Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Letná škola z teórie vyučovania matematiky

P Y T A G O R A S 2002

Kováčová pri Zvolene, 29. 6. – 6. 7. 2002

Zborník príspevkov

Vydané s podporou grantu GACR 406/99/1696
„Paralela poznávacích a vzdělávacích procesů v matematice“

Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2002, ktorá sa konala v dňoch 29.6. – 6.7. 2002 v Kováčovej pri Zvolene pod záštitou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov.

ISBN: 80-968815-1-5

Zostavovatelia: Vladimír Burjan, Milan Hejný, Štefan Jány

Grafická úprava, tlač a distribúcia: EXAM ®, P. O. Box 215, Vranovská 6, 854 02 Bratislava 5
(+4212) 63 81 26 89, 63 82 49 52,
email: info@exam.sk
Internet: www.exam.sk

Vydané s podporou grantu GACR 406/99/1696 „Paralela poznávacích a vzdělávacích procesů v matematice“

Náklad: 150 ks
Nepredajné

Obsah

Vážení priatelia,

máme pre vás dve informácie, radostnú a menej radostnú.

Najprv tú radostnú. Ako asi viete, vlani to bolo už po dvadsiaty piatykrát, čo sme sa stretli, aby sme sa v prázdninovom čase venovali radosti z dobre učenej matematiky. Ale po prvýkrát bolo naše stretnutie zaznamenané v písomnej podobe. Pre nás i potomkov. Prvý zborník príspevkov Pytagoras 2001 bol sponzorovaný a sponzor, grant GAČR, kladne hodnotil jeho úroveň odbornú i technickú. Preto bolo možné získať i pre rok 2002 potrebnú dotáciu na ďalší zborník – ten, ktorý teraz držíte v rukách. To bola tá dobrá správa.

Teraz tá menej radostná. Vlastne iba konštatovanie. Výzva uvedená v úvode k vlaňajšiemu zborníku ostala bez odozvy. Doteraz sa nenašiel dobrovoľník, ktorý by sa podujal mapovať históriu našich stretnutí, v zaužívanej terminológii, našich „exodov“. Preto si dovoľujeme výzvu opakovať. Boli by sme veľmi radi, keby sa materiály našich skorších stretnutí, uložené medzi lajstrami kdesi v pivniciach pamätníkov alebo v zadnejších priestoroch ich blednúcej pamäti, začali vynárať na svetlo božie. Potom by sa hádam našli priatelia, ktorí by to utriedili a pripravili ako Históriu pytagorejských a predpytagorejských stretnutí v rokoch 1977 – 2002.

Prajeme vám úspešný školský rok 2002/2003 a začiatkom júla 2003 v Kováčovej dovidenia.

Vladimír Burjan <burjan@exam.sk>
Milan Hejný <milan.hejny@pedf.cuni.cz>
Štefan Jány <nndkjany@nextra.sk>

SEZAM – KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR PRE II. STUPEŇ ZŠ A JEHO 15-ROČNÁ HISTÓRIA

Hynek Bachratý, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita, Žilina

1. ZAČIATKY

Moja osobná skúsenosť so záujmovou matematikou v Žiline siaha do rokov 1984-85. Spája sa s menom dr. Jána Perenčaja, učiteľa VŠDS. V rámci spolupráce s Milanom Hejným sa zoznámil s mimoškolskými formami práce s deťmi a rozhodol sa „rozbehnúť" ich aj v Žiline. Oslovil a presvedčil skupinku študentov VŠDS (ktorí mali len skromné osobné skúsenosti so stredoškolskými korešpondenčnými seminármi), ktorá sa začala venovať matematickým krúžkom. V roku 1986 pre tieto deti zorganizoval v Terchovej TMM pod vedením Milana Hejného. Aj v ďalších rokoch bola neoceniteľná jeho organizačná práca a skrývala sa za väčšinou žilinských aktivít. Ján Perenčaj už žiaľ nie je medzi nami, takže poďakovanie za jeho buditeľskú a organizačnú prácu mu nemôžeme tlmočiť osobne ...

S prosbou o pomoc a podporu sa obrátil aj na Bratislavský ZAMAT. Tak som sa už počas vysokoškolského štúdia ocitol párkrát v Žiline a na pracovných seminároch dostal chuť budovať a rozvíjať to, čo sa nám v Bratislave už začínalo zdať samozrejmé.

Po presťahovaní sa do Žiliny bolo preto ďalším logickým krokom založenie korešpondenčného seminára pre II. stupeň ZŠ. Vznikol v roku 1986 pod názvom SPIKOMAT (Stredoslovenský PIKOMAT), od PIKOMATu okrem skúseností prebral aj vtedajšiu kategóriu „hostia", ktorú hlavne na Orave zabezpečoval Števo Jány. Pridali sa riešitelia zo Žiliny a Považia, rozbehli sa sústredenia a tábory pre najlepších. Na prvej generácii vedúcich sa prejavil známy efekt – nie len „čistí matici" z MFF, ale aj technickí kyberneti z VŠDS konvertovali k pedagógom. A podobne dopadli mnohí z prvej generácie detí ...

Začiatkom 90-tych rokov sa názov seminára zmenil na SEZAM a medzi vedúcimi sa začali objavovať jeho prví „odchovanci". V ďalšom by som sa chcel už venovať súčasnej podobe našej práce.

2. VEDÚCI

Pre štruktúru vedúcich SEZAMu je už viac rokov príznačný jej „multigeneračný charakter". Neobmedzuje sa teda napr. len na niekoľko silných ročníkov, prípadne len študentov VŠ, ale plánovito a úmyselne má širší záber. Stručne by sa dala popísať takto :

- „Malé deti": Ide o študentov 1. alebo 2. ročníka gymnázia. Táto kategória je len občasná, jedná sa o natoľko angažované deti, že už v tomto veku túžia pomáhať aspoň pri „technických" prácach (obálkovanie, ...). K vážnejšej práci ich nepúšťame, ich hlavnou úlohou je „práca na sebe". Ide o 0 až 4 deti.
- „Veľké deti": Ide o 2 až 3 gymnazistov z 3. alebo 4. ročníka, najčastejšie z gymnázia Veľká Okružná v Žiline a v zásade zo severoslovenského regiónu. Cez túto kategóriu pravidelne dopĺňame náš „káder". K práci na seminári ich po dôkladnom zvážení pozývame na základe obojstranného (a predpokladáme, že aj dlhodobého) záujmu. Ide vždy o bývalých riešiteľov SEZAMu, ktorí naviac svoje matematické kvality a záujem prejavili aj v stredoškolských KS, olympiáde atď. Ich hlavnou úlohou je získavanie skúseností – v táboroch napr. začínajú na úrovni praktikantov. Na druhej strane na ich pleciach je veľká časť organizačného zabezpečenia korešpondenčnej časti seminára.
- „Malí dospelí": Ak sa neurazia, takto by som nazval cca 6 člennú skupinu našich vysokoškolákov. Väčšina z nich sú študenti FMFI UK. A tak ako asi všade, ide z prirodzených

dôvodov o najvýkonnejšiu a najzaťaženejšiu skupinu vedúcich. Bez nich by KS nefungoval – alebo si to aspoň neviem predstaviť.

- „Veľkí dospelí“: V tejto kategórii končia tí, ktorí prešli predchádzajúcimi a stále zostávajú „v službe“. V súčasnosti ide asi o 8 ľudí. Samozrejme, pracovné a rodinné povinnosti už menia zorný uhol a priority, ale minimálne radou a skúsenosťou prispejeme vždy a radi.

Viacero posledných rokov zatiaľ potvrdzuje funkčnosť tohto systému. Rôzne fluktuácie, od zahraničných pobytov po prírastky v rodine alebo zmeny zamestnania držia limitu počtu vedúcich v prirodzenom obore.

Široký kolektív umožňuje aj širšie možnosti deľby a organizácie práce. Na oprave úloh korešpondenčnej časti a zabezpečení sústredení a táborov sa podieľame v podstate všetci rovnakou mierou. Okrem toho sa vykryštalizovali nasledujúce funkcie :

- „Hlavný šéf“: organizačne zabezpečuje hlavne sústredenia a tábory, naháňa sponzorov. Ako vedúci SEZAMu vystupuje aj smerom ku deťom a rodičom.
- „Personálny šéf“: skúsenosťami sme dospeli k tejto metóde riešenia našťastie nie pravidelných, ale niekedy akútnych „personálnych“ problémov (príliš veľa vedúcich má záujem ísť do tábora a pod.). Personálny šéf má našu dôveru a veríme, že po príslušných konzultáciách je jeho definitívne rozhodnutie najlepšie možné.
- „Korešpondenčné vedenie“: organizačne zabezpečuje korešpondenčnú časť (príjem úloh, distribúciu ku opravujúcim a späť od nich, odosielanie materiálov ...). Ide o tradičnú úlohu „veľkých detí“ a autora príspevku.
- „Rada starších“: Nuž a pokiaľ niečo prestane fungovať tak, ako by malo, treba sa poradiť. Tu prichádzajú k slovu skôr skúsenosti, ako nadšenie. Našťastie, tento orgán je väčšinu času v hybernácii a aj preto sa zobúdza vždy v obnovenom zložení.

Najcennejšia vlastnosť alebo dôsledok tejto štruktúry spočíva v prirodzenej možnosti a potrebe priebežného (samo)vzdelávania a (samo)výchovy aj v kolektíve vedúcich. Vzhľadom na neustále dopĺňanie „odspodu“ môžeme, musíme a zároveň aj chceme vždy znovu preberať, prehodnocovať a v prípade potreby aj meniť zásady našej práce s deťmi. Verím, že viacero členov poslednej kategórie v tejto činnosti vidí ťažisko svojej práce.

Niekedy spontánne, niekedy plánovito sme si na toto odovzdávanie skúseností vytvorili viacero foriem:

- spoločný hodnotenie a výber úloh a príprava sérií korešpondenčnej časti seminára
- konzultácie pri opravovaní úloh
- spoločná príprava programu táborov a sústredení
- spoločná detailná príprava matematického programu sústredení
- individuálna spolupráca pri príprave jednotlivých programov
- večerné hodnotiace „schôdze“ na táboroch a sústredeniach
- účasť na programoch skúsenejších vedúcich
- individuálne rozhovory a rozbory programov
- „dozvuky“ táborov – rozbor ankety, riešenie dotazníkov účastníkov, ...
- víkendové školy nadácie Ingenium

Pre poriadok a poctivosť spomenieme aj niektoré potencionálne problémy v tejto oblasti. Ide skôr o zdvihnutý prst do budúcnosti, zatiaľ žiadny z nich nepociťujeme ako aktuálny.

- Tlak na omladzovanie vedúcich, tj. rozšírenie a „zrovnoprávnenie“ kategórie „malých detí“: Tento trend nepovažujeme za dobrý a vhodný, skôr naopak. Viaceré semináre tento tlak pociťujú a potrebujú ho riešiť, nám sa zatiaľ v zásade vyhýba.
- Miesto pôsobenia vedúcich: Časť vedúcich „funguje“ v Žiline a blízkom okolí, väčšia časť v Bratislave. Komunikáciu medzi vedúcimi zatiaľ zvládame a sme na ňu zvyknutí, veríme,

že to tak bude aj v budúcnosti. Problémy môžu nastať, ak naši vedúci, hlavne z radov študentov VŠ, zamieria ďalej.

- Odovzdávanie funkcií: Posledné roky máme šťastie na relatívne stabilné a kvalitné obsadenie vyššie spomenutej „funkcionárskej“ štruktúry. Dúfam že rovnako dobre zvládneme aj jej ďalšie zmeny.

Zhrnuté a podčiarknuté: možnosť pravidelne sa stretávať, pracovať a byť v kolektíve našich vedúcich je dôležitou súčasťou motivácie a aj odmeny za prácu v SEZAMe.

3. OKOLIE

Seminár SEZAM rôznymi formami spolupracuje, kooperuje a spoluexistuje s viacerými organizáciami. Niektoré sa objavujú aj v hlavičke našej korešpondencie. Spomenieme ich (a poďakujeme) v abecednom poradí:

- JSMF, pobočka Žilina: počas celej existencie SEZAMu nás oficiálne zastrešuje, využívame jej pečiatku, účty a autoritu. V malej miere využívame aj jej finančné a technické prostriedky.
- GVOZA – matematické gymnázium Veľká Okružná, Žilina: Už dlhé roky poskytuje riešiteľom SEZAMu svoju adresu. Ale mnohým z bývalých riešiteľov aj „strechu“ nad hlavou. Myšlienka vyhľadávať pre toto gymnázium matematické talenty bola pri samotnom zrode SEZAMu. Aj keď v posledných rokoch sa ponuka stredoškolského štúdia rozšírila, ešte stále sa veľa riešiteľov SEZAMu schádza v matematických triedach tohto gymnázia – a snáď aj pomáhajú zvýšiť ich úroveň. Z týchto tried zároveň dopĺňame „káder“ vedúcich.
- FRI ŽU – Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity: Okrem zamestnania pre niektorých vedúcich, využívame občas jej materiálne a priestorové zázemie. A posledné 3 roky nám zapožičala do tábora počítače – to bola ozaj citeľná pomoc a podpora.
- SKMS – Stredoslovenský korešpondenčný seminár (stredoškolský): Značne „spriaznený“ stredoškolský KS. Máme mohutný prienik vedúcich a silný presun riešiteľov. SKMS zmierňuje potoky deviatackých sĺz na konci tábora – veď môžu pokračovať ďalej vo veľmi podobnej partii. Od nového školského roku ubudlo S a ide o KMS.
- Nadácia INGENIUM: Ide o spoločný projekt viacerých KS, zameraný na podporu a zlepšovanie ich činnosti. Zatiaľ najzaujímavejšou aktivitou nadácie sú víkendové školy pre vedúcich KS, na ktorých sa aktívne podieľame aj ako organizátori, aj ako účastníci.
- Finančná podpora: Využívame ju hlavne na pokrytie časti nákladov na sústredenia a tábory – skutočná cena by bola pre mnohých rodičov už neakceptovateľná. Vďaka za príspevky patrí rôznym nadáciám, podnikom, starostom a iným organizáciám.

4. KOREŠPONDENČNÁ ČASŤ

Keďže sa prvýkrát dostávame k detailom, upresním, že v súčasnosti je SEZAM určený žiakom 7., 8. a 9.ročníka ZŠ a najnadanejším šiestakom. Samozrejme tiež zodpovedajúcim ročníkom osemročných gymnázií. Šiestakov berieme na sústredenia len ak sa umiestnia do 20 miesta v poradí, čo značne znížilo ich počet.

Korešpondenčná časť má dosť tradičný charakter. Každý polrok žiaci riešia 3 série po 4 úlohy. Všetky úlohy sú určené pre všetkých, vekové rozdiely kompenzujeme systémom prémií. Na riešenie bývajú k dispozícii 3 až 4 týždne, na opravu potrebujeme 14 dní. Opravené úlohy sa vracajú spolu so vzorovými riešeniami, poradím a novými zadaniami.

Výber úloh a zostavovanie sérií, zvyčajne na jeden polrok, prebieha na „valnej hromade“ všetkých vedúcich. Vyberáme zvyčajne z troj až štvornásobku potrebných úloh. Pri zostavovaní sérií sledujeme niekoľko zámerov:

- Snažíme sa o obsahovo pestré, vyvážené série. V žiadnej by nemala chýbať úloha z geometrie a zo „sveta čísel“, často „ciferné“ úlohy, ak sa nájde stereometria atď.

- Podobne si sledujeme aj predpokladané metódy riešenia úloh a ďalšie nadstavbové charakteristiky. Nezabúdame na úlohy, kde k výsledku vedie aj usilovnosť a dlhé hromadenie riešení – úlohy na „nápad“ sú (ak ho nedostanete) nemotivujúce. Sledujeme výskyt úloh s negatívnou odpoveďou (nájdite – neexistuje ...), s viacerými riešeniami atď.
- Zvažujeme prínos, vhodnosť a náročnosť oboch hlavných zložiek riešenia úlohy – na čo dieťa myslí a čo robí pri riešení, a čo mu prinesie jej spísanie a teda sformulovanie a ujasnenie si postupu riešenia.
- Často zaraďujeme „seriály“ jednej, nadväzujúcej úlohy cez 3 polročné alebo všetkých 6 sérií. Takmer pravidelne ide o úlohy z logiky (pozdravujeme najmä pána Smullyana) a často o kombinatorické úlohy, kde je každá pomoc nášmu školstvu a deťom vítaná.
- Úlohy bývajú už štandartne ponúkané v podobe celoročného príbehu. Ten ale musí slúžiť ako motivácia a pomôcka pre formulovanie jednotlivých úloh a nie ako komplikácia ba až prekážka pri hľadaní ich zadaní.

Najvážnejším problémom korešpondenčnej časti seminára sa nám teraz javí kvalita opravovania úloh. Spolu s výberom úloh je to „najdidaktickejšie“ miesto v celom priebehu seminára. Okomentovať (a tiež motivačne a spravodlivo obodovať) úlohy na úrovni riešiteľa je zložitá úloha a jej náročnosť je znásobená počtom riešiteľov. Do procesu opravovania sa priebežne zapájajú noví a noví vedúci a prenos skúseností je veľmi zložitý. Momentálne používame systém, pri ktorom okrem opravovateľa, o spôsobe opravovania a bodovania konkrétnej úlohy spolu s ním uvažuje aj takzvaný supervízor (a ak ide o tretieho človeka aj autor úlohy). Optimálne by boli ešte širšie diskusné fóra pred opravovaním každej série, tu už ale narážame na časové kapacity vedúcich. Súčasťou tohto okruhu problémov je aj zvažovanie možností a vhodnosti vzorových riešení. Uvidíme ...

5. TÁBORY A SÚSTREDENIA

Ako býva zvykom, pre najlepších 32 riešiteľov organizujeme v marci 4-dňové a v auguste 10-dňové sústredenie. Zabezpečuje ho spravidla 10 vedúcich. Základné ciele väčšinou dobre poznáme z „Pracovných materiálov školiaceho strediska TMM“ a popíšem skôr spôsoby ich realizácie.

Jednou z kľúčových súčastí je príprava programu:

- Prebieha s veľkým predstihom a do značných detailov. Začína spoločným víkendovým stretnutím vedúcich, pokračuje individuálne alebo v rámci konzultácií menších skupiniek.
- Okrem zabezpečenia potrebnej kvality, má príprava programov aj druhý hlavný cieľ: uvoľniť „kapacity“ vedúcich na samotnom sústredení. Tam sa majú v maximálnej miere venovať deťom, nie príprave svojich programov. A voľný čas (aby bolo jasné, spravidla 01:00 až 07:00) sa oplatí investovať do spánku.
- Osobitnú pozornosť venujeme príprave matematického programu. Najmä prednášky na zimné sústredenia podliehajú niekedy až dvojkolovej kolektívnej „oponentúre“ a pripomienkovaniu, čo prináša aj krásne chvíle spoločného matematického bádania. Vzhľadom na veľký rozsah letného sústredenia, tu už takto detailný postup nie je možný, sústreďujeme sa aspoň na nosné programy, programy začínajúcich vedúcich atď.
- Tohto roku prvýkrát testujeme aj „povinnú“ písomnú prípravu – pravidlá hier, súťaží atď. si vedúci chystajú vopred aj v písomnej podobe. Nutnosť presnej formulácie pravidlám určite neuškodí, efektívnejšie sa ku nim môžu vyjadriť ostatní vedúci, niekedy sa použijú aj priamo pri realizácii programu. A naviac, „zadarmo“ nám vzniká archív programov.

A ako takto pripravený program vyzerá?

- Jednotlivé dní sú pestré, striedajú sa rôzne typy programov. Tábor nebýva monotematicky zameraný, jednotlivé programy majú svoju vlastnú motiváciu a klímu. Dávame si pritom pozor, aby bol čas na doznievanie a preladenie klímy medzi nimi. Pestrosť nie je samoúčelná, má zabezpečiť vyváženosť intelektuálnych a somatických aktivít, individuálnych a kolektívnych činností, súťaživých a „pohodových“ aktivít atď.

- Na vyváženie a zladenie tejto pestrosti slúži naopak pevný rytmus a „řád“ tábora. Hlavne v prvých dňoch je jeho zabezpečenie jednou z prvoradých úloh. Jednotlivé typy programov prebiehajú v obvyklé časti dňa, dodržiavajú sa časy začiatkov a koncov programov, nevznikajú prestoje a hluché miesta. Deti dostávajú ústne aj „nástenkovo“ dostatok informácií o budúcom programe. A všetci vedúci poznajú, rešpektujú a zabezpečujú túto snahu.
- Pre rytmus tábora sú dôležité aj „seriálové“ programy, ktoré sa pravidelne objavujú v rovnakom termíne počas celého (najmä letného) sústredenia a svojim obsahom na seba naväzujú. Ide najmä o matematické semináre a tohtoročnú novinku (ktorú sme sa naučili od Sabinovského Kominára) – „umelecké“ krúžky. Vďaka nim si deti uvedomujú nielen čo bolo ráno a čo bude večer, ale aj včera a zajtra..

Matematický program je dosť bohatý. Spravidla ide o 3 programy denne. Vyberáme z „individualistických“ jednorázových prednášok a seriálových seminárov a z kolektívnych a súťaživých matbojov a nábojov, kde okrem matematiky viac sledujeme aj výchovné ciele:

- Prednášky prebiehajú paralelne aspoň dve, v lete (v posledných rokoch) pravidelne tri, jedna z nich na počítačoch (Cabri, Karel, Žofka). Zvyšné dve sú niekedy odporúčané pre starších a pre mladších účastníkov. Na prednášky býva vyhradených 60 minút, čomu zodpovedá „čistý“ čas 45 – 50 minút matematiky. Počet detí na prednáške sa vzhľadom na možnosť ich voľby pohybuje podľa okolnosti od 5 po 15.
- Semináre majú na 10 dňovom sústredení 4 stretnutia po 60 minút, paralelne prebieha 5 až 6 seminárov. Ich témy bývajú značne rozdielne, aby si ten „svoj“ našlo každé dieťa. Často zaraďujeme aj fyzikálne orientovaný seminár a niekedy „odľahčený“ seminár pre menších alebo lenivejších účastníkov (kúzla, hlavolamy, Rubikova kocka ...). V zásade ale ide o matematicky najhodnotnejšie a najnáročnejšie programy. Za prácu na seminároch deti môžu získať vedecké hodnosti učeň, tovariš a majster.
- Matboj je v našej terminológii súťaž družín v matematickej hre. Samozrejme okrem zohrávky obsahuje aj tréningovú a prípravnú časť, a celkovo zaberá približne 90 minút. Tohto roku sme sa rozhodli vydať zložitou cestou od ľahšie organizačne zvládnuteľných „taktických“ hier ku hrám strategickým. Možnosť hľadania a objavenia víťaznej stratégie značne mení matematické pozadie matboja, prináša ale značne vyššie nároky na jeho prípravu.
- Náboje sú súťaže družín v riešení úloh. Program trvá niekedy až 120 minút. Pre ich spestrenie a zvýšenie motivácie detí je samotné rátanie zasadené do určitej nadradenej metahry alebo metapríbehu. V posledných rokoch sme v tejto oblasti dospeli ku veľmi atraktívnym formám a radi sa podelíme o skúsenosti.
- Vzhľadom na vynaloženú energiu nesmieme zabúdať ani na individuálne „grošové príklady“. Vedúci nimi bohato zásobujú nástenku a riešenia odmeňujú grošmi, platnými v táborovom bufete. A čokoláda je návyková ...
- Až na výnimky sa matematických programov zúčastňujú všetci vedúci. Každý sa môže vždy niečo nové naučiť a dozvedieť, pripomienkami a postrehmi môže následne pomôcť prednášateľovi. Pri prednáškach je niekedy potrebné individuálne sa venovať niektorým deťom, pri „kolektívnych“ programoch sledovať a koordinovať činnosť družín. A v neposlednom rade týmto vedúci dávajú deťom jasne najavo svoju hierarchiu hodnôt a dôležitosť, ktorú matematickým programom prinášajú.

Samozrejme, najdôležitejšia v tábore je výchova a výchovné pôsobenie. O tom sa ale najťažšie píše. A omnoho lepšie debatuje. Necháme si to na EXOD 2003...

6. NAŠE DETI

Na koniec to najlepšie a najdôležitejšie: naši riešitelia. Súťaže sa pravidelne zúčastňuje približne 100 žiakov ZŠ. Ide takmer o optimálny počet, o moc viac detí už nezvládame pri opravovaní úloh, menej by zase znižovalo kvalitu a tiež efektivitu vynaloženej práce. Pri zúžení vekového rozsahu sme vlani zaznamenali určitý úbytok, ale už tento školský rok ho budeme kompenzovať novým seminárom pre žiakov 5. a 6. tried.

Približne polovica riešiteľov je z regiónu severného Slovenska, pre ktorú je seminár primárne určený. Tešíme sa ale samozrejme aj z riešiteľov z Bratislavy, veľkého „lučeneckého“ hniezda, z východu atď. Spolu s rozpätím vo vzdialenosti zároveň mávame aj veľké rozpätie v kvalite riešiteľov. Pokiaľ je potrebné z týchto dôvodov upraviť náročnosť a zameranie seminára, dávame v zmysle jeho základných cieľov prednosť malým sídlam a ich deťom.

Riešitelia sa často „dedia“ cez rodinné väzby, cez „zapálené“ školy alebo zapálených učiteľov. Býva smutné, ak sa niektoré z týchto centier po rokoch spolupráce odmlčí a poteší keď sa niektoré nové objaví. Často aj touto formou môžeme sledovať životné a profesijné osudy niektorých učiteľov a uvedomiť si, že práve oni bývajú zdrojom a jadrom matematického nadšenia.

Hlavným náborovým termínom je začiatok školského roku, keď okrem pôvodných riešiteľov a „našich“ učiteľov, listom oslovujeme plošne približne 400 škôl a gymnázií. Efektívnosť tohto náboru nie je vysoká, ale zatiaľ postačujúca. V každom prípade ale v tejto oblasti privítame akýkoľvek záujem alebo spoluprácu.

„Odchovanci“ SEZAMu často prechádzajú medzi riešiteľov stredoškolského (S)KMS. Je príjemné stretať sa s nimi na „dospelých“ sústredeniach a niekedy sa aj v duchu potešiť z toho, kam už dorástli. A aby sme ich vídali častejšie, od septembra začne v Žiline fungovať mesačný stredoškolský matematický klub. Nuž a na nové mladšie deti chystáme SEZAMKA.

Väčšinu informácií o našich aktivitách nájdete na stránke www.sezam.sk. Tešíme sa na akúkoľvek vašu osobnú alebo virtuálnu návštevu.

Z PRVÉHO STUPŇA NA DRUHÝ

Doc. RNDr. Peter Bero, CSc., Mgr. Zuzana Berová

Projekt vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana pokrýva prvý, druhý aj tretí stupeň vyučovania matematiky. Celková koncepcia učebných textov je podstatne odlišná od zaužívaných učebníc a učebných postupov. Na prvom stupni je umocnená aj významnou zmenou učebných osnov, a tak sme vlastne priniesli dve veci – nový typ učebných textov a nové osnovy. Je zaujímavé, že učitelia ľahšie prijali nový typ učebníc ako nové osnovy. Prekvapujúco, pretože došlo k významnému zredukovaniu učiva v jednotlivých ročníkoch a presúvaniu smerom hore. Žiaľ, konzervativizmus je veľmi silný a veľká časť učiteľov prvého stupňa len veľmi ťažko „znáša“, že majú deti učiť užší obsah ako boli zvyknutí. Ešte horšia je situácia pri prechode na druhý stupeň. Tu učitelia, priam neuveriteľne, približne desať rokov po zavedení nových osnov, o nich veľmi často ani len nevedia a tvrdo obviňujú svojich kolegov zo zlej pripravenosti žiakov. Analogicky osemročné gymnáziá – na prijímacích pohovoroch vyžadujú od detí veci, o ktorých sa im na prvom stupni naozaj nemohlo ani len snívať. Je žiaľ smutná takáto vzájomná ignorancia vo vnútri učiteľskej verejnosti. A pritom sme nesmierne citliví na ignoranciu zvonku. Kým si však nebudeme vážiť sami seba, nebude si nás vážiť nikto! Je paradoxné, s akým nasadením dokážu učitelia bojovať za to, aby deti museli úlohu „koľko je tri jabĺčka a štyri jabĺčka“ riešiť rovnicou (čo je úplný nezmysel), ale smerom „von“ namiesto boja sa iba rezignovane sťažujú.

Sme presvedčení, že táto cesta – cesta zmenšovania rozsahu učiva je správna. Rozsah treba nahradiť hĺbkou, a o to sa v našich textoch pokúšame.

MATEMATIKA NA II. STUPNI ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

V súčasnosti sú v ponuke učebníc matematiky pre II. stupeň ZŠ dva tituly – od autorského kolektívu pod vedením Prof. RNDr. Ondreja Šedivého, CSc. a od autorského kolektívu pod vedením RNDr. Vladimíra Repáša. Obidva autorské kolektívy ponúkajú učebnice a pre učiteľov metodické príručky.

Jedným z našich cieľov bolo doplniť túto ponuku, a to spôsobom, ktorý je ako pre žiakov tak pre učiteľov nielen veľmi praktický, ale aj príťažlivý. Ponúkame zbierku úloh spracovanú formou pracovných zošitov – pre každý ročník sú to dva pracovné zošity.

PRACOVNÉ ZOŠITY Z MATEMATIKY PRE II. STUPEŇ ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

Na začiatku školského roka 2002/2003 sú k dispozícii učiteľom i žiakom pracovné zošity pre 5. ročník (sú v ponuke vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana), pracovné zošity pre 6. ročník budú k dispozícii v januári 2003 a v septembri 2003 to budú pracovné zošity pre 7. ročník. V roku 2004 ponúkneme pracovné zošity pre ostatné dva ročníky – v januári pre 8. a v septembri pre 9. ročník.

Pracovné zošity vychádzajú vo farebnej úprave, na kvalitnom papieri, ktorý umožní presnú a kvalitnú prácu.

Naše pracovné zošity pre II. stupeň spájajú v sebe niekoľko výhod:

- prinášajú piatakom kúsok dôverne známej atmosféry I. stupňa, sprostredkovanej nielen postavičkami, ktoré úlohy sprevádzajú, ale aj spôsobom spracovania úloh a textu (z pera našej autorskej dvojice vyšli aj učebné texty pre 3. a 4. ročník základnej školy),
- pracovné zošity sú koncipované a napísané tak, aby ich bez problémov mohli používať žiaci a učitelia pracujúci s projektom Prof. Šedivého i RNDr. Repáša,
- poskytujú príklady precvičujúce základné i rozširujúce učivo, tak ako ho predpisujú učebné osnovy a štandardy platné pre II. stupeň základných škôl,

Pracovné zošity ponúkajú:

- pestrú paletu úloh z každého tematického celku, ktorý sa podľa učebných osnov má preberať v danom ročníku,

- úlohy zamerané predovšetkým na precvičovanie a prehlbovanie poznatkov, vedomostí a zručností, ktoré žiaci získali na hodinách matematiky,
- príklady s jednoduchým a jasným zadaním, ktoré umožňujú vo väčšine prípadov aj samostatnú prácu žiakov nielen na hodinách, ale v prípade potreby aj doma,
- okrem úloh na precvičovanie aj úlohy, ktoré umožňujú upriamiť pozornosť žiakov na niektoré matematické zákonitosti a tieto hneď aj precvičiť,
- geometrické úlohy umožňujúce prácu s predkresleným obrázkom, čím je zabezpečená jednoduchá kontrola zo strany učiteľa bez toho, aby si prácne musel pre žiakov rovnaké obrázky pripravovať,
- v neposlednom rade aj úlohy netypické, neštandardné, možno pre niektorých žiakov náročnejšie, a teda umožňujúce diferencovaný prístup k triede zo strany učiteľa,
- úlohy graficky usporiadané tak, aby mali žiaci dostatok miesta na riešenie priamo v pracovnom zošite,
- úlohy vychádzajúce z historických reálií, približujúce žiakom nielen dejinný vývoj matematiky ako vedy, ale aj myšlienkové bohatstvo predchádzajúcich generácií,
- výsledky niektorých úloh,
- zhrnutie základných matematických pojmov a viet vo forme „pamätníčka" ľahko prístupné na obálke pracovného zošita.

S pracovnými zošitmi sa dá pracovať systematicky, používajúc ich ako ľahko prístupnú a zaujímavú zbierku úloh popri riešení úloh z učebníc matematiky. Môžete ich používať aj nárazovo, keď potrebujete so svojimi žiakmi precvičiť konkrétny problém.

NIEKOĽKO ZAUJÍMAVOSTÍ Z PRACOVNÝCH ZOŠITOV PRE 5. ROČNÍK:

Obdĺžničkové siete v kapitole Delenie viacciferným deliteľom, ktoré sa osvedčili už na I. stupni pri nácviku delenia, deti ich poznajú a radi s nimi pracujú, pretože im uľahčujú nácvik delenia.

Série úloh upozorňujúce a precvičujúce komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť a poradie počtových operácií v kapitole Desatinné čísla.

Série úloh upriamujúce pozornosť žiakov na niektoré špecifiká násobenia a delenia s číslom menším ako 1.

Úlohy, ktoré sa dajú použiť ako miniprojekty a môžu slúžiť ako námet pre prácu na projektoch väčšieho rozsahu, napríklad v kapitole Aritmetický priemer.

Úlohy, ktoré žiakom priblížia niektoré historicky zaujímavé matematické problémy, napríklad trisekcia uhla v kapitole Uhol.

ZÁKLADNÉ SPÔSOBY NAZERANIA NA HODNOTU FIRMY

Xaver Gubáš, P67 value, s.r.o., Bratislava

Ak niečo pre nás má hodnotu, potom to znamená, že nám to niečo prináša. Odtiaľ pochádza aj základná filozofia súčasného pohľadu na hodnotu firmy – hodnota je určená ako výsledok všetkých očakávaných peňažných tokov (cash flow – CF) z firmy k jej vlastníkovi (kladné CF) či od vlastníka do firmy (záporné CF).

Od takejto hrubej definície hodnoty môžeme postupne odvádzať rôzne základné spôsoby ako hodnotu merať v konkrétnych prípadoch.

1. **Na firmu sa pozeráme ako na fungujúcu prevádzku**

V tomto prípade sú očakávané budúce CF modelované očakávaným vývojom prevádzkovania firmy.

2. **Na firmu sa pozeráme len ako na súhrn majetkov (aktív) a záväzkov (pasív).**

V tomto prípade sú očakávané budúce CF určené očakávanými predajnými cenami majetkov a očakávanými výdavkami na uhradenie záväzkov.

Najprv sa venujme druhému spôsobu nazerania na hodnotu.

Každá firma v sebe nesie nejaké práva a nejaké povinnosti. Práva pritom chápeme ako možnosť voľne nakladať s nejakou vecou, myšlienkou, vstupovať do rôznych vzťahov, rušiť vzťahy, ... V konkrétnejšej podobe sú právami napríklad položky aktív (stroje, budovy, pohľadávky, peniaze na účte, zásoby, ...) ako aj zmluvy s klientmi či ešte sa len rozbiehajúce nové projekty, u ktorých očakávame úspešný výsledok. Každému takémuto právu (aktívu, príležitosti, ...) môžeme nejakým jednoduchým spôsobom určiť jeho cenu. Používajú sa odborné alebo skúsenostné odhady. Napríklad budova sa nechá oceniť znalcom či pohľadávky sa odhadnú ako vymožiteľné vo výške napr. 10 %.

Na druhú stranu – každá firma má nejaké povinnosti (vyplatiť mzdy, dane, faktúry, ...) dodržať záväzok zmluvy (začať vyvíjať nový software, kúpiť či predať nejaké auto, vrátiť požičané peniaze, ...). Niektoré z týchto povinností sú zachytené v účtovníctve ako pasíva, mnohé však sú evidované len v rámci zmlúv či dohôd. Takýmto povinnostiam sa vo všeobecnosti prisudzuje nejaká forma finančnej povinnosti (napríklad vrátenie úveru znamená – 100 mil. Sk hodnoty, nutnosť vyvíjať software znamená – 10 mil. Sk nákladov na analytikov, ...).

V praxi sa pre určovanie hodnoty práv a povinností používajú takmer výlučne len práva v podobe aktív a povinnosti v podobe pasív – teda práva a povinnosti zachytené účtovníctvom firmy. Z nich sa potom vypočítavajú dve základné hodnoty:

a) NAV (net asset value) – čistá hodnota aktív, čiže rozdiel medzi hodnotou účtovne podchytených práv (aktív) a hodnotou známych záväzkov (najčastejšie len cudzích zdrojov, ale sú známe problémy okolo zmeniek a iných účtovne neevidovaných záväzkov). Takýto pohľad je zaujímavý pre vlastníkov, ktorí chcú mať predstavu o tom, čo by im ostalo, keby firma prešla likvidáciou, či inou formou očistenia práv od povinností. Tu sa používajú dva základné spôsoby výpočtu – prvý je založený len na účtovných údajoch a takmer presne je hodnota NAV vyjadrená hodnotou vlastného imania (teda tej časti pasív, ktorú do firmy vniesli vlastníci a došlo k jej zmene hospodárskymi výsledkami firmy v minulosti). Druhý spôsob vychádza z odhadu trhových cien aktív, od súčtu ktorých sa odráta výška všetkých známych záväzkov.

b) Trhová cena aktív (či práv) – predstavuje pohľad zaujímavý najmä pre veriteľa (teda niekoho, kto má voči firme pohľadávku), ktorý chce vedieť čo by mu z jeho pohľadávky ostalo ak by došlo k bankrotu firmy. Základom pre určenie trhovej ceny aktív sú pritom najmä odborné odhady pre jednotlivé položky v aktívach (budovy, pozemky, stroje, pohľadávky, finančné investície, ...).

Teraz sa budeme zaoberať pohľadom na firmu cez jej prevádzkovanie. Tento pohľad obvykle prináša vyššiu hodnotu ako majetkový pohľad. Hodnota narastá vďaka aktívnemu využívaniu práv a aj povinností firmy, ktorých optimalizácia správnym manažovaním prináša viac budúcich CF než len jednoduchý rozpredaj majetkov.

Existujú tri základné spôsoby náhľadu na hodnotu prevádzkovanej firmy:

a) Benchmarkový – postavený na porovnávaní s hodnotami obdobných firiem
b) Transakčný – postavený na porovnávaní s cenami, za ktoré boli významné vlastnícke podiely v obdobných firmách predávané
c) DCF (diskontované CF) – postavený na čo najpresnejších modeloch očakávaných budúcich CF a na spočítaní súčasnej hodnoty týchto budúcich CF (diskontovanie)

Benchmarkový postup spočíva vo vyhľadaní údajov z kapitálových trhov o verejne obchodovaných spoločnostiach zaoberajúcich sa obdobnou činnosťou ako hodnotená firma. Napríklad Slovnaft je rafinéria a tak prehľad údajov iných rafinérií je základom benchmarku. Najčastejšie sledovaným parametrom je P/S (Price/Sales – cena firmy/tržby firmy), ktorý veľmi dobre charakterizuje ako si akcionári cenia veľkosť trhu obhospodarovaného firmou. Ak do takéhoto benchmarkového prehľadu získame niekoľko desiatok firiem a urobíme niečo ako štatistický priemer, získame predstavu o tom, aký asi bude očakávaný pomer P/S pre nami hodnotenú firmu. Tieto ukazovatele sú získateľné na internete alebo v špeciálnych databázach. Internet je pritom postačujúci, pretože sa pre odvetvia v USA dajú získať priamo štatistické priemery takýchto ukazovateľov. USA sa potom s istou mierou tolerancie dá považovať za optimistický benchmark. Korektné použitie takéhoto postupu však vyžaduje súlad viacerých parametrov hodnotenej firmy, než len znalosť objemu jej tržieb!

Transakčný model sa zakladá na obdobnom princípe ako benchmarkový, ale použité údaje predpokladajú realizáciu obchodu s významným vlastníckym podielom sledovaných firiem. Takéto ocenenia totiž v sebe neobsahujú len všeobecný pohľad na verejne dostupné dáta, ale aj pozitívne a negatívne očakávania nového významného vlastníka, odzrkadľujúce jeho presvedčenie, že vie firmu manažovať lepšie ako doterajší vlastník. Ako hlavné sledované parametre sú P/S a P/Prod (Price/Production – Cena/Produkcia (v nejakých objemových jednotkách)). Druhý parameter lepšie vystihuje kapacity, ktoré nový vlastník danou transakciou ovládol – a teda odzrkadľuje aj skutočnosť, že doterajší vlastník nemusel byť schopný celú produkciu umiestniť na trhu za dobrých cenových podmienok.

Posledný postup – **DCF** – je pravdepodobne najkorektnejší. V súčasnosti patrí medzi základné pohľady na hodnotu prevádzkovanej firmy a odzrkadľuje v sebe všetky v súčasnosti známe teoretické poznatky o hodnote peňazí. Vychádza z predpokladu, že tá istá čiastka (napr. 100 Sk) držaná ihneď v ruke má vyššiu hodnotu než čiastka držaná v ruke neskôr. Rozdiel medzi týmito dvoma čiastkami je pritom určený len časovým posunom v možnosti disponovať nimi a proces prevodu budúcej dispozície na súčasnosť sa nazýva diskontovanie. Tak napríklad: ak mám 100 Sk a alternatívou je, že o rok môžem mať 120 Sk, potom výhodnejšie je pre mňa zvoliť si tú alternatívu, ktorá

má súčasnú hodnotu vyššiu. Ak som teda človek, ktorý vie svoje voľné prostriedky zhodnotiť len v banke sadzbou 10 % , potom si zvolím 120 Sk o rok, pretože ak by som už teraz dostal 100 Sk, potom z nich o rok budem mať len 110 Sk – teda menej ako je 120 Sk. A naopak – ak som človek, ktorý má možnosť zhodnotiť voľné peniaze 50 %, potom by som si zvolil ihneď 100 Sk, pretože tie mi o rok vynesú 150 Sk, čo je viac ako 120 Sk.
Sadzba, ktorou si každý investor cení peniaze sa volá diskontná sadzba. Jej iný význam je aj alternatívny kapitálový náklad, a mala by presne odzrkadľovať aké alternatívne možnosti zhodnotenia okamžite dostupných zdrojov má dotyčný investor. Existuje tzv. bezriziková sadzba, ktorá je garantovaná štátom (štát nemôže skrachovať). Každý iný investor ako štát má svoju sadzbu vypočítanú ako bezrizikovú sadzbu zvýšenú o rizikové prirážky (riziko za investovanie v inej krajine, riziko za investovanie v špecifickom odvetví, riziko za investovanie do konkrétneho podniku, ...). Takto určená diskontná sadzba veľmi presne odzrkadľuje štatistickú návratnosť investícií do jednotlivých podnikov. Dokonca u ratingov štátov dochádza k veľmi presnému súladu medzi rizikovou prirážkou za nízky rating a pravdepodobnosťou, že konkrétny štát nebude schopný či ochotný splniť svoje záväzky včas.

Pri DCF modeli sa firma oceňuje nasledujúcimi krokmi:

1. Zozbierajú sa údaje a urobí sa ich analýza (určia sa nepravidelné a pravidelné príjmy, určia sa rizikové faktory, určia sa možné hrozby a príležitosti, ...).
2. Namodeluje sa budúcnosť – teda na základe výsledkov analýzy sa odhadne budúci vývoj príjmov, výdavkov, úverov, predajov majetku, ... Výstup z modelovania má pritom dve fázy – upratovanie firmy (to znamená, že všetky zistené nedostatky vo firme sa podľa predpokladov postupom času „upracú“) a perpetuita (to je situácia, keď všetky sledované parametre firmy vykazujú optimálnu hodnotu a teda firma nemá dôvod, aby kedykoľvek v budúcnosti menila niektorý z takýchto ukazovateľov (napríklad úverovú zaťaženosť alebo podiel stálych aktív na celkových aktívach a pod). Každý takýto model má pochopiteľne vstupné parametre (napr. predpoklady rastu počtu klientov, rastu miezd, ...) a obvykle sa pre ne vytvoria tri série hodnôt v zmysle pesimistického, realistického a optimistického pohľadu na budúce možnosti.
3. Vytvorí sa tabuľka, v ktorom čase je dostupný aký FCF (free CF – voľné peňažné toky) teda prehľad tých finančných zdrojov, ktoré môže firma bez problémov uvoľniť v prospech záujmov vlastníka a neohrozí pritom stabilitu vlastného výkonu a fungovania. Na túto tabuľku sa použije diskontovanie určenou diskontnou sadzbou, výsledné súčasné hodnoty sa sčítajú a takto získaný výsledok predstavuje hodnotu firmy.

Diskontovanie sa pritom robí veľmi jednoduchým vzorcom:

$$\mathrm{PresentValue(FCF)=FCF/(1+DiscountRate)^{TimeInYears}}$$

kde PresentValue je hľadaná súčasná hodnota budúceho finančného toku, DiscountRate je diskontná sadzba, TimeInYears je doba od súčasnosti do chvíle očakávaného získania voľného finančného toku prepočítaná na roky (dôvodom takéhoto prepočítavania na roky je skutočnosť, že diskontná sadzba sa vždy určuje ako ročná sadzba a teda rok tvorí jednotku merania času).

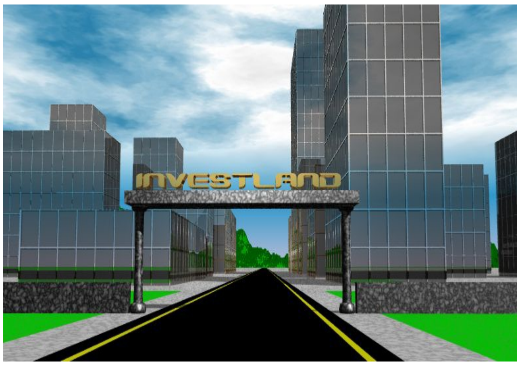
Na záver tohto prehľadu základných postupov hľadania hodnoty firmy spomeňme, že výsledkom hodnotenia firmy nie je len číslo udávajúce pravdepodobnú cenu. Súčasťou výsledku je aj prehľad najvýznamnejších predpokladov a známych rizík, hrozieb a príležitostí. Výsledné číslo v žiadnom prípade nevzniká ako jednoduchý výsledok kalkulu. Výsledok je obvykle váženým priemerom viacerých variant, ktorým sa prisudzujú pravdepodobnosti a predkladá sa v troch alternatívnych scenároch – pesimistický, realistický a optimistický. Takéto široké vnímanie výsledku hodnotenia firmy umožňuje správnejšie rozhodovanie o skutočne dosiahnuteľnej cene pri nákupe či predaji firmy.

I N V E S T L A N D –
– VIRTUÁLNA SIMULÁCIA EKONOMIKY NA INTERNETE

Peter Halák, P-MAT, n.o., Bratislava

Investland je projekt virtuálnej simulácie ekonomiky na internete určený pre žiakov vo veku 13-18 rokov. Cieľom projektu je oboznámiť účastníkov s fungovaním trhovej ekonomiky a zároveň s prostredím internetu.

Projekt Investland vznikol ako spoločná iniciatíva Infoveku a P-MATu. **Infovek** je vládou financovaný projekt zameraný na internetizáciu škôl, vzdelávanie učiteľov v oblasti e-technológií a zabezpečenie edukačného obsahu na internete. **P-MAT** je nezisková organizácia, ktorá sa dlhodobo venuje práci s deťmi. Organizuje korešpondenčné semináre (Pikomat, Pikofyz, fyzIQ), sústredenia, tábory, víkendovky, rôzne súťaže (Pikopretek, Matboj), podporuje činnosť matematických krúžkov.
Predstavitelia oboch inštitúcií sa pri vzniku Investlandu zhodli na tom, že všeobecná úroveň ekonomických znalostí občanov SR je na nízkej úrovni. Do veľkej miery je za tento stav zodpovedný školský systém, ktorý bol ovplyvnený aj politickým vývojom na Slovensku. Investland si nekladie za cieľ suplovať ekonomické vzdelávanie v našom školstve, ukazuje alternatívnu formu zvýšenia ekonomickej vzdelanosti nastupujúcej generácie.
Vývoj Investlandu sa začal koncom roku 2000. Už v lete 2001 bola k dispozícii prvá verzia, ktorej základom bola burza cenných papierov. Neskôr sa postupne dopĺňali ďalšie časti Investlandu, až sa dosiahol súčasný stav – verzia 2.0. Projekt sa naďalej rozširuje, pracuje sa na verzii 2.5 ako aj na dokumentácii k budúcej verzii 3.0, ktorej rozsah niekoľkonásobne prevýši súčasné možnosti Investlandu.

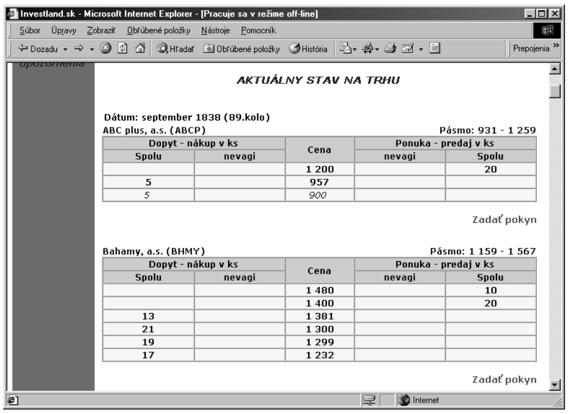


Čo zažije účastník Investlandu?

Do Investlandu sa môže zaregistrovať ktokoľvek vo veku 13-18 rokov, kto má prístup na internet. K zapojeniu sa do Investlandu nie sú potrebné žiadne špeciálne znalosti.
Investland je internetová hra, v ktorej hráč zažije svet veľkých peňazí, svet obchodu a manažmentu. V Investlande je niekoľko desiatok virtuálnych podnikov. Ich tržby, hospodárske výsledky ovplyvňujú len hráči, ekonomika Investlandu nie je žiadnym spôsobom naviazaná na reálny svet. **Hráči sú spolumajitelia podnikov, spolurozhodujú o riadení podnikov**.
Pri registrácii do Investlandu dostanú hráči určitý finančný obnos a po 20 akcií z 5 náhodne vybratých akciových spoločností. S týmto majetkom hráč začína a je len na ňom, ako si ho dokáže zhodnotiť. Má pri tom viacero možností:

- obchodovanie na burze, t.j. lacno kúpiť, draho predať,
- termínované vklady,
- dividendy – podiel na zisku podnikov,
- odmena riaditeľa formou podielu na zisku.

V Investlande funguje **burza cenných papierov**, ktorá verne modeluje základné princípy reálnej burzy. Obchody sa uzatvárajú len medzi hráčmi za ceny, ktoré vzniknú na základe dopytov a ponúk jednotlivých hráčov. Obchody sú anonymné. Realizované obchody tvoria priemerné ceny akcií v jednom kole a na základe týchto cien sa vytvára burzový index.
Riadenie podnikov sa realizuje na dvoch úrovniach – valné zhromaždenie a riaditeľ**. Valné zhromaždenie** rozhoduje o voľbe a odvolaní riaditeľa, rozdelení zisku, resp. úhrade straty, názve, činnosti a sídle podniku, navyšovaní základného imania, zrušení podniku a pod. Valné zhromaždenie môže zvolať riaditeľ alebo akcionári vlastniaci spolu min. 10 %. Uznášaniaschopnosť valného zhromaždenia zabezpečia akcionári, ak spolu vlastnia aspoň 1/3 akcií.
Riaditeľ je volený na valnom zhromaždení z navrhnutých kandidátov, hráčov Investlandu. Úlohou riaditeľa je zabezpečiť bežnú prevádzku podniku tak, aby podnik dosiahol čo najlepšie hospodárske výsledky. Rozhoduje o objeme výroby, predajnej cene výrobkov a v ďalších leveloch aj o zamestnancoch, investíciách do strojov atď. Zisk podniku závisí len od schopností riaditeľa. Ak akcionári nie sú spokojní s riaditeľom, môžu ho kedykoľvek odvolať a zvoliť si iného riaditeľa.
Dôležitou súčasťou Investlandu je zabezpečenie komunikácie medzi užívateľmi. V Investlande vychádzajú **noviny Investland dnes**. Do novín prispievajú článkami a inzerátmi hráči. Väčšinou sa ich články týkajú plánov s podnikmi, dosiahnutých výsledkov, popisov predstáv fungovania. V novinách sú aj články, ktoré automaticky generuje systém. Tieto sa týkajú najmä valných zhromaždení – výsledkov hlasovania na valných zhromaždeniach (nový riaditeľ, výška dividend a pod.).
Vnútornou poštou sa v Investlande hráči vzájomne informujú o svojich plánoch, predstavách. Veľakrát si práve cez poštu vyjasňujú jednotlivé rozhodnutia. Učia sa komunikovať, argumentovať, robiť kompromisy rôzneho druhu.
Nápoveda je v Investlande riešená formou virtuálnej konzultačnej firmy **P-MAT Consulting**, kde si hráči môžu nájsť okrem vysvetlení fungovania jednotlivých častí Investlandu aj námety na dosiahnutie vyššieho zisku či slovník pojmov.



Celý Investland je vybudovaný tak, aby si každý hráč prišiel na svoje. Aby sa každý z nich mohol vo svojich schopnostiach zdokonaliť podľa toho, čo práve ovláda, čo ho zaujíma. Niektorí hráči sa doslova vyžívajú v tom, že môžu obchodovať na burze s akciami a zažiť to, čo v bežnom živote vidia iba na televíznych obrazovkách, iní sa snažia lobovať u akcionárov o to, aby ich zvolili za riaditeľa. Zvolení riaditelia nadväzujú spoluprácu s inými riaditeľmi, spoločne hľadajú najvýhodnejšiu stratégiu na zabezpečenie vysokého zisku. Sú hráči, ktorí sa venujú písaniu článkov do Investland dnes.

Projekt Investland sa stretol s pozitívnym ohlasom aj v radoch učiteľov odborných ekonomických predmetov na stredných školách. V spolupráci s Baťa Junior Achievement sa pripravujú metodické materiály k Investlandu a séria školení učiteľov. Očakávame, že sa Investland dostane do škôl ako súčasť vyučovania vybraných ekonomických predmetov.

IZOMORFIZMUS JAKO STRUKTUROTVORNÝ NÁSTROJ[1]

Milan Hejný, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

1. ÚVOD

V uplynulých letech bylo v pražském semináři z DM věnováno dosti úsilí výzkumu procesu zrodu a rozvoje matematických struktur ve vědomí žáků a studentů. Komplexní pohled na současný stav českého, slovenského a polského výzkumu jsme se pokusili podat společně s kolegyněmi Jirotkovou, Kratochvílovou a Stehlíkovou v minulém roce ve sborníku naši letní školy Pytagoras. Velice mne mrzí, že při sepisování našich spolupracovníků mi vypadlo jméno kol. P. Eisenmanna, který působí na univerzitě J. E. Purkyně. Dodatečně bych tedy chtěl k jinak asi relevantnímu seznamu uvedenému v Hejný (2001) připojit citaci pěti článků kol. Eisenmanna věnovaným zkoumání spojitých struktur. Strukturaci pojmu funkce je věnován výskum A. Kopáčkové (2002).

V posledním roce bylo naše bádání v oblasti strukturotvorných procesů věnováno dvěma novým oblastem: strukturám ležícím vně matematiky, zejména struktuře rodinných vztahů a porovnávání dvojice blízkých struktur. O nich mluvíme v tomto článku, který je pokračováním zmiňovaného článku. Vše potřebné k porozumění našich úvah uvedeme zde opětovně, někdy zkráceně, tak, aby náš výklad byl soběstačný. Začneme tím, že připomeneme naše vymezení základního termínu uvedeného na straně 14 zmíněného sborníku:

„*Štruktúra matematických vedomostí individua* (ŠMVI) je mnohovrstvová dynamická sieť, ktorej uzlíkmi sú poznatky ako pojmy, fakty, vzťahy, schémy, príklady, postupy, riešiteľské stratégie, algoritmy, argumenty, hypotézy, …. Uvedená sieť prepojuje navzájom jednotlivé uzlíky – čím je sieť hustejšia, tým je kvalitnejšia. Sieť jednotlivé „uzlíky“ organizuje a hierarchizuje.“

2. FORMULACE PROBLÉMU

Řekne-li se v matematice slovo *struktura* vybaví se nám v mysli nejspíš grupa, okruh, svaz, vektorový prostor, nebo jiná algebraická struktura. Nebo též struktura reálných čísel, struktura geometrie budované na pojmu souměrnosti, topologie jako název pro spojité struktury a pod. Rozhodně je tento pojem v naši mysli vložen do oblasti vysokoškolské matematiky, té kterou jsme se učili v architektuře axiomy – definice – věty – důkazy.

Tato studie je věnována strukturám, které se objevují ve vědomí individua, zejména žáka základní školy a ve vědomí dítěte předškolního věku, jako jistá *organizace* souboru blízkých pojmů (objektů, jevů, situací, procesů). Kostrou této organizace je množina kauzálních vztahů, jimiž jsou uvedené pojmy propojeny.

Příkladem struktur s nimiž se žák setkává v běžném životě jsou struktury opisující tok času (24 hodin dne, 7 dnů týdne, nebo 12 měsíců roku s jejich cyklickým uspořádáním), nebo soubor místností bytu ve kterém dítě žije s jejich geometrickým rozmístěním, nebo struktura školy (ředitel, zástupci, třídní učitel, učitel, žák třetí třídy, žák první třídy, …). Tyto struktury vznikají ve vědomí dítěte a žáka zcela spontánně a jejich růstu významně přispívají situace, kdy dochází ke srovnávání dvou myšlenkově blízkých struktur. Například rozložení místností v bytě si dítě uvědomí nejlépe tenkrát, když začne tuto situaci srovnávat s bytem ve kterém bydlí babička, nebo kamarád a konstatuje že „u nás má dětský pokoj jen jedny dveře“.

Cílem našich úvah je další poznávání procesu zrodu, růstu a rozvoje jak matematických tak i nematematických struktur a poznávání toho, jak k tomuto procesu přispívají zkušenosti získané porovnáváním dvou blízkých si struktur.

[1] Studie vypracována s podporou grantu GAČR 406/02/0829

3. POROVNÁVÁNÍ DVOU BLÍZKÝCH STRUKTUR

Při porovnávání dvou objektů, situací, událostí, souborů, … naši pozornost upoutá hledání stejností a růzností. Poznání pak formulujeme soudy typu „hlas těch lidí je k nerozeznání stejný, ale chůze je hodně odlišná“. Upřesňujeme, čeho se stejnost/různost týká, někdy i míru této stejnosti/různosti.

Matematici přistupují ke stejnosti a různosti striktně. Například na odlišení toho, zda jsou dva trojúhelníky „zcela stejné“ nebo „mají stejný tvar ale jinou velikost“ používají matematici dvě různá slova: shodnost a podobnost. Chtějí-li matematici vyjádřit stejnost přirozených čísel ve smyslu „dávají při dělení číslem *7* stejný zbytek“ použijí termín „kongruentní modulo *7*“.
K porovnávání struktur užívá matematika slov: izomorfizmus, homomorfizmus. Oba tyto termíny volně přeneseme do jazyka didaktiky matematiky a přidáme k nim ještě termín další – spřízněnost. Při vymezování těchto termínů použijeme dvě charakteristiky porovnávání dvou struktur: vzájemné přiřazování prvků a vnitřní organizaci společnou oběma strukturám.

Dvě struktury, které mají stejnou organizaci nazýváme *izomorfní*. Přitom se mohou v mnoha ohledech lišit. Například struktura místností našeho bytu a plán našeho bytu jsou zcela různé skutečnosti, ale o organizaci místností bytu dávají naprosto stejnou informaci. Když si osm žáků 5A zorganizovalo pingpongový turnaj rozhodli se po vzoru Wimbledonu použít vyřazovací způsob. Před turnajem si nakreslili postupového pavouka a pak losovali umístění jednotlivých žáků do nástupních příček. Stejný turnaj si zorganizovalo i osm žáků 5B. Ač byly oba turnaje, pokud jde o hráče, zcela různé, organizace turnaje byla stejná.

Každý izomorfizmus má dvě složky. Složka *strukturální* je dána tím, že všechny vztahy platné v jedné z těchto struktur jsou platné i ve struktuře druhé. Složka *přiřazovací* je dána 1-1 značnou korespondencí mezi prvky jedné a druhé struktury.

Izomorfizmus není jediná forma příbuznosti dvou struktur. Je to forma nejtěsnější, neboť popisuje *stejnost* dvou struktur. Slabší než izomorfizmus je *homomorfizmus* struktur, který v největší možné míře zachovává složku strukturální a složku přiřazovací z korespondence 1-1 značné oslabuje na *n*-1 značnou. Například dvě školy z nichž jedna má v každém z ročníků 1 až 8 po jedné třídě a druhá má v každém z těchto ročníků dvě nebo tři paralelní třídy nejsou izomorfní, ale jsou homomorfní. Všechny třídy 4. ročníku druhé školy se zobrazí na jedinou 4. třídu první školy.

Ještě slabší je takové propojení dvou struktur, které postrádá složku přiřazovací a složku strukturální zachovává pouze v jistém stupni. Takto propojené struktury nazývat *spřízněné*. Příkladem může být dvojice institucí: velká základní škola s 24 třídami a čtyřleté gymnázium se 7 třídami. I když počet tříd, učitelů, žáků, učeben, kabinetů, ... mají obě školy různý, obě školy mají učebny, sborovnu, třídy a třídní učitele, školníka, ... Podobně spřízněné jsou třípokojový byt a pětipokojový byt, nebo euklidovská planimetrie a sférická geometrie a pod. Stěhuje-li se člověk z vesnice na jinou vesnici, bude jeho aklimatizace snazší než při stěhování se do velkoměsta. Dvě vesnice jsou z hlediska vzájemné spřízněnosti navzájem bližší než vesnice a velkoměsto.

Uchopení spřízněnosti bývá někdy velice těžké, protože jednotlivé případy vzájemně spřízněných struktur se mohou výrazně odlišovat. Jejich společným rysem je skutečnost, že každý, kdo se seznámil s jednou z těchto struktur rychleji pochopí i strukturu druhou.

První složitější struktura se kterou dítě začíná poznávat již ve dvou letech, je struktura rodinných vztahů, kterou nazveme RODINA. Na ni zaměříme pozornost v následujících pěti kapitolách.

4. PŘÍBĚHY O BUDOVÁNÍ STRUKTURY „RODINA“

Objekty struktury RODINA jsou tvořeny pojmy:

matka, otec, bratr, sestra, babička, dědeček, teta, strýc, bratranec, ap. 1)

Příběh 1
Skoro tříletá Terka se po dlouhé době opět vidí s babičkou. Když slyší, že její máma osloví babičku „maminko“, ostře řekne „ty nie si žiadna maminka, maminka je iba moja maminka!“

Příběh 2

Skoro tříletý Ivan se ptá své mámy: „Proč má Barborka (děvčátko od sousedů) dvě maminky?“ Matka je překvapena a odpoví, že každý má jen jednu maminku, že nikdo nemá dvě maminky, že Barborčina maminka je teta Lenka. Ivan ale trvá na svém. Slyšel totiž, jak teta Lenka řekla Barborčině babičce „maminko“. Ivanova maminka se zasmála a chtěla vysvětlit Ivanovi, že babička Barborky je maminka její maminky. Když matka viděla hochovy rozpaky, dodala: „I naše pelhřimovská babička je moje maminka a naše smíchovská babička je tatínkova maminka“. Ivan nic neříkal, ale bylo vidět, že se cítí zaskočen, zmaten.

Příběh 3

Příběh obsahuje dvě epizody. Obě se týkají tříleté Jany Rosákové a pana Kamila Perného, staršího, stříbrovlasého muže. Kamilův syn Aleš a jeho manželka Dana jsou bezdětní. Při jedné návštěvě rodiny Perných u rodiny Rosákových se Jana zeptala Kamila, zda má babičku. On odpověděl: „Kdepak, ty obě mi zemřely již dávno, dávno. Jedna dokonce dříve než jsem se narodil“. Odpověď zjevně Janu velice překvapila, ale více se již nevyptávala.

Po odchodu návštěvy Janina maminka v rozhovoru s manželem řekla „Pan Kamil je hodný otec“. Tato věta vyprovokovala Janu k rozhovoru s mámou. Řekla, že strejda Kamil není otec, ale děda a ptala se též na babičky dědy Kamila. Janina máma, která nám celý příběh vyprávěla, rychle pochopila příčinu nedorozumění. Jana „babičkou strejdy Kamila“ rozuměla „manželku dědy Kamila“, nikoli na jeho babičku. Maminka s Janou nejdříve probrala otázku, zda může být strejda Aleš tatínek, když nemá ani syna ani dceru. Ani pak ale Jana nechtěla považovat Kamila za otce, jen za dědu. Asi po týdnu však sama tuto novou koncepci přijala a chápala, že babička je mámina máma i že Kamil je otec Aleše. Janina maminka nám nedokázala říct kdy a jak došlo ve vědomí Jany ke změně chápání slov (1). Řekla jen, že tato změna byla definitivní.

Analýza příběhů

V prvním příběhu je Terka překvapena maminčiným oslovením babičky. Pro Terku slovo „máma“, použité v kontextu její rodiny, je vlastní podstatné jméno, tedy „Máma“. Toto egocentrické chápání bylo matčiným výrokem narušeno. Zde ale nešlo pouze o informační šum. Máma je pro dítě jeho životní jistota. A tato byla uvedeným oslovením zpochybněna. Odtud plyne agresivita Terky.
U druhého příběhu se Ivan dostává do podobné informační nejistoty, jenže tentokráte se nejedná o jeho mámu. Ivan je překvapivým použitím slova „maminka“ zaskočen, protože je přesvědčen, že v každé rodině je jediná maminka. Babičce nepřiznává roli matky.
Třetí příběh je v jistím smyslu inverzní k příběhu druhému. Ivan nebyl ochoten babičce přiznat roli matky a Jana prohlásí za dědečka muže, který nemá vnouče. Pro Janu je rodina vrstvena do tří generací: děti, rodiče, prarodiče. Aleš, byť bezdětný, je podle této klasifikace otcem a Kamil je dědeček, bez ohledu na to, že nemá vnoučata. Interpretace Jany není však až tak chybná, protože slovo „děda“ se běžně používá na označení starého muže.
Analýza nás vede k zobecnění konkrétních případů a k formulaci etapizace procesu.

5. ETAPIZACE PROCESU BUDOVÁNÍ STRUKTURY „RODINA“

Příběhy ilustrují počáteční stádium objevování struktury RODINA dítětem. V něm nacházíme dvě etapy a náběhy na etapu třetí. Etapy lze charakterizovat tím, jak dítě vnímá nejdůležitější termín této struktury, termín „máma“.
V první etapě je „máma“ = „moje máma“.
Ve druhé etapě je „máma“ jediná a ústřední osoba v rámci každé rodiny.
Ve třetí etapě je „máma (osoby X)“ relace a „máma“ je žena, která má aspoň jedno dítě.
Tyto etapy podrobněji prozkoumáme a rozšíříme ještě o jednu další etapu.

První etapa poznávání struktury RODINA se omezuje na poznávání členů vlastní rodiny. Když se na roční dítě obrátíte s výzvou „Kde je maminka?“ otočí pohled k vlastní mámě. Podobně se dítě chová když se ptáme na tátu, babičku, ... Slova „máma“, „táta“, „babička“, „dědeček“ resp. „smíchovská babička“,… jsou jména konkrétních osob, jedinců. Měli bychom je psát „Máma“, „Táta“, … jako jména vlastní. Výjimku tvoří slova „bratr“ a „sestra“ v těch případech, kdy dítě má více sourozenců, protože tito jsou identifikováni křestními jmény. I když má dítě jen jednu sestru, rodiče ji oslovují jménem a tak slovo „sestra“ je jen náhradní označení pro jistou osobu[2]. Této první etapě můžeme dát jméno *individuální,* protože slova (1) označují individua.
Druhá etapa začíná poznáním, že i jiné děti mají mámu i tátu. Slova (1) používá Barborka od sousedů k označení jiných lidí. Dítě poznává, že kromě „Mámy“ (rozuměj „moje máma“) existuje i „Barborčina máma“, „Radkova máma“, ap. Tak se přechodem do druhé etapy mění interpretace slov (1). Již to nejsou jména konkrétních osob, ale jména rodinných pozic. Slovo „máma“ v kontextu té-které rodiny označuje jedinou osobu, matku dětí této rodiny. V každé rodině existuje jediná máma a jediný táta, případně i babička/babičky, děda/dědové. Tato slova jsou rozložena do tří věkových kategorií, tří generací: děti, rodiče a prarodiče. Maminka patří do kategorie rodičů a dcera do kategorie dětí, proto maminka nemůže být dcerou. Podobně táta nemůže být synem a babička nemůže být maminkou – to by bylo proti referenčnímu rámci věkových kategorií dítěte.
Ivan z příběhu 2 je právě v této etapě vývoje. Ví, že teta Lenka je maminka Barborky, ale je překvapen tím, že babička Barborky je maminkou a zatím si neuvědomil, že i maminka může mít maminku. Ještě ostřeji kontrast mezi standardním a generačním chápáním termínů (1) vystupuje ve třetím příběhu, kde pro Janu je nepřijatelné označit staršího pána Kamila otcem a považuje jej za dědu i přes to, že tento muž nemá vnoučata. Tuto druhou etapu nazveme *generační*, protože slova (1) označují osoby určené generační klasifikací.
Jana se podle svědectví své maminky nakonec vyrovnala s tím, že i starý pán může být otec a nelpěla na generačním vnímání termínů (1). Posunula se do třetí etapy, v níž probíhá postupné odpoutávání se od referenčního rámce věkových kategorií a přijímání standardní interpretace rodinných termínů. Na konci této etapy již dítě ví, že slova (1) představují relace mezi dvěma členy rodiny. Proto nazveme tuto etapu etapou *relační*. Dítě, které se dobere k tomuto globálnímu poznání, dospívá v chápání struktury RODINA do „maturitního“ stádia.
Podle svědectví Janiny maminky proběhla u Jany relační etapa rychle, během jednoho týdne, možná dokonce jednoho dne. Jana již ví, že každý člověk má maminku i tatínka, ale ne každý má sourozence, nebo dceru nebo syna. Ví, že její tatínek je manželem maminky a tatínkova maminka je babička.
Poslední, čtvrtá etapa, kterou nazveme *strukturální*, je věnována rozvoji poznatků o této struktuře, obohacování struktury RODINA zejména o

- další pojmy (neteř, prastrýc, tchyně, synovec, ...),
- uvědomování si různých obecně platných zákonitostí (každý člověk má dvě babičky, bratrova máma je i moje máma, ...),
- poznávání rodin s nestandardními vazbami.

Rozklad poznávacího procesu struktury RODINA do čtyř etap je našim pokusem o poznání tohoto procesu. Čtvrtá etapa je asi příliš široká a další její zkoumání pravděpodobně povede k dalšímu jejímu rozkladu.
Je nesnadné experimentálně sledovat proces budování struktury RODINA ve vědomí daného dítěte. O technice takového sledování se zmíníme v dalším. Teď se ještě pokusíme doplnit naši analýzu o aplikace do didaktické oblasti.

[2] Kolegyně M. Benešová mne upozornila na další možné výjimky. Například její vnuk ji oslovuje křestním jménem. Tyto případy nebudeme v naši úvaze diskutovat. Domníváme se však,.že jejich zkoumání může přinést další poznání do procesu tvorby struktury RODINA.

Kolega I. Kupka nás upozornil na to, že ve francouzštině existují rodinné termíny, které v našich jazycích (čeština, slovenština) nenajdeme. Toto upozornění může být impulsem k dalšímu výzkumu: k jazykové komparativní analýze rodinných termínů v různých jazycích a k následnému experimentálnímu zkoumání, jak v jednotlivých jazykových prostředích děti utvářejí svoji strukturu RODINA.

Didaktické komentáře

A. Různá vyprávění dospělých lidí mohou působit jako podněty k budování struktury RODINA ve vědomí dítěte. Maminka může vyprávět například o tom, jak ji její maminka učila utírat nádobí (komentář dítěte: „to bylo tenkrát, jak babička byla maminkou“). U tohoto vyprávění se mohou objevit další důležité informace, které se týkají zákonitostí plynutí času, zejména poznání, že všichni lidi stárnou stejně rychle a věkový rozdíl dvou lidí je nezávislý na čase. Jestliže je dnes maminka od svého bratra, strejdy Ericha, starší o tři roky, bylo tomu tak i v době když oba byli ještě dětmi.

B. Další činnost, vhodná pro rozvoj struktury RODINA ve vědomí dítěte je kladení otázek typu „Má tvůj bratr mámu? Kdo to je?“ nebo „Kolik dětí má tvůj táta? Kdo to jsou?“ nebo „Jak se bude jmenovat tvůj syn, když se provdáš za Matěje Bouzu?“ nebo „Za kolik let budeš stejně starý jako tvoje sestra Alenka?“

C. Když si povídáme s dítětem o rodinných vztazích, rozvíjíme nejen jeho představy o struktuře RODINA, ale i jeho relační myšlení. Edukačně účinné jsou hry v nichž se z panenek, plyšových medvídků, pejsků, … utvoří rodina ve které se postupně mohou objevit i vztahy jako teta, bratranec, strýc, synovec, a pod. Zde dítě nejprve modeluje vztahy vlastní rodiny, až později zapojí fantazii a začne tento model obohacovat o pomyslné osoby, nejčastěji o své vlastní sourozence. Jednou jsme pozorovali, jak si skoro čtyřletá holčička, která k Vánocům dostala velikou panenku, s babičkou hrála na RODINU. Nová panenka byla maminkou této rodiny a další hračky dostaly funkci tatínka, dětí, babiček, dědečků, …. Tato hra trvala několik dní a jak panenkovská rodina narůstala, začala si babička jednotlivé pozice plést a musel si to psát. Dívenka si ale všechno skvěle pamatovala, včetně jmen devíti dětí, které se v rodině postupně „narodily“.

D. Je jasné, že dítě, které najde zálibu v rodokmenech panovnických rodů, nebo tvoří rodokmen své vlastní rodiny, získá hluboký vhled do struktury RODINA.

E. Uvedený čtyř-etapový popis pronikání do struktury RODINA může být inspirací pro hledání etapizace jiných struktur, zejména struktur časových a topografických. Určitě zajímavá je struktura slovních rovnic uložená ve vědomí učitelů.

Ukončili jsme přípravné úvahy, jejichž cílem bylo ukázat na příkladě struktury RODINA jak se struktura ve vědomí dítěte rodí, jak narůstá a jak se postupně konstituuje. Bylo by asi zajímavé sledovat tento proces u dalších struktur. Některé aritmetické struktury budou z tohoto pohledu zkoumány v dalším.

6. PŘÍBĚH O IZOMORFIZMU DVOU STRUKTUR TYPU „RODINA“

Našim dalším cílem je zkoumání procesu zrodu, narůstání a konstituování představ o izomorfizmu dvou struktur typu RODINA. Opět začneme příběhem.

Příběh 4

Pan Pokorný často rozmlouvá se svým osmiletým synem Emilem o různých věcech. Jednu takovou rozmluvu zahájil syn otázkou

Emil 1: Tati, a víš že Novákovic rodina je stejná jako naše?
Otec 1: Jak to myslíš Emile, stejná?
E2: No i voni mají starší holku a mladšího kluka, i my máme starší Radku. Já mám dvě babičky ale jen jednoho dědu i Jenda to má taky tak.
O2: No jo, ale oni bydlí na přízemí a my ve třetím patře.

E3: To se nepočítá. Jenom jako kdo tam bydlí. Rozumíš?
O3: No jo, to je zajímavé. (Otec uvažuje, jak k debatě vhodně přispět.) Ale oni mají Veronu (psa) a my jen kanára.
E4: (Po chvilce) No jo. Nejsme úplně stejní. Ale skoro stejní.
O4: Kdybychom to vzali bez zvířat, tak jsme stejní.

Analýza příběhu 4

Emil objevuje (možná svůj první) separovaný model *izomorfizmu.* Jistě si již dříve všimnul stejnosti nebo různosti rozmístění nábytku v naši jídelně a jídelně u tety, stejnosti/různosti řazení aut na různých parkovištích, rozmístění lavic v různých třídách, stejnosti/různosti seskupení několika budov na sídlišti apod. V žádném z uvedených případů ale množina vazeb nebyla tak hustě vzájemně propletená jako je množina rodinných vztahů. Struktura RODINA je z hlediska hustoty sítě vazeb nejsložitější, neboť umožňuje skládání základních vazeb do složitých vazeb typu „syn otcova strýce“ apod.

Hoch si všimnul, že on i Jenda mají jedinou (starší) sestru, žádného bratra, jednu mámu, jednoho otce, jednoho dědečka a dvě babičky. Jiní jeho kamarádi to mají jinak. Tato shodnost se mu jeví zajímavá. Lze očekávat, že krátký rozhovor s otcem bude v budoucnu orientovat Emila k zvýšené citlivosti na stejnost/různost rodin a obohacování jeho zkušeností se separovanými modely izomorfizmu struktur RODINA.

Emil ví, že jak rodina Nováků (**N**), tak rodina Pokorných (**P**) má sedm členů a ti jsou si vzájemně přiřazeni: („N“ čteme „z rodiny Nováků“, „P“ čteme „z rodiny Pokorných“)

první babička N $\leftrightarrow$ první babička P,	druhá babička N $\leftrightarrow$ druhá babička P,		
dědeček N $\leftrightarrow$ dědeček P,	otec N $\leftrightarrow$ otec P,	máma N $\leftrightarrow$ máma P,	(2)
dcera N $\leftrightarrow$ dcera P,	syn N $\leftrightarrow$ syn P		

První babičkou rozumíme matku matky, druhou babičkou matku otce.
Úvaha o špatném přiřazení pes N $\leftrightarrow$ kanár P vedla k vyloučení zvířat z množiny prvků rodiny. Emil mohl též obě zvířata vzít a vytvořit přiřazení zvíře N $\leftrightarrow$ zvíře P. Tím by se v každé rodině objevil prvek, který se žádným jiným prvkem není nijak vázán. To neudělal.

Emilem objevená stejnost rodin **N** a **P** není ještě izomorfizmem. Hoch vnímá stejnost rodin přes prizma generace dětí, která v jeho pohledu hraje významnější roli než obě generace další: a) u generace dětí uvažuje i o věkovém rozdílu hocha a dívky a u generací rodičů a prarodičů o věku vůbec nemluví, b) u generace rodičů a prarodičů nebere v potaz jejich vzájemné vazby; nevšímá si, zda jeho dědeček a Jendův dědeček jsou dědečkové ze stejné strany. (Jestliže totiž například dědeček P je otcem otce P a dědeček N je otcem matky N, pak rodiny **N** a **P** nejsou izomorfní ve výše popsaném smyslu.)

7. PROCES UVĚDOMOVÁNÍ SI IZOMORFIZMU DVOU STRUKTUR

Podívejme se nejprve na obě složky izomorfizmu, který objevil Emil.

Složka *přiřazovací* je popsána vztahy (2), které byly Emilovi zcela jasné.

Složka *strukturální* se týká organizace porovnávaných rodin a je dána vztahy typu „dědeček má manželku“, „jedna babička nemá manžela“, „maminka má dvě děti“, „tátova maminka má dvě vnoučata“, „otcova dcera má bratra“ atd.

Jakmile si dítě uvědomí složku přiřazovací i složku strukturální, má vytvořenu představu izomorfizmu. Tuto představu můžeme formulovat matematickým jazykem:

Mezi strukturami **N** a **P** je dáno vzájemně jednoznačné zobrazení. Přitom pro libovolné dvě dvojice vzájemně přiřazených prvků $N_1 \leftrightarrow P_1$ a $N_2 \leftrightarrow P_2$ platí, že vazba mezi prvky N_1 a N_2 je stejná jako vazba mezi prvky P_1 a P_2.

Představa o izomorfizmu struktur se ve vědomí dítěte tvoří po kouscích. Nejprve se objeví jen její část – některé prvky a některé vazby. Viděli jsme, že stejnost rodin, o které mluví Emil, se tedy netýká celých struktur, ale pouze těch rodinných vztahů v nichž vystupují on a Jenda. Tuto stejnost můžeme nazvat *částečný izomorfizmus.* Právě taková příbuznost je první etapou budování pojmu izomorfizmu ve vědomí člověka.

Typickým rysem částečného izomorfizmu je rozostřenost hranic porovnávaných struktur. Dítě vnímá jisté prvky a jisté vazby zcela jasně, některé další evidentně nevnímá a některé vnímá jen povrchně, náznakově. Tak Emil jasně vnímá vše o čem mluví: 7 členů každé z rodin i rodinné vazby těchto členů k sobě a Jendovi. Jasně ví, že patro bytu ve kterém rodina bydlí do izomorfizmu nevstupuje (jeho reakce byla okamžitá), ale ve věci zvířat již jistotu nemá. I když o tom Emil nemluví, domníváme se, že si uvědomuje i některé další rodinné vazby, v nichž on nebo Jenda nevystupují. Například to že oba rodiče v obou rodinách jsou manželé. Je ale zřejmé, že si neuvědomuje vazby mezi rodiči a prarodiči.

Další etapa budování představy izomorfizmu spočívá v upřesňování představy částečného izomorfizmu. Dítě si postupně ujasňuje, které prvky do porovnávaných struktur patří a které nepatří a objevuje nové vazby mezi prvkami struktur. Někdy tento proces vede k zásadnější restrukturalizaci celé představy. Tedy budování izomorfizmu jde souběžně s budováním struktury a to je jev, který dal název celé naši úvaze.

Úvahy o příbuznosti struktur jsou provázeny úvahami o různosti struktur. V příběhu 4 se o tom nemluví, ale z jiných našich experimentů můžeme soudit, že strukturální stejnost rodin **P** a **N** si Emil uvědomil až když uvažoval o dalších rodinách jejichž struktura byla odlišná od jeho rodiny. Hoch znal několik rodin a věděl, že každá má jisté uspořádání. Najednou uviděl, že rodiny **P** a **N** jsou uspořádány stejně.

Na závěr uvedeme ještě jednu rozšiřující myšlenku. Když se omezíme na evidenci počtu členů rodiny v generaci dětí (to číslo označme d), v generaci rodičů (označme r) a v generaci prarodičů (označme p), bude pro obě uvažované rodiny platit: $d = 2$, $r = 2$, $p = 3$. Stejnou číselnou charakteristiku má i rodina ve které jsou obě děti hoši, nebo dívky, nebo kde jsou dva dědečkové a jen jedna babička. Takové zobrazení rodiny na trojici čísel (d, r, p) má charakter homomorfizmu. Toto téma v našich úvahách dále nerozvíjíme, nabízíme je čtenáři.

Relace (1) lze různorodě vzájemně propojovat množinovými operacemi a skládáním. Například relace dítě je sjednocením relací dcera a syn (moje dítě to je moje dcera, nebo můj syn) a relace vnuk je složením relací dítě a syn (můj vnuk to je syn mého dítěte). Tato skutečnost dává bohaté možnosti pro využití struktury RODINA k tvorbě zajímavých úloh. Uvidíme to v následující kapitole.

8. DIDAKTICKÉ APLIKACE

Uvádíme komentovaný soubor úloh o rodinné struktuře. Jde o úlohy úspěšně použité při experimentálním vyučování na prvním stupni a v experimentech s těmi žáky mateřských škol, kteří již měli rozvinuté generační a částečně i relační chápání struktury RODINA.

Hned v úvodu považujeme za důležité upozornit na to, že diskuse o struktuře RODINA se žáky ve třídě může být věcí hodně choulostivou. Pro děti z neúplných nebo rozvrácených rodin může být toto téma traumatizující. Chceme-li ve třídě diskutovat rodinné vztahy, pak je k tomu účelu vhodné připravit genealogický stromu některého panovníka, nebo známé osobnosti, nebo pouze smyšlené rodiny.

V individuálních debatách se dětmi 5 – 7 letými (mateřská škola a první třída) jsme mluvili pouze s dětmi ze „standardních“ rodin: 2 rodiče, aspoň 3 žijící prarodiče a většinou aspoň jeden sourozenec. Naše otázky se vztahovaly pouze k žijícím lidem. Například o babičkách jsme mluvili jen s dítětem, jehož obě babičky žijí a otázku „Kdo je synem tvého otce?“ jsme nedali dívce, které nemá bratra. Bylo by zajímavé pokračovat v těchto experimentech i s dětmi z neúplných rodin.

Jak experimenty ukázaly, pro děti byly srozumitelnější. otázky začínající slovem „Má“ než otázky začínající slovem „Kdo?“ Proto jsme se ze začátku ptali „Má tvůj otec syna?“ a po kladné odpovědi jsme se zeptali „Kdo to je?“ Většinou ale druhou otázku nebylo nutné klást, protože dítě určilo hledanou osobu již v odpovědi na první otázku.

Když již dítě dobře odpovídalo na otázky typu „Má?“ Začali jsme se ptát „Kdo?“ a tento přechod způsobil změnu odpovědí pouze u jednoho velice teoreticky orientovaného hocha (7 let). Ten místo rodinných jmen, začal osoby identifikovat jejich občanskými jmény. Dokonce na otázku „Kdo je synem tvého otce?“ jmenoval plnými jmény svého staršího bratra i sebe.

Uvádíme ilustrace otázek kladených v těchto experimentech.

Kdo je matkou tvého bratra / tvé sestry?
Kdo je babičkou tvého bratra / tvé sestry?
Kdo je dcerou / synem tvého otce?
Kdo je synem / dcerou tvého dědy?
Kde je vnukem / vnučkou tvé babičky / tvého dědy?
Kdo je bratr / sestra tvého otce?
Kdo je matkou tvého otce?
Kdo je dcerou / synem tvé babičky?
Kdo je manželem tvoji babičky?

Další typ otázek měl tvar „Někdo z vaši rodiny řekl bla-bla-bla. Kdo to byl?“ Výpověď označená zde bla-bla-bla byla postavena nejprve adresně. Například bla-bla-bla =

Moje dcera se jmenuje Michaela.
Moje manželka se jmenuje Eva.
Mám tři vnuky. Z nich nejstarší se jmenuje David.
Můj bratr se jmenuje Tonda.
Mám jednoho staršího bratra.

Po správné odpovědi „moje babička“ následovala doplňující otázka: „Jak se jmenují její další dva vnuci?“

Mnohé otázky měly více řešení. Například výpověď „Moje dcera se jmenuje Michaela“ může říct otec Michaely i její maminka. Jestliže dítě uvedlo jen jedno řešení, ptali jsme se někdy i na druhé řešení. Pro některé děti byly tyto otázky značně náročné a vyčerpávající.

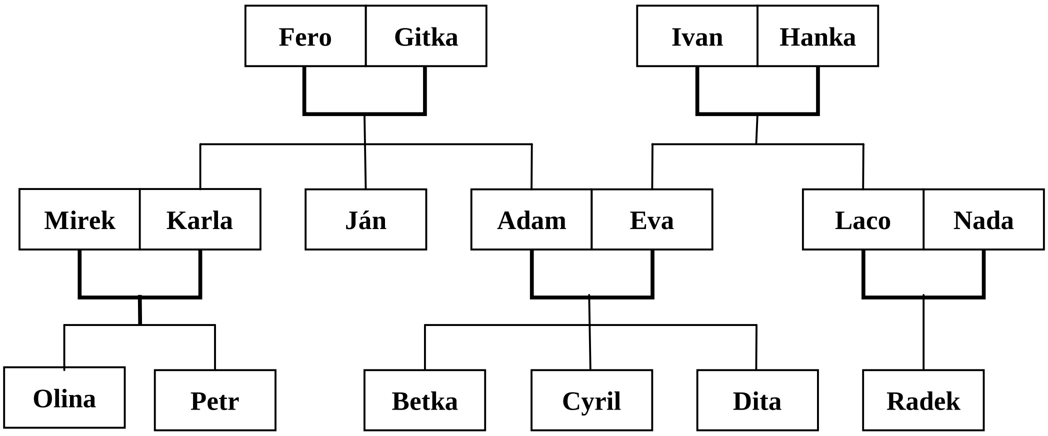
Starším žákům ve věku 8-10 let jsme dávali náročnější úlohy, které se nevztahovaly k žádné konkrétní rodině. Například hádanky typu:

- Dítě řeklo svému sourozenci „Mám více sester než ty.“ Lhalo, to dítě?
- Dítě řeklo svému otci „Ty máš syna, ale já nemám brata“. Lhalo, to dítě?
- Dítě řeklo své mámě „Já mám bratra, ale já nemáš syna“. Lhalo, to dítě?
- Lhala dospělá osoba když řekla dívce „Ty jsi moje dcera, ale já nejsem tvoje máma?“

Hádanky se ukázaly jako náročné. Žáci je řešili pomocí modelů různých rodin a odpověď silně závisela od toho, jaký model byl zvolen. Například první úlohu vyřešil hoch (2. třída) z početné rodiny (měl 3 sestry a jednoho bratra, který byl ještě batole) velice rychle, ale jeho spolužačka, která měla jen jednu setru, po chvíli váhavě odpověděla „každá máme jen jednu sestru“. Výzva experimentátora, aby si zkusila představit jinou rodinu a jiné dítě ji uvedla do rozpaků.

Lepší porozumění těchto úloh jsme pozorovali až u žáků 3. ročníku a starších. Zde máme již i evidenci o reakci dětí z experimentálního vyučování. Ve 3. – 5. ročníku jsme někdy v průběhu 2 měsíců zveřejnili na nástěnce postupně asi 10 – 15 nových úloh o rodinných vazbách. Úspěšní řešitelé úloh pak svoje úvahy předvedli třídě. Pokaždé ale byl výklad žáka realizován na nějaké rodině, ať již existující, nebo smyšlené. V pátém ročníku již začali žáci uvažovat hlouběji: hledali všechna řešení a hledali též různé rodiny, aby přesně zjistili, jak odpověď na položenou otázku závisí od struktury rodiny.

Pro potřeby těchto úloh jsme si postupně vytvořili rozsáhlejší rodokmen (genealogický strom) tří rodin obsahující 17 osob. Rodina Dubových (A, B, C, D, E, F, G a J), rodina Lípových (I, H, L, N a R) a Bukových (K, M, O a P).



Jako ilustraci uvádíme několik úloh vztahujících se k uvedenému stromu.
Která osoba má nejvíce tetiček? (Teta = sestra rodiče.)

- Která osoba má dva bratrance/sestřenice? (Bratranec/sestřenice = osoba mužského/ženského pohlaví s níž mám společnou právě jednu babičku.)
- Babička vnuka osoby X je Hanka. Kdo je osoba X?
- Strýc bratrance osoby X je Laco. Kdo je osoba X? (Strýc = bratr rodiče)
- Bratr osoby X má 3 děti a sestra osoby X má 2 děti. Kdo je osoba X?
- Manžel setry osoby X má dva sourozence. Kdo je ten manžel?
- Osoba X řekla „mám dva syny a dceru Y“. Manžel osoby Y je nekuřák. Kdo je osoba X a kdo je osoba Y?
- Osoba X řekla osobě Y „ty máš dva strýce a jeden z nich je manželem mé tety“. Kdo je osoba X kdo je osoba Y? Kolik má úloha řešení?
- Existují na našem rodokmenu bratranci ve druhém kolenu? Jak máme pojem „můj bratranec ve druhém kolenu“rozumět? Je to „bratranec mého bratrance“, nebo muž s nímž mám společnou právě jednu prababičku“?

Zajímavou diskusi vyvolala jedna odpověď na otázku „Kolik členů našeho rodokmenu nese jméno Lípa nebo Lípová?“ Soňa (4. roč.) řekla, že teď jen 5, ale když se Olina vdá za Radka, bude jich 6. Proti této hypotéze se ozvaly dvě námitky. První se týkala toho, že jsou i jiné možnosti, například že se Lacovi a Nadi narodí další děti. To Soňa odmítla argumentem, který již dvakrát použil učitel: mluvíme o našem rodokmenu a nemůže jej doplňovat dalšími lidmi. Druhá námitka se týkala toho, že se lidi ze stejné rodiny nemohou vzájemně brát. Velice rušná debata na toto téma vedla k vyjasňování termínu „pokrevní příbuzní“.
S matematicky vyspělými žáky jsme prostředí struktury RODINA využili ke kultivování strukturálního a množinového myšlení. Výchozí situace byla následující: je dána konečná množina mužů **M** a konečná množina žen **Ž**. Na množině **R** = **M** $\cup$ **Ž** jsou definovány některé relace ze seznamu (1) případně doplněného o další termíny. Které další relace lze z těchto daných relací definovat? Přitom relace (1) odpovídají běžnému významu.
Formalizovaná situace v sobě skrývá pasti, které žáci postupně sami objevují a každý takový objev je krokem k hlubšímu chápání matematiky. Například objev, že zdánlivě evidentní pravda „vnuk = syn dítěte“ platí pouze v takové množině R, ve které je definován propojující prvek „rodič dítěte“ tj. „dítě prarodiče“. Kdybychom například z rodokmenu uvedeného výše vypustili osoby Adam a Eva, zůstal by Cyril vnukem Gitky, ale nebylo by jej možné definovat jako syna dítěte. Kolem této situace se v jedné třídě vedla dlouhá diskuse o tom, zda je taková „rodina“ vůbec reálně myslitelná. Zvítězil názor, že i zesnulí členové rodiny zůstávají nadále v genealogickém stromu rodiny.
Některé žáky překvapivé jevy ve struktuře RODINA inspirovaly k hledání vyložených anomálií. Například myšlenka, že vyděděním některého člena rodiny, může dojít k snížení počtu sourozen-

ců některého člověka nenašla ve třídě dostatečný počet příznivců. Vedla však žáky k potřebě zavést pojem „normální rodina“, ze které byly vyloučeny všechny nepřirozenosti. Například byl vyloučen incest. Ale nejednotnost byla kolem toho, zda je nebo není povolen sňatek dívky s bratrancem ve druhém kolenu, nebo sňatek dívky s bratrem, který byl rodiči adoptován a podobné případy. Později bylo ustanoveno, že každý má právo definovat termín „rodina“ jak se mu zlíbí, ale jeho definice musí být nesporná.

Závěr kapitoly je vzpomínkou na nedávno zesnulého J. Gatiala, jehož přátelství mne obohacovalo po mnoho let.

V době politického tání domluvil kolega Gatial s redakcí mládežníckého časopisu Prúd, že zde společně povedeme matematickou soutěž pro čtenáře. Soutěž Hľadáme fiškusa jsme vedli v létech 1967 a 1968. Jedna z úloh se týkala struktury RODINA. Uvádíme plné znění úlohy uveřejněné v čísle 7 časopisu Prúd, z roku 1968.

„Do redakcie prišlo asi sedemročné dievčatko a predstavilo sa nám takto: Volám sa Zuzka a poviem vám básničku

Dcéra tety Jána Zicha
Volá sa dnes Eva Tichá.
Otec Jána Zicha veru
Nemá, ani nemal dcéru.
Švagor otca mojej matky
Deduškom je malej Katky.

Okrem toho, čo prezradila Zuzka, oznámime vám, že v básničke je priamo menovaných nie viac ako 7 osôb. Menovaní sú napríklad Ján Zich, teta Jána Zicha, Zuzkina matka, otec Zuzkinej matky. Kvôli jasnosti ešte uvedieme, že ‚teta‘ je ‚sestra niektorého z rodičov‘, ‚švagor‘ je ‚buď brat manželky, alebo manžel sestry‘ a ‚deduško‘ je ‚otec jedného z rodičov’.

Vašou úlohou je

1. Uviesť plné mená Zuzky i Katky
2. Zdôvodniť riešenie.

Pri riešení úlohy predpokladáme splnené všetky bežné vzťahy v rodine. Tak napríklad manželka po svadbe berie priezvisko manželovo, ktoré neskoršie dostanú všetky ich deti. Do manželstva vstupujú dvaja ľudia predtým nijako pokrvne neviazaní.“

Tím jsme ukončili zkoumání struktury RODINA. Další ilustrace pojmu izomorfizmus budou již ze školního prostředí a budou vloženy do více-méně známých matematických kontextů.

9. NÁSOBENÍ JAKO IZOMORFIZMUS

Izomorfizmus abelových grup f_2: $(Z,+) \to (2Z,+)$, $x \to 2x$, ve kterém se každé celé číslo zobrazí na svůj dvojnásobek je příklad izomorfizmu, který se objeví například když se děti řadí do dvojstupu. Když se na procházce potkají a spojí dvě třídy seřazené do dvojstupů vznikne delší útvar. Jestliže třídy měly jedna 5 a druhá 6 dvojstupů, bude celkový počet dětí 2(5+6), nebo 2.5 + 2.6. V obou případech je výsledek 22, protože $f_2(5+6) = f_2\,(5) + f_2(6)$. Tedy: 5 + 6 dvojic je totéž jako 5 dvojic + 6 dvojic.

Zobecněním izomorfizmu f_2 je izomorfizmus

$f_{n/k}$: $(kZ,+) \to (nZ,+)$, $kx \to nx$, kde k, n, x jsou celá, k, n navíc nenulová.

Je zřejmé, že inverzní k izomorfizmu $f_{n/k}$ je izomorfizmus $f_{n/k}^{-1} = f_{k/n}$ Dva speciální případy tohoto izomorfizmu používají žáci často: f_{10} a $f_{1/10}$. Použití prvního interpretují jako „připsání nuly“ a použití druhého jako „škrtnutí nuly“. Uveďme ilustraci.

Leo, žák druhého ročníku, měl najít součet 40 + 30. Okamžitě řekl výsledek 70. Když byl tázán, jak se mu to povedlo tak rychle zjistit, nejprve chvíli hledal slova a pak řekl „čtyři a tři je sedm a dám tam ještě nulu“. V jazyku matematiky můžeme postup popsat trojicí kroků.

1) úlohu 40 + 30 = ? transformuji izomorfizmem $f_{1/10}$ na úlohu 4+ 3 = ?
2) tu vyřeším, dostanu 7 a
3) toto číslo inverzním izomorfizmem f_{10} transformuji na 70 – výsledek původní úlohy.

Na první pohled se může zdá nepodstatné, že hoch svůj postup popsal. Důležité je, že úlohu rychle vyřešil. Navíc, na rozdíl od početního výkonu, který byl okamžitý a přesný, byl jeho popis vlastní činnosti málo přesvědčivý. Zapomněl říct, že čísla 4 a 3 získal z čísel 40 a 30 umazáním nuly.
Ve skutečnosti je Leův popis výpočtu důležitý. Důležitější než výpočet sám. Právě proto, že vznikal obtížně a nebyl zcela zdařilý. Výpočet byl pouze aplikací myšlenky, kterou Leo dobře znal. Nepřinášel hochovi nové poznání, měl pouze opakovací, nácvikový charakter. Slovní popis výpočtu byl hochův tvůrčí proces, který mu přinášel zvědomění si řešitelského procesu. Vztah mezi činností a zvědomováním si této činnosti rozvedeme.

V první etapě mnoha poznávacích procesů dochází k *poznání v činnosti* (knowledge in action). Žák to umí udělat, ale svoji činnost neumí popsat. Umí vyřešit rovnici, nebo sestrojit řez krychle rovinou, ale neumí svůj postup popsat. I my si třeba umíme zavázat tkaničku, ale asi bychom museli dlouho pracovat na popisu této činnosti. Umí-li žák svoji činnost popsat, dostává se k vyššímu stupni poznání, k *uvědomování si vlastní činnosti*. Žák pojmenovává objekty s nimiž pracuje, rozkládá svoji činnost na jednotlivé kroky, poznává strategii činnosti, často objevuje, že při popisu činnosti nutno rozlišovat několik různých typů úloh. Tento vyšší typ poznání posouvá dané poznání v akci na abstraktnější úroveň a tím umožňuje její další rozvoj. Například Leovi se postupně vyjasní, že jeho výpočet spočívá ve třech krocích: umaž nulu, sečti, připiš nulu. Když si hoch později uvědomí, že umazat nulu znamená dělit 10 a připsat nulu znamená násobit 10, bude připraven k objevu, že stejný trik lze použít například při hledání součtu 111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 666.

Z uvedených důvodů se nám jeví důležité vést žáky k uvědomování si vlastních činností, zejména těch, které budou později zobecňovány. K zvědomování si vlastní činnosti může vést žáka výzva učitele, ale i potřeba vysvětlit spolužákovi „jak na to“. Právě v tomto jevu tkví jádro Senecova poučení *Docendo discimus* (Učíce jiné, sami se učíme).

Uvedené použití izomorfizmů f_{10} a $f_{1/10}$ nepřináší žákům zkušenost s izomorfizmem dosti intenzivně, nebo je záhy utlumeno myšlenkou v tomto kontextu daleko závažnější – přechodem přes desítku. Podstatně intenzivněji k zrodu a rozvoji myšlenky izomorfizmu přispívají například situace typu HAD nebo PYRAMIDA. Na ně se teď podíváme.

10. SITUACE „HAD“ JAKO PROSTŘEDÍ PRO IZOMORFIZMUS

Schéma

$$\boxed{} \xrightarrow{+2} \boxed{} \xrightarrow{+3} \boxed{} \xrightarrow{-4} \boxed{} \xrightarrow{+5} \boxed{} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{-3} \boxed{}$$

tvořené 7 prázdnými okénky a 6 šipkami, z nichž tři označují operaci přičítání a tři operaci odčítání nazveme *had* [+2; +3; -4; +5; -1; -3]. Schéma čteme zleva doprava, takže je jasné co máme na mysli když napíšeme *druhé okno*, nebo *třetí šipka*. První okno hada nazveme *vstupem* a poslední okno nazveme *výstupem*. Když do každého okna uvedeného hada vložíme nějaké reálné číslo, získáme *vyplněného hada*:

$$\boxed{a} \xrightarrow{+2} \boxed{b} \xrightarrow{+3} \boxed{c} \xrightarrow{-4} \boxed{d} \xrightarrow{+5} \boxed{e} \xrightarrow{-1} \boxed{F} \xrightarrow{-3} \boxed{g}$$

Jestliže pro takto vyplněného hada platí šest rovností

$$a + 2 = b, \quad b + 3 = c, \quad c - 4 = d, \quad d + 5 = e, \quad e - 1 = f, \quad f - 3 = g,$$

pak řekneme, že had je *dobře vyplněn*, nebo *vyřešen*.

Analogicky lze zavést například pojem *had* [+7; $\times$3; :2] – had má čtyři okna a tři šipky z nichž první označuje operaci přičítání a druhá operaci násobení a třetí operaci dělení, nebo *had* [$\times$ 1,35] – má dvě okna a jedinou šipkou označující násobení. Je to jinak, pro nás asi složitěji, ale pro mnohé žáky jednodušeji, popsaná operace násobení číslem 1,35.

Nejčastěji zní úloha o hadech takto: dán je had i jeho vstupní číslo, najděte číslo výstupní. Krátce takovou úlohu formulujeme slovy *řešte hada pro číslo p.*

Termínem *práce hada* rozumíme přiřazení vstup $\rightarrow$ výstup. Žádáme-li žáka, aby zjistil, jak daný had *pracuje*, chceme, aby našel pravidlo, které říká jak k číslu na vstupu lehce najít číslo na výstupu. Například práce hada [+2; +3; -4; +5; -1; -3] je dána pravidlem „přičti dvě".

Problémová situace HAD je struktura, kterou lze využít na poznávání izomorfizmu Podívejme se na dvojici úloh, které takový izomorfizmus navozují. Dodejme, že texty úloh, které v dalším uvádíme, jsou zapsány v úsporné dikci určené učiteli. Pro žáky je potřeba tyto texty upravit. Ve většině případů pak uvedenou úlohu rozdělit do více úloh.

Úloha 1. a) Řešte hada [+2; +3; -4; +5; -1; -3] pro čísla

3, 4, 11, 27, 35 a 86 (3)

b) pro stejná čísla řešte hada [+20; +30; -40; +50; -10; -30].

Úloha 2. Řešte hada [+2n; +3n; -4n; +5n; -n; -3n] pro čísla (3), když je a) $n = 2$, b) $n = 5$, c) $n = 4$, d) $n = 3$, e) $n = 8$, f) $n = 15$.

Cílem uvedené série úloh je dovést žáky k objevu: když všechna čísla v hadovi z úlohy 1a) vynásobíme číslem n (tj. když na tohoto hada aplikujeme izomorfizmus f_n) obdržíme hada, pro kterého platí *výstup* = *vstup* + 2n. Děti zde pro tvorbu úlohy izomorfní používají slovní popis „zvětšujeme celého hada", nebo „hada násobíme". Tím se zvětšování, nebo násobení stávají separované modely izomorfizmu.

Poznávání aritmetiky hadů není ukončeno, protože žáci ještě neznají hranice svých objevů. Zatím se nesetkali s úlohami, u kterých objevené návody na řešení neplatí. V příběhu 2 se u izomorfizmu typu RODINA takové upozornění na omezenou platnost izomorfizmu objevilo: zvířata chovaná v obou rodinách do struktur rodin zahrnovat nelze.
K poznání hranic uskutečněných objevů dovedou žáky další úlohy, ve kterých budou kromě operátorů přičítání a odčítání i operátory násobení, popřípadě dělení.

11. PROPEDEUTIKA IZOMORFIZMU F_{10} PŘÍBĚH 5

V jedné čtvrté třídě, kde žáci měli již s úlohami o hadech více zkušeností, řešili úlohu 1a). Čísla (3) napsala učitelka na tabuli do rámečku. Po chvíli Radek a pak další žáci volali, že „stačí přičíst dvě". Učitelka, podle zavedeného zvyku, napsala na tabuli objev i objevitele.

Radek: výstup = vstup + 2 (4)

To podnítilo další žáky, aby se pochlubili svými (někdy i nepravdivými) objevy:
Milena: Nejmenší číslo je ve čtvrtém okénku a největší pátém.
Vilma: První dvě čísla jsou sudá, obě (dvouvteřinová pauza), nebo obě lichá.
Láďa: Ve třetím okénku je součet prvního a druhého okna.
Milan: Číslo ve třetím okénku je stejné jako předposledním, šestém.
Svatka: Číslo ve druhém okénku je stejné jako v posledním.

Lukáš řekl, že tedy vlastně stačí najít číslo ve druhém okénku a úloha je vyřešena. Zbytek hada můžeme smazat. Pak vysoce ohodnotil objev Svatky slovy: „Tedy tomu já říkám objev".

Pak učitelka předložila třídě úlohu 1b). Svislou čárou oddělila vše co bylo dosud na tabuli napsáno a na čistou pravou část tabule nakreslila schéma hada, zatím ještě bez čísel. Řekla: „Teď vám dám jiného, složitějšího hada. Opět jej řešíte pro tato čísla (ukázala na čísla (3)). Když se dobře podíváte, uvidíte, že oba hadi jsou si nějak podobní". Pak nad šipky nakresleného již hada začala psát čísla + 20, + 30, - 40, ... Jana ihned pochopila v čem spočívá podobnost obou hadů a poslední tři čísla + 50, - 10, - 30 učitelce diktovala. Někdo křičel, že „se tam připisují nuly" a třída s tím souhlasila. Nikdo neřekl, že se násobí deseti.

Ivo, ještě dříve než byl druhý had dopsán, křičel: „první výsledek je padesát". Po krátké chvíli Edo oznamoval křičel, že to bude 23. Následovala hlučná debata, kterou nebylo možné evidovat, protože několik dětí mluvilo naraz. Následující záznam je tedy značně neúplný.

Učitelka 1: Tak padesát nebo dvacet tři?

Mirka: Edo má pravdu, je to dvacet tři. Mně to tak vyšlo.
Edo: Dycky se přidá dvacet. K těm třem přičtu dvacet.
Honza 1: Ivo to řekl, padesát, všude připíši nulu.
Táňa 1: Výstup je vstup plus dvacet. Jak to je tam podle Radka (ukazuje na nápis (4)).
U 2: Edo tobě vyšlo dvacet tři a Honzo a tobě vyšlo padesát?
Vilma: Já to mám jako Honza.
Táňa 2: Máš to blbě, blbě… (Věta se zaniká v sílícím hlasu třídy „je to určitě dvacet tři“.)
Honza 2 (s nelibostí): Ne to ne,... Je to dvacet tři. Já to,.. já tam (ukazuje na nápis 3→5 na levé tabuli) připsal nulu. To je blbě.
U 3: Tvůj výsledek, Honzo, i tvůj Vilmo a Ivane, je sice nepřesně, ale…(ve třídě je hlučno). Děcka, dopřejte mi hlasu. Říkám, že myšlenka Ivana, Honzy a Vilmy byla velice správná – poznali, že když je mezi hady jednoduchá souvislost, že i pravidla pro oba hady budou blízká. (Obrací se k Honzovi) Jen jste se ukvapili Napříště si první nápad raději prověřte.
Svatka: Ale to moje je stejně dobře. Ve druhém okénku je taky dvacet tři.
U 4: Svatka tvrdí, že tento její objev (ukazuje příslušný nápis na levé části tabule) platí i pro tohoto druhého hada. Má pravdu?
Lukáš: Určitě! To přesně vychází! K dvojce musíme připsat nulu.

Učitelka pohledem pochválila Svatku i Lukáše a na tabuli napsala

Svatka + Lukáš výstup = vstup + 20 (5)

Po hodině přišel Milan učitelce říct, že nejen Svatčino, ale i jeho pravidlo platí pro oba hady. Že to prověřil na dvou příkladech. Honza přišel učitelce vysvětlit svůj omyl: „Já věděl, že se tam má připsat nula, ale připsal jsem ji jinam. Měl jsem to připsat ke dvojce“. Učitelka oba hochy žádala, aby ji to napsali na lísteček, že se na to podívá a odpoví na lístečku.

12. ANALÝZA PŘÍBĚHU 5, KOMENTÁŘE

Předně nutno k příběhu říct to, co je pedagogicky podstatné, byť se to netýká bezprostředně izomorfizmu struktur: Vyučování má silně konstruktivistický charakter. Učitelka klade otázky, organizuje diskusi, eviduje vše co děti vymyslí někdy provokuje, ale hlavně žáky povzbuzuje pozitivním ohodnocením autonomního myšlení. Učitelka se nesnaží předávat dětem „moudra“, ale dává jim prostor pro jejich seberealizaci, pro přirozený rozvoj jejich osobností.

Z hlediska edukačního stylu učitelky jsou, kromě zmíněného již pozitivního hodnocení žáků pozoruhodné zejména tři momenty.

Diskuse se odehrává především mezi žáky, učitel ji jen moderuje případně komentuje. Jen když zazní vulgarizmus a odsuzování za názor, ujme se obhajoby osočovaných (vstup U 3).

Pozoruhodná je reakce Lukáše na objev Svatky. Na prvním stupni není vzájemná věcná matematická komunikace mezi žáky běžná. Na myšlenku spolužáka žák buď vůbec nereaguje, protože je zaujat vlastní myšlenkou, nebo reaguje souhlasem či nesouhlasem, když zjistí, že se jedná o myšlenku, která je právě i v jeho mysli. Jen ojediněle žák reaguje na „cizí“ myšlenku. K tomu dochází až po trpělivém a dlouhodobém vedení učitele, který žáky učí vzájemně poslouchat vlastní myšlenky. Tedy i reakce Lukáše svědčí o pedagogické kvalitě učitelky.

Honza hledal a našel příčinu své chyby. Schopnost zamyslet se nad příčinou vlastní chyby a tím z ní získat poučení do budoucna je hodnotný osobnostní rys člověka, daleko překračující hranice matematiky. Je pravděpodobné, že si tuto schopnost hoch rozvinul zejména v matematice. Tím matematika významně přispěla k formování hochovy osobnosti. To je další pochvala práce učitelky a další argument ve prospěch konstruktivistického přístupu k vyučování (nejen) matematiky.

Závěr hodiny ukazuje jak učitelka řeší to, že některým žákům nemůže pro nedostatek času dát na hodině prostor na seberealizaci. Řeší to korespondenčně. Jistě že učitelka musí na to obětovat hodně volného času, ale efekt je značný: žáci netrpí pocitem odstrčení a vede je to ke kultivaci komunikačních schopností.

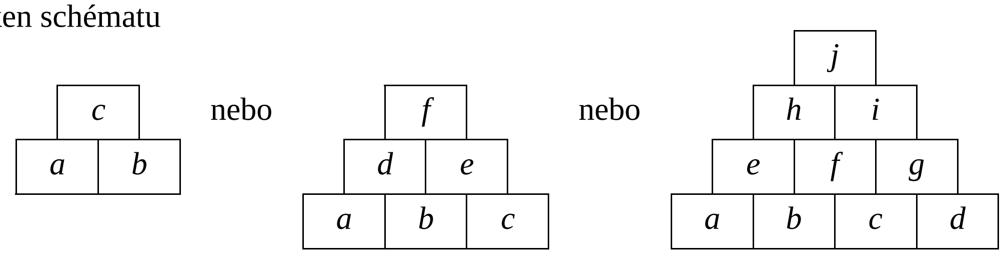
Teď se podívejme podrobněji jak se jev izomorfizmu projevuje v příběhu. Úloha 1a) aktivuje znalosti a zkušenosti žáků. Již dříve se při úlohách o hadech žáci neomezovali jen na jejich řešení, ale na výzvu učitelky hledali jejich obecné vlastnosti – ty, které nezávisí od vstupního čísla. Různost nápadů žáků ukazuje, kolik toho žáci znají: sudost/lichost čísel, největší/nejmenší číslo ve vyřešeném hadu, stejnost některých čísel, ….

Dobře viditelnou vazbu mezi zadáním úloh a) a b) odhalili děti okamžitě. Již ne tak evidentní je vztah mezi pravidly, které popisují práci obou hadů. Háček je v tom, že v celé situaci vystupují dva druhy čísel: pasivní, trpné objekty, které jsou napsány v okénkách hada a aktivní, činné operátory nadepsané nad šipkami. Operátory mění čísla v okénkách. Operace „připsání nuly“, které mění situaci úlohy 1a) na úlohu 1b) se vztahuje pouze na operátory, nikoli na čísla pasivní. Kdyby se bylo vztahovalo na všechny čísla, kdyby místo čísel (3) vstupovaly do druhého hada desetinásobky těchto čísel, měli by Ivan, Honza i Vilma pravdu.

Lukáš naznačil důležitou věc: pravidlo (4) lze chápat jako hada [+ 2]. Jinak řečeno, had H = = [+2; +3; -4; +5; -1; -3] pracuje stejně jako had H´ = [+ 2]. Z tohoto hlediska je veliký had H izomorfní s elementárním hadem H´. Navíc, ke každému hadu, který obsahuje jen operátory přičítání nebo odčítání, existuje jediný takový, s ním izomorfní elementární had [+ *a*] nebo [- *a*]. Podobně ke každému hadu, obsahujícímu jen operátory přičítání, odčítání a násobení, existuje jediný s ním izomorfní had, typu [+ *a*; $\times$ *b*] nebo [- *a*; $\times$ *b*]. Zkoumání těchto situací vede na úlohu najít k danému hadu co nejjednoduššího hada s ním izomorfního. Postup, najít ve třídě navzájem izomorfních (v jistém smyslu) objektů ten nejvhodnější patří k obecným ideám matematiky. Pojem „zlomek v základním tvaru“ patří do této oblasti.

13. SITUACE „PYRAMIDA“ JAKO PROSTŘEDÍ PRO IZOMORFIZMUS

Pyramidou dimenze 2 nebo 3 nebo 4 rozumíme soubor 3 nebo 6 nebo 10 čísel vložených do stejného počtu oken schématu



Pyramida dimenze 2 dimenze 3 dimenze 4

tak, že součet čísel v libovolných dvou sousedních oknech je roven číslu v oknu ležícím na těchto oknech. Například u pyramidy dimenze 3 je $a + b = d$, $b + c = e$, $d + e = f$.

Písmena, které jsou v oknech budou označovat jak čísla, tak i okna ve kterých se nachází. Tato dvojznačnost nepovede k nedorozumění.

Jestliže je známo několik čísel pyramidy **P** a další její čísla známa nejsou, pak výzva „řešte pyramidu **P**“ znamená úlohu: najděte všechny pyramidy s předepsanými danými čísly. Například, když jsou v pyramidě dimenze 4 známá čísla $a = 6$, $c = 2$, $g = 9$, $h = 10$, pak existuje jediné její řešení $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = e = 7$, $f = 3$, $g = 9$, $h = 10$, $i = 12$, $j = 22$. Popsanou úlohu a její řešení budeme zde formulovat stručně takto:

Úloha 1. Řešte (v oboru N) pyramidu dimenze 4: **P**($a = 6$, $c = 2$, $g = 9$, $h = 10$).

Řešení **P**(6, 1, 2, 7, 7, 3, 9, 10, 12, 22) je jediné.

Z příkladu je jasný způsob zápisu úlohy i řešení. Uveďme ještě další ilustrace.

Úloha 2. Řešte pyramidu dimenze 4: **P**($a = 1$, $d = 2$, $f = 2$) a to a) v oboru N, b) v oboru Z.

Řešení: a) **P**(1, 2, 0, 2, 3, 2, 2, 5, 4, 9), **P**(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 9), **P**(1, 0, 2, 2, 1, 2, 4, 3, 6, 9)
b) existuje nekonečně mnoho řešení **P**(1, 1 + n, 1 - n, 2, 2 + n, 2, 3 - n, 4 + n, 5 - n, 9), kde n je libovolné celé číslo.

Úloha 3. Řešte v oboru R pyramidu dimenze 4: **P**(a = 1, d = 2, f = 2, j = 10)

Úloha nemá řešení. Jestliže například vložíme do okna b číslo x, pak bude $c = 2 – x$, $e = x + 1$, $g = 4 – x$, $h = x + 3$, $i = 6 – x$, $j = 9$. Tedy z předpokladů $a = 1$, $d = 2$, $f = 2$ plyne $j = 9$, co odporuje podmínce $j = 10$.

Když všechna čísla vyřešené pyramidy $\mathbf{P_1}$ vynásobíme reálným číslem x dostaneme správně vyplněnou pyramidu $\mathbf{P_2}$. Toto násobení je izomorfizmus f_x: $\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}$. Poslední dvě úlohy naznačují, jak lze k objevu izomorfizmu v prostředí pyramid vést žáky.

Úloha 4. Najděte horní číslo f ve sčítací pyramidě dimenze 3 jestliže je
a) **P**(a = 1, b = 2, c = 3), b) **P**(a = 2, b = 4, c = 6), c) **P**(a = 3, b = 6, c = 9),
d) **P**(a = 5, b = 10, c = 15), e) **P**(a = 8, b = 16, c = 24), f) **P**(a = 11, b = 22, c = 33).

Úloha 5. Řešte pyramidu řádu 4:
a) **P**(c = 3, e = 7, g = 5, j = 22), b) **P**(c = 15, e = 35, g = 25, j = 110),
c) **P**(c = 21, e = 49, g = 35, j = 154), d) **P**(c = 30, e = 70, g = 50, j = 220).

Složka přiřazení je u izomorfizmu f_x: $\mathbf{P_1} \to \mathbf{P_2}$ evidentní. Zajímavá je složka strukturální, která mívá mnoho vazeb. Například u vzájemně izomorfních pyramid z úlohy 4 je: $b = 2a$, $c = a + b$, $d = c$, $f = 4b$, $f = 8a$, …. Poslední dva vztahy umožňují řešiteli najít číslo f rychle.

Úlohu 5a) nelze řešit přímo, protože pouze číslo $d = g – c = 5 – 3 = 2$ lze z daných čísel najít ihned. Čísla a, b, f, h, i nutno hledat. Podobně u dalších případů, které jsou s prvním izomorfní.

14. OBJEVOVÁNÍ IZOMORFIZMU PYRAMID, PŘÍBĚH 6

Dvě posluchačky primární pedagogiky Ped. Fak. UK řešily úlohu 5. Při úloze a) obě nejprve zjistily, že $d = 2$ a pak metodou pokus-omyl pyramidu vyřešily. Svá řešení si porovnaly.

Katka se snažila uhodnout nejprve spodní řádek. Nejdříve položila $a = 1$, $b = 6$, druhý pokus: $a = 2$, $b = 5$; teď se zamyslila, uvědomila si (tak komentovala svůj postup později), že číslo b je potřebné zmenšit a položila $a = 6$, $b = 1$; tuto pyramidu ani nedopočítala a položila $a = 5$, $b = 2$ a to vedlo na řešení.

Zuzka postupovala opačně: rozkladem čísla $j = 22$. Ani první pokus ($h = i = 11$), ani druhý pokus ($h = 10$, $i = 12$) nebyl úspěšný. Po druhém pokusu se dívka chvíli zamyslela, řekla „to jsem pitomá“ a zkusila pokus třetí ($h = 10$, $i = 12$), který byl úspěšný. Později svoji sebekritiku komentovala „Já věděla, že musím použít to, že sedm je víc než pět (ukazuje na čísla e a f, ale nějak mne napadlo, že v tomto řádku (ukazuje na okna h a i) to musí být naopak – kvůli spravedlnosti. To jsem pitomá“.

Dále dívky řešily úlohu b) a jejich postup byl již výrazně rychlejší. Katka opět rozkládala horní číslo 110 a již její první pokus byl úspěšný. Zuzka již nehádala první řádek, ale hned hledala číslo f. K nalezení řešení potřebovala dva pokusy. Při úloze c) Katka použila stejnou strategií a potřebovala tři pokusy. Zuzka hned do okna f přepsala z okna g číslo 35 a zbytek dopočítala. Tentokráte byla první a měla z toho radost.

Když si dívky svoje řešení vzájemně porovnávaly, řekla Zuzka „hned jsem tušila, že to bude jako u těch předchozích případů a sem jsem napsala též třicet pět (ukazuje okno f), ono to vyšlo“. Katka tomu rozuměla a řekla, že též to tak odhadovala, ale že se nechtěla ukvapit.

Před zadáním čtvrté a poslední úlohy této série experimentátor řekl, že není nutno vyplnit všechna okna tabulky, že stačí znát okno a. Pak dal dívkám úlohu d). Katka napsala do okna f číslo 50 a pak dopočítala čísla $b = 20$ a $a = 50$. Podívala se, co dělá Zuzka a když viděla, že tato doplňuje všechna okna tabulky, udělala totéž. Zuzka ihned napsala do oken a a f čísla 50 a pak pro kontrolu dopočítala celou tabulku.

Obě dívky pak uvedly, že byly skoro jisté, že čísla v oknech a, f, g jsou stejná, ale protože již mají zkušenosti, že v minulosti je matematika nachytala, považovaly za nutné všechna čísla dopočítat a ujistit se o správnosti výsledku. Experimentátor se dívek zeptal, zda u každé pyramidy musí být čísla v oknech a, f a g stejná. Obě ihned řekly že ne. Že to je jenom u těchto, které jsem tak vymyslel. Experimentátor se zeptal dívek, zda si uvědomují, že pyramida v úloze d) „je desetinásobek“ pyramidy z úlohy a). Pro obě dívky to bylo překvapení.

Komentář a námět výzkumu

Náročnost úlohy 5 spočívá v tom, že čísla nelze počít přímo. Vypustíme-li spodní řádek, dostaneme pyramidu dimenze 3, ve které známe pouze rohové čísla. Samozřejmě že úlohu lze řešit pomocí rovnic, ale posluchačkám primární pedagogiky je metoda pokus-omyl bližší.

Dívky objevily pouze strukturální složku izomorfizmu a složku přiřazovací si vůbec neuvědomovaly. Je to situace komplementární k té, kterou jsme viděli u hadů: tam bylo „připsání nuly“ evidentní pro všechny žáky velice rychle. U pyramid je tomu naopak.

Je pravděpodobné, že komplementarita reakcí řešitelů je dána součinností dvou, možná tří, faktorů: různost prostředí HAD a PYRAMIDA, způsob formulace úloh a asi též různost věku subjektů s nimiž byl experiment realizován.

Uvedená komplementarita experimentů jeví jako zajímavá a slibná z hlediska případného dalšího výzkumu. Bylo by potřebné nejprve prověřit vliv uvedených tří faktorů a pak mapovat řešitelské strategie žáků resp. posluchačů, které se při řešení těchto úloh vyskytují. Dále udělat seznam fenoménů, které zde působí jako urychlující/zpomalující agenti daného objevu. Velice hodnotné by bylo mít písemné formulace řešitelů o způsoby řešení.

15. ZÁVĚR

V článku jsme podrobně zkoumali izomorfizmus v prostředí RODINA a již ne tak podrobně v aritmetických prostředích HAD a PYRAMIDA. Jev izomorfizmu je přítomen v mnoha dalších situacích. Na čtyři nich upozorníme náznakovými ilustracemi.

Slovní úlohy vedoucí na rovnice

Matematický model různých slovní úloh bývá často stejný. Různost je zde pouze v sémantice, nikoli matematice. Stejnost následující dvojice úloh plyne ze vztahu 1 den = 24 hodin.

Úloha A. Bazén nateče prvním přítokem za 2 dny a druhým za 3 dny. Za jak dlouho nateče bazén oběma přítoky?

Úloha B. Mistr udělá danou práci za 48 minut a tovaryš za 72 minut. Za jak dlouho bude práce hotova, když ji budou dělat oba?

Magické čtverce

Příbuznost obou čtverců je dána vztahem $n \to 2^n$. Je to návod jak z normální sčítacího magického čtverce vyrobit magický čtverec násobilkový. Číslu 5 levého čtverce odpovídá číslo 2^5 v pravém čtverci.

5	0	7
6	4	2
1	8	3

32	1	128
64	16	4
2	256	8

Úloha pro čtenáře. Sestrojte násobilkový magický čtverec 3×3 v jehož jednom rohovém poli je číslo 4320. Přípustná jsou jen přirozená čísla.

Výroba násobilkových magických čtverců je propedeutikou izomorfizmu a dobrým cvičištěm pro práci s mocninami.

Algebrogramy

V seminární práci jedné posluchačky primární pedagogiky je uvedeno, že algebrogramy $AA + BB = CC$ a $AB + BA = CC$ mají stejnou množinu řešení. Posluchačka nedovedla vysvětlit, proč je tomu tak. To nás vede k námětu na výzkum řešitelských postupů při řešení izomorfních algebrogramů (jeden z druhého vzniká takovým přestavením číslic, které nemění hodnotu celkového výrazu).

Z výzkumu lze očekávat poznatky jak v oblasti izomorfizmu, tak i v poznávání desítkové soustavy. Budeme-li experimentovat s algebrogramy v jiných číselných soustavách, získáme poznání o poziční soustavě vůbec.

Hry Nim a Přesouvaná

Hra Nim. Jsou dvě kupy kamenů. Na první je 8 kamenů, na druhé 6. Dva hráči, střídavě berou buď z jedné kupy libovolný počet kamenů, nebo po jednom kamenu z každé kupy. Ten co bere poslední kámen, prohrál. Jak má hrát první hráč, aby vyhrál?
Hra Přesouvaná. V pravém horním poli čtverečkovaného obdélníku 9×7 je kámen. Dva hráči jej střídavě posouvají buď vlevo, nebo dolů o libovolný počet polí, nebo šikmo vlevo-dolů o 1 pole. Ten co posune kámen na levé dolní pole, prohrál. Jak má hrát první hráč?

6								×	
5						×			
4				×					
3					×				
2			×						
1	×								
0		×							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Izomorfizmus obou her objevují žáci 12 – 14 letí několik měsíců. Strukturální složkou tohoto izomorfizmu je strategie hry, tedy návod na nejlepší způsob hry.
Složka přiřazení je dána čísly, které roubí tabulku: pozici: *kámen je na poli (8,4)* hry přesouvaná odpovídá pozice: *na první kupě je 9, na druhé 5 kamenů* hry Nim.
Najít strategii hry Přesouvaná je snazší než hry Nim: vedle v tabulce jsou křížky vyznačena všechna kritická pole.

Více o těchto hrách v knížce Gatial, Hejný, Hecht (1982)

Literatura:

[1] Eisemnmann, P.: O experimentu se spojitostí funkce na střední škole. *Učitel matematiky, č. 20, Praha, 1996, s. 213-219*

[2] Eisemnmann, P.: Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu ve výuce matematiky na střední škole I – IV. *Matematika, Fyzika, Informatika, č. 7 – 10, Praha, 1997*

[3] Gatiaľ, J., Hejný, M., Hecht, T.:Hry takmer matematické. *Mladá Fronta, Praha 1982*

[4] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika. *Praha, Portál, 2001*

[5] Hejný, M.: Štrukturovanie matematických vedomostí. *In: Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds): Zborník príspevkov z letnej školy Pytagoras, JSMF, Exam, Bratislva 2001, s. 13-24*

[6] *Hejný, M.: Creating mathematical structure. *CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 14-24*

[7] Hiele van P., M.: Structure and Insight. *Orlando, Academic Press, 1986*

[8] Jirotková, D., Swoboda, E.: Kto kogo nie rozumie. *NiM Nauczyciele i Matematyka, č. 36, 2001, s. 9-12*

[9] Kopáčková, A.: Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, roč. 47, č. 2, s. 149-161*

[10] Kratochvílová, J.: The analysis of one undergraduate student’s project. *In: Novotná, J., Hejný, M. (Eds.), Proceedings of SEMT01, 2001, s. 101-104*

[11] Kratochvílová, J.: Budování konečné aritmetické struktury. *In: Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds): Zborník príspevkov z letnej školy Pytagoras, JSMF, Exam, Bratislva 2001, s. 13-24*

[12] Schwarz, B., Hershkowitz, R., Dreyfus, T.: Emerging knowledge structures in and with algebra. *CERME 2, Charles University Prague, 2001, s.81-90*

[13] Stehlíková, N., Jirotková, D.: Building a finite algebraic structure. *CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 101-111*

[14] Tsamir, P.: Intuitive structures: The case of comparisons of infinite sets. *CERME 2, Charles University Prague, 2001, s. 112-121*

VSTUPNÉ TESTY TYPU ZRIEDKAVEC

Timea Katrinčáková, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

V tomto príspevku plníme sľub tým čitateľom, ktorí sa pri rôznych príležitostiach zoznámili s opakovacími testami typu „Zriedkavec". Ďalší záujemcovia o využívanie tejto metódy môžu nájsť viac informácií v literatúre uvedenej na konci.

Úlohy a otázky na začiatok 5. ročníka

1. Zapíšte jedno z nasledujúch troch čísel v rozvinutom zápise v desiatkovej číselnej sústave:
   a) 103 248,
   b) 10 101,
   c) 7 986 059.

2. Z kartičiek s číslicami 4, 3, 8, 9, 6 zostavte jedno trojciferné a jedno dvojciferné číslo tak, aby ich rozdiel bol čo najmenší.

3. Premiestňovaním číslic 7, 8 a 9 utvorte dve rôzne čísla x, pre ktoré platí: $789 < x < 987$.

4. Nájdite čo najviac možností doplnenia číslic namiesto hviezdičiek tak, aby platilo:

   1008 < * * * * < 1012.

5. Nájdite čo najväčšie číslo, ktoré dáva po zaokrúhlení číslo 7000.

6. Nájdite jeden spôsob nahradenia hviezdičiek číslicami tak, aby platilo:

   7* **5 + 54 *76 = 1*7 18*.

7. Vypočítajte dva z nasledujúcich príkladov:
   249 : 0 = , 249 – 0 = , 0 : 249 = , 0 + 249 = , 249 . 0 = .

8. Doplnením značky = utvorte rovnicu a vypočítajte ju: $44 + 2x \cdot 4 : 2$.

9. Zvoľte jednu z nasledujúcich rovníc a nájdite jej riešenie:
   a) $2x = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 8$,
   b) $3x = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3$,
   c) $4x = 8 : 2 + 16 : 4 + 20 : 5$,
   d) $2x = 4 \cdot (5 + 8) - 2 \cdot 10$.

10. Zvoľte si jednu z nasledujúcich nerovníc a nájdite čo najviac jej riešení:
    a) $2x + 15 \geq 17$,
    b) $100 - 10y > 70$.

11. Mladší z Lenkiných bratov, Ferko, má 2 roky. Druhý, Tomáško, je dvakrát starší než Ferko a Lenka je dvakrát staršia než Tomáško. Mama má o 3 roky viac ako je trojnásobok veku Lenky a otcov vek je trojnásobkom súčtu veku Lenky a Ferka. Určte vek aspoň jedného z nich.

12. Z nasledujúcich slovných úloh vyberte jednu a vyriešte ju:
    a) Z 5 kg drôtu vyrobia 425 klincov. Koľko klincov vyrobia z 8 kg drôtu?
    b) V ZOO majú 60 opičiek. Ošetrovateľ pri ich rannom kŕmení spotrebuje 300 kg banánov. O koľko kg banánov viac spotrebuje, ak do ZOO priviezli ešte 20 opičiek?
    c) Peter, Janko a Miško hrajú guľky. Spolu majú 198 guliek. Peter má šesťkrát viac guliek, než má Janko a trikrát viac než Miško. Koľko guliek má každý z nich?

13. Z nasledujúcich šiestich výrokov vyberte dva nepravdivé:
    a) 35 dm = 3 m 5 dm,
    b) 750 cm = 7 m 50 dm,
    c) 5 m 30 cm = 80 dm,
    d) 55 dm = 8 m 12 cm,
    e) 110 cm = 1 m 10 cm,
    f) 1 m 10 cm = 11 dm.

14. Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm, kosoštvorec so stranou dĺžky 6 cm, obdĺžnik so stranami 6 cm a 4 cm a kosodĺžnik so stranami 4 cm a 6 cm. Aké sú ich obvody?

15. Je 28 trojuholníkov, ktorých každá strana meria 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm alebo 6 cm. Nájdite jeden taký trojuholník, ktorého obvod je 13 cm a každá strana má inú dĺžku.

16. Vyberte si jednu z nasledujúcich trojíc dĺžok úsečiek tak, aby sa z nich dal zostrojiť trojuholník.
    a) n = 40 mm, p = 55 mm, q = 72 mm,
    b) r = 25 mm, s = 88 mm, t = 51 mm,
    c) u = 20mm, v = 80 mm, z = 99 mm.

17. Je daný obdĺžnik *ABCD* ($AB \perp CD$). Nájdite jednu z ďalších dvojíc kolmých priamok určených niektorými z bodov *A*, *B*, *C* a *D*.

18. Je daný obdĺžnik *ABCD*. Napíšte jednu dvojicu
    a) susedných strán,
    b) protiľahlých strán,
    c) zhodných strán tohto obdĺžnika.

Očakávané odpovede

1. a) 103 248 = 1 . 100 000 + 0 . 10 000 + 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 8 . 1,
    b) 10 101 = 1 . 10 000 + 0 . 1000 + 1 . 100 + 0 . 10 + 1 . 1,
    c) 7 986 059 = 7 . 1 000 000 + 9 . 100 000 + 8 . 10 000 + 6 . 1000 + 0 . 100 + 5 . 10 + 9 . 1.

2. Najmenší možný rozdiel je 248 = 346 – 98, ale primerane ohodnotíme aj 257 = 346 – 89 alebo 338 = 436 – 98 alebo aj ďalšie korektné riešenia.

3. Je treba vybrať dve z týchto štyroch možností:798, 879, 897 a 978.

4. Sú tri možnosti: 1009, 1010 a 1011.

5. Najväčšie je 7449 (zaokrúhlené na stovky), ale primerane ohodnotíme aj ďalšie korektné riešenia.

6. Sú štyri možnosti: 72 505 + 54 676 = 127 181, 72 605 + 54 576 = 127 181,
    73 005 + 54 176 = 127 181, 73 105 + 54 076 = 127 181.

7. $249 : 0 =$ – nulou nikdy nedelíme, $249 – 0 = 249$, $0 : 249 = 0$, $0 + 249 = 249$, $249 . 0 = 0$.

8. Sú tri možnosti: $44 = + 2x . 4 : 2$ s riešením $x = 11$,
$44 + 2 = x . 4 : 2$ s riešením $x = 23$, alebo
$4 = 4 + 2x . 4 : 2$ s riešením $x = 0$.

9. Rovnice majú nasledujúce riešenia:
   a) $x = 42$,
   b) $x = 6$,
   c) $x = 3$,
   d) $x = 16$.

10. Nerovnice majú nasledujúce riešenia:
   a) $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$,
   b) $y \in \{0, 1, 2\}$.

11. Ferko má 2 roky (uznávame aj tento výsledok), Tomáško má 4 roky, Lenka 8 rokov, mama 27 a otec 30 rokov.

12. a) Vyrobia 680 klincov.
   b) Spotrebuje o 100 kg viac banánov.
   c) Peter má 132 guliek, Janko 22 a Miško 44.

13. Uznávame hociktoré dva z týchto troch nepravdivých výrokov: b), c) a d).

14. Štvorec a kosoštvorec majú obvody 24 cm, obdĺžnik a kosodĺžnik 20 cm. (Najviac bodov získava skupina s najväčším počtom správne určených obvodov, ostatné skupiny získavajú primerane menej.)

15. Sú dva také trojuholníky (poradie strán nehrá rolu). Dĺžky ich strán sú:3 cm, 4 cm, 6 cm alebo 2 cm, 5 cm, 6 cm.

16. Správne odpovede: a) a c).

17. Sú tri také dvojice priamok: $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AD$.

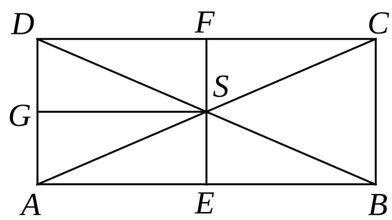
18. a) AB a BC, AB a AD, BC a CD, CD a AD; b) aj c) AB a CD, BC a AD.

Úlohy a otázky na začiatok 6. ročníka

1. Vydeľte číslo 23 jedným z čísel 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby zvyšok bol čo najväčší.

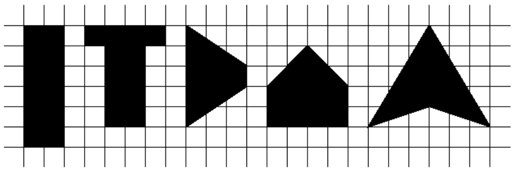
2. Ciferník kruhových hodín je rovnomerne rozdelený číslami od 1 až do 12. Vyznačte na ňom dvojicu vrcholových uhlov s vrcholom v strede ciferníka a s veľkosťou 60°.

3. Pomocou čiar naznačených na obrázku zvoľte tri navzájom rôzne uhly s čo najväčšími veľkosťami a s vrcholom v bode S.



4. Nakreslite štvorec s obsahom menším než 10 jednotkových štvorcov a s vrcholmi v mrežových bodoch.

5. Z nasledujúcich mnohouholníkov vyberte dva štvoruholníky s obsahom 12 jednotkových štvorcov.



6. Nájdite aspoň dve desatinné čísla väčšie než 1,75 a menšie než 1,8 také, ktoré majú práve dve desatinné miesta.

7. Doplňte desatinné čiarky a medzery medzi číslice 1042357698 tak, aby súčet čísel, ktoré vzniknú, bol väčší než 40 a menší než 60. Poradie číslic nemeňte.

8. Ktoré dve z čísel 5,05; 50,5; 1,21; 2,22 a 20,22 dajú súčin s najväčším počtom jednotiek?

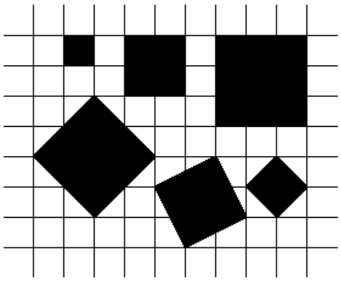
Očakávané odpovede

1. 23 = 4 . 5 + 3 alebo 23 = 5 . 4 + 3; t.j. delilo sa štvorkou alebo päťkou, najväčší zvyšok je tri.

2. Šesť možností: 1 – 3 (a k nemu 7 – 9), 2 – 4 (k nemu 8 – 10), ..., 12 – 2 (s 6 – 8).

3. *ASG* (považujeme za ten istý ako *GSA*), *ESA*, *BSE*, *CSB*, *FSC*, *DSF* a *GSD*.

4. Možné veľkosti obsahov sú 1, 2, 4, 5, 8 a 9:



5. Len oba krajné mnohouholníky sú také.

6. 1,76; 1,77; 1,78 a 1,79.

7. 10,4 + 23,5 + 7,6 + 9,8 = 51,3,
   1,04 + 23,5 + 7,6 + 9,8 = 41,94,
   1,042 + 35 + 7,698 = 43,74.

8. 5,05 . 2,22 = 11,211; 50,5 . 2,22 = 112,11;
   5,05 . 20,22 = 102,111; 50,5 . 20,22 = 1021,11.

Úlohy a otázky na začiatok 7. ročníka

1. Na číselnej osi vyznačte obrazy troch čísel z vymenovaných: – 1, 2, – 5, 5, – 4, 4.

2. Z vymenovaných čísel vyberte dve kladné a potom dve záporné čísla s tými istými absolútnymi hodnotami: – 2, 2, – 5, 5, – 4, 4.

3. Z čísel 0, 1, – 2 vyberte jedno za *x* tak, aby $-|x|$ bolo záporné číslo.

4. Spomedzi nasledujúcich čísel vyberte dve dvojice navzájom opačných čísel: – 10, – 8, – 2, 0, 2, 4, 8, 10.

5. Vyberte dve z nasledujúcich dvojíc čísel a porovnajte čísla v nich podľa veľkosti:
   15,7 a 17,5; 15,7 a -17,5; 0,5 a 0,3;
   0,5 a – 0,3; – 0,5 a – 0,3.

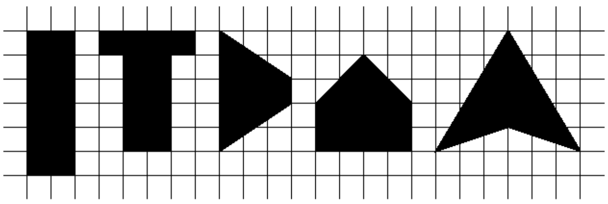
6. Dva z výsledkov nasledujúcich príkladov zaznačte na číselnú os:
   56 – (– 89) = ; 9,8 – (– 41,5) = ; 954,21 – (15,2) = ;
   547 + 6548 = ; 5 – 0,46 = .

7. Doplňte na niektoré pravidlo počítania s nulou: *Pre každé celé aj pre každé desatinné číslo b platí: = b.*

8. Z vymenovaných súčinov vyberte dva menšie ako nula:
   – 15 . 0,2 = ; – 25 . (– 0,4) = ; – 0,8 . 0,9 = ;
   – 45 . (– 0,1) . (– 1) = ; – 0,3 . 11 . 0 = .

9. Je daná základňa rovnobežníka *a* = 8 cm. Určte jeho výšku tak,aby obsah bol aspoň 8 cm^2 a nie viac než 24 cm^2 a načrtnite ho do štvorcovej siete.

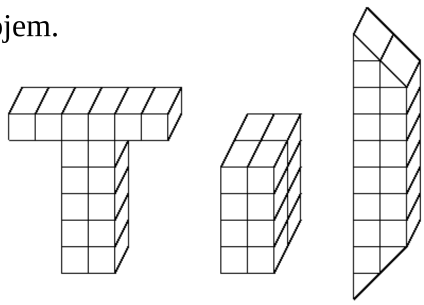
10. Z útvarov na obrázku vyberte dva, ktoré majú rovnaký obsah.



11. Nakreslite rovnobežník, ktorého obvod je 20 jednotiek.

12. Naznačte obrázkom kváder zložený z 24 rovnakých kociek.

13. Vyberte dva z útvarov na obrázku, ktoré majú rovnaký objem.



14. Vymyslite také celé čísla, ktoré sú rozmermi kocky alebo kvádra s povrchom 54 jednotiek štvorcových.

15. Z nasledujúcich rovností vyberte dve pravdivé:
1 hl = 100 l, 1 dcl = 0,1 l,
1 ml = 0,01 l, 1 l = 0,001 hl,
1 l = 100 dcl, 1 l = 1000 ml.

Očakávané odpovede

1. Hodnotia sa čísla, nie trojice čísel.

2. Tri možnosti: {2, 4} a {– 2, – 4},
{2, 5} a {– 2, – 5},
{4, 5} a {– 4, – 5}.

3. Dve možnosti: 1 a – 2.

4. Tri možnosti: 2, – 2 a 8, – 8,
2, – 2 a 10, – 10,
8, – 8 a 10, – 10.

5. 15,7 < 17,5; 15,7 > – 17,5; 0,5 > 0,3;
0,5 > – 0,3; – 0,5 < – 0,3.

6. 56 – (– 89) = 145; 9,8 – (– 41,5) = 51,3; 954,21 – (15,2) = 969,41;
– 8547 + 6548 = – 1999; 5 – 0,46 = 4,54.

7. $b + 0 = b$, $0 + b = b$, $b - 0 = b$, $0 - b = -b$.

8. Tri možnosti: – 15 . 0,2 = – 3 a – 0,8 . 0,9 = – 0,72;
– 15 . 0,2 = – 3 a – 45 . (– 0,1) . (– 1) = – 4,5;
– 0,8 . 0,9 = – 0,72 a – 45 . (– 0,1) . (– 1) = – 4,5.

9. Pretože $S = a \cdot b$, a a = 8 cm, b môže byť od 1 cm do 3 cm.

10. Hociktoré dva útvary z obrázka č. 1.

11. Štvorec a kosoštvorce (5 + 5 + 5 + 5), obdĺžniky a kosodĺžniky (napríklad 9 + 1 + 9 + 1, 6 + 4 + 6 + 4).

12. Je veľa možností, napríklad obrázok kvádra s rozmermi 2 × 3 × 4.

13. Hociktoré dva (všetky tri majú objem 16 jednotiek kubických).

14. Kocka 3 × 3 × 3 alebo kváder 1 × 1 × 13 alebo kváder 1 × 3 × 6.

15. Dve z týchto troch: 1 hl = 100 l, 1 dcl = 0,1 l, 1 l = 1000 ml.

Úlohy a otázky na začiatok 8. ročníka

1. Uveďte tri zlomky, ktorých čitatele sú jednotky a menovatele prirodzené čísla a ktorých súčet je $\frac{1}{2}$.

2. Rozdiel ktorých dvoch zo zlomkov $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$ je menší než $\frac{1}{10}$? Čomu sa rovná?

3. Po vydelení čísla $2\frac{14}{15}$ číslom x má vyjsť aspoň $\frac{11}{12}$. Nájdite čo najväčšie také x.

4. Vymyslite také prirodzené čísla, ktoré sú rozmermi kocky alebo kvádra s povrchom 54 jednotiek štvorcových.

5. Jednu z nasledujúcich troch možností doplňte na úmeru:

   a) $3 : 2 = \frac{3}{2} : \ldots$,

   b) $54 : 86 = 81 : \ldots$,

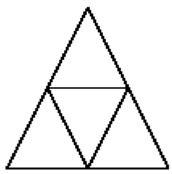
   c) $\frac{5}{12} : \frac{3}{7} = \frac{70}{9} : \ldots$.

6. Zvoľte z nasledujúcich príkladov príklad na nepriamu úmeru a vypočítajte ho:
   a) Cesta z Košíc do Bratislavy sa dá prejsť autom idúcim v priemere rýchlosťou 74 km/hod za 6 hodín. Akou priemernou rýchlosťou má ísť autobus, ak má túto cestu prejsť za 8 hodín?
   b) Šesť sejačiek by zasialo obilie za tridsať dní. Koľko dní by trvala sejba deviatim sejačkám?
   c) Pekáreň denne predá 6171 kusov chleba po 26 Sk za kus. Rozhodla sa znížiť túto cenu na 25,50 Sk. Ak má byť denný príjem z predaja väčší, musí predať viac kusov chleba, než zvyčajne. O koľko aspoň?
   d) Pri sprchovaní spotrebujeme priemerne 10 l vody, na kúpanie vo vani 47 l. Koľko stojí osprchovanie, keď vykúpanie vo vani stojí v priemere 9 Sk a 40 halierov?

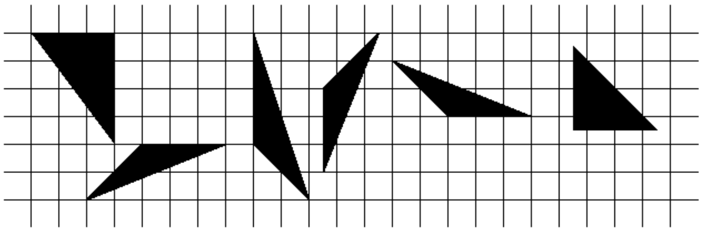
7. Vypočítajte 23 % z celého čísla väčšieho ako 123 a menšieho ako128.

8. Na nasledujúcom obrázku znázornite 80 % z celku.

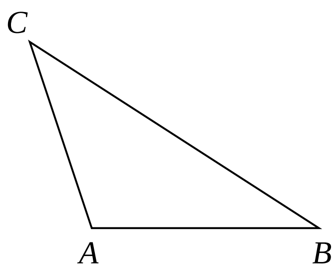
9. Použitím nasledujúceho obrázku znázornite 125 % z celku.



10. Z útvarov na nasledujúcom obrázku vyberte dva, ktoré sú zhodné.



11. Na nasledujúcom obrázku vyznačte plnou hrubou čiarou jednu výšku, prerušovanou čiarou jednu ťažnicu a bodkovanou čiarou jednu strednú priečku trojuholníka *ABC*.



Očakávané odpovede

1. Možné trojice menovateľov sú: 3, 7, 42; 3, 8, 24; 3, 9, 18; 3, 10, 15; 3, 12, 12; 4, 5, 20; 4, 6, 12; 4, 8, 8; 5, 5, 10; 6, 6, 6.

2. Štyri možnosti: $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$; $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

3. 3,2 alebo $\frac{16}{5}$ alebo $-\frac{-8}{2{,}5}$ ...

4. Kocka 3 × 3 × 3 alebo kváder 1 × 1 × 13 alebo kváder 1 × 3 × 6.

5. $3 : 2 = \frac{3}{2}$: **1**, 54 : 86 = 81 : **129**, $\frac{5}{12} : \frac{3}{7} = \frac{70}{9}$: **8**.

6. a) 55,5 km/hod,
   b) 20 dní,
   c) aspoň o 122 kusov,
   d) nie je na nepriamu úmeru (sprchovanie stojí 2 Sk).

7. Sú štyri možnosti: 28,52 (zo 124),
   28,75 (zo 125),
   28,98 (zo 126),
   29,21 (zo 127).

8. Napríklad vyznačením štyroch z piatich štvorčekov.

9. Napríklad dokreslením malého trojuholníka, ktorý je štvrtinou veľkého trojuholníka.

10. Hociktorá dvojica z trojuholníkov na druhom, štvrtom a piatom mieste zľava.

11. Z troch výšok, z troch ťažníc a z troch stredných priečok trojuholníka je vybraná vždy jedna; hodnotíme každú zvlášť.

Literatúra:

[1] Harminc, M.: Zoznámte sa: Opakovacia metóda Zriedkavec. *Orava Journal, Metodicko-odborný štvrťročník, I. ročník, č. 4, str. 36 – 37, December 2000*
[2] Harminc, M.: Opakovanie bez hodnotenia. *Letná škola z vyučovania matematiky PYTAGORAS 2001, str. 12 (http://www.p-mat.sk/exod/Pytagoras 2001.pdf)*
[3] Harminc, M., Semanišinová, I.: The Rareer, Method of Repetition. *Acta Univ. Purkynianae 72, str. 103-108, Ústí nad Labem 2001*
[4] Harminc, M., Katrinčáková, T.: Opakovacie testy z matematiky. *NOTES, Metodicko-odborný štvrťročník, III. ročník, str. 17-19, Leto 2002*

MOTIVAČNÍ PRVKY VE VÝUCE MATEMATIKY

Hana Lišková, VOŠP a SPgŠ Litomyšl

Víme, že motivace je nutná nejen pro úspěšné nastartování procesu učení, ale i pro udržení zájmu o učení. Navíc si rádi děláme naděje na výuku radostnou, a to nejen pro nás. Zkrátka, chceme žáky aktivní. Není pochyb o tom, že si jako učitelé matematiky velmi přejeme, aby naše úsilí při výuce mělo delšího dopadu než 45 minut. Základním předpokladem k tomu je podle mého názoru dostatečně promyšlená motivace. Tím víc to platí, má-li kantor před sebou žáky, kteří mají z matematiky obavy, nevěří si, případně mají díky mnoha faktorům celkem systematicky vybudovaný předsudek, že matematice nikdy nemohou rozumět, nikdy nic v matematice nevyřeší a nevymyslí a nejsou tudíž schopni se ji naučit a případně se ji ani učit. Jinými slovy jejich vyhlídka na seberealizaci v hodinách matematiky je mizivá. Proč by je tedy mělo cokoliv v hodině oslovit? Vždyť je to stejně marné …!?

Zdá se mi, že v takové situaci se občas učitel matematiky skutečně nachází a že to je pro něho výzva, něco s tímto nepříjemným stavem udělat. Vůbec netvrdím, že se mi to vždy daří. Spíš mě napadá pár příkladů a situací, které ve mně zanechávají pocit, že se vyplatí řádně do motivace žáků investovat.

Mnoho žáků, které učím, patří do skupiny, kterou jsem výše popsala. Učím na střední pedagogické škole, kde se ale přece jen jeden pozitivní jev u zmíněného typu žáků objevuje. Nemají tendenci díky svému negativnímu postoji k matematice všechno „zabalit“, ale naopak se mnohdy upřímně snaží aspoň něco pochopit a pro sebe udělat. O to je má situace snazší a také zábavnější. Jde o to, vymyslet program tak, abych jejich snahu „pouze“ vyprovokovala a patřičně ji také ocenila.

V tomto příspěvku se pokusím okomentovat několik drobných příkladů, při kterých se motivovat a provokovat žáky daří. Je to:

1. Matematika s metodikou
2. Matematický korespondenční seminář pro žáky I. stupně ZŠ
3. Matematický kroužek pro žáky I. stupně ZŠ
4. Projekty a dlouhodobé úlohy

1. Matematika s metodikou

V osnovách naší školy je předmět Matematika s metodikou, v rámci kterého je možno zařadit poznámky k vývoji matematického myšlení. Mnohdy při těchto hodinách začínají studenti sami sebe lépe chápat a rozumí, o čem učitel hovoří. Mají dostatek vlastních zkušeností, o které se rádi podělí. Snaha pochopit vlastní problémy při učení se matematice se pro ně stává silně motivační. Jsou velmi citliví a vnímaví při tématech, týkajících se propedeutiky matematiky. Jakoby si chtěli svou vzdělávací cestu zopakovat a aspoň trochu ji napravit.
Dalším účinným motivačním prvkem je zařazení úloh z rekreační matematiky. To je oblast pro studenty většinou neznámá, o to možná rychleji s radostí přijata. Velmi často žáci přesně vědí, kdy jakou činnost využijí při svém působení v praxi. Jsou velmi chtiví a vděční za jakékoliv náměty či podněty.

Přála bych všem žákům, kteří nemají k matematice nejlepší vztah, aby podobným „kurzem“ mohli projít. Myslím, že našim žákům tento půlroční blok ve vztahu k matematice velmi pomáhá.

2. Matematický korespondenční seminář

Během svého působení na škole jsem iniciovala vznik matematického korespondenčního semináře „Matýsek“ pro žáky 4. a 5. tříd ZŠ. Ráda přiznávám, že spouštěčem této aktivity byla snaha nabídnout zajímavý program pro své vlastní dorůstající děti. Tento seminář organizuji několik let v rámci předmětu Nepovinná matematika. Do organizačního týmu nepatří jen výborní studenti, tedy ti, kteří mají matematiku rádi a chtějí se ji věnovat i o svém volném čase. Během šesti let, co seminář pracuje, se v organizačním týmu objevilo mnoho žáků, kteří patří do skupiny, která si chce svůj vztah k matematice vylepšit, a to se tady přímo nabízí. Společným prvkem veškeré spolupráce v týmu je práce s mladšími talentovanými žáky. Mnohdy jsou sami organizátoři překvapeni způsobem uvažování malých řešitelů, hledají způsob, jak s nimi komunikovat, jak jim naznačit chybu v úvaze nebo je naopak ocenit pochvalou. Pro mne je velmi poučné sledovat zmíněné studenty v roli organizátorů. Mnohé věci si ujasňují, dávají do souvislostí a získávají konkrétní představu o způsobu myšlení malých matematiků. Vyvrcholením celé této činnosti je pravidelné setkávání studentů a nejúspěšnějších řešitelů v rámci Matýskových odpolední. Zde je program velmi různorodý a bohatý (s prvky z oblasti sportovní, dramatické, výtvarné, hudební, matematické i z oblasti všeobecných znalostí a manuálních zručností) a většinou probíhá formou soutěže skupin. A co mě připadá nejpodstatnější? Právě obrovský prostor pro seberealizaci studentů. Tento prostor jim při samotné výuce matematiky mnohdy chybí. Zpočátku jsem byla překvapena, že do party organizátorů patří žáci, kteří s matematikou trochu „zápasí“, po několikaletých zkušenostech vím, proč tu s námi jsou a vím, že jim tato forma práce ve vztahu k matematice velmi pomáhá. V současné době se už někteří organizátoři z počátků semináře Matýsek stávají učiteli a jejich výpovědi svědčí o tom, že Matýsek byl pro jejich profesní rozhodování podstatný a zkušenosti získané v rámci něho nenahraditelné.

3. Matematický kroužek

Někteří z organizátorů korespondenčního semináře vycítili možnost pro svou seberealizaci a dokonce iniciovali založení Matematického kroužku pro žáky ve věku „Matýsků“. Tento kroužek začal pracovat v loňském školním roce při jedné z místních základních škol. Zkušenosti z jeho ročního fungování si prozatím netroufám publikovat.

4. Projekty a dlouhodobé úkoly

Na rozdíl od prvních tří příkladů, které jsou specifické pro prostředí, ve kterém působím, projekty nebo dlouhodobé úkoly jsou všeobecně použitelné. Budu hovořit o konkrétním úkolu, který jsem se rozhodla zadat při výuce statistiky. Jako většina učitelů jsem se při výuce statistiky příliš netěšila, hodiny byly nepříliš zábavné, žáci měli pocit, že je to učivo o dosazování do vzorců. Před několika lety jsem se snažila tuto pasáž výuky oživit příklady s konkrétními údaji ze života žáků (ať už rodinného nebo školního). S obdobným postojem k výuce se můžeme setkat v publikaci A. Michalcové [3]. Letos jsem ve třetím ročníku poprvé zadala skupinový úkol – provést a zpracovat statistické šetření v přiměřeném rozsahu, a to z jakékoliv oblasti, která studenty zajímá. Záměrem této volby bylo, nechat studentům dostatečný prostor tak, aby na tomto úkolu pracovali se zaujetím a ne pro povinnost. Výsledek se dostavil. Témata, která si studenti volili byla pro mě příjemným překvapením. Vedle celkem očekávaných témat jako je Cestování, Dovolená, Hudební žánry se objevila i závažná témata: Stopování, Statistika vad výslovnosti u dětí předškolního věku, Menšiny, Rasismus, Drogy, Kouření, Mobilní telefony, Žebříček hodnot u starších žáků ZŠ, Záliby, TV – žrout volného času, …. Dále si studenti sami volili složení pracovní skupiny, a to v rozpětí od jednoho do pěti členů. Složení pracovních skupin bylo důležitým zdrojem informací o sociálních vazbách v třídním kolektivu. Skupinová práce byla bodována tak, že každý žák mohl získat teoreticky maximálně 10 bodů, skupina pak získala celkem určitý počet bodů od 1 do 10 (odpovídající kvalitě práce jednotlivce) vynásobený počtem členů skupiny. Tento celkový počet bodů si mezi sebou členové rozdělili podle „zásluh“ při práci na zadaném úkolu. Jednotlivec tedy mohl získat prakticky i více než 10 bodů. Nejprve se studenti podivovali, že je nebudu v závěru hodnotit sama, pak uznali, že je vlastně jasné, že nemohu přidělovat body, když u jejich společné práce nebudu. Velmi ocenili objektivitu hodnocení. Jen ve výjimečných případech si body rozdělili rovnoměrně. Toto hodnocení působilo velmi motivačně. Poznamenávám, že i ostatní aktivity při výuce (včetně písemných prací) jsem v průběhu roku hodnotila bodováním.

Doufám, že jsem těmito několika poznámkami připomenula, že motivace není jen formální pedagogický požadavek a že se pozitivní motivace jednoznačně vyplatí.

Literatura:

[1] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky. *Bratislava: SPN, 1990*
[2] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika. *Praha: Portál, s.r.o., 2001*
[3] Michalcová, A.: Skúsenosti z vyučovania štatistiky. *Bratislava, KPÚ, 1984*

NADÁCIA INGENIUM A KOREŠPONDENČNÉ SEMINÁRE

Ivan Masaryk, Nadácia Ingenium, Bratislava

Pred vyše dvadsiatimi rokmi začali v Československu vznikať korešpondenčné semináre (KS) z matematiky. Prvý matematický seminár vznikol v Košiciach v roku 1976 s názvom Košický matematický seminár – KMS. V roku 1982 vznikol v Bratislave PIKOMAT – PIoniersky Korešpondenčný MATematický seminár. Pikomaty sa zakladali aj v iných krajoch po celom území Československa.

V KS sa neustále vyvíjali nové metódy a postupy (výber príkladov, prednášky, besedy, matboje, nástenkové boje, algopreteky, quizy, ...), ktoré vedúci analyzovali a vylepšovali, čím sa stali KS aj populárnejšími a riešilo ich čoraz viac detí. Tento trend podnecoval vznik nových KS. Zakladali sa dokonca KS z fyziky a aj semináre z programovania.

Korešpondenčný seminár sa skladá z korešpondenčnej časti a pre najlepších približne 30 detí je odmenou sústredenie. Pre všetky deti, ktoré riešia seminár, je sústredenie, celkové poradia či vlastná prestíž veľkou motiváciou k riešeniu korešpondenčnej časti. Cieľom korešpondenčnej časti je motivovať deti k samostatnej práci, počítaniu, objavovaniu a prehlbovaniu poznatkov zo školy.

Aby bol seminár kvalitný, potrebuje dostatok kvalitných vedúcich a praktikantov, ktorí dokážu opravovať príklady korešpondenčnej časti, vyberať vhodné príklady a v neposlednej rade zorganizovať dobré sústredenie na úrovni.

V ČOM SME VIDELI PROBLÉM?

Táto práca s deťmi je dobrovoľná a možno aj preto sa do pozície vedúceho v niektorých seminároch stavali stále mladší a menej skúsení vedúci. Opravovanie príkladov a program na sústredeniach sa stával voľnejší, čo sa stretávalo s prirodzenou nevôľou učiteľov a rodičov. Aby sme pomohli seminárom, pred rokom sme tu na Exode založili Nadáciu Ingenium, ktorej cieľom je podporovať z finančnej a hlavne odbornej stránky KS a vzdelávacie aktivity pre deti a vedúcich.

V správnej rade Nadácie Ingenium sú skvelí ľudia ako napríklad RNDr. Hynek Bachratý, RNDr. Vladimír Burjan, PeadDr. Ján Žabka, RNDr. Ivan Ježík a ešte ďalší. V dozornej rade nájdete RNDr. Katarínu Bachratú a Mgr. Martina Vojteka. Správcom nadácie je Ivan Masaryk. Okrem spomínaných ľudí nám pomáha aj veľa dobrovoľníkov a priateľov.

Počas jedného roka sme zorganizovali tri Víkendové školy Nadácie Ingenium – VŠNI, na ktorých sa stretli vedúci viacerých KS a spoločne sme sa v debatách snažili riešiť problémy ako sú opisovači, prečo je dobré mať na sústredeniach večierku, ako vyberať a vymýšľať príklady, či je dobré predbiehať učivo alebo je lepšie ísť do hĺbky, ... Nadácia Ingenium by chcela, aby Vami nadobudnuté cenné poznatky z KS sa mohli šíriť ďalej a preto aj na tento rok plánujeme podobné akcie pre praktikantov a pre vedúcich.

V Bratislave sme zatiaľ zorganizovali 5 prednášok pre vedúcich, pre učiteľov a študentov. Ďakujeme prednášateľom RNDr. Vladimírovi Burjanovi, RNDr. Elene Vojtelovej, RNDr. Ivanovi Ježíkovi, RNDr. Márií Kubínovej z Prahy a Mgr. Márií Šimčákovej. Ak bude záujem, chceli by sme, aby sa prednášky konali aj v iných mestách, ako sú napr. Košice či Žilina.

Pred rokom 1989 boli matematické krúžky v plnom rozkvete a dodnes ich vydržalo len málo. Podarilo sa nám však znovu naštartovať aspoň zopár krúžkov v Bratislave a Košiciach. Organizujeme aj stretávanie vedúcich krúžkov s výmenou skúseností – Kolieska. V Nadácií Ingenium funguje knižnica s námetmi na krúžkovú činnosť a činnosť na sústredenia.

Zhromažďujeme materiály a publikácie, ktoré by mohli pomôcť pri organizovaní aktivít pre deti pre vedúcich a takisto aj pre učiteľov, ktorí chcú mať zábavné, ale hutné vyučovacie hodiny. Získané materiály umiestňujeme na našu webstránku www.ingenium.sk.

Momentálne Združenie Strom združuje košické semináre MATIK, MALYNÁR a STROM. P-MAT n.o. zastrešuje bratislavské semináre PIKOMAT, PIKOFYZ a FyzIQ. JSMF v Žiline zastrešuje SEZAM a SKMS – stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár a OZ Trojsten združuje FKS, BKMS a KSP (fyz., mat., progr.). Od septembra začne činnosť jeden staronový seminár spojením BKMS, SKMS a časť STROMU s názvom Korešpondenčný matematický seminár – KMS. Veríme, že tento spojený seminár bude ešte kvalitnejší.

Uvítame každú vašu pomoc, či už formou kontaktu, diplomovej práce, rady, 1 % z dane, daru finančného či materiálneho. Veľmi by sme uvítali, keby ste mohli prísť odprednášať zaujímavú prednášku na Víkendovú školu NI pre vedúcich KS alebo na fakultu pre verejnosť so záujmom o matematiku. Kontakt nájdete na www.ingenium.sk. Ďakujeme.

MODEL VIRGINIE SATIROVEJ

Dagmar Môťovská, Gymnázium, Bilíkova ul., Bratislava

Virginia Satirová, M.S.W. (1916 – 1988) je významná predstaviteľka americkej humanistickej psychológie a rodinnej terapie. Vytvorila nové modely medziľudských vzťahov a účinné metódy vzdelávania, ktorých kľúčovými konceptmi sú komunikácia a sebahodnotenie. Virginia Satirová sa narodila na farme vo Wisconsine. Študovala v Chicagu a svoju kariéru začala ako učiteľka na chudobnom predmestí Chicaga. Predtým, než si otvorila súkromnú prax, bola terapeutkou v detskom domove a v psychiatrickom ústave. Do povedomia odbornej verejnosti vstúpila v roku 1964 knihou Spoločná terapia celej rodiny. Spoluzakladala Výskumný ústav mentálny v Kalifornii, riadila výcvik v Esalenskom inštitúte a už ako svetoznáma terapeutka predsedala Asociácii humanistickej psychológie a bola poradkyňou Amerického kongresu v otázkach týkajúcich sa zdravia. V roku 1979 pôsobila aj v Čechách. Ukazovala, ako sa rodí sebaúcta, pomocou lán a vytváraním živých súsoší modelovala vzťahy, s humorom a ľahkosťou ukazovala cestu k viere v seba i v svet.

Niečo z jej posolstva by som rada tlmočila aj nám – učiteľom, rodičom a ľuďom zaoberajúcim sa detskou psychikou.

Z modelu Virginie Satirovej som vybrala procesový model Komunikačné pozície.
Človek v stresovej situácii podvedome „vkĺzne“ do polohy, ktorou sa voči nej bráni. Virginia Satirová znázorňuje päť typov týchto komunikačných pozícii, ktoré sa dajú modelovať aj v rámci skupiny (rodiny), človek sa môže pomocou nich o sebe dozvedieť nové veci, prípadne na sebe „pracovať“. Niektoré z ich základných vlastností sú popísané v nasledujúcej tabuľke:

MECHANIZMY ZVLÁDANIA	**SPRÁVANIE**	**KOMUNIKÁCIA**	**PÓZA**	**VNÚTORNÝ HLAS**
Zmierovanie	závislé, ospravedlňujúce	Všetko je moja vina! Bez teba som nič!	bezmocnosť, slabosť	Cítim sa ako nula. Som bezvýznamný.
Obviňovanie	útočné, nesúhlasné, odsudzujúce	Je to tvoja chyba! Nikdy neurobíš nič poriadne!	silácky postoj, upätosť	Som osamelý a neúspešný. Bojím sa, že ma niekto zraní.
Superracionálny postoj	racionálne, rigidné, manipulatívne	používa superracio, slovník s dôrazom na správnosť, pravidlá	strnulosť, pôsobí ako stroj	Cítim sa zraniteľný. Musím sa ovládať.
Rušenie (vyhýbanie)	rušivé, vyhýbavé, hyperaktívne	konverzácia je nezmyselná, zbytočná, irelevantná	ustavičný pohyb, uvoľnenosť	Nikomu na mne nezáleží. Niet pre mňa miesta.
Kongruencia	kreatívne, kompetentné	slová, držanie tela, nálada sú v súlade a vyjadrujú pocity	harmónia a vyrovnanosť	Cítim sa sám so sebou dobre.

MECHANIZMY ZVLÁDANIA	**KOMUNIKAČNÁ TRANSAKCIA**	**PSYCHOSOC. SYMPTÓMY**	**FYZIOLOGICKÉ SYMPTÓMY**	**ZDROJE**
zmierovanie	ignoruje sa JA	depresie, neurózy	poruchy zažívania, migrény	starostlivosť, senzitivita
obviňovanie	ignoruje sa TY	paranoia, delikvencia	cievne, svalové, vysoký krvný tlak, astma, chrbtica	sebaobrana, asertivita
superracionálny postoj	ignoruje sa JA a TY	komp. obsesia, intelekt. izolácia	problémy s vnút. sekréciou, rakovina	intelekt, analytické myslenie
rušenie (vyhýbanie)	ignoruje sa JA, TY, aj KONTEXT	psychózy, zmätenosť	centrálna nervová sústava, závrate	kreativita, humor
kongruencia	rovnováha JA, TY a KONTEXT	mentálne zdravie	fyzické zdravie	úplnosť

SÉMANTIKA V TEXTE SLOVNÝCH ÚLOH

Janka Ruppeldtová, Pedagogická fakulta Univerzity Komenského, Bratislava

Mnohí žiaci považujú slovné úlohy za jedny z najťažších problémov, s ktorými sa stretávajú v matematike. A ako je to s učiteľmi? Učiteľ, ktorému „nesedia“ slovné úlohy, sa im často krát vyhne, resp. nezvýši mu čas na ich riešenie.

S jednoduchým slovným textom, v ktorom sa nachádza porovnanie dvoch množstiev, sa stretávame v bežnom živote už od predškolského veku; pričom so slovnými úlohami, ktorých cieľom je určenie neznámeho počtu zo známeho na základe pochopenia vzťahu medzi dvoma množstvami od 1. stupňa základnej školy.

Význam slovných úloh je výstižne charakterizovaný slovami: „...V rozvoji matematického myslenia však majú slovné úlohy a ich riešenie významnú úlohu hlavne preto, že väčšina životných situácií je popísaná slovami a riešenie slovných úloh je jednou z mála oblastí školskej matematiky, ktorá vyžaduje matematizáciu situácií zadaných slovne a spätnú transformáciu získaného matematického riešenia do kontextu úlohy.“ [6]

Proces riešenia slovných úloh môžeme rozdeliť podľa M. Hejného a A. Michalcovej do nasledovných úrovní:

1. úroveň uchopenia situácie,
2. úroveň nadobudnutia vhľadu do situácie,
3. úroveň hľadania a stanovenia stratégie,
4. úroveň realizácie výpočtu,
5. úroveň interpretácie výsledku. [4]

V našom výskume sme sa zamerali najmä na prvé dve etapy riešenia slovných úloh, ktoré označujú stav porozumenia textu úlohy riešiteľom, dôkladného pochopenia objektov úlohy a zároveň vzťahov medzi nimi, t. j. pochopenie funkčnej závislosti.

Cieľom výskumu, ktorý sme začali v marci 1999, bolo zistiť, ako sú študenti PdF UK v Bratislave schopní uchopiť slovný matematický text [2], ako ho dokážu prepísať do jazyka matematiky do tvaru algebrických rovníc a naopak slovne interpretovať vzťahy vyjadrené jednoduchými rovnicami. Výskum bol podnietený častým neúspechom študentov pri riešení slovných úloh v písomných prácach. Pri hľadaní jeho príčin sme narazili na tzv. reverzálnu chybu, označovanú tiež ako Rosnickov-Clementov fenomén [1], t.j. pričítanie k väčšiemu počtu, resp. odčítanie od menšiemu počtu alebo násobenie väčšieho počtu, resp. delenie menšieho počtu v zápise rovnice alebo pri jej interpretácii.

V roku 1980 americkí matematici P. Rosnick a J. Clement uskutočnili výskumy zamerané na prepis matematického textu do rovníc. Úlohy boli zadané študentom rôznych smerov štúdia. Úspešnosť ich riešenia bola asi 60 %. J. Lochhead urobil ďalší výskum, v ktorom respondentmi boli učitelia a univerzitní profesori, s približne rovnakým výsledkom. Pri podobných výskumoch v Rakúsku úspešnosť klesla na tretinu.

Podľa skúseností z doterajších výskumov [1] ťažkosti reverzálnej chyby pri zostavovaní a interpretácii rovníc sa vyskytujú vo všetkých vekových kategóriách, pričom nie je možné hovoriť o kladnej korelácii medzi nimi a inteligenciou, resp. úspešnosťou ľudí v iných oblastiach.

Náš výskum sme prevádzali v priebehu troch rokov a celkove sa ho zúčastnilo 297 študentov. Výskumná vzorka pozostávala zo študentov – elementaristov 1. ročníka dennej formy štúdia v počte 155, externej formy štúdia v počte 111 a z 31 študentov 4. ročníka odboru matematika v kombinácii s iným predmetom.

NÁSTROJ VÝSKUMU

Ako výskumný nástroj sme použili test označený ako R test(príloha č.1) s voľnou tvorbou odpovedí, ktorý bol rozdelený do dvoch častí. Úlohou študentov v prvej časti bolo prepísať slovné vyjadrenie obsahujúce algebrické premenné a vzťahy medzi premennými do rovnice. Premenné predstavovali počty prvkov určitých množín a vzťahy boli vyjadrené pomocou aditívnych a multiplikatívnych operátorov, t.j. slovných spojení ako: o *x* viac, o *y* menej, *k* krát viac, *l* krát menej; t. j. slov bežnej hovorovej reči. Pri prepisovaní textu do rovníc pri prvých dvoch vyjadreniach (položky č.1 a 3) používame operácie sčítania, resp. odčítania, a pri druhých dvoch (položky č.2 a 4) operácie násobenia, resp. delenia.

Druhá časť testu spočívala v transkripcii nami zostavených rovníc s dvoma premennými vyjadrujúcimi počty prvkov určitých množín do slovného textu. Ide o štyri položky, ktoré sú zamerané na slovnú interpretáciu zostavených jednoduchých rovníc, t.j. cieľom je zistiť schopnosť študentov prečítať si matematické vyjadrenia v podobe rovníc, pochopiť význam zápisu v tvare rovnice, vyjadriť ho slovne a tak v prípade potreby ho využiť v praktickom živote. Pri zadávaní rovníc sme sledovali slovnú interpretáciu štyroch základných matematických operácií, t.j. sčítania, odčítania, násobenia a delenia.
Dĺžka trvania testu bola maximálne 15 minút.

Spôsob vyhodnotenia testu

Každú úlohu možno zodpovedať viac ako jedným spôsobom. Vytvorili sme kategórie pre rozličné druhy odpovedí. Použili sme tri písmená na označenie správnych druhov odpovedí(varianty A, B, C) a ďalšie tri písmená pre nesprávne odpovede (varianty K, L, M) vzhľadom na operáciu, vyplývajúcu zo slovného zadania alebo z napísanej rovnice, ktorú treba slovne interpretovať (príloha č.2).

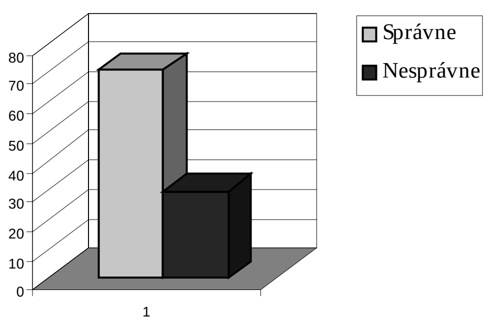
Prvým písmenom označujeme odpoveď, v ktorej pre vyjadrenie o *x* viac použijeme v rovnici operáciu sčítania, pre vyjadrenie o *y* menej operáciu odčítania, pre *k* krát viac operáciu násobenia a pre *l* krát menej operáciu delenia. Druhým písmenom označujeme odpoveď, v ktorej použijeme inverznú operáciu k danej operácii, t. j. namiesto sčítania odčítanie a naopak; namiesto násobenia delenie a naopak. Tretím písmenom označujeme akúkoľvek inú odpoveď. Rovnaké pravidlo používame aj pri slovných vyjadreniach rovníc.

VYHODNOTENIE TESTU

Úspešnosť študentov v R teste bola 70,6 %.

Správne odpovede S	n_i	1678
	$p_i(\%)$	70,6
Nesprávne odpovede N	n_i	698
	$p_i(\%)$	29,4

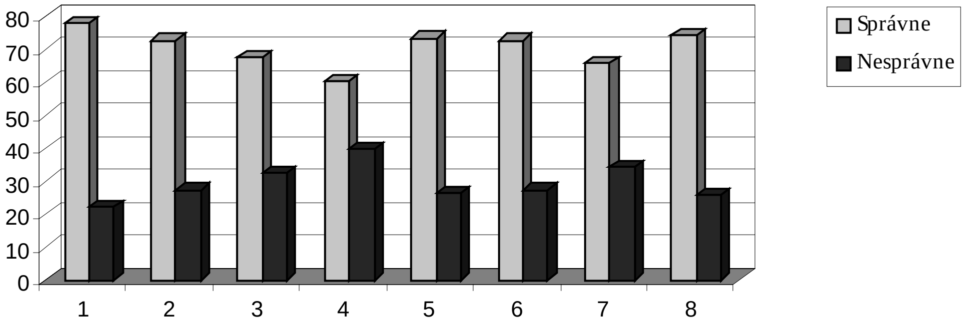
Graf č.1: Celkové vyhodnotenie R testu



Vyhodnotenie testu v jednotlivých položkách:

Číslo položky:	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i(S)$	232	216	201	179	218	216	195	221
$p_{iS}(\%)$	78,1	72,7	67,7	60,3	73,4	72,7	65,6	74,4
$n_i(N)$	65	81	96	118	79	81	102	76
$p_{iN}(\%)$	21,9	27,3	32,3	39,7	26,6	27,3	34,4	25,6

Graf č.2: Vyhodnotenie R testu v jednotlivých položkách

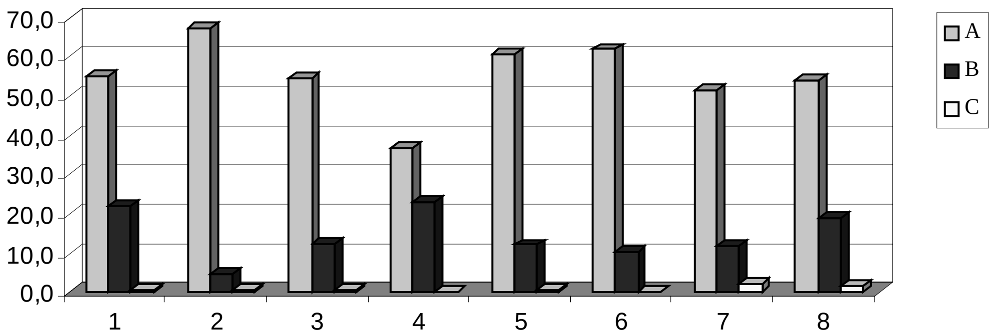


Štatistický výskyt zastúpenia jednotlivých druhov odpovedí v položkách testu prehľadne znázorňujú nasledovné tabuľky a grafy:

Správne odpovede:

Číslo položky:	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i(A)$	164	200	162	109	180	184	153	160
$n_i(B)$	66	14	37	69	36	31	35	56
$n_i(C)$	2	2	2	1	2	1	7	5
$p_i(A)$ v %	55,2	67,3	54,5	36,7	60,6	62,0	51,5	53,9
$p_i(B)$ v %	22,2	4,7	12,5	23,2	12,1	10,4	11,8	18,9
$p_i(C)$ v %	0,7	0,7	0,7	0,3	0,7	0,3	2,4	1,7

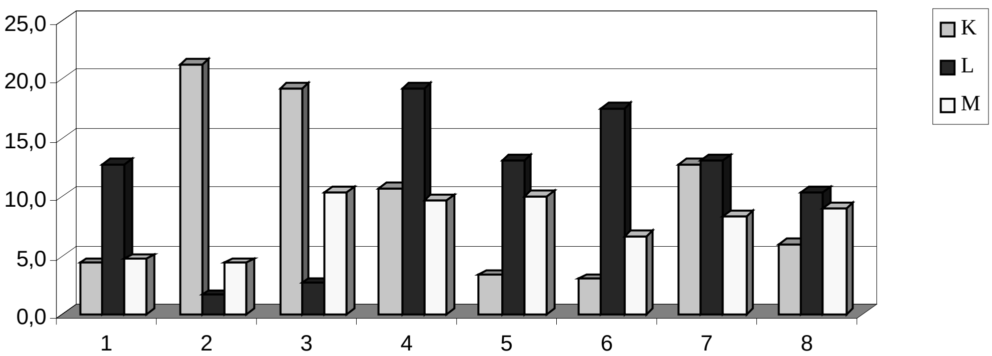
Graf č 3: Výskyt jednotlivých typov správnych odpovedí v R teste



Nesprávne odpovede:

číslo položky:	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_i(K)$	13	63	57	32	10	9	38	18
$n_i(L)$	38	5	8	57	39	52	39	31
$n_i(M)$	14	13	31	29	30	20	25	27
$p_i(K)$ v %	4,4	21,2	19,2	10,8	3,4	3,0	12,8	6,1
$p_i(L)$ v %	12,8	1,7	2,7	19,2	13,1	17,5	13,1	10,4
$p_i(M)$ v %	4,7	4,4	10,4	9,8	10,1	6,7	8,4	9,1

Graf č.4: Výskyt jednotlivých typov nesprávnych odpovedí v R teste



K jednotlivým položkám testu

Položku číslo 1 si rozoberme podrobnejšie.

Znenie úlohy č. 1:

Vyjadrite rovnicou: Nech *D* je počet dievčat a *C* je počet chlapcov v škole. Dievčat je o 20 menej ako chlapcov.

Očakávali sme zostavenie rovnice v tvare $D = C - 20$ (variant A). Tento typ odpovedá slovnému vyjadreniu o x menej, ktorého matematickým vyjadrením je odčítanie od väčšieho počtu. Odpovede tohto typu tvorili až 55,2 % zo všetkých odpovedí. V prípade, že v mysli študenta prebehne inverzný proces, t. j. dôjde k transformácii vyjadrenia a odčítanie od väčšieho počtu sa zmení na pričítanie k menšiemu počtu, dostaneme rovnicu v tvare $C = D + 20$ (variant B). Odpovede tohto typu predstavovali 22,2 % zo všetkých odpovedí. Za variant C sme považovali každé iné správne vyjadrenie, napr. rozdiel väčšieho a menšieho počtu sa rovná číselnému vyjadreniu zmeny, t. j. operátoru v danej úlohe: $C - D = 20$ alebo vyjadreniu súčtu kardinálnych čísel dvoch množín: $C + (C - 20) = C + D$. Variant C sa vyskytoval len ojedinele (0,7 %).

Z nesprávnych odpovedí variant K predstavoval reverzálnu chybu k variantu A, kedy študenti odčítali od menšieho počtu $D - 20 = C$ (4,4 %). Najväčší podiel z nesprávnych odpovedí – 12,8 % tvorili odpovede typu $C + 20 = D$ (variant L), t. j. pričítanie k väčšiemu počtu. Vo variante M študenti použili rôzne iné nesprávne vyjadrenia rovnice:

1. $D - 20 + C = D + C \quad \Rightarrow \quad x = D - 20$
2. $D - 20x = C$
3. $D + C = x \quad \Rightarrow \quad x = D - 20$
4. $x = (C - D) + C$
5. $D + C = A$
6. $(D - x) + C = A$
7. $D + (C - 20) = x \quad \Rightarrow \quad D = C$
8. $D + (C + 20) = x$
9. $D - 20 + C = x$
10. $(D - 20) + C = 0$
11. $D = 20 - C$
12. $D + C = 20$
13. $D + C - 20 = C$

Domnievame sa, že pri zostavovaní niektorých rovníc študent nepochopil zadanie a snažil sa o vyjadrenie súčtu kardinálnych čísel daných dvoch množín – 1), 12); pričom v niektorých si zaviedol novú premennú x alebo A – 3), 4), 6), 7), 8); prípadne naraz obe – 5). Písmenom x sa zvyčajne označuje neznáma v lineárnej rovnici, a keďže sa nenachádzala v našich označeniach premenných, študentovi „chýbala“, a preto ju „niekde“ použil – prípad b). V mnohých odpovediach sa skryto vyskytuje aj reverzálna chyba – 1), 2), 3), 7), 8), 9). Celkove vyjadrení tohto druhu bolo 4,7 % zo všetkých odpovedí.

Medzi zaujímavé, ale ojedinelé odpovede patrili správne odpovede, ktoré sme zaradili do variantu C. Avšak pre reedukačné pôsobenie učiteľa je dôležité najmä analyzovanie chybných odpovedí. Varianty K a L, nazývané reverzálnymi chybami k variantom A a B správnych odpovedí, sa vyskytovali veľmi často medzi chybnými odpoveďami. V ďalších položkách testu sa budeme zaoberať predovšetkým chybnými odpoveďami, ktoré sme zahrnuli do variantu M.

Znenie úlohy č. 2 [1]:

Vyjadrite rovnicou: Nech *S* je počet študentov a *P* je počet profesorov na univerzite. Študentov je 7krát viac ako profesorov.

Variant M zastúpený 4,4 % spočíval v nasledovných vyjadreniach:

1. $x = S + 7\mathrm{P}$
2. $x = P + 7\mathrm{S}$
3. $7S + P = 0$
4. $7S + P$ bez zostavenia rovnice
5. $7x = y$ bez vysvetlenia premenných x, y
6. $P = 7/S$
7. $S = 7(P + S)$
8. $7.S + P = SP$
9. $7x.S = P$
10. $P(7) + P = P$

Je zrejmé, že často krát nedochádza k pochopeniu úlohy zo strany študenta, a tak sa snaží buď zmeniť označenie – 5), zaviesť ďalšie premenné – 1), 2), 9) alebo vyjadriť súčet kardinálnych čísel množín – 1), 2), 3), 4), 8), 10). V prípade rovnice 6) dochádza dokonca k zámene čitateľa a menovateľa zlomku.

Znenie úlohy č. 3:

Vyjadrite rovnicou: V tanečnej sále je *M* mužov a *Z* žien. Mužov je o 5 viac ako žien.

Variant M (10,4 %) zahŕňa vyjadrenia:

1. $Z + (M + 5) = Z + M$
2. $Z + (M + 5) = Z + M \quad \Rightarrow \quad x = M + 5$
3. $(M + 5) + Z = Z$
4. $(M + 5) + Z = 0$
5. $(M + 5) + Z = x$
6. $(Z + 5) + M = x$
7. $5M + Z = x$
8. $M + 5x = Z$
9. $M = 5Z$
10. $Z = 5M$
11. $Z – 5 = Z$
12. $Z + 5 = 7$
13. $5x = y$ bez vysvetlenia premenných x, y
14. $(M + 5) + Z$ bez zostavenia rovnice

V prípade 6) môžeme hovoriť o správnom vyjadrení súčtu, čo však nebolo cieľom úlohy, ale v mnohých ďalších sa vyskytuje reverzálna chyba (M + 5) alebo v rovniciach 7), 9), 10), 13) zámena operácie sčítania za operáciu násobenia, ktorej použitie nemá žiadne opodstatnenie.

Znenie úlohy č. 4 [1]:

Vyjadrite rovnicou: Nech *C* je množstvo octu a *O* množstvo oleja v šalátovej majonéze. Octu je 3-krát menej ako oleja.

Variant M (9,8 %) obsahuje nasledovné vyjadrenia:

1. $O: 3 + C = O + C$
2. $C + O = x$
3. $C + O = C.O$
4. $3.C – O = x$
5. $O – 3.C = x$
6. $3.O + C = C$
7. $C – 3.O = O$
8. $(C – 3.O) + O = 0$
9. $C – 3x = O$
10. $3x – O = C$
11. $3(O – C) = x$
12. $3(C – O) = 0$
13. $O = 3: C$
14. $C = 3: O$
15. $C = – 3.O$
16. $O: C + C = x$
17. $O: 3C + O = x$

Toto široké spektrum nesprávnych odpovedí charakterizuje snahu študentov zostaviť rovnicu vyjadrujúcu slovné porovnanie *x*-krát menej, ktorého odpovedajúcou operáciou je delenie väčšieho, resp. násobenie menšieho počtu. Nesprávne pochopenie úlohy študenta často zavádza k vyjadrovaniu celkového počtu – 1), 2), 3), 6), 8), 16), 17) bez uvedomenia si vzťahu medzi kardinálnymi číslami daných množín. Operáciu delenia študent chápe ako operáciu odčítania(v slovnom vyjadrení si všíma len slovo menej) alebo skombinuje obidve operácie – 4), 5), 7), 8), 9), 10). Najzreteľnejšie sa táto chyba prejavuje v zápise 15). Rovnice typu 13) a 14) sa vyznačujú zámenou čitateľa a menovateľa zlomku, avšak len jedna z nich – 14) by viedla k správnemu vyjadreniu.

Znenie úlohy č. 5:

Vyjadrite slovne, čo predstavuje rovnica: Nech *x* je cena kravaty a *y* je cena košele.

$$y = x + 800$$

Pomerne vysoké percento 10,1 % zo všetkých odpovedí tvorí variant M s rôznymi interpretáciami typu:

1) „Rovnica predstavuje cenu kravaty aj košele.“,
2) „Vypočítať koľko stojí košeľa.“,
3) „*y* košieľ je menej ako *x* kravát.“,
4) „Košieľ je rovnako vtedy, keď ku kravate pripočítame 800.“,
5) „Počet košieľ je cena kravaty plus 800.“,
6) „$y = x + 800$,
   kr + ko   *y* cena kravaty a košele spolu.“

V niektorých slovných vyjadreniach môžeme pozorovať, že rovnica, v ktorej sa vyskytuje znamienko +, evokuje u študentov potrebu zjednotenia – 1), 6); v iných prípadoch dochádza k zámene ceny jedného predmetu za počet predmetov – 3),4),5); resp. k vyjadreniu inštrukcie namiesto vzťahu medzi algebrickými premennými.

Znenie úlohy č. 6:

Vyjadrite slovne, čo predstavuje rovnica: Nech *A* je počet Angličanov a *C* počet Číňanov.

$$C = 9.A$$

V snahe o slovné inverzné vyjadrenie rovnice dochádza k reverzálnym chybám symetrickým k variantom A a B – varianty K a L (s 3,0 % a 17,5 %), kde namiesto „9-krát viac“ študent použije multiplikatívne porovnanie „9-krát menej“ a naopak. Súčasným použitím operátora aditívneho a multiplikatívneho porovnania sa dopracuje k vyjadreniam typu:

1) „Číňanov je o 9-krát viac ako Angličanov.“,

2) „Počet Angličanov je o 9-krát viac než Číňanov.“,

alebo k neopodstatneným tvrdeniam:

3) „Číňanov je toľko, koľko Angličanov.“,
ktoré patria do variantu M s 6,7 % zastúpením.

Treba si uvedomiť, že odstránením slovného výrazu pre aditívneho operátora by len v prípade 1) došlo k správnej transkripcii rovnice.

Znenie úlohy č. 7:

Vyjadrite slovne, čo predstavuje rovnica: Nech *a* je dĺžka a *b* je šírka obdĺžnika.

$$b = a - 25$$

Variant M(8,4%) je zastúpený takmer štvrtinou z nesprávnych odpovedí, medzi ktoré patria vyjadrenia typu:

1) „Vypočítajte šírku obdĺžnika, ak dĺžka je o 25 kratšia. “,
2) „Dĺžky je o 25 menej ako šírky.“,
3) „Dĺžka obdĺžnika je 25-krát väčšia ako jeho šírka.“,
4) „Obdĺžnik je o 25 užší ako širší.“,
5) „ Šírka *b* je väčšia o 25 ako šírka *a*.“

Napriek tomu, že pojem dĺžka obdĺžnika sa používa na označenie dlhšej strany obdĺžnika, v niektorých slovných vyjadreniach je číselne považovaná za menšiu – 1), 2). V prípade 3) dochádza k zámene vyjadrenia aditívnej operácie za multiplikatívnu. Slovné vyjadrenie v 5) môže signalizovať okrem nesprávneho uchopenia textu slovnej úlohy aj problémy spojené s pochopením pojmov charakterizujúcich obdĺžnik.

Znenie úlohy č. 8:

Vyjadrite slovne, čo predstavuje rovnica: Na škole je *U* učiteľov a *S* študentov.

$$U = S/15$$

Varianty K a L (23,7 % a 40,8 % z nesprávnych odpovedí) predstavujú reverzálne chyby k variantom A a B, pričom namiesto operátora 15-krát menej sa v slovnom vyjadrení použije operátor 15-krát viac a naopak. Variant M tvorí 9,1 % z odpovedí a je reprezentovaný vyjadreniami typu:

1) „Na škole je 15-krát viac učiteľov.“,
2) „Na škole je učiteľov o 15 menej ako študentov.“,
3) „Učiteľov je o 1/15 menej ako študentov.“,
4) „Koľko je učiteľov, keď študentov je 15-krát menej.“,
5) „Učiteľov je o 15x menej ako študentov.“.

Odstránením slovného výrazu pre aditívneho operátora by len v prípade 5) došlo k správnej transkripcii rovnice. Vo vyjadrení 2) dochádza u študenta k zámene operácie delenia za odčítanie, v ostatných interpretáciách sa nachádza viac druhou chýb.

Pri vyhodnocovaní testu sme sa zamerali nielen na zistenie výskytu jednotlivých druhov správnych a nesprávnych odpovedí, ale najmä na myšlienkové procesy prebiehajúce u študentov zostavujúcich a interpretujúcich rovnice nesprávne. Myslenie tých, ktorí v teste zodpovedali správne najviac jednu otázku, sme podrobili ďalšiemu skúmaniu. Ako výskumnú metódu sme zvolili interview [1] so študentmi, ktoré prebiehalo nasledovne:

1. Predložili sme študentovi okódovaný test a oznámili mu, že výsledky označené krížikom sú nesprávne a položili mu otázku, či si ich vie opraviť.
2. Odporučili sme študentovi dosadiť si konkrétne čísla za algebrické písmená, aby si uvedomil vzťah medzi nimi, a tak zapísal rovnicu (v prvej polovici testu) alebo vyjadril rovnicu slovne (v druhej časti testu).

3. Na princípe rovnoramenných váh sme študentovi objasnili reverzálnu chybu – pričítanie k väčšiemu počtu, odčítanie od menšieho počtu, násobenie väčšieho počtu, delenie menšieho počtu.
4. Pre lepšie pochopenie sme opakovali dosadzovanie čísel, ktoré sme zapisovali do tabuľky alebo znázorňovali graficky. V poznávacom procese jedinca sme sa teda vrátili k etape tvorby separovaných modelov, ktorá ho mala priviesť k vytvoreniu univerzálneho modelu.
5. Spolu so študentom sme zapísali korektné riešenie.

Následne po interview sme zadali študentom iný variant testu.

Vyhodnotenie interview

Interview so študentmi (počtom 11) prebiehalo podľa naznačenej schémy, avšak každý jedinec neprešiel všetkými etapami, ale len niektorými, pokým sa nedostal do štádia, v ktorom pochopil, kde v úlohách robil chyby. Všeobecne možno povedať, že rozhovor spolu s následným kontrolným testom trval niečo vyše hodinu.

Reakcie niektorých študentov na radu, aby sa o správnosti, či nesprávnosti svojho zápisu rovnice presvedčili dosadzovaním, boli rôzne:

1. Pod dosadzovaním študent chápal dosadzovanie za obidve algebrické premenné bez rešpektovania vopred stanoveného vzťahu daného operátorom, napr. v úlohe č. 1 si študent zvolil $D = 30$, $C = 15$.
2. Druhým extrémom bolo zavedenie novej neznámej B namiesto operátora: $D = C - B$.

Pri dosadzovaní proces uvedomovania si vzťahu prebiehal za pomoci experimentátora nasledovne (S – študent, E – experimentátor):

Ukážka č. 1:

S (číta zadanie): Nech D je počet dievčat a C je počet chlapcov v škole. Dievčat je o 20 menej ako chlapcov.
E: Máte zostaviť rovnicu.
S: Dievčat je o 20 menej ako chlapcov, čiže $D - 20 = C$.
E: Overte si správnosť dosadením! Koľko bude dievčat?
S: 30.
E: Koľko bude chlapcov?
S: 10.
E: Je pravda, že dievčat je o 20 menej?
S: Áno.
E: Keď dievčat je 30 a chlapcov je 10, je dievčat menej?
V tomto momente si študent uvedomil chybu a opravil sa.
S: Dievčat je 10 a chlapcov je 30, čiže (po dlhšom váhaní) $C - 20 = D$.

Ukážka č. 2:

S: Nech S je počet študentov a P je počet profesorov na univerzite. Študentov je 7-krát viac ako profesorov.
E: Zapíšte rovnicou.
S: S sú študenti, čiže S krát 7 sa rovná P.
E: Vyskúšajte dosadiť si čísla.
S: Nech máme trebárs 5 študentov.
E: Koľko bude profesorov?
S: 35.
E: Zapíšte.
S: To je zle.
E: Prečo?
S: Lebo študentov má byť viac.

E: Bolo by zaujímavé, keby 35 profesorov učilo 5 študentov.
S: Nie. To bude zase opačne. *P* krát 7 sa rovná *S*.

Ukážka č. 3:
S: V škole je *U* učiteľov a *S* študentov. *U* rovná sa *S* deleno 15.
E: Uveďte konkrétny príklad.
S: Trebárs máme 30 študentov.
E: Koľko bude učiteľov?
S: Učitelia budú dvaja.
E: Takže ako to poviete?
S: Učiteľov je 15-krát viac ako štu ... (zaváhanie), 15-krát menej ako študentov.

V niektorých prípadoch študent vôbec nezostavil rovnicu, ale len zapísal výraz. Pri odstraňovaní tejto chyby sme dbali na dôslednom čítaní textu študentom a prepisovaní každého slova (najmä slova „je“ v tvare „=“) do jazyka matematiky. Jedna zo študentiek vyslovila návod na zostavovanie rovníc – treba rozdeliť text na dve časti slovom „je“, do každej časti zapísať symbol (algebrickú premennú) a potom urobiť úvahu.

Pri zostavovaní rovníc niekedy u študentov pretrvávali problémy týkajúce sa zámeny aditívnych a multiplikatívnych operátorov, napr. o *x* viac a *x*-krát viac.

Jedným z vysvetlení na otázku – podľa čoho sa rozhodujete, akú matematickú operáciu použijete pri zostavovaní rovnice, bola nasledovná odpoveď: „ No, keď by tu bolo 3-krát viac má byť ulíc *U* ako obchodov *O*, tak keby som si to zapísala ako kedysi na základnej škole a dala takú šípku, čiže 3-krát viac ... tak sme dali deleno 3 (zapísané $U = O : 3$).“ Študentka takto pristupovala ku všetkým úlohám testu. Domnievame sa, že v pamäti jej utkvel len spôsob riešenia nepriamych slovných úloh, ktorý si vyžaduje použitie inverznej operácie pri výpočte neznámej, a preto ho aplikuje pri zostavovaní akýchkoľvek rovníc bez rozmýšľania.

Na záver interview každému študentovi bola položená otázka, prečo podľa neho vyriešil úlohy testu nesprávne. Medzi priam protichodné odpovede patrili zdôvodnenia typu:

1. „Zdá sa, že je to tak jednoduché, že som nad tým ani nerozmýšľal.“
   Išlo v nich o podcenenie daných úloh spolu s nevenovaním pozornosti ich zadaniu.
2. „Strašne zložito rozmýšľam, potom to dopletiem a už to napíšem zle. Mne sa to nezdá, že by to bolo také ľahké, tam musí byť nejaká chyba. To nesmie byť také ľahké.“
   Odpoveď môžeme charakterizovať ako hľadanie zložitosti v jednoduchých úlohách.

Na rozdiel od skúseností experimentátorov opísaných v literatúre [1] úspešnosť odpovedí našich študentov sa po interview zvýšila z 4,5 % na 87,5 %. Išlo však o malú vzorku respondentov, ktorí sa pripravujú na učiteľské povolanie a podľa toho pristupujú i k daným úlohám; a preto nie je možné z výsledkov robiť všeobecné závery.

ZÁVER

Sledovanie jednotlivých etáp riešiteľského procesu u žiakov, analyzovanie chýb ako zdroja informácií o myšlienkových pochodoch a predstavách žiakov a následne využitie týchto poznatkov pri reedukačnom zásahu učiteľa za účelom, aby došlo k uvedomeniu si a odbúraniu týchto chýb samotnými žiakmi, patrí medzi významné činnosti didaktického pôsobenia učiteľa.

V snahe vysvetliť študentom nesprávnosť riešenia úloh R-testu v rámci interview sme tento fenomén objasňovali na princípe rovnoramenných váh, kde si študent vytváral predstavu nerovnomerne zaťažených misiek rovnoramenných váh a zostavovanie rovníc sa chápalo procesuálne; riešenie bolo odpoveďou na otázku: „Čo treba urobiť, aby nastala rovnováha?“

V literatúre [6] je podrobne popísaná metóda vizualizácie vzťahov medzi algebrickými premennými, vystupujúcimi v slovnej úlohe, pomocou úsečkových legiend, kde sa žiak prostredníctvom grafickej predstavy dopracováva k zostaveniu správneho tvaru rovnice, resp. k riešeniu úlohy – k určeniu požadovaných neznámych v úlohe.

Tieto metódy slúžia teda nielen na diagnostikovanie, ale môžu sa považovať za terapeutické metódy, ktoré by mohli pomôcť učiteľom v práci so žiakmi, pri odstraňovaní reverzálnej chyby v riešeniach slovných úloh. Porovnanie efektívnosti spomínaných metód (metóda porovnávania množstiev na rovnoramenných váhach a úsečková metóda) objasňovania problému by mohlo byť predmetom ďalšieho skúmania.

Literatúra:

[1] Fischer, R.; Malle, G.: Človek a matematika. *SPN, Bratislava 1992*

[2] Hejný, M.: Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika, 4, 1995*

[3] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. *SPN, Bratislava 1989*

[4] Hejný, M.; Michalcová, A.: Skúmanie matematického riešiteľského postupu. *Metodické centrum v Bratislave, Bratislava 2001*

[5] Hejný, M.; Stehlíková, N.: Číselné představy dětí. *PdF Univerzita Karlova, Praha 1999*

[6] Novotná, J.: Analýza rešení slovních úloh. *Kapitoly z didaktiky matematiky, PdF Univerzita Karlova, Praha 2000*

Príloha č. 1

R TEST

Meno:
Odbor:
Dátum:

Vyjadrite rovnicou:

1. Nech D je počet dievčat a C je počet chlapcov v škole.
   Dievčat je o 20 menej ako chlapcov.

2. Nech S je počet študentov a P je počet profesorov na univerzite.
   Študentov je 7-krát viac ako profesorov.

3. V tanečnej sále je M mužov a Z žien.
   Mužov je o 5 viac ako žien.

4. Nech C je množstvo octu a O množstvo oleja v šalátovej majonéze.
   Octu je 3-krát menej ako oleja.

Vyjadrite slovne, čo predstavuje rovnica:

5. Nech x je cena kravaty a y je cena košele.
   $y = x + 800$

6. Nech A je počet Angličanov a C počet Číňanov.
   $C = 9A$

7. Nech a je dĺžka a b je šírka obdĺžnika.
   $b = a – 25$

8. Na škole je U učiteľov a S študentov.
   $U = S/15$

Príloha č. 2

Zoznam a kódovanie odpovedí pri riešení úloh R testu.

Číslo položky testu:		Správne odpovede		Nesprávne odpovede
1	A	$D = C - 20$	K	$D = C + 20$
	B	$C = D + 20$	L	$C = D - 20$
	C	iné	M	iné
2	A	$S = 7P$	K	$P = 7S$
	B	$P = S/7$	L	$S = P/7$
	C	iné	M	iné
3	A	$M = Z + 5$	K	$Z = M + 5$
	B	$Z = M - 5$	L	$M = Z - 5$
	C	iné	M	iné
4	A	$C = O/3$	K	$C = 3O$
	B	$O = 3C$	L	$O = C/3$
	C	iné	M	iné
5	A	Košeľa je o 800 Sk drahšia ako kravata.	K	Košeľa je o 800 Sk lacnejšia ako kravata.
	B	Kravata je o 800 Sk lacnejšia ako košeľa.	L	Kravata je o 800 Sk drahšia ako košeľa.
	C	iné	M	iné
6	A	Číňanov je 9-krát viac ako Angličanov.	K	Číňanov je 9-krát menej ako Angličanov.
	B	Angličanov je 9-krát menej ako Číňanov.	L	Angličanov je 9-krát viac ako Číňanov.
	C	iné	M	iné
7	A	Šírka obdĺžnika je o 25 dĺž. jednotiek menšia ako jeho dĺžka.	K	Šírka obdĺžnika je o 25 dĺž. jednotiek väčšia ako jeho dĺžka.
	B	Dĺžka obdĺžnika je o 25 dĺž. jednotiek väčšia ako jeho šírka.	L	Dĺžka obdĺžnika je o 25 dĺž. jednotiek menšia ako jeho šírka.
	C	iné	M	iné
8	A	Učiteľov je 15-krát menej ako študentov.	K	Učiteľov je 15-krát viac ako študentov.
	B	Študentov je 15-krát viac ako učiteľov.	L	Študentov je 15-krát menej ako učiteľov.
	C	iné	M	iné

AKO NAJLEPŠIE PRIPRAVIŤ ŠTUDENTOV PEDAGOGICKÝCH FAKÚLT DO PRAXE?

Kristína Sotáková, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava

Abstrakt: SOTÁKOVÁ, K.: How to best prepare the students of the Faculty of Education for a practice?

In this contribution is one of the answers the title question. It deals with analysis of teaching practice of using videorecorder.

Otázka praktickej pripravenosti absolventov pedagogickej fakulty na učiteľskú profesiu nie je nová. Nové sú možno prístupy k hľadaniu odpovede na ňu. V tomto príspevku sa pokúsim načrtnúť možnosti riešenia tohto problému z hľadiska využitia mediálnych prostriedkov, ktoré sú prístupné na našej fakulte.

Súčasný stav problematiky vidím takto:

- študenti odboru učiteľstvo pre základné školy absolvujú 4-5 ročné štúdium, počas ktorého majú povinný určitý počet hodín praxe – náčuvy a odučené hodiny.
- pedagogická fakulta nemá cvičnú základnú školu.
- učitelia, ktorí dozerajú na pedagogickú prax študentov nie sú zamestnancami fakulty, ale sú zmluvne platený fakultou za hodinu rozboru každej odučenej hodiny.
- kontakt pedagógov z fakulty a pedagógov z cvičnej školy prakticky neexistuje.

Za týchto podmienok je praktické cvičenie našich študentov na pedagogickej praxi často len formálnou záležitosťou. Študenti nevedia, ako organizovať vyučovací proces, majú s tým málo skúseností a spätná väzba na nimi odučenú hodinu nie je dostatočná. Cvičenia z didaktiky matematiky sú síce vhodné na metodické usmernenia, ale nie vždy odpovedajú na konkrétne podnety z praxe.

Nedávno sa mi naskytla možnosť nahrať na videokazetu jednu vyučovaciu hodinu matematiky, ktorú odučil náš študent. Zhodou okolností to bol študent s dobrým prospechom, ktorý o študovaný odbor prejavil nezvyklý záujem. Hodina bola veľmi dobre a tvorivo pripravená, za čo som ho pochválila, predsa však sa našli chyby, ktoré som mu vytkla. On bol veľmi vďačný za pripomienky a nápady k odučenej hodine. Rozhodla som sa, že túto videonahrávku (samozrejme, s jeho súhlasom) použijem na najbližších cvičeniach z didaktiky matematiky ako učebnú pomôcku. Rozdelím si študentov na niekoľko skupín a každá skupina bude mať za úlohu všímať si danú vyučovaciu hodinu z určitého pohľadu (psychologického, metodického, odborného ...). Inštrukciu pre študentov by som mohla spresniť tak, že by som im navrhla konkrétne body, čo si majú všímať (komunikáciu učiteľa so žiakmi, organizáciu hodiny, vhodnosť použitých pomôcok a pod.) Po pozretí videokazety by sme si celú hodinu zhodnotili s cieľom dať reálnu spätnú väzbu študentovi, ktorý ju učil. Takto zvolený postup má viacero výhod:

- študenti sa naučia kritickému mysleniu;
- samotný študent, ktorý hodinu odučil dostane od svojich spolužiakov spätnú väzbu, čo môže byť príjemnejšie, ako spätná väzba od cvičného učiteľa;
- menšia miera formalizmu v prístupe študentov k pedagogickej praxi;
- naštartovanie procesu sústavného zdokonaľovania sa, čo by malo byť dôležitým atribútom každého učiteľa a pod.

Perspektívy tohto prístupu k didaktike predmetu sú ďalekosiahle: od archivácie videonahrávok, cez ich triedenie a zostrihanie, až po vytvorenie akejsi mediálnej knižnice pre pedagogickú fakultu.

Použitá literatúra:

[1] Turek, I.: Vzdelávanie učiteľov pre 21. storočie. *Metodické centrum, Bratislava 2001*

BUILDING AN INTERNAL MATHEMATICAL STRUCTURE, INTERPRETATION VIA THE THEORY OF ABSTRACTION IN CONTEXT

Naďa Stehlíková, Pedagogická fakulta, Karlova univerzita, Praha

V posledních dvou letech badatelé T. Dreyfus, R. Hershkowitz a B. B. Schwarz vytvořili teorii konstrukce matematických poznatků, kterou nazvali „abstraction in action". Základem je model abstrakce skládající se ze čtyř částí, a to „recognizing", „building-with", „construction" and „consolidation", pomocí nichž se snaží popsat procesy, které vedou k tvorbě nových matematických poznatků. Autorka jejich teorii použila na interpretaci jedné části svého výzkumu zaměřeného na tvorbu mentálních matematických struktur, aby přispěla k ověření aplikovatelnosti teorie mimo kontext, v němž původně vznikla, a zjistila, zda je teorie využitelná pro interpretaci ostatních dat jejího výzkumu. Tento článek si klade za cíl seznámit čtenáře z ČR a SR s teorii, která je nová a u nás ještě nezavedená.

1. Introduction

In 1998, we started a research project aimed at the processes of building an inner mathematical structure (hereinafter IMS) investigated via the construction of a new structure as an analogy to an existing structure. The process of constructing an IMS is a mental activity, i.e. it is not directly observable and thus "presents a methodological problem because construction is a relatively rare event. [...] these events might often occur when students sit alone and think hard about mathematics" (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001). One of the ways of getting data for the research was via the researcher's introspection. In Stehlíková & Jirotková (2002) some results of the research are given which were elaborated from the point of view of the methodology of the Prague seminar in the didactics of mathematics (Stehlíková, 1998).

In the last twenty years, there has been a considerable attention given to the description and analysis of cognitive processes. In the Czech Republic, Slovakia and Poland, the theory of separate and universal models which was developed by M. Hejný (Hejný, et al., 1989) has been widely used (see for instance Swoboda, 1997, ???). Recently in a series of articles, a new theory striving to account for the processes of construction of mathematical knowledge, so called abstraction in context, has been introduced (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2001, Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001, Schwarz, Hershkowitz & Dreyfus, 2002) and elaborated (Hillel & Dreyfus, 2002, Tabach, Hershkowitz & Schwarz, 2001, Tsamir & Dreyfus, in press). The model the authors developed seems to fit the data of our research on structuring mathematical knowledge. We have therefore decided to revisit the introspective data from our research and interpret them differently, this time from the standpoint of the abstraction in context. The goal of this contribution is to introduce the theory of abstraction to the Czech and Slovak reader.

First, the basic principles of the theory of abstraction in context will be presented in order for the reader to get an idea of its constituting parts. Next, the data from our research will be given and interpreted via abstraction in context.

2. Abstraction in Context[1, 2]

The roots of the theory lie in the following principles which the authors[3] adopted:

- Abstraction is an activity in the sense of activity theory, a chain of actions undertaken by an individual or a group and driven by a motive that is specific to a context.
- Context is a personal and social construct that includes the student's social and personal history, conceptions, artifacts, and social interaction.
- Abstraction requires theoretical thought, in the sense of Davydov (Davydov, 1990); it may also include elements of empirical thought.
- A process of abstraction leads from initial, unrefined abstract entities to a novel structure.
- The novel structure comes into existence through reorganization and the establishment of new internal links within the initial entities and external links among them.

As for the term abstraction, more stress is put on the processes of abstraction rather than on its outcomes and the authors characterise it as "an activity of vertically reorganizing previously constructed mathematics into a new mathematical structure". By reorganizing into a new structure, the authors mean the establishment of mathematical connections (making a new hypothesis, inventing or reinventing a mathematical generalization, a proof, or a new strategy for solving a problem). On the other hand, neither learning to mechanically perform a mathematical algorithm or rote learning qualify as abstractions.

The authors carried out a teaching interview with a student from grade 9 using the topic Functions. The interview was prepared in such a way that the girl had to construct new knowledge (for instance, the notion of rate of change). By deep analysis of the interview, a model of abstraction was developed which consists of three dynamically nested epistemic actions of constructing, recognizing and building-with. The genesis of abstraction is seen as consisting of three stages:

1. A need for a new structure.
2. The constructing of a new abstract entity in which recognizing and building-with already existing structures are nested dialectically.
3. The consolidation of the abstract entity facilitating one's recognizing it with increased ease and building-with it in further activities.

Abstraction occurs during problem solving only when a solver elaborates a new method/strategy, i.e. construction is involved. If a student solves a standard problem, he/she is likely to alternate between recognizing and building-with previously acquired structures[4]. If he/she solves a non-standard problem, construction(s) might be involved.

Next, each of the four main parts of the model will be briefly characterized.

Recognizing of previously constructed knowledge may occur in at least two cases: (a) by analogy with another object with the same or a similar structure which is already known to the recognising subject, (b) by specialisation, i.e. by realising that the object fits a (more general) known (to the subject) class all of whose members have this structure.

---

[1] The following account of the theory was prepared on the basis of the articles Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, (2001) and Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus (2001). For the sake of fluency of the presentation of the theory, we will not insert references to these articles in the text.

[2] The account of the theory represents the author's interpretation and does not necessarily have to be the same as the theory developers' intentions.

[3] By authors (plural), we will mean the authors of the theory of abstraction in context. By author (singular), we will mean the author of this article.

[4] The authors call mathematical methods, strategies, concepts, etc. structures. We would have preferred to reserve the word structure for complex knowledge. Similarly, instead of 'processes of abstraction' 'processes of construction of knowledge' could be used, abstraction having a more specific meaning in mathematics for us.

When **building-with**, the student uses available structural knowledge to build with it a viable solution to the problem he/she is solving. He/she is not enriched with new, more complex structural knowledge. In building-with structures, the goal is attained by using knowledge that was previously acquired or constructed, it has a connotation of application. Obviously, each structure that is used to build-with first needs to be recognized.

New methods, strategies, or concepts can be **constructed**. The process itself, namely the construction or restructuring of knowledge, is often the goal of the activity. The construction is not a separate action, additional to all the recognizing and building-with actions, but it consists of them, they make a whole together. In other words, all these recognizing and building-with actions are nested within the constructing action.

By **consolidation,** newly constructed structures become an integral part of a student's knowledge. A structure which has not been sufficiently consolidated is likely to be fragile in that a student is able to use it only in a specific context, under certain circumstances, in certain representations and/or in some types of problems.

Consolidation is a long-term process in which a constructed structure becomes so familiar that a student is able to use it in a flexible manner. Recognizing the structure and building-with it become immediate, self-evident and done with confidence. Consolidation occurs through recognizing the new structure, building-with it, reflecting on it and potentially also constructing new structures with it.

3. Research on the Building of an Internal Mathematical Structure

The tool of our investigation of an internal mathematical structure is an arithmetic structure $A_2 = (\underline{A}_2, \oplus, \otimes)$ which we call *restricted arithmetic* and which was elaborated by Milan Hejny.

The gate to the restricted arithmetic is the mapping r: $\underline{N} \to \underline{N}$, which we call *reducing mapping* and which can be introduced, for instance, like this[5]:

Reduction r is mapping r: $\underline{N} \to \underline{N}$, defined as r: $n \to n - 99 \cdot [n/99]$, where $[y]$ is the integer part of $y \in \underline{R}$. For instance, $r(7\,305) = 78$, $r(135\,728) = 98$, … .

Next, let us have the set $\underline{A}_2 = \{1,2,3,...,99\}$. The reducing mapping r is used to introduce binary operations of z-addition $\oplus$ and z-multiplication $\otimes$ in $\underline{A}_2$ as follows: $\forall\, x, y \in \underline{A}_2,\ x \oplus y = r(x + y)$ and $x \otimes y = r(x \cdot y)$. For instance $72 \oplus 95 = 68$, $72 \otimes 95 = r(108) = 9$.

In the structure of restricted arithmetic, many different problems can be posed and solved (for some examples, see Stehlíková, 2001). Here we will concentrate on one part of the research, namely the author’s introspection.

3.1 Time Sequence of Building an Internal Mathematical Structure – Illustration

While investigating A_2, the author made introspective notes and collected all her solutions of tasks, which she mainly posed herself. Then her whole investigative process was divided into smaller parts according to the main topic studied. It was sometimes difficult to do so as all topics are interconnected. These parts were then decomposed into phases and in order to get a clearer picture of the process, they were described in the form of a table. The table includes the task/challenge and some results which the task/challenge led to[6]. Introspective remarks are given in the first person singular form.

Here we will concentrate on one part of the data gathered by introspection, namely the study of powers and its consequences. First, the table will be presented which was published in Jirotková & Stehlíková (2002) where it was used to illustrate some phenomena of the process of structuring

[5] It was introduced differently to the students who took part in the research, see Stehlíková (2001).

[6] Only the results which we consider, at this stage of research, fundamental with respect to investigating IMS will be presented. *The year given in each line roughly corresponds to the time when I worked on the task. It does not mean that it took a year to prove regularities, for instance, but rather that I felt the need to prove them only after some time.*

mathematical knowledge. Next, the data from the table will be interpreted from the perspective of the theory of abstraction in context.

	Task/challenge	**Activity**
A	Solve quadratic equations	*I applied the standard formula and this led to the necessity to find square roots and hence squares.* (1997)
B	Make a list of squares.	*I made a list of squares.* (1997)
C	Investigate the list	*I noticed (a) anomalies, (b) regularities.* (1997)
C1	Find all anomalies	$45^2 = 45$, $55^2 = 55$, $22^2 = 88$ and $88^2 = 22$. Hence $45^n = 45$ (for $n > 0$), $22^3 = 55$, etc.
C2	Find all regularities	1.$(ab)^2 = (ba)^2$, 2. $a^2 = a0^2$, where a, b are non-zero digits, 3. $ab = 10 \otimes ba$, at least one of the digits a, b is non-zero, 4. additive inverses have the same square.
D	Justify the results	*I proved the regularities above.* (1998)
E	Organise the list in a more meaningful way	*I made an arrow diagram of all squares and hence square roots (see figure 1). The diagram consists of 9 suggestive clusters. What does it mean?* (March 2000)
F	Investigate the diagram	New questions arose. How can the individual clusters be characterised? What is the property of numbers with the loop ($45^2 = 45$, $55^2 = 55$, $1^2 = 1$, $99^2 = 99$)? What is the connection among numbers belonging to one cluster? having the same square? etc. (March 2000)
G	Work on questions which emerged in F	*I divided the diagram into several subsets of numbers, I called them important subsets (hereinafter IS). These were numbers which are (are not) zero divisors, numbers with the loop, numbers from one cluster.* (May 2000)
H	Study IS of squares	*I realised that the main characteristics of IS was the closure under addition and/or multiplication and neutral elements. I investigated it for all identified subsets and identified some groups among them.* (May 2000)
I	Find other groups	*I decided to study third powers in the same way.* (August 2000)
J	Study third powers and their subsets	A diagram similar to the diagram of squares, IS of third powers and the identification of subgroups. *I felt the need to make the study more systematic and it occurred to me that the study of general powers might help.* (August 2000)
K	Study general powers	*I investigated general powers of zero divisors, number 99 and non-zero divisors. I classified all z-numbers according to the length of the period and found out that the sets* $M = \{a^k$, *a is neither zero divisor nor 99*, $k \in N\}$ *form the group under multiplication.* (1998, August 2000)
L	Summarise all subgroups	A table of subgroups of the additive group $(\underline{A}_2, \oplus)$ of the order 1, 9, 33, 99 and a table of the subgroups of the multiplicative group $(\underline{G}, \otimes)$ of the order 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 were created where $\underline{G}$ is a subset of non-zero divisors of $\underline{A}_2$ and 99 is not a member of $\underline{G}$. A relationship between the order of groups and subgroups noticed. (September 2000)

M	Look for theory	Lagrange's theorem used for determining the order of possible subgroups. Subgroups of some orders are still missing. (August 2000)
N	Look for missing subgroups	*I knew the order for possible subgroups and wanted to make the list complete.*
N1	Study of existing subgroups	A formula "generator times order of the subgroup equals the order of the group" found, which is only valid for subgroups of ($\underline{A}_2$,⊕). Subgroups of order 3 and 11 found. (August 2000)
N2	Make tables of all subgroups	Two tables originated: a table of multiplicative subgroups, and a table of additive subgroups. The tables include the generators of subgroups. Summary of knowledge concerning general powers. (Sept. 2000)
N3	Filling up the tables	The last subgroup found was the subgroup of order 12 of ($\underline{G}$, ⊗) via investigating fifth powers. The need to get an insight into the inner structure of all subgroups. (Sept. 2000)
O	Making a visual diagram of subgroups	An arrow diagram of all subgroups. What are the properties of the set of all subgroups with respect to inclusion? (Sept. 2000)

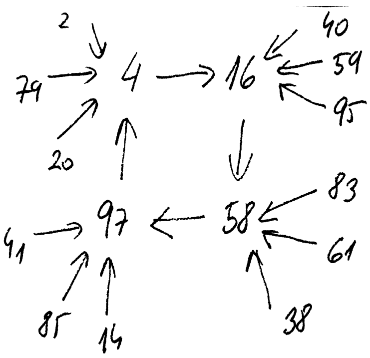


Figure 1

3.2 Reinterpretation of Data via the Model of Abstraction

In this section, we will reinterpret the table above in terms of the theory of abstraction given in section 2. In the table, two 'main' constructions can be distinguished. First, the construction of the structure of squares (lines A-F) and second, the construction of the structure of subgroups (lines G-N).

The construction of <u>the structure of squares</u> is represented visually by a diagram consisting of nine clusters, one of which is in figure 1. This construction consists of several 'smaller' constructions which are nested in it and which will be described below.

The need for a new structure[7] was given by our effort to get an insight into the solutions of quadratic equations for which we needed to know which numbers were squares.

Using the notion of squares from ordinary arithmetic and the fact that additive inverses have the same square (*recognising* previously constructed knowledge and *building-with* it something new), a list of squares was *constructed*. By studying the list of square and noticing anomalies and regularities, 'chains' were *constructed* (*recognising* & *building-with* the knowledge of the relationship 'being square of'). For instance, in figure 1 we have the chain 4→16→58→97→4 where $4^2=16$, etc. By further *recognising* & *building with* the relationship 'being square' and with the regularities given in line C2 of the table, the diagram was *constructed* in a rather raw form and by several redrawings, the visual diagram consisting of nine clusters was *constructed*.

The visual diagram of the squares can be seen as a complicated structure which consists of nodes (numbers) and relationships among them (the relationship of forming a 'chain' and the regularities given in row C2 of the table). By redrawing the diagram while using these relationships, we can say that the structure was *consolidated* and became part of the author's knowledge structure. An indication of this is that when she had to draw the diagram again after a long time without having either the list of squares or the list of regularities at her disposal, she was able to reconstruct it without having to go through the same process again.

Later, the list of third powers was investigated in a similar way. The structure of squares was further *consolidated* (used with greater flexibility in a slightly different context) and used as a basis for the *construction* of the structure of third powers (*recognising* & *building with* the properties of the structure of squares for *constructing* the structure of third powers). The *construction* of the

[7] The terms referring to the theory of abstraction in context will be given in italics.

structure of squares thus becomes part of the higher-order *construction* of the structure of subgroups.

The need for the new structure (i.e. the structure of subgroups) arose from our need to simplify the construction of diagrams for general powers, i.e. discover rules, regularities, etc. The suggestive clusters of the diagram for squares and third powers led naturally to distinguishing some subsets which were investigated for group properties (*recognising* & *building with* sets of numbers which seemed to be mutually connected and with the knowledge of group structure). The result was the *construction* of the table of so far known subgroups. A list of general powers of zero divisors and non-zero divisors was *constructed* (*recognising* & *building-with* the relationship 'being a power of' and the basic distinction of *z*-numbers into zero-divisors and the rest). A relationship between the order of the group and the order of its subgroups noticed (*recognising* the notion of group, subgroup and order of the group) and Lagrange Theorem was *re-constructed* (*building-with* the recognised relationship).

Recognising & *building with* the notion of being a generator of a group and with the notion of order led to the *construction* of a formula 'generator times order of the subgroup equals the order of the group' valid for the additive group.

A very complex process of *recognising* & *building with* previously constructed knowledge (Lagrange Theorem, the notion of group, subgroup, order of group, generator, a list of subgroups found in A_2, the notion of zero divisors, the structure of squares, third powers, fourth powers, etc.) led to the *construction* of a complete table of subgroups of the additive and multiplicative groups in restricted arithmetic.

The *consolidation* of the structure of subgroups was done via reflecting on its inner properties.

4. Conclusions

The model of abstraction proposed by the theory of abstraction in context seems to be able to account for the part of the data of our research on structuring mathematical knowledge presented above. Whether it is a sufficient one or whether it needs to be complemented by other types of analysis, remains to be seen. More work has to be done as to the interpretation of other data from our research in a way presented above.

5. References:

[1] Davydov, V. V. (1990): Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. *Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics*

[2] Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2001): Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1 (3/4), 307 – 368*

[3] Hejný, M. et al. (1989): Teória vyučovania matematiky 2. *SPN, Bratislava*

[4] Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001): Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32, 2, 195 – 222*

[5] Hillel, J. & Dreyfus, T. (2002): Processes of Abstraction in Context. *Abstract in Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). University of Crete, Wiley Publishers*

[6] Schwarz, B., Hershkowitz, R. & Dreyfus, T. (2002): Abstraction in context: Construction and consolidation of knowledge structures. *In Cockburn, A.D. & Nardi, E. (Eds.), Proceedings of PME26, University of East Anglia, Norwich, UK, volume 1, 115–120*

[7] Stehlíková, N. (1998): Investigation into the Characteristics of the Research Methods Employed by Contributors to the Prague Didactics of Mathematics Seminar. *In Schwank, I. (ed.), European Research in Mathematics Education – Proceedings of CERME1, Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, vol. 2, 285 – 297*

[8] Stehlíková, N. (2001): Zúžená aritmetika – most mezi elementární a abstraktní matematikou. *In Burjan, V., Hejný, M. & Jány, Š. (Eds.), Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2001, EXAM, Bratislava, 67–72*

[9] Stehlíková, N. & Jirotková, D. (2002): Building a finite algebraic structure. *In Novotná, J. (Ed.), European Research in Mathematics Education - Proceedings of CERME2, Prague, PedF UK, vol. 1, 101–111*

[10] Swoboda, E. (1997): Miedzy intuicja a definicja, cili próba okreslenia kompetencji uczniów 11–12–letnich w definowaniu figur podobnych. *Dydaktyka Matematiky, V, 19*

[11] Tabach, M., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2001): The struggle towards algebraic generalization and its consolidation. *In M. van den Heuvel (Ed.), Proceedings of the 25th international conference for the psychology of mathematics education, Utrecht, The Netherlands, volume 4, 241-248*

[12] Tsamir, P. & Dreyfus, T. (In press.): Comparing infinite sets – a process of abstraction. The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 113, 1 – 24*

The paper was supported by grant GAČR 406/02/0829.

DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA
PRE ODBORY STAVEBNEJ FAKULTY

Margita Vajsáblová, SvF STU, Bratislava

„Načo nám to bude?“ Typická otázka študentov inžinierskeho štúdia. Aká má byť reakcia pedagóga? Zľahčovať opodstatnenosť tejto otázky nie je ten najvhodnejší prístup. Výber náplne predmetov na inžinierskom štúdiu je nutné prispôsobovať potrebám praxe. Deskriptívna geometria je jeden z dôležitých predmetov štúdia na Stavebnej fakulte tvoriaci základy geometrického pohľadu na objekty priestoru. Úlohou pedagóga je pri výbere učiva v plnej miere zohľadňovať profil absolventov jednotlivých odborov.

Na Stavebnej fakulte STU v Bratislave sa študujú odbory: Pozemné stavby a architektúra (PSA), Vodné hospodárstvo a vodné stavby (VHVS), Inžinierske konštrukcie a dopravné stavby (IKDS), Inžinierstvo životného prostredia (IŽP), Geodézia a kartografia (GaK). Predmet Deskriptívna geometria vedú členovia Katedry matematiky a deskriptívnej geometrie SvF aj pre študentov Fakulty architektúry STU študujúcich odbor Architektúra a urbanizmus (AaU).

V tomto príspevku by som chcela uviesť niektoré vybrané témy, ktoré sú súčasťou predmetu Deskriptívna geometria (ďalej Dg) na SvF a ukážeme ich aplikácie na jednotlivých odboroch.

LINEÁRNA PERSPEKTÍVA A FOTOGRAMETRIA

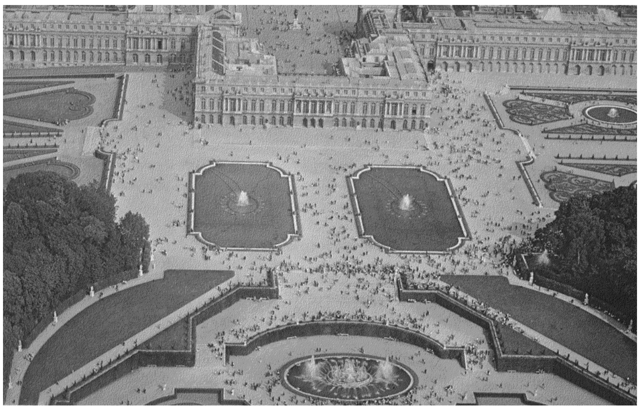
Potreba človeka zobrazovať prvky priestoru tak, ako ich vidí oko človeka (v maliarstve, staviteľstve a pod.), viedlo v geometrii k formalizácii konštrukcií metódami lineárnej perspektívy. Tieto metódy patria do obsahu predmetu Dg na odboroch PSA, AaU a GaK. Uvedomenie si oka ako zobrazovacej sústavy viedlo vo fyzike k vývoju optických prístrojov na korekciu chýb a k vývoju prístrojov napodobňujúcich reálne videnie, teda k fotoprístrojom. Skôr, ako bola vynájdená fotografia, bola snaha o rekonštrukciu prvkov priestoru postupmi spätného zobrazovania z existujúcich obrázkov, teda fotogrametrickými metódami. Geometrické základy fotogrametrie tvoria dôležitú časť učiva deskriptívnej geometrie pre študentov odboru GaK. Vrámci toho sú oboznámení s geometrickým chápaním fotografie a stereofotografie v nadväznosti na lineárnu perspektívu a dvojstredové premietanie. Na týchto geometrických vlastnostiach sa zakladajú rekonštrukcie zvislých, šikmých i stereoskopických snímok, tiež rekonštrukcia prvkov vnútornej orientácie snímky a projektívne vlastnosti snímok. Súčasťou geometrických vedomostí o snímke sú tiež analytické vzťahy medzi predmetovou a snímkovou súradnicovou sústavou.

Zobrazovanie objektov reálneho Euklidovského priestoru v lineárnej perspektíve geometrickými, konštrukčnými metódami a pomocou fotografických prístrojov na snímky, z ktorých sa rekonštruujú tieto objekty, vedú k potrebe zorientovať sa v analógii medzi perspektívnym zobrazovaním v geometrii, fyzike a vo fotogrametrii [11]. Znalosť a chápanie týchto pojmov je pre pedagóga veľmi dôležité, aby sa sprostredkovanie týchto statí študentom nestalo iba teóriou odtrhnutou od praxe.

V tabuľke je znázornené porovnanie prvkov lineárnej perspektívy s prvkami optiky fotoaparátu a prvkami snímky:

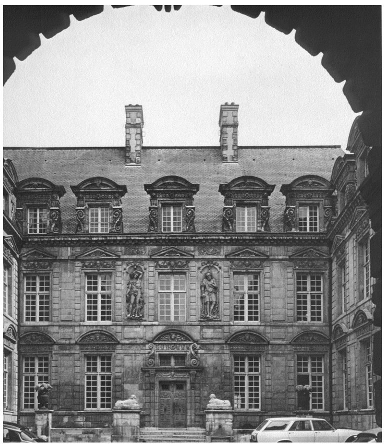
Deskriptívna geometria	Fyzika	Fotogrametria
S – stred premietania	Uzlové body objektívu, príp. stredy vstup. a výstup. pupily	Projekčné centrum – otvor dierkovej komory
ρ - priemetňa	Film, príp. fotografická doska	Rovina snímky
o – os zorného kužeľa	Optická os - spojnica stredov guľových plôch šošovky	optická os – kolmica z S na ρ
H- hlavný bod	Priesečníky osi s hlavnými rovinami	Priesečník osi s rovinou snímky
d – dištancia	f – obrazová ohnisk. vzdialenosť fotoaparátu	f – ohnisková vzdial. fotoaparátu
h – horizont	- - -	úbežnica predmetovej roviny
${}^{S}U$ – úbežník spádových priamok vodorov. Rovín	- - -	^{1}U - Hlavný úbežník
U–úbežník zvislého smeru	- - -	^{1}N – snímkový nadir
Zorný uhol	35°-60°, širokouhlé až 140°, 2.tg(ω/2) = D/f =1/clon. číslo	- - -
Priemer zornej kružnice	D – priemer vstupnej pupily	- - -

Na obr. 1a-d sú ukážky rôznych typov snímok, tiež stereoskopické snímky, ktorých spracovaním sa zaoberá stereofotogrametria [12]. V súčasnosti tvorí prevratnú zmenu vo fotografovaní digitálna fotografia a stereofotografia. Ich použitie sa rozšírilo aj do oblasti technických aplikácií. V súčasnosti prebieha na Slovensku digitálne mapovanie celého územia, ktorého garantom je Úrad geodézie, kartografie a katastra SR. Spracovávanie dát získaných pomocou digitálnych stereoskopických leteckých snímok a výroba máp je uskutočňovaná aj na stereografickej stanici Image station Intergraph.



Obr. 1a
Šikmá – letecká *(vtáčia perspektíva).*

Obr. 1b
Šikmá – pozemná *(žabia perspektíva).*



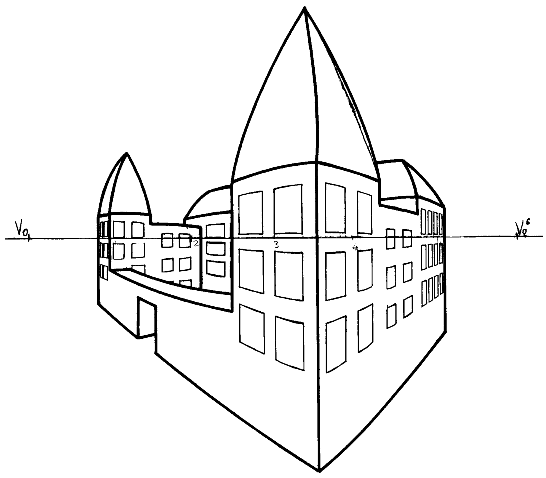
Obr. 1c
Vertikálna *(zvislá perspektíva).*

Obr. 1d
Stereoskopické snímky

CYLINDRICKÁ A KÓNICKÁ PERSPEKTÍVA

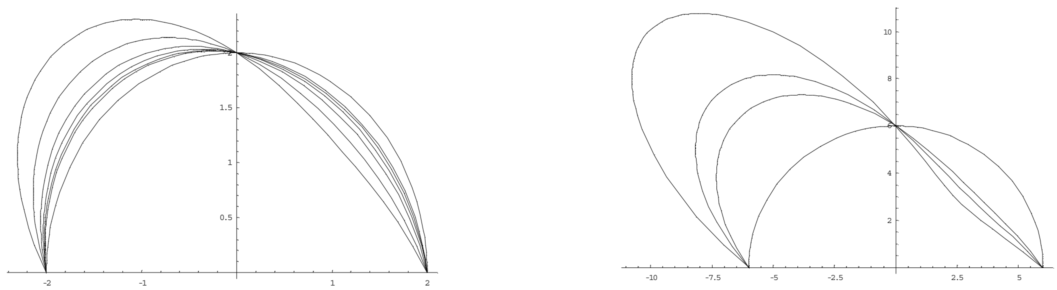
Syntetické a analytické metódy zobrazovania objektov v cylindrickej a kónickej perspektíve (stručne ich možno charakterizovať ako stredové premietanie na valec a kužeľ) tvoria súčasť obsahu predmetu Deskriptívna geometria pre študentov odboru GaK na Stavebnej fakulte. Obr. 2 ukazuje prácu študenta na tému cylindrická perspektíva.

Cylindrická perspektíva v podobe tzv. panorámy patrí k netradičným, avšak názorným spôsobom zobrazovania objektov a javov reality. V panoramatických kinách sa premieta na široké plátno zaoblené do tvaru rotačnej valcovej plochy. Celé devätnáste storočie bolo v znamení panoramatických obrazov zachycujúcich spravidla významné historické udalosti, avšak len máloktorý z nich sa dochoval v takej neporušenej podobe ako panoramatický obraz Bitka pri Lipanoch, ktorého autorom je Luděk Marold (1865-1898). Matematická kartografia používa nástroje cylindrickej a kónickej perspektívy v kartografických zobrazeniach valcových, kužeľových (kónických) a mnohokužeľových (polykónických), viď obr. 5 a 7.



Obr. 2 *Cylindrická perspektíva komplexu stavieb (práca študenta)*

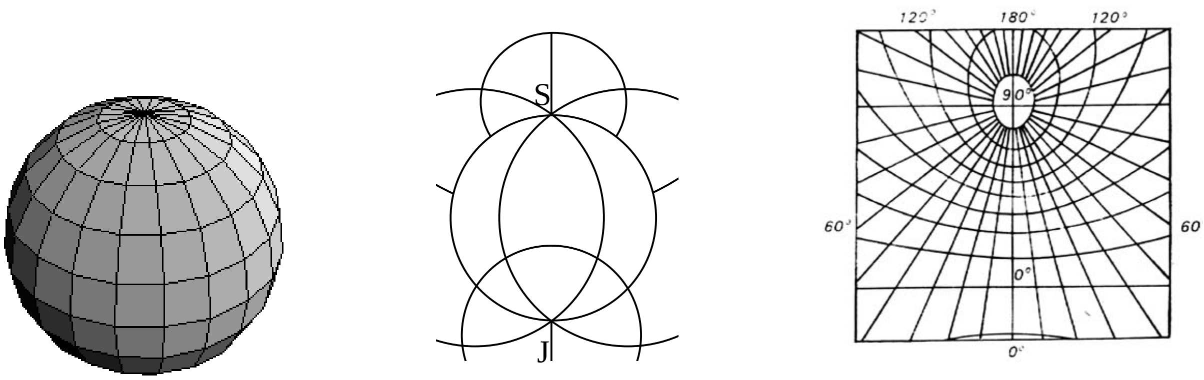
Ako je ukázané v [13], znalosť analytických vzťahov a zobrazovacích rovníc je nevyhnutná pri modelovaní pomocou počítačov. Zaujímavou časťou tejto kapitoly je obraz priamky v cylindrickej a kónickej perspektíve. Na obr. 3 je rozvinutie obrazov priamok (kužeľosečiek) v kónickej perspektíve vykreslené použitím výpočtového systému Mathematica for Windows.



Obr. 3 *Rozvinutie kužeľosečiek kužeľovej plochy s* $\omega = 30°$, *teda* $\alpha = \pi$

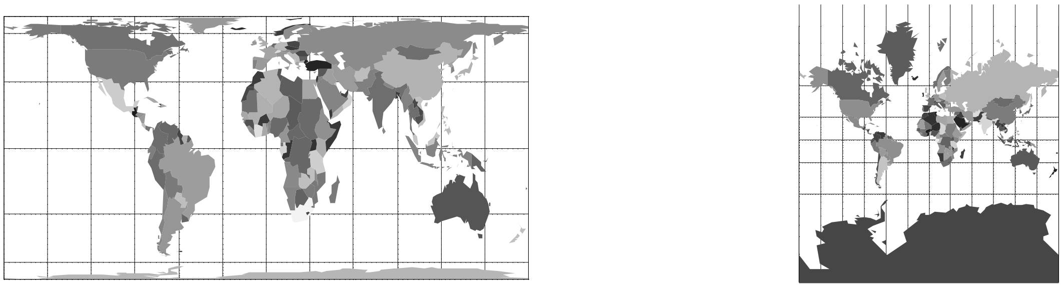
GEOMETRICKÉ ZÁKLADY KARTOGRAFIE

Z historických prameňov vyplýva, že mnohé geometrické objavy podmienila kartografická prax, ale na druhej strane súčasná kartografia stojí na geometrických základoch. V tejto časti článku by som sa chcela ukázať aspoň niektoré kartografické zobrazenia, ktoré sú veľmi dôležitou kapitolou vo vyučovaní deskriptívnej geometrie na Stavebnej fakulte na odbore Geodézia a kartografia [10]. Pri konštrukcii kartografických zobrazení v predmete Dg je používaný syntetický prístup, avšak niektoré z obr. 4 až 7 ukazujú ich zobrazenie vo výpočtovom systéme Mathematica for Windows.

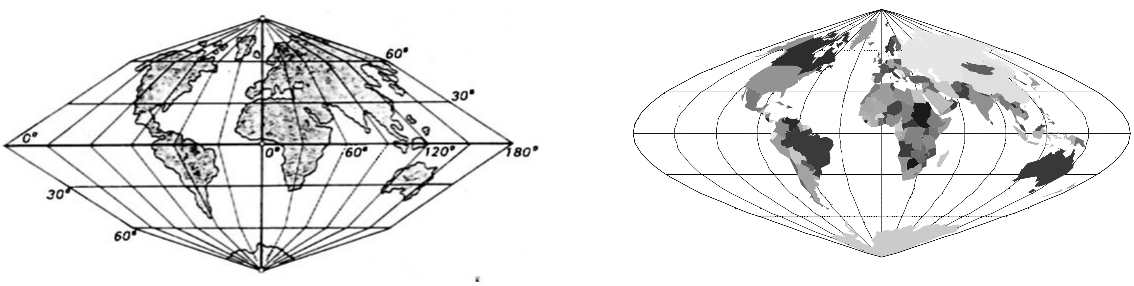


Obr. 4 *Azimutálne projekcie:*
a) ortografická *b) stereografická* *c) gnómonická*

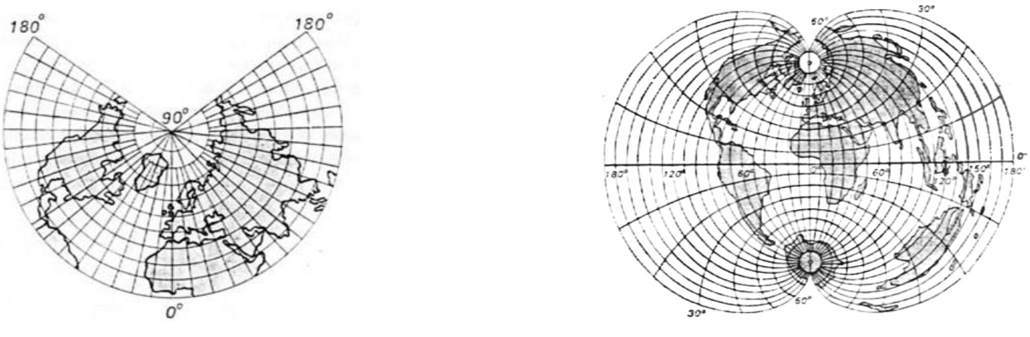
Na obr. 4 sú priemety kartografickej siete guľovej plochy do roviny, na obr. 5a je obraz kartografickej siete v rovníkovej valcovej projekcii a na obr. 5b v pólovom valcovom zobrazení. Na obr. 6 sú ukážky nepravých zobrazení. Ukážky kónického a polykónického zobrazenia sú na obr. 7.



Obr. 5 *Cylindrické kartografické zobrazenia:*
a) Lambertovo izocylindrické *b) Mercator*



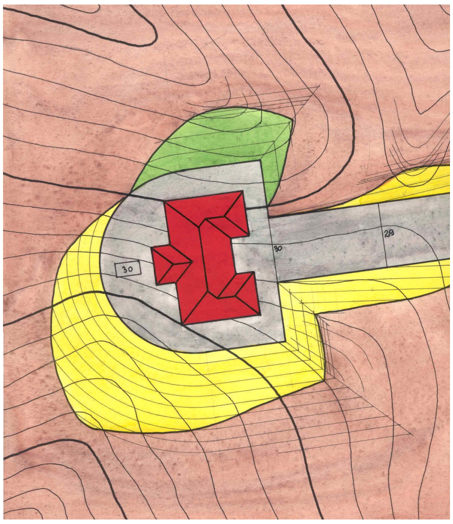
Obr. 6 *Nepravé valcové zobrazenia:*
a) ekvidištančné priamkové *b) Mercator-Sansonovo sinusoidálne*

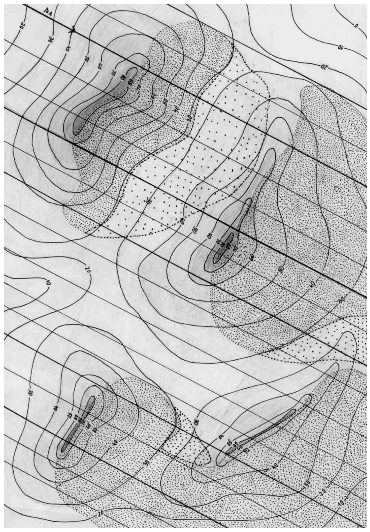


Obr. 7 *a) Ptolemaiovo kónické zobrazenie* *b) Hasslerovo polykónické zobrazenie*

TOPOGRAFICKÉ PLOCHY

Aplikácia teórie topografických plôch je súčasťou učiva hlavne na odboroch GaK, VHVS, IKDS a IŽP. Na obr. 8a je ukážka práce študenta na tému zasadenia cestného telesa do terénu použitím plôch konštantného spádu spolu s riešením strechy v kótovanom premietaní a na obr. 8b rovnobežné osvetlenie topografickej plochy riešené pomocou profilov v svetelných rovinách.

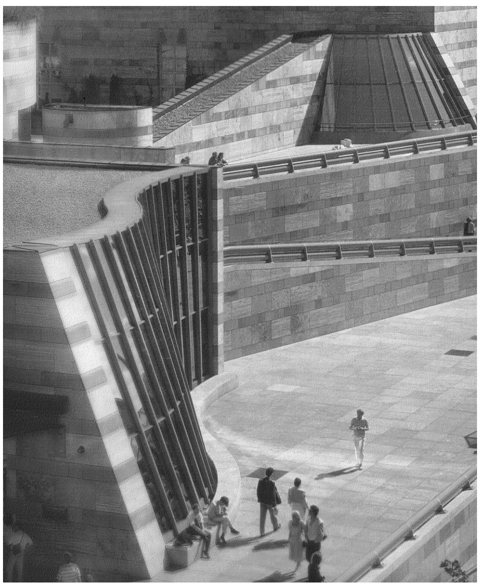




Obr. 8 *a) Zasadenie cestného telesa do terénu* *b) Rovnobežné osvetlenie topografickej plochy.*

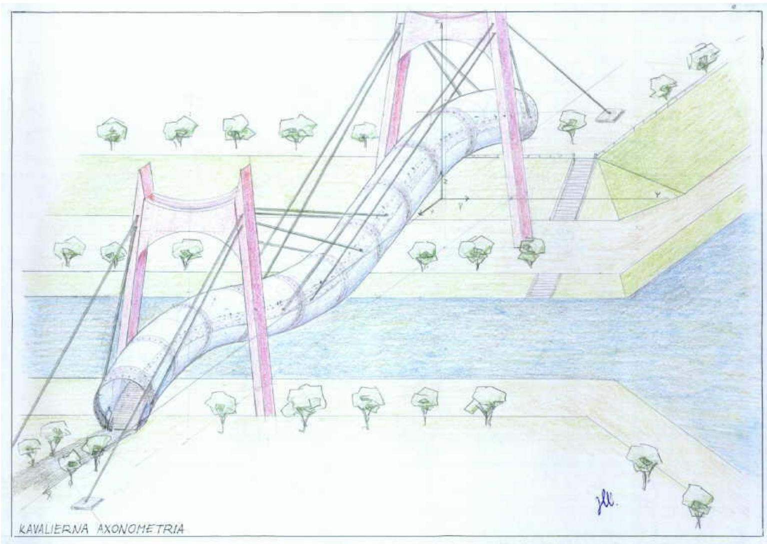
PLOCHY TECHNICKEJ PRAXE

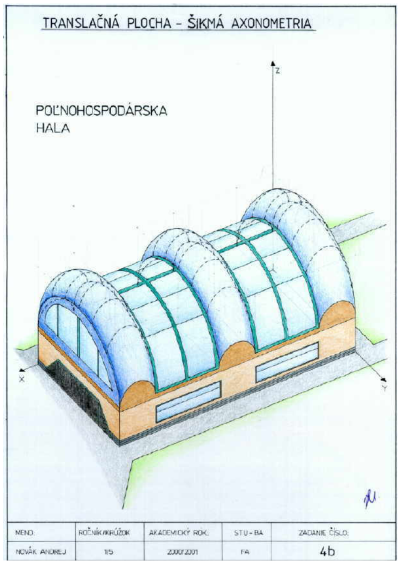
Stavebný inžinier alebo architekt by mal v procese navrhovania a realizácie stavby aplikovať najprogresívnejšie geometrické znalosti, a to z dôvodu ekonomického a estetického. Preto je nevyhnutné, aby sa študenti odborov PSA a AaU oboznámili v predmete Dg nielen so zobrazovacími metódami, ale aj s geometrickými vlastnosťami plôch stavebnej technickej praxe. Rozvíjajúca sa teória geometrie ponúkala postupne praxi nové možnosti a naopak požiadavky praxe, nové stavebné technológie a možnosti použitia nových materiálov pozitívne ovplyvňovali vývoj geometrie. Zo širokej škály plôch sú do učiva Deskriptívnej geometrie zahrnuté okrem spomínaných topografických plôch aj rotačné, skrutkové, translačné, klinové, kanálové a rôzne typy priamkových plôch. Ukážky ich zaradenia do výučby sú podrobnejšie rozpracované v [1].



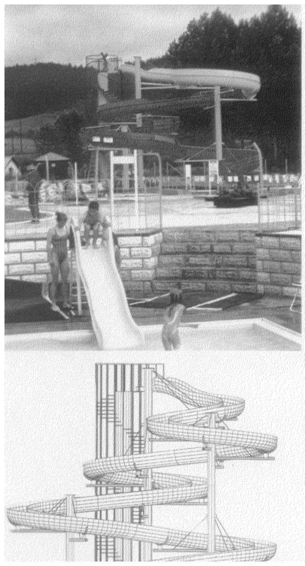
Obr. 9 *a) Exteriér State Gallery, Stuttgard* *b) The Morton Meyerson symphony center, Dallas.*

Na obr. 9 sú aplikácie priamkových plôch v architektúre, vľavo je nerozvinuteľná priamková plocha – cylindroid v exteriéri State Gallery v Stuttgarde, architektmi sú J.Stirling a M.Wilford, vpravo je The Morton Meyerson symphony center v Dallase, kde je zaujímavým spôsobom použitá rozvinuteľná priamková plocha kužeľová.
Ukážky prác študentov na obr. 10 znázorňujú: vľavo aplikáciu kanálovej plochy a vpravo poľnohospodársku budovu, ktorej prestrešenie je riešené použitím translačnej plochy, ktoré sa veľmi často používajú pre ich jednoduchosť a pritom nekonečnú variabilitu. V aplikáciách k najznámejším plochám patria skrutkové plochy, používané na točitých schodištiach (obr. 11a,), tobogánoch (obr. 11b,) atď.





Obr. 10 Práce študentov: *a) Kanálová plocha* *b) Translačná plocha*



Obr. 11 *a) Točité schody vo vstupnej hale Louvru, arch. I. M. Pe,* *b) Tobogán v Bešeňovej*

ZÁVER

Cieľom tohto príspevku bolo ukázať aspoň časť možností použitia geometrických prostriedkov v praxi s ohľadom na prípravu budúcich stavebných inžinierov. V danej kvantite hodín je dôležité aj efektívne využitie dostupných hardwarových a softwarových (CAD systémy, výpočtové programy, Power Point a i.) prostriedkov vo výučbe. Výber tém je určovaný aj záujmom pedagóga o daný inžiniersky odbor. Každá ukážka aplikácie geometrie pomáha otvárať študentovi „geometrické“ oči, teda umožňuje mu vidieť geometrickú podstatu vecí či už v odbore, ktorý študuje alebo dokonca pozorovanie sveta takými očami obohatí aj celý jeho život.

Literatúra:

[1] Bašová, H., Mészárosová, K.: Plochy stavebnej technickej praxe, priamkové, translačné, klinové a kanálové. *Zborník VII. Vedeckej konferencie Stavebnej fakulty v Košiciach, Košice, 2002, pp. 85-90*

[2] Čeněk – Medek: Kurz deskriptívnej geometrie pre technikov. *Štátne nakladateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1953*

[3] Hlavička A., Lehotský D.: Optika pre pedagogické inštitúty. *Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1963*

[4] Hojovec, V. a kol.: Kartografie. *GKP, Praha, 1987*

[5] Johnstone, T.: Magic 3D. *Stanley Paul Random House, London, 1995*

[6] Kadeřávek, F.: Geometrie a umění v dobách minulých. *Praha, 1935*

[7] Pál, I.: Deskriptívna geometria videná priestorovo. *Müszaki Könyvkiadó, Budapešť, 1963*

[8] Medek,V. – Zámožík, J.: Konštruktívna geometria pre technikov. *Alfa, Bratislava, 1978*

[9] Vajsáblová, M.: Riešenie úloh na GaK s podporou výpočtového systému Mathematica for Windows. *Zborník konferencie VSTEZ, Brno, 1996, pp. 206-210*

[10] Vajsáblová, M.: Kartografické zobrazenia z pohľadu konštruktívnej geometrie. *Zborník seminára O počítačovej geometrii SCG'99, Kočovce, 1999, pp. 163-174*

[11] Vajsáblová, M.: Lineárna perspektíva a fotografia. *Zborník seminára O počítačovej geometrii SCG'2000, Kočovce, 2000, pp.152-158*

[12] Vajsáblová, M.: Stereoskopické videnie. *Zborník seminára O počítačovej geometrii SCG'2000, Kočovce, 2000, pp.146-151*

[13] Vajsáblová, M.: Cylindrická a kónická perspektíva. *Zborník VII. Vedeckej konferencie Stavebnej fakulty v Košiciach, Košice, 2002, pp. 85-90*

[14] Vrba, M., Kajuch, L.: Stereoskopia a stereoskopická fotografia. *Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1963*

[15] Thomas, W., Sherlock: MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer. 1993 Wolfram Research, Inc.

[16] Guide to Standard Mathematica Packages, Version 2.1 Wolfram Research

HRACIE KARTY A CELÉ ČÍSLA

Beáta Vavrinčíková, Osemročné gymnázium, Alejová 1, Košice

Rada by som sa s vami podelila o svoje skúsenosti s využitím hracích kariet pri precvičovaní učiva o celých číslach. Tento celok sa u nás preberá v príme ku koncu školského roka a obsahuje zavedenie, porovnávanie, sčitovanie a odčitovanie celých čísel. K použitiu kariet ma inšpirovala úloha v zbierke pre 5.ročník. Spočiatku som vyrábala kartičky s číslami, keď sa však postrácali, prešla som na žolíkové karty. Každá dvojica žiakov si pripravila sadu 21 kariet – červené A, 2, 3,…,10, čierne A, 2, 3,…,10 a žolíka. Keďže som pri zavádzaní celých čísel spomínala čínskych pisárov, ktorí červeným a čiernym atramentom rozlišovali majetok a dlh v účtovnej knihe, rýchlo sme sa dohodli, že červené karty budú predstavovať kladné čísla (eso znamená 1), čierne karty záporné čísla a žolík prevezme úlohu nuly. Takto pripravené karty boli súčasťou pomôcok na každú vyučovaciu hodinu.

1. Porovnávanie celých čísel

<u>Pravidlá:</u> Zamiešané karty sa rozdajú (1 zvýši), hráči si ich uložia na kôpku. Hrá sa klasická "vojna" – hráči otočia vrchné karty a porovnajú ich. Väčšie číslo vyhráva – hráč získava súperovu kartu.
<u>Skúsenosti</u>: Žiakov nadchla známa hra, hrali s veľkým nasadením. Po čase si však niektorí uvedomili, že hra nie je spravodlivá – hráč s červenou (teda kladnou) desiatkou nemôže prehrať, o čom sa v triede rozvinula diskusia.
<u>Námet</u>: Vyskúšať hru s dvoma sadami kariet a 3-4 hráčmi, čím sa stane spravodlivejšou a prípadné "vojny" pridajú prvok napätia.

2. Navzájom opačné čísla

<u>Pravidlá:</u> Všetky karty sa rozdajú, hráči si ich uložia na ruky. Hrá sa známy "Čierny Peter" – striedavo ťahajú kartu jeden od druhého. Kto má dvojicu navzájom opačných čísel, vyloží ju na stôl a získava bod. Žolík (čiže číslo 0) predstavuje Čierneho Petra, pretože je to číslo opačné k sebe samému.
<u>Skúsenosti</u>: Hra sa deťom páčila, ešte lepší bol variant s 3 hráčmi.
<u>Námet</u>: Môže hrať aj viac hráčov s dvoma sadami s jednou nulou.

3. Znázornenie na číselnej osi

<u>Pravidlá:</u> Zamiešané karty ostávajú na jednej kôpke. Prázdna lavica pred žiakmi predstavuje číselnú os, uprostred lavice je nula. Žiaci postupne otáčajú kartu z kôpky a ukladajú na lavicu tam, kam podľa ich odhadu na číselnej osi patrí. Cieľom je uložiť všetky karty správne tak, aby sa na lavicu zmestili bez dodatočného presúvania.
<u>Skúsenosti:</u> Umiestňovanie čísel na číselnej osi nerobilo problémy, ukázalo sa, že výhodu mali žiaci s menšími kartami.
<u>Námet:</u> Pripevňovanie kariet na magnetickú tabuľu alebo štipcami na prádlo na natiahnutú šnúru.

4. Zavedenie sčitovania celých čísel

<u>Zdroj:</u> prednáška Mgr. Zuzany Pytlovej – Celé čísla na ZŠ – EXOD Pytagoras, Detvianska Huta, júl 1994
<u>Realizácia:</u> Karty predstavujú počty červených a čiernych vojakov, ktorí sa stretávajú vo vzájomných súbojoch. Ak sa stretnú nepriateľskí – rôznofarební vojaci, likvidujú sa v pomere 1:1, napr.: 4 + **7** = **3**, **5** + 9 = 4.
Rovnakofarební vojaci sa nebijú, odchádzajú z bojiska spolu: **7 + 5 = 12**, 4 + 3 = 7

Pomocou kariet sa tvoria príklady, ktoré sa zapisujú na tabuľu farebnými kriedami. Potom sa všetky príklady zapíšu pomocou kladných a záporných čísel: 4 + (–7) = –3, (–5) + 9 = 4, (–7) + (–5) = –12, 4 + 3 = 7.
Karty sa opäť zamiešajú a tvoria sa pomocou nich príklady, ktoré sa zapisujú už len pomocou kladných a záporných čísel.

5. **Sčitovanie a porovnávanie celých čísel**
Zdroj: Repáš V. a kol.: Matematika pre 5. ročník ZŠ, 4. časť, str.64, experimentálny učebný text, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava 1995
Pravidlá: Karty sa rozdajú (1 ostane). Hráč otočí dve karty zo svojej kôpky, zahlási ich súčet, to isté urobí spoluhráč. Výsledky sa porovnajú, vyhráva hráč s vyšším súčtom (získava bod alebo súperove karty). Ak niekto zle spočíta čísla, vyhráva jeho spoluhráč. Ak vzniknú rovnaké výsledky, hra sa opakuje, až kým sa nerozhodne o víťazovi.
Skúsenosti: Hra veľmi dobre poslúžila na precvičenie sčitovania a porovnávania, opakovali sme ju viackrát. Ani červená desiatka nezaručovala víťazstvo a prípadné rovnaké súčty pridali hre na dramatičnosti. Takisto kontrola súperom sa ukázala ako dobrá spätná väzba.
Námet: Vyskúšať pre odčitovanie celých čísel.

6. **Sčitovanie celých čísel**
Zdroj: Česenek J.a kol.: Zbierka úloh z matematiky pre 5. ročník ZŠ, str. 79, SPN Bratislava 1990
Pravidlá: Pred začatím hry sa hráči dohodnú, kto si bude zapisovať kladné, kto záporné výsledky, nulové sa nezapisujú. Z kariet sa vyradí nula a buď sa nechajú na jednej kôpke, alebo sa rozdajú na dve. Každý hráč si vezme po jednej karte, obe karty sa sčítajú a výsledok si zapíše príslušný hráč. Po vyčerpaní všetkých kariet sa výsledky u jednotlivých hráčov spočítajú – vyhrá hráč s vyšším súčtom v absolútnej hodnote.
Skúsenosti: Väčšina dvojíc skončila s remízou, z čoho vyplynulo isté rozčarovanie. V diskusii však niekoľko najlepších žiakov prišlo na to, ža hra musí skončiť remízou a tak vlastne usvedčí tých, čo urobili chybu vo výpočtoch.

7. **Tvorba príkladov**
Pravidlá: Z kariet sa vyradí nula, ostatné sa rozdajú a hráči si ich uložia na ruky. Učiteľ zahlási číslo – výsledok príkladu. Úlohou žiaka je z kariet, ktoré drží v ruke, vybrať dve tak, aby ich súčet alebo rozdiel dával požadovaný výsledok. Ak sa mu to podarí, získava bod, ak urobí chybu vo výpočte, získava bod protihráč. Ak sa príklad nedá zostaviť, nezískava bod nikto.To isté robí zároveň aj protihráč. Učiteľ potom oznámi ďalšie číslo atď. Použité karty môžu ostávať v hre alebo sa vyraďujú.
Skúsenosti: Hra prebehla veľmi dobre. Ak sa karty do hry vracajú, môže sa hrať ľubovoľne dlho, v opačnom prípade je po čase nemožné zostaviť príklad s daným výsledkom.
Námet: Vyskúšali sme aj takýto variant: Na tabuli bolo napísaných 7 čísel – výsledkov príkladov. Pomocou čo najväčšieho počtu kariet mala dvojica spoločne vytvoriť 3 príklady na sčitovanie s danými výsledkami. Najlepšie sa to podarilo dvojiciam, ktoré použili 19 kariet.

8. **Sčitovacia reťaz**
Pravidlá: Zo sady sa vyradí nula, ostatné karty sa rozdajú a uložia na kôpku. Hráč postupne otáča všetky karty zo svojej kôpky a nahlas ich sčituje, spoluhráč ho kontroluje. Potom to isté urobí spoluhráč. Kontrola správnosti – ich konečné výsledky musia byť navzájom opačné čísla.
Námet: Môžu hrať aj traja žiaci s celou sadou kariet, vtedy súčet ich výsledkov musí byť nula.

UKÁŽKY ŠTATISTICKÝCH ANALÝZ Z ROZSIAHLYCH VÝSKUMOV ÚROVNE VZDELÁVANIA

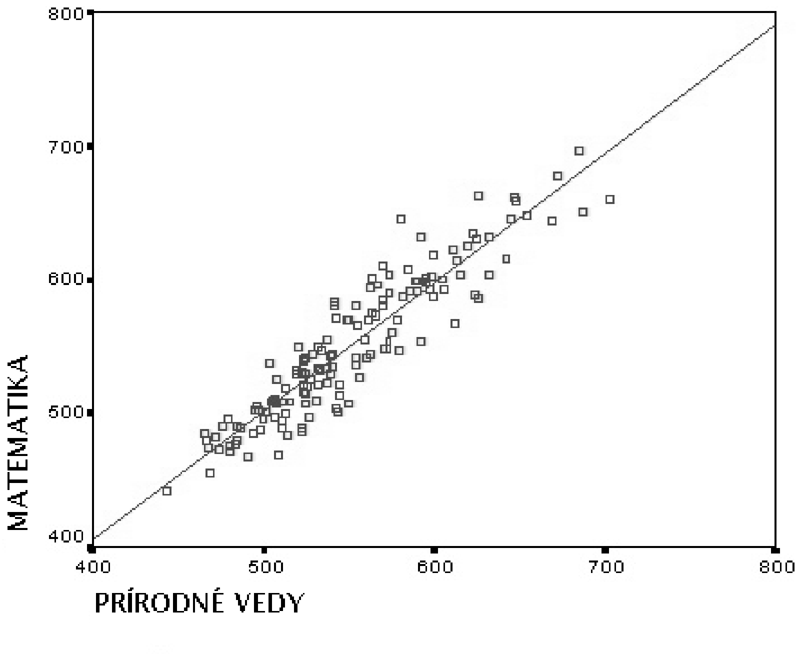
Oľga Zelmanová, ŠPÚ Bratislava

V nasledujúcich ukážkach sú použité výňatky analýz z národnej správy TIMSS 99 (hlavne, čo sa týka matematiky) a z Monitoru maturantov 2001.

Čo je TIMSS 1999?

TIMSS-R, Tretia opakovaná medzinárodná štúdia z matematiky a prírodných vied realizovaná v roku 1999, meria progres a trendy vzdelávania žiakov ôsmich ročníkoch v matematike a v prírodných vedách v štátoch celého sveta. Medzinárodná organizácia pre hodnotenie výsledkov vzdelávania – IEA organizovala (v niektorých štátoch, ku ktorým patrí aj Slovenská republika aj sponzorovala) tento rozsiahly výskum, ktorého sa zúčastnilo viac ako 180 000 štrnásťročných žiakov z viac ako 6000 škôl v 38 krajinách a v 34 jazykoch. V každej krajine žiaci písali obsahovo rovnakú sadu testov a dotazníkov.
TIMSS-R projekt vychádzal z úspechu pôvodného TIMSS projektu realizovaného v roku 1995. V každej krajine sa hlavného merania zúčastnilo približne 3500 žiakov na cca 150 školách. (Na Slovensku to bolo 3497 žiakov zo 145 škôl.)
Ako sa dosiahla medzinárodná porovnateľnosť výsledkov?
Porovnateľnosť testovaných výsledkov sa dosiahla tak, že jednotlivé krajiny museli dodržať prísne jednotné procedúry. Tie sa týkali kontroly prekladu testových úloh, priebehu hlavného testovania, následného zberu dát a bodovania otvorených úloh. Na časti škôl bola monitorová rigoróznosť testovania nezávislými pozorovateľmi, ktorý zaslali súhrnnú správu do Medzinárodného výskumného centra na Bostonskej univerzite. Pred akýmikoľvek analýzami boli údaje z každej krajiny podrobené rozsiahlemu testovaniu logickej správnosti a konzistencie. Na Slovensku vďaka podpore Ministerstva školstva štúdiu realizoval Štátny pedagogický ústav, pričom medzinárodnú účasť na štúdii sponzorovala Svetová Banka cez IEA.
Národné testovanie a vyhodnocovanie bolo finančne podporované účelovo viazanými prostriedkami Ministerstva školstva Slovenskej republiky.

Závislosť výsledkov škôl z matematiky a prírodných vied

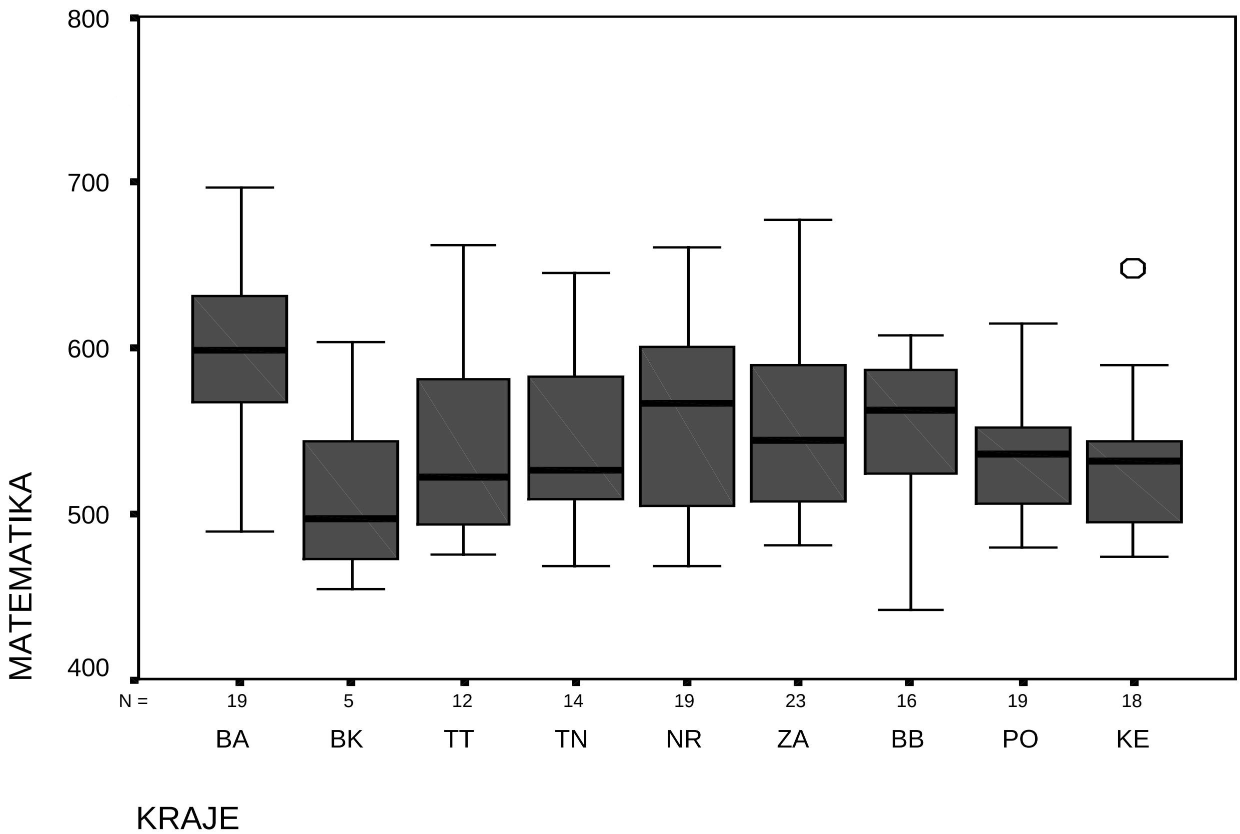


Uvedený graf a následná regresná analýza závislosti výsledkov školy z matematiky a z prírodných vied potvrdzuje, že z výsledku školy v matematike môžeme dobre predvídať výsledok prírodných vied a naopak, pretože jedna premenná vysvetľuje 85,9 % variability druhej premennej (0,859 je kvadrát koeficientu korelácie). Inak povedané, keď má niektorá škola dobrý výsledok z jedného, bude mať aj dobrý výsledok z druhého, čo analogicky platí aj pre slabšie výsledky.
Jednotlivé štvorčeky počtom 145 – čo je celkový počet škôl na grafe – reprezentujú priemerné skóre školy z prírodných vied (os *x*) a súčasne z matematiky (os *y*). Napríklad štvorček, ktorý je najbližšie k ľavému dolnému rohu grafu reprezentuje školu, ktorá dosiahla najslabšie výsledky a to cca skóre 450 z prírodných vied a cca 440 z matematiky.
Preložená priamka je regresnou priamkou. Pri skúmaní závislosti sme neupriamovali pozornosť na identitu jednotlivej školy, ale na zaujímavý jav závislosti výsledkov.

Týmto sa potvrdzuje domnienka mnohých pedagógov, že výsledky z matematiky a prírodovedných predmetov majú silnú vzájomnú previazanosť.

Porovnanie výsledkov škôl podľa krajov

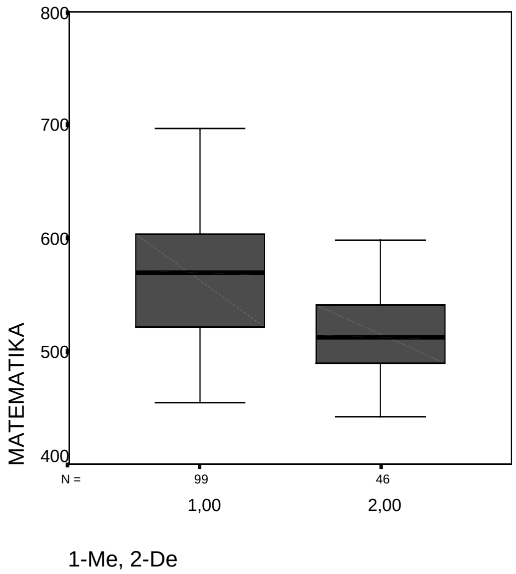
Skratky krajov: BA – Bratislava, BK – Bratislavský, TT – Trnavský, TN – Trenčiansky,
NR – Nitriansky, ZA – Žilinský, BB – Banskobystrický, PO – Prešovský, KE – Košický kraj.
Uvádzané výsledky sú podľa jednotlivých krajov. N pod grafom vyjadruje počet škôl v danom kraji. Zvlášť je vyhodnotená Bratislava a Bratislavský kraj.

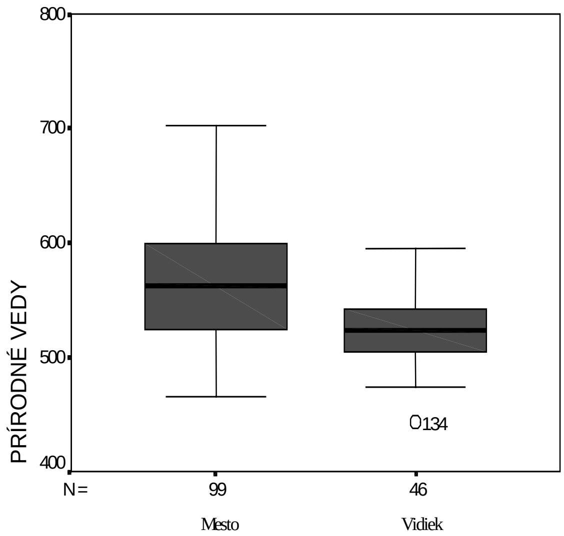


Skúmaním signifikantnosti rozdielov (metódou viacnásobných komparácií) medzi jednotlivými krajmi dostávame, že v matematike je signifikantný rozdiel medzi Bratislavou (BA) a všetkými ostatnými krajmi, pričom medzi týmito ostatnými krajmi navzájom nie sú signifikantné rozdiely.

Rozdiely medzi mestskými a vidieckymi školami

MATEMATIKA a PRÍRODNÉ VEDY

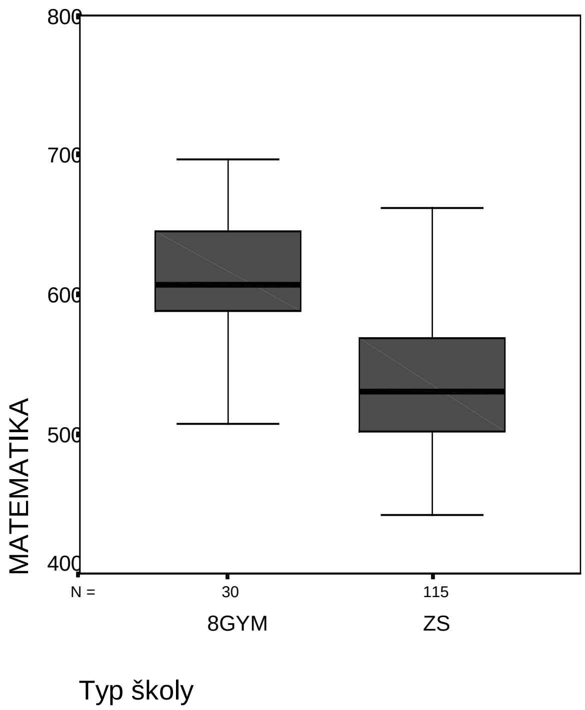


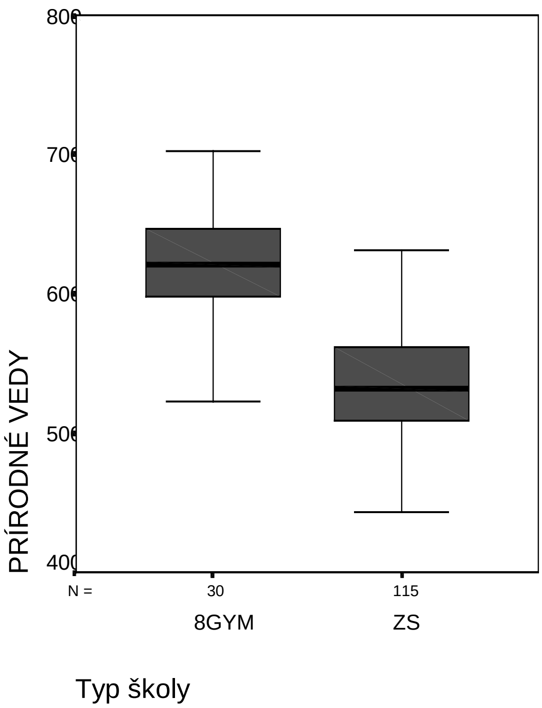


Mestských škôl bolo 99 a vidieckych 46. Ako ukazujú aj grafy a testovaním hypotéz o rovnosti distribúcie vychádza v matematike aj v prírodných vedách signifikantný rozdiel medzi výsledkami mestských a vidieckych škôl. Tento výrazný rozdiel sa dá čiastočne vysvetliť aj tým, že medzi mestskými školami bolo viac osemročných gymnázií, kde boli výberoví žiaci.

Rozdiely medzi osemročnými gymnáziami a základnými školami

MATEMATIKA a PRÍRODNÉ VEDY





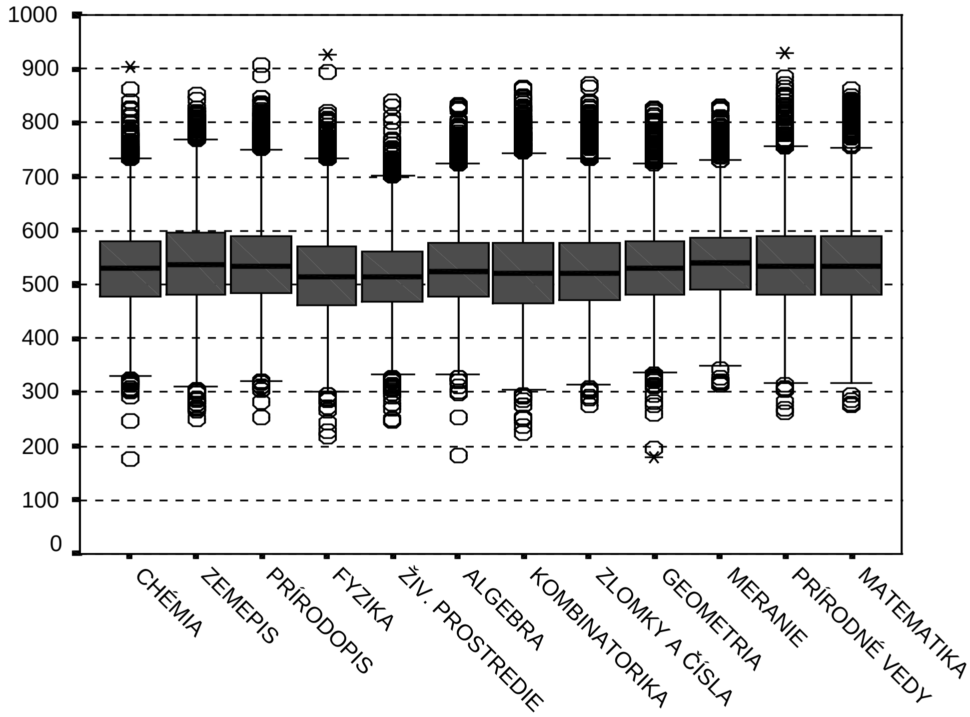
Osemročných gymnázií bolo testovaných 30 a základných škôl 115. Ako ukazujú aj grafy a testovaním hypotéz o rovnosti distribúcie vychádza v matematike aj v prírodných vedách signifikantný rozdiel medzi výsledkami osemročných gymnázií a základných škôl. Vysvetliť sa to dá tým, že v máji 1999, kedy prebehlo testovanie v osemročných gymnáziách v kvarte boli výberoví žiaci.

Rozdiely podľa zriaďovateľa – štátne a cirkevné školy.

Štátnych škôl sa testovania zúčastnila väčšina, t.j. 132 škôl, cirkevných sa zúčastnilo 11 škôl. Súkromné školy sa zúčastnili len dve, čo nie je štatisticky významná vzorka, preto výsledky neporovnávame. Medzi výsledkami štátnych a cirkevných škôl **nie je** štatisticky významný rozdiel ani v matematike ani v prírodných vedách.

Porovnanie oblastí učiva

Na porovnanie a zistenie súvislostí, prípadne závislostí jednotlivých tematických oblastí nám znovu výborne poslúžia krabičkové grafy – boxploty.
Použijeme ich na vizuálne porovnanie mediánov a percentilov z jednotlivých oblastí. Medián je stred, ktorý delí žiakov na dve polovice – 50 % lepších a 50 % horších. Hodnoty v krabičke sú od 25 po 75 percentil. Bodky predstavujú extrémne hodnoty.



Medzi jednotlivými oblasťami nie je signifikantný rozdiel.

Výsledky žiakov

Súvislosti, korelácie a analýzy výsledkov 3497 ôsmakov

Korelácie výsledkov medzi jednotlivými tematickými oblasťami z matematiky

MATEMATIKA Pearsonova korelácia	ALGEBRA	PRAVDEPO DOBNOSŤ	ZLOMKY	GEOM	MERANIE
ALGEBRA	1,000	0,82-68%	0,86-74%	0,79-62%	0,83-69%
PRAVDEPODOBNOSŤ	0,82-68%	1,00	0,85-72%	0,77-59%	0,81-66%
ZLOMKY	0,86-74%	0,85-72%	1,000	0,82-68%	0,87-75%
GEOMETRIA	0,79-62%	0,77-59%	0,82-68%	1,000	0,77-59%
MERANIE	0,83-69%	0,81-66%	0,87-75%	0,77-59%	1,000
Všetky korelácie sú signifikantné na úrovni 0.001					

Ukazuje sa, že medzi jednotlivými tematickými oblasťami sú silné väzby. Najsilnejšie previazanie existuje medzi tematickým celkom Zlomky a pojem čísla a tematickým celkom Meranie a spracovanie údajov cca 75 % koeficient determinácie, ďalej medzi celkom Zlomky a Algebra 74 %. Relatívne najmenšiu previazanosť s ostatnými tematickými celkami má Geometria. V praxi to znamená, že žiak, ktorý je dobrý v tematickom celku Algebra určite dobre zvláda aj oblasť Zlomky a pojem čísla, premeny jednotiek a pravdepodobnosť . Analogicky, vo všeobecnosti platí, že ak žiak nezvláda napríklad prácu so zlomkami, bude slabý aj v ostatných oblastiach. Čiže vedomosti v jednotlivých celkoch sú tesne previazané.

Aké sú rozdiely medzi dievčatami a chlapcami?

Nasledujúca tabuľka nám udáva, aké sú priemery v jednotlivých oblastiach a zároveň vizualizuje rozdielnosť dosiahnutých výsledkov medzi chlapcami a dievčatami

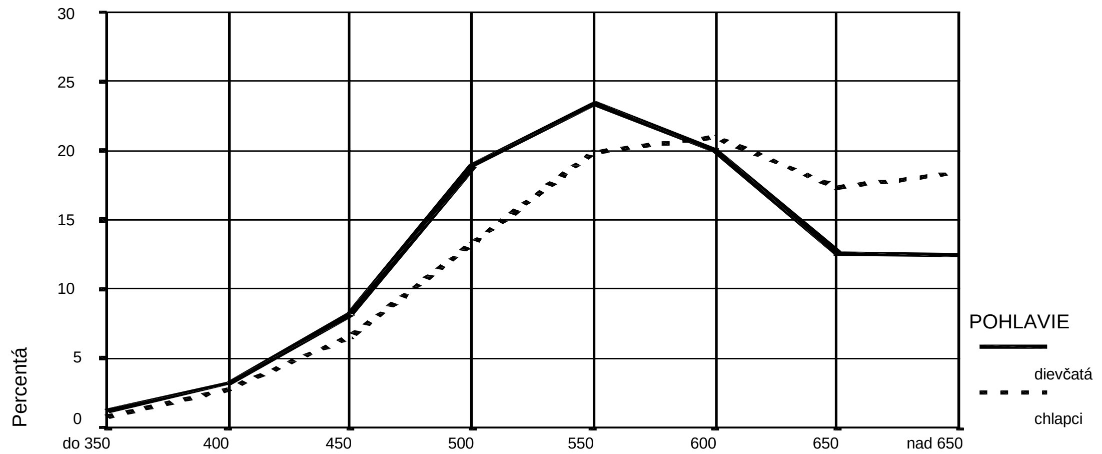
	POHLAVIE	N	Priemer	Štandardná odchýlka	Významnosť rozdielu priemerov
PRÍRODNÉ VEDY	**dievčatá**	1802	526,1230	78,7974	
	chlapci	1695	546,8858	88,1597	+++
MATEMATIKA	**dievčatá**	1802	533,7039	84,2601	
	chlapci	1695	540,6951	87,8172	+++
CHÉMIA	**dievčatá**	1802	516,5094	76,5592	
	chlapci	1695	544,1211	82,9376	+++
ZEMEPIS	**dievčatá**	1802	527,6901	82,5434	
	chlapci	1695	547,1544	90,0506	+++
PRÍRODOPIS	**dievčatá**	1802	531,8247	76,5774	
	chlapci	1695	542,9180	86,9919	+++
FYZIKA	**dievčatá**	1802	504,0159	79,5016	
	chlapci	1695	528,3278	84,4582	+++
ŽIV. PROSTREDIE	**dievčatá**	1802	508,7077	68,4574	
	chlapci	1695	520,8988	74,4842	+++
ALGEBRA	**dievčatá**	1802	532,7374	74,6303	**+++**
	chlapci	1695	524,0976	76,1124	
PRAVDEPODOBNOSŤ	**dievčatá**	1802	515,7235	85,2344	
	chlapci	1695	531,3920	88,2168	+++
ZLOMKY A ČÍSLA	**dievčatá**	1802	521,1878	81,8478	
	chlapci	1695	529,0420	86,6362	+++
GEOMETRIA	**dievčatá**	1802	531,0240	75,3621	===
	chlapci	1695	529,9397	79,6330	===
MERANIE	**dievčatá**	1802	536,2987	72,0793	
	chlapci	1695	547,9498	75,9553	+++

+++ signifikantný rozdiel medzi chlapcami a dievčatami na hladine významnosti 0,05
=== nie je signifikantný rozdiel medzi chlapcami a dievčatami

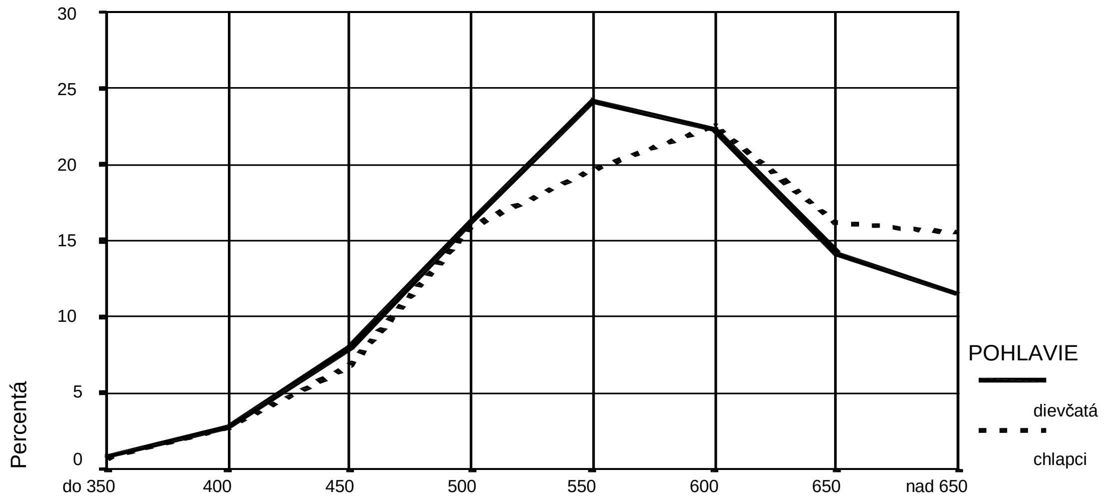
Keď sme testovali dosiahnuté priemery T-testom na hladine významnosti 0,05, dospeli sme k prekvapujúcim záverom. Celkovo v testoch dosiahli chlapci lepšie výsledky. Štatisticky významný rozdiel v prospech chlapcov sa ukázal medzi celkovými výsledkami z matematiky i prírodných vied, pričom dievčatá boli výrazne úspešnejšie len v oblasti algebry a v oblasti geometrie nebol štatisticky významný rozdiel medzi pohlaviami.

Grafy distribúcie výsledkov dievčat a chlapcov

Nasledujúce grafy nám ukazujú percentuálny podiel chlapcov a dievčat dosahujúcich skóre od 350 po 700.



PRÍRODNÉ VEDY



MATEMATIKA

Výsledky multivariačnej analýzy metódou hlavných komponentov

Matematika

Hlavná komponenta v matematike

	Váhy
ALGEBRA	0,865
PRAVDEPODOBNOSŤ	0,845
ZLOMKY	0,906
GEOMETRIA	0,803
MERANIE	0,856

Hlavná komponenta vysvetľuje 85,5 % celkovej variability meraní piatich tematických oblastí z matematiky. Pričom tematická oblasť zlomky a pojem čísla sa najvýraznejšou mierou podieľa na celkovom úspechu v matematike.

Výsledky multivariačnej analýzy metódou faktorovej analýzy

Po ortogonálnej rotácii získaných dvoch komponent metódou VARIMAX dostaneme dva **nezávislé** faktory. Prvý je faktorom matematiky (jeho vysvetľujúca sila je 42,5 %) a druhý je faktorom prírodných vied (jeho sila je 40,0 %).
Tieto faktory sú navzájom negatívne skorelované. V pedagogickej praxi to znamená, že žiaci dosahujúci nadpriemerné výsledky napríklad v matematike, dosahujú podpriemerné výsledky v prírodných vedách a naopak. Žiaci dosahujúci priemerné výsledky v matematike dosahujú priemerné výsledky v prírodných vedách.

	1. faktor	**2. faktor**
ALGEBRA	0,88	0,30
PRAVDEPODOBNOSŤ	0,85	0,34
ZLOMKY	0,88	0,38
GEOMETRIA	0,82	0,36
MERANIE	0,85	0,36
CHÉMIA	0,29	0,85
ZEMEPIS	0,37	0,79
PRIRODOPIS	0,37	0,85
FYZIKA	0,44	0,77
ŽIV.PROSTREDIE	0,27	0,83

Model viacnásobnej lineárnej regresie Matematika

Sledovaných päť matematických tematických okruhov vysvetľuje 87,7 % celkovej variability výsledkov z matematiky.

Koeficienty regresného modelu – Matematika

Matematika		**Neštandardizované Koeficienty**	
Pearsonov Model		**B**	**Štandardná chyba**
	(Konštanta)	-129,24	4,640
	ALGEBRA	0,26	0,017
	PRAVDEPODOBNOSŤ	0,14	0,013
	ZLOMKY	0,40	0,017
	GEOMETRIA	0,18	0,013
	MERANIE	0,21	0,017

Z tabuľky koeficientov lineárneho regresného modelu vyplýva, že úspešnosť v tematickom okruhu Zlomky a pojem čísla najviac vplýva na celkovú úspešnosť z matematiky. Prakticky to znamená, že zvýšenie individuálneho výkonu v oblasti Zlomky a pojem čísla vplýva až 40 % mierou na celkové zvýšenie skóre v teste z matematiky. Pre slabého žiaka v matematike z toho vyplýva rada, že by mal začať budovať základy pri práci s číslami a zlomkami, ďalej v algebre, meraní, geometrii a napokon by sa mal venovať pravdepodobnosti a kombinatorike, ak chce dosiahnuť optimálny výsledok v medzinárodnom teste TIMSS'99.

Monitor maturantov 2001

V rámci monitoru sme skúmali závislosť úspešnosti v teste z matematiky na známke z matematiky. Uvádzané údaje sa vzťahujú k 6290 študentom zo 182 gymnázií. Celoslovenská korelácia bola 0,380, čo predstavuje cca 14 % previazanosť (determinovanosť =SQR(0,380)*100%) medzi známkou a úspešnosťou v teste z matematiky. Táto previazanosť je tak alarmujúco nízka, že nás to podnietilo položiť si otázku, či existujú školy, ktoré majú vyššiu koreláciu medzi známkou a úspešnosťou. Uvádzame tu príklad 33 škôl v Bratislavskom kraji.

BA kraj Kriteriálna validita – známka je kritérium, s ktorým by úspešnosť mala korelovať

Model Summary

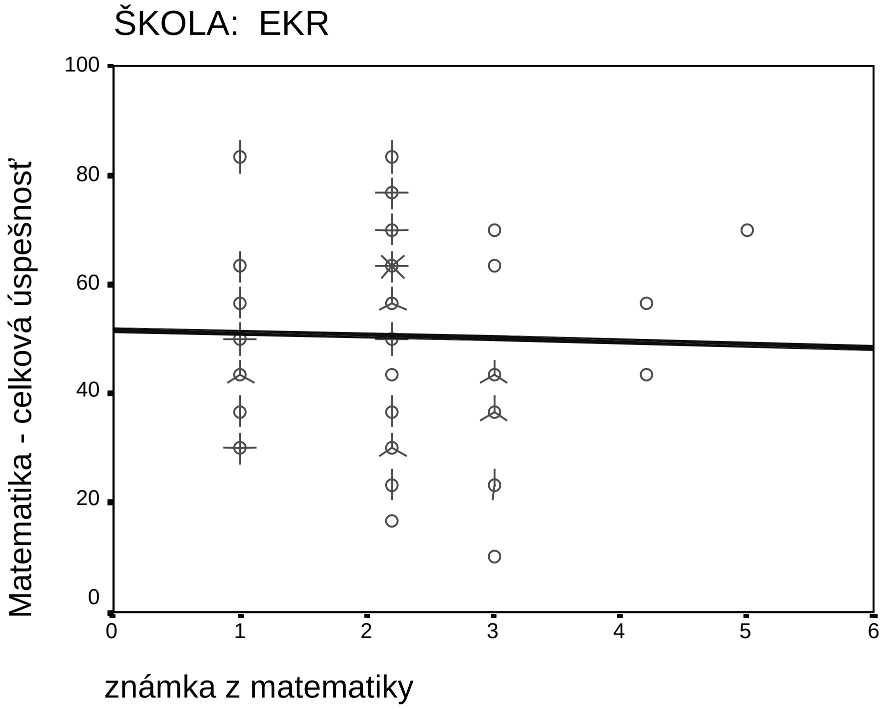
ŠKOLA	Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
BDE	1	,689[a]	,475	,400	6,0912
DKV	1	,782[a]	,612	,548	17,4238
DLT	1	,491[a]	,242	,052	4,3141
DNR	1	,398[a]	,159	,106	16,4533
EHV	1	,556[a]	,310	,289	15,9559
EKR	1	,025[a]	,001	-,015	18,6719
GHJ	1	,512[a]	,263	,242	14,7291
GHR	1	,525[a]	,276	,268	14,8001
GHT	1	,614[a]	,378	,315	10,2892
GLN	1	,630[a]	,398	,371	19,1399
GLZ	1	,473[a]	,223	,192	16,9200
GNZ	1	,615[a]	,379	,359	11,6578
GRT	1	,310[a]	,096	,046	9,2107
GTX	1	,021[a]	,000	-,333	7,9797
GXZ	1	,167[a]	,028	,001	19,4300
GYZ	1	,930[a]	,865	,798	6,3099
HJR	1	,557[a]	,310	,274	18,5466
HJZ	1	,321[a]	,103	,053	13,6312
HKX	1	,348[a]	,121	,066	11,9510
HLV	1	,260[a]	,068	,023	15,9262
HLZ	1	,386[a]	,149	,130	17,1503
HNV	1	,451[a]	,203	,185	15,6132
HRZ	1	,667[a]	,445	,416	12,2238
JKL	1	,199[a]	,040	-,280	11,3156
JKR	1	,006[a]	,000	-,030	19,3689
JLX	1	,480[a]	,230	,166	20,2599
LRY	1	,668[a]	,446	,428	12,9663
LTY	1	,237[a]	,056	,044	16,1500
NVX	1	,554[a]	,307	,269	14,6140
NVZ	1	,482[a]	,233	,201	17,9966
RTZ	1	,344[a]	,118	,096	16,1634
RVX	1	,660[a]	,435	,429	15,2424
RXZ	1	,107[a]	,011	-,020	14,7520

a. Predictors: (Constant), známka z matematiky

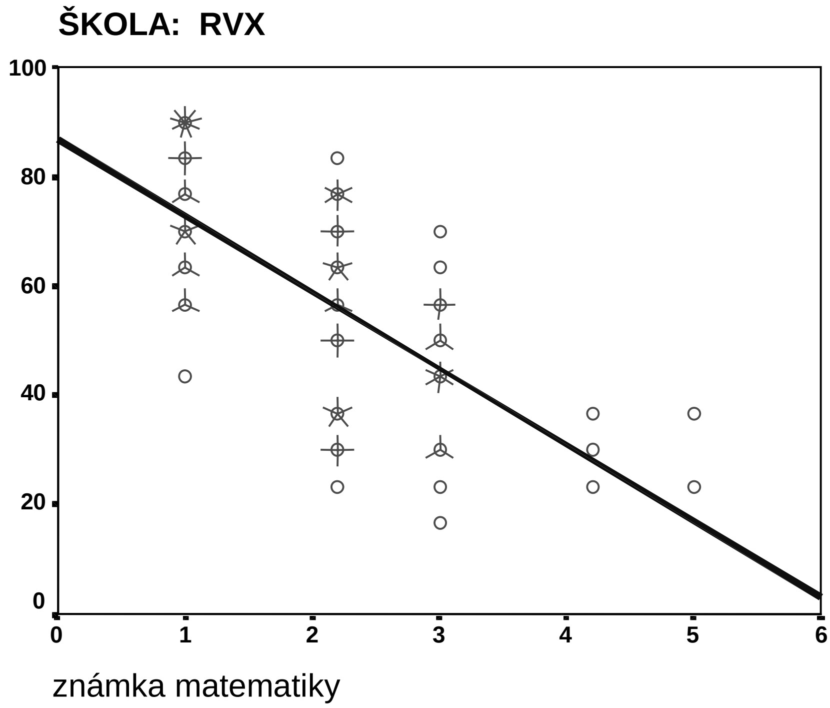
R-Pearsonov korelačný koeficient závislosti úspešnosti na známke
R-square koeficient determinácie

Nasledujúce grafy poukazujú na závislosť úspešnosti od známky jednotlivých študentov v určitej škole. Krúžok na grafe znázorňuje jedného študenta, pričom jednotlivé lupienky – čiarky ďalších študentov.

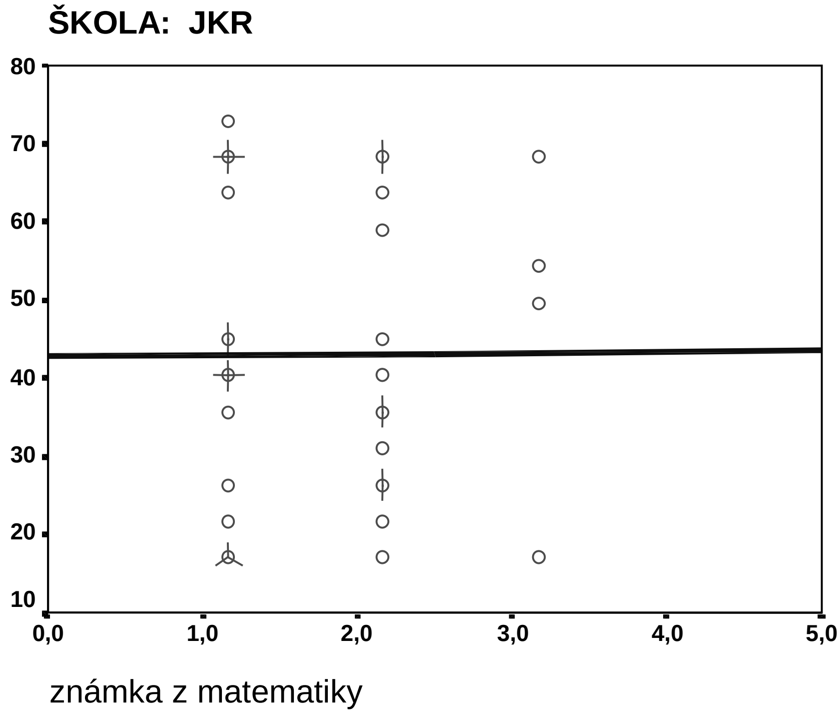
Škola EKR   R=0.025   počet študentov=66



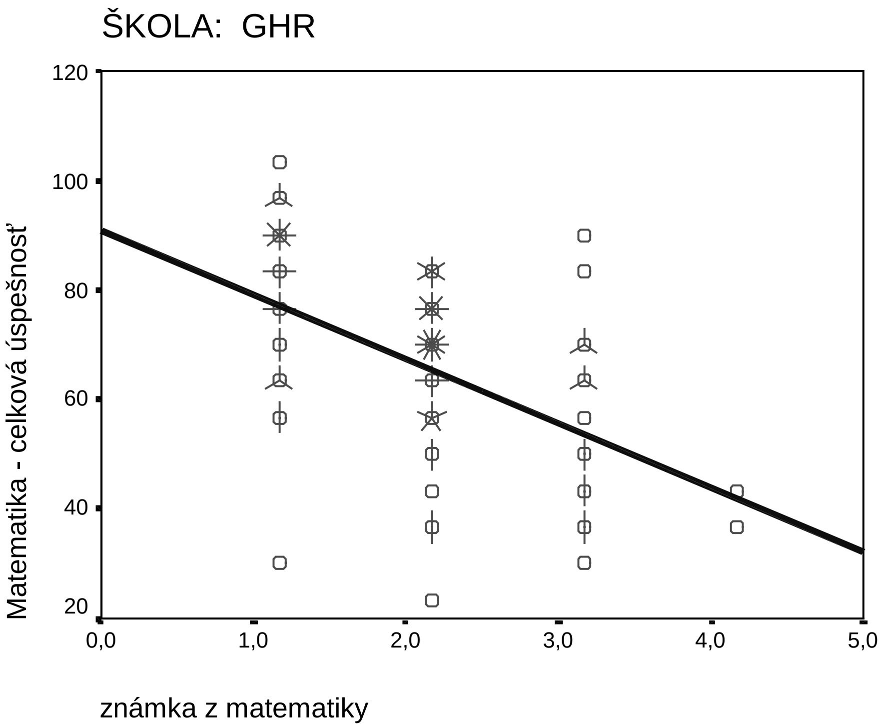
Škola RVX   R=0.660   počet študentov=88



JKR R=0,006 počet študentov=34



GHR R=0,525 počet študentov=91



Faktorová analýza 30 položiek + 3 otvorených úloh testu

27	0,624	0,393
25	0,597	-0,204
26	0,579	-0,1
2	0,541	9,197E-02
UL3	0,541	0,279
UL 2	0,538	0,278
29	0,524	-0,146
28	0,498	-3,896E-02
19	0,495	0,158
30	0,487	1,357E-02
14	0,482	7,767E-02
12	0,479	-8,053E-02
20	0,464	-0,267
UL 1	0,446	-4,338E-02
13	0,442	0,179
6	0,439	-0,195
11	0,425	-0,188
5	0,42	1,170E-02
16	0,419	0,123
3	0,417	-1,912E-02
10	0,411	-0,274
15	0,411	-0,223
22	0,409	5,451E-02
9	0,38	7,071E-02
23	0,354	-4,905E-02
24	0,353	-4,364E-02
18	0,347	0,168
17	0,345	0,424
4	0,333	0,25
21	0,302	-8,192E-02
1	0,296	-8,958E-02
8	0,294	-0,317
7	0,237	-0,193

Ukazuje sa, že príklady 27, 25, 26, 2, UL3, UL2, 29, 28, 19, 30 najviac korešpondujú s úspešnosťou v teste. Dá sa to interpretovať aj tak, že sú to úlohy, ktoré sú dôležité v teste. Najviac reprezentujú faktor „nadania na matematiku“. Keby sa vynechali, klesla by aj reliabilita testu (reliabilita je 0,74).
Úlohy 7, 8, 1 z chvosta tabuľky sú do istej miery pre študentov neprehľadné v tom zmysle, že ani z celkovej úspešnosti v teste ani zo známky študenta sa nedá predikovať či dobre vyrieši danú úlohu.

Ukážky úloh z Monitoru maturantov 2001

Úloha 27

Modernizáciou trate sa zrýchlila železničná doprava medzi mestami *A* a B. Dnes potrebuje vlaková súprava na prekonanie vzdialenosti medzi týmito mestami iba 80 %času, ktorý potrebovala pred modernizáciou. O koľko percent sa zvýšila priemerná cestovná rýchlosť súpravy?

Úloha 25

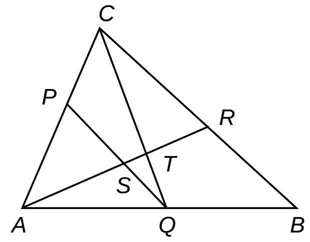
V istej geometrickej postupnosti je 20.člen 100-krát väčší ako 10.člen. Koľkokrát je v tejto postupnosti 10.člen väčší ako 5.člen?

Úloha 28

Z dvoch príkladov v písomke vyriešilo len jeden príklad 16 žiakov, obidva príklady 7 žiakov a ani jeden z príkladov 12 žiakov. Prvý príklad pritom vyriešilo dvakrát viac žiakov ako druhý. Koľko žiakov vyriešilo druhý príklad?

Úloha 7

Na obrázku je všeobecný trojuholník *ABC.* Body *P*, *Q*, *R* sú stredy jeho strán. Potom pre dĺžky úsečiek *AS*, *ST* a *TR* platí $|AS|:|ST|:|TR| =$



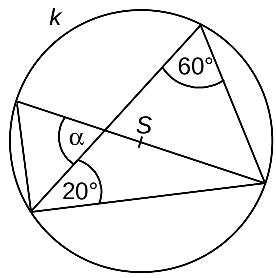
Obrázok je len ilustračný. Dĺžky v ňom nezodpovedajú zadaným podmienkam.

(A) 3 : 1 : 2 **(B)** 4 : 1 : 2 **(C)** 4 : 1 : 3

(D) 5 : 1 : 3 **(E)** 5 : 2 : 3

Úloha 8

Do kružnice *k* so stredom *S* sú vpísané dva trojuholníky (pozri obr.). Aká je veľkosť uhla α?



Obrázok je len ilustračný. Veľkosti uhlov v ňom nezodpovedajú zadaným podmienkam.

(A) 30° **(B)** 40° **(C)** 45°

(D) 50° **(E)** 60°

Úloha 1

Firma VIZIT, s.r.o. stanovuje cenu za výrobu sady vizitiek podľa vzťahu $C = 60 + 4p$, kde *C* je cena v korunách, 60 (Sk) je základný poplatok a p je počet objednaných kusov vizitiek. Od budúceho mesiaca plánuje firma zvýšiť základný poplatok o pätinu a cenu za každý zhotovený kus o pätinu znížiť. Podľa akého vzťahu bude firma po úprave stanovovať cenu?

(A) $C = 48 + 4{,}8p$ **(B)** $C = 65 + 3{,}5p$ **(C)** $C = 72 + 0{,}8p$

(D) $C = 72 + 3{,}5p$ **(E)** $C = 72 + 3{,}2p$

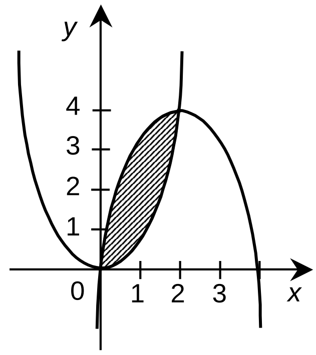
Úloha 21

Pre obsah *S* vyšrafovaného obrazca ohraničeného parabolami $y = x^2$ a $y = -x^2 + 4x$ platí

(A) $S = \int_0^4 4x\,dx$. **(B)** $S = \int_0^2 4x\,dx$.

(C) $S = \int_0^4 \left(4x - 2x^2\right)dx$. **(D)** $S = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)dx$.

(E) $S = \int_0^2 \left(2x^2 - 4x\right)dx$.

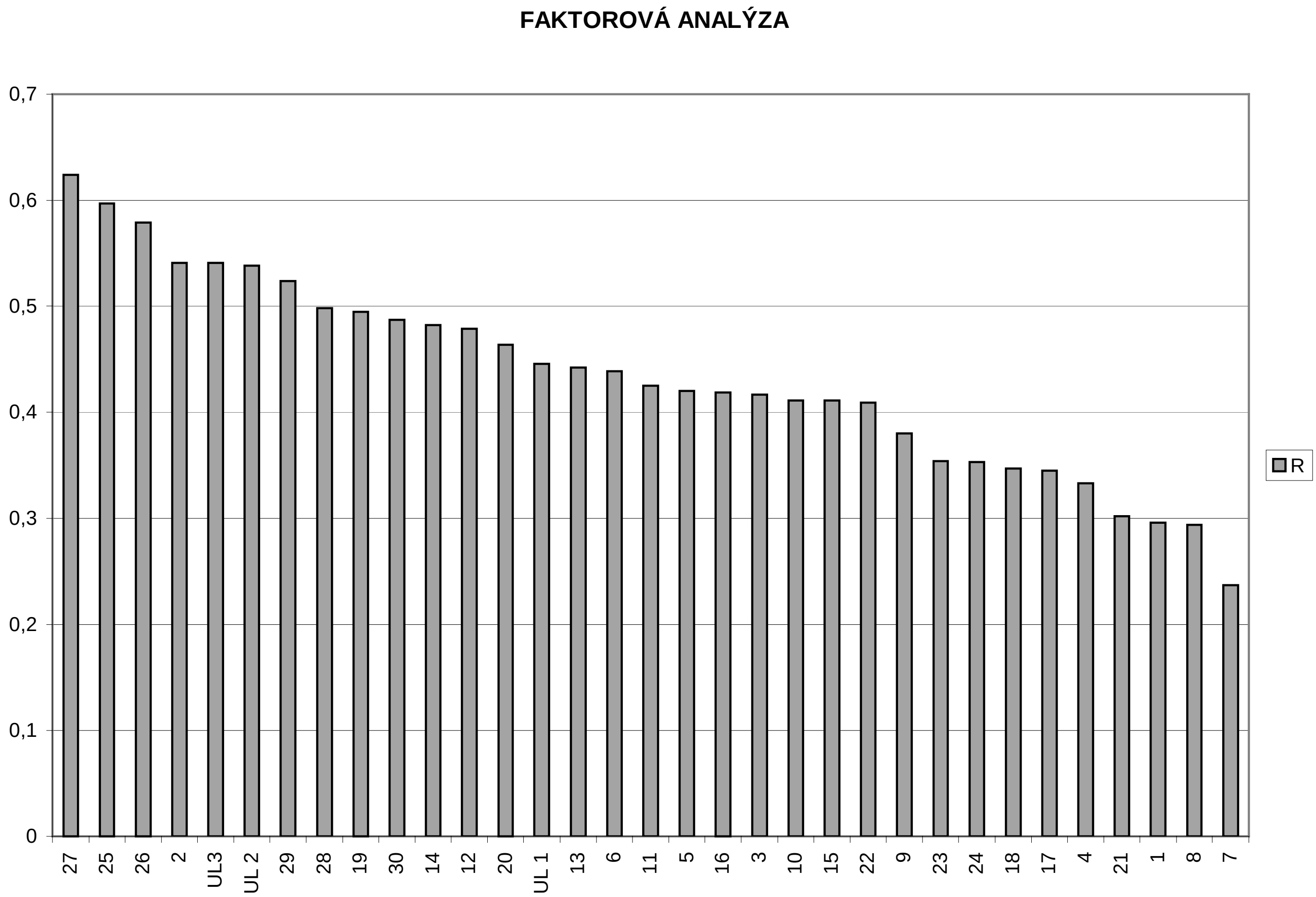


Úloha 4

Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel, vytvorených len z párnych číslic, v ktorých je prostredná číslica väčšia ako obidve krajné?

(A) 240 **(B)** 100 **(C)** 38 **(D)** 30 **(E)** 20

Ukazuje sa, že príklady netradične, problémovo zadané napr. 7, 8, vychádzajúce z reálneho života napr. 1, vyžadujúce spájanie naučených vedomostí a tvorivé vyvodzovanie, hľadanie netriviálnej cesty vedúcej k riešeniu napr. 21, 4, vytvárajú zmätok v mysliach väčšiny žiakov, nezávisle od prospechu z matematiky.



Takéto zistenia na veľkých vzorkách študentov (v roku 2001 cca 7000) vedú k rozhodnutiam na úrovni ŠPÚ a ministerstva školstva ohľadom maturitných štandardov a samotných maturít. Aby sa stalo tvorivé riešenie problémov vychádzajúce zo života na slovenských stredných školách pracovnou metódou, nie ojedinelou lastovičkou.

JAK ZPŘÍSTUPNIT ÚLOHY MMO STŘEDOŠKOLÁKŮM[1]

Jaroslav Zhouf, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

1. ÚVOD

Již deset let připravuji úlohy do písemných maturitních zkoušek pro žáky gymnaziálních tříd s rozšířenou výukou matematiky. Jedním z námětů těchto úloh jsou úlohy Mezinárodních matematických olympiád (MMO), a to proto, aby úlohy písemných maturitních zkoušek byly dostatečně obtížné. Ukazuje se, že mnoho úloh matematických olympiád je řešitelných i těmi maturanty, kteří v matematické olympiádě úspěšní nebyli. Jen je třeba náročnější úlohu matematické olympiády vhodně upravit pro potřeby maturantů „neolympioniků".

Uvedu nejprve, jakou formu má většina mnou vytvořených úloh písemných maturitních zkoušek, dále jakou formu má většina úloh matematické olympiády a nakonec uvedu několik příkladů, jak jsem z původně olympiádní úlohy vytvořil úlohu maturitní.

2. POROVNÁNÍ FORMY ÚLOH PÍSEMNÝCH MATURITNÍCH ZKOUŠEK A FORMY ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Při tvorbě jednotlivých úloh i písemné maturitní zkoušky jako celku se řídím následujícími *zásadami*:

1. *zařazení většiny úloh rozčleněných na řadu dílčích úkolů a vyžadujících lokální strategii řešení, ale také zařazení aspoň jedné úlohy vyžadující globální strategii řešení,*
2. *nezávislost jednotlivých lokálních strategií v úlohách s dílčími úkoly,*
3. *propojení více oblastí matematiky v jedné úloze,*
4. *zastoupení co nejširšího spektra matematických témat v celé písemné práci a jejich nepřekrývání,*
5. *používání zobecňování, experimentování, řetězení jednotlivých myšlenkových kroků,*
6. *zavádění nových pojmů a propojování se známými pojmy,*
7. *možnost řešení úloh více způsoby,*
8. *„čitelnost" textu a jeho jednoznačnost,*
9. *vyváženost řešení a zápisu řešení jednotlivých úloh,*
10. *přiměřená časová náročnosti řešení celé písemné zkoušky,*
11. *přiměřená míra složitosti úprav pro žáky i opravovatele,*
12. *větší jednoduchost povinně řešitelných úloh, a větší náročnost volitelně řešitelných úloh.*

Povaha úloh matematické olympiády je taková, že výše uvedené zásady 2 – 4 a částečně zásada 1, tj. rozčlenění rozsáhlejší úlohy na řadu dílčích úkolů, nezávislost jednotlivých otázek v každé úloze, propojení jednotlivých oblastí matematiky a zastoupení co nejširšího spektra matematických témat, jsou v úlohách matematické olympiády spíše kontraproduktivní. Je to proto, že úloha matematické olympiády má být stručná, s minimem otázek, většinou zasahující do jediné matematické oblasti. Jednotlivé dílčí otázky by byly příliš návodné při řešení. Tedy dobře se tu uplatní část zásady 1 o existenci úlohy vyžadující globální strategii řešení. Další zásady 5 – 12, tj. prvky zobecňování, experimentování, řetězení myšlenkových kroků, budování nových pojmů a propojování se známými pojmy, možnost řešení úloh více způsoby, přiměřená míra složitosti úlohy, „čitelnost" textu a řešení úlohy a zajímavost úlohy, jsou také vhodné i v úlohách matematické olympiády.

Novou a zároveň tou nejdůležitější zásadou při tvorbě úloh do matematické olympiády je *zásada přítomnosti „triku"* v úloze, což znamená školsky méně standardní formu, přičemž následné řešení je možno provést standardními školskými prostředky.

---

[1] Příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAUK 316/2001/A-PP/PedF.

Stručně o rozdílu mezi úlohami matematické olympiády a úlohami písemné maturitní zkoušky můžeme říci, že v úlohách matematické olympiády se má převážně projevit schopnost žáků objevovat nové poznatky a v úlohách písemné maturitní zkoušky se má převážně projevit schopnost kompletovat známé poznatky. V maturitní úloze je každý další krok znám a víceméně jednoznačně určen, i když je třeba obtížnější než standardní školský úkon. V úloze matematické olympiády je nutno více experimentovat, další kroky nejsou vždy jasně dány.

3. KONKRÉTNÍ DVOJICE ÚLOH

V této části vždy uvedu úlohu MMO a k ní příslušnou mnou modifikovanou úlohu písemné maturitní zkoušky. U některých úloh též uvedu důvody, které mě k této modifikaci vedly. Všechny úlohy písemných maturitních zkoušek byly zadány na gymnáziu Zborovská v Praze.

Úloha 1. ročníku MMO

Zjistěte, pro která reálná čísla x platí

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$,

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$,

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

Úloha v této podobě nesplňuje podle mé zkušenosti zásadu vyváženosti řešení a zápisu řešení v porovnání s ostatními úlohami písemné maturitní zkoušky, zásadu propojení více oblastí matematiky v jedné úloze a zásadu větší náročnosti volitelné úlohy. Navíc v původní podobě se zbytečně řeší třikrát jeden typ úlohy, a přitom by se zde mohly řešit ještě jiné úkoly.

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1998

V oboru reálných čísel je dán výraz

$$V(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\,.$$

a) Určete definiční obor výrazu V(x).

b) Řešte v $\mathbf{R}$ *rovnici* $V(x)=\sqrt{a}$ *s reálným parametrem a.*

c) Nakreslete graf funkce $y=V^2(x)$.

Úloha 3. ročníku MMO

Řešte rovnici

$$\cos^n x-\sin^n x=1,$$

kde n je dané přirozené číslo.

Úloha v této podobě má pro maturanty velmi obecný obsah, je tedy třeba naplnit zásadu rozdělení úlohy na více jednotlivých dílčích úkolů. Dále nesplňuje zásadu vyváženosti řešení a zápisu řešení v porovnání s ostatními úlohami zkoušky, zásadu propojení více oblastí matematiky v jedné úloze, zásadu nezávislosti jednotlivých lokálních strategií v úlohách s dílčími úkoly.

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1998

a) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\cos^n x-\sin^n x=1$$

pro n = 1, 2, 3, 4.

b) Uvažujme relaci

$$W=\{\,[n,x]\in\{1,2,3,4\}\times\mathbf{R}\,;\ \cos^n x-\sin^n x=1\,\}.$$

Rozhodněte, zda W je zobrazení z {1,2,3,4} do $\mathbf{R}$*. Je inverzní relace* W^{-1} *k W zobrazení z* $\mathbf{R}$ *do {1,2,3,4}? Zakreslete kartézský graf relace* W^{-1}.

Úloha 7. ročníku MMO

Najděte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

Úloha v této podobě je pro maturanty velmi náročná, tj. nesplňuje zásadu vyváženosti řešení a zápisu řešení v porovnání s ostatními úlohami zkoušky. Dále uvedená upravená úloha v písemné maturitní zkoušce pak naplňuje zásadu zařazení aspoň jedné úlohy vyžadující globální strategii řešení a zásadu zavedení nového pojmu (řešení soustavy rovnic v oboru komplexních čísel).

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1998

V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$x + yz = -2$$
$$y + zx = -2$$
$$z + xy = -2$$

Uvedu ještě několik příkladů úloh MMO a od nich odvozených úloh písemných maturitních zkoušek. Shodnosti, resp. rozdíly obou forem budou snad patrné na první pohled, proto se zde již zdržím komentáře.

Úloha 2. ročníku MMO

Je dán rovnoramenný lichoběžník se základnami a, c a výškou v. Na ose souměrnosti tohoto lichoběžníku sestrojte bod P tak, aby z něho byla vidět obě ramena lichoběžníku pod pravými úhly. Dále vypočtěte vzdálenost bodu P od základen lichoběžníku. Rozhodněte, za jakých podmínek bod P existuje.

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1997

Je dán rovnoramenný lichoběžník se základnami a, c a výškou v.

a) Na ose souměrnosti tohoto lichoběžníku sestrojte bod P tak, aby z něho byla vidět obě ramena pod pravými úhly.
b) Vypočtěte vzdálenosti bodu P od základen lichoběžníku.
c) Určete vztah mezi čísly a, c, v, který rozhoduje o počtu bodů P v úloze a). Kolik bodů P lze tedy nalézt?
d) Určete vztah mezi čísly a, c, v, aby navíc úhlopříčky lichoběžníku byly kolmé.

Úloha 4. ročníku MMO

Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1999

a) Sestrojte grafy funkcí

$$f\colon y = \sqrt{3-x}$$
$$g\colon y = \sqrt{x+1}$$

v jedné soustavě souřadnic a na jejich základě sestrojte odhadem graf funkce

$$h\colon y = f(x) - g(x).$$

b) Pomocí diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce $y = h(x)$.
c) Řešte v oboru reálných čísel nerovnici

$$h(x) > 1.$$

Úloha 5. ročníku MMO

Určete všechna řešení x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soustavy rovnic

$$x_5 + x_2 = yx_1,$$
$$x_1 + x_3 = yx_2,$$
$$x_2 + x_4 = yx_3,$$
$$x_3 + x_5 = yx_4,$$
$$x_4 + x_1 = yx_5,$$

kde y je parametr.

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1995

Řešte v $\boldsymbol{R}^4$ *soustavu rovnic s reálným parametrem p:*

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + px_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + px_4 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 6. ročníku MMO

a) *Určete všechna přirozená čísla n, pro která je číslo* $2^n - 1$ *dělitelné sedmi.*
b) *Dokažte, že neexistuje žádné přirozené číslo n, pro které je číslo* $2^n + 1$ *dělitelné sedmi.*

Modifikovaná úloha písemné maturitní zkoušky z roku 1994

Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (2^n - 1)_{n=0}^{\infty}$.

a) *Jednak přímo, jednak matematickou indukcí dokažte:*

$$\forall n \in N_0; 3 \mid n \Rightarrow 7 \mid a_n .$$

b) *Vypočtěte obsah útvaru omezeného lomenou čarou* $A_0A_1A_2...A_{1994}$ *, kde* $A_0 = [0,a_0]$ *,* $A_1 = [1,a_1]$ *, ... ,* $A_{1994} = [1994,a_{1994}]$ *, a křivkou* $y = 2^x - 1$ *, kde* $x \in \langle 0, 1994 \rangle$.

4. ZÁVĚR

Tento článek měl ukázat, jak je možné jeden matematický námět zpracovat pro potřeby matematické olympiády a pro potřeby maturitních zkoušek, jak je možné případnou velkou, či na druhé straně malou obtížnost upravit vhodnou formou úloh. A také jak je možné obávané problémy řešené v matematické olympiádě zpřístupnit většímu počtu žáků střední školy.

Literatura:

[1] Horák, K., Müller, V., Vrba, A.: Úlohy mezinárodních matematických olympiád. *SPN, Praha, 1986*

[2] Zhouf, J.: Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice, *doktorská disertační práce, MFF UK, Praha, 2001*

ISBN 80-968815-1-5

9 788096 881512