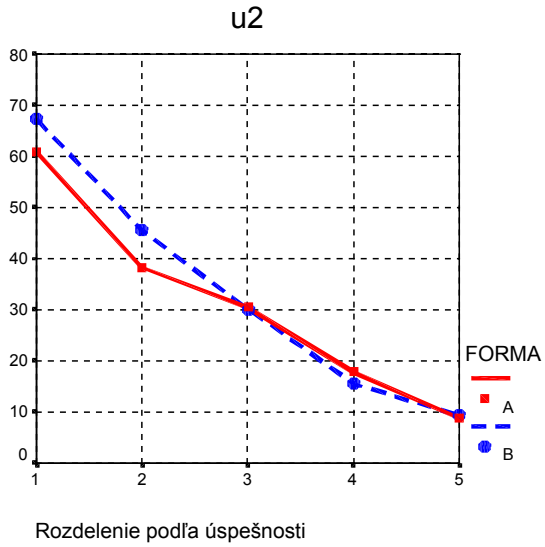
Rozdiel medzi formami A a B je signifikantný na úrovni 0,05 pri úlohách 5, 6. S rizikom 10 % môžeme tvrdiť, že aj úspešnosť v uzavretej úlohe **8** a otvorených úlohách **u2, u5b** je medzi formami rozdielna.

Porovnanie otvorených úloh podľa foriem

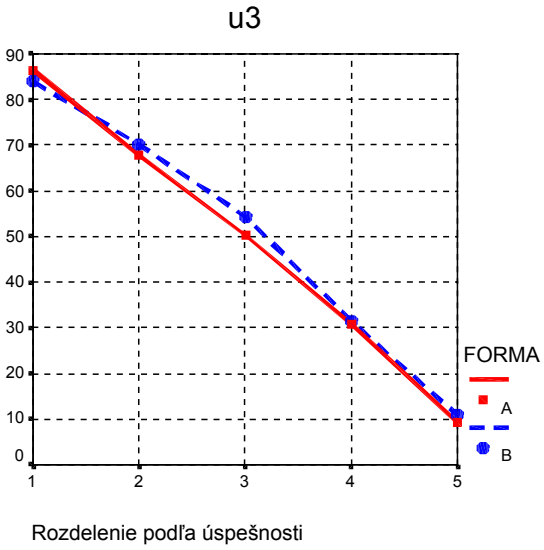
Pri otvorených úlohách 1, 2, 3, 4, 5a, 5b nás zaujímalo, ako boli úspešné jednotlivé skupiny žiakov. Žiakov sme rozdelili podľa celkovej úspešnosti v matematickom teste na pätiny po 20 %. Od najúspešnejších po najmenej úspešných. Číslom 1 sme označili 20 % najúspešnejších, ... a číslom 5 20 % najmenej úspešných žiakov. Skúmali sme rozdiely medzi týmito skupinami pri formách A a B. Analýzou sme zistili, že štatisticky významné rozdiely medzi formami na úrovni rozlíšiteľnosti $p < 0,05$ boli v 1. skupine – najúspešnejších žiakov pri úlohe **u5a**, ďalej v 2. skupine pri úlohách **u2** a **u5b**.
V ostatných skupinách žiakov nebol medzi formami pri úlohách žiadny štatisticky rozlíšiteľný rozdiel.

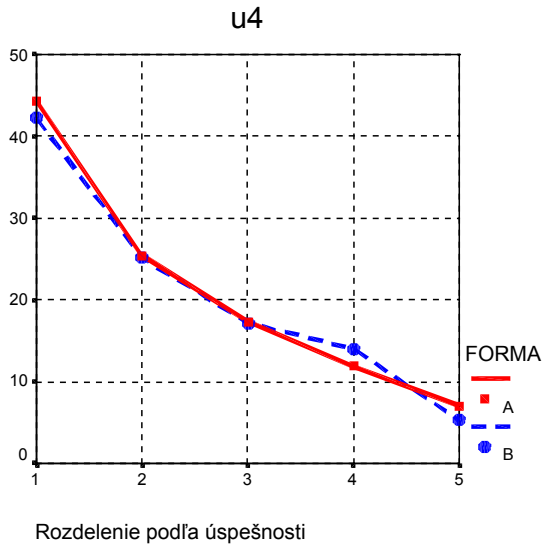
Môžeme si to pozrieť aj graficky pomocou viacnásobných čiarových grafov nazývaných aj polygónové grafy.



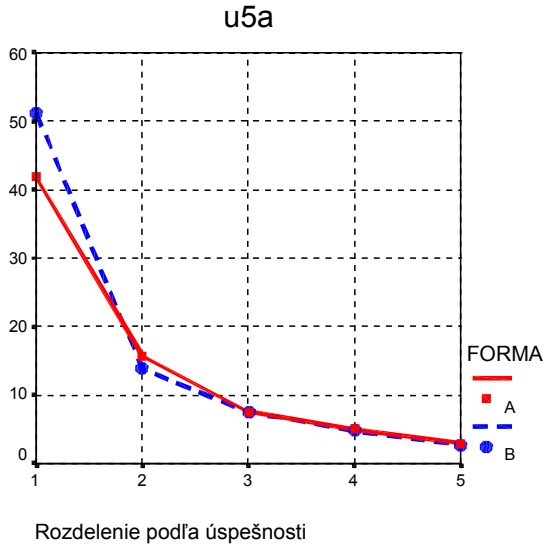


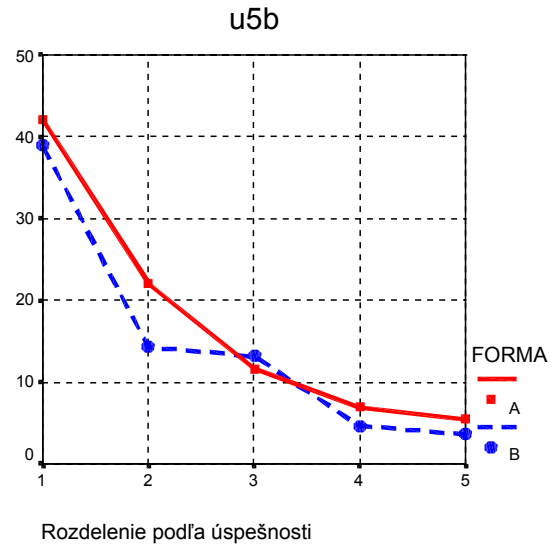
Vidíme, že rozdiel v prospech formy B bol pri úlohe **u2** medzi 1. a 2. skupinou najúspešnejších žiakov.





3) Polygónové grafy u1 u2 u3 u4 úspešnosti skupín žiakov porovnávané podľa foriem

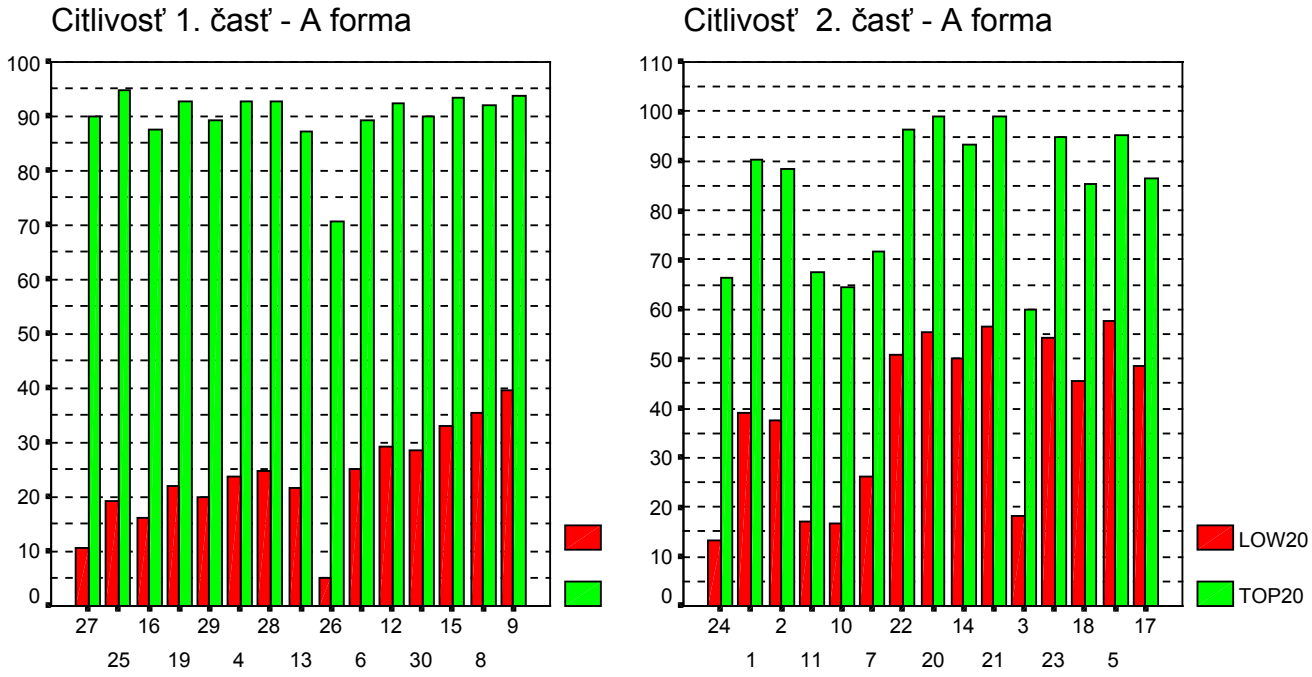




4) Polygónové grafy u5a u5b úspešnosti skupín žiakov porovnávané podľa foriem

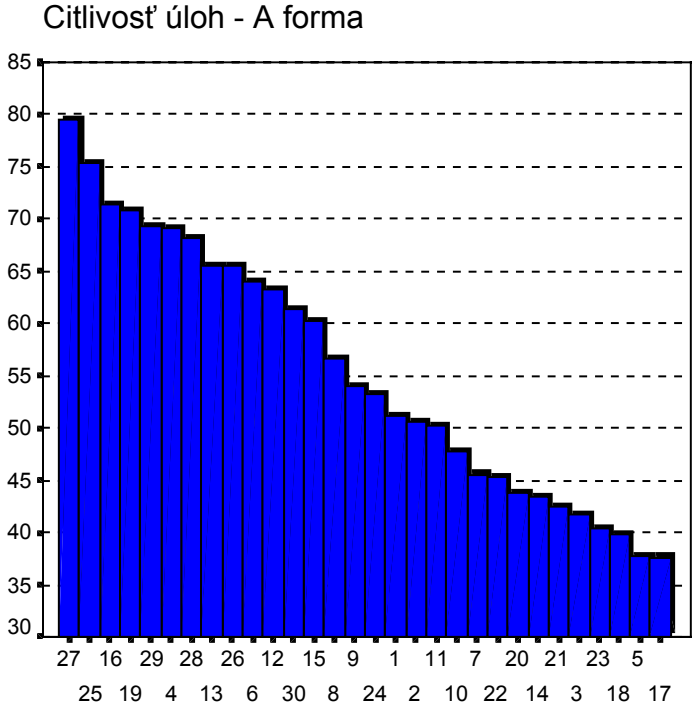
Citlivosť úloh v teste

Citlivosť úlohy definujeme ako rozdiel medzi úspešnosťou 1. a 5. skupiny, čiže rozdiel vo výsledku najúspešnejších 20 percent študentov (Top20) a 20 percent (Low20) najmenej úspešných študentov v danej úlohe.

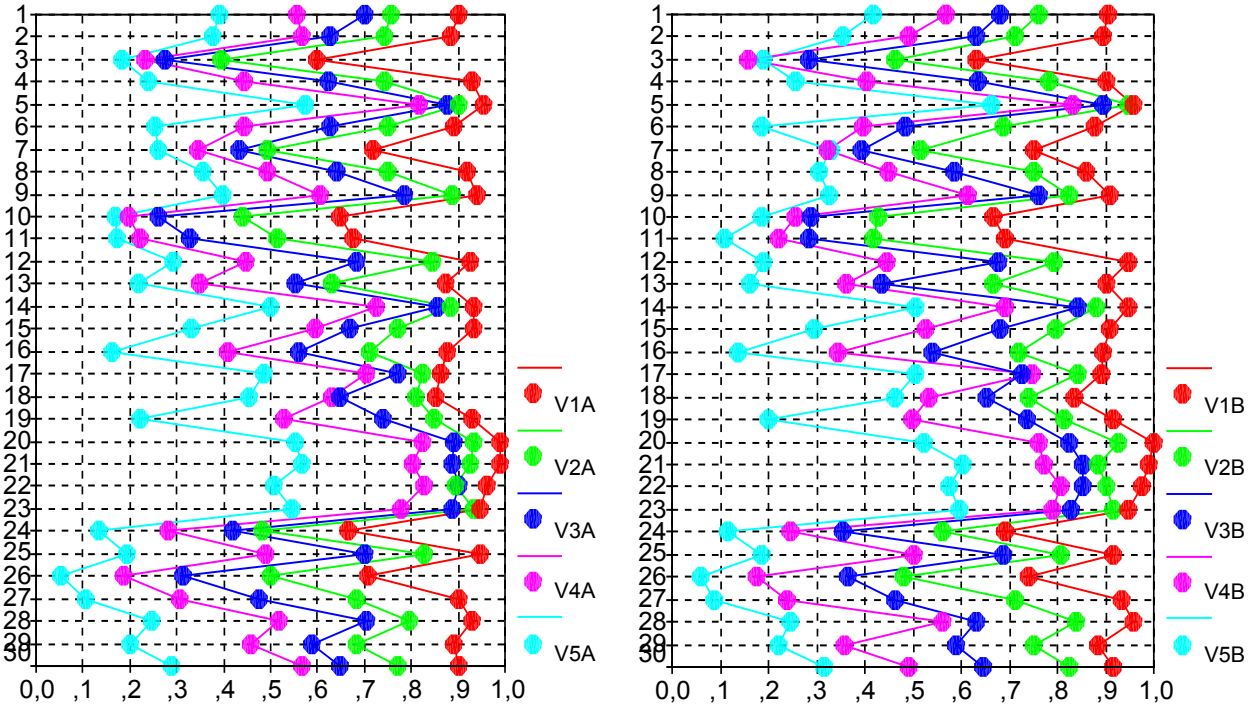


5) Graf: 1. časť úspešnosť najcitlivejších úloh zobrazenie 1. Top20 a 2. Low20

Je zaujímavé si všimnúť, že úlohy 27, 26, 24, 11, 10, 3 dosahujú relatívne vysokú úroveň citlivosti tým, že výkon najslabšej skupiny je nízky.



6) Graf: Citlivosť úloh 1 až 30 z 1. časti testu z matematiky



7) Grafy: A forma – Úspešnosť žiakov v skupinách – B forma

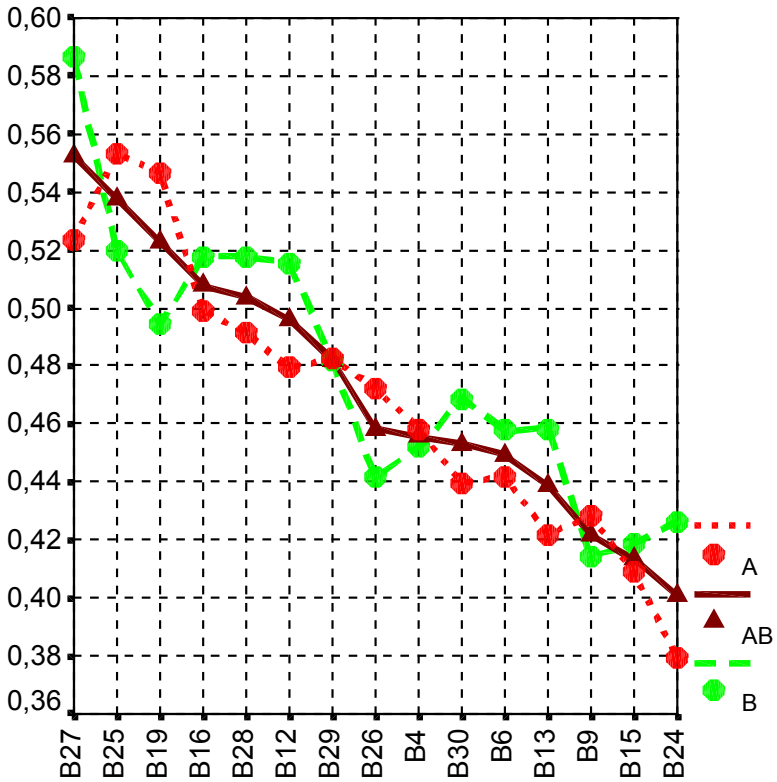
Graf 7 nám umožňuje porovnať výkony jednotlivých skupín žiakov. Od najúspešnejšej 1. skupiny až po 5. skupinu. Zaujímavé je porovnať skupiny podľa formy. Napríklad žiaci z piatej skupiny dosiahli pri úlohách 10, 11 vo forme A porovnateľné výsledky a vo forme B pri úlohe 11 boli cca o 9 % slabší ako pri úlohe10.

Vzťahy medzi položkami testu

Reliabilita testu meraná Crombachovým Alpha, čo v prípade dichotomických premenných je totožné s KR-20 = 0,875. Môžeme povedať, že reliabilita testu z matematiky je dostatočne vysoká.

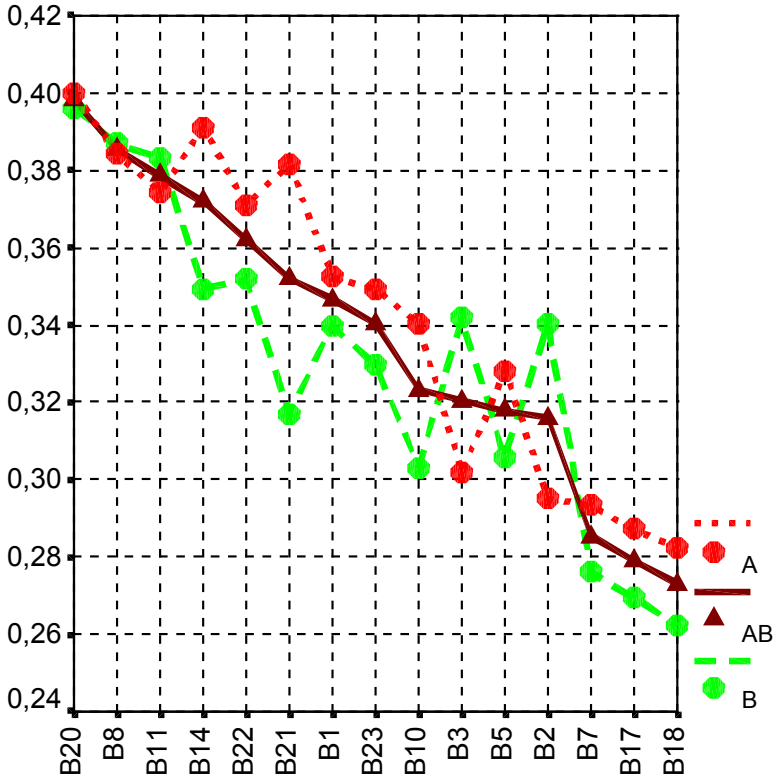
Ďalej si všímame koeficienty medzipoložkovej korelácie pre jednotlivé úlohy.
Čím je vyšší vzájomný koeficient korelácie, tým je položka v teste platnejšia, tým má väčšiu previazanosť s tým, čo daný test meria. Platí to aj naopak. Položku, ktorá má nízky koeficient medzipoložkovej korelácie treba v ďalšom zmeniť a to napríklad preformulovaním, nahradením inou položkou, ktorá by testovala tú istú oblasť učiva, ale inak.

1. Medzipoložkové korelácie úloh 1...30



8) Graf: Medzipoložkové korelácie úloh 1...30 – 1. časť

2. Medzipoložkové korelácie úloh 1...30



9) Graf: Medzipoložkové korelácie úloh 1...30 – 2. časť

POLOZKA	KOREL_A	KOREL_B	ALPHA_A	ALPHA_B	PRIEM_A	PRIEM_B	STDCHY_A	STDCHY_B	CHYME_A	CHYME_B
B01	0,352	0,340	0,872	0,872	0,661	0,671	0,474	0,470	0,168	0,167
B02	0,295	0,340	0,874	0,873	0,638	0,621	0,481	0,485	0,170	0,172
B03	0,302	0,342	0,873	0,872	0,337	0,350	0,473	0,477	0,167	0,169
B04	0,458	0,452	0,870	0,870	0,595	0,602	0,491	0,490	0,174	0,173
B05	0,328	0,306	0,872	0,873	0,824	0,861	0,381	0,346	0,135	0,123
B06	0,442	0,458	0,870	0,870	0,594	0,532	0,491	0,499	0,174	0,177
B07	0,293	0,276	0,874	0,874	0,449	0,466	0,498	0,499	0,176	0,177
B08	0,384	0,387	0,871	0,871	0,632	0,595	0,483	0,491	0,171	0,174
B09	0,428	0,415	0,870	0,871	0,724	0,692	0,447	0,462	0,158	0,164
B10	0,340	0,303	0,872	0,873	0,344	0,368	0,475	0,483	0,168	0,171
B11	0,374	0,383	0,872	0,871	0,384	0,348	0,487	0,477	0,172	0,169
B12	0,479	0,515	0,869	0,868	0,641	0,617	0,480	0,486	0,170	0,172
B13	0,422	0,458	0,870	0,870	0,524	0,510	0,500	0,500	0,177	0,177
B14	0,391	0,349	0,871	0,872	0,779	0,778	0,415	0,416	0,147	0,147
B15	0,409	0,419	0,871	0,871	0,659	0,647	0,474	0,478	0,168	0,169
B16	0,499	0,518	0,868	0,868	0,545	0,534	0,498	0,499	0,176	0,177
B17	0,287	0,270	0,874	0,874	0,730	0,744	0,444	0,436	0,157	0,155
B18	0,283	0,262	0,874	0,874	0,680	0,648	0,467	0,478	0,165	0,169
B19	0,547	0,494	0,867	0,869	0,654	0,640	0,476	0,480	0,169	0,170
B20	0,400	0,396	0,871	0,871	0,837	0,810	0,369	0,393	0,131	0,139
B21	0,382	0,317	0,871	0,873	0,834	0,824	0,372	0,381	0,132	0,135
B22	0,371	0,352	0,872	0,872	0,817	0,825	0,387	0,381	0,137	0,135
B23	0,349	0,330	0,872	0,873	0,818	0,818	0,386	0,386	0,137	0,137
B24	0,380	0,426	0,872	0,870	0,396	0,398	0,489	0,490	0,173	0,173
B25	0,554	0,520	0,867	0,868	0,633	0,626	0,482	0,484	0,171	0,171
B26	0,472	0,442	0,869	0,870	0,353	0,370	0,478	0,483	0,169	0,171
B27	0,524	0,586	0,868	0,866	0,496	0,495	0,500	0,500	0,177	0,177
B28	0,491	0,518	0,869	0,868	0,639	0,651	0,480	0,477	0,170	0,169
B29	0,482	0,482	0,869	0,869	0,564	0,568	0,496	0,496	0,176	0,176
B30	0,440	0,469	0,870	0,869	0,635	0,644	0,482	0,479	0,171	0,170

10) Tabuľka štatistických charakteristík dichotomických úloh 1...30

Medzipoložkové korelácie otvorených úloh v A a B forme

1.skupina

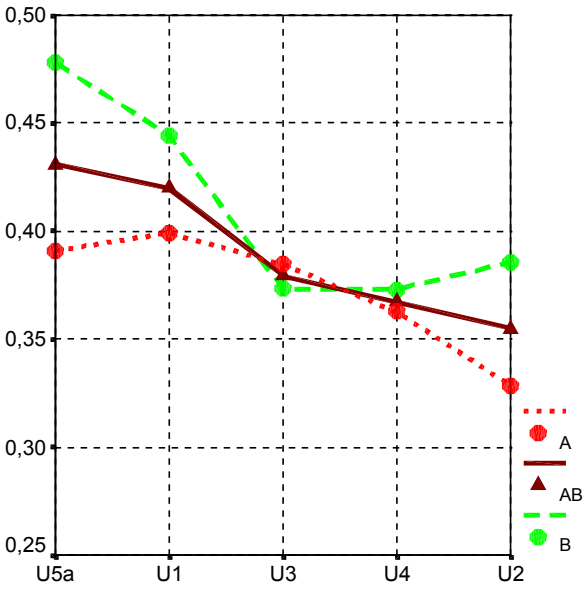
A forma		Priemer	Štd Odch	Počet žiakov
1.	U1	1,2895	2,0608	829
2.	U2	1,6671	1,9400	829
3.	U3	2,3691	2,1622	829
4.	U4	1,3269	1,6146	829
5.	U5A	1,2943	2,2079	829

2.skupina

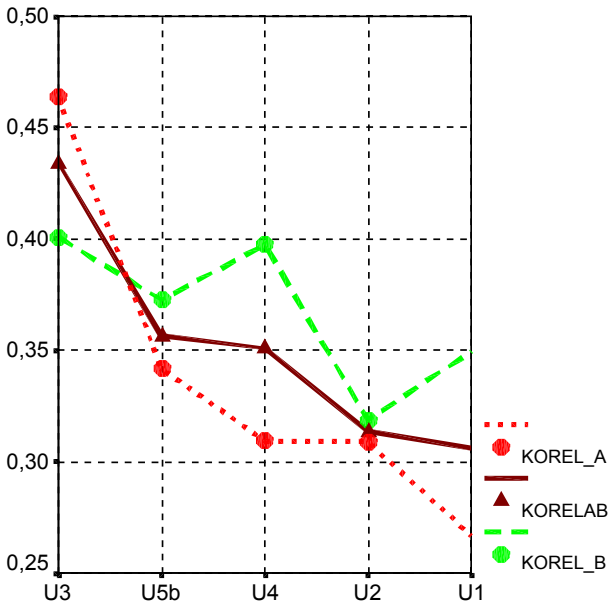
A forma		Priemer	Štd Odch	Počet žiakov
1.	U1	1,2444	2,0086	266
2.	U2	1,2368	1,7720	266
3.	U3	2,7218	2,1486	266
4.	U4	1,0977	1,5363	266
5.	U5B	1,6429	2,0067	266

Otvorené úlohy sme pri analýze rozdelili na dve skupiny, podľa piatej otvorenej úlohy. Jedna časť žiakov si vybrala ako úlohu 5a, druhá časť žiakov zase úlohu 5b. Vznikla takto skupina žiakov číslo 1 riešiacich úlohy u1, u2, u3, u4, u5a, ďalšia skupina 2 žiakov zase riešiacich úlohy u1 až u5b. Tieto dve skupiny žiakov nemajú žiadneho žiaka spoločného.

1. skupina u1...u5a



2. skupina u1...u5b



	u1+...u5a **A forma**	u1+...u5a **B forma**	u1+...u5b **A forma**	u1+...u5b **B forma**
Aditivita				
Sign.	0,044	0,47	0,000	0,001
Tukeyho c	0,83	0,94	0,47	0,62
Model ALPHA				
Koeficienty reliability				
Alpha	0,617	0,654	0,578	0,608
Štandardiz. Alpha	0,619	0,655	0,577	0,616
Alpha po vynechaní položky				
U1	0,548	0,585	0,563	0,561
U2	0,584	0,612	0,537	0,575
U3	0,556	0,619	0,439	0,533
U4	0,572	0,620	0,539	0,548
U5	0,553	0,567	0,519	0,548

Pozn.: Vynechaním položky ani v jednom prípade nezväčšíme hodnotu reliability škály

Pri otvorených úlohách vzniká nasledujúci problém. Všimnime si, že hoci je úloha 5b 9 bodová, priemerný bodový zisk na žiaka v A forme bolo 1,6 bodu, čo je výrazne menej ako pri 5 bodovej úlohe u2, kde to bolo 2,7 bodu.
Analýzou reliability sme zistili, že aby sme mohli pri jednotlivých žiakoch sčitovať body za úlohy u1, ... u5b (aby bola škála aditívna) tak by bolo treba najskôr jednotlivé bodové skóre umocniť pri forme A na 0,47 a pri forme B na 0,62. Čo hrubšie povedané by znamenalo, odmocniť bodové skóre za úlohy u1...u5b. T. j. výsledné skóre žiaka z otvorených úloh by bolo

$$skore=\sqrt{u1}+\sqrt{u2}+\sqrt{u3}+\sqrt{u4}+\sqrt{u5b}$$

čo je z pedagogického hľadiska neprijateľné.
Pri testovaní v budúcnosti doporučujeme radšej viac otvorených úloh, napríklad šesť úloh po päť bodov.

Výsledky faktorovej analýzy položiek metódou Varimax uvádzame len v skratke, pretože si zaslúžia väčší priestor a pedagogickú interpretáciu a analýzu.
Úlohy sme podľa 2 faktorov rozdelili na dve skupiny. Jednu skupinu nazývame úlohy matematické skúmajúce faktor nadania na matematiku a druhú skupinu úlohy „špekulatívne“, skúmajúce faktor prirodzenej chytrosti (inteligencie) žiaka.

Príklady „špekulatívne“:
- ✓ b1, b2, b3, b5, b17, b18, b20, b21, b22, b23, b24, b25, b27, b29, b30.

„matematické“:
- ✓ b4, b6, b7, b8, b9, b10, b11, b12, b13, b14, b15, b16, b18, b19, b26, b28

Čísla uvádzaných položkových úloh sú z testu M11A t. j. test 1. časť A forma.

Korelácie Forma A

		S_BODY	M_BODY
S_BODY	Pearson Correlation	1	,695**
	N	1095	1095
M_BODY	Pearson Correlation	,695**	1
	N	1095	1095

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Korelácie Forma B

		S_BODY	M_BODY
S_BODY	Pearson Correlation	1	,689**
	N	935	935
M_BODY	Pearson Correlation	,689**	1
	N	935	935

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Vidíme, že vzájomná korelácia existuje, koeficient determinácie je cca 47 %, čo naznačuje istú nezávislosť týchto dvoch skupín.

Úlohy z testu z matematiky M1 z monitoru 2002 možno nájsť na stránke Štátneho pedagogického ústavu na adrese
http://www.spu.sanet.sk/maturita/monitor2002.htm, kde sa nachádzajú štyri dokumenty typu pdf
Test M1 1.časť forma A http://www.spu.sanet.sk/maturita/Monitor2002/Testy/M11A.pdf
Test M1 1.časť forma B http://www.spu.sanet.sk/maturita/Monitor2002/Testy/M11B.pdf
Test M1 2.časť forma A http://www.spu.sanet.sk/maturita/Monitor2002/Testy/M12A.pdf
Test M1 2.časť forma B http://www.spu.sanet.sk/maturita/Monitor2002/Testy/M12B.pdf

To je len krátka ukážka z položkovej analýzy testu. Akékoľvek bližšie otázky prosím na adrese Olga.Zelmanova@spu.sanet.sk.

FEUERSTEINOV KURZ INŠTRUMENTÁLNEHO OBOHACOVANIA

Ján Žabka, 1. súkromné gymnázium Bajkalská 20, Bratislava

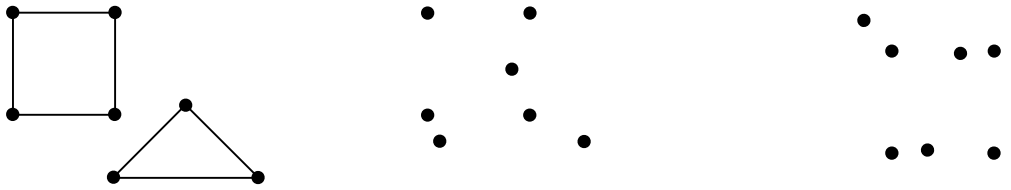
Vo februári školského roka 2002/2003 som sa zúčastnil v Třebíči dvojtýždňového kurzu inštrumentálneho obohacovania. Kurz bol vedený doc. Věrou Pokornou z Pedagogickej fakulty v Prahe. Jeho náplňou bolo zoznámenie sa s inštrumentami, ktoré vypracoval Reuven Feuerstein, v súčasnosti riaditeľ Hadassah-WIZO-Canada – výskumného inštitútu v Jeruzaleme.

R. Feuerstein sa narodil v roku 1922 v Rumunsku, po druhej svetovej vojne emigroval do Izraela, študoval u Jeana Piageta a Andree Reya v Ženeve. Doktorát z vývojovej psychológie získal na Sorbone. V Izraeli sa venoval deťom, ktoré prešli koncentračnými tábormi podobne ako on a ostali samé. Uvedomil si rozpor medzi výkonmi, ktoré museli tieto deti podávať v koncentračnom tábore, kde sa osvedčili v extrémnych podmienkach, ale nevedeli sa prispôsobiť novému kultúrnemu a spoločenskému súžitiu. Neboli pripravené na bežný život. Okrem týchto detí do Izraela v päťdesiatych a šesťdesiatych rokoch prišli ročne tisíce detí, ktoré predtým žili v rôznych kultúrach, v rôznych štátoch. Všimol si, že niektoré deti zlyhávajú v škole napriek vysokému IQ, ktoré bolo diagnostikované testami. Naopak, deti, ktorých IQ nadobúdalo priemerné alebo podpriemerné hodnoty, boli v bežnom živote často úspešnejšie. Niektoré deti sa naučili v škole zručnosti, ktoré za pár dní alebo dokonca hodín zabudli. Veľká časť detí si nebola schopná nové poznatky veku primerane triediť a štrukturovať, často nevedeli tieto poznatky aplikovať v bežnom živote.

R. Feuerstein začal preto študovať otázky kognitívnej a vývojovej psychológie. Postupom času vytvoril vlastnú metodiku, ktorá má slúžiť rozvoju kognitívnych schopností detí aj dospelých – Instrumental Enrichment. Zoznámenie sa s inštrumentami, ktoré sú súčasťou tejto metodiky, bolo náplňou vyššie spomenutého kurzu.

Vzhľadom na obmedzený čas a priestor sa pokúsim len veľmi rýchlo a útržkovito zoznámiť vás s obsahom tohto kurzu a možno vás aj motivovať k jeho absolvovaniu. Úlohy, ktoré budú uvedené nižšie, nie sú originálne úlohy, vytvoril som ich sám, motivovaný prvou sadou úloh, ktoré Feuerstein nazýva inštrumentmi. Prvý inštrument má názov „Usporiadanie bodov“.

Riešte úlohu:

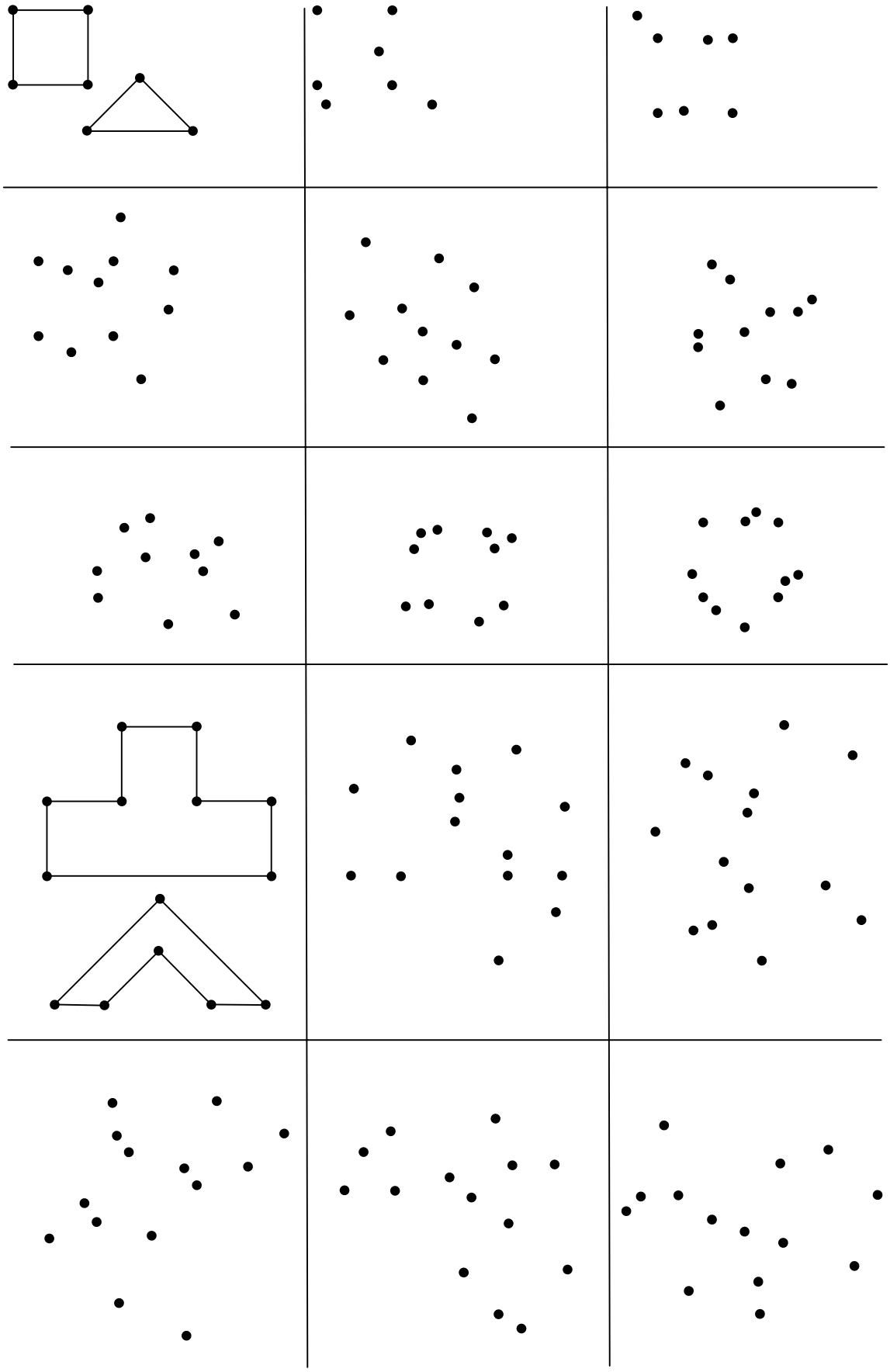


Väčšina detí po takto zadanej úlohe začne bodky ihneď spájať. Úloha však vlastne nemá zadanie, musíme si ho domyslieť. Pri spoločnej diskusii vznikajú veľmi zaujímavé námety, čo sa dá „s bodkami“ robiť. Môžeme diskutovať tiež o tom, kde sa človek v bežnom živote stretáva s takto nejasne alebo dokonca nijako zadanou úlohou, kde v bežnom živote chýbajú informácie a musíme ich domýšľať, hľadať, vydedukovať. Môžeme pohľadať v slovníku cudzích slov, čo znamená explicitná (informácia, zadanie, ...) a implicitná (informácia, zadanie, ...).

Po iste podnetnej diskusii môžeme k úlohe doplniť zadanie, ktoré tam chýbalo: *„Pospájajte bodky tak, aby vám vznikli útvary zhodné* (totožné? – znamená to v matematike to isté? A v bežnom živote? Uveďte príklady.) *so vzorovými. Ako vrcholy útvarov musíte použiť všetky bodky, žiadnu nesmiete vynechať. Žiadna bodka nesmie byť vrcholom viac ako jedného útvaru. Útvary sa môžu prekrývať, Pri kreslení nemôžete otáčať hlavou ani papierom.“* Je toto zadanie kompletné? Ak nie, čo v ňom chýba? Ak áno, odkiaľ to viete?

Takáto diskusia je pre deti určite prínosom. Naučia sa veľmi veľa o nuansách jazyka, kým sa im podarí zadanie takto sformulovať, prípadne takúto formuláciu pochopiť.

Po spresnení zadania však ešte neprichádza fáza riešenia. Deti musia vymyslieť stratégiu. Najskôr však musia vedieť, čo to stratégia je. Používajú v bežnom živote nejakú stratégiu? Kde? Akú? Je dobrá? Akú stratégiu použijú pri riešení našej úlohy? Majú všetci rovnakú stratégiu? Prečo? Ktorá je najlepšia? Po zodpovedaní týchto otázok sa deti môžu pustiť do riešenia:



Po zväčša úspešnom zdolaní týchto úloh môže nasledovať ďalšia diskusia o stratégiách, o ich zmene, čo k tejto zmene vedie a pod. Závisí najmä od detí a od priestoru, ktorý pri diskusii majú, ako ďaleko sa dostaneme. Ale deti diskutovať chcú a zaujíma ich to.

Po tejto úlohe väčšie deti určite zvládnu aj ťažšie úlohy, uvedené v závere. Zadanie je rovnaké so zadaním prvej úlohy.

Samozrejme, v Usporiadaní bodov je takýchto strán úloh oveľa viac. Tvoria pomerne prirodzenú a ucelenú zbierku pekných monotematických úloh. Každý list je však dôležitý predovšetkým diskusiou, ktorá prebieha, nie samotným riešením, i keď to je tiež dôležité. V Usporiadaní bodov je napríklad samostatná časť venovaná chybám a tomu, ako nám pomáhajú. Mnoho účastníkov kurzu bolo veľmi prekvapených, keď sme sa rozprávali o tom, že aj na chybu je možné hľadieť pozitívne. Sú tam i úlohy, ktoré nemajú jednoznačné riešenie, s čím sa mnoho ľudí síce stretáva v živote pomerne často, ale v škole, bohužiaľ, zriedka. Pri práci s Feuersteinovými inštrumentami sa dbá aj na rozvíjanie reči, podporovanie vnútornej motivácie a postupne aj na reflektovanie svojich myšlienok a sledovanie spôsobov vlastného uvažovania.

Náplňou prvého z troch kurzov sú okrem Usporiadania bodov aj tri ďalšie inštrumenty: Porovnávanie, Orientácia v priestore I a Analytické vnímanie. Každý z týchto inštrumentov má špecifické ciele, ale hlavný cieľ – rozvoj kognitívnych funkcií – je spoločný.

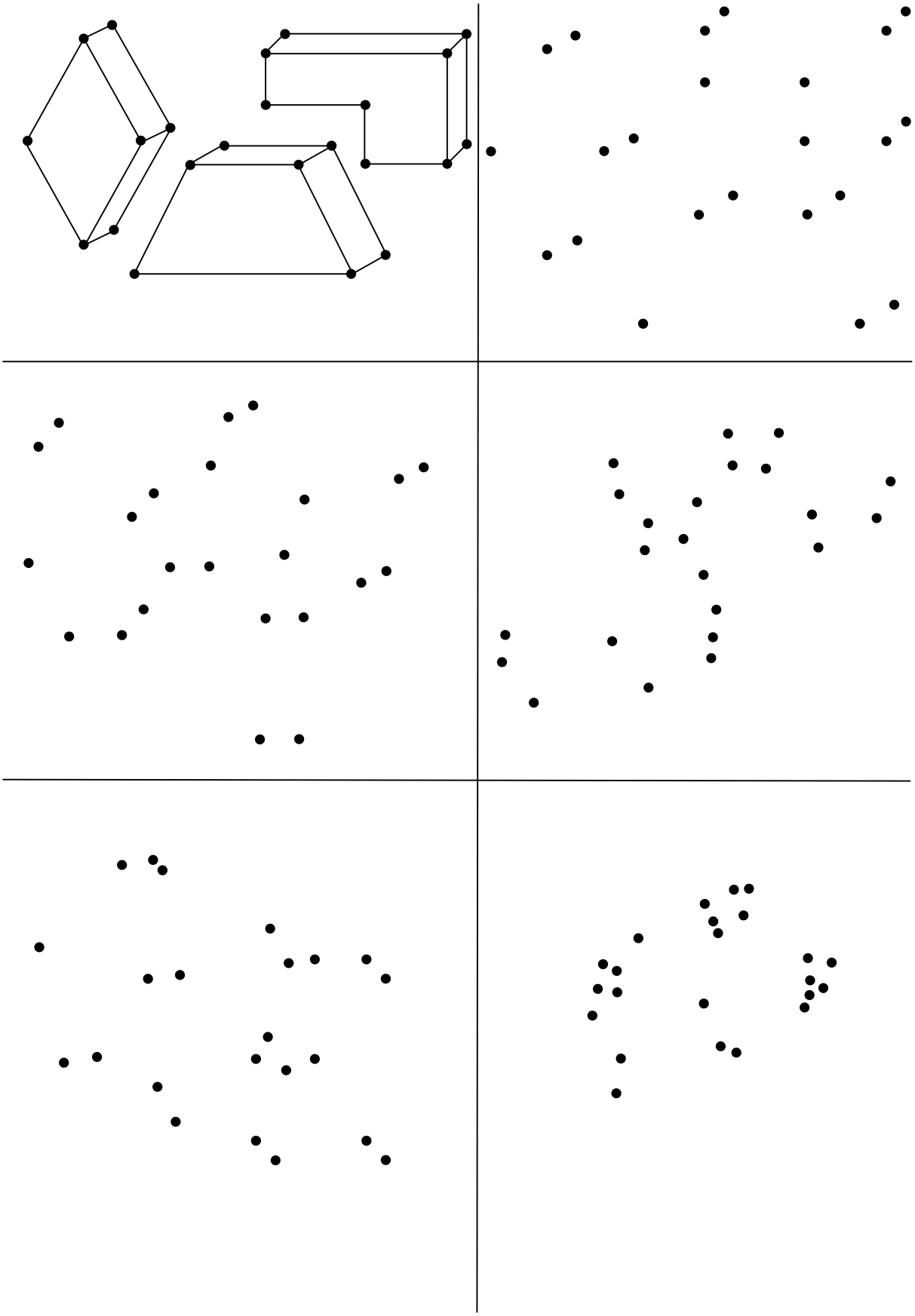
Okrem toho, že sme na kurze postupne veľmi podrobne prechádzali tieto štyri inštrumenty, sme sa sami učili diskutovať, snažili sme sa analyzovať naše vlastné úvahy, pokúšali sme sa čo najpresnejšie vyjadrovať. Mali sme aj mnoho vlastných prekvapujúcich zážitkov. Mnohí z nás si skúsili, čo to znamená byť v pozícii žiaka, aké je to ťažké na prvýkrát zachytiť zadanie úlohy, porozumieť mu a úlohu správne vyriešiť. Mnohí sme si vyskúšali, aké je to príjemné byť pochválený aj keď nie som prvý alebo dokonca nemám všetko správne. Stačí pochváliť za to, čo je správne, a teda u každého sa dôvod na pochvalu nájde. A veľa z nás bolo prekvapených, že úloha, o ktorej sme sa hádali, že má jediné správne riešenie, má riešení viac a dokonca ich vieme samy objaviť a obhájiť ich. Pani doc. Věra Pokorná nám tiež porozprávala mnoho zážitkov z jej bohatej pedagogickej a psychologickej praxe. Vzhľadom na pestrosť účastníkov kurzu sme sa dozvedeli mnoho podnetného i z iných oblastí. Odchádzali sme s množstvom myšlienok a podnetov, ktoré chceme využiť u nás v škole na novom predmete „Učím sa učiť“, ktorý budeme pokusne overovať v prime a v kvarte v školskom roku 2003/2004.

Literatúra:

[1] Pokorná, V.: Teória, diagnostika a náprava špecifických porúch učenia, 2. vydanie, Praha, Portál

[2] Pokorná, V.: Reuven Feuerstein a jeho metóda inštrumentálneho obohacovania

[3] www.google.com: reuven feuerstein instrumental enrichment



e-mail: zabco@centrum.sk

VEČER HUDBY

Peter Bero, Bratislava

1. Warren G & Sissel
2. Bond
3. Handel (The Messiah, Hallelujah, And He Shall Purify)
4. Gregoriánske chorály
5. Themas Tallis (Spem in alium)
6. Boris Christoff (Velika ektenia)
7. Sarah Brightman (Timeless)
8. Ariel Ramirez (Missa criolla)
9. Guido Haazen (Missa luba)
10. Missa flamenca
11. Afro-American gospel
12. Winds of Worship
13. Žiarislav a Bytosti (Ochraňuj nás Živa, Jarná)
14. Andrea Bocelli & John Mils (Miserere)
15. Martin Babjak
16. Vanessa Mae
17. Sarah Brightman (So many things)

e-mail: avalon@nextra.sk

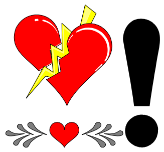
PRE ČO? ... „PREČO?“ ...

Ivan Masaryk, Nadácia Ingenium, Bratislava

2 Čo obsah je,
3 to FORMA vie !
2 Bo obsah je sťa Barla Stará,
3 no forma sa len o Moc Stará.

----

1 ONA je jak obrázok,
...
1 krehká číri peniažťok



3 Peniažťok ?
4 PENIaz ??
5 MAJETOK ???
6 Nieéé !!!!!!

3 Depresia !
4 KABát !!
6 ÚPADOK !!!
7 NIEÉÉ !!!!!!

~~~~~~

===

~~~~~~

@ Chŕŕ, chŕŕ, chŕŕŕŕ, kví, kvííí, chr,chr,chr.

3 Takomole, Kakomole, Sakomole, Makomole,
3 Takomole, Kakomole, Sakomole, Makomole,
4 Takomole, Kakomole, Sakomole, Makomole,
5 Takomole, Kakomole, Sakomole, Makomole,

7> VAROZETOPIKAkáá, VAROZETOPIKAkáá
6> AKAKIPOTEZArááv, AKAKIPOTEZArááv.
----
5 JEDOKANUNAKODEJ ! JEDOKANUnakodej,
4 Jedokanunakodej, Jedokanunakodej,
3 Jedodej, Jedodej, Jedodej, Jedodej,
2? Jedodej, Jedodej ?, Jedodej ?, Jedodej.

4> Trrchch, trrchch, tŕŕŕchchch, KVIíííUK !!, tch, tch, tch ...

----

5 Eéééé, Wueééé, @HAAA, ééééééé --- ---.
----
2 Gogigogigoigiií

2..2 VA RO ZE TO PI KA ká ?, VARO ZETO PIKA ká ?
AKA KI PO TEZA ráv ?, AKAKI POTEZA ráv ?

3< TakomoLE, KakomoLE, SakomoLE, LAkomoLE,
1 Goóó?
2 VA RO ZETOPIKA ?!, AKAKIPO TÉZA ?!
4 TakomoLE, KakomoLE, SakomoLE, LAkomoLE,
@ KĽľ !?!
5 TakomoLE, KakomoLE, LakomoLE, LakomoLE

4< NonoNoNononoNoóóó !
----
6 CHAchaCHACHAchachaCHAÁÁ !!!!!!

4 LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE
5 LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE
6 LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE
7 LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE, LAKOMOLE
8..8 LA-KO-MO-LE !

4> VAROZETOPIKAkáá, VAROZETOPIKAkáá,
3> AKAKIPOTEZAráá v, AKAKIPOTEZAráá v.

~~~~~~

==

~~~~~~

@ Chŕŕ, Chŕŕ, Chŕŕŕŕŕŕ, KVÍÍ, KVÍÍÍÍ, CHr, CHr, CHr.

10 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! NIE !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

4> Povie mi niekto Pre koho,

Pre čo ? ...Zase... „PREČO ?“ ... !!!

Niva, Mak a syr

Ak chcete vedieť čítať túto báseň, domyslite si, čo znamenajú značky a čísla, vedzte však, že @ bol myslený ako vdychovanie nasledujúceho textu a čísla ako sila emócií, či sila hlasu. Ak sa chcete naučiť takúto báseň predniesť, musíte si vymyslieť i slová i značky a ja sa už teraz teším na Váš príbeh plný emócií, ale bez obsahu. Báseň som napísal už v roku 1997, ale prvý krát je publikovaná až v tomto zborníku. Za pseudonym, prešmyčku, by som chcel poďakovať Peťovi Novotnému.

e-mail: masaryk@ingenium.sk

ISBN 80-968815-6-6