Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Letná škola z teórie vyučovania matematiky

P Y T A G O R A S 2001

Kováčová pri Zvolene, 30. 6. – 6. 7. 2001

Zborník príspevkov

Vydané s podporou grantu GACR 406/99/1696
„Paralela poznávacích a vzdělávacích procesů v matematice“

Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2001, ktorá sa konala v dňoch 30.6. – 6.7. 2001 v Kováčovej pri Zvolene pod záštitou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov.

ISBN: 80-968298-4-X

Zostavovatelia: Vladimír Burjan, Milan Hejný, Štefan Jány

Grafická úprava, tlač a distribúcia: EXAM ®, P. O. Box 215, Vranovská 6, 854 02 Bratislava 5
(+4212) 63 81 26 89, 63 82 49 52,
email: info@exam.sk
Internet: www.exam.sk

Vydané s podporou grantu GACR 406/99/1696 „Paralela poznávacích a vzdělávacích procesů v matematice“

Náklad: 100 ks

Nepredajné.

Vážení priatelia,

od roku 1977 sa každé prázdniny na týždeň stretáva partia učiteľov matematiky na spoločný duchovný i telesný „hodokvas“. Tento rok je prvýkrát naše stretnutie dokumentované i zborníkom. Je reálna nádej, že aj v roku 2002 sa nám podarí vydať obdobný zborník. Nazdávame sa, že by bolo užitočné dať do budúcoročného zborníka článok, v ktorom si účastníci našich stretnutí zaspomínajú na predchádzajúce ročníky exodov a letných škôl Pytagoras.

Prosíme preto všetkých tých, ktorí sú ochotní podieľať sa na takomto (asi dosť rozsiahlom) článku, aby svoju ponuku oznámili na niektorú z doleuvedených adries. Radi by sme niekedy v priebehu októbra ustanovili akúsi „redakčnú radu“ pre tento zámer.

Všetkým ochotným vopred ďakujeme a tešíme sa na spoluprácu i na Pytagoras 2002.

Milan Hejný (milan.hejny@pedf.cuni.cz)
Štefan Jány (nndkjany@nextra.sk)
Vladimír Burjan (burjan@exam.sk)

Obsah

I M A G I N E – NOVÉ LOGO

Andrej Blaho, Katedra vyučovania informatiky, FMFI UK, Bratislava

Programovací jazyk Logo vznikol začiatkom 60-tych rokov v USA MIT – v laboratóriu umelej inteligencie, kde vedci chceli skúmať, ako deti objavujú nové pojmy hlavne z matematiky a lingvistiky – prvotný cieľ nebol učiť programovanie a algoritmické myslenie, ale poskytnúť vyjadrovací prostriedok – jazyk na učenie pomocou počítača. V tomto období vzniká veľmi dôležitý pojem – korytnačia geometria:

- je to grafické pero, ktoré sa neriadi "povelmi euklidovskej geometrie", ale "povelmi relatívnej vektorovej geometrie", napr. korytnačka, otoč sa vľavo o 30 stupňov prejdi 100 krokov...
- dôležité bolo, že deti sa hrali s matematikou, boli schopné objavovať netriviálne matematické pojmy už vo veľmi nízkom veku (dĺžka, vzdialenosť, uhol, štvorec, trojuholník, ...)
- pomocou korytnačky sa veľmi elegantne deti zoznamujú s prvými pojmami algoritmizície

Jazyk Logo prešiel mnohými fázami, pričom najväčší rozmach zaznamenal v 90-tych rokoch. U nás známe Comenius Logo bolo určené najmä pre základné a stredné školy. Vzniklo začiatkom 90-tych rokov a bolo vyvinuté pre platformu Windows 3.1. Táto verzia bola veľmi úspešná aj v mnohých iných krajinách.

V marci roku 2001 sa naštartoval najnovší nasledovník tohto Loga. Nakoľko tento štart začal v Anglicku firmou Logotron (www.logo.com) dostal názov IMAGINE s podtitulom moderný nástroj na skúmanie, konštruovanie a prezentovanie. Vďaka medzinárodnému projektu Esprit – Pathways (Veľká Británia, Portugalsko, Švédsko a Slovensko) sa v tomto prostredí vyvinulo niekoľko veľmi zaujímavých aplikácií: cieľom tohoto projektu bolo skúmať, ako deti vo vekovej skupine 5 až 9 rokov chápu pravidlá hry, ako sú schopní ich modifikovať, resp. vytvárať nové hry so svojimi vlastnými pravidlami.

Predpokladané využitie Imagine:

- rýchly vývoj drobných aplikácií pre predškolákov a najmenšie deti – toto by mohli zvládnuť šikovnejší učitelia, resp. študenti – budúci učitelia
- pre žiakov už aj na ZŠ ako ich nástroj na konštruovanie
- pre väčších na vývoj, prezentovanie, programovanie (najmä pre gymnazistov)
- v príprave budúcich učiteľov
- pre vývoj profesionálneho softvéru pre školy.

Aké sú najdôležitejšie vlastnosti tohoto nového Loga:

- priame manipulácie – riešenie problému sa čiastočne realizuje klikaním, ťahaním, nastavovaním vlastností, výberom z obrázkových ponúk a pod.
- je priamo podporovaná jednoduchá animácia (aj animované súbory GIF)
- súčasťou je jednoduché kreslenie do pozadia – zjednodušený skicár
- spolupráca s internetom:
- zobrazovanie stránok z internetu (webové linky)
- publikovanie Imagine projektov na internete pomocou plug-in
- bežiace aplikácie v Imagine môžu navzájom cez internet komunikovať, napr. posielať si správy, texty, obrázky, inštrukcie aj objekty
- multimédiá – Imagine je vlastne autorské prostredie na tvorbu multimediálnych prezentácií
- práca s hlasovým vstupom a výstupom – Imagine vie využiť možnosti Windows na generovanie hlasu, resp. rozpoznávanie hlasových povelov

- objektovo orientované programovanie – pravdepodobne staršie deti – študenti stredných škôl sa môžu zoznámiť s OOP – Imagine, poskytuje napr. dynamické viacnásobné dedenie, klonovanie, vytváranie nových tried a pod.
- paralelné procesy, programovanie pomocou udalostí, ...

Viem si predstaviť, že **Imagine môže prispieť aj školskej matematike:**

- dá sa v ňom vypracovať metodika, resp. špecializovaný softvér pre konštrukčnú geometriu (niečo podobné ako Cabri geometria)
- učiteľ matematiky môže aj pomocou svojich študentov pripravovať zaujímavé programy pre podporu matematického myslenia – študenti budú určite veľmi radi a učiteľ má pri nich šancu sa čo to z informatiky naučiť
- Imagine sa dá použiť aj ako inteligentný nástroj na vytváranie prezentácií – učiteľ si môže pripraviť výklad nového učiva aj s ukážkami na počítači, pričom môže využiť multimediálne a animačné možnosti Loga.

Dúfam, že v priebehu niekoľkých rokov vznikne najmä vďaka budúcim učiteľom matematiky a informatiky na FMFI veľké množstvo užitočného a inšpiratívneho softvéru, ktorý bude buď použiteľný priamo vo vyučovaní, alebo vďaka nemu sa vytvoria zaujímavé didaktické pomôcky.

M O N I T O R 2001 – PILOTNÉ TESTOVANIE MATURANTOV

Vladimír Burjan, EXAM, Bratislava

REFORMA MATURITNÝCH SKÚŠOK

Na Slovensku sa pripravuje reforma maturitných skúšok. Ide o jeden z najväčších a najvýznamnejších reformných krokov v našom školstve od roku 1990. Hlavným cieľom reformy je zabezpečiť adekvátnu úroveň maturitnej skúšky, zvýšiť jej objektívnosť, validitu, reliabilitu a komparabilitu. Všetky tieto kroky by mali viesť k tomu, že vysoké školy budú vo väčšej miere akceptovať výsledky maturity v rámci prijímacieho konania a perspektívne sa tak odbúra nezmyselná duplicita v testovaní maturantov. Hlavnou zmenou, ktorá má zabezpečiť dosiahnutie uvedených cieľov má byť rozšírenie maturitnej skúšky o externú písomnú časť, t. j. o centrálne zadávané a vyhodnocované písomné testy. Súčasná administrácia testov celej populácií maturantov a následné rýchle a spoľahlivé centrálne spracovanie výsledkov je nielen odborne, ale aj organizačne veľmi zložitý projekt, ktorý nie je možné spustiť naostro bez dôkladného predchádzajúceho overenia všetkých postupov. Preto sa už od šk. roku 1998/99 každoročne uskutočňuje tzv. pilotné testovanie maturantov. Oficiálnym gestorom reformy maturitných skúšok je Štátny pedagogický ústav, ktorý však zatiaľ nie je personálne ani technicky vybavený na realizovanie takýchto rozsiahlych a komplexných testovaní. Všetky tri doterajšie pilotné testovania (MONITOR 99, MONITOR 2000 aj MONITOR 2001) pre ŠPÚ realizovala firma EXAM, ktorá sa na túto problematiku dlhodobo špecializuje a má potrebné vybavenie aj know-how.

MONITOR 2001 – ČO BOLO NOVÉ?

Pilotné testovanie maturantov je z roka na rok rozsiahlejším a komplexnejším projektom. Postupne narastá počet zapojených škôl. počet testovaných žiakov, počet testovaných predmetov, počet otvorených otázok (hodnotených centrálne učiteľmi), zvyšuje sa úroveň zabezpečenia atď. V tomto šk. roku prebehlo testovanie už na 378 stredných školách (184 G, 144 SOŠ, 50 SOU). Bolo spracovaných celkovo 63 246 testov, zhruba rovnaké množstvo žiackych dotazníkov a niekoľko tisíc učiteľských dotazníkov. Celkovo bolo administrovaných 9 rôznych typov testov: Slovenský jazyk a literatúra (Sj-1) pre gymnáziá, Slovenský jazyk a literatúra (Sj-2) pre SOŠ a SOU, Maďarský jazyk a literatúra, Matematika M-1 pre gymnáziá, Matematika M-2 pre SOŠ a SOU, Anglický jazyk Aj-1 (pre pokročilých), Anglický jazyk Aj-2 (pre začiatočníkov), Nemecký jazyk (pre pokročilých), Francúzsky jazyk (pre začiatočníkov). Oproti vlaňajšku sa podstatne zvýšila úroveň zabezpečenia testov pred nežiaducim únikom informácií. Testy boli na školy doručené osobitnou kuriérskou službou iba 24 hodín pred administráciou, pričom boli zaliate do celofánových fólií. Na viac ako polovici škôl kontrolovali regulárny priebeh administrácie pracovníci školskej inšpekcie. Všetky testy obsahujúce otvorené otázky boli hodnotené centrálne (teda nie na školách, kde sa testy písali). Bolo zriadených 25 hodnotiacich centier po celom Slovensku, v ktorých takmer 500 zaškolených učiteľov hodnotilo testy s otvorenými otázkami.

HLAVNÉ ZISTENIA

Hoci hlavným cieľom pilotných testovaní je odskúšať logistiku a organizáciu jednotlivých fáz celého procesu (od tvorby testov cez ich grafické spracovanie, tlač, balenie, expedovanie, hodnotenie až po štatistické spracovanie výsledkov a ich zaslanie školám), významným „vedľajším produktom“ testovania je získanie komplexného obrazu o úrovni vedomostí maturantov v jednotlivých testovaných predmetoch. Získané objektívne dáta umožňujú posudzovať celkovú úroveň výstupov školského systému (na úrovni celej populácie maturantov), ako aj na úrovni jednotlivých škôl či tried. Umožňujú robiť porovnania z hľadiska typu školy (gymnázium, SOŠ, SOU), jej zriaďovateľa (štátne, súkromné, cirkevné školy), sídla školy (kraj), vyučovacieho jazyka a pod. Všetky zverejňované informácie sú predbežne anonymné (vo všetkých materiáloch s výsledkami sú používané kódy škôl, pričom každá škola pozná iba vlastný kód).

V prednáške budú uvedené a stručne analyzované základné výsledky MONITOR-u 2001 v jednotlivých predmetoch, osobitne však v matematike.

PROBLÉM HRANIČNÉHO SKÓRE

Vo všetkých učiteľských dotazníkoch bola nasledujúca otázka:

V teste (... označenie testu ...) môže žiak získať maximálne (... body ...) bodov. Aké by malo byť hraničné skóre, t. j. najnižší počet bodov, ktorý musí žiak dosiahnuť, aby mu bolo priznané, že zložil externú časť maturitnej skúšky z (... názov predmetu ...)?

Na miestach zátvoriek boli v každom dotazníku uvedené označenie testu, maximálny počet bodov a názov príslušného predmetu.

V otázke bol definovaný pojem hraničného skóre (resp. hraničnej úspešnosti) ako minimálny výsledok, ktorý by mal byť postačujúci pre absolvovanie externej časti skúšky (bez ohľadu na známku, ktorá bude za toto minimálne skóre udelená). Menší bodový zisk, resp. nižšiu percentuálnu úspešnosť už učitelia nepovažujú za postačujúcu na absolvovanie písomnej časti skúšky. Vzhľadom na prekvapujúce výsledky tejto ankety je potrebné zdôrazniť, že učitelia boli v dotazníku požiadaní o stanovenie hraničného skóre pre konkrétny test, ktorý ich žiaci písali v rámci MONITOR-u 2001.

Výsledky ukázali, že názory jednotlivých predmetových komisií sa v tejto otázke diametrálne rozchádzajú (a to aj v hodnotení toho istého testu). Preto sme pre každý test vypočítali tri hodnoty: priemer 10 % najnižších navrhovaných hodnôt (toto číslo reprezentuje priemerný názor „benevolentných“ PK), priemer 10 % najvyšších navrhovaných hodnôt (toto číslo reprezentuje priemerný názor „najprísnejších“ PK) a priemer návrhov všetkých PK.

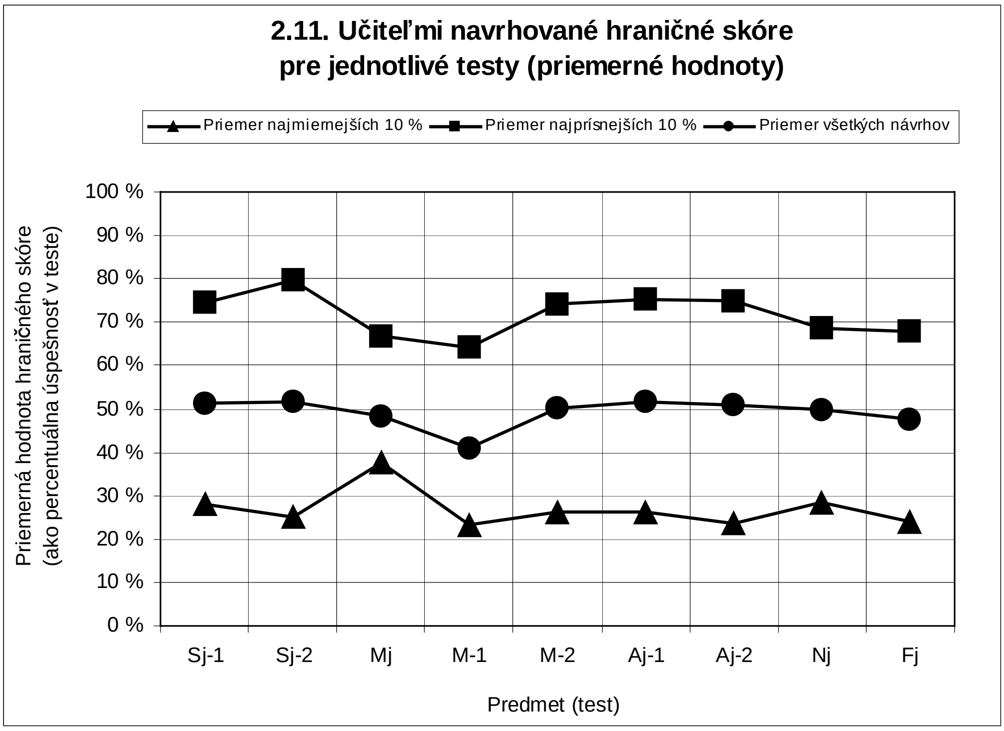
Graf 2.11. (na ďalšej strane) zachytáva pre každý predmet (resp. test) tieto tri hodnoty. Z grafu vidno, že s výnimkou maďarského jazyka a literatúry a matematiky M-1 (na gymnáziách) je vo všetkých predmetoch situácia zhruba rovnaká:

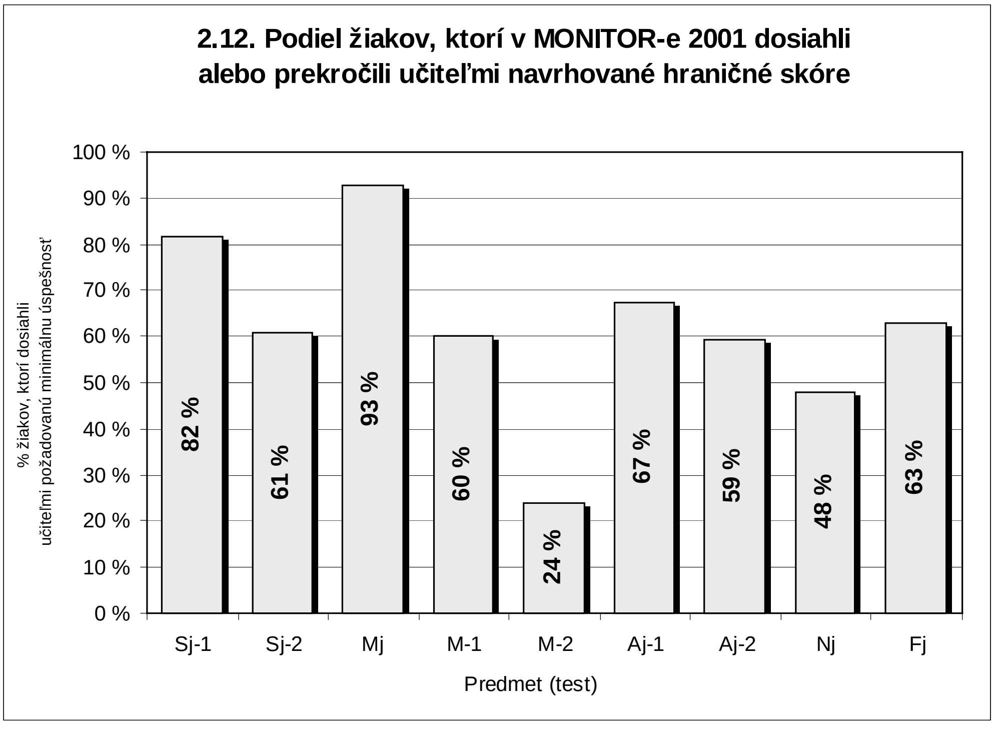
- najprísnejšie PK požadujú, aby hraničné skóre bolo niekde okolo 70 %,
- najmiernejšie PK požadujú, aby hraničné skóre bolo niekde okolo 30 %,
- priemerná hodnota za všetky PK sa pohybuje okolo 50 %.

Výnimku tvorí iba maďarský jazyk a literatúra, kde je rozptyl názorov jednotlivých PK omnoho menší ako v ostatných predmetoch, čo treba hodnotiť kladne. Druhou výnimkou je test M-1, kde priemerný návrh „prísnych“ PK dosahuje asi 65 % a priemerný názor všetkých PK je 40 %.

Veľmi dôležitou je otázka, do akej miery sú tieto názory učiteľov realistické a ako by vyzerali výsledky externej časti maturitných skúšok, keby bolo hraničné skóre stanovené podľa názoru učiteľov. O tom vypovedá graf 2.12. (na ďalšej strane). Za hraničné skóre v jednotlivých testoch bola prijatá priemerná hodnota navrhovaná všetkými PK. Následne bolo zistené, koľko testovaných žiakov v jednotlivých predmetoch by tento rok dosiahlo alebo prekročilo túto hraničnú hodnotu, a teda by externú časť skúšky absolvovali. Čím je stĺpec nižší, tým menej žiakov splnilo kritérium stanovené učiteľmi v podobe navrhovaného hraničného skóre.

Výsledky sú alarmujúce: Iba v prípade jediného testu – z maďarského jazyka a literatúry – možno hovoriť o akceptovateľnom stave, i keď aj v tomto prípade by počet žiakov, ktorí by neabsolvovali externú časť skúšky, dosiahol 7 %, čo je odhadom 10-násobok súčasného stavu. V ostatných predmetoch by však situácia bola omnoho horšia a zrejme spoločensky neakceptovateľná: podiel maturantov, ktorí by neuspeli v externej časti, sa pohybuje okolo 40 %, ba dokonca v prípade testu M-2 (SOŠ a SOU) je to až 76 %. Tieto čísla poukazujú na doslovnú priepasť medzi očakávaniami či nárokmi učiteľov a skutočnými vedomosťami žiakov, ktoré sú schopní na skúške preukázať. Túto priepasť bude potrebné v budúcnosti preklenúť. Znižovanie hraničného skóre pod cca 40 % však nie je možné, pretože pri testoch s výberom odpovede by sa tým neprijateľne zvýšila pravdepodobnosť náhodného dosiahnutia hraničného skóre hádaním. Jediným reálnym východiskom je zníženie úrovne testov, čo sa však u mnohých učiteľov nepochybne stretne s nesúhlasom a s poukazmi na degradovanie úrovne maturitnej skúšky. Ide o vážny problém a kompetentní by sa ním mali čo najskôr začať vážne zaoberať.



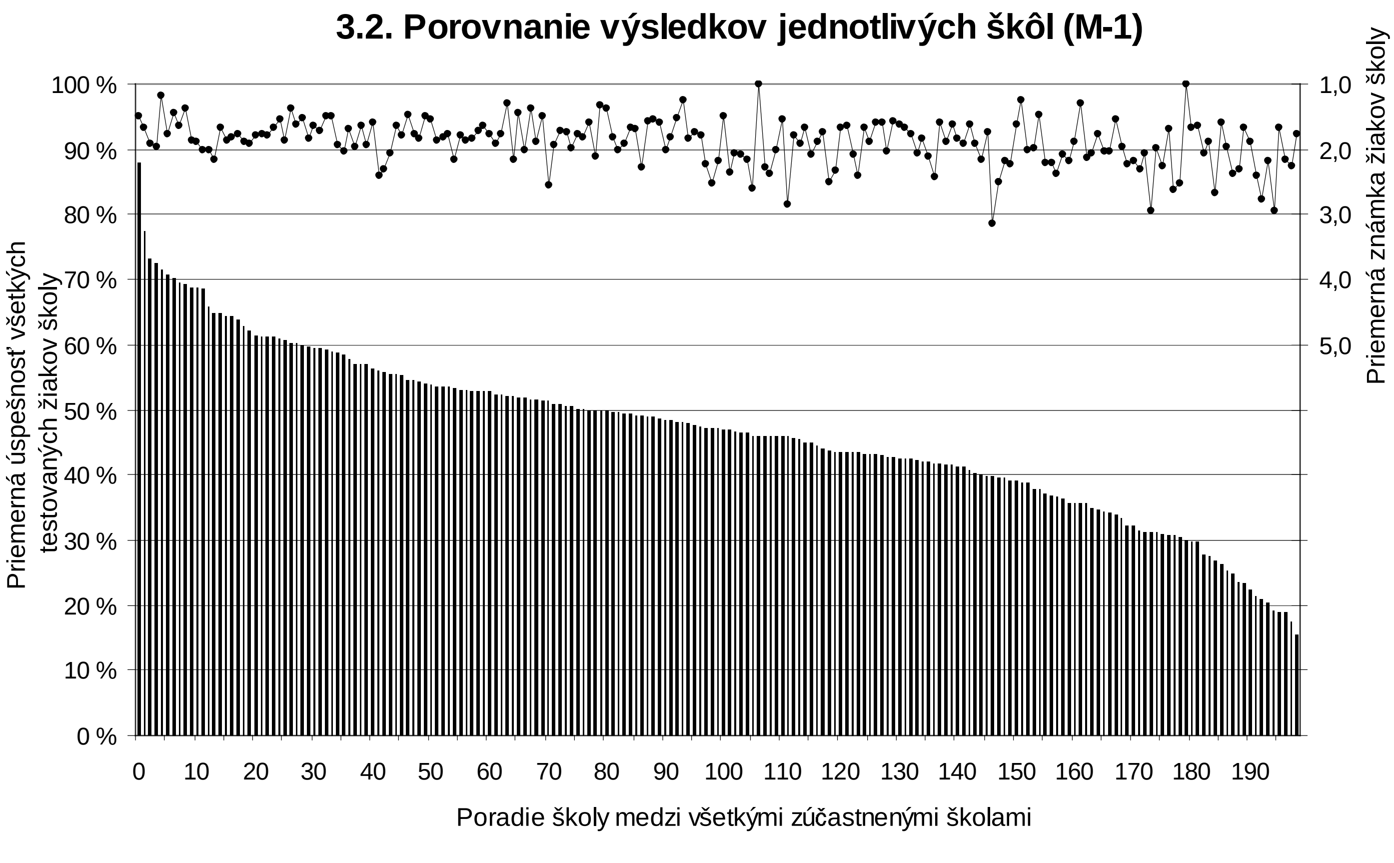


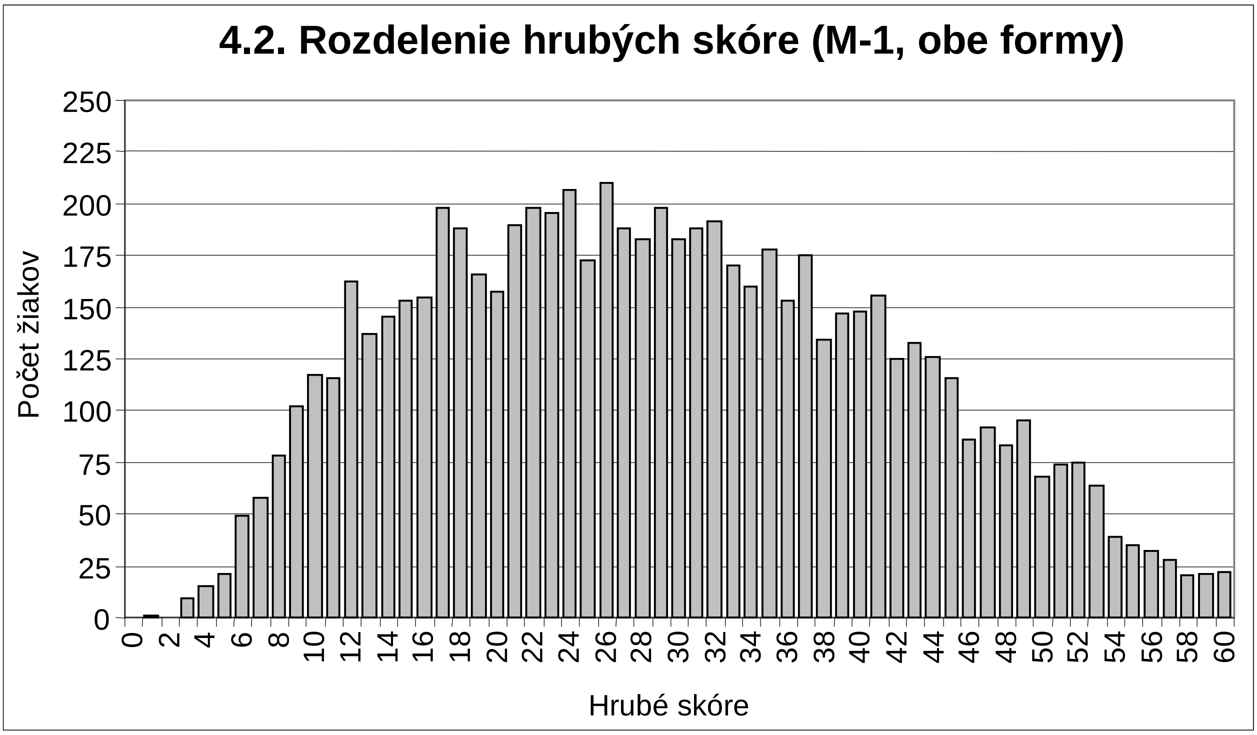
VÝSLEDKY MONITOR-u 2001 V PREDMETE MATEMATIKA

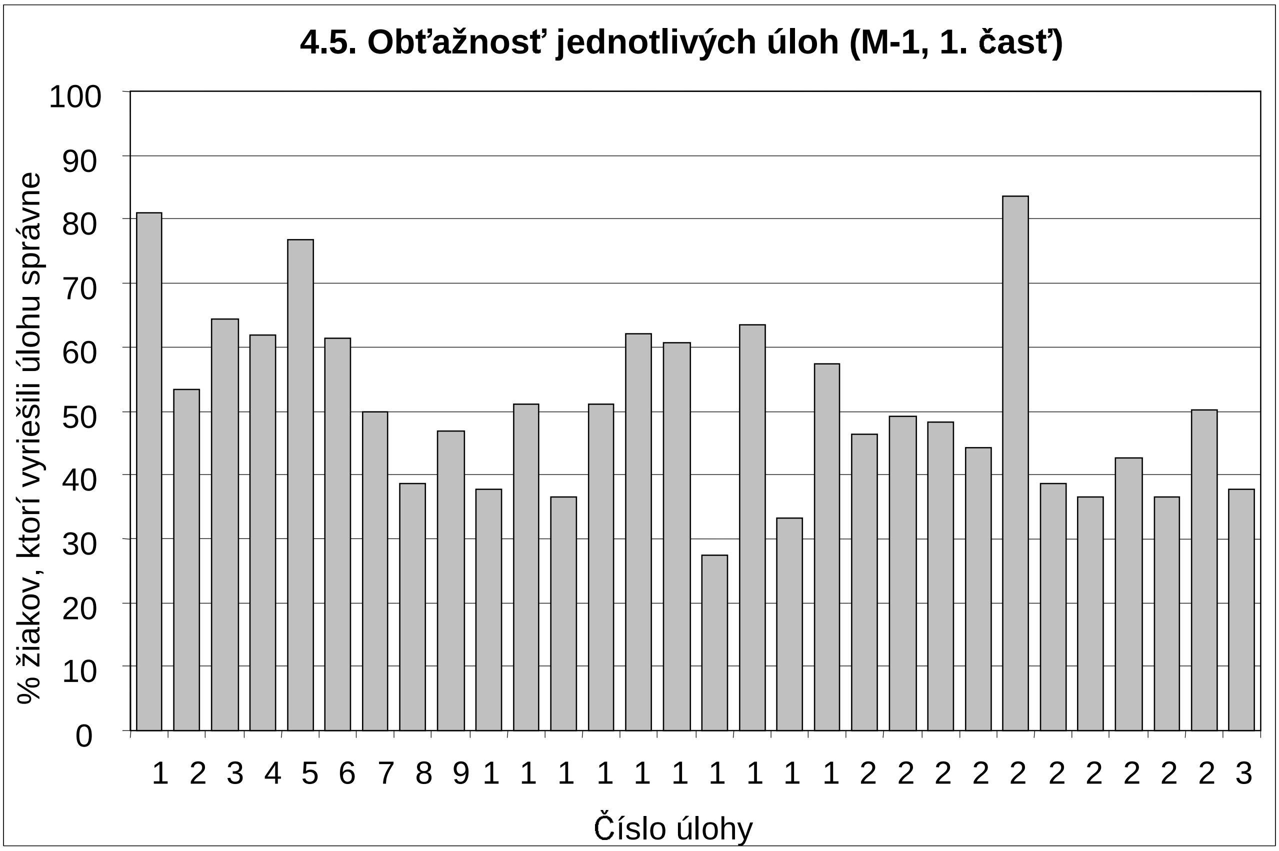
Ťažisko prednášky bude tvoriť prezentácia a analýza výsledkov v predmete matematika. Tu uvedieme iba niektoré zaujímavé výsledky.

Jedným z najzaujímavejších a najdiskutovanejších výstupov pilotných testovaní sú „rebríčky“ všetkých testovaných škôl, tried a žiakov (opäť pripomíname, že zatiaľ sú zverejňované iba v anonymnej podobe). Grafický rebríček škôl je znázornením poradia všetkých zapojených škôl. Každý stĺpec grafu predstavuje výsledok jednej školy. Vzhľadom na veľký počet škôl sú stĺpce tenké a čiastočne splývajú. Výška stĺpca udáva priemernú úspešnosť všetkých žiakov, ktorí v danej škole písali príslušný test. Priemernou úspešnosťou sa pritom rozumie, koľko % bodov (z maximálneho možného počtu) žiaci školy v teste získali. Školy sú zoradené podľa dosiahnutého výsledku od najlepších (vľavo) po najslabšie (vpravo).

Grafický rebríček škôl získava na zaujímavosti tým, že pri každej škole je vyznačený aj ďalší údaj – priemerná známka všetkých testovaných žiakov v predmete testu (ide o známku z posledného vysvedčenia). Táto hodnota je vyznačená nad každou školou a jednotlivé hodnoty sú pospájané čiarami do čiarového grafu. K týmto hodnotám sa vzťahuje sekundárna zvislá os (vpravo). Ak by známky na vysvedčeniach úzko korelovali so skutočnými vedomosťami žiakov, tak ako ich prejavili v teste, mala by krivka priemerných známok klesať úmerne tomu, ako klesá priemerný výsledok žiakov školy. Ako však z grafu vidno, nie je tomu tak a krivka priemerných známok vykazuje (vo všetkých predmetoch) nepravidelné oscilácie nesúvisiace s výsledkom žiakov v teste. Hlavnou príčinou tohto javu je skutočnosť, že hodnotenie žiakov v jednotlivých školách nie je navzájom koordinované – neexistujú preň objektívne jednotiace kritériá.




4.2. Rozdelenie hrubých skóre (M-1, obe formy)
Počet žiakov
0
25
50
75
100
125
150
175
200
225
250
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
Hrubé skóre


4.5. Obťažnosť jednotlivých úloh (M-1, 1. časť)
% žiakov, ktorí vyriešili úlohu správne
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3
Číslo úlohy

VPLYV FORMÁTU MATEMATICKEJ ÚLOHY NA JEJ OBŤAŽNOSŤ

Jednou z tém, ktoré najčastejšie rezonujú v diskusiách o reforme maturitnej skúšky a o externých testoch, je otázka formátu úloh použitých v testoch. Osobitne v matematických kruhoch prebieha miestami búrlivá diskusia o tom, či je použitie úloh s výberom odpovede opodstatnené a či tento typ úloh testuje skutočné matematické vedomosti. Dizajn tohtoročného pilotného testovania bol navrhnutý tak, aby umožnil vniesť trochu svetla do tejto závažnej problematiky. Bolo vytvorených 12 dvojíc úloh, ktoré boli do jednotlivých testových foriem zaradené vždy v dvoch variantoch: raz ako uzavretá úloha s výberom odpovede (s 5 alternatívami, z ktorých je práve jedna správna) a raz ako otvorená otázka, v ktorej mali žiaci sami napísať výsledok, ku ktorému sa dopracovali. V každom z týchto formátov boli úlohy riešené niekoľkými tisícmi žiakov zo stoviek tried maturitného ročníka. Výsledky porovnania výsledkov žiakov v oboch formách možno zhruba zhrnúť do nasledovných bodov:

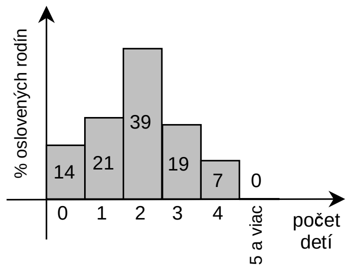
- potvrdil sa (všeobecne akceptovaný) predpoklad, že úlohy s výberom odpovede sú vo všeobecnosti pre žiakov o niečo ľahšie, ako úlohy s tvorbou odpovede. Priemerný rozdiel v úspešnosti je však iba cca 10 %, čo je pomerne nízka hodnota.

- u mnohých úloh nebol žiadny rozdiel medzi úspešnosťou žiakov v otvorenej a v uzavretej forme. Pokiaľ by sa perspektívne podarilo tvorbu testov zorganizovať tak, aby bolo možné úlohy vopred pilotovať, bolo by vhodné vyberať do uzavretých testov iba (alebo prevažne) také úlohy, u ktorých sa vopred empiricky overilo, že nie sú príliš senzitívne na formu zadania.

- vyskytli sa aj úlohy, ktoré dopadli v uzavretej forme (s distraktormi) horšie ako v otvorenej. Ide o úlohy, v ktorých distraktory reprezentujú typické žiacke chyby alebo mylné predstavy.

- u niekoľkých úloh bol pomerne veľký rozdiel medzi úspešnosťou žiakov v otvorenej a v uzavretej forme – žiaci boli o 30 – 40 % úspešnejší, keď riešili úlohu s ponúknutými alternatívnymi odpoveďami. Z hlbšej analýzy takýchto prípadov vyplynulo pravdepodobné vysvetlenie: ponúkané možnosti obsahujú nejakú informáciu, ktoré žiakom pomáha lepšie pochopiť samotné zadanie úlohy. Tu je ukážka jednej takej úlohy:

Istá agentúra uskutočnila prieskum o počte detí na vzorke 1000 rodín. Graf znázorňuje zistené relatívne početnosti rodín s jednotlivými počtami detí. Aký bol priemerný počet detí v tejto vzorke 1000 rodín?



(A) 1 **(B)** 1,84 **(C)** 1,94

(D) 2 **(E)** 2,25

V prípade tejto úlohy je tou dôležitou „doplnkovou informáciou“ fakt, že výsledok môže byť desatinné číslo. Ukázalo sa totiž, že väčšina žiakov automaticky (avšak chybne) predpokladala, že výsledok musí byť prirodzené číslo (keďže ide o počet detí v rodine). Tí žiaci, ktorí riešili úlohu ako otvorenú, vo väčšine prípadov udávali ako odpoveď 2, pričom táto odpoveď bola hodnotená ako nesprávna. Naproti tomu u žiakov, ktorí riešili úlohu v uzavretej forme, sa omnoho častejšie vyskytovala voľba alternatívy (C) 1,94, ktorá predstavovala správnu odpoveď.

TESTY OČAMI UČITEĽOV A ŽIAKOV

Súčasťou pilotného testovania maturantov je každoročne aj administrácia veľmi podrobných učiteľských a žiackych dotazníkov. V nich majú učitelia a žiaci možnosť vyjadriť sa (bezprostredne po administrácii testov) k jednotlivým aspektom použitých testov. Analýza ich odpovedí a názorov je cenných zdrojom informácií najmä pre tvorcov testov, ale aj pre organizátorov a realizátorov testovania (ŠPÚ, EXAM). Hoci sa v učiteľských dotazníkoch vyskytujú aj jednotlivé konkrétne výhrady a kritické pripomienky (rôzneho charakteru), celkovo možno konštatovať, že testy sú (každý rok) učiteľmi hodnotené prevažne pozitívne. Osobitne dôležitý je názor učiteľov na tri základné aspekty každého testu: jeho súlad s učebnými osnovami, mieru štandardnosti použitých položiek a obťažnosť testu pre študentov. V týchto otázkach dochádza každoročne k zaujímavému javu: hoci prevažná väčšina učiteľov hodnotí testy ako úzko súvisiace s osnovami, štandardné a primerane náročné, výsledky žiakov tomu nezodpovedajú.

OPAKOVANIE BEZ HODNOTENIA

Matúš Harminc, Prírodovedecká fakulta UPJS, Košice

V škole sú situácie, keď je potrebné zistiť úroveň vedomostí detí. Nie vždy je vhodné toto zisťovanie uzatvárať hodnotením známkami. V nasledujúcich riadkoch stručne popíšeme metódu, ktorú sme pre tento účel rozpracovali.

Učiteľ pripraví úlohy zamerané podľa potreby na to učivo, ktorého zvládnutie chce zistiť. Tvorí ich z príkladov, ktoré majú viac riešení. Znenia úloh nesmú byť dlhé, aby ich bolo možné riešiť bez zápisu, len po vypočutí si úlohy. Je možné pomôcť deťom obrázkom alebo zoznamom čísel na tabuľu. Na skupiny rozdelená trieda – napríklad po piatich – rieši po vypočutí každú úlohu a každá skupina zapíše svoju odpoveď, pre ktorú sa spoločne rozhodne. Uvedieme ukážky troch typov úloh z učiva o zlomkoch:

1. *Uveď dva zlomky, z ktorých každý sa dá rozšíriť (prirodzeným číslom väčším než jedna) na 20/42 alebo na 12/24.*
2. *Pomocou štyroch rôznych cifier a zlomkových čiar (a ničoho iného) utvor čo najväčší zložený zlomok.*
3. *Napíš čo najviac (usporiadaných) trojíc zlomkov s čitateľom rovným jednej a prirodzenými menovateľmi tak, aby súčet každej trojice bol jedna polovica.*

Prvú úlohu vyhodnocujeme tak, že za nesprávnu odpoveď (iný zlomok než 10/21, 1/2, 2/4, 3/6, 4/8 a 6/12) nezíska skupina žiaden bod. Ak všetky skupiny uvedú niektorú zo správnych možností, získavajú za ňu po jednom bode. Ak len jedna skupina nemá nejaký zlomok, ostatné skupiny za jeho uvedenie získavajú dva body,..., ak je niektorá odpoveď ojedinelá – má ju iba jedna skupina – bodový zisk za ňu je rovný počtu skupín detí. U druhej úlohy zoradíme zlomky podľa veľkosti a počnúc najmenším udelíme jeden bod, dva body, ..., až po počet rôznych správnych zložených zlomkov. Za nesprávny zlomok body neudelíme. V tretej úlohe opäť akceptujeme len správne odpovede (trojice menovateľov sú 3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 3,12,12; 4,5,20; 4,6,12; 4,8,8; 5,5,10; 6,6,6). Tentoraz udelíme jeden bod skupinám, ktoré majú najmenší počet správnych trojíc (ale aspoň jednu). Za vyšší počet trojíc postupne pridávame po bode.

Ako sa ukázalo v priebehu ukážky a v diskusii o nej, má táto metóda opakovania nielen možnosti využitia, ale aj slabiny. Zaradenie ukážky do programu tohtoročného EXODu Pytagoras ich odhalilo a prispelo k uvedomeniu si ich existencie a podstaty. Podrobnejšie je opakovanie učiva a doplňovanie vedomostí naznačeným spôsobom rozoberané v [1] a v [2].

[1] M. Harminc: Zoznámte sa: Opakovacia metóda Zriedkavec, *Orava Journal, Vol. 1 (2000), No. 4, 36 – 37*
[2] M. Harminc, I. Semanišinová: The Rareer, Method of Repetition, The Eighth Czech-Polish Math. School, *Ústí nad Labem, June 2001 (v tlači)*

ŠTRUKTUROVANIE MATEMATICKÝCH VEDOMOSTÍ[1]

Milan Hejný, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

1. ÚVOD

Skúste si vyriešiť nasledujúcu úlohu: V rovine sú dané 4 rôzne body S_1, S_2, X a Z. Nájdite otočenie r_1 so stredom S_1 a otočenie r_2 so stredom S_2, tak, aby platilo $r_2(r_1(X)) = Z$.

Uvedená úloha, ktorú k didaktickému výskumu odporučil kol. Milan Kočandre, bola zadaná stredoškolákom, učiteľom stredných škôl, aj študentom MFF. Analýzy týchto riešení, ktoré v rokoch 1994 – 1996 uskutočnila Iva Malechová (1996) ukázali, že pre niektorých riešiteľov je úloha jednoduchá, pre iných veľmi náročná.

Tí riešitelia, ktorí sa zamerali na hľadanie bodu $Y = r_1(X)$ skúmaním rovnoramenných trojuholníkov XS_1Y a ZS_2Y pracovali dlho a nie vždy s úspešným koncom. Tí, ktorí si nakreslili kružnicu k_1 so stredom S_1 a polomerom $|XS_1|$ a kružnicu k_2 so stredom S_2 a polomerom $|ZS_2|$ boli hotoví okamžite. Podstata rozdielu oboch prístupov spočíva v kognitívnom štýle riešiteľa. Prví riešitelia postupovali konceptuálne – nakreslili finálny obrázok a začali ho analyzovať. Druhá skupina riešiteľov postupovala procesuálne – stav „otočenie“ nahradili procesom „otáčanie“ a riešenie ihneď videli.

Pri opätovnom prezeraní analýz I. Malechovej ma napadlo, či sa tu neprejavuje aj ďalší faktor kognitívneho štýlu – štrukturácia. Táto myšlienka zrela v mojom vedomí pár rokov. Cez jej prizmu som opätovne čítal niektoré kapitoly z Aristotela, Bella, Poppera, Kvasza, van Hieleovcov a Vopěnku (pozri odkazy v literatúre). Myšlienka štrukturácie bola obohacovaná spoluprácou s viacerými kolegami. Boli to S. Bednářová, S. Domoradzki, D. Jirotková, J. Kratochvílová, M. Kubínová, F. Kuřina, N. Stehlíková, E. Swoboda, M.Tichá, J. Višňovská, J. Zhouf, J. Žabka a A. Żeromska (odkazy v literatúre).

V zajatí otázky „Čo to je budovanie matematickej štruktúry?“ som túto tému navrhol na pracovnú skupinu (working group) CERME. Téma bola programovým výborom prijatá a tak vo februári 2001 v Mariánskych Lázňach na druhej konferencii CERME mala WG1 názov *Building mathematical structure.* V skupine odznelo osem príspevkov, medzi nim tri pražské: Hejný (2001), Kratochvílová (2001) a Stehlíková-Jirotková (2001). Tento článok je venovaný prezentácií myšlienok prvého z uvedených príspevkov, rozšírených o niektoré ďalšie podnety.

2. FORMULÁCIA PROBLÉMU

V polovici 20. storočia vrcholil vo vývoji matematického myslenia prúd Bourbakiho. Bourbaki nebol človek z mäsa a kostí, ale pseudonym skupiny mladých francúzskych vynikajúcich matematikov, ktorí sa rozhodli napísať *Architektúru matematiky*, mnohozväzkovú encyklopédiu matematického poznania polovice 20. storočia osnovanú na pojmoch množina a prvok množiny. Každá matematická disciplína bola v tomto diele pojatá ako štruktúra a prezentovaná axiomaticky. Štruktúrou v tomto zmysle sa rozumie univerzálna množina, na ktorej sú zavedené rôzne operácie, relácie, súbory podmnožín ap. Pripomeňme niektoré: $(N,+,x,\,|\,)$ teda prirodzené čísla, sčítanie, násobenie a deliteľnosť, ďalej: projektívna rovina, alebo grupa, alebo graf, …

Naša pozornosť je obrátená k matematickej štruktúre vnímanej inak: k tej, ktorá je uložená vo vedomí človeka, teda k *štruktúre matematických vedomostí indivídua* (ŠMVI).

[1] Štúdia vypracovaná s podporou výskumného zámeru VZ J13/98:1141200002 (garant S. Štech).

3. POKUS O OSVETLENIE POJMU ŠMVI

Pozrime na autority.

Podľa Piageta má mentálna štruktúra tri charakteristiky:

1. Štruktúra má totalitu,
2. Štruktúry sa zmocňujeme transformáciou a
3. Štruktúra je autoregulatívna

Prvá a tretia charakteristika hovorí o vlastnosti štruktúry, druhá o jej konštruovaní. Stručné formulácie sú príliš všeobecné a potrebovali by podrobné vysvetlenie. To autor tohto článku nie je schopný podať.

Podľa Gestalt-psychológie je mentálna štruktúra riadená štyrmi vlastnosťami:

1. Štruktúra pripúšťa rozšírenie; ak niekto pozná časť štruktúry, pozná aj jej rozšírenie,
2. Štruktúra môže byť nazeraná ako časť jemnejšej štruktúry,…(N,+) je časťou (N,+,x)
3. Štruktúra môže byť nazeraná ako časť širšej štruktúry,… (N,+) leží vnútri (Z,+)
4. Štruktúra môže byť izomorfná s inou štruktúrou. E^1 je izomorfná s R

Štvorica myšlienok je inšpirujúca, ale neoznačuje podstatu nášho ponímania ŠMVI. Naviac prvá z uvedených výpovedí obsahuje dve tvrdenia. Prvé je nepochybne pravdivé, ale druhé je problematické. Žiak, ktorý pozná štruktúru reálnych čísel, nemusí vôbec poznať štruktúru komplexných čísel, ktorá je rozšírením predošlej.

Podľa nášho názoru podstatu ŠMVI vystihol Alan Bell (1993) slovami : „…a fundamental fact about learned material is that richly connected bodies of knowledge are well retained; isolated elements are quickly lost.” Táto idea previazanosti poznatkov, idea „connectedness” je podstatou ŠMVI v našom ponímaní:

ŠMVI je mnohovrstvová dynamická sieť, ktorej uzlíkmi sú poznatky ako pojmy, fakty, vzťahy, schémy, príklady, postupy, riešiteľské stratégie, algoritmy, argumenty, hypotézy,… Uvedená sieť prepojuje navzájom jednotlivé uzlíky - čím je sieť hustejšia, tým je kvalitnejšia. Sieť jednotlivé „uzlíky“ organizuje a hierarchizuje.

V minulosti sme mali možnosť poznať viacerých žiakov s vysokým štrukturačným apetítom. V pedagogických denníkoch máme o týchto žiakoch viacero záznamov svedčiacich o ich snahe svoje poznanie organizovať a niekedy dokonca i hierarchizovať. Často kreslili obrázky, tabuľky, grafy, prehľady, písali zoznamy, snažili sa usporiadať určitý súbor javov, uvidieť ho ako štruktúru. Príznačným rysom všetkých týchto postupov bola veľmi častá reštrukturalizácia. Jeden deň sa pochválili pekným prehľadom, „ktorý im umožnil naplno porozumieť danej problematike“, druhý deň oznámili, že ich prehľad je nepresný a ďalší deň priniesli „teraz už bezchybný prehľad“. Ten sa prirodzene po par dňoch stal nedokonalým. Skoro všetci z týchto žiakov svojimi dnešnými intelektuálnymi výkonmi ukazujú vysokú úroveň špekulatívneho myslenia.

Štrukturačný apetít je podľa našich skúseností silný diagnostický rys matematicky, a asi aj intelektuálne talentovaného žiaka. Pritom štrukturácia prebieha vo vedomí žiaka autonómne, žiak odmieta iný ponúkaný prehľad, ale víta debaty o vlastnom prehľade.

4. BOLZANO-POPPEROVÉ SVETY VEDOMIA A KULTÚRY

Bertrand Bolzano v práci Wissenschaftslehre vydanej v roku 1837 v prvom diele v §26 upozorňuje na potrebu odlíšiť poznanú pravdu a pravdu o sebe. (Bolzano, 1981, s. 66). Táto hlboká úvaha viedla Karla Poppera k myšlienke rozdeliť celé, obklopujúce nás univerzum (vrátane nás samých) do troch svetov: sveta vecí, sveta vedomia a sveta kultúry. Bližšie pozri K Popper (1997, s.67, alebo 1995, s. 173), alebo Hejný-Kurina (1999). Na možnosť využiť Bolzano-Popperovo delenie univerza aj v oblasti didaktiky matematiky ako prvý upozornil kolega František Kuřina. Dodajme, že v našom ponímaní je pôvodný Kuřinov prístup mierne pozmenený. Napríklad i v tom, že prvý svet úplne vypúšťame z našich úvah. Pozornosť zameriame iba na druhý a tretí svet a na ich vzájomné prepojenie.

Druhý svet Karla Poppera je svet ľudských vedomí, svet interný. Sem patrí obsah vedomia každého žijúceho, poprípade už i nežijúceho človeka, v každom časovom okamžiku. Teda aj myšlienkový proces žiaka, ktorý rieši matematickú úlohu. Akonáhle žiak svoje myšlienky položí na papier a tak ich urobí prístupné pre ďalších ľudí, prenáša ich z druhého sveta do tretieho sveta.

Tretí svet Karla Poppera je svet kultúry, svet externý. Sem patria všetky ľudským vedomím vytvorené javy: reč, písmo, náboženstvo, hudba, Pytagorova veta, rituály, kuchárske recepty, matematické pojmy, žiakovo riešenie úlohy napísané na papieri. Dodajme, že v priebehu riešenia žiak (ale vlastne každý človek) často napíše niečo, čomu iný človek nerozumie. Tento nápis, ktorý nemožno považovať za súčasť tretieho sveta, lebo nie je zrozumiteľný iným ľuďom, sme v monografii Hejný-Stehlíková (1999, s. 66) nazvali *súkromná informácia*. V uvedenej práci problém vzťahu druhého a tretieho sveta podrobne analyzujeme.

V celom článku dôsledne rozlišujeme medzi interným a externým svetom. Štruktúra matematických vedomostí náleží do interného sveta, teda do vedomia istého človeka. Naproti tomu to, čo leží v externom svete, teda mimo vedomie človeka, to čo možno nájsť napísané na papieri, budeme volať *Prostredie matematickej štruktúry* (PMŠ). Euklidove Základy a vyššie spomínaná Bourbakiho Architektúra matematiky sú veľkolepé príklady PMŠ. Pozrime na niektoré ďalšie PMŠ vhodné na štúdium javu štrukturácie.

5. PRÍKLADY PROSTREDÍ MATEMATICKÝCH ŠTRUKTÚR (PŠM)

V školskej matematike je veľký počet najmä aritmetických štruktúr: (N,+), (N,+,x), (N, |), (Q,+,x), (Z,+,-) , ap. To, že sa jedná o štruktúru spočiatku žiaci vôbec nevidia a tento náročný pohľad si osvojuje iba pomaly a dlhodobo. Keď chceme žiakovi, ktorý už má dostatočne vysoký stupeň špekulatívneho myslenia aj isté matematické vedomosti ukázať cestu k javu štruktúry, môžeme k tomu účinne použiť niektorú „neškolskú“ štruktúru. Šesť takých štruktúr tu uvedieme. Všetky náležia do tretieho sveta Karla Poppera, teda do sveta kultúry.

Štruktúra ∇ - Súčtové trojuholníky. Trojuholníkom dimenzie 4, (znak ∇_4) rozumieme tabuľku 10 čísel a, b,…, j pre ktoré platí: a+b = e, b+c = f, c+d = g, e+f = h, f+g = i, h+i = j. Keď sú z týchto čísel dané 4 „nezávislé“, sú tým určené všetky čísla trojuholníka.

a		b		c		d
	e		f		g	
		h		i		
			j			

Štruktúra A_n – Redukovanú aritmetiku (jedná sa v podstate o aritmetiku zvyškových tried), najmä pre n = 2 pozri Stehlíková (2001)

Štruktúra T – Triádou rozumieme usporiadanú trojicu prirodzených čísel (a,b,c) pre ktorú c = a+b. Štruktúru triád ako nástroj didaktického výskumu použila Kratochvílová (2001).

Štruktúra Grid – Štvorčekovaný alebo trojuholníkový, alebo šesťuholníkový papier. Celá paleta partikulárnych štruktúr je uvedená v skriptách Hejný, Jirotková (1999).

Štruktúra (M,-o-) – množina bodov priamky, roviny, alebo priestoru s binárnou operáciou „stred dvojice bodov“. V knihe Hejný (1990) sú v kontexte tejto štruktúry modelované niektoré veľké myšlienky geometrie – napríklad dôkaz tvrdenia neriešiteľnosti trisekcie uhla.

Štruktúra (N,%) – množina N s binárnou operáciou % danou predpisom a%b = ab + a + b. Doteraz sme túto štruktúru vo výskumoch nepoužili. Napríklad dať siedmakom nájsť všetky čísla, ktoré sa dajú vyjadriť iba pomocou číslice 1, operácie % a zátvoriek (ilustrácia: 14 = (1%1)% (1%1)).

6. ŠTRUKTÚRA PARTIKULÁRNA A ŠTRUKTÚRA UNIVERZÁLNA

Idea čiastočne prevzatá z Gestalt-psychológie (pozri hore). Oba pojmy uvedené v nadpise osvetlíme na príkladoch.

Univerzálna štruktúra súčtových trojuholníkov $\mathbf{\nabla} = \{\nabla_n; n = 2,3,4,\dots\}$ sa skladá z postupnosti $\nabla_2, \nabla_3, \nabla_4, \nabla_5$, partikulárnych štruktúr.

Podobne, ak redukovanú aritmetiku A_n. nazeráme ako svojbytnú štruktúru, tak o nej hovoríme ako o štruktúre partikulárnej. Ak uvažujeme o súbore všetkých týchto redukovaných aritmetík $\mathbf{A} = = \{A_n; n = 1,2,3,\dots\}$ tak hovoríme o štruktúre univerzálnej.

Aj u triád môžeme okrem univerzálnej štruktúry uvažovať partikulárne štruktúry určené jediným koreňovým prvkom. Teda napríklad množina T_n všetkých následníkov prvku (n,n,2n) tvorí partikulárnu podštruktúru štruktúry triád. Vzťah univerzálnej štruktúry a jej partikulárnych štruktúr je v prípade triád jednoduchý (niet tu v podstate rozdielu v náročnosti), v prípade súčtových trojuholníkov je zložitejší a v prípade A- štruktúry veľmi náročný.

Prvák, ktorý sa učí rátať najprv s jednocifernými číslami, potom s dvojcifernými, ďalej s trojcifernými,… napreduje v podstate postupným rozširovaním partikulárnej štruktúry. Piatak má už predstavu štruktúry univerzálnej – všetkých prirodzených čísel. .

7. OBJAVOVANIE ŠTRUKTÚRY

Pokúsili sme sa mapovať spôsoby objavovania štruktúr. Vychádzali sme z metódy paralely medzi onto- a fylo-genézou: v histórii matematiky sme hľadali rozličné spôsoby objavovania štruktúry (grupa, pole, sférická geometria, projektívna geometria, analytická geometria, analytické funkcie, variačný počet,…) a porovnávali s tým naše pedagogické, prípadne introspekčné skúsenosti.

Porovnávanie ukázalo, že metódu paralely treba aplikovať veľmi citlivo. Treba upozorniť najmä na dve skutočnosti, ktoré sú prekážkou priameho použitia tejto metódy.

Prvá. Historický proces štrukturácie je vždy tápaním. K tvorbe štruktúry sa dospieva cez viaceré reštrukturalizácie, cez mnohé omyly a okľuky. Žiakovi či poslucháčovi je matematika dávaná spôsobom, ktorý už v svojom základnom pláne, v osnovách, učebniciach i vyučovaní má zabudované hotové štruktúry. Tento program obmedzuje vážnejšie okľuky a dlhodobé omyly, umožňuje rýchle napredovanie, ale okliešťuje autonómiu žiaka.

Druhá. Historická štrukturácia (napríklad euklidovskej planimetrie, reálnych čísel, teórie množín, pravdepodobnosti, …) bola často intelektuálne veľmi náročná na rozsah vedomostí a preto je vo väčšine prípadov neuskutočniteľná v ontogenéze.

Obe uvedené prekážky použitia metódy genetickej paralely je možné do určitej miery prekonať. Prvú prekážku prekonáme tak, že sa nezameriame na celý štrukturačný proces, ale iba na motivačné dominanty, ktoré štrukturačný proces vyvolali a dôležité impulzy, ktoré sa v ňom vyskytli. Ilustrácie takých impulzov budú uvedené nižšie.

Druhú prekážku možno prekonať pomocou simulácie. Nájdeme taký kontext v ktorom je na jednoduchom matematickom obsahu možné simulovať štrukturáciu náročnej matematickej oblasti. Obyčajne nie celú štrukturáciu, ale aspoň niektorej jej významné myšlienky. Už v časti 4. sme uviedli, že štruktúru (M,-o-) sme použili na simuláciu dôkazu tvrdenia neriešiteľnosti trisekcie uhla. V našej štruktúre išlo o to, že nástrojom, ktorým možno poliť úsečku nemožno zostrojiť bod, ktorý delí danú úsečku v pomere 1:2. Náš dôkaz je simuláciou dôkazu známeho z histórie: namiesto konštrukcie rozširovania polí tu ide o konštrukciu poľa zlomkov $n/2^n$.

8. TYPY OBJAVOVANIA ŠTRUKTÚRY

Uvedieme päť spôsobov objavovania štruktúry, ktoré sa nám podarilo doteraz identifikovať. Hranice medzi jednotlivými spôsobmi sú neostré, často je možné ten istý objav zaradiť do dvoch či viacerých prípadov.

Organizáciou súboru poznatkov. Spočiatku sú tu viac-menej izolované poznatky bez štruktúry. Súbor poznatkov narastá a stáva sa ucelenejší, poznatky sú čoraz viac navzájom prepojené. Človek si celý súbor spontánne organizuje a príležitostne aj reorganizuje. Potom môže prísť potreba, celú organizáciu presne formulovať. V tomto okamžiku začína vedomý štrukturačný proces. Proces štrukturácie je dlhodobý a ide iba pomaly.

Abstrakciou abstraktne nižších štruktúr, ktoré sú tu v roli separovaných či univerzálnych modelov budúcej abstraktnejšej štruktúry. Jadrom tejto štrukturácie je objavenie nového organizačného princípu. Ten potom často slúži na reorganizáciu viacerých pôvodných štruktúr.

Zovšeobecnením existujúcich štruktúr. Na rozdiel od predchádzajúcej abstrakcie tu nie je nutné objaviť nový princíp. Stačí zovšeobecniť špecifické princípy už objavené.

Prenosom známej existujúcej štruktúry do nového kontextu. Nový kontext býva myšlienkovo náročnejší a často i prekvapivejší. Hodnotné sú najmä myšlienky, ktoré popisujú rozdiel oboch kontextov. Tie môžu viesť k vytvoreniu novej, nadradenej štruktúry, ktorá potom vzniká abstrakciou. Špeciálnym prípadom prenosu je rozšírenie kontextu. Tu sa pôvodná štruktúra stáva časťou novej všeobecnejšej štruktúry, ktorá tratí niektoré vlastnosti štruktúry pôvodnej.

Účelovo, ako nástroj na riešenie náročného problému. Riešenie problému vyžaduje získať nový a hlboký vhľad do istej oblasti. K tomu je nutné túto oblasť štrukturovať.

Konkrétny objaviteľský proces môže v sebe amalgamovať viacero spôsobov. Prípady ilustrujeme.

8.1. Štruktúra vytvorená organizáciou poznatkov

Už v štvrtom storočí pred Kristom mali Gréci rozsiahle matematické poznatky. Bolo urobených niekoľko pokusov tieto poznatky organizovať. Okolo roku 300 pred. Kr. napísal Euklides slávne Základy, v ktorých do uceleného systému zorganizoval skoro celé vtedajšie matematické poznanie. Princíp organizácie prevzal Euklides z filozofie. Do základov stavby dal substancie bod, čiaru, priamku, incidenciu a zhodnosť (či vzdialenosť). Tieto substancie potom previazal základnými vlastnosťami – axiómami a postulátmi.

Iným príkladom je štrukturovanie, presnejšie vytvorenie, logiky. Bohatý súbor logických vzťahov a najmä sofistických „chytákov“ rozpracoval a do ucelenej teórie stmelil Aristoteles v päťdielnej práci Organon. Ako organizačný princíp zvolil schému sylogizmu.

Prejdime od histórie k žiakovi. Keď prvák objaví, že sčítanie 3 + 6 + 7 + 4 možno urobiť šikovne (sčítať najprv 3 + 7 a potom 6 + 4), tak na úrovni poznania v činnosti objavil komutatívny zákon, ktorý je jedným zo stĺpov štruktúry (N,+). Neskôr tento žiak zistí, že výraz 3 – 7 + 5 má zmysel, hoci jeho prvá časť 3 – 7 zmysel nemá. To je ďalší kúsok objavu štruktúry (N,+), ktorý je už navyše aj dobrou propedeutikou k neskoršiemu objavu rozšírenej štruktúry (Z,+).

Učiteľka učila siedmakov algoritmus rozkladu prirodzeného čísla na prvočísla takto: najprv číslo delíme číslom 2 tak dlho, až dostaneme číslo nepárne. To číslo delíme číslom 3 tak dlho, dokiaľ sa dá. Číslo čo ostalo delíme číslo 5 tak dlho dokiaľ sa dá. Potom postupujeme k číslam 7, 11, 13, … Lenka ale pri rozklade čísla 3000 postupovala svojsky: 3000 = 3.1000 = 3.10.10.10 = 3.2.5.2.5.2.5 = $3.2^3.5^3$. Objavila nový postup, pri ktorom nevdojak použila vážny štrukturálny poznatok: existujú rôzne cesty rozkladu, ale výsledný rozklad je (až na poradie rozložených čísel) jediný.

8.2. Štruktúra objavená abstrakciou

Typickým príkladom je Erlangenský program Felixa Kleina. (Vorgleichende Betrachtungen uber neuere geometrische forschungen, 1872). V úvode práce Klein najprv píše (preložené z ruského prekladu) *„Medzi objavmi, ktoré boli urobené v oblasti geometrie za posledných 50 rokov, prvé miesto náleží rozvoji projektívnej geometrie.*“ Ďalej Klein osvetľuje dva základné princípy budovania geometrie – metrický a projektívny. Potom sa pýta *„či neexistuje všeobecný princíp, z ktorého by plynuli obe metódy?*“ Ukazuje, že tým princípom je nový pohľad na geometriu: geometria je dvojica (M,G), kde M je množina bodov a G je grupa transformácií množiny M. Namiesto geometrických útvarov, ktoré až do Kleina hrali hlavnú úlohu v geometrických úvahách, dal F. Klein do základov geometrickej štruktúry pojem transformácie.

Prejdime k žiakovi. V knihe Hejný a kol. (1990, s. 33-34) píšeme ako tretiak Tomáš objavil, že v štruktúre súčtových trojuholníkov ∇_5 jednotlivé čísla prvého riadku prispejú k spodnému číslu. Pár rokov neskôr rozpracoval túto myšlienku iný žiak, siedmak Peťo, ktorý prišiel na to, že každý trojuholník ∇_4 môže byť písaný ako súčet štyroch „jednoduchých“ trojuholníkov. Tak nazval trojuholník, ktorého prvý riadok obsahuje tri nuly a jedno nenulové číslo. Túto myšlienku používal nielen k riešeniu, ale i k tvorbe nových úloh. Stala sa jeho organizačným princípom štruktúr ∇_n. Myšlienka je blízka k myšlienke rozkladu vektora do bázy a je simuláciou myšlienky bázy vektorového priestoru.

8.3. Štruktúra objavená zovšeobecnením

Štruktúru grupy (G,*) možno chápať ako zovšeobecnenie štruktúr (Z,+), (Q_+,.), (súbor všetkých rovinných izometrií, skladanie izometrií), (súbor všetkých permutácií množiny M, skladanie permutácií), (množina všetkých regulárnych matíc nxn, násobenie matíc), atd. Namiesto konkrétnych množín Z, Q_+, súbor rovinných izometrií, súbor permutácií množiny M, množina regulárnych matíc, atd. je zoberieme všeobecnú množinu G a namiesto binárnych operácií +, ., o, o, násobenie matíc, zoberieme binárnu operáciu * o ktorej požadujeme aby splňovala známe vzťahy vyvodené zo vzťahov konkrétnych prípadov. Tak sa pojem grupy zavádza na vysokej škole, ak sa len nepostupuje tvrdo axiomaticky.

Rozdiel medzi abstrakciou a zovšeobecnením je zásadný. U abstrakcie ide o objav novej podstaty, pri zovšeobecnení iba o vybratie toho, čo je spoločné v dobre známych situáciách.

Proces štrukturovania zovšeobecňovaním možno skúmať pomocou metódy uvoľňovania súradníc/parametra (pozri Hejný a kol. 1990, s. 404-414 a Hejný-Jirotková 1999, s. 28-36).

8.4. Štruktúra objavená prenosom

Sférická geometria budovaná gréckymi matematikmi vznikala prenosom geometrie euklidovskej. Trigonometria oboch vznikala súčasne. Analýza funkcií viacerých reálnych premenných aj analytické funkcie sú rozšírením (i zovšeobecnením) funkcie jednej reálnej premennej. Variačný počet vznikol prenosom myšlienky „nekonečne malej zmeny“ z čísel na funkcie a krivky. Samozrejme, že vo všetkých uvedených príkladoch prenos sám nestačil. Bolo potrebné odhaliť nové pojmy, nové vzťahy, nové situácie.

Pekným žiackym príkladom objavu princípu prenosu štruktúr bola úloha, ktorú dal svojim spolužiakom siedmak Emil: vytvoriť magický štvorec 3x3, v ktorom je 9 rôznych čísel (tie nemusia ísť bezprostredne za sebou) a súčin každých troch čísel v riadku či každých troch v stĺpci, či každých troch v diagonále je ten istý. K tejto situácii sa obšírne vrátime v príklad 4 v časti 11.

Iný príklad prenosu vhodný pre žiakov je prechod od štvorčekového papiera k papieru trojuholníkovému. Napríklad skúmanie Pickovej formuly na trojuholníkovom papieri.

8.5. Štruktúra objavená účelovo

Jedná sa objav, ku ktorému dochádza akoby mimochodom. Štruktúra tu nie je spočiatku v strede záujmu objaviteľa. Jeho pozornosť je sústredená na riešenie iného problému. Cesta k riešeniu ale vedie cez vytvorenie novej, dovtedy nepoznanej štruktúry. Z histórie možno uviesť viacero príkladov. My sa obmedzíme na dva.

Problém rovnobežiek mal ku koncu 17. storočia už dvojtisícročnú históriu. Mnohé pokusy dokázať piaty Euklidov postulát (daným bodom možno s danou priamkou viesť práve jednu rovnobežku) neviedli k želanému výsledku. Italský matematik Saccheri prišiel s myšlienkou nahradiť tento postulát jeho negáciou a vytvoriť tak nový axiomatický systém akejsi novej geometrie. Veril, že taká geometria nemôže existovať a teda pri jej tvorbe sa dôjde ku sporu. Tým by bol piaty postulát dokázaný. Saccheriho myšlienku do konca doviedli nezávisle na sebe Gauss, Lobačevský a Bolyai. Každý z nich vytvoril štruktúru novej planimetrie, dnes nazývanej menom Lobačevského.

Pilierom štruktúry algebry je grupa. Spoluobjaviteľom grupy bol na počiatku 19. storočia Evariste Galois. Pri hľadaní postupu riešenia rovnice piateho stupňa došiel Galois k poznaniu, že „vzorec“

na nájdenie koreňov neexistuje. Namiesto procesu hľadania koreňov dal do stredu pozornosti koncept – štruktúru všetkých koreňov rovnice piateho stupňa. Tento krok bol proceptuálny transfer. Ak má rovnica $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$ korene p, q, r, s, t kde A,…F sú racionálne (teda celé) čísla a p,…t čísla komplexné, tak uvažujeme pole, ktoré vznikne z poľa racionálnych čísel Q rozšírením o prvky p,…t. Toto pole Q(p,q,r,s,t) je tvorené všetkými číslami f(p,q,r,s,t)/g(p,q,r,s,t), kde f i g sú polynómy s piatimi premennými a $g(p,q,r,s,t) \neq 0$. Posledný krok konštrukcie je tvorba grupy G izomorfizmov poľa Q(p,q,r,s,t). Riešiteľnosť pôvodnej rovnice piateho stupňa je ekvivalentná istej podmienke o grupe G.

9. METÓDY SKÚMANIA ŠMVI?

Uvádzame päť metód použiteľných pri štúdiu ŠMVI. Všetky boli už použité pred viac ako 15 rokmi pri skúmaní fenoménu formálnosti poznania a pri jeho diagnostikovaní. Navrhované použitie je iba modifikáciou predchádzajúceho.

<u>Vysvetli myšlienku</u> (prvočíslo, obsah útvaru, zlomok, trojuholník, Pytagorova veta) svojmu a) spolužiakovi, b) mladšiemu súrodencovi/priateľovi. Kvalitu ŠMVI možno posúdiť podľa toho, do akej miery vysvetľovanie opakuje to, čo bolo žiakovi predložené v škole. Čím autonómnejšie je jeho vysvetľovanie, tým kvalitnejšia je ŠMVI.[2]
<u>Príklad 1.</u> Osemročný chlapec sa pýtal staršej sestry, čo to je percento. Dievča mu ukázalo vzorce: percento = 100 časť/základ, z = 100č/p, č = pz/100. Chlapec s tým nebol spokojný. Povedal „Nepýtam sa ťa, ako sa to ráta, ale čo to je“. Dievča nebolo schopné na túto otázku odpovedať. Pojem percenta nemalo štrukturovaný.

<u>Popíš daný pojem neštandardným spôsobom.</u> Napríklad definuj pojem „kružnica“ bez použitia pojmu vzdialenosť (dĺžka, zhodnosť,…), alebo definuj „najmenší spoločný násobok dvoch prirodzených čísel“ bez použitia pojmov násobok, deliteľ (násobenie, súčin, delenie,…). Obyčajne žiak odpovie, že sa to nedá, pretože je presvedčený, že každý pojem má jedinú definíciu – tú, čo je napísaná v učebnici. Dokonca sme poznali študenta, budúceho učiteľa matematiky, ktorý trval na tom, že v dobre budovanej matematike má každý pojem iba jednu definíciu a všetky ďalšie sú už vety.

<u>Použi neštandardný spôsob zápisu.</u> Napríklad žiadame študenta, aby písal ↑5 namiesto +5 a ↓3 namiesto –3. Je zaujímavé, že piataci si pri tejto zmene počínajú lepšie ako ôsmaci, ktorí majú stále sklony prepísať šípkovú symboliku do znamienkovej. Náročnejšie je žiadať žiakov, aby počítali pomocou rímskych čísel. Napríklad, aby vynásobili LXI a CCIL.

<u>Danú úlohu vyrieš s obmedzenými prostriedkami.</u> Napríklad nájdi stred strany narysovaného obdĺžnika pomocou (iba!) pravítka. Alebo vynásob čo najúspornejšie dve 10-miestne čísla na kalkulačke, ktorá má iba 12-miestny display.

<u>Odvoď jednu myšlienku z inej.</u> Napríklad vzorec pre obsah lichobežníka zo vzorca pre obsah trojuholníka. Alebo vzorec pre $\sin(\alpha-\beta)$ zo vzorca $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

10. SKÚMANIE ŠMVI

Ako sme už uviedli vyššie, ŠMVI je budovaná dlhodobo a preto jej štúdium „in vitro“ má iba obmedzený dosah. Myslíme, že komplexné porozumenie budovania ŠMVI je možné iba pri dlhodobom pozorovaní indivídua. To je uskutočniteľné najlepšie tak, že si učiteľ vedie denník o (aspoň

[2] V tejto súvislosti treba poukázať na škody, ktoré vo vedomí žiakov a študentov pácham my učitelia, keď od nich vyžadujeme imitáciu našich riešiteľských postupov a reprodukciu učebnice. Naša mládež je tak systematicky vedená k presvedčeniu, že učiť sa znamená reprodukovať. Z praxe vieme, že niektorí jedinci tlaku školy odolajú a stanú sa v živote úspešnými ľuďmi.

niektorých) žiakoch svojej triedy, ktorú učí aspoň 2-3 roky. Na základe takého materiálu je už, podľa nášho názoru, možné robiť nádejné a hlboké analýzy.

Pri skúmaní dokumentácie, ktorú som vytvoril v priebehu skoro 10-ročného vyučovania na ZŠ v dobe od roku 1975 do roku 1989 som dospel k poznaniu, že je veľmi ťažké identifikovať tie javy, ktoré možno chápať ako tvorbu ŠMVI. V podstate každá nová myšlienka, ktorú si žiak sám objavil, alebo aspoň osvojil, prispela, alebo aspoň mohla prispieť, k tvorbe ŠMVI.

Napriek tomu je asi možné zaostriť pozornosť na tri javy, ktoré pri skúmaní tvorbe ŠMVI hrajú osobitne významnú rolu:

1. objavenie sa otázky týkajúcej sa štruktúry niektorej oblasti matematiky (Čo to je? Ako to pracuje? Prečo je to tak, ako to je? Ako tieto dve myšlienky navzájom súvisia?)
2. objavenie sa strategického matematického problému
3. odhalenie súvislosti dvoch či viacerých dovtedy oddelených poznatkov
4. organizovanie, poprípade i hierarchizovanie niektorého súboru poznatkov
5. rozšírenie (zovšeobecnenie) istého poznatku
6. snaha nájsť inú, neštandardnú riešiteľskú stratégiu
7. potreba vyjasniť si prípadnú disharmóniu medzi vedomosťami
8. reorganizácia existujúcej štruktúry
9. nájdenie vzťahu medzi dvomi štruktúrami
10. konštruovanie abstraktnejšej štruktúry
11. spísanie (grafické uchopenie) vytvorenej organizácie súboru poznatkov.

Niektoré z uvedených javov budeme ilustrovať v nasledujúcej časti. Niektoré sú podrobne ilustrované a analyzované v prácach Kratochvílovej a Stehlíkovej-Jirotkovej v tomto zborníku.

11. ODHALENIE SÚVISLOSTI MEDZI DVOMI POZNATKAMI

<u>Príklad 2</u>. Na stole ležala hracia kocka a traja štvrtáci Adam, Ben a Cyril mali povedať, aký je počet bodiek na spodnej stene kocky. Všetci použili stratégiu „ktorá chýba?“ Zistili, že na viditeľných stenách sú čísla 1, 2, 4, 5 a 6. Z toho usúdili, že na spodnej, neviditeľnej stene je číslo 3. Opakovali sme experiment ešte trikrát a potom boli hodené dve kocky. Tentoraz Ben ihneď správne určil obe ukryté čísla. Vysvetlil, že pochopil, že číslo dole možno určiť podľa čísla hore. Tie sú vždy dvojica. Tie tri dvojice si pamätá: 2-5, 1-6, 4-3.” Adam and Cyril ihneď pochopili Benovu myšlienku. Žiaden z chlapcov nepovedal, že súčet týchto opozitných čísel musí byť 7.

Nasledujúci deň sme urobili rovnaký experiment, ale s oktaédrom. Pri prvom pokuse chlapci opäť použili stratégiu „ktorá chýba?“. Adam potom vzal kocku a podrobne si ju prezeral. Chcel si zrejme zapamätať štyri dvojice protiľahlých čísel. To sa mu podarilo, lebo pri druhom pokuse Adam rýchlo povedal správny výsledok. Hneď dodal, že oproti sebe sú 3 a 6, 1 a 8, 7 a 2, a 4 a 5. Ben povedal, že Adam má dobrú pamäť. Adam odpovedal, že to nie je ťažké, lebo oproti malému číslu je vždy číslo veľké; „čím menšie je jedno, tým väčšie je druhé“ dodal.

Po pár dňoch sme hru hrali opäť, tentoraz s dodekaedrónom (pravidelným 12-stenom). Cyril chýbal, tak tu boli iba Adam a Ben. Adam ešte pred prvým hodom žiadal, že si chce prezrieť kocku. Ben oponoval, že to nie je spravodlivé. Hneď ale povedal, že teda dobre, ale on si tie dvojice zapíše. Obaja chlapci si začali písať svoj zoznam. Po chvíli, keď mali napísané iba 4 dvojice Ben vykríkol „trinásť je vždy“. Objavil, že súčet oproti sebe ležiacich čísel je 13. Bol veselý a vystatoval sa, ako to objavil. Adam pochopil myšlienku Bena. a povedal, že i u oktaédra to bolo tak. Tam ale súčet bol 9 a u kocky to bolo 7. Teraz už nebolo o čo hrať.

Potom som pripravil ikosaéder (pravidelný 20-sten) na ktorom som Benom objavené pravidlo narušil. Asi po polhodine som chlapcov žiadal, aby sme hrali tú istú hru s touto novou kockou. Povedal som im, že je to 20-sten. Ben sa pre istotu opýtal, či je teda na kocke 20 čísel. Pri prvom hode na hornej stene bolo číslo 12. Ben povedal „dole je osem“. Ja som o tom zapochyboval, ale Adam povedal „určite“. Hneď sa zháčil a opravil Bena na deväť. K Adamovi dodal, že musia vziať o jednu viac. Opäť som zapochyboval, ale chlapci boli istí odpoveďou. Opatrne som zdvihol kocku a ukázal na spodnej stene číslo 3. Adam vzal kocku do ruky, obaja ju prezerali a Ben povedal „to je falošná kocka“.

Uvedený experiment obsahuje 6 objavov, ktoré chlapci urobili. Stratégiu „ktoré číslo chýba?“ poznali už skôr a preto ju medzi objavy nezaraďujeme. Objavy chlapcov:

a) Čísla na protiľahlých stenách tvoria páry; ak ich poznáš, ľahko danú úlohu vyriešiš (hexaéder).
b) V každom páre je jedno malé a jedno veľké číslo; čím je to malé menšie, tým je to veľké číslo väčšie (oktaéder).
c) Súčet čísel každého protiľahlého páru na dodekaédre je konštantné.
d) Pravidlo, objavené na dodekaédri platí i hexaéder a oktaéder a teda musí platiť aj na ikosaédri.
e) Ikosaéder, na ktorom pravidlo neplatí, je falošný.

Tri z uvedených myšlienok možno považovať za kroky vedúce k tvorbe ŠMVI. Pozorovania a) a b) pripravujú cestu objavu c) ktorý navzájom prepojí sériu šiestich čiastočných poznatkov protiľahlých párov: 1-12, 2-11, 3-10, 4-9, 5-8 a 6-7. Súčasne pravidlo možno chápať ako princíp, ktorý uvedenú šesticu párov organizuje.

V jazyku mechanizmu poznávacieho procesu možno výsledky pozorovania a) a b) považovať za separované modely budúceho poznania, objav c) za odkrytie univerzálneho modelu, ktorý sa ale ihneď stáva abstraktným poznaním, lebo je všeobecne formulovaný a aplikovaný na všetky typy kociek, ktoré nemusia byť nutne pravidelným telesom, stačí napríklad aby boli konvexné a stredovo súmerné.

12. NAJDENIE VZŤAHU MEDZI DVOMI ŠTRUKTÚRAMI

Uvedieme dve ilustrácie žiackych objavov vzťahu medzi dvomi štruktúrami.

<u>Príklad 3</u>. V piatom ročníku sme hrali niekoľko NIM-ovských hier. Pre niektoré z nich žiaci našli aj vyhrávajúce stratégie. Ale pre dvojkopový NIM charakteristiky 4[3] stratégiu nenašli. Pre malé čísla m, n stratégiu našli, ale všeobecné riešenie sa napriek úsiliu viacerých žiakov nikomu nepodarilo nájsť.

O rok neskôr, v šiestom ročníku sme žiakom ukázali hru VSTÚP DO ROHU[4]. Stratégiu tejto hry nie je ťažké objaviť pomocou krížikovania kritických[5] štvorčekov. Najprv označíme krížikom ro-

---

[3] Dané sú dve kopy kameňov. Na jednej je *m* a na druhej *n* kameňov. Dvaja hráči striedavo berú buď ľubovoľný nenulový počet kameňov z jednej kopy, alebo *k* kameňov z každej kopy, pričom $1 \le k \le 4$. Hráč ktorý berie posledný kameň vyhráva.

[4] Ihriskom je štvorčekovaný obdĺžnik majúci *u* stĺpcov a *v* riadkov. Na označenie štvorčekov použijeme súradnicový systém: ľavý dolný štvorček bude mať súradnice (1,1), pravý dolný štvorček bude (u,1), ľavý horný štvorček (1,v) a pravý horný bude (u,v). Na ňom leží na začiatku hry kameň. Dvaja hráči sa pravidelne striedajú v ťahoch. Ťah je posunutie kameňa doľava alebo nadol, aspoň o jeden štvorček, alebo uhlopriečne nadol-doľava o aspoň jeden a najviac 4 štvorčeky. Hráč, ktorý vstúpi kameňom do rohu (1,1) víťazí. (Bližšie pozri zväzok 53 z MO edície Škola mladých matematikov: Gatiaľ-Hejný-Hecht, 1961.)

hové pole (1,1), lebo keď sa kameň dostane na toto pole, hráč, ktorý je na ťahu už ťahať nemá kam a prehral. Potom ako nekritické škrtneme všetky polia, z ktorých sa jediným ťahom dá dôjsť na pole (1,1): $\{ (1,y), 1<y\leq v\} \cup \{(x,1)\ 1<x\leq u\} \cup \{(x,x), 1<x\leq 5\}$. Vidíme, že kritické musia byť políčka (2,3) a (3,2). Označíme ich krížikmi a postupujeme takto ďalej.

Keď Danka našla všetky kritické políčka štvorcového ihriska 20 x 20, s radosťou ukázala pekný vzor, ktorý jej vyšiel, triede. Povedala, že teraz už s kýmkoľvek túto hru vyhrá. Ben po chvíli povedal, že už pozná aj stratégiu pre dvojkopový NIM charakteristiky 4. Chlapec objavil izomorfizmus oboch hier. Keď začal spolužiakom vysvetľovať svoj objav, bola jeho reč dosť popletená, ale traja mu porozumeli a potom v priebehu dvoch dní už všetci žiaci ideu izomorfizmu vedeli použiť. Pre Bena i niektorých ďalších bol tento objav spojený s pocitmi veľkej radosti.

Objav izomorfizmu v uvedenom príklade bol pripravený učiteľom. nasledujúci príklad ukáže izomorfizmus, ktorý bol objavený samostatným žiakom.

<u>Príklad 4</u>. Už od štvrtého ročníku niektorí žiaci vymýšľali magické štvorce. Každý nový objav bol zverejnený na nástenke. V priebehu štyroch rokov sa tu nakopilo do dvoch tuctov rozličných magických štvorcov. Vyše polovice z nich našiel Emil, ktorý sa veľmi usiloval nájsť všeobecný postup konštrukcie magického štvorca. V siedmom ročníku prišiel Emil s úlohou, ktorú sme uviedli už v časti 7.4: nájsť „násobilkový“ magický štvorec 3x3. Emil úlohu riešil tak, že vzal normálny magický štvorec (pre operáciu sčítania) a každé číslo n nahradil v ňom za číslo 2^n. Emil bol svojim objavom nadšený a veľmi sklamaný tým, že nik v triede o jeho úlohu nejavil záujem. Cítil som, že partnera mu musím robiť sám. Tváril som sa, že riešenie nepoznám a žiadal som Emila, aby mi uviedol jeden príklad. On po chvíli váhania odmietol, že to by mi prezradil návod. Druhý deň som Emilovi ukázal svoje riešenie: prvý riadok 39 366, 256, 46656, druhý riadok 9216, 7776, 6561, tretí riadok 1296, 236196, 1536. Emila moje riešenie prekvapilo a pýtal sa, ako som ho objavil. Tentoraz som odmietol povedať svoj návod ja. Emilovi sa moje riešenie nepáčilo, vraj má príliš veľké čísla. Tak som mu sľúbil na druhý deň priniesť riešenie obsahujúce najviac trojmiestne čísla. To čo som priniesol bolo v podstate to riešenie, ktoré objavil i Emil. On ale už o moje riešenie nejavil záujem, pretože sám doma skúmal moje riešenie a odhalil spôsob, ktorým som čudné riešenie zostrojil. Dalo mu to veľa práce, pretože bol svojim objavom veľmi nadšený.

Emil v ôsmom ročníku vytvoril viacero zaujímavých násobilkových magických štvorcov typu 3 x 3, aj 4 x 4. Napríklad našiel taký štvorec typu 3 x 3 v ktorom najväčšie číslo je 36[6]. Pýtal sa či existuje taký štvorec, ktorého najmenšie číslo je menšie ako 36. Myslím, že neexistuje, ale dôkaz nepoznám.

Ilustrácia ukazuje štyri typy krokov tvorby MŠVI, opísané v časti 9.

1. Objavenie sa strategického matematického problému vo vedomí žiaka. Emilov problém spočíval v snahe nájsť návod na konštrukciu magického štvorca.
2. Nájdenie vzťahu medzi dvomi štruktúrami, konkrétne medzi (N,+) a (N,*).
3. Potreba vyjasniť si prípadnú disharmóniu medzi vedomosťami. Takú disharmóniu prinieslo do mysle Emila moje čudné riešenie. Na odhalenie tvorby toho riešenia bolo treba nemalé úsilie a vynaliezavosť.
4. Rozšírenie (zovšeobecnenie) istého poznatku. Poznatok, ktorý Emil získal analýzou učiteľovho riešenia využil k ďalšiemu skúmaniu násobilkových magických štvorcov.

---

[5] Štvorček (p,q) nazveme kritický, ak hráč, ktorý je na ťahu má kameň na tomto políčku a pri dobrej hre súpera musí nutne prehrať.

[6] Emilovo riešenie napísané po riadkoch: 12, 9, 2 – 1, 6, 36 – 18, 4, 3.

13. ĎALŠÍ VÝSKUM

Doterajšie výsledky skúmania ŠMVI sú iba mozaikou. Domnievame sa, že podrobná analýza niektorých konkrétnych štrukturačných procesov môže priniesť systematickejšie poznanie. Zrejme bude pokračovať výskum Kratochvílovej, Stehlíkovej i Jirotkovej. Okrem toho by sme sa radi zamerali na skúmanie

(1) budovania ŠMVI v oblasti geometrie a kombinatorike,

(2) charakteristiky dvoch kognitívnych typov: riešiteľ problémov a tvorca štruktúr,

(3) dynamizmus procesu budovania ŠMVI; ústredná otázka znie: je možné tento proces etapizovať?

Záujemcov o spoluprácu radi uvítame.

Literatúra:

[1] Aristoteles: Organon (Kategorie, O vyjadřování, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O sofistických důkazech). *Academia, Praha 1960-1978*

[2] Bednářová, S.: Nevedia počítať. *Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky, (Ed.) V. Rosa, UK, Bratislava, s. 12-18, 1998*

[3] Bell, A.: Principles for the design of teaching. *Educ. Studies in Math. 24, 1993, s. 5-34*

[4] Bolzano, B.: Vědosloví (výbor). *Academia, Praha, 1981*

[5] Domoradzki, S.: Cognitive and Comunicative Teacher – Student Misunderstanding. *SEMT, 2001 (v tlači)*

[6] Gatiaľ, J., Hejný, M., Hecht, T.: Hry takmer matematické. *53. zväzok MO edície Škola mladých matematikov,* Mladá *fronta, Praha, 1982*

[7] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. *SPN, Bratislava, 1989*

[8] Hejný, M., Jirotková, D.: Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrii a aritmetikou. *Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 1999*

[9] Hejný, M., Kuřina, F.: Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. *Matematika, Fyzika, Informatika, Roč. 7, str. 385-395, Březen 1998*

[10] Hejný, M., Kurina, F.: Tri svety Karla Poppera a vzdelávací proces. *Pedagogika, 1998*

[11] Hejný, M., Kuřina, F.: Matematika, dítě a škola. *Portál, (listopad 2001)*

[12] Hejný, M., Stehlíková, N.: Číselné představy dětí. *Univerzita Karlova v Praze, Ped. F. 1999*

[13] Jirotková, D.: Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, 43, č. 4, s. 326-334, 1998*

[14] Kvasz, L.: O revolúciach vo vede a ruptúrach v jazyku vedy. *Univerzita Komenského, Bratislava, 1998*

[15] Kratochvílová, J.: Budování nekonečné aritmetické struktury. *Tento sborník, 2001*

[16] Malechová, I.:Analýza studentských úloh o transformacích. *Kandidátská disertační práce, Karlova Univerzita, Praha, Matematicko-fyzikální fakulta, 1998*

[17] Perný, J.: Space imagination. *Proceedings of SEMT, (Ed.) M. Hejný and J. Novotná, Charles University, Faculty of Education, Prague, 1999*

[18] Popper, K., R.: Večné hledání. *Praha, Vesmír, 1995*

[19] Popper, K., R., Lorentz, K.: Budoucnost je otevrená. *Praha, Vyšehrad, 1997*

[20] Rozek, B.: Struktury szeregowo-kolumnowe. *Dydaktyka matematyki, 19, 29-46, 1997*

[21] Stehlíková, N., Jirotková, D.: Building of the finite algebraic structure. *Proceedings of CERME 2, 2001 (v tlači)*

[22] Stehlíková, N.: Zúžená aritmetika – most mezi elementární a abstraktní aritmetikou. *Tento sborník, 2001.*

[23] Swoboda, E.: Miedzy intuicja a definicja. *Dydaktyka matematyki, 19, 75-111, 1997*

[24] Tichá, M.: Po stopách vytváření pojmů. *Sborník o vyučování matematice a kultivace myšlení, Gaudeamus, Hradec Králové, s. 86 – 93, 1997*
[25] Tichá, M., Kubínová, M.: On the activating role of projects in the classroom. *Proceedings CERME 1, (Ed.) I. Schwank. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück 1999*
[26] Van Hiele P., M.: Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education. *Academic Press, Inc London, 1986*
[27] Višňovská, J.: Atomárna analýza jedného dialogického experimentu. *Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky, (Ed.) V. Rosa, UK, Bratislava, s. 83–91, 1998*
[28] Vopěnka, P.: Úhelný kámen vzdělanosti a moci. *Souborné vydání Rozprav s geometrií, Praha, Práh, 2000*
[29] Zhouf, J.: Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice. *Kandidátská disertační práce, Karlova Univerzita, Praha, Matematicko-fyzikální fakulta, 2001*
[30] Żeromska, A.: Wybrane cele nauczania matematyki a proces rozwiązywania zadań. *Rozprava doktorska, WSP Kraków, 2000*

PORTFÓLIO V MATEMATIKE VYUČOVANEJ V RÁMCI INTERNATIONAL BACCALAUREATE

Ivan Ježík, American Community School, Hillingdon, Londýn, Veľká Británia

Až do roku 1999 pozostávala v International Baccalaureate (IB) maturitná skúška z matematiky z dvoch externe hodnotených písomných testov. Táto štruktúra však nespĺňala niektoré zo zámerov vyučovania matematiky tak, ako na ne poukazovali skúsenosti učiteľov a medzinárodný výskum zo začiatku deväťdesiatych rokov. Maturitná skúška, ktorá je vyvrcholením dvojročného štúdia, nedávala žiakom adekvátny priestor ukázať niektoré vedomosti či zručnosti a ani nevytvárala pre žiakov autentické podmienky na to, aby mohli pocítiť radosť a uspokojenie z objavovania. Keďže sa v rámci IB každých päť rokov osnovy aktualizujú, začala sa v roku 1995 príprava nových osnov, podľa ktorých sa v auguste 1998 malo začať učiť a v máji roku 2000 prvýkrát aj maturovať.

V tomto príspevku chcem porozprávať o zmenách, ktoré nastali v hodnotení matematiky. Budem pritom čerpať predovšetkým z výskumu a zo skúseností kolegov a mojich vlastných. Počas môjho už takmer osemročného pôsobenia na medzinárodných školách vo Švédsku, Rakúsku a Anglicku som mal príležitosť pracovať ako učiteľ a neskôr IB koordinátor so žiakmi z mnohých krajín, s mladými ľuďmi s rôznymi schopnosťami, možnosťami i ambíciami. Päť rokov práce pre International Baccalaureate Curriculum and Assessment Centre v Cardiffe mi ako opravovateľovi maturitných písomiek dalo šancu zoznámiť sa s ešte väčším počtom prístupov k úlohám a do istej miery aj postojom k matematike ako školskému predmetu. Matematika je totiž v rámci IB povinná, študenti si ale môžu vybrať jeden z troch možných kurzov, Higher Level Mathematics, Mathematical Methods a Mathematical Studies. Hoci sa v tomto článku zameriam najmä na Higher Level Mathematics (HLM), čo je pomerne náročný kurz pripravujúci predovšetkým pre štúdium matematiky, prírodných vied a ekonómie, mnohé veci v ňom sú veľmi podobné Mathematical Methods, kurzu ktorého náročnosť je porovnateľná s matematikou na slovenských gymnáziách a stredných odborných školách, a preto verím, že čitateľa tieto úvahy zaujmú a snáď aj inšpirujú.

CIELE VYUČOVANIA MATEMATIKY

Predpokladá sa, že väčšina absolventov HLM sa bude matematikou zaoberať aj v rámci univerzitného štúdia. Tento predmet sa zameriava na rozvíjanie dôležitých pojmov koherentným spôsobom umožňujúcim porozumenie. Snaha motivovať a povzbudzovať študentov aplikovať svoje matematické schopnosti na riešenie rozličných problémov zasadených do zmysluplného kontextu je vyvažovaná úsilím o predstavenie dôležitých ideí dôkazu a precíznosti argumentovania. Ktorýmkoľvek smerom sa naše myšlienky budú uberať, bude určite dobré mať na pamäti, čo vlastne chceme vyučovaním matematiky dosiahnuť, aké sme si dali ciele. Ani sám neviem prečo mi trvalo niekoľko rokov, kým som si plne uvedomil dôležitosť takéhoto postupu.

Ciele HLM sú presne stanovené a hovoria, že tento kurz by mal umožniť kandidátom:

1. oceniť medzinárodné dimenzie matematiky a mnohonásobnosť jej kultúrnych a historických perspektív-hľadísk
2. podporovať radosť so zaoberania sa matematickými aktivitami a rozvíjať ocenenie krásy, sily a užitočnosti matematiky
3. rozvíjať logické, kritické a tvorivé myslenie
4. rozvíjať matematické vedomosti, pojmy a princípy
5. podnecovať a zjemňovať schopnosti abstrakcie a zovšeobecňovania

6. rozvíjať trpezlivosť a vytrvalosť pri riešení problémov
7. uvedomiť si a naučiť sa využívať potenciál technológie v rôznych matematických kontextoch
8. komunikovať matematciky, jasne a zrozumiteľne, v rôznych kontextoch

Na ciele naväzujú osnovy (v rámci IB detailne spracované v Mathematics Higher Level Guide, 1998) a metódy hodnotenia. Spústa expertov sa zaoberá hodnotením z rôznych uhlov pohľadu a nespočetne mnoho článkov bolo napísaných na túto tému. Autori boli inšpirovaní rôznymi výskumami z psychológie a pedagogiky venovaným poznávacím procesom. Nebudem sa venovať osnovám, ale predovšetkým sa zameriam na hodnotenie, špeciálne na sumatívne hodnotenie, hodnotenie na konci strednej školy. Robím tak najmä preto, že si myslím, že záverečné hodnotenie je často odtrhnuté od samotného výchovno-vzdelávacieho procesu. Žiaci všelikde vo svete sa "musia pripravovať na maturitné skúšky", "musia si opakovať akési vzorové príklady" a nakoniec je im pridelený istý počet bodov, či istá známka. Vystihuje ale takéto zaradenie naozaj ich matematické schopnosti a vedomosti, dáva nám prehľad o tom, ako študent zvládol napríklad ciele, ktoré sme si spomínali? Myslím si, že nie. Hodnotenie je motorom, ktorý poháňa osnovy (Hoerr, 1994). Čo meriame, keď hodnotíme a ako, určuje vo veľkej miere to, čo a ako sa bude učiť. Ak dáme žiakom iba maturitný test, strávia veľa času prípravou naň. Zodpovedný učiteľ bude trénovať svojich žiakov, bude riešiť typové úlohy, bude chcieť, aby jeho žiaci dobre obstáli. Ak dáme žiakom zoznam maturitných otázok na ústnu časť, v lepšom prípade ich sami vypracujú, ale podstatná časť ich prípravy bude pozostávať z memorovania. Je to to, čo naozaj chceme?

Vrátim sa ale konkrétne ku Higher Level Mathematics. Aby som mohol ešte presnejšie poukázať na potrebu zmien, vysvetlím najprv detailnejšie pôvodný systém. Ako som už skôr spomínal, do roku 2000 v HLM výsledok maturitnej skúšky závisel od dvoch testov, ktoré kandidáti absolvovali v máji maturitného ročníka. Prvý test trval 2 hodiny a pozostával z 20 otázok s krátkou odpoveďou. Každá otázka bola za štyri body. Maximálny možný počet bol teda 80 bodov, ktoré tvorili 40% výslednej známky. Druhý test pozostával z piatich otázok rozdelených do dvoch sekcií A a B. Sekcia A mala štyri otázky spolu za 80 bodov, v sekcii B si študent vyberal jednu voliteľnú otázku za 40 bodov. Maximálny možný počet bodov bol 120 bodov, ktoré tvorili 60% výslednej známky. Otázky v druhom teste boli spravidla dlhšie a pozostávali z niekoľkých podotázok. Veľkou výhodou takejto skladby samozrejme bola značná objektivita, keďže všetci HLM kandidáti na svete podstúpili rovnaký test, v májovom IB termíne ich bolo približne 3 500. Bodovací systém umožňoval opravovateľom udeľovať body za správnosť a presnosť výsledku, správny postup, úroveň argumentovania. Aj organizačne bol systém premyslený tak, aby zabezpečil maximálnu dosiahnuteľnú objektivitu opravovania. Opravovatelia boli rozdelení do tímov a každý posielal vzorku niekoľkých prác vedúcemu tímu, ktorý zabezpečil moderovanie.

Systémy hodnotenia pre rozličné predmety sú rôzne a v druhej polovici osemdesiatych rokov prevažná väčšina z nich už obsahovala aj internú zložku. V jazykoch to bola ústna skúška, v dejepise rozsiahlejšia štúdia, v ekonómii projekt, v prírodovedných predmetoch zbierka laboratórnych prác. Z matematických kurzov jedine Mathematical Studies obsahoval internú zložku, matematický projekt. Každá interná zložka mala svoj okruh kritérií, každé kritérium malo viac alebo menej detailnejšie špecifikované požiadavky na splnenie jednotlivých úrovní (achievement levels). Interná zložka ako taká prispieval zvčajne 20% - 25% k výslednej známke. Hoci jeho hodnotenie bolo externe moderované na základe vzorky (obvykle práce piatich žiakov rôznych úrovní), o výsledku primárne rozhodoval učiteľ. Koncom prvej polovice deväťdesiatych rokov, keď sa začalo s prípravou nového programu pre HLM, ktorý mal byť zavedený v roku 1998 a prvýkrát sa podľa neho malo teda maturovať v roku 2000, vyvstali pre tím (curriculum development commitee) dôležité otázky:

- Je potrebné zaviesť do HLM internú zložku?
- Ak áno, aký formát tejto zložky by bol najvhodnejší? Prečo?
- Čo všetko treba premyslieť pre úspešnú implementáciu prípadnej novej zložky?

Pokúsim sa postupne vyjadriť ku všetkým týmto otázkam. Najprv by som chcel však povedať, že spústa kolegov z mnohých kútov sveta sa aktívne podieľalo na tejto práci. Nemôžem tu spomenúť všetkých, ale rád by som vymenoval aspoň niektorých: Peter Hamer-Hodges (Armand Hammer United World College, USA), Paula Heinen (St Johns International School, Belgium), Barry Smith (International School of Geneva), Ibrahim Wazir (American International School, Vienna, Austria) a Josip Harcet (v tom čase XV. Gimnazija, Zagreb, Croatia, teraz Danube International School, Vienna).

PREČO BOLO POTREBNÉ ZMENIŤ HODNOTENIE A ZAVIESŤ V HLM INTERNÚ ZLOŽKU?

Úvahy, ktoré nás v IB viedli k vytvoreniu nového systému hodnotenia v HLM by som zhrnul takto:

1. vytvoriť pre žiakov prirodzené, autentické podmienky bez stresu, ktorý je často asociovaný s externými skúškami
2. oceniť žiaka za to, čo dokáže urobiť, nesnažiť sa hľadať, čo nedokáže
3. dať žiakovi čas a priestor skúmať cesty, ktoré sa môžu v konečnom dôsledku ukázať neproduktívne
4. dať žiakovi čas a priestor vygenerovať dostatočný počet údajov, z ktorých bude môcť urobiť induktívne zovšeobecnenia
5. dať žiakovi čas a priestor pokúsiť sa o formálny dôkaz tvrdení, ktoré sformuloval
6. dať žiakovi čas a priestor jasne komunikovať matematický argument
7. dať žiakovi čas a priestor zvážiť praktické aplikácie matematiky
8. dať žiakovi čas a priestor experimentovať s jemu dostupnou technológiou (predovšetkým grafické kalkulačky a rôzny matematický software)
9. dať žiakovi čas a priestor vytvárať algoritmy, prípadne programy na určité procedúry
10. dať žiakovi čas a priestor spätného pohľadu na dosiahnuté výsledky a sformulovanie záverov
11. umožniť žiakovi diskutovať svoju prácu s učiteľom a spolužiakmi
12. umožniť žiakovi pri práci na novej úlohe sa vracať sa k už vytvoreným prácam
13. umožniť žiakovi skúmať a používať už publikované zdroje

V týchto názoroch sa matematická komunita združená okolo IB takmer jednoznačne zhodovala, preto sme sa rozhodli, že sa pokúsime o zavedenie nového systému hodnotenia. Nebolo pochýb, že nové trendy prenikli do formatívneho hodnotenia. Mnoho učiteľov všelikde na svete robilo so žiakmi počas školského roku rôzne súťaže, projekty, skupinové práce, písali sa eseje, robili prezentácie, vymýšľali rôzne bodové systémy. Chýbal však spôsob, ako zohľadniť toto v sumatívnom hodnotení, v záverečnej maturitnej skúške.

AKÝ FORMÁT INTERNEJ ZLOŽKY BY BOL NAJVHODNEJŠÍ?

Pri hľadaní vhodného formátu sa čerpalo predovšetkým z výskumu v oblasti psychológie, pedagogiky a didaktiky matematiky, ako aj zo skúseností IB učiteľov. Spomeniem štyri najznámejšie časopisy, ktoré sa aktívne venujú vyučovaniu matematiky: **Mathematics in Schools** (Mathematical Association, Veľká Británia), **Mathematics Teacher** (National Council for Teachers of Mathematics, USA), **Explore** (International Schools Mathematics Teachers Foundation) a **Trigon** (Mathematical Association of South Australia).

Krátko sa zmienim o niektorých článkoch publikovaných v časopise Mathematics Teacher. Cooney, 1996, píše o potrebe alternatívneho hodnotenia a názoroch učiteľov, ako aj o **dôležitosti internej zložky** v matematike a okrem iného hovorí: „Alternatívne hodnotenie povzbudí študentov hlbšie sa zamyslieť “. Hoci sú príspevky zväčša z amerického prostredia, ich myšlienky sú všeobecne použiteľného charakteru a odrážajú témy, ktorým sa v druhej polovici deväťdesiatych rokov venoval pedagogický výskum aj inde vo svete. Mnohí autori sa venovali napr. **problémom s otvoreným koncom** a tomu, ako tieto pomáhajú žiakom porozumieť matematike. Medzi učiteľmi je zhoda v tom, že tieto dávajú žiakovi väčší priestor na jeho iniciatívu, otvárajú mu možnosti na uplatnenie jeho prístupov a jeho spôsobu myslenia (Hancock, 1995). Ako však zaradiť problém s otvoreným koncom do maturitnej skúšky, keď tá má jasne predpísanú dĺžku trvania.

Mnoho kníh a článkov sa napísalo **o komunikácii a potrebe písania esejí v matematike**. O tom, že písanie by malo byť samozrejmou súčasťou vo výuke matematiky, pretože napomáha žiakovmu porozumeniu matematických pojmov hovorili už v roku 1985 Bell a Bell v článku Writing and Mathematical Problem Solving : Arguments in Favour of Synthesis. Krátko potom, v roku 1987, sa Linn vo svojej postgraduálnej práci Effects of Journal Writing on Thinking Skills of High School Geometry Students na University of Florida venuje detailnejšie vplyvom písania na rozvoj myslenia. Pugalee, 1997 sa popri týchto úvahach venuje aj známej Vygotského téze, že **písaním nadobúdajú pre žiaka matematické aktivity zmysel.**

Burrill, 1998 sa zaoberá **vplyvom technológie** na vyučovanie matmatiky a zaujímavo zhŕňa, aké úlohy či výzvy čakajú učiteľov, tých, ktorí učiteľov pripravujú, výskumníkov, samotných matematikov a aj širšiu verejnosť.

Výskum naznačoval aj **dôležitosť motivovania a povzbudzovania žiakov do samostatného vyšetrovania a formulovania vlastných tvrdení**, predovšetkým zdôrazňovaním myšlienky, že žiaci veria záverom, ku ktorým prídu sami (Naraine, Hussain, 1998). O svojich skúsenostiach so žiackymi **portfóliami** v rôznych kurzoch (algebra, geometria, analýza) píše Robinson, 1998. V každom portfóliu vyžadovala od svojich stredoškolákov aspoň päť prác. Žiaci si mohli vybrať a vložiť zápisy zo skupinových projektov, domáce úlohy, eseje z histórie matematiky, ale i napríklad poznámky z hodiny – v podstave čokoľvek, dôležité iba bolo, že mali pocit, že práve táto práca prispela ich progresu v matematike.

Do úvahy pre nás prichádzali v zásade dve možnosti **projekt** alebo **portfólio**. Keďže portfolio umožňovalo obsiahnuť viac aspektov najnovšieho výskumu a získalo si väčšiu podporu učiteľov, vedenie IB rozhodlo zaviesť portfolio ako súčasť vyučovania HLM. Rozmanitosť názorov a uhlov pohľadu vo výskume spojená so skutočnosťou, že IB kandidáti pochádzajúci podľa posledných štatistík zo 178 národností študujú na veľmi rozdielnych školách (štátnych aj súkromných, národných aj medzinárodných, počtom malých alebo aj veľkých) po celom svete, znamenala, že sa pre čokoľvek by sa IB rozhodlo, bolo potrebné hneď od začiatku myslieť na následnú implementáciu internej zložky.

ČO VŠETKO TREBA PREMYSLIEŤ PRE ÚSPEŠNÚ IMPLEMENTÁCIU PORTFÓLIA?

Otázok sa vynára hneď neúrekom veľa. Napr. Koľko prác musí portfolio obsahovať? Akého typu majú byť práce v portfoliu? Ako definovať hodnotiace kritériá? Ako viesť študentov v príprave? Koľko času venovať jednotlivým prácam? Ako dosiahnuť optimálnu spätnú väzbu? Ako zabezpečiť manažovanie portfolií? Ako vymýšľať jednotlivé zadania prác do portfólia?

Na tomto mieste by som chcel zdôrazniť jednu skutočnosť. Ľudia, ktorí sa zaoberali týmito otázkami boli všetci učitelia z praxe. Každý z nás vedel, že hoci je potrebené vymyslieť portfólio najlepšie ako dokážeme, o pár mesiacov neskôr by sme to možno dokázali lepšie. V mojom príspevku sa nebudem venovať samotnému procesu vymýšľania, hoci bol pre nás fascinujúci, zoboznámim čitateľa s výsledkami.

PORTFÓLIO A TYPY PRÁC V PORTFÓLIU

Pojem portfólia sa, rovnako ako všetky pojmy nielen v didaktike matematiky, vyvíjal, a preto by bolo na tomto mieste vhodné upresniť, ako ho v HLM chápeme. Podľa jednej zo všeobecne uznávaných klasifikácií, ktorej autormi sú Columba, Dolgos, 1995, sú tri možné chápania portfólia.

1) Portfólio ako akási výstavka obshujúca najlepšie a najreprezentatívnejšie práce. Takéto portfólio často používajú umelci na ilustrovanie šírky a hĺbky svojho talentu. S portfóliami tohto druhu sa stretneme v škole najčastejšie na rodičovskom združení.

2) Pracovné portfólio – interaktívne portfólio, ktoré si učiteľ a žiak vymieňajú a slúži tým ako nástroj komunikácie medzi nimi. Obsah takéhoto portfólia sa mení.

3) Portfólio ako nástroj alternatívneho hodnotenia, kde všetky práce sú ohodnotené podľa vopred stanovených kritérií. Takéto zameranie portfólia odráža holistický prístup k hodnoteniu

V HLM sa tieto chápania prelínajú. Portfólio je nástrojom inštrukcie a hodnotenia, je to akási systematizovaná a organizovaná zbierka prác použitých učiteľom a študentom na monitorovanie rastu študentovych vedomostí, zručností a postojov, ako aj na následné dokumentovanie toho, kam sa až dostal. V počiatočnej fáze je to teda pracovné portfólio, učiteľ ohodnotí každú jednotlivú prácu a žiak má tým spätnú väzbu, naučí sa chápať svoje silné a slbšie stránky, vie ktoré kritériá má zlepšovať. Toto mu zároveň umožňuje prevziať časť zodpovednosti za svoj rozvoj na seba. Počas dvojročného HLM kurzu urobia žiaci v priemere 6 až 7 prác. Samotné výsledné portfólio pozostáva už len z troch prác, vybraných tak, aby čo najlepšie prezentovali žiaka v zmysle hodnotiacich kritérií, t.j. tie, ktorých kombinácia mu dá najlepší výsledný počet bodov. Tieto tri práce musia reprezentovať tri aktivity: matematické vyšetrovanie (otvorená úloha), riešenie rozsiahlejšieho uzavretého problému a matematické modelovanie. Pod matematickým modelovaním sa chápe nielen samostatné vytváranie modelu na určitú situáciu, ale i porovnávanie niekoľkých matematických modelov situácie uvedených v zadaní úlohy. Žiaci hlásiaci sa na univerzity, ktoré ich prijímajú aj na základe interview majú možnosť prezentovať svoje portfólio.

HODNOTIACE KRITÉRIÁ

V HLM máme spolu šesť hodnotiacich kritérií, ktoré v súčte dávajú IB kandidátom šancu získať 20 bodov (priamo korešpondujúcich 20%, ktorými interná zložka prispieva do výsledného súčtu, do ktorého sa započítavajú aj písomné testy v máji maturitného ročníka).

A.	Používanie symboliky a terminológia	2 body
B.	Komunikácia	3 body
C.	Matematický obsah	5 bodov
D.	Výsledky a závery	3 body
E.	Formulácia tvrdení	4 body
F.	Používanie technológie	3 body

Prvé štyri kritériá sa používajú pri hodnotení každej práce. Vo výslednom portfóliu musí byť zaradená aspoň jedna práca pri hodnotení ktorej sa použilo kritérium E a zároveň aspoň jedna práca pri hodnotení ktorej sa použilo kritérium F. A ako získame výsledný počet bodov?

Pre kritériá A, B, C a D sa urobia aritmetické priemery zo všetkých troch prác,
pre kritériá E a F sa vyberie najvyššie získané skóre. Takto získaných šesť čísel sa spočíta a zaokrúhli na najbližšie celé číslo.

Napríklad:

Práca	kritérium A	kritérium B	kritérium C	kritérium D	kritérium E	kritérium F
I.	2	2	4	2	3	_
II.	1	1	2	2	_	3
III.	2	3	4	1	_	2
Spolu	1 2/3	2	3 1/3	1 2/3	3	3

V tomto príklade by výsledné skóre bolo 15 (t.j. 14 2/3 zaokrúhlené na najbližšie celé číslo).

Pre študenta je, rovnako ako pre učiteľa, dôležité vedieť, ako môže získať v rámci jednotlivých hodnotiacich kritérií čo najlepšie hodnotenie resp. čo je potrebné na získanie určitého počtu bodov v rámci každého kritéria. Na toto nám slúžia tzv. úrovne naplnenia (achievement levels). Ich formulácia by mala byť čo najpresnejšia, aby sa všetci zainteresovaní vedeli v hodnotení orientovať. Nebol to vôbec jednoduchý proces a s výsledkom ešte nie sme úplne spokojný. Postupným dolaďovaním a zjemňovaním sme sa dopracovali zatiaľ k nasledovnému (voľný preklad z dokumentu Teacher Supprot Material, IBO November 2000):

<u>Kritérium A – POUŽÍVANIE SYMBOLIKY A TERMINOLÓGIA</u>

0 – Kandidát nepoužíva vhodnú symboliku a terminológiu.
(Práca, ktorá obsahuje chyby môže dosiahnuť iba túto úroveň.)

1 – Kandidát používa vhodnú symboliku a/alebo terminológiu.
(Akákoľvek zásadnejšia chyba v symbolike alebo terminológii znamená, že práca môže dosiahnuť maximálne túto úroveň.)

2 – Kandidát používa vhodnú symboliku a terminológiu konzistentným spôsobom počas celej práce.
(Očakáva sa, že väčšina kandidátov bude schopná dosiahnuť túto úroveň.)

<u>Kritérium B – KOMUNIKÁCIA</u>

0 – Kandidát neuvádza vysvetlenia a ani nepoužíva vhodné formy reprezentácie (napr. tabuľky, grafy, diagramy, symboly).

1 – Kandidát sa snaží uvádzať vysvetlenia postupu a aj používa do istej miery určité formy reprezentácie.
(Vysvetlenia sú však slabé, často nepostačujúce.)

2 – Kandidát uvádza adekvátne vysvetlenia/argumenty a komunikuje ich používaním vhodných foriem reprezentácie.

3 – Kandidát uvádza kompletné a koherentné vysvetlenia a argumenty a jasne ich komunikuje používaním vhodných foriem reprezentácie.
(Tu je rozhodujúcim kľúčom skutočnosť, či práca pôsobí ako ucelená prezentácia a umožňuje čitateľovi porozumieť obsahu bez opakovaného vracania sa k zadaniu.)

<u>Kritérium C – MATEMATICKÝ OBSAH</u>

0 – Kandidát nerozpoznáva základné matematické pojmy vzťahujúce sa k práci.

1 – Kandidátovi sú známe niektoré matematické pojmy alebo si zvolil relevantnú matematickú stratégiu.
(*Používa dané, alebo si sám zvolil základné postupy, ale používa ich iba v minimálnej miere.)*

2 – Kandidát rozpoznáva základné matematcické pojmy, pokúša sa používať správny postup v súlade s náročnosťou kurzu.
(*Ak je postup jasne v súlade s obtiažnosťou kurzu, na dosiahnutie tejto úrovne môžu byť v práci aj fundamentálne chyby v aplikovaní techniky. Ak však nejaká závažná časť práce chýba, je toto maximálna možná dosiahnuteľná úroveň.)*

3 – Kandidát rozpoznáva základné matematcické pojmy, používa správny postup v súlade s náročnosťou kurzu a robí iba drobné chyby v aplikovaní matematických techník.
(Drobné chyby sú spôsobené zväčša ľahostajnosťou, alebo náročnosťou úlohy – napr. nie celkom správne napísané dôkazy viet.)

4 – Kandidát rozpoznáva relevantné matematické pojmy, používa správny postup v súlade s náročnosťou kurzu a počas celej práce konzistentným spôsobom používa vhodné matematické techniky.
(Kandidát musí odpovedať na všetky otázky, iba niekoľko málo drobných numerických chýb je prípustných na dosiahnutie tejto úrovne.)

5 – Kandidátova práca jasne ukazuje precíznosť, vhľad a sofistikovanú úroveň matematcikého porozumenia.
(Kľúčovým slovom je tu vhľad – elegancia. Kandidát demonštruje kompletné porozumenie prepojení a tém, drobná typografická chyba nemusí zabrániť dosiahnutiu tejto úrovne.)

Kritérium D – VÝSLEDKY A ZÁVERY

0 – Kandidát buď vôbec neuvádza alebo dáva nezmyselné či irelevantné výsledky.

1 – Kandidát dospel k čiastočným záverom alebo aspoň do určitej miery zvažuje signifikantnosť či zmysluplnosť výsledkov.
(Nejaké výsledky sú správne uvedené, či nejaké závery sformulované. Ak však nejaká závažná časť práce chýba, je toto maximálna možná dosiahnuteľná úroveň.)

2 – Kandidát dospel k adekvátnym záverom alebo demonštruje porozumenie siginfikantnosti a zmysluplnosti výsledkov.
(Práci chýbajú v záverečnej časti iba niektoré drobnosti.)

3 – Kandidát uvádza plné a relevantné závery alebo kompletne demonštruje porozumenie signifikantnosti, zmysluplnosti a prípadnej ohraničenosti výsledkov.
(Môže byť pridelené kandidátovi, ktorý zodpovedal všetky potrebné otázky, ale neukázal vhľad potrebný na dosiahnutie 5 bodov v kritériu C.)

Kritérium E – FORMULÁCIA TVRDENÍ

0 – Kandidát nepreukazuje uvedomenie si pravidelností a štruktúry.
(Výsledky sú vyprodukované bez evidencie toho, že by kandidát indetifikoval pravidelnosti či štruktúru.)

1 – Kandidát rozpoznáva pravidelnosti a/alebo štruktúru.
(Vyprodukované výsledky sú organizované tak, že poukazujú na pravidelnosti či štruktúru.)

2 – Kandidát rozpoznáva pravidelnosti a/alebo štruktúru a pokúša sa o induktívne zovšeobecnenia.
(Vyprodukované výsledky jasne poukazujú na pravidelnosti či štruktúru a kandidát formuluje matematické tvrdenia.)

3 – Kandidát rozpoznáva pravidelnosti a/alebo štruktúru, úspešne zvláda induktívne zovšeobecnenia a pokúša sa o ich formálne zdôvodnenie.
(Dôkazy tvrdení nie sú celkom správne. Ak sformulované tvrdenia výrazne zjednodušujú problém, tak aj pri správnom dôkaze je toto najvyššia možná dosiahnuteľná úroveň.)

4 – Kandidát rozpoznáva pravidelnosti a/alebo štruktúru, úspešne zvláda induktívne zovšeobecnenia a aj ich formálnymi argumentami úspešne zdôvodňuje či vyvracia.
(Tu sa vyžadujú správne dôkazy správne sformulovaných tvrdení.)

Kritérium F – POUŽÍVANIE TECHNOLÓGIE

0 – Kandidát používa kalkulačku či počítač iba na bežné rutinné výpočty.
(Iba bežné operácie, štatistické výpočty a grafy už postačujú na pridelenie prvej úrovne.)

1 – Kandidát sa pokúša o využitie kalkulačky či počítača takým spôsobom, že to môže napomôcť jeho aktivitám potrebným na zvládnutie zadania.
(Výsledky dosiahnuté matematickým softwarom či využitie možností kalkulačiek s grafickým displayom postačuje na udelenie tejto úrovne.)

2 – Kalkulačka či počítač sú do určitej miery využité kandidátom tak, že to napomohlo zvládnutiu zadania.
(Kľúčovým je tu fakt, či využitie technológie naozaj pomohlo kandidátovi.)
3 – Kalkulačka či počítač sú využité kandidátom do značnej miery a tak, že to výrazne napomohlo zvládnutiu zadania.
(Technológia podporila formuláciu matematických tvrdení a pomohla očividne kandidátovi zvládnuť zadanie.)

NIEKTORÉ ĎALŠIE MYŠLIENKY

Práca na portfóliu je integrované priamo do kurzu. Učiteľ sám rozhoduje kedy a aké zadania svojim žiakom dá. Zadania si môže si vybrať z ponuky IB centra, môže vymyslieť svoje vlastné, prípadne môže použiť zadania svojich kolegov. Každé zadanie musí byť úplné, aby umožnilo kandidátom jeho zvládnutie, musí obsahovať informáciu o tom, podľa ktorých kritérií bude práca hodnotená a také, aby nevyžadovalo nasledovné štúdium novej témy. Jedna vyučovacia hodina je obyčajne venovaná vysvetleniu zadania, ktorého kópiu dostane každý žiak na jej začiatku. Na jeho spracovanie majú žiaci asi tak dva tri dni, počas ktorých sa môžu poradiť s rodičmi, inými žiakmi, či študovať už publikované materiály. Výsledná práca musí však byť výsledkom žiakovej vlastnej aktivity. O všetkých detailoch ohľadne manažovania portfólia rozhoduje učiteľ. IB centrum dáva iba doporučenia a umožňuje učiteľom vymieňanie skúseností prostredníctvom internetu (International Baccalaureate Online Curriculum). Učiteľ by mal žiaka vždy oboznámiť nielen s tým, ako jeho prácu ohodnotil, ale mu aj navrhnúť, ako by sa mohol zlepšiť. Táto informácia, feedback, je považovaná vo vývoji portfólia za mimoriadne dôležitú.

ZÁVERY A VÝSLEDKY

Hoci naše prvé skúsenosti s portfóliom (maturity v roku 2000) jednoznačne ukazujú, že sme sa vybrali dobrou cestou, nie sme zďaleka na jej konci. Väčšina učiteľov si netrúfala vymýšľať vlastné zadania a používali zadania ponúkuté centrom. V dotazníku sa však vyjadrili, že v budúcnosti by radi viac používali vlastné. Niektorí učitelia ešte nechápu portfólio ako súčasť vyučovacieho procesu, preto argumentujú, že nie je na prácu na ňom čas. Opravovanie je skutočne zdĺhavé. Ak ho berie učiteľ naozaj poctivo a snaží sa individuálne pomáhať žiakom svojimi komentármi k už vypracovaným zadaniam, nepochybne zaberie omnoho viac času, ako oprava písomky s výberom odpovede. Podľa očakávania sa azda najkomplikovanejším ukazuje interpretácia úrovní naplnenia kritérií hodnotenia. Prekvapivo však žiaci "opisujú", či inak "podvádzajú" omnoho menej ako skeptici predpokladali. Moje vlastné skúsenosti ma naplnili presvedčením, že tento pokus priblížiť sumatívne hodnotenie samotnému poznávaciemu a vyučovaciemu procesu pomáha žiakom vidieť zmysel v štúdiu matematiky. Vo formulácií cieľov vyučovania matematiky a aj v samotných osnovách už i mnohé národné systémy urobili úžasný krok vpred. Prestávajú lpieť na obsahu, hovoria o zručnostiach, abilitách či kompetenciách, ale stačí to? Možno je na naplnenie cieľov vyučovania matematiky naozaj potrebné revidovať aj hodnotenie.

Literatúra:

[1] Burrill, G., Changes in Your Classroom: From the Past to the Present to the Future. *"The Mathematics Teacher" 91 (9), 1998*
[2] Columba, L., Dolgos, K.A., Portfolio Assessment in Mathematics. *"Reading Improvement" 32 (3),1995*
[3] Cooney, T.J., The Demands of Alternative assessment: What Teachers Say. *1996*

[4] Hamer-Hodges, P., Mathematics HL, The Portfolio, Teacher Support Material. *International Baccalaureate Organisation 2000 (druhé vydanie)*
[5] Hancock, L., Enhancing Mathematics Learning with Open Ended Questions. *"The Mathematics Teacher" 88 (6), 1995*
[6] Hoerr, T., Celebrating Multiple Intelligencies, Genuine Understanding. *New City School, 1994*
[7] Koca, S.A., Lee, H.J., Portfolio Assessment in Mathematics Education. *ERIC 1998*
[8] Mathematics Higher Level, Subject Guide. *International Baccalaureate Organisation, 1998*
[9] Naraine, B., Hoosain, E., Investigating Polygonal Areas: Making Conjectures and Proving Theorems. *"The Mathematics Teacher", 91 (2), 1998*
[10] Pugalee, D.K., Connecting Writing to the Mathematics Curriculum. *"The Mathematics Teacher" 90 (4), 1997*
[11] Robinson, D., Student Portfolios in Mathematics. *"The Mathematics Teacher" 91 (4), 1998*
[12] Shimizu Y., Lambdin, D.V., Assessing Students' Performance on an Extended Problem-Solving Task: A Story from a Japanese Classroom. *"The Mathematics Teacher" 90 (8), 1997*
[13] Wilcox, S., Using the Assessment of Students' Learning to Reshape Teaching. *"The Mathematics Teacher" 90 (3), 1997*

Internetové informácie ohľadne portfólií – webové stránky a agentúry

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
  http://www.nctm.org
- National Council on Measurement in Education (NCME)
  http://assessment.iupui.edu/NCME/
- ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation (ERIC/TM)
  http://ericae.net
- Portfolio News (Portfolio Assessment Clearinghouse)
  http://www-tep.ucsd.edu/portfolionews/PNHomePage.html
- Žiacke portfóliá, použitie v triede
  http://www.ed.gov/pubs/OR/classuse.html
- Hodnotenie portfólií
  http://www.eduplace.com/rdg/res/literacy/assess6/html

ČTVEREČKOVANÝ PAPÍR A PHYTAGOREJSKÉ TROJICE[1]

Darina Jirotková, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

ABSTRAKT

V článku ukážeme, jak lze žáky/studenty přivést k objevu metody hledání všech Pythagorejských trojic pomocí jednoduchých geometrických konstrukcí na čtverečkovaném papíru neboli k úplnému řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v oboru přirozených čísel geometrickou cestou. Naše ukázka bude koláží několika epizod ode-hraných v průběhu řešení problémových situací. První epizoda se odehrála při docela obyčejném měření úseček. K objevu Pythagorejských trojic nás pak přivede snaha nalézt „šikmé“ mřížové úsečky s celočíselnou délkou.

ÚVOD

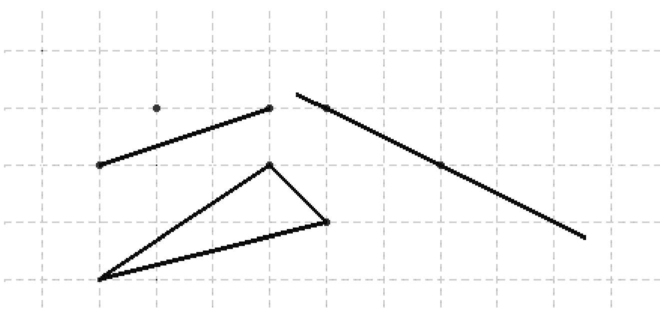
Východiskem článku je řada experimentů realizovaných na základní i vysoké škole, především v letech 1976 - 1988 během experimentálního vyučování na ZŠ (M. Hejný) a v letech 1994 - 2001 na PedF v Praze (M. Hejný, D. Jirotková). Žákům/studentům byly předkládány různé problémové situace. Některé z nich jsme vybrali a uspořádali je tak, aby výsledkem byla ukázka postupu, jak lze studenty - budoucí učitele, ale i žáky základní školy dovést k objevu geometrické konstrukce Pythagorejských trojic, jinými slovy k objevu řešení Diofantické rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ pomocí geometrických konstrukcí.

Edukační cíl, který si dáváme, není samoúčelný. Usměrňuje objevitelský proces žáků/studentů a dává jim možnost zažít radost z konkrétních výsledků a uspokojení z průběžných i závěrečného objevu, rozvíjí jejich kauzální myšlení, dává jim vhled do struktury aritmetiky i geometrie a zejména do vzájemné propojenosti těchto struktur. Tento objevitelský proces je longitudální, probíhá i několik let v závislosti na úrovni žáků/studentů. V rámci kurzu analytické geometrie na PedF proběhl během několika týdnů. Rozhodující je to, že výuka je výlučně konstruktivistická. Žádný poznatek se žákům/studentům nesděluje, k poznání jsou vedeni pouze otázkami a prostřednictvím řešení úloh, problémových situací a mnohého experimentování.

VSTUP DO PROSTŘEDÍ ČTVEREČKOVANÉHO PAPÍRU

Popisovaný objevitelský proces se odehrává v prostředí čtverečkovaného papíru. Nestandardnost tohoto geometrického prostředí umožní zejména na úrovni studentů VŠ opětovný přístup ke známým geometrickým poznatkům, který není zatížen dřívějším způsobem jejich nabývání a případnými „vzorečkovými“ znalostmi. Objevitelská cesta je pak zcela přirozená a spontánní.

Pojem *čtverečkovaný papír* je dobře známý a pro další potřeby stačí, budeme-li jej chápat intuitivně. Bod, ve kterém se protnou dvě na sebe kolmé linky čtverečkovaného papíru, nazveme *mřížový bod*. *Mřížová úseč-ka* je každá úsečka s krajními body, které jsou mřížové, *mřížová přímka* je každá eukleidovská přímka, která prochází alespoň dvěma mřížovými body. Obdobně budeme používat termíny *mřížová polopřímka*, *mřížový trojúhelník*, *mřížový n-úhelník* apod.



Obr. 1

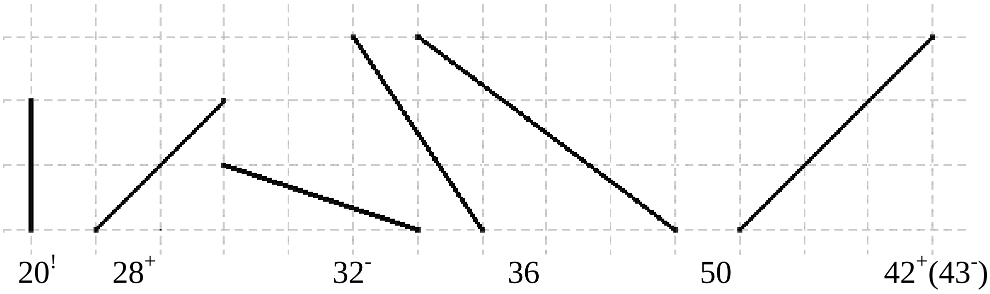
Dále uvedeme sérii problémových situací. Jejich řešení bude popsáno vždy několika epizodami, které se skutečně odehrály.

[1] Příspěvek byl podpořen grantem Výzkumné záměry JI3/98:114100004

1. problémová situace - měření úseček

Milimetrovým měřítkem změřte s přesností na 1 mm mřížové úsečky na obrázku 2. Čtverečkovaný papír má čtverečky 1x1 cm. Jestliže se budete domnívat, že naměřená hodnota je zcela přesná, napište k ní znak !, jestliže se budete domnívat, že skutečná délka úsečky je o „něco málo“ menší, než naměřená hodnota, napište k ní znaménko -, a jestliže se budete domnívat, že skutečná délka úsečky je o „něco málo“ větší, než naměřená hodnota, napište k ní znaménko +. Když se nebudete umět rozhodnout pro žádný znak, nepište nic.

Problém je přiměřený žákům třetího ročníku ZŠ. Prostředí čtverečkovaného papíru nabízí zadat nepřeberné množství smysluplných úloh, které jsou založeny víceméně na činnosti rukou, což je z didaktického hlediska důležité. K měřeným úsečkám zapíšeme číslo - délku úsečky v milimetrech - s příslušným znakem.



Obr. 2

Epizoda 1. Konflikt, hypotéza

Při měření čtvrté a páté úsečky (zleva) nastává ve třídě spor o tom, zda naměřené hodnoty 36 a 50 jsou přesné, nebo zda je třeba k nim připsat znaménko + nebo -. Ovlivněni zkušenostmi z měření prvních tří úseček někteří žáci vyslovují hypotézu: „Šikmá úsečka přece nemůže měřit přesně celé číslo.“
Vyslovená hypotéza uzavírá první epizodu.

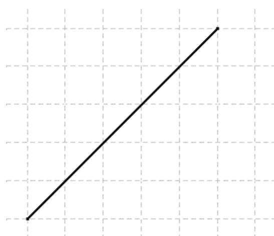
Epizoda 2. Diskuse

Při měření poslední úsečky z obrázku 2 se žáci shodnou na tom, že úsečka neměří přesně 42 mm. Dochází však k diskusi o tom, zda její přesná délka je blíže ke 42 nebo ke 43. Výzva, aby žáci rozhodli o tom, který z údajů 42^{+} nebo 43^{-} je správný, otevírá další epizodu.

Epizoda 3. Objev myšlenky porovnávání úseček

Jestliže žáci dlouho nenalézají řešení, učitel může nabídnout další úsečky k měření, a tím je nasměrovat od pouhého měření ke spekulativ-ním úvahám.

Po změření úsečky na obrázku 3, jejíž naměřená hodnota je 71^{-}, jeden žák objevil vztah mezi zde nakreslenou úsečkou a úsečkou diskutovanou v epizodě 2. a tvrdí:
„Tato úsečka měří necelých 71 mm. Protože 3/5 ze 71 je 42,6, její skutečná délka je blíže k číslu 43. Správné řešení je tedy 43^{-}.“



Obr. 3

Objevená myšlenka žáky zaujala a využili jí k prověření správnosti svých dosavadních měření. Další žák objevil v posledním tvrzení nesrovnalost: „Druhá úsečka z obrázku 2 však měří 28^{+}, polovina z toho je 14^{+} a třikrát 14^{+} je 42^{+}. Toto je správné řešení.“

Problém sice není vyřešen, ale cesta k jeho vyřešení je již otevřena.

Epizoda 4. Objev myšlenky prodlužování úsečky

Žáci již sami vyznačují úsečky, které vzniknou prodloužením úhlopříčky jednoho čtverečku, měří a počítají. Jako nejpřesvědčivější argument ve prospěch jednoho řešení se objevil tento: Když vede úsečka po úhlopříčkách sedmi čtverečků, měří 99, možná přesně, ale určitě ne více. Úhlopříčka jednoho čtverečku tedy s jistotou neměří více než 14,15, a tedy její trojnásobek neměří více než 42,45. Správný výsledek je tedy 42^{+}.

Řešení první problémové situace ukončujeme výzvou ke čtenáři, aby se pokusil nalézt další mřížové úsečky vhodné pro podobné žákovské spory.

2. problémová situace - kreslení mřížových čtverců

Je dána mřížová úsečka. Nakreslete alespoň jeden mřížový čtverec tak, aby daná úsečka byla jeho stranou.

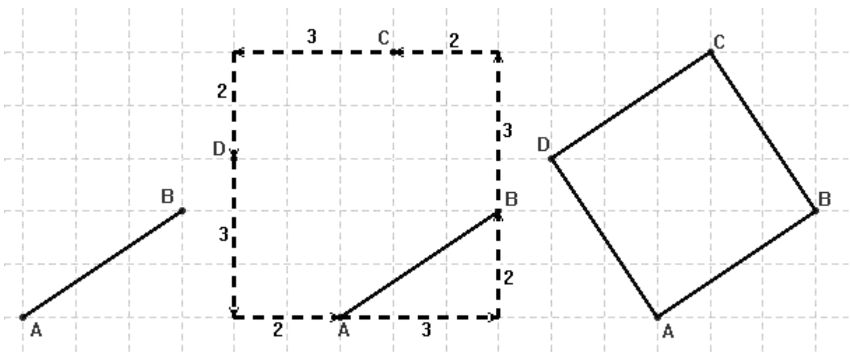
Řešení této problémové situace opět proběhlo v několika epizodách.

Epizoda 5. Objev konstrukce čtverce

Po mnoha experimentování a kreslení čtverců, jejichž strany jsou v linkách čtverečkovaného papíru, žáci objevili dva návody, jak k dané mřížové úsečce dokreslit čtverec.

Návod 1.

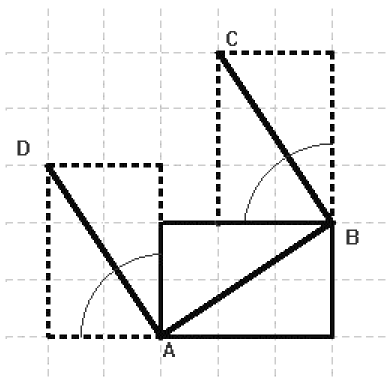
Je dána například úsečka AB. Vyjdi z bodu A a po linkách čtverečkovaného papíru cestuj do bodu B takto: udělej 3 kroky vpravo, pak 2 kroky nahoru a jsi v bodu B. Pokračuj ve směru nahoru třemi kroky, pak zahni vlevo a udělej 2 kroky - máš bod C. Pokračuj v tomtéž směru (tedy vlevo) třemi kroky, pak zahni dolů a udělej znovu 2 kroky - máš bod D. Z něj již jen pro kontrolu - 3 kroky dolů a 2 vpravo a jsi opět v bodu A. Body A, B, C, D jsou pak vrcholy čtverce. „Cesta“, kterou jsi udělal, opisuje čtverci ABCD čtvercový „rámeček“.



Obr. 4

Návod 2.

Nakresli obdélník tak, aby jeho strany ležely v linkách čtverečkovaného papíru a aby daná úsečka AB byla jeho úhlopříčkou. Tento obdélník otoč některým směrem o pravý úhel kolem bodu B. Vyznač úhlopříčku otočeného obdélníku, která vychází z bodu B. Její druhý krajní bod je bod C. Vrať se k původnímu obdélníku a otoč jej kolem bodu A opačným směrem. Vyznač úhlopříčku otočeného obdélníku, která vychází z bodu A.. Její druhý krajní bod je bod D. Spoj body C, D a máš vyznačen čtverec ABCD.



Obr. 5

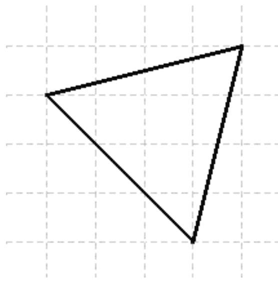
Druhý návod je zároveň ověřením správnosti prvního návodu. Navíc tím, že umíme na čtverečkovaném papíru k libovolné mřížové úsečce zkonstruovat čtverec, umíme též k dané úsečce vést daným bodem úsečku kolmou.

3. problémová situace - hledání mřížového rovnostranného trojúhelníku

Najdi mřížový rovnostranný trojúhelník.

Epizoda 6. Rovnostranný trojúhelník

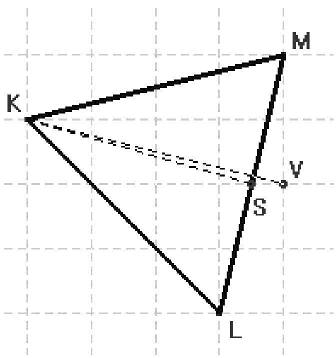
Žáci se pokoušeli nakreslit mřížový rovnostranný trojúhelník. Jako nejnadějnější řešení se objevilo to, které je uvedeno na obrázku 6.



Obr. 6

Epizoda 7. Využití konstrukce kolmice jako důkazu

Diskuse o tom, zda je trojúhelník skutečně rovnostranný, vedla přes měření jeho stran až k následujícímu obrázku a argumentu:



Obr. 7

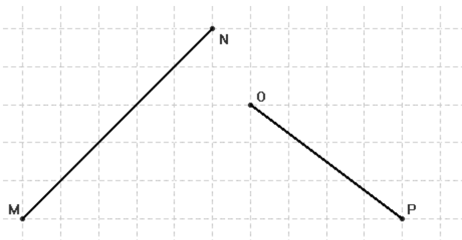
Kdyby byl trojúhelník KLM rovnostranný, musela by úsečka KS být jeho výškou. To ale není, neboť kolmá úsečka vedená z bodu K k úsečce LM je úsečka KV.

(Jsme si vědomi, že jsme přeskočili otázku sestrojení středu úsečky.)

Strategický problém hledání mřížových rovnostranných trojúhelníků zůstává nevyřešen. Zjednodušme jej a hledejme alespoň rovnoramenné trojúhelníky.

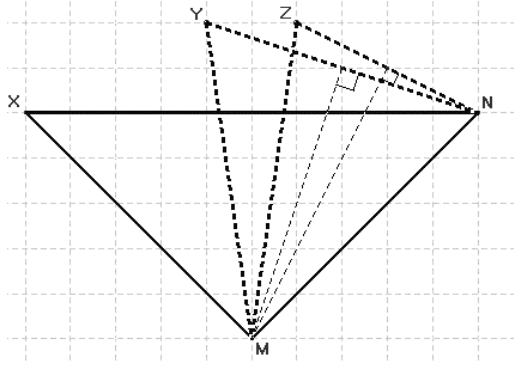
Epizoda 8. Hledání rovnoramenných trojúhelníků

Žáci/studenti hledali rovnoramenné mřížové trojúhelníky, když bylo dáno jedno jejich rameno. Jako zajímavá zadání se ukázaly úsečky MN a OP na obrázku 8.

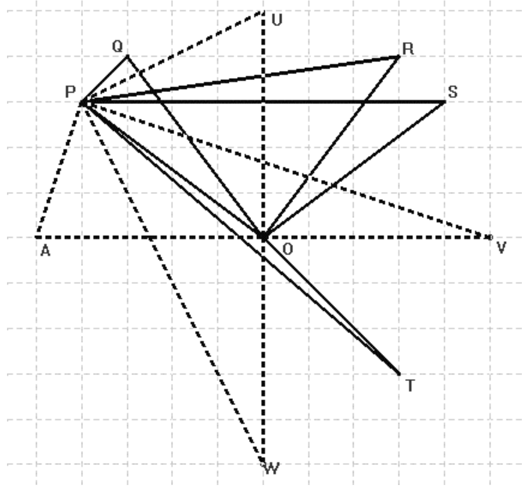


Obr. 8

Žáci/studenti po nějaký čas řešili problém. Řešení, která jsou na obrázku 9a i 9b vyznačena plnou čarou, tj. ΔMNX, ΔOPQ, ΔOPR, ΔOPS, ΔOPT, nebylo obtížné nalézt. Jenom málo žáků objevilo časem i další řešení, která jsou vyznačena čárkovaně. Tato řešení vyvolala bouřlivou diskusi o jejich správnosti. Použití argumentu z epizody 6 však správnost potvrzuje.



Obr. 9a



Obr. 9b

Epizoda 9. Dva objevy - pád hypotézy

Uvedená řešení postupně krystalizovala ve dva velké objevy, které žáci formulovali takto:

Objev stejně dlouhých „šikmých“ úseček

Trojúhelníky MNY a MNZ na obrázku 9a jsou rovnoramenné, a tedy ramena MN a MY, MN a MZ jsou stejně dlouhé a „různě šikmé“ úsečky.

Poznámka. Uvedené dva trojúhelníky dávají jedno řešení Diofantické rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, a to čtveřici (5, 5, 7, 1).

Objev šikmé úsečky s celočíselnou délkou

Trojúhelníky OPU (OPV, OPW, OPA) jsou rovnoramenné. Délka jednoho ramene je přesně 50, a tedy délka druhého ramene je také přesně 50. Úsečka OP je „šikmá“, a přesto její délka je celé číslo.

S druhým objevem padá hypotéza vyslovená v první epizodě, že „žádná šikmá úsečka nemůže měřit přesně celé číslo“. Zároveň se otevírá další problémová situace a s ní i další epizody.

4. problémová situace - hledání šikmých úseček s celočíselnou délkou

Najdi další mřížové „šikmé“ úsečky s celočíselnou délkou.

Epizoda 10. Hledání rovnoramenných trojúhelníků

Tuto otázku většinou pokládají sami žáci/studenti: Existují další úsečky s celočíselnou délkou? Pod silným dojmem posledního objevu se žáci/studenti soustředili na hledání různých rovnoramenných trojúhelníků, jejichž jedno rameno leželo v lince čtverečkovaného papíru.

Po chvíli experimentování žáci/studenti objevili, že takových trojúhelníků lze nalézt více. Učitel pak přivedl studenty k tomu, že nové vztahy, nové zákonitosti se lépe vynoří, jestliže vneseme do experimentů pořádek a zvolíme jejich vhodnou evidenci. Tím přecházíme k další epizodě.

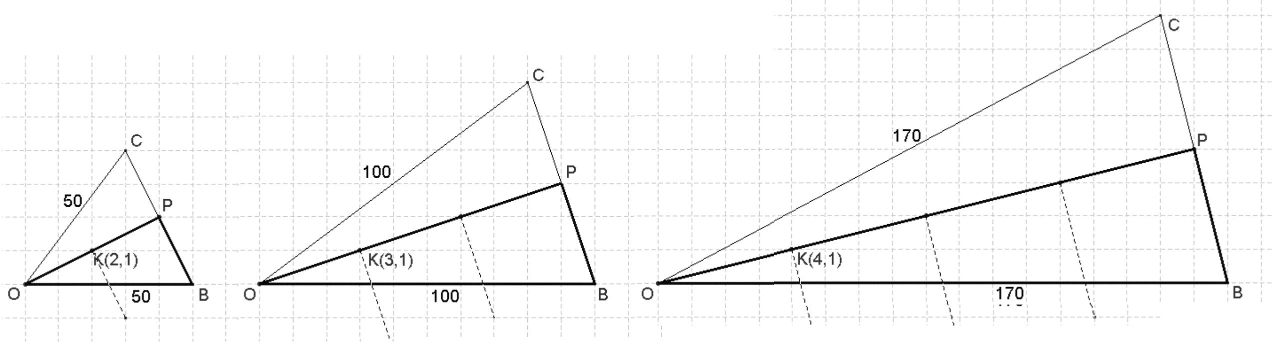
Epizoda 11. Objev klíčové role výšky

Studenti objevili užitečný návod: zvolit nejdříve výšku, nebo přesněji polopřímku OK, na které výška OP bude ležet. Pak již není těžké rovnoramenný trojúhelník dokreslit. Výška OP hledaného trojúhelníku OBC nejdříve hraje roli odvěsny pravoúhlého mřížového trojúhelníku OPB s přeponou v lince čtverečkovaného papíru, a pak roli osy souměrnosti hledaného trojúhelníku. (Obr. 10)

Po několika pokusech studenti zjistili, že tato metoda kreslení rovnoramenných trojúhelníků pracuje spolehlivě a zformulovali ji jako nový objev: Jestliže si zvolíme jakoukoliv úsečku OK, vždy ji umíme prodloužit na úsečku OP a nalézt bod B tak, že trojúhelník OPB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P a přeponou OP, která leží v lince čtverečkovaného papíru.

Epizoda 12. Objev zákonitosti, vstup soustavy souřadné

Po uspořádání nalezených trojúhelníků OBC studenti objevili i první zákonitost. Formulovali ji



Obr. 10

po výzvě, aby nakreslili požadovaný trojúhelník, jestliže bod K, vnitřní bod polopřímky, na které bude ležet výška, má souřadnice (7,1) a bod O je počátkem soustavy souřadné, takto:
„Výšku dostaneme tak, že úsečku OK prodloužíme 7-krát. Obecně, máli bod K souřadnice (a,1), úsečku OK je nutno prodloužit a-krát.“

Výsledkem zobecnění je jednoparametrický soubor trojúhelníků a šikmých úseček s celočíselnou délkou. Tento soubor trojúhelníků a úseček je uchopen procesuálně a čísla dosud používaná mají funkci veličiny.

Epizoda 13. Vpád algebry

Ve 12. epizodě dospěli studenti k důležitému poznání. Umí popsat i takový obrázek, který neumí nakreslit, protože nemají dost velký papír. K popisu jim poslouží čísla, která budou souřad-nicemi zkoumaných bodů. Čísla tak dostanou novou roli - roli adresy.

Dále byli studenti vyzváni, aby předchozí situaci popsali „řečí“ čísel, tzn. aby všechny zúčastněné body opatřili souřadnicemi. Uspořádání obrázků vyjádřili uspořádáním souřadnic bodů do tabulky. Do prvních třech řádků tabulky studenti zapisovali souřadnice bodu K, paty výšky P a vrcholů B, C trojúhelníku OBC, které vyčetli z prvních třech obrázků.

K		**P**		**B**		**C**	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
2	1	4	2	5	0	3	4
3	1	9	3	10	0	8	6
4	1	16	4	17	0	15	8
…	…	…	…	…	…	…	…
7	1	49	7	50	0	48	14
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**1**	a^2	a	$\mathbf{a^2+1}$	**0**	$\mathbf{a^2-1}$	**2a**

K vyplnění dalších řádků nebylo již třeba kreslit obrázky, neboť posloupnost čísel v jednotlivých sloupcích tabulky je snadno odhalitelná.

Aby studenti odhalili závislost čísel i v jednotlivých řádcích, vyzve je učitel, aby doplnili řádek tabulky, který odpovídá tomu trojúhelníku, jehož bod K má souřadnice (7,1). Ten, kdo umí vyplnit tento řádek tabulky, aniž by musel vyplnit všechny řádky předchozí, závislost mezi čísly již vidí a snadno formuluje závislost i obecně, která je vyjádřena v posledním řádku tabulky.

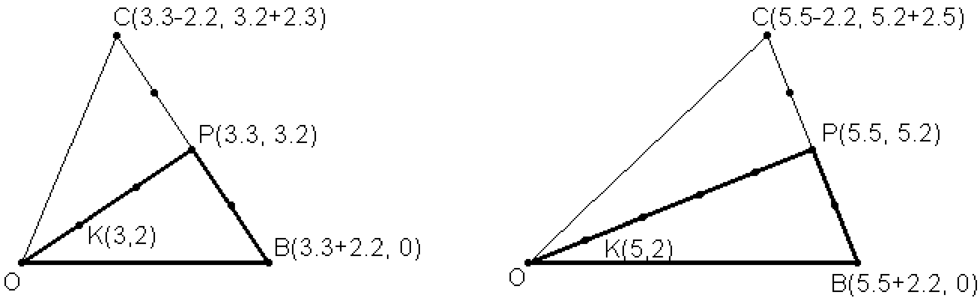
Soubor rovnoramenných trojúhelníků a šikmých úseček s celočíselnou délkou je nyní uchopen konceptuálně. Výsledkem tohoto uchopení je formulace vzorečku:

Pro každé přirozené číslo **a** existuje šikmá úsečka OC s celočíselnou délkou. Bod C má souřadnice $\mathbf{(a^2-1, 2a)}$ a délka úsečky OC se rovná $\mathbf{a^2+1}$.

V dalších dvou epizodách postupně proměníme na parametr i druhou souřadnici bodu K a budeme odhalovat závislost souřadnic bodů B, C na obou souřadnicích bodu K metodou uvolňování parametru.

Epizoda 14. Výzva k řešení případů pro K(a, 2)

Studenti opět kreslili mřížové trojúhelníky OBC pro tyto volby bodu K: K(3,2), K(4,2), K(5,2) atd. Ke všem klíčovým bodům zapsali jejich souřadnice. Některým z nich se již v procesu kreslení trojúhelníků objevily vztahy mezi souřadnicemi zkoumaných bodů.



Obr. 11

Po „přenesení“ obrázků do tabulky a po zkušenostech s první tabulkou nová tabulka „promluvila“ i k dalším řešitelům a umožnila formulovat obecný vztah v posledním řádku.

K		**P**		**B**		**C**	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
3	2	9	6	13	0	5	12
5	2	25	10	29	0	21	20
…	…	…	…	…	…	…	…
7	2	49	14	53	0	45	28
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**2**	a^2	2a	$\mathbf{a^2+4}$	**0**	$\mathbf{a^2-4}$	**2.2a**

Výsledkem je opět vzoreček, který studenti interpretovali slovy:

Pro každé přirozené číslo **a** existuje šikmá úsečka OC s celočíselnou délkou. Bod C má souřadnice **(a^2-4, 2.2a)** a délka úsečky OC se rovná $\mathbf{a^2+4}$.

Nyní je již vidět, že do hry vstupuje také druhá souřadnice bodu K. Jakým způsobem, to se řeší v další epizodě.

Epizoda 14. Pokračování v uvolňování druhé souřadnice

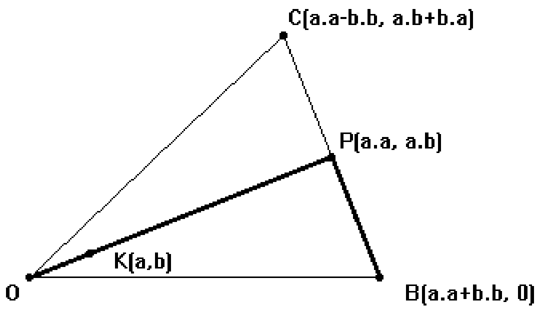
Studenti řešili ještě případ pro K(a,3). Nabyté zkušenosti umožnily postupovat rychleji a některé kroky přeskočit.

Dále učitel vyzval řešitele, aby poslední řádky tří tabulek přepsali do nové tabulky. Protože se čísla v tabulce „chovají“ podle očekávání, snadno lze vyplňovat i další řádky tabulky, a tak postupně uvolňovat i druhou souřadnici a nakonec dojít v posledním řádku tabulky k dvouparametrickému vzorečku.

Nyní již umíme ke každému bodu K(a,b) najít příslušný rovnoramenný trojúhelník OBC.

Objevený vztah budeme interpretovat obrázkem i verbálně:

K		P		B		C	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
a	1	a^2	a	a^2+1	0	a^2-1	2a
a	2	a^2	2a	a^2+4	0	a^2-4	2.2a
a	3	a^2	3a	a^2+9	0	a^2-9	2.3a
…	…	…	…	…	…	…	…
a	7	a^2	7a	a^2+7^2	0	a^2-7^2	2.7a
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**b**	a^2	ba	$\mathbf{a^2+b^2}$	**0**	a^2-b^2	**2.ba**



Ke každým dvěma přirozeným číslům **a, b, a>b,** lze najít šikmou mřížovou úsečku OC, jejíž délka je celočíselná. Bod C má souřadnice $\mathbf{(a^2-b^2,2ab)}$ a délka úsečky je IOCI = $\mathbf{a^2+b^2}$.

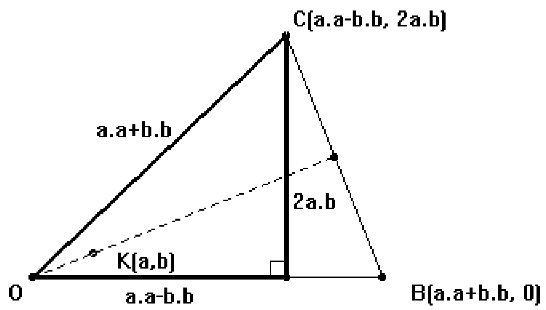
Obr.12

Epizoda 15. Vstup Pythagorovy věty

Učitel pokládá závěrečný úkol celé cesty za objevem Pythagorejských trojic: Najděte všechny Pythagorejské trojice, neboli najděte všechna řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v oboru přirozených čísel.

Zpětný pohled na obrázek 12 s Pythagorovou větou „v rukou“ umožňuje novou interpretaci:

Některá řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ lze popsat takto: $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, kde a, b jsou libovolná přirozená čísla a a>b.



Obr. 13

Některá řešení dané rovnice, například x = 9, y = 12, z = 15, uvedeným způsobem popsat nelze. Tuto trojici (9,12,15) však můžeme získat jako násobek trojice (3,4,5). Trojice nesoudělných přirozených čísel, která jsou řešením dané rovnice, se nazývají *primitivní Pythagorejské trojice*.

Můžeme tvrdit, že uvedeným způsobem lze popsat všechny primitivní Pythagorejské trojice. Důkaz o tom zde uvádět nebudeme.

ZÁVĚR

Proveďme ještě revizi řešení 1. problémové situace. O délkách všech úseček na obrázku 2, kromě čtvrté zleva, umíme s jistotou rozhodnout, zda se rovnají naměřené hodnotě v milimetrech přesně, nebo zda jsou o „kousek“ větší nebo menší. Čtvrtá úsečka zatím všem našim objevům odolává. Neumíme zatím rozhodnout, zda naměřená hodnota 36 je přesná, nebo zda bychom k ní měli připsat znaménko + nebo -. Řešení tohoto problému se ubírá po jiné větvi. Ta vede přes obsahy čtverců a může nás dovést k odhalení dalších geometrických vztahů - k Pickově formuli i k Pythagorově větě.

Zdůrazněme ještě jednou dva z didaktického hlediska důležité jevy:

- číslo se zde vyskytovalo ve dvou funkcích - jako veličina (délka úsečky) a jako adresa (souřadnice bodu),
- byla zde aplikována metoda postupného uvolňování parametru, která je založena na experimentování, systemizování experimentů a jejich evidenci, transferu obrázků do „řeči“ čísel, na základě série separovaných modelů odhalení zákonitostí a jejich zobecnění a konečně interpretaci obecných závěrů. Tato metoda je široce použitelná ve výuce matematiky a je přístupná dětem i prvního stupně základní školy. Od učitele však vyžaduje značnou dávku trpělivosti.

Věříme, že jsme článkem dostatečně ilustrovali, jak je prostředí čtverečkovaného papíru vhodné pro realizaci cílů konstruktivizmu ve výuce geometrie. Tento přístup umožnil každému žákovi/ studentovi, aby svým vlastním tempem samostatně řešil předložené problémové situace, které formuluje buď učitel, nebo sami řešitelé, aby na základě vlastního experimentování a propojování vizuální geometrie tvaru a procesuální aritmetiky odhaloval zákonitosti, ty pak formuloval, na přiměřené úrovni zobecňoval a různými způsoby interpretoval.

Tato zdánlivě zdlouhavá cesta k poznatku, který lze na příslušné úrovni sdělit jednou větou, nám, učitelům přinesla mnoho uspokojení. Uspokojení z radosti mnohých, i těch pomalejších či slabších žáků nad úspěšně vyřešenou dílčí úlohou, z dychtivosti některých po dalších úlohách, z rušných diskusí, z dobrého pocitu, že jsme přispěli k pozvednutí kognitivního sebevědomí žáků a studentů – budoucích učitelů.

Literatura:

[1] Bruckenheimer, M., Arcavi, A.: (1995) A visual approach to some elementary number theory. *The Mathematical Gazette, V.79, No. 486, p. 471-474*

[2] Hall, B., Rowland, T.: (1997) The classical form of Pythagorean triples. *The Mathematical Gazette, V.81, No. 491, p. 270-272*

[3] Hejný, M., Jirotková, D.: (1999) Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou. *UK, Pedagogická fakulta, Praha*

[4] Hejný, M., Jirotková, D.: (2000) Čtverečkovaný papír, trojúhelníky a Pickova formule. *Učitel matematiky, JČMF, r. 8, č. 3(35), s. 129-135*

[5] Hejný, M., Jirotková, D., Stehlíková, N.: (1996) Analytická geometrie. *Karolinum, Praha*

[6] Hejný, M., Stehlíková, N.: (1999) Číselné představy dětí. *UK, Pedagogická fakulta, Praha*

[7] Hejný, M. a kol.: (1989) Teória vyučovania matematiky 2. *Slovenské pedagogické nakladatelstvo, Bratislava*

[8] Hejný, M., Kuřina, F.: (1998) Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. *Matematika – fyzika - informatika, 7*

[9] Jirotková, D.: (2000a) Odhalování geometrických závislostí s využitím čtverečkovaného papíru. *In 7. Setkání učitelů matematiky všech typů stupňů a škol, JČMF, s. 95-10.*

[10] Jirotková, D.: (2000b) Geometrie v přípravě učitelů. *In Matematika v přípravě učitelů elementární školy, Acta Universitas Purkynianae 53, UJEP, Ústí nad Labem, s. 128-130*

[11] Kuřina, F.: Dva přístupy k vyučování - instruktivní a konstruktivní (Pět příkladů). *nepublikovaný text*

[12] Mareš, J.: (1998) Styly učení žáků a studentů. *Portál, Praha*

[13] Noddings, N.: (1990) Constructivism in Mathematics Education. *In Constructivist View in Mathematics Education, Monograph No. 4, p. 7-18*

INFORMÁCIA O NÁVRHU NOVEJ KONCEPCIE MATURITNEJ SKÚŠKY

Vladimír Jodas, Štátny pedagogický ústav, Bratislava

I. ÚVOD

Vypracovanie návrhu novej koncepcie maturitnej skúšky bolo Strategickým cieľom č. 4 plánu hlavných úloh ŠPÚ na rok 2001. Návrh bol prerokovaný a schválený Ústavnou radou dňa 12. júna 2001. Gestorom tejto úlohy bol RNDr. Pavol Černek, CSc. Na vypracovaní projektu sa podieľali Mgr. Ján Cangár, RNDr. Vladimír Jodas, PhDr. Samuel Jovankovič a Mgr. Marta Petrášová. Návrh rešpektuje výsledky verejnej diskusie, ktorá prebiehala v období od 11. 9. 2000 do 15. 3. 2001. v Učiteľských novinách a na www.spu.sanet.sk.

Výsledky diskusie jednoznačne hovoria, že:

- verejnosť nie je spokojná so súčasným stavom výchovno-vzdelávacieho systému a pociťuje potrebu zásadnej zmeny v tejto oblasti,
- súčasná MS nie je objektívnym meradlom vedomostí, zručností a všeobecných kompetencií absolventov strednej školy. Potrebu inovovať súčasnú MS podporili takmer všetci účastníci verejnej diskusie.

Väčšina účastníkov diskusie:

- súhlasí so zaručením objektivity MS zaradením externej časti MS,
- navrhuje vytvorenie kvalitných prostriedkov merania a overovania vedomostí, ktoré by mali zabezpečiť objektivitu MS,
- navrhuje, aby vysoké školy akceptovali výsledky objektivizovanej MS ako súčasť, resp. náhradu prijímacieho konania na VŠ,
- je toho názoru, že interná časť MS by mala zostať v kompetencii školy, pričom by sa mali objektivizovať, štandardizovať a unifikovať kritériá jej hodnotenia.

Pri tvorbe predkladaného návrhu novej koncepcie MS boli použité analýzy výsledkov Monitorov 1999, 2000 a predbežné informácie o výsledkoch Monitoru 2001, Návrh koncepcie rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike (projekt Milénium) a medzinárodné skúsenosti.

Na základe uvedených materiálov návrh novej koncepcie MS vychádza zo súčasnej maturitnej skúšky, a prezentuje vízie potrebných požiadaviek na nových maturantov v blízkej budúcnosti. Navrhované inovácie sú kompatibilné s trendmi vo sfére vzdelávania väčšiny európskych krajín.

Prečo je potrebná inovácia maturitnej skúšky

Maturitná skúška má overiť dosiahnuté výsledky výchovy a vzdelávania absolventov stredných škôl. Súčasne má overiť predpoklady a pripravenosť absolventov na vysokoškolské štúdium alebo na uplatnenie sa v budúcom povolaní. Maturitná skúška má byť objektívnym meradlom vedomostí, zručností a všeobecných kompetencií absolventa strednej školy.

Súčasná maturitná skúška tieto požiadavky v dostatočnej miere neplní. Medzi jej najzávažnejšie nedostatky patrí **malá validita a objektivita.**

Malá validita maturitnej skúšky znamená, že úspešná maturita málo vypovedá o tom, do akej miery absolvent dosiahol výchovno-vzdelávacie ciele daného typu školy a či je schopný úspešne pokračovať v ďalšom štúdiu na zvolenej vysokej škole, alebo sa uplatniť na trhu práce. Malá hodnovernosť MS je spôsobená predovšetkým neexistujúcimi výkonovými štandardmi požiadaviek.

Malá objektivita maturitnej skúšky spôsobuje, že výsledky maturitnej skúšky žiakov rôznych škôl sú prakticky neporovnateľné.

Malá objektivita a nízka výpovedná hodnota maturitnej skúšky spôsobujú, že vysoké školy nepovažujú túto skúšku za dostatočnú záruku pripravenosti na vysokoškolské štúdium.

Na splnenie požiadavky zvýšiť validitu a objektivitu MS je potrebné, aby MS bola **štandardizovaná** a **čiastočne externá.**

Štandardizácia by sa mala týkať obsahu a cieľových požiadaviek na vedomosti, zručnosti a všeobecné kompetencie absolventa. Cieľové požiadavky v jednotlivých predmetoch, ktoré budú súčasťou Maturitného poriadku, by mali byť výsledkom zhody medzi komunitou odborníkov, učiteľskou a rodičovskou verejnosťou.

Externý charakter novej koncepcie maturitnej skúšky by mala zabezpečiť centrálne vypracovaná, vo všetkých stredných školách alebo iných miestach na to určených, v rovnakom čase zadaná, pod externým dozorom konaná a externe vyhodnotená písomná časť skúšky z niektorých maturitných predmetov.

Návrh novej koncepcie maturitnej skúšky predpokladá, že **externá časť maturitnej skúšky bude akceptovaná vysokými školami** ako súčasť prijímacieho konania. Ak táto podmienka nebude prijatá, externú časť maturitnej skúšky ako jej novú súčasť, rodičovská, odborná a ostatná verejnosť prijme len ťažko.

Návrh novej koncepcie MS má naplniť právo žiaka dozvedieť sa výsledok objektívneho merania svojich vedomostí, schopností a zručností, aby sa vedel porovnať s ostatnými, aby mohol kvalifikovane posúdiť svoje rozhodnutie o budúcom štúdiu, resp. voľbu budúceho povolania. Týmto by sa malo naplniť aj právo rodičov, a celej verejnosti, mať objektívny poznatok o výsledkoch práce jednotlivých škôl.

Predkladaný návrh novej koncepcie MS predpokladá odstránenie nejednotnosti, rôznych výnimiek a špecifík ukončovania štúdia na stredných školách maturitnou skúškou. To znamená, že by mala zabezpečiť jednotný spôsob ukončovania vzdelávania na všetkých stredných školách, na ktorých sa bude štúdium ukončovať maturitnou skúškou.

Realizácia návrhu novej koncepcie MS má umožniť zvýšenie kvality MS tak, aby bola porovnateľná s maturitnou skúškou v štátoch Európskej únie. Zároveň zachováva pozitívne stránky doterajšej maturitnej skúšky, maturitné tradície, ktoré sú súčasťou našej kultúry.

Uvedený návrh vychádza z predpokladu zavedenia novej koncepcie MS v školskom roku 2003/2004.

2. CIELE A FUNCIA MATURITNEJ SKÚŠKY

Cieľom maturitnej skúšky je najmä

1. Primerane náročnými cieľovými požiadavkami v rozsahu všetkých závažných výchovno-vzdelávacích cieľov motivovať žiakov k dosahovaniu čo najlepších výsledkov.
2. Posúdiť a zhodnotiť či je absolvent schopný :

- komunikovať v slovenskom, vyučovacom a v cudzom jazyku, čo je podmienkou jeho ďalšej študijnej a pracovnej mobility. Mal by pri tom vedieť aktívne používať súčasné komunikačné a informačné technológie a získané informácie spracovať a posúdiť,
- aplikovať a tvorivo využívať nadobudnuté vedomosti a zručnosti pri riešení problémov a úloh vo vybranej oblasti,
- využívať poznatky pri upevňovaní povedomia vlastnej identity, vnímať kultúru a vypestovať svoj vzťah k ostatným ľuďom a k prírode.

3. Poskytovať odberateľom a verejnosti relevantné informácie o výsledkoch výchovno-vzdelávacej práci škôl, ktoré umožnia požadovanú korekciu činnosti škôl a pôsobiť ako prostriedok ktorý

bude motivovať jednotlivé školy k zachovaniu a ďalšiemu rozvoju špecifických čŕt ich výchovno-vzdelávacej činnosti.

Funkciou maturitnej skúšky je potvrdiť získanie stredoškolského vzdelania na požadovanej úrovni a spôsobilosť absolventa pokračovať v ďalšom štúdiu na vysokej škole, resp. spôsobilosť absolventa vykonávať povolanie, na ktoré sa pripravoval počas stredoškolského štúdia.

Komentár
Proklamované ciele MS nie je možné dosiahnuť hneď. Nová koncepcia maturitnej skúšky bude na začiatku vychádzať z obsahu a formy vzdelávania v súčasných podmienkach a vyššie uvedené ciele v úplnej miere dosiahneme v priebehu ďalších 10-15 rokov, a to v súlade s realizáciou krokov Programu výchovy a vzdelávania v SR na obdobie 15-20 rokov (Projekt Milénium).

3. RIADENIE A ORGANIZÁCIA MATURITNEJ SKÚŠKY

V súvislosti s riadením a organizáciou maturitnej skúšky bude potrebné zriadiť Ústrednú maturitnú komisiu (ďalej len „ÚMK“), posilniť útvar merania výsledkov výchovno-vzdelávacieho procesu pri ŠPÚ, rozšíriť pole pôsobnosti Štátnej školskej inšpekcie a zriadiť funkciu predsedu školskej maturitnej komisie.

Ústredná maturitná komisia
ÚMK je odborný orgán štátnej správy na ktorý MŠ SR deleguje niektoré rozhodovacie kompetencie o obsahu a forme MS na všetkých typoch škôl. Na základe týchto delegovaných kompetencií ÚMK predovšetkým:
- na návrh ŠPÚ a ŠIOV schvaľuje zoznam predmetov z ktorých možno konať MS,
- schvaľuje Maturitný poriadok a jeho inovácie,
- zadáva požiadavky na testy pre externú časť MS, objednáva ich tvorbu, schvaľuje vypracované testy a zodpovedá za ich kvalitu.

Štátny pedagogický ústav a Štátny inštitút odborného vzdelávania
Vytvoria, udržiavajú a permanentne inovujú Maturitný poriadok obsahujúci mimo iné:
- zoznam predmetov, z ktorých je možné konať MS (ďalej len „maturitných predmetov“),
- úrovne (základnú a prípadne vyššiu) odlíšené názvom, na akých sa môže z jednotlivých maturitných predmetov konať MS,
- cieľové požiadavky z každého maturitného predmetu vo všetkých úrovniach a predpokladaný počet vyučovacích hodín na ich zvládnutie,
- formu a podobu všetkých častí MS v každej úrovni daného maturitného predmetu
- skúšobný poriadok každej úrovne jednotlivých maturitných predmetov,
- metodické pokyny pre realizáciu skúšky v jednotlivých maturitných predmetoch a hodnotenie jej výsledku.

K tomu bude potrebné predovšetkým zabezpečiť
- tvorbu a udržiavanie banky testových úloh z jednotlivých maturitných predmetov,
- tvorbu testov podľa objednávky ÚMK,
- výrobu a distribúciu testov pre externú časť MS,
- vydávanie metodických pokynov pre realizáciu a opravu testov externej časti MS,
- školenie externých spolupracovníkov v rozsahu potrebnom pre výkon ich činností,
- riadenie a organizovanie opráv externej časti MS,
- vedenie potrebnej dokumentácie o priebehu a výsledkoch externej časti MS,
- zverejňovanie textov písomných skúšok, výsledkov externej časti MS a jej vyhodnotenie,
- spracovanie a vyhodnotenie výsledkov externej časti MS ako podkladu pre ďalšie zlepšenie práce v oblasti tvorby nástrojov merania výsledkov výchovno-vzdelávacieho procesu.

Za prípravu a organizáciu MS na škole zodpovedá **riaditeľ školy,** za priebeh MS na škole zodpovedá **Školská maturitná komisia**. Skladá sa z predsedu, riaditeľa školy, a predsedov skúšobných komisií.

4. MATURITNÉ PREDMETY

1. MS pozostáva zo skúšok z piatich maturitných predmetov. Žiak si môže v riadnom termíne dobrovoľne zvoliť ešte jednu skúšku z ďalšieho maturitného predmetu.
2. Maturitným predmetom môže byť predmet vyučovaný na stredných školách, ďalej súbor predmetov, alebo súbor častí predmetov, ak splní predpísané podmienky. O zaradení medzi maturitné predmety bude rozhodovať ÚMK. Zoznam maturitných predmetov bude súčasťou Maturitného poriadku.
3. Z maturitných predmetov určených maturitným poriadkom bude možné vykonať MS na viacerých (obvykle dvoch - základnej a vyššej) úrovniach. Absolvent si bude môcť v každom predmete slobodne vybrať úroveň, na ktorej chce daný predmet absolvovať. Oznámi to v termíne určenom na výber maturitných predmetov.
4. Za rôzne maturitné predmety sa nepovažujú rôzne úrovne toho istého maturitného predmetu.

Maturitné predmety pre gymnázia s vyučovacím jazykom slovenským

- slovenský jazyk a literatúra,
- matematika,
- jeden zo svetových jazykov,
- dva ďalšie všeobecnovzdelávacie maturitné predmety.

Komentár

K zaradeniu matematiky medzi povinné maturitné predmety na gymnáziách nás viedli dva hlavné dôvody. Po prvé, úspešnosť v matematike vysoko pozitívne koreluje s ďalšou akademickou úspešnosťou absolventa. Pre túto vysokú predikčnú validitu sa skúška z matematiky zaraďuje do MS vo väčšine krajín Európy. Po druhé, matematika je v gymnáziách predmetom s najväčším počtom týždenných vyučovacích hodín. Je preto na mieste, ak štát chce maturitou z tohto predmetu (jej externou časťou) overiť účelnosť takto vynaloženého úsilia a prostriedkov. Možnosť výberu medzi základnou úrovňou (pre tých absolventov, pre ktorých nebude matematika súčasťou, alebo predpokladom ďalšieho vysokoškolského vzdelávania) a vyššou úrovňou, čiastočne eliminuje diskrimináciu tých absolventov ktorí majú vrodené a rozvinuté iné druhy inteligencie než matematické. Uvedomujeme si, že cieľové požiadavky v základnej úrovni budú musieť obsahovať najmä to, čo budú potrebovať všetci absolventi gymnázií. Sú to viac schopnosti vykonávať určité mozgové operácie než súhrn pamäťových poznatkov z matematiky. Preto bude treba o cieľových požiadavkách základnej úrovne matematiky dosiahnuť čo najširší konsenzus.

5. ČASTI MATURITNEJ SKÚŠKY

Maturitná skúška z jednotlivých maturitných predmetov môže mať dve časti:

- externú,
- internú.

O tom, či skúška z daného maturitného predmetu, resp. len z niektorej jeho úrovne obsahuje externú časť, rozhoduje ÚMK na návrh ŠPÚ, alebo ŠIOV. Toto rozhodnutie je súčasťou Maturitného poriadku.

Komentár:

Tento model maturitnej skúšky sa javí ako najpriliehavejší vzhľadom na skutočnosť, že externou časťou skúšky z jednotlivých maturitných predmetov sa pomocou štátom garantovaných testov zabezpečí validita a objektivita výsledkov maturitnej skúšky, kým interná (školská) časť skúšky by mala uchovať a ďalej rozvíjať špecifickosť jednotlivých stredných škôl. Tým by sa dosiahla vyváženosť medzi vplyvom štátu a školy. Vzájomné prepojenie a rovnocennosť oboch uvedených zložiek zabezpečí jednu z podstatných požiadaviek na inováciu maturitnej skúšky – zvýšenie validity a objektívnosti MS pri zachovaní rozmanitosti obsahu a foriem výchovno-vzdelávacieho procesu jednotlivých stredných škôl.

Predpokladáme, že maturitná skúška z vyučovacieho jazyka, zo svetového cudzieho jazyka a z matematiky na gymnáziách, bude mať vždy externú časť, bez ohľadu na úroveň, na ktorej žiak z daného predmetu skúšku koná. Z voliteľného maturitného predmetu bude mať skúška externú časť obvykle len vo vyššej úrovni.

Externá časť MS

1. Externá časť MS pozostáva z centrálne (na základe katalógu cieľových požiadaviek) vypracovaných, vo všetkých stredných školách (alebo na iných miestach na to určených) v rovnakom čase zadaných, pod externým dozorom konaných a externe vyhodnotených písomných skúšok z maturitných predmetov určených Maturitným poriadkom.
2. Za prípravu a organizáciu externej časti MS zodpovedá ÚMK
3. Definitívne verzie písomných skúšok externej časti MS schvaľuje ÚMK.
4. Externá časť MS z každého maturitného predmetu trvá aspoň 120 a najviac 240 minút.
5. Externú časť MS zabezpečujú ŠPÚ, ŠIOV, ŠŠI, predseda školskej maturitnej komisie (najmä regulárnosť priebehu a kvalitu dozoru) a riaditeľ každej školy, resp. riaditeľ poverenej školy.
6. Externá časť MS je neverejná. Účasť je povolená len osobám povereným ÚMK.
7. Externá časť MS zo všetkých maturitných predmetov sa bude konať podľa celoštátne platného harmonogramu, ktorý schváli ÚMK, spravidla počas 3 týždňov v marci.

Interná časť MS

1. Žiak koná internú časť MS z jednotlivých maturitných predmetov pred skúšobnou komisiou.
2. Skúšobné komisie môžu byť triedne, alebo odborné, ich predsedov menuje zriaďovateľ školy.
3. Členov skúšobných komisií menuje riaditeľ školy.

Komentár
Riaditeľ školy sa môže rozhodnúť pre:
- *súčasný model, t. j. pre triedne skúšobné komisie, ktorých zloženie bude upravené tak, aby pri skúške z každého predmetu bola v komisii väčšina členov s aprobáciou pre tento predmet,*
- *odborné skúšobné komisie pre jednotlivé predmety, zložené len z troch učiteľov s aprobáciou pre daný predmet,*
- *kombináciu oboch možností.*

4. Interná časť MS v jednotlivých maturitných predmetoch sa môže konať rôznou formou – písomne, ústne, prakticky, predvedením alebo obhajobou vlastného diela a aj kombináciou týchto foriem. Formy konania skúšky v jednotlivých maturitných predmetoch budú určené v Maturitnom poriadku.

Komentár
Úlohou internej časti MS v jednotlivých predmetoch je overiť najmä tú časť kompetencií absolventa, ktorá sa nedá overiť formou testu či iným písomným prejavom. Preto táto časť MS má byť vhodným "komplementom" externej časti tak, aby spolu podávali ucelený obraz o vedomostiach, zručnostiach a postojoch absolventa. Z tejto úlohy vyplynú aj návrhy na inováciu foriem a podoby internej časti MS vo väčšine predmetov. Predpokladáme, že postupne sa bude interná časť MS obohacovať najmä o také nové formy ako je predvedenie, či obhajoba vlastného produktu. Predpokladom k tomu je dostatočne pripravená pedagogická komunita. Navrhovanou podobou internej časti MS chceme zachovať všetko to, čo bolo dobré v doterajšej tradícii maturitných skúšok. Pomocou tejto časti sa zachová a aj rozšíri možnosť prejavovania špecifickosti a profesijnej orientácie jednotlivých stredných škôl. Zodpovednosť za organizáciu a realizáciu tejto časti maturitnej skúšky v zmysle príslušných právnych predpisov budú mať stredné školy.

5. Interná časť MS je verejná.
6. Za prípravu a organizáciu internej časti MS zodpovedá riaditeľ školy.

7. Za priebeh internej časti MS zodpovedá Školská maturitná komisia. Finančné zabezpečenie internej časti MS je v kompetencii zriaďovateľa školy.
8. Žiak musí vykonať internú časť MS v priebehu piatich pracovných dní.
9. Dĺžku skúšky pre každý maturitný predmet určuje Maturitný poriadok.
10. Ak je v niektorom maturitnom predmete súčasťou internej časti MS aj písomná skúška, tak táto smie trvať najviac 240 minút. Termín konania tejto skúšky bude určený harmonogramom MS.
11. Interná časť MS sa bude konať podľa celoštátne platného harmonogramu, ktorý schváli ÚMK, spravidla 2-3 týždne v júni.

6. HODNOTENIE MATURITNEJ SKÚŠKY

1. Dokladom o úspešnom absolvovaní MS je maturitné vysvedčenie.
2. Podmienky na úspešné zloženie maturitnej skúšky pre každý maturitný predmet sú určené v Maturitnom poriadku.
3. Žiak úspešne zložil MS, ak úspešne zložil skúšku zo všetkých maturitných predmetov.
4. Externá časť skúšky z každého maturitného predmetu sa hodnotí percentom úspešnosti a percentilom.

Komentár:
Pre školský rok 2003/2004 neuvažujeme o stanovení minimálnej hranice na úspešnosť v externej časti.

5. Spôsob hodnotenia internej časti MS je pre každý maturitný predmet určený v Maturitnom poriadku. Výsledky internej časti MS v každom maturitnom predmete (aj v jednotlivých formách či zložkách) navrhujeme hodnotiť známkou.
6. Výsledok každej časti MS (externej a internej) bude vyznačený na vysvedčení zvlášť.

Komentár:
Nenavrhujeme uvádzať celkové hodnotenie maturitného predmetu. Predpokladáme, že odberateľ si sám urobí celkové hodnotenie podľa svojich kritérií.

Z uvedeného návrhu novej koncepcie MS vyplýva dôležitosť dokumentu „Maturitný poriadok“. Preto uvádzame jeho (zatiaľ len pracovnú) osnovu a ukážky jednotlivých častí, najmä tých, ktoré majú vzťah k matematike.

Návrh osnovy maturitného poriadku.

Obsah

2.1. Dejepis
2.2. Náuka o spoločnosti
2.3. Geografia

3. Oblasť matematiky, informatiky a prírodných vied

3.1. Matematika
3.2. Informatika
3.3. Fyzika
3.4. Chémia
3.5. Biológia

III. Odborné predmety.

IV. Hodnotenie výsledkov MS

V. Metodický sprievodca.

VI.

Ukážka z úvodu

Funkcie a štruktúra dokumentu

Dokument vyjadruje predstavu o spoločensky žiadúcej podobe požiadaviek na absolventov stredných škôl, ohľadne naplnenia cieľov, ku ktorému ich vzdelávanie smerovalo. Cieľové požiadavky z jednotlivých predmetov (v tej úrovni, ktorú si žiak slobodne vybral), ktoré tento dokument obsahuje, sú záväzné v plnom rozsahu pre tých absolventov, pre ktorých je daný predmet povinným predmetom maturitnej skúšky, alebo pre tých, ktorí sa voľbou rozhodli z tohto predmetu konať maturitnú skúšku.

Dokument je určený pre
– žiakov ako súbor požiadaviek, určujúci čo a do akej miery má absolvent v danom maturitnom predmete vo zvolenej úrovni ovládať,
– rodičov a žiakov, ako súbor informácií slúžiaci pri výbere strednej školy primeranej záujmu a schopnostiam dieťaťa,
– tvorcov testov a iných foriem externej časti maturitnej skúšky, slúžiaci ako záväzný dokument limitujúci rozsah a náročnosť požiadaviek na vedomosti, zručnosti a schopnosti žiaka, ako dokument určujúci obsahovú náplň tejto časti maturitnej skúšky, ako dokument zaručujúci porovnateľnú validitu maturitnej skúšky v priebehu času
– učiteľov, ako informácia o požiadavkách, ktoré sú na ich žiakov kladené, ako záväzný dokument určujúci obsah a varianty podôb a foriem internej časti maturitnej skúšky, ako metodické poučenie pre hodnotenie žiakov na maturitnej skúške, ako informácia o trende vo vývoji kurikula daného predmetu

Ukážka z úvodu k časti II. 3.1.

3.1. Matematika

Matematické vzdelávanie je významnou súčasťou všeobecnej vzdelanosti. Vedie žiakov k pochopeniu kvantitatívnych vzťahov v prírode i spoločnosti, vybavuje ich poznatkami a zručnosťami užitočnými pre každodenný život a potrebnými pre chápanie obklopujúcich nás javov a závislostí. Pre mnohých žiakov je nevyhnutným predpokladom pre ich ďalšie technicky, prírodovedne, alebo ekonomicky orientované štúdium, resp. je potrebné pre ich vzdelávanie v odborných predmetoch. Matematické vzdelávanie má viesť žiakov k tomu, aby:

- sa rozvíjali a funkčne zdokonaľovali ich poznávacie procesy, najmä ich myslenie a intelektové schopnosti ako predpoklad vytváranie potrebných zručností a kompetencií,
- pritom mali dostatok príležitosti používať všetky základné myšlienkové operácie (ako sú abstrakcia, zovšeobecňovanie, analýza, syntéza, porovnávanie, triedenie) aj operácie s pojmami (ako sú usudzovanie, indukcia, dedukcia)
- si osvojili nevyhnutné matematické poznatky, zručnosti a metódy práce v tej miere, aby sa zlepšila ich schopnosť riešiť problémy a efektívne konať,
- dokázali pri riešené matematických problémov efektívne používať dostupné informačné a komunikačné technológie (kalkulačky, počítače, internet),
- vnímali matematiku a jej históriu ako nedielnu súčasť ľudskej kultúry,
- posilnilo pozitívne rysy ich osobností o také zložky ako sú racionálnosť, dôslednosť, presnosť, tvorivosť,
- umožnilo záujemcom pokračovať v ďalšom štúdiu tých odborov ľudskej činnosti, kde je potrebná matematická príprava

K tomu je potrebné aby mali základné poznatky a primerané zručnosti z týchto častí matematiky:

3.1.1. Jazyk matematiky. (Základné poznatky z matematickej logiky a základné poznatky o množinách.)

3.1.2. Čísla, premenná a výrazy

3.1.3. Rovnice, nerovnice a ich sústavy

3.1.4. Funkcie a postupnosti

3.1.5. Limitné procesy

3.1.6. Planimetria

3.1.7. Stereometria

3.1.8. Kombinatorika, pravdepodobnosť a základy štatistiky

Úvod k časti 3.1.6. – Planimetria

Planimetria

Vyučovanie planimetrie sleduje nasledovné špecifické ciele, ktorých dosiahnutie chceme maturitnou skúškou overiť. (Tučným písmom je označené to, čo patrí len do vyššej úrovne.)

Žiak má

- získať návyk používať načrtnutý obrázok na zjednodušenie riešenia problému, pri formulácii problému, pri matematizácii reálnej situácie a má byť schopný vyhotoviť takýto náčrt
- poznať základné množiny bodov daných vlastností a má byť schopný (po vhodnej voľbe sústavy súradníc) nájsť ich analytické vyjadrenie,
- vedieť skonštruovať (nakresliť) objekt jednoznačne popísaný svojimi vlastnosťami a (resp.) svojou polohou, využívajúc pri tom poznatky o známych množinách bodov danej vlastnosti ***a schopnosť nájsť obrazy týchto množín v jednotlivých zhodných zobrazeniach, resp. v rovnoľahlosti. Má byť schopný popísať konštrukciu objektu ako algoritmus,***

- byť schopný z predloženého náčrtu či obrázku vyčítať v ňom obsiahnutú informáciu, popísať vlastnosti nakresleného objektu a jeho polohu, vedieť odmerať dĺžku a uhol a vedieť vypočítať to, čo sa nedá bezprostredne odmerať,
- byť schopný pri riešení geometrických problémov vhodne zvoliť súradnicovú sústavu a pomocou ***poznatkov o vektoroch resp. iných*** metód analytickej geometrie problém vyriešiť,
- byť schopný pri riešení geometrických problémov používať prístupné informačné technológie a informačné zdroje,
- ***byť schopný v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii hľadaného objektu, o platnosti či neplatnosti nejakého vzťahu medzi objektmi či ich mierami, o platnosti či nepravdivosti nejakého tvrdenia o geometrických objektoch a ich vlastnostiach,***
- ***byť schopný v jednoduchších prípadoch z daných (známych) vlastností geometrických objektov vydedukovať, odvodiť nové vlastnosti.***
- ***byť schopný riešiť úlohy komplexného charakteru, mobilizujúc svoje poznatky a zručnosti získané pri štúdiu jednotlivých častí (planimetria, trigonometria, analytická geometria) geometrie.***

K tomu je potrebné aby ovládal nasledovné pojmy, poznal uvedené vzťahy medzi nimi, a mal rozvinuté zručnosti umožňujúce mu riešiť ďalej uvedené typy úlohy z týchto oblastí:

0. **Lineárne útvary v rovine.**
1. **Trojuholník.**
2. **Kruh, kružnica.**
3. **Mnohouholníky.**
4. **Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie.**
5. **Konštrukčné úlohy.**
6. **Komplexné úlohy.**

Ukážka spracovania časti Trojuholník:

1. Trojuholník.

a) pojmy:

vrchol, strana (ako vzdialenosť, ako úsečka), výška (ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka), vnútorný uhol, ostrouhlý trojuholník, pravouhlý trojuholník, tupouhlý trojuholník, rovnoramenný trojuholník, rovnostranný trojuholník, ťažnica, ťažisko, ***priesečník výšok trojuholníka,*** stredná priečka, os strany, os (vnútorného) uhla, kružnica trojuholníku opísaná a kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka,

b) vzťahy medzi pojmami:

trojuholníková nerovnosť, súčet uhlov trojuholníka, oproti väčšej strane leží väčší uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly, delenie ťažníc ťažiskom, Pytagorova veta, vyjadrenie obsahu pomocou dĺžky strany a k nej príslušnej výšky, ***vyjadrenie obsahu pomocou dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého, vyjadrenie obsahu pomocou dĺžok strán,*** vyjadrenie kosínusov vnútorných uhlov pomocou dĺžok strán (kosínusová veta), sínusová veta, zhodné a podobné trojuholníky, vety sss, sus, usu, Ssu o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov, ***Euklidove vety***.

Uvedené pojmy a vzťahy medzi nimi žiak pozná do tej miery, že rozumie zadaniam úloh v ktorých sa tieto pojmy používajú a ovláda vzťahy medzi nimi, do tej miery, že ich vie aktívne použiť pri riešení úloh.

c) typy úloh, ktoré má žiak vedieť riešiť:

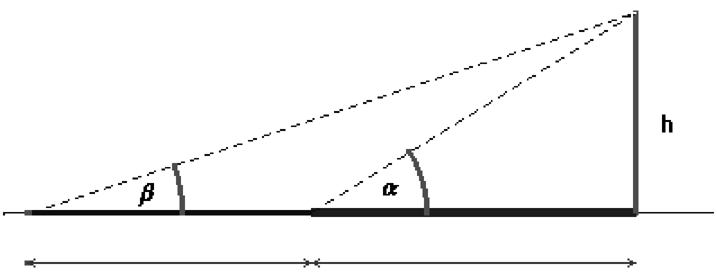
- vypočítať zo známych prvkov trojuholníka ostatné veličiny pokiaľ k tomu postačia horeuvedené vzťahy
- jednoduché praktické úlohy s fyzikálnou alebo zememeračskou tematikou
- úlohy komplexného charakteru, vyžadujúce mobilizáciu poznatkov z planimetrie, trigonometrie a schopnosť používať analytickú metódu
- úlohy o trojuholníku riešiteľné rozdelením trojuholníka na dva pravouhlé trojuholníky a aplikovaním Pytagorovej vety
- použitím podobnosti trojuholníkov rozdeliť úsečku v danom pomere (zostrojiť na priamke bod, ktorý má vzhľadom k dvom daným bodom priamky daný deliaci pomer)
- zostrojiť trojuholník, využívajúc bezprostredne (bez transferu) dané vzťahy medzi prvkami trojuholníka, znalosť základných množín bodov daných vlastností, schopnosť zostrojiť prieniky takýchto množín a obrazy týchto množín bodov v jednotlivých zhodných zobrazeniach, resp. v rovnoľahlosti (takéto úlohy sú v 6. Konštrukčné úlohy.)

Exemplifikačné úlohy:

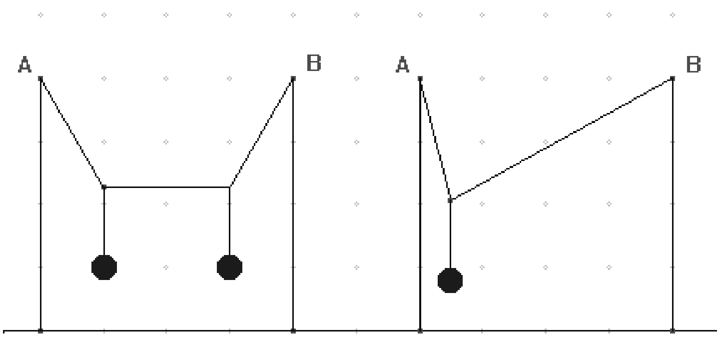
1.
Poznáte dĺžku strany trojuholníka ($c = 8$ cm), protiľahlý uhol ($\cos \gamma = 0,6$) a výšku na túto stranu ($v_c = 7$ cm). Zostrojte tento trojuholník a vypočítajte veľkosti zvyšných strán.

2.
Poznáte dĺžku strany AB trojuholníka, uhol γ a ťažnicu t_a. Zostrojte tento trojuholník a vypočítajte veľkosti zvyšných strán. (Všetky údaje sú dané konkrétne!)

3.
V trojuholníku, ktorého strany majú dĺžky 13 cm, 14 cm a 15 cm, vypočítajte
- dĺžku výšky na najdlhšiu stranu,
- kosínus najväčšieho uhla,
- plošný obsah



4.
Z brehu rieky neznámej šírky **b** vidieť strom neznámej výšky **h** pod výškovým uhlom $\boldsymbol{\alpha}$. Z bodu o **d** metrov vzdialenejšom od brehu rieky vidieť tento strom pod výškovým uhlom $\boldsymbol{\beta}$. (Pozri priložený obrázok.) Vypočítajte šírku rieky aj výšku stromu.



5.
3 m dlhá šnúra na bielizeň je zavesená medzi bodmi A a B, ktorých vzdialenosť je 2 m a ktoré sú 2 m vysoko od zeme. Vo vzdialenostiach po jednom metri sú na šnúre zavesené dve závažia. O koľko cm klesne jedno závažie ak odstránime druhé závažie (pozri obrázok)?

6. Postačí rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžky 7 cm na prikrytie mince s priemerom 4 cm ?
7. Prvý trojuholník má dĺžky strán 5cm, 6 cm a 7 cm, druhý trojuholník má dĺžky strán 4 cm, 6 cm a 8 cm. Určte rozdiel ich obsahov.

Ukážka zo záveru časti II. 3.1.

Forma a obsah jednotlivých častí maturitnej skúšky z matematiky.

Prehľad o forme maturitnej skúšky z matematiky v jednotlivých úrovniach najlepšie vystihuje tabuľka :

<table>
<tr><td>Úroveň :</td><td colspan="2">Externá časť :</td><td>Interná časť :</td></tr>
<tr><td>Základná</td><td colspan="2">120 minútový test s 30 položkami, väčšinou s výberom odpovede, sčasti s tvorbou krátkej, objektívne skórovateľnej odpovede.</td><td>Vyriešenie vylosovaného zadania.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Vyššia</td><td rowspan="2">1. časť - 120 minútový test s 30 položkami, väčšinou s výberom odpovede, sčasti s tvorbou krátkej, objektívne skórovateľnej odpovede.</td><td rowspan="2">2. časť - 60 minútový test s tromi štruktúrovanými úlohami.</td><td>Vyriešenie vylosovaného zadania.</td></tr>
<tr><td>Alternatíva – obhajoba projektu.</td></tr>
</table>

Obsah jednotlivých častí maturitnej skúšky z matematiky:

Externá časť maturitnej skúšky z matematiky bude obsahovať testové položky, resp. štruktúrované úlohy zo všetkých častí (3.1.1. až 3.1.8.) s výnimkou časti **Limitné procesy.** V tejto súvislosti odporúčame tento tematický celok zaradiť do vyučovania ako posledný vo 4. ročníku. Relatívne väčším zastúpením úloh z časti 3.1.8 (Kombinatorika, pravdepodobnosť a základy štatistiky) medzi testovými položkami chceme zdôrazniť význam tejto časti matematiky pre všetkých absolventov stredných škôl. Medzi štruktúrovanými úlohami v 2. časti testu externej časti (vo vyššej úrovni) nebudú úlohy typu „Dokážte...“.

Keďže interná časť MS má vhodne dopĺňať externú časť a v tejto sa dá dostatočne overiť šírka poznatkov zo všetkých častí matematiky, nepovažujeme za potrebné, aby zadania pre internú časť pokrývali celý obsah učiva matematiky. Naopak, myslíme si, že zadania majú obsahovať všetky bežné postupy a metódy používané pri riešení (matematických) úloh a problémov, ilustrované na primeranom obsahovom materiále.

Očakávame, že v internej časti MS sa odzrkadlia špecifické možnosti a tradície školy. V internej časti je možné overovať napr. schopnosť žiakov používať pri riešení problémov súčasné informačné a komunikačné technológie, prácu s PC, kalkulátormi, internetom a pod.

NIEKTORÉ MOŽNOSTI VYUŽITIA GRAFICKÝCH KALKULAČIEK NA HODINÁCH STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Lilla Koreňová, Metodické centrum mesta Bratislavy, Exnárova ul., Bratislava

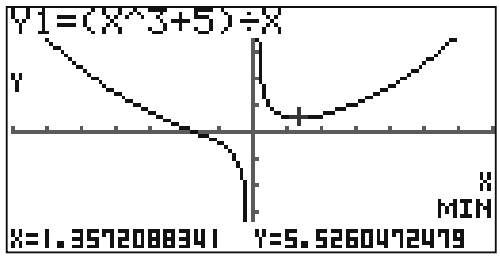
Matematika je taká stará, ako ľudstvo samé , tak ako aj snaha uľahčiť si prácu pri síce známych, ale prácnych algoritmoch počítania. Matematika a jej technické pomôcky (Abakus, logaritmické pravítko, kalkulačka, počítač...) pôsobili na seba vždy interaktívne. Veda vytvárala teoretické zázemie i potrebu pre výrobu technických pomôcok a opačne, ich používanie ovplyvňovalo a obohacovalo matematickú vedu. Našim právom aj povinnosťou je poznať a používať najnovšie technické prostriedky (teda aj programovateľné grafické kalkulačky). Grafické programovateľné kalkulačky, podobne ako PC a Internet patria do dnešnej doby, sú jednou z nových informačných a komunikačných technológií. Dnes by sme si už nemali klásť otázku, či tieto IKT využiť vo vyučovacom procese, ale ako ich využiť.

IKT pomáhajú učiteľovi pri napĺňaní súčasných cieľov vyučovania, ale existencia nových technológií a ich používanie v bežnom živote sa musí odzrkadľovať aj v zmene týchto cieľov. Napríklad v matematike by sme mali:

- neklásť dôraz na zručnosti, ktoré v súčasnosti už nemajú v živote význam (lebo existujú efektívne nástroje, ktorými ich možno nahradiť)
- viac sa zamerať na matematizáciu úloh
- naučiť žiakov poznať a efektívne používať nové technológie pri riešení úloh
- naučiť žiakov interpretovať výsledky, ktoré získame pomocou IKT (PC s vhodným softvérom, grafická kalkulačka a pod.)
- využiť, že nové technológie výrazne rozširujú možnosť experimentovania, umožňujú žiakovi dôjsť vlastným tempom k výsledku, k vysloveniu hypotézy, k riešeniu úlohy
- naučiť žiakov používať IKT ako nástroj pri bádaní
- podporovať žiakov v samostatnej práci, lebo práca na projektoch s podporou IKT vedie žiakov ku kreatívnosti

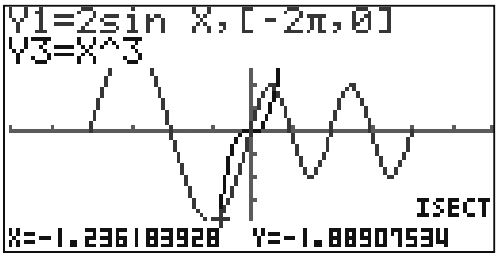
Chcela by som poukázať na praktické využitie grafických kalkulačiek vo vyučovaní matematiky na stredných školách aj preto, že mám praktické skúsenosti hlavne s projekčnou grafickou kalkulačkou CFX – 9850 GB Plus od firmy Casio / pomocou LCD displeja a meotaru premieta na projekčné plátno/. Kresliace schopnosti grafických kalkulačiek môžeme využiť v učive o funkciách, pri riešení rovníc s parametrom, zviditeľnením postupností a uľahčením práce s nimi, riešení slovných optimalizačných úloh, v neposlednom rade chcem naznačiť ďalšie široké možnosti využitia programovacích vlastností kalkulačiek pri chápaní a používaní algoritmov v matematike.

Učivo o funkciách je obsiahlou a dôležitou časťou stredoškolskej matematiky. Často potrebujeme vedieť niektoré vlastnosti danej funkcie, preto sú vypracované rôzne matematické postupy na znázornenie funkcií, hľadanie minima, maxima, definičného oboru a oboru funkčných hodnôt. Ak máme k dispozícii grafickú kalkulačku, ktorá nám vykreslí graf danej funkcie, ľahšie sa nám podarí určiť hľadané vlastnosti daných funkcií. Ba čo viac, môžeme experimentovať, hľadať určité závislosti, zákonitosti medzi tvarom predpisu funkcie, jeho koeficientmi a tvarom grafu funkcie. Grafická kalkulačka nám umožní ľahko pracovať aj s takými funkciami /napríklad zloženými/, s ktorými sme sa doteraz na strednej škole nezaoberali.



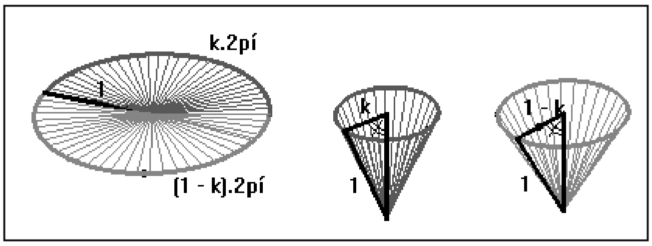
Každá rovnica tvaru f(x)=0 alebo f(x)=g(x) sa dá ľahko vyriešiť graficky, ak máme k dispozícii nástroj /grafickú kalkulačku/, ktorý vie vykresliť grafy funkcií a s potrebnou presnosťou určiť priesečníky s x-ovou osou alebo priesečníky daných dvoch funkcií. Sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych môžeme tiež riešiť graficky hľadaním priesečníkov dvoch grafov.

Slovné optimalizačné úlohy sa v stredoškolskej matematike zaraďujú zväčša až do maturitného ročníka, keď sa už prebralo učivo o deriváciách a o vyšetrovaní priebehu funkcie pomocou nich. Niektoré úlohy, kde ide len o minimum alebo maximum kvadratickej funkcie sa objavujú sporadicky v učebniciach aj nižších ročníkov SŠ. Ak ale vieme vykresliť graf ľubovoľnej funkcie, môžeme riešiť optimalizačné úlohy (z fyziky, zo života a pod.) aj bez používania diferenciálneho počtu a teda už od prvého ročníka strednej školy. Nemusíme venovať toľko času a energie na výpočet maxima, minima funkcie, môžeme sa zaoberať matematizáciou slovných úloh, pritom nás vôbec neobmedzuje skutočnosť, či danú rovnicou vieme klasickým spôsobom vypočítať, či vieme odhadnúť, ako vyzerá daný graf funkcie.



Napríklad úloha: Kornútiky

Kruh s polomerom 1 máme rozdeliť na dva kruhové výseky tak, aby súčet objemov kornútikov, ktoré sa z týchto výsekov zhotovia bol čo najväčší.



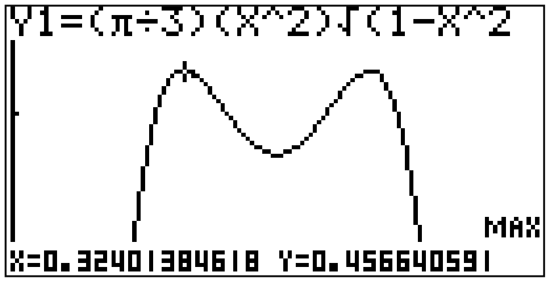
Riešenie:

Graf funkcie vyjadrujúcej súčet objemov kornútikov si môžeme nakresliť :

$$V_z = \frac{\pi}{3} k^2 \sqrt{1-k^2}$$

$$V_m = \frac{\pi}{3} (1-k)^2 \sqrt{1-(1-k)^2}$$

$$V = V_z + V_m = \frac{\pi}{3} k^2 \sqrt{1-k^2} + \frac{\pi}{3} (1-k)^2 \sqrt{1-(1-k)^2}$$



Na obrázku vidíme 2 extrémy (symetricky rozložené).

Pri skúmaní vlastností číselných postupností nám môže pomôcť, ak máme nástroj /kalkulátor/, ktorý vie rýchlo a prehľadne vypočítať veľké množstvo členov tejto postupnosti, prípadne ich zobraziť v grafickej podobe. Hlavne pri štatistických výpočtoch nám môže kalkulačka veľa pomôcť, najmä pri zdĺhavých a komplikovaných výpočtoch. Pomocou grafickej kalkulačky môžeme nielen vyhodnocovať štatistické údaje, ale aj vykresliť regresné krivky, znázorniť histogram a pod.

Pri štúdiu funkcií jednej premennej x sa môžeme stretnúť s tým, že zápis funkcie obsahuje ešte aj parameter. Hodnota parametra nejakým spôsobom ovplyvňuje priebeh funkcie. Grafická kalkulačka môže zjednodušiť odhad vplyvu parametra na graf funkcie.

V matematike sa často stretávame s algoritmami, či už ide o viacnásobné použitie nejakého vzorca, rozklad čísla na prvočísla, Euklidov algoritmus na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel a pod. Programovateľná kalkulačka nám nielen pomôže s mechanicky sa opakujúcimi výpočtami, ale samotná tvorba programov napomáha k rozvoju tých schopností a návykov, ktoré sa rozvíjajú vyučovaním matematiky.

Toto je len niekoľko stručných a neúplných námetov, ako využiť grafickú kalkulačku v stredoškolskej matematike. Verím, že táto nová pomôcka už zanedlho zaujme svoje miesto v laviciach žiakov a na katedrách učiteľov tak, ako je to vo vyspelých krajinách už samozrejmosťou. A matematická učiteľská verejnosť by sa mala zamýšľať nielen nad tým ako zmeniť ich vplyvom metodiku, formu ale aj samotný obsah vyučovania matematiky. Je nad čím začať premýšľať!

ŠKOLENIA UČITEĽOV „INFORMAČNÉ A KOMUNIKAČNÉ TECHNOLÓGIE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY“ NA MCMB

Lilla Koreňová, Metodické centrum mesta Bratislavy, Exnárova ul., Bratislava

Na existenciu nových informačných a komunikačných technológií a ich metodické využívanie vo vyučovaní matematiky treba učiteľov cieľavedome pripravovať. Metodické centrum mesta Bratislavy už druhý rok s úspechom vzdeláva učiteľov v tejto oblasti. Cieľom priebežného vzdelávania (45h) a špecializačného inovačného štúdia (200h) „Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky“ je oboznámiť učiteľov stredných a základných škôl s novými metódami a prostriedkami zefektívňovania vyučovania matematiky a tým aj zvyšovania účinnosti pedagogického procesu. Absolventi by mali byť schopnejší samostatne a efektívne využívať Internet pri získavaní aktuálnych pedagogických a matematických materiálov ako aj dostupného didaktického a matematického softvéru, využívať Internet vo vyučovaní matematiky vo všetkých fázach vyučovacieho procesu / pri motivácii, pri opakovaní, pri osvojovaní nového učiva, pri upevňovaní a prehlbovaní, pri preverovaní aj hodnotení žiakov, pri ich domácej príprave/, vhodne a efektívne využívať vo vyučovaní matematiky didaktický softvér (Cabri geometria, Microsoft Excel, Derive, Mathematica, programy na kreslenie grafov funkcií a iné), vhodne využívať programovateľné grafické kalkulačky na hodinách matematiky. Naučia sa prezentovať svoje skúsenosti s využívaním IKT vo vyučovaní na Internete ´(tvoriť vlastné pedagogické, matematické www stránky, matematické testy).

Obsah štúdia priebežného vzdelávania /45h/:

- Poučenie o používaní Internetu pri získavaní informácií
- Matematické aplety ako nová forma prezentácie poznatkov
- Cabri geometria - didaktické využitie
- Programy na kreslenie grafov funkcií
- Ďalší pedagogický softvér
- Používanie programu EXCEL vo vyučovaní matematiky
- Didaktické využitie grafických kalkulačiek
- Tvorba vlastnej webstránky /základy/ - forma prezentácie učiteľa

K tomuto vzdelávaniu vzniklo aj multimediálne CD autoriek Lilla Koreňová, Dana Hrdinová ako študijný materiál "IKT vo vyučovaní matematiky" vydané Nadáciou OSF a Neinvestičným učiteľským fondom pri MCMB.

Ciele a obsah štúdia špecializačného inovačného štúdia IKT vo vyučovaní M /200h/:
Štúdium sa uskutoční v rozsahu 200 hodín v priebehu dvoch školských rokov formou viacdňových sústredení. Na vzdelávacom procese účastníkov školenia sa budú podieľať prednášatelia a lektori z vysokých škôl, pedagogických ústavov, lektori projektu Infovek a metodici MCMB. Realizácia bude prebiehať formou prednášok, cvičení, výcvikov a seminárov.

1.blok: Internet a jeho didaktické využitie :
Internet ako zdroj pedagogických materiálov (prednáška + cvičenie)
Internet ako zdroj matematických materiálov (prednáška + cvičenie)
Internet ako zdroj matematického didaktického softvéru (prednáška + cvičenie)
Matematické www stránky a ich didaktické využitie /Aplety, on-line matematické hry, testy a pod./ (prednáška + cvičenie)
Internet a jeho využitie pri rozvoji kreativity žiakov /žiacke projekty vo vyučovaní matematiky/ (prednáška + cvičenie)
Email , matematické a pedagogické diskusné skupiny ako prostriedok výmeny informácií pre učiteľov (cvičenie)

2.blok: Matematický didaktický softvér a jeho využitie:
Program Cabri geometria a jej metodické využitie (prednáška + cvičenie)
Program Microsoft Excel a jeho využitie na hodinách matematiky (prednáška + cvičenie)
Programy na kreslenie grafov funkcií (prednáška + cvičenie)
Programovateľné grafické kalkulačky a ich využitie na hodinách matematiky (prednáška + cvičenie)
Program Derive a jeho didaktické využitie (prednáška + cvičenie)
Program Mathematica a jeho využitie (prednáška + cvičenie)
Ďalší matematický didaktický softvér (prednáška + cvičenie)
Tvorba didaktických matematických testov pomocou vhodného softvéru na PC (prednáška + cvičenie)
Tvorba vlastnej matematickej www stránky (prednáška + cvičenie)

MCMB, Exnárova č. 20, P.O.BOX 41, 820 12 Bratislava 212
www.mcmb.sk
www.gymn-sturovo.sk/~lilla/
e-mail: lilla.korenova@nextra.sk

BUDOVÁNÍ KONEČNÉ ARITMETICKÉ STRUKTURY[1]

Jana Kratochvílová, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

ABSTRAKT

Náš výzkum je zaměřen na hledání jevů, jež jsou přítomny v procesu vytváření struktury, především těch, které charakterizují tento proces. K tomuto účelu byla použita struktura, která vyžaduje minimální matematické znalosti, ale nabízí různé, někdy i překvapující strukturální situace. Jedná se o množinu všech triád $(a,b,c) \in \mathrm{N}^3$ $(0 \notin \mathrm{N})$, $a \leq b$, $c = a+b$ s levým zobrazením *Lt*: $(a,b,c) \rightarrow (a,c,a+c)$ a pravým zobrazením *Rt*: $(a,b,c) \rightarrow (b,c,b+c)$. Triády jsou novým „prostředím“ pro žáky a tato skutečnost dělá strukturu vhodným nástrojem pro zkoumání prvních etap strukturačního procesu. Autorem nástroje je M. Hejný, který byl inspirován učebnicí Repáš – Černek – Pytlová – Vojtela (1997, s. 4).

1. ÚVOD

Strukturální myšlení se neodehrává na hladině objevování vztahů v existující struktuře, ale na hladině postupného vytváření nové struktury prostřednictvím řešení série přiměřeně náročných úloh. V průběhu experimentů zaměřených na tuto problematiku jsem si vytvářela vlastní představu procesu strukturace a struktury. Řeší-li žák poprvé úlohu jistého typu (3+?=5), používá metodu pokus-omyl. Řeší-li podobné další úlohy (5+?=6, ...), jeho práce se urychluje, nabývá vhled do situace a zkušenosti. Po jisté době objeví, že hledané číslo lze získat třeba metodou dopočítávání nebo dokonce metodou odčítání. Toto poznání mění původní strategii pokus-omyl na přímou strategii výpočtu. Vytvoření tohoto poznání je základní kámen tvorby struktury (v tomto případě aritmetické). V dalším procesu pomocí jiných sérií úloh objevuje žák další souvislosti, již ne toliko mezi objekty, ale i mezi vytvořenými poznatky. Soubor jednotlivých poznatků se tak stává provázanější, konzistentnější a tento proces chápu jako strukturaci a jeho výsledek jako strukturu.

Nejbohatší matematická struktura, kterou zná absolvent základní školy, je struktura celých, resp. racionálních čísel. Budování této struktury probíhá spontánně a dlouhodobě, takže je velice těžké zkoumat tento proces experimentálně. Ovšem naší snahou je najít oblast matematiky, kde by experimentální studium strukturace bylo uskutečnitelné. Jako příklad lze uvést strukturaci rovinných izometrií (tvorbu grupy izometrií). Ale náročnost této oblasti, zejména klíčový pojem - skládání zobrazení - nedovoluje použít tento nástroj na žáky ve věku nižším než patnáct let.

Jedním z řešení tohoto problému je struktura triád. Je to výzkumný nástroj, kterým lze zkoumat budování matematické struktury žákem již ve věku 10-11 let. Důležitá vlastnost struktury spočívá v její novosti, žák pracuje s novým matematickým objektem (triádou) a dvěma zobrazeními. Žák při budování struktury nemůže používat žádná strukturální pravidla, která zná z aritmetiky.

2. NÁSTROJ VÝZKUMU

Experimenty byly uskutečněny s třiceti žáky ve Velké Británii a osmnácti žáky v České republice, vždy ve skupinkách po třech v tichém prostředí kabinetu. Každý experiment ve Velké Británii trval asi tři hodiny. V České republice probíhal ve třech setkáních, které trvaly asi hodinu, s týdenními přestávkami.

Struktura byla zadána 10-11tiletým žákům ve třech etapách. První etapa se týkala porozumění novému objektu – triádě. Druhá se týkala porozumění zobrazení *Lt* a *Rt* a třetí se už týkala „pohybu“ ve struktuře s grafickou pomocí – papír s očíslovanými řádkami 1-10 (viz obr. 1, 2). Scénář experi-

[1] Článek je podpořen grantem GAČR č. 406/01/P090

mentu obsahoval třináct prototypů úloh, ale z časových důvodů pouze šest z nich bylo použito v experimentech se žáky. V budoucím výzkumu budou použity všechny prototypy.

První etapa experimentu se žáky byla zaměřena na pojem triády. Po krátkém vysvětlení, co je triáda, byly žákům zadány následující úlohy[2]:

Ú1. Vytvořte triády s čísel: 3, 7, 4.
Ú2. Vyberte tři čísla z čísel 2, 3, 4, 5, abyste vytvořili triádu.
Ú3[3]. Vyberte ty trojice, které jsou triádami: (1,5,6); (10,10,20); (3,2,1); (6,4,10); (7,5,17); (0,0,2).
Ú4. Doplňte chybějící čísla do trojic tak, abyste vytvořili triády: (7,9,_); (_,9,10); (14,78,_); (7,_,12)[4]; (75,_,74)[4].
Ú5. Které z následujících čtyř čísel je nutné škrtnout, abyste vytvořili triádu: (5,6,9,11)?
Ú6. Doplňte chybějící čísla (_,_,8), abyste vytvořili triádu. Najděte všechny možnosti.
Ú7. Stejně pro (_,6,_).
Ú8. Stejně pro (3,_,_).
Ú9. Najděte triády se všemi a) sudými, b) lichými čísly.
Ú10. Najděte triádu s prvními dvěma čísly dělitelnými 7 a třetím číslem nedělitelným 7.

Druhá etapa experimentu byla zaměřena na zobrazení *Lt* a *Rt*. Jazyk používaný v této etapě byl pozměněn. Pojmy „levé zobrazení“ a „pravé zobrazení“ byly nahrazeny pojmy „první triáda (dané triády)“ a „druhá triáda (dané triády)“, přičemž slova v závorkách byla často vynechávána. Zobrazení bylo žákům vysvětleno procedurou o pěti krocích:

Konstrukce první[5] triády z dané[5] triády:

- Vezmi první číslo <u>dané</u> triády.
- Toto číslo umísti jako první číslo <u>první</u> triády.
- Vezmi třetí číslo <u>dané</u> triády.
- Toto číslo umísti jako druhé číslo <u>první</u> triády.
- Třetí číslo <u>první</u> triády dostaneš sečtením prvních dvou čísel.

Konstrukce druhé triády z dané triády lze analogicky popsat procedurou o pěti krocích. V zápisu byla používána šipka, např. (1,3,4)→(1,4,5) pro první triádu; (1,3,4)→(3,4,7) pro druhou triádu.

Na proces vzniku struktury se můžeme dívat přes APOS teorii – akce-proces-objekt-schéma (Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V., Vidakovic, D., 1999). V tomto případě provedením akcí (tj. konstrukce první a druhé triády z dané triády a konstrukce první a druhé triády z první „nové“ triády atd.) vzniká schéma jako část struktury.

Po zavedení konstrukcí byly žákům zadány následující úlohy:

Ú11. Určete první a druhou triádu z triády (1,5,6).
Ú12. Doplňte chybějící čísla tak, abyste vytvořili triádu a z ní první nebo druhou triádu. (1,_,_)→(1,_,_); (_,6,_) → (_,10,_); (_,_,15) → (15,_,_)
Ú13. (_,_,_)→(_,_,_) Vyberte šest z následujících osmi čísel: 2, 3, 5, 6, 8, 16, 18, 20 (mohou být použity dvakrát) a umístěte je do zadaného předpisu.

---

[2] V pilotních experimentech byla žákům vysvětlena zobrazení hned po té, co byl zaveden pojem triády, což se ukázalo jako nevhodné. Proto byla připravena tato série úloh.
[3] Tučně označené úlohy byly použity v experimentech.
[4] Poslední dvě neexistující „triády“ slouží k testování, zda žák opravdu rozumí pojmu triáda.
[5] Používání adjektiv „první“ („druhá“) a „daná“ se zdá být nepřehledné, ale pro žáky bylo zcela jasné.

Třetí etapa byla zaměřena na pohyb ve struktuře. Žákům byly zadány úlohy, k jejichž řešení dostali papír s očíslovanými řádky 1-10.

Ú14. Najděte další triády na 3., 4. a 5. řádku.
Ú15. Určete nejmenší triádu na 10. řádku. Nejmenší[6] triáda je definována jako triáda s nejmenším součtem.
Ú16. Určete největší triádu na 10. řádku. Největší[6] triáda je definována jako triáda s největším součtem.

Přestože první dvě etapy se více podobaly běžné práci ve třídě než experimentu výzkumníka, tak často poskytly velmi cenné informace o žákovských chybách. Ve třetí etapě žáci již potřebovali strategie, které nebyly součástí předcházející práce, a to se projevilo ve velkém počtu rozmanitých žákovských řešení. Úlohy a jejich řešení ve třetí etapě byly inspirovány některými z výzkumných metod popsaných v (Hejný, 2001). Např. metoda „Použití nestandardního zápisu“ byla přítomna při řešení úlohy Ú14 jako potřeba zestručnit zápis. Žáci byli také požádáni o inverzní konstrukce (tj. o hledání triády, z níž lze vytvořit triádu zadanou žákům) ve smyslu metody „Vyvození jedné myšlenky z jiné“.

3. EXPERIMENTY

V článku jsou uvedeny dva z deseti analyzovaných experimentů. V případové studii „Rebeka“ je evidován zajímavý pokus o uchopení a popsání rozsáhlé struktury pomocí „ekonomického“ zápisu. V případové studii „Šimon“ se vyskytují dva jevy, které se nacházejí i v jiných studiích:

1. Struktura pomohla chlapci najít a opravit chybu.
2. Neoprávněný přenos vzoru z jedné situace na zdánlivě podobnou.

Z metodologického hlediska analýza první části Šimonova řešení byla provedena metodou zvanou Atomární analýza (Hejný, 1992; Stehlíková, 1995), která byla rozpracována v bratislavském a pražském semináři.

Případová studie – Rebeka (10 let)

Po první etapě dostala Rebeka úlohy Ú3 a Ú4. Našla všechny triády na 1., 2., 3. a 4. řádku bez problémů (viz obr. 1). Potom zapsala těchto osm dvojic na 5. řádku: (10,17), (22,23), (25,32), (27,33), (26,37), (38,41), (29,40), (39,45). Následně byla její práce přerušena experimentátorovou otázkou:
Exp. 44: Tvoříš nové triády?
Rebeka 19: Ano.
Exp. 45: Kolik čísel máš v triádě?
Rebeka 20: (Pauza 2 sekundy.) Má pouze dvě čísla. „Triáda“ (10,17) není opravdová triáda.

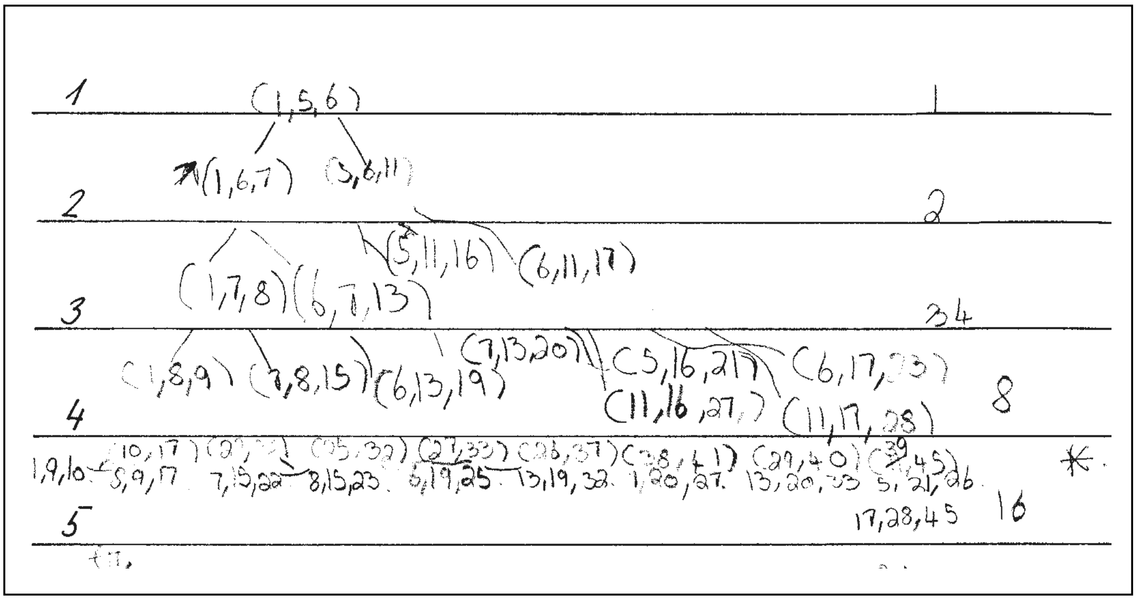
Analýza

Dva[7] zajímavé jevy Rebečina řešení souvisí s její grafickou organizací triád:

1. Triády na 1., 2. a 3. řádku jsou umístěny na levé straně (viz obr. 1).

Tento nesoulad Rebečina umístění triády na 1. řádku s možností využít místo a umístit triádu ve středu řádku nezpůsobil Rebece žádný problém.

[6] V budoucích experimentech tato věta bude vynechána se záměrem sledovat, jak pojmy nejmenší/největší triáda budou používány žáky.
[7] Od tohoto místa počínaje text v kurzívě znamená analýzu.



2. Velký počet triád na 5. řádku donutil Rebeku vymyslet jejich ekonomičtější zápis.

Není obtížné porozumět Rebečině myšlence „nového“ zápisu. Dvojice triád (první a druhá triáda) byla zapsána jako dvojice čísel, např. z triády (1,8,9) jsou tvořeny triády (1,9,10) a (8,9,17) a ty jsou reprezentovány dvojicí (10,17). Podobně triády (7,15,22) a (8,15,23) jsou reprezentovány dvojicí (22,23). Z hustoty triád na 4. řádku Rebeka viděla, že situace bude graficky velmi komplikovaná. Pokusila se řešit problém dvěma způsoby:
1. Rozhodla se psát malá čísla.
2. Zavedla vlastní zkrácený zápis kódováním dvojice triád do uspořádané dvojice čísel.
Obě myšlenky - malá čísla a uspořádané dvojice - jsou používány systematicky: velikost všech čísel na řádku je stejná, všech osm reprezentantů je určeno bezchybně. V tento moment Rebeka neshledala, že tento způsob zápisu triád je nevhodný. Ale experimentátor očekával, že konfliktní situace nastane při řešení dalších úloh (Ú15 a Ú16). Užití zkráceného zápisu způsobilo okamžité komunikační nedorozumění experimentátorovi, které mohlo být odstraněno užitím závorek jiného typu pro dvojice než pro triády.

Poté byla Rebece zadána úloha Ú15. Ukázala nejmenší triády na 1., 2., 3. a 4. řádku bez problémů, až se zastavila na 5. řádku. Trvalo jí dvě minuty, než objevila způsob, jak pokračovat v posloupnosti nejmenších triád. Rozložila dvojice na příslušné triády, které těmto dvojicím odpovídaly. Poté Rebeka určila nejmenší triádu na 5. řádku a pokračovala na 6. řádku užitím svého zápisu, napsala (11,19). Tentokrát si okamžitě uvědomila, že její kódování triád jí nepomohlo v pokračování posloupnosti nejmenších triád. Škrtla dvojici a zapsala triádu (1,10,11). Ještě jednou na 7. řádku použila svůj zápis (zapsala číslo 12), který ani nedokončila a škrtla. Potom již automaticky dokončila posloupnost nejmenších triád (1,11,12); (1,12,13); (1,13,14); (1,14,15).

Analýza

Zdá se, že si Rebeka neuvědomovala, že její myšlenka kódování triád je slabá a nemůže být použita k vyřešení úloh Ú14 a Ú15. Avšak věděla, co dělá, a uvědomila si, že její kódování je příliš „zhuštěné“ pro řešení úlohy Ú13, a vrátila se k původnímu zápisu triád. Rebečin objev zápisu byl velmi cenný pro její vnitřní hodnocení, což je vidět z toho, že zápis byl odmítnut a potom se ještě dvakrát objevil.

Rebečin proces řešení ukazuje její intelektuální kulturu a autonomii, její schopnost vytvářet a testovat hypotézy.

Případová studie – Šimon (10 let)

V první etapě byla komunikace se Šimonem stejná jako s ostatními žáky. Dále jeho práce při řešení úlohy Ú13 byla samostatná (viz obr. 2).

Analýza

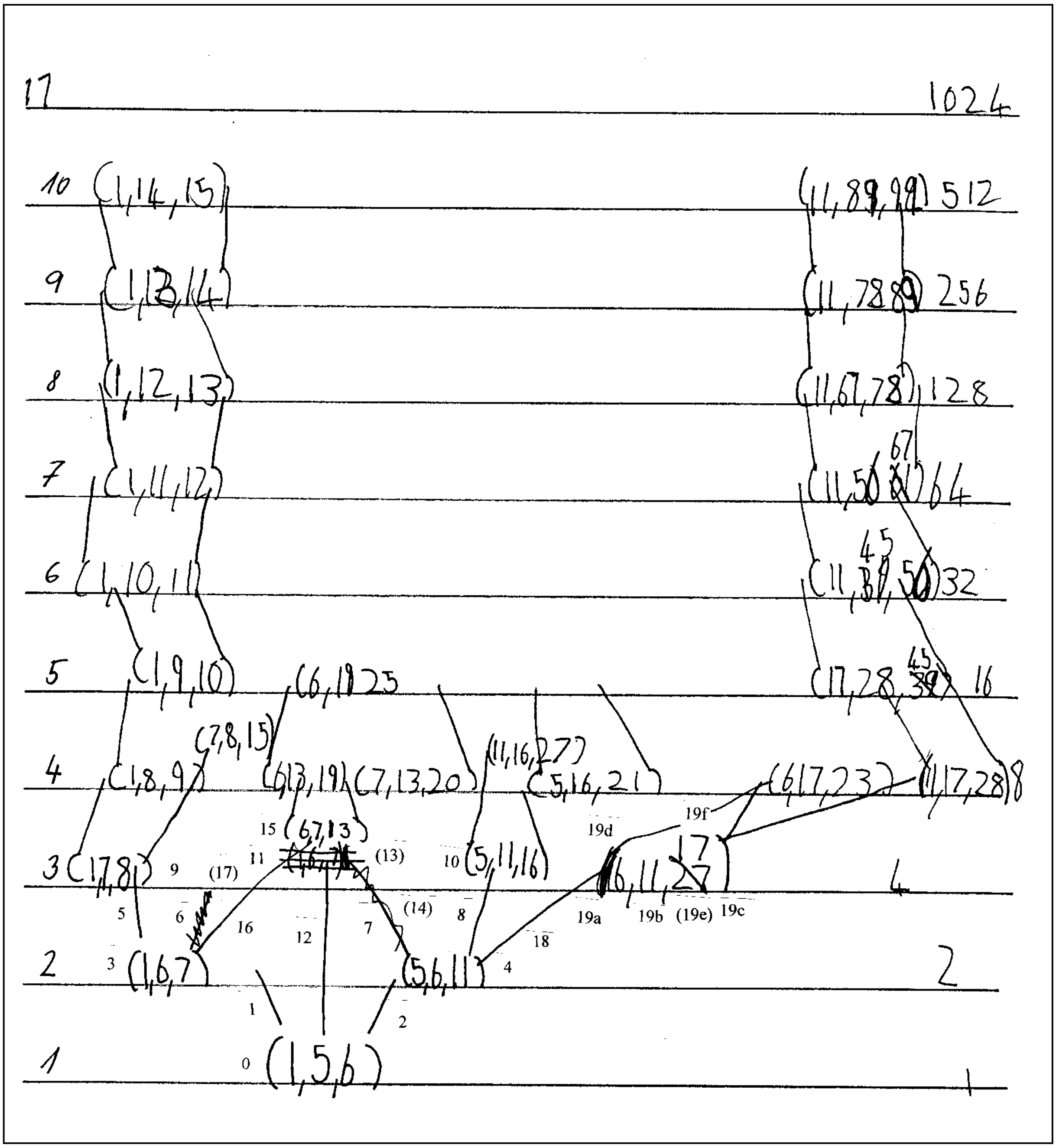
Analýza první části Šimonova řešení úloh Ú11 a Ú14 je zaměřena na pořadí, v kterém kladl jednotlivé symboly na papír. Jedná se o čtyři typy symbolů, jež jsou očíslovány (viz obr. 2): 1. triády nebo jejich části (0, 3, 4, 9, 10, 11, 15, 19a, 19b, 19c, 19f); 2. čárky (1, 2, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 18); 3. přeškrtnutí ((13), (14), (17), (19e)); 4. přepisování (19d).

Posloupnost symbolů na obr. 2 ukazuje, že se Šimon držel následující procedury: jakmile dokončil psaní triád na příslušnou řádku, vyznačil dvě čárky pro následovníky. Šimon eviduje, že struktura bifurkuje. Jedná se o strukturačně-tvorný prvek.

Šimon zapsal posloupnost nejmenších triád až po 10. Řádku. Řešil úlohu Ú15 bez jakýchkoliv problémů, pouze přepisování na 9. řádku bylo zapříčiněno nedostatkem energie na koncentraci. I po dořešení této úlohy bylo u Šimona přítomno pravidlo: první číslo je jedna, třetí číslo se rovná druhému plus jedna, druhá i třetí čísla se postupně zvětšují o jedničku. Když Šimon hledal posloupnost největších triád (úloha Ú16), výše zmíněné pravidlo hrálo klíčovou roli a zapříčinilo konceptuální neporozumění této druhé posloupnosti. V tomto procesu dochází k přenosu „levé“ struktury na „pravou“ strukturu, což nevyhovuje pravidlům tvorby pravých následníků.

Ilustrace ukazuje, že silné strukturální myšlení může žákovi pomoci (což se stalo, když Šimon objevil chybnou triádu 11 a nahradil ji triádou 15), ale také může být zavádějící, což je možné vidět na příkladu pravé posloupnosti. V kontextu vyučovacího, ne však výzkumného procesu je možné říci, že bychom mohli Šimona upozornit, že již triáda (11,28,39) je chybně tvořena. Pak bychom pravděpodobně tento kognitivní konflikt nechali působit. Šimon by našel chybu a její příčinu, a poté by triádu opravil. Ve výzkumu byl tento proces pouze otevřen.

obr. 2



4. ZÁVĚR

Množina triád vybavena levým a pravým zobrazením slouží jako dobrý nástroj pro výzkum diagnostikování žákovské schopnosti budovat strukturu a patří do vzdělávací oblasti rekreační matematiky. Struktura triád jako výzkumný nástroj nám umožňuje zkoumat celý proces vzniku aritmetické struktury, protože její grafický model eviduje mnoho myšlenkových strukturačních procesů žáků. Výzkum ilustroval následující čtyři skutečnosti:

1. Tvorba globální struktury nutně předpokládá předcházející vhled do lokální struktury (obsahující dva až pět prvků – triád propojených zobrazeními).

2. Schopnost vytvoření konceptu struktury triád je ryze individuální.

Žáci, kteří jsou na stejné úrovni v porozumění struktuře přirozených čísel, získávají vhled do struktury triád v různé míře.

3. Porozumění struktuře nezávisí na tom, zda strom reprezentující strukturu je orientován nahoru nebo dolů (viz obr. 1, obr. 2).

4. Při řešení úloh byly evidovány čtyři typy žákovských neporozumění:
A. Zápis triád může být redukován, např. triády kódované jako diády nebo monády.
B. Triády na vyšší řádce než první mohou být zapsány automaticky bez přemýšlení o zobrazení.
C. Generovaný vzor z „levé“ větve může být použit na „pravou“ větev.
D. Číslo určující řádku může být použito jako operátor pro vygenerování příslušné triády na řádce (např. triáda na 10. řádce byla vytvořena zdvojnásobením čísel v triádě na 5. řádce).
Krátká doba strávená v prvních dvou etapách zaměřujících se na pojem triády a levého a pravého zobrazení byla chybou výzkumu. Budoucí experimenty poskytnou mnohem více času na obě tyto etapy, které budou zahrnuty do výzkumu.

Literatura:

[1] Czarnocha, B. – Dubinsky, E. – Prabhu, V. – Vidakovic, D. (1999): One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research. *Proceeding of the 23rd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, July 23-30, Haifa-Israel ed. O. Zaslavsky, pp 159-168*
[2] Hejný, M. (1992): Analysis of Students Solutions of the Equations. *In: Acta Didactica Universitatis Comenianae, Issue 1, pp 65-82*
[3] Hejný, M. (2001): Štrukturovanie matematických vedomostí. *Zde ve sborníku*
[4] Repáš, V. – Černek, P. – Pytlová, Z. – Vojtela, I. (1997): Matematika pre 5. ročník základných škol. Prirodzené čísla. *Orbis Pictus Istropolitana Bratislava*
[5] Stehlíková (1995): How Children Solved a Mathematical Word Problem: an Analysis. *In: Acta Didactica Universitatis Comenianae, Issue 4, pp 33-54*
[6] Stehlíková (2001): Zúžená aritmetika – most mezi elementární a abstraktní aritmetikou. *Zde ve sborníku*

KDO JE TO DEBRUJÁR?

Libor Lepík, Gymnázium a SOŠ, Třída T. G. Masaryka, Frýdek-Místek

Asociace malých debrujárů České republiky vznikla na základě zkušeností z Kanady a přes Francii se dostala až k nám, kde působí od 22.9.1992. Už jste se s "debrujáry" možná setkali v televizi, časopisech či jinde. (DEBRUJÁR = člen Asociace malých debrujárů, slovo je francouzského původu, vzniklo ze slov DÉBROUILLARD - šikovný, obratný a SE DÉBROUILLER - objevovat, pomoci si v těžkostech, umět si poradit.) Nebo jste ještě o malých debrujárech neslyšeli? Nevadí. Hned vám je představíme.

Jsou to chlapci a děvčata ve věku do 15 let a jejich starší kamarádi, sourozenci, rodiče, učitelé, kteří mají zájem o vědu, techniku, kteří stále něco vymýšlejí, objevují a experimentují. Tyto děti (žáci profesora Scientifixe) a jejich vedoucí - animátoři (pomocníci prof. Scientifixe) jsou sdruženi v asociaci. Tato asociace je také členem Mezinárodní federace malých debrujárů FIPD, jejímž sídlem je Quebec v Kanadě.

FILOZOFIE MALÝCH DEBRUJÁRŮ

Koncepce "malých debrujárů" je zábavným způsobem (pro mladé, ale i starší) odmystifikovat vědu. Profesor Scientifix vyzývá mladé, aby se spojili se světem vědy. Pokusy jsou velmi jednoduché a rozmanité. Zajímají mladé a upevňují jejich smysl pro spolupráci, pro zodpovědnost a kritiku, rozvíjejí jejich intelektuální schopnosti.

Činnost malých debrujárů je zvlášť vhodná pro děti ve věku 7-15 let. Je to vhodná příležitost, aby experimentovaly samy, aby objevovaly odpovědi na otázky, které se jim denně kladou v různých životních situacích. Aktivity jsou jedním z možných způsobů, jak odhalit to, co se zdá být nepochopitelné a tajemné. Síla koncepce malých debrujárů je v tom, že dovoluje odhalovat různé aspekty vědeckého světa, přičemž klade důraz i na nové poznatky a zájmy mladých. V celku je koncepce aktivním procesem učení se s využitím k rozvoji smyslu pro zodpovědnost, rozvoji experimentálních a intelektuálních schopností, přičemž respektuje zájmy dětí.

Zde je pět hlavních principů filozofie, které rozvíjí profesor Scientifix. Činnost a pokusy, kterých by se měly zúčastňovat děti, musí:

1. dovolovat samostatný rozvoj dítěte
2. dávat dítěti zábavné činnosti, které stimulují a probouzejí jeho zájem o vědu
3. využívat otevřenost dítěte k vědeckým jevům, se kterými se setkává v každodenním životě
4. rozvíjet zvídavost a smysl pro zodpovědnost dítěte
5. být návazná na úroveň rodinnou, školskou a sociální

TŘÍDY MALÝCH DEBRUJÁRŮ

Studium věd je samozřejmě zařazeno do školského programu - osnov v základních školách. Někteří učitelé a učitelky dokonce vyhledávají možnost, aby tuto aktivitu malých debrujárů mohli využívat v rámci vyučování. Tuto činnost rozšiřují o další pokusy dětí, které již nějaké pokusy dovedou připravit a vysvětlit, využívají své pomocníky při demonstraci jednotlivých pokusů. Učitelé na škole mají možnost vytvořit si z dětí, které mají o tuto činnost zájem klub (kroužek) malých debrujárů přímo na škole. Tato činnost se osvědčuje na venkovských školách, kde je učitel fyziky nebo chemie pro tuto práci navíc zapálený a kde děti nemají tolik možností k využívání volného času.

Kováčová při Zvoleně 30.6.-7.7.2001

Pracovní dílny (dopoledne a odpoledne pro děti):

1) píšťalka
2) horkovzdušný balón
3) bubliny
4) kouzelný pavouček
5) raketa (ocet a soda bikarbona)
6) hlavolamy
7) test zručnosti
8) optické klamy

Hořící svíčka
Potřeby: sklenice, voda, svíčka, plastelína, zápalky
Úkol: Do sklenice s vodou umísti svíčku tak, aby plovala a přitom hořela. Jak dlouho bude svíčka hořet?

Chyť si tisícikorunu
Necháme bankovku padat mezi prsty druhé osoby. Ta může stiskem prstů chytit bankovku, nesmí však pohnout předloktím ani ramenem. Doba, kterou potřebuje tisícikoruna k tomu, aby urazila dráhu rovnou délce tisícikoruny, je menší než reakční doba osoby. Bankovku se nepodařilo chytit ani Majce, ani Štěvovi.

Jaká je hmotnost slovenské koruny a desetikoruny?
Kolika korunami převážíme desetikorunu?

Kouzelné desky
Po vložení bankovky do desek se bankovka střídavě objevuje pod vodorovnými pásky, pod křížkem, pod vodorovnými pásky, …

Bubliny
Aby se Vám podařily pěkně velké bubliny, musí být voda, jar (čistící prostředek na nádobí) a glycerín smíchány ve správném poměru.. Připravte si nádobu o objemu devět objemových jednotek. Do této nádoby nalijte šest objemových jednotek vody, polovinu objemové jednotky jaru a jeden a půl objemové jednotky glycerínu. Vše jemně smíchejte.

Mrak v láhvi, stále plná nádoba, moravsko-slezská meditace a přenos vody na dálku, vlajky zemí světa, hlavolamy a další pokusy pro pobavení.

Na závěr všemi účastníky podvečera pokusů procházel elektrický proud.

ZÚŽENÁ ARITMETIKA – MOST MEZI ELEMENTÁRNÍ A ABSTRAKTNÍ MATEMATIKOU[1]

Naďa Stehlíková, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

1. ÚVOD

Přechod ke strukturálnímu pohledu v matematice je ve škole vždy provázen obtížemi. Studenti a žáci musí odhlédnout od sémantického obsahu a naučit se manipulovat s objekty, které jim byly zavedeny převážně pomocí definice, aniž by jejich představa byla podepřena modelem. V tomto příspěvku bude představena jedna nestandardní aritmetická struktura, která podle mého názoru může představovat most mezi elementární a abstraktní matematikou.

Takzvaná zúžená aritmetika, jejímž autorem je Milan Hejný, je zbavena sémantického obsahu, takže student je nucen uvažovat spíše strukturálně a ve většině případů se nemůže opřít o svou intuitivní zkušenost. Čísla v rámci zúžené aritmetiky nemohou být chápana jako mnohosti, ale jako objekty, se kterými se manipuluje podle určitých pravidel.

2. POPIS ZÚŽENÉ ARITMETIKY

Základ zúžené aritmetiky tvoří zobrazení r: $\underline{N} \to \underline{N}$, které budeme nazývat *redukce* a které můžeme zavést např. těmito dvěma způsoby (první způsob je „matematičtější", druhý používám při práci se studenty):

(1) Redukce r je zobrazení r: $\underline{N} \to \underline{N}$, definované předpisem r: $n \to n - 99 \cdot [n/100]$, kde $[y]$ je celá část $y \in \underline{R}$.

(2) Redukci r zavedeme jako instrukci:

(i) když $n < 100$, pak $r(n) = n$,

(ii) když $n \geq 100$, rozdělíme číslo na dvě části, na poslední dvojčíslí a číslo stojící před tímto dvojčíslím, a obě části sečteme. Celý postup opakujeme tak dlouho, dokud nedostaneme číslo od 1 do 99. Například $r(7305) = 73 + 05 = 78$ nebo $r(135728) = r(1357 + 28) = r(1385) = 13 + 85 = 98$, apod.

Označme množinu $\underline{A}_2 = \{1,2,3,...,99\}$. Pomocí redukce r zavedeme binární operace *z*-sčítání[2] $\oplus$ a *z*-násobení $\otimes$ v $\underline{A}_2$ takto: $x, y \in \underline{A}_2$, $x \oplus y = r(x + y)$ a $x \otimes y = r(x \cdot y)$.

Například $72 \oplus 95 = r(167) = 68$, $72 \otimes 95 = r(6840) = r(108) = 9$.

<u>Poznámka:</u> Strukturu $A_2 = (\underline{A}_2, \oplus, \otimes)$ budeme nadále označovat symbolem A_2. Čísla z množiny $\underline{A}_2$ budeme nazývat *z*-čísla.

Zúžená aritmetika představuje prostředí, v němž je možné vytvořit nepřeberné množství úloh na různé úrovni obtížnosti. Některé z nich budou uvedeny v následujícím odstavci. Vstup do jejího zkoumání tvoří aditivní a multiplikativní lineární rovnice.

Prostředí zúžené aritmetiky bylo použito v rámci výzkumu procesu strukturace matematických poznatků studentem. V průběhu tří let jsem provedla řadu experimentů se studenty, a to jak studenty vysoké školy (budoucími učiteli matematiky a elementaristy), tak i se studenty gymnázia a posledního ročníku základní školy. Některé výsledky, ke kterým jsem dospěla, byly již publikovány (viz seznam literatury). Zde se soustředím na aplikaci zúžené aritmetiky tak, jak by ji bylo možno použít například v rámci matematického kroužku na střední škole či pro samostatné zkoumání studenty.

---

[1] Příspěvek byl vytvořen v rámci výzkumného záměru Kultivace matematického myšlení a vzdělanosti v Evropě číslo J13/98:114100004.

[2] Předpona z značí, že se jedná o pojem / operaci v rámci *zúžené* aritmetiky.

3. NÁVRH ÚLOH MATEMATICKÉHO PROJEKTU

Při pokusu prezentovat úlohy, které jsem řešila sama nebo se studenty v rámci zkoumání zúžené aritmetiky, se ukázalo, že se nejedná o snadný úkol. Jde vlastně o to představit lineárním způsobem proces, který v žádném případě lineární není. Práce v rámci A_2 sice začíná pro každého řešitele stejně, tedy seznamováním se s redukcí a řešením lineárních rovnic (viz řádky I až III v tabulce dole), ale celý proces se začne velmi rychle větvit. Záleží např. na tom, jak rychle a v jakém pořadí řešitel objeví určité pojmy. Za klíčové možno považovat pojmy nulového a jednotkového prvku a opačná a převrácená čísla (a s tím související operace odčítání a dělení, které si musí každý řešitel zavést sám). Důležité je také to, zda řešitel objeví souvislost některých témat. Například klasifikace lineárních rovnic úzce souvisí s kritérii dělitelnosti. Za neméně důležité pro různorodost postupů jednotlivých řešitelů považuji fakt, že řešitel si může vytvářet úlohy do velké míry sám na základě svých zkušeností s běžnou aritmetikou. (Za „běžnou aritmetiku“ považujeme aritmetiku v oboru celých či reálných čísel.)

Na základě vlastní zkušenosti se domnívám, že nezbytným předpokladem úspěšného použití následujícího materiálu učitelem je to, aby si sám nejdříve objevitelským způsobem prostředí zúžené aritmetiky prozkoumal a případně si úlohy dle svého upravil.

Jednotlivé úlohy budou prezentovány pomocí tabulky a u většiny z nich budou uvedeny (bez důkazu) i některé výsledky. Pokud není řečeno jinak, všechny úlohy se řeší v množině $\underline{A}_2$. Výsledky ve třetím sloupci nemusí být nutně získány pomocí úloh v příslušném řádku, studenti k nim mohou dospět ve zcela jiném kontextu. Například jeden ze studentů objevil nulový prvek ne při řešení lineárních rovnic, ale již při hledání grafické reprezentace *z*-čísel. Výsledky jsem zařadila do řádku, kde k nim může řešitel nejpravděpodobněji dojít. Navíc obsah pole „úloha“ odpovídá poli „některé výsledky“ jako celku, ne řádek řádku.

Některé úlohy, které jsem z důvodu nedostatku prostoru zformulovala úsporným matematickým jazykem, byly studentům předloženy v podrobnější podobě.

Téma	**Úloha**	**Některé výsledky**
I. Redukce	1. Najděte $r(100)$, $r(2574)$, ... 2. Najděte $\{x \in \underline{N};\ r(x) = 6$ (resp. 18, 34, 99, ...)$\}$ 3. Najděte grafickou reprezentaci *z*-čísel.	- každé *z*-číslo dostaneme jako redukci nekonečně mnoha přirozených čísel - pokud $r(x) = a$, pak $r(x + k \cdot 99) = a$, $k \in \underline{N}$[3], $a \in \underline{A}_2$
II. Aditivní lineární rovnice	1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \underline{A}_2$: $x \oplus 17 = 99$, $x \oplus 61 = 4$, $x \oplus 6 = 92$, $25 \oplus x = 36$, $99 \oplus x = 13$, $66 \oplus x = 66$, ... 2. Zaveďte *z*-odčítání ◊[4]. 3. Řešte rovnici $x \oplus a = b$ s neznámou $x \in \underline{A}_2$ a diskutujte počet řešení vzhledem k parametrům $a, b \in \underline{A}_2$.	- nulový prvek je číslo 99, opačný prvek k prvku $a \in \underline{A}_2$ je $\underline{\underline{a}} = 99 - a$ - $\forall\ a, b \in \underline{A}_2$ platí $a \lozenge b = a \oplus \underline{\underline{b}}$ - aditivní lineární rovnice typu $x \oplus a = b$ mají vždy právě jedno řešení $x = b \oplus \underline{\underline{a}}$

[3] Tento výsledek se zdá být triviální, pokud použijeme první způsob zavedení redukce. Pokud je však redukce zavedena jako instrukce, je poznání tohoto obecného tvaru klíčovým prvkem např. pro schopnost dokázat asociativitu *z*-sčítání.

[4] Pro *z*-odčítání by správně měl být použit symbol mínus v kroužku. Tento symbol však nepatří do standardních symbolů programu Word, proto ho nahrazuji symbolem ◊. Podobně pro *z*-dělení místo symbolu lomeno v kroužku používám symbol ∇.

III. Multiplikativní lineární rovnice	1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \underline{A}_2$. $2 \otimes x = 40$, $2 \otimes x = 1$, $2 \otimes x = 99$, $3 \otimes x = 30$, $3 \otimes x = 1$, $3 \otimes x = 99$, $3 \otimes x = 45$, $14 \otimes x = 91$, $13 \otimes x = 45$, $6 \otimes x = 3$, $93 \otimes x = 3$, $50 \otimes x = 5$, $6 \otimes x = 45$, $3 \otimes x \oplus 2 = 83$[5], $5 \otimes x \oplus 10 = 5$. 2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \underline{A}_2$: $a \otimes x = 1$, $a \otimes x = 33$, $a \otimes x = 99$, $a \otimes x = c$, $x \lozenge b = c$, $a \otimes x \oplus b = c$, $a \otimes x \lozenge b = c$. Diskutujte počet řešení vzhledem k parametrům $a, b, c \in \underline{A}_2$. 3. Zaveďte *z*-dělení ∇. 4. Zjistěte, zda je možno v multiplikativních rovnicích typu $a \otimes x = b$ krátit.	- jednotkový prvek je 1 - převrácená čísla existují jen k *z*-číslům, která nejsou děliteli nuly - součet převrácených čísel ke dvěma navzájem opačným číslům je 99 - pokud je a v rovnici $a \otimes x = b$ dělitel nuly, počet řešení je 0, nebo 3, nebo 9, nebo 11; pokud a není dělitel nuly, existuje vždy jedno řešení - součin počtu řešení rovnice a rozdílu mezi jejími kořeny je 99 - číslo $a \nabla b$ je jednoznačně definováno pouze pro b, která nejsou děliteli nuly - krátit je možno jen čísly, která nejsou děliteli nuly
IV. Kritéria dělitelnosti	1. Která *z*-čísla jsou dělitelná číslem 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 27, 33, 42, 45, 55, 99, ...? 2. Nechť $b = a \otimes d$, $a, b, d \in \underline{A}_2$. Jak závisí dělitelnost číslem b na dělitelnosti čísly a a d?	- všechna *z*-čísla jsou dělitelná *z*-čísly, která nejsou děliteli nuly - kritéria dělitelnosti čísly 3, 9 a 11 jsou stejná jako v $\underline{N}$ - pokud a není dělitel nuly a d je dělitel nuly, pak je každé *z*-číslo dělitelné číslem b právě tehdy, když je dělitelné číslem d
V. Axiomy	Zjistěte, zda pro $\oplus$ and $\otimes$ platí asociativní, komutativní a distributivní zákon.	ano
VI. Sudá a lichá čísla, prvočísla, složená čísla	1. Definujte sudá a lichá *z*-čísla. 2. Najděte nějaká tvrzení týkající se sudých a lichých čísel v $\underline{A}_2$ a dokažte je pro *z*-čísla. 3. Definujte *z*-prvočísla a rozklad *z*-čísel na součin *z*-prvočísel.	- nelze definovat sudá a lichá *z*-čísla, každé *z*-číslo lze napsat jako $2 \otimes a$ - v $\underline{A}_2$ nejsou prvočísla (tedy čísla dělitelná pouze číslem 1 a sama sebou) - za *z*-prvočísla bychom mohli považovat „generátory“ (viz téma XI)
VII. Kvadratické rovnice[6]	Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in \underline{A}_2$, symbol x^2 znamená $x \otimes x$. (a) $x^2 \oplus 91 \otimes x \oplus 15 = 99$, (b) $x^2 \oplus 3 \otimes x \oplus 81 = 99$, (c) $x^2 \oplus 69 \otimes x \oplus 81 = 99$, (d) $x^2 \oplus 2 \otimes x \oplus 15 = 99$, (e) $x^2 \oplus 8 \otimes x \oplus 16 = 99$, (f) $3 \otimes x^2 \oplus 48 \otimes x \oplus 27 = 99$	(a) {3,5,14,93}, (b) + (c) {3,27,36,60,69, 93} (d) {}, (e) {29,62,95}, (f) {3,14,36, 47,69,80} - počet řešení kvadratické rovnice může být 0, 2, 3, 4, 6 a závisí na diskriminantu

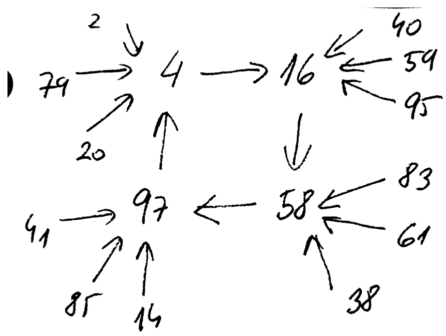
[5] Studenti mají sami rozhodnout o přednosti operací. Všichni, s kterými jsem dosud pracovala, si vybrali analogicky k běžné aritmetice přednost násobení a dělení oproti sčítání a odčítání.

[6] Snaha o řešení kvadratických rovnic vede k řešení tématu VIII. Neuvádím žádné obecné výsledky, protože teorie kvadratických rovnic je právě v centru mé pozornosti.

VIII. Druhé mocniny a odmocniny	1. Najděte všechny *z*-čtverce, tedy všechna *z*-čísla typu x^2, kde x je *z*-číslo. 2. Nakreslete diagram všech *z*-čtverců a příslušných druhých odmocnin. Najděte nějaké zákonitosti v tomto diagramu. 3. Nechť je dáno číslo $a \in \underline{A}_2$, najděte množinu všech druhých odmocnin $S(a^2) = \{x, x^2 = a^2\}$.	- pro každé *z*-číslo a platí $a^2 = \underline{\underline{a}}^2$ a $a^2 = (10 \otimes a)^2$ - pozoruhodnosti: $45^2 = 45$, $99^2 = 99$, $55^2 = 55$, $22^2 = 88$ a $88^2 = 22$ - část mého diagramu je na obrázku 1 (vysvětlení: $2^2 = 4$, $79^2 = 4$, $20^2 = 4$, $97^2 = 4$ atd.) - rovnice $x = \sqrt{a}$ má 0, 2, 3, 4, či 6 řešení - nechť a není dělitel nuly[7], pak $S(a^2) = \{a^2, \underline{\underline{a}}^2, 10 \otimes a^2, \underline{\underline{10 \otimes a}}^2\}$
IX. Posloupnosti, obecné mocniny	1. Zjistěte, jak vypadá posloupnost *z*-čísel $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ Najděte 101. prvek této posloupnosti. 2. Platí, že $2^{50} \otimes 2^{50} = 2^1$? 3. Platí pro všechna *z*-čísla a vztah $a^{99} = 1$? 4. Zkoumejte posloupnost *z*-čísel $n^0, n^1, n^2, n^3, \ldots$ pro (i) $n = 1$, (ii) $n = 10$, (iii) $n = 4$, (iv) $n = 25$, (v) $n = 3$.	- posloupnost *z*-čísel $n^0, n^1, n^2, n^3, \ldots$ je periodická - délka periody může být 1, 2, 3, 5, 6, či 10; pokud n není dělitel nuly, může to být také perioda délky 15, nebo 30; pokud je n dělitel nuly, může mít příslušná posloupnost také předperiodu - převrácená čísla generují stejnou množinu mocnin, např. $\{2^k, k \in \underline{N}\} = \{50^k, k \in \underline{N}\}$
X. Důležité podmnožiny[8]	1. Pokud sečteme (vynásobíme) dva dělitele nuly, dostaneme zase dělitele nuly? 2. Když sečteme (vynásobíme) dva *z*-čtverce, dostaneme vždy *z*-čtverec? 3. Najděte důležité podmnožiny množiny $\underline{A}_2$, tedy podmnožiny uzavřené vzhledem k nějaké operaci. 4. Které z nich tvoří grupu?	- grupa řádu 10: $(\underline{G}_1, \otimes)$, kde $\underline{G}_1 = \{18^k, k \in \underline{N}\} = \{63^k, k \in \underline{N}\} =$ $= \{72^k, k \in \underline{N}\} = \{90^k, k \in \underline{N}\}$ (jednotkový prvek 45, vlastní podgrupy řádu 1, 2, 5) - grupa řádu 6: $(\underline{G}_2, \otimes)$, kde $\underline{G}_2 = \{11^k, k \in \underline{N}\} = \{77^k, k \in \underline{N}\}$ (jednotkový prvek 55, vlastní podgrupy řádu 1, 2, 3) - označme podmnožinu čísel z $\underline{A}_2$, které nejsou děliteli nuly, jako $\underline{M}$, pak $(\underline{M}, \otimes)$ je grupa řádu 60 (jednotkový prvek 1, vlastní podgrupy řádu 1, 2, 3, 5, 6, 12, 15, 30)
XI. Generátory	Najděte nejmenší počet generátorů, které vygenerují operací *z*-násobení (a) *z*-čísla, která nejsou děliteli nuly (b) všechna *z*-čísla.	(a) je možné najít dvojice generátorů, např. každé číslo, které není dělitel nuly, lze napsat jako součin $10^l \otimes 2^k$, kde $l \in \{0,1\}$, $k \in \{0,1, ...,29\}$, (b) ještě neznám odpověď na tuto otázku.

[7] Věta pro dělitele nuly je mnohem komplikovanější.

[8] Zde se dostáváme do oblasti grupové algebry. Není možné prezentovat všechny poznatky, ke kterým jsem dospěla, a což by bylo zřejmě zajímavější, jakým způsobem. Uvedu pouze nástin multiplikativních grup.



obrázek 1

4. ZKUŠENOSTI SE ZÚŽENOU ARITMETIKOU

V tomto oddílu v bodech uvedu zkušenosti, které jsem získala prostřednictvím experimentů se studenty a pomocí introspekce. Sama jsem totiž objevovala (a nadále objevuji) zúženou aritmetiku uvedeným způsobem. Pro úsporu místa se soustředím jen na ty poznatky, které považuji za přínosné pro použití zúžené aritmetiky v praxi se studenty.

- Zúžená aritmetika je zavedena jako analogie ke struktuře celých čísel. Řešitel při jejím zkoumání provádí neustálé srovnávání obou struktur na úrovni objektů, operací, strategií, úloh apod. Téměř ve všech případech musí zjistit, zda např. strategie, kterou pro příslušnou úlohu používá v běžné aritmetice, platí i v A_2. Pokud ne, musí ji buď pozměnit, nebo si vytvořit strategii novou. Ke klasickým jevům patří snaha řešit např. rovnici $x \oplus 60 = 4$ převedením čísla 60 na pravou stranu rovnice s opačným znaménkem, což nevede ke správnému výsledku. Podobně selhává použití vzorce pro řešení kvadratické rovnice, pokud je koeficient u kvadratického členu roven děliteli nuly. Tedy práce v zúžené aritmetice vede zpětně k oživení poznatků z běžné aritmetiky, které byly již zautomatizovány nebo byly uchopeny jen formálně.
- Nové pojmy jsou definovány tehdy, když studenti cítí potřebu jejich zavedení (např. při řešení aditivních rovnic potřebují zavést odčítání a k tomu zase potřebují pojem opačného prvku). Dlouhodobá práce uvnitř jednoho prostředí vede ke zviditelnění vzájemných souvislostí mezi těmito pojmy, a to v jiném prostředí než v běžné aritmetice.
- Struktura A_2 není hotový produkt (jak je často matematika studentům předkládána), ale představuje otevřené prostředí, které si sami musejí prozkoumat. Učitel dává neustále najevo, že jde o něco nového, že ani on sám nemůže rozhodnout o pravdivosti nějaké hypotézy, kterou si student formuluje. To působí kladně na motivaci studentů (srovnej Yusof, Tall, 1999). Navíc, přestože se v podstatě jedná o kongruenci modulo 99 (což studentům v žádném případě předčasně neprozrazujeme), není tato problematika nikde uceleně zpracována. To nutí řešitele k samostatné práci spíše než k vyhledávání v literatuře.
- Studenti mají tendenci při aplikaci teorie grup spoléhat se na své představy z oblasti čísel (viz také Hazzan, 1999.) Často si tak vytvoří nesprávný univerzální model např. neutrálního prvku vzhledem ke sčítání jako čísla 0 (neutrální prvek je chápán sémanticky jako „nic“, spíše než strukturálně), či záporných čísel jako inverzních prvků vzhledem ke sčítání. Zkušenosti zatím potvrzují, že zúžená aritmetika může tyto nesprávné spoje narušit.
- Konečně neméně důležitým důsledkem práce v zúžené aritmetice je fakt, že studenti často pocítí potřebu studovat abstraktní algebraické struktury, které by jim zpětně mohly přinést nové poznatky o A_2.

5. OSOBNÍ POZNÁMKA MÍSTO ZÁVĚRU

Jako student, budoucí učitel matematiky, jsem úspěšně prošla zkouškami a seznámila se s mnoha hlubokými, náročnými matematickými pojmy. Práce v rámci zúžené aritmetiky byla však mojí první zkušeností se samostatným „děláním“ a objevováním matematiky, byť třeba na nižší úrovni obtížnosti pojmů. Známé pojmy, např. neutrální prvek, inverzní prvky, věta o dělení se zbytkem, uspořádání apod. se objevily ve vzájemné souvislosti. Za nejdůležitější výsledek tohoto mého zkoumání považuji změnu postoje k matematice jako vědě i jako školnímu předmětu. Je povinností nás učitelů dát našim studentům příležitost takovým procesem projít a tuto zkušenost získat. Zúžená aritmetika je jednou z možností, jak k tomu lze dospět.

Literatura:

[1] Hazzan, O. (1999.): Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40, 71 – 90*

[2] Hejný, M. (1996.): Zúžené aritmetiky. *Téma práce SOČ. Nepublikovaný rukopis.*

[3] Novotná, J., Stehlíková, N. (2000.): Netradiční úvod do abstraktní matematiky. *In Ausbergerová, M., Novotná J. (eds): 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Sborník příspěvků. JČMF Plzeň, 147 – 153*

[4] Stehlíková, N. (1998): Algebraic Structure – Restricted Arithmetics. *In Barker, B. (ed.): International Conference on the Teaching of Mathematics. Proceedings. University of the Aegean, Samos, Greece. John Wiley & Sons, Inc. Publishers, 281 – 283 (rozšířená verze publikována na www stránkách: www.pedf.cuni.cz/k_mdm/vedcin/prednasky/samos.htm)*

[5] Stehlíková, N. (2000): Diplomová práce nebo diplomová spolupráce? *In Ausbergerová, M., Novotná J. (eds): 7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Sborník příspěvků. JČMF Plzeň, 191 – 198*

[6] Stehlíková, N. (2000): A Non-Standard Arithmetic Structure as an Environment for Students‘ Problem Solving and an Introduction into Structural Thinking. *In: Mathematics for Living. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference. Amman, Jordan, 307 – 311*

[7] Stehlíková, N., Jirotková, D. (V tisku.): Building a Finite Arithmetic Structure. *A paper in Working Group 1: Creating Experience for Structural Thinking, CERME2: Second Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Mariánské Lázně, 2001*

[8] Yusof, Y. B. M., Tall, D. (1998): *Changing Attitudes to University Mathematics through Problem Solving. Educational Studies in Mathematics, 37 (1), 67 – 82*

METODIKA TVORBY ÚLOH DO PÍSEMNÉ MATURITNÍ ZKOUŠKY Z MATEMATIKY[1]

Jaroslav Zhouf, Pedagogická fakulta, Karlova Univerzita, Praha

1. ÚVOD

V roce 1974 byly v Československu zřízeny první gymnaziální třídy se zaměřením na matematiku a v roce 1978 se v těchto třídách konaly první maturitní zkoušky z matematiky. Podle Vyhlášky Ministerstva školství a tělovýchovy o ukončování studia na středních školách a učilištích se vedle ústní zkoušky koná i zkouška písemná. Písemná maturitní zkouška obsahuje šest úloh.

Zpočátku připravovalo písemné maturitní zkoušky ministerstvo. Od roku 1992 připravují školy s třídami zaměřenými na výuku matematiky písemné maturitní zkoušky samy. Na gymnáziu Zborovská v Praze jsem přípravoval tyto úlohy já.

Na základě zkušeností s předchozími písemnými maturitními i jinými zkouškami jsem si vytvořil vlastní metodiku tvorby jednotlivých úloh i celé písemné maturitní zkoušky. Tato metodika je hlavní náplní tohoto příspěvku.

Při tvorbě úloh do písemných maturitních zkoušek se pohybuji ve třech hladinách, a sice jako *tvůrce*, který vytváří úlohu i její textaci, jako *řešitel*, který se snaží vžít do role různých žáků a v „jejich duchu“ úlohu vyřešit a jako *hodnotitel*, který hodnotí kvalitu i kvantitu jednotlivých úkolů i celé úlohy i její záludnosti pohledem tvůrce i pohledem řešitele.

2. VLIV ATOMÁRNÍ ANALÝZY

Moje metodika byla a je dána z největší části osobním názorem na podobu úloh určených pro jednotlivé typy použití, i když později byla korigována jinou metodikou, ne však metodikou tvorby úloh, nýbrž metodikou analýzy písemných řešení úloh, která je pojmenována jako *atomární analýza* (Hejný, Michalcová 1999). I když se jedná o metodiky používané v odlišných prostředích, stejně však jako v atomární analýze při tvorbě úloh uvažuji, jak asi budou postupovat žáci při řešení, takže se také jedná o jakousi analýzu možných žákovských řešení.

Na počátku svého pedagogického působení jsem vytvářel úlohy, aniž bych se hlouběji zamýšlel nad tím, jak budou žáci při řešení postupovat. Opravami písemných prací jsem postupně získával zkušenosti na tomto poli a začal podrobněji analyzovat možné postupy žáků a přizpůsobovat tomu podobu písemných prací. Po seznámení se s atomární analýzou mě právě její detailní rozbor jednotlivých kroků žákovských řešení vedl k ještě hlubšímu promýšlení každého kroku při tvorbě nových úloh a k opětovným korekcím mé metodiky.

V obou metodách je třeba domýšlet velkou část žákovských úvah na základě našich zkušeností jednak s naším vlastním řešením, jednak s opravováním řešení žáků v minulosti. Tedy z velké části jde o úvahy o žákových úvahách. Moje metoda má ale navíc tu přednost, že rozbor úloh připravovaných do písemné maturitní zkoušky je doložitelný jednak na papíře a jednak je doložitelný i v mé mysli, neboť mohu vyjádřit, co mě skutečně při tvorbě úloh napadalo.

Moje metodika se skládá z několika fází. Některé z nich jsem pojmenoval názvy z atomární analýzy (Stehlíková 2000), právě díky oné příbuznosti obou metod a také díky nedostatku vlastních názvů.

[1] Příspěvek byl vytvořen v rámci výzkumného záměru Kultivace matematického myšlení a vzdělanosti v Evropě J13/98:114100004.

3. KONKRÉTNÍ ÚLOHA

Pro ilustraci mé metodikou tvorby úloh do písemných maturitních zkoušek jsem vybral jednu konkrétní úlohu, kterou řešili studenti gymnázia Zborovská v Praze v roce 1999. Text úlohy zní:

V soustavě souřadnic Oxy uvažujme oblast omezenou osou x a parabolou o rovnici $y = x^2 + 6x$.
a) Určete rovnici kružnice opsané této oblasti.
b) Určete rovnici kružnice vepsané této oblasti.

Předlohou této maturitní úlohy byla úloha uveřejněná v sovětském časopise „Matematika v škole“ (1983/2, s. 30). Úloha byla součástí přijímací zkoušky na filosofickou fakultu Moskevské státní univerzity v roce 1982.

Text původní sovětské úlohy:

Ke grafu funkce $y = x^2 + 6x$ *jsou vedeny dvě tečny. První se dotýká grafu funkce v bodě s první souřadnicí* $x_0 = -2$*, druhá v bodě, v němž má funkce minimum. Určete obsah trojúhelníku vytvořeného osou y a těmito dvěma tečnami.*

4. METIDIKA TVORBY ÚLOH DO PÍSEMNÝCH MATURITNÍCH ZKOUŠEK

Dále ve fázích A – D vystupuji hlavně v úloze hodnotitele a řešitele úlohy.

A. *Fáze přístupu k problému neboli uchopení problému*

Text předlohy ve mně vyvolal dojem vhodné úlohy do písemné maturitní zkoušky, a to z několika důvodů: jde se o standardní školní úlohu bez „triků“ potřebných např. v matematické olympiádě, při řešení je třeba uplatnit znalosti z více oblastí matematiky, úloha je přiměřeně náročná, je možné očekávat numerickou „eleganci“ řešení.

Pojednává-li text úlohy o funkci, o tečnách ke grafu funkce, o obsahu útvaru, je jasné, že jde o úlohu z oblasti diferenciálního, případně integrálního počtu. Jedná-li se o kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola, je další oblastí, do níž lze úlohu zařadit, analytická geometrie kuželoseček. Právě symbióza matematické analýzy a analytické geometrie vytváří předpoklad pro propojení obou oblastí. Na střední škole se toto propojení v podstatě obchází, každá partie se často probírá samostatně bez ukázání souvislostí.

B. *Fáze porozumění úloze*

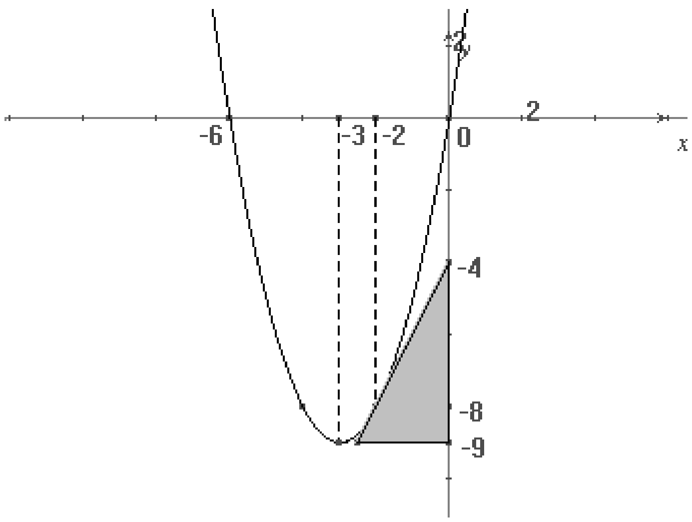
V textu předlohy jsou explicite uvedeny matematické pojmy funkce, kvadratická funkce, bod dotyku, tečna ke grafu funkce, extrém funkce, průsečík přímek, obsah útvaru. Tyto pojmy evokovaly v autorovi řadu dalších pojmů, jako např. soustava souřadnic, vlastnosti funkcí (definiční obor, obor hodnot, monotonie, konvexnost, konkávnost, extrémy lokální a globální, inverzní funkce, ...), zobrazení (translace, osová souměrnost grafu), derivace funkce, neurčitý a určitý integrál, obsah plochy, objem rotačního tělesa, délka křivky, těžiště útvaru, parabola a její prvky (vrchol, ohnisko, řídicí přímka), trojúhelník (těžiště, kružnice trojúhelníku vepsaná a opsaná), stejnolehlost kružnic, kvadratická rovnice a nerovnice atd. Z odlišné partie matematiky by se mohlo jednat o pojmy relace a její vlastnosti, ekvivalence, skládání zobrazení.

C. *Fáze matematizace, výpočtu a interpretace*

Předveďme si nyní analýzu předložené úlohy. V uvedeném postupu je posloupnost kroků, tzv. *řešitelský postup*, taková, jakou provádím s ohledem na možná uvažování žáků. Řídím se přitom zkušeností s řešitelskými postupy žáků. Analýza úlohy, která je dále uvedena, probíhá hlavně v mé mysli, písemně jsou prováděny pouze složitější výpočty. V mysli je též uloženo vizuální schéma úlohy, proto zpočátku (na rozdíl od žáků) není třeba kreslit graf funkce.

Označme si danou funkci f: $y = x^2 + 6x$.

1. krok: Definiční obor funkce je **R** (všechna reálná čísla).
2. krok: Je požadováno napsat rovnice tečen v určitých bodech dotyku, proto se budou zjišťovat nejprve tyto body. Druhá souřadnice $y_0 = -8$ jednoho bodu dotyku se vypočte dosazením hodnoty $x_0 = -2$ do předpisu funkce.
3. krok: Bod dotyku druhé tečny grafu funkce je ve vrcholu paraboly. Zde je více způsobů, jak určit vrchol paraboly. a) Jednou z možností je určit bod, v němž je první derivace funkce nulová. (Druhou derivaci, či zjišťování monotonie není třeba provádět, neboť u kvadratické funkce je právě jeden extrém, a to právě ve vrcholu paraboly.) b) Druhou možností je přímé dosazení do vzorce pro souřadnice vrcholu paraboly, který si žák vyhledá v tabulkách nebo ve své dlouhodobé paměti. c) Třetí možností je „doplnění na čtverec“ s konkrétními nebo dokonce obecnými koeficienty. d) Čtvrtá možnost využívá znalosti, že vrchol paraboly leží na ose úsečky, jejíž koncové body tvoří v tomto případě průsečíky paraboly s osou *x*. Průsečíky s osou *x*, a tudíž i souřadnice vrcholu paraboly, se zde dají vypočítat zpaměti. e) Pátou možností je podívat se na graf kvadratické funkce jako na kuželosečku a upravovat její rovnici na vrcholový tvar (opět „doplněním na čtverec“), odkud jsou jasně vidět souřadnice vrcholu paraboly. f) Šestá možnost využívá skutečnosti, že parabola $y = x^2 + 6x$ a tečna $y = c$ mají jediný společný bod, tj. diskriminant příslušné kvadratické rovnice je nulový.
4. krok: Z důvodu názornosti (ne nutnosti) je vždy výhodné načrtnout si obrázek. Grafem funkce je parabola, jejíž vrchol již známe. Pokud někdo ve třetím kroku zvolí cestu pomocí vyhledání průsečíků s osou *x*, může již parabolu zakreslit. Ostatní žáci musí daný výpočet provést v tomto kroku.
5. krok: Na parabole vyznačíme body dotyku obou tečen, zakreslíme obě tečny a vyšrafujeme útvar, jehož obsah máme zjistit. Vidíme, že se jedná o pravoúhlý trojúhelník (viz obr.).



6. krok: Určíme souřadnice vrcholů pravoúhlého trojúhelníku, abychom mohli vypočítat jeho obsah pomocí délek odvěsen.
7. krok: Pravý úhel trojúhelníku je při vrcholu, který je průsečíkem osy *y* a tečny paraboly v jejím vrcholu. Tato tečna je rovnoběžná s osou *x*, a tudíž rovnici tečny i souřadnice vrcholu pravého úhlu trojúhelníku lze jednoduše určit.
8. krok: Zbylé dva vrcholy trojúhelníku leží na druhé tečně paraboly, proto určíme její rovnici. a) Lze ji psát ve směrnicovém tvaru. Směrnice je rovna derivaci funkce v bodě dotyku, absolutní člen se dopočítá dosazením bodu dotyku do rovnice tečny. b) Druhou možností nalezení rovnice tečny je převést rovnici paraboly jako kuželosečky do vrcholového tvaru a podle ní napsat rovnici tečny ke kuželosečce.
9. krok: Průsečík tečny s osou *y* má *y*-ovou souřadnici rovnu absolutnímu členu směrnicového tvaru rovnice tečny.
10. krok: *y*-ová souřadnice průsečíku tečen je rovna *y*-ové souřadnici vrcholu paraboly, jeho

x-ová souřadnice se dopočítá z rovnice tečny.

11. krok: Délka vodorovné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se vypočítá jako absolutní hodnota rozdílu x-ových souřadnic obou jejích krajních bodů; délka svislé odvěsny se vypočítá jako absolutní hodnota rozdílu y-ových souřadnic obou jejích krajních bodů.
12. krok: Obsah pravoúhlého trojúhelníku je roven polovině součinu délek jeho odvěsen.

D. *Fáze sémantické zkoušky*

Při provedení retrospektivy uvedeného rozboru úlohy jsem shledal, že celý řešitelský postup je poměrně jednoduchý, je složen ze standardních kroků ve škole probíraných, je přehledný, numericky „elegantní“, časově není nijak náročný. Potvrzuje se tedy, že úloha je vhodným námětem pro úlohu do písemné maturitní zkoušky.

V následujících fázích E – I vystupuji v úloze tvůrce a hodnotitele úlohy.

E. *Fáze zhodnocení naplnění zásad*

Mají-li být naplněny zásady, které jsem si pro tvorbu úloh do písemných maturitních zkoušek stanovil (Zhouf 2001), je třeba zejména zvětšit spektrum oblastí, kterých se úloha dotýká, rozfázovat řešení na několik dílčích úkolů, pokud možno nezávislých, vložit nový pojem, případně zobecnit pojem známý, vložit nestandardní řešitelský prvek, zvýšit náročnost (obsahovou i časovou).

F. *Fáze tvorby dalších úkolů a otázek*

Text a jednotlivé kroky řešení původní úlohy ve mně evokovaly řadu dalších úkolů. Několik z nich si uveďme:

1. určit ohnisko a řídicí přímku paraboly,
2. určit obsah útvaru omezeného obloukem paraboly a osou x,
3. určit obsah útvaru omezeného obloukem paraboly, osou y a tečnou v bodě $[-2,-8]$,
4. určit obsah trojúhelníku s dvěma vrcholy v průsečících paraboly s osou x a třetím vrcholem ve vrcholu paraboly,
5. určit rovnici kružnice opsané oblasti omezené obloukem paraboly a osou x,
6. určit rovnici kružnice vepsané oblasti omezené obloukem paraboly a osou x,
7. určit oba středy stejnolehlosti kružnic nalezených v bodech 5 a 6,
8. určit obsah čtyřúhelníku omezeného tečnami k parabole v průsečících paraboly s osou x, tečnou ve vrcholu paraboly a osou x,
9. rozhodnout, zda je možné čtyřúhelníku z bodu 8 opsat či vepsat kružnici,
10. určit objem tělesa, které vznikne rotací plochy omezené obloukem paraboly a osou x kolem osy x, resp. kolem osy y,
11. určit rovnici paraboly, která je obrazem dané paraboly v nějaké shodnosti,
12. určit předpis pro složenou funkci $y = f(f(x))$.

G. *Fáze výběru úkolů a otázek*

Z této škály nabídnutých možností jsem vytvořil úlohu, v níž byly položeny otázky výše označené jako 5, 6, 7. Jedná se o úkoly netradiční, v nichž se objevují pojmy žákům málo známé, nebo dokonce neznámé, a tudíž ani metody řešení nejsou ve škole příliš probírány. Při jejich řešení je třeba umět modifikovat pojmy ze školské matematiky, konkrétně pojmy opsaná a vepsaná kružnice jinému útvaru než mnohoúhelníku.

Pro výběr pouhých tří otázek z výše uvedených hovořila přiměřená časová náročnost a délka zápisu řešení, tak aby se zaručila vyváženost všech šesti úloh v písemné zkoušce.

H. *Fáze sestavení celé písemné maturitní zkoušky*

Do zmíněné písemné maturitní zkoušky bylo vybráno šest úloh tak, aby byly splněny zásady tvorby jednotlivých úloh i celé zkoušky a aby byla zaručena časová přiměřenost i odborná obtížnost.

Spektrum matematických témat, které se ve zkoušce vyskytují, je široké; jsou to hlavně slovní úloha, množiny, soustavy lineárních rovnic, diofantovské rovnice, průběh a vlastnosti kvadratické funkce, kvadratická rovnice, derivace funkce, analytická geometrie kuželoseček, matematická indukce, úpravy algebraických výrazů, posloupnost a její vlastnosti, limita funkce, funkce odmocnina a její průběh, iracionální nerovnice, planimetrické útvary, shodnosti, komplexní čísla, stereometrie.

I. *Fáze externího hodnocení a fnalizace*

Před zveřejněním definitivní podoby celé písemné maturitní zkoušky jsem ji ještě předložil kolegyni k posouzení. Její připomínky přispěly k úpravě zkoušky do té podoby, která je uvedena v následujícím odstavci.

5. PÍSEMNÁ MATURITNÍ ZKOUŠKA PRO ROK 1999

Úloha 1

V matematické soutěži byly zadány tři úlohy A, B, C. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý vyřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nevyřešili úlohu A, byl počet těch, kteří vyřešili úlohu B, dvojnásobkem počtu těch, kteří vyřešili úlohu C. Počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří vyřešili úlohu A. Ze všech žáků, kteří vyřešili jedinou úlohu, právě polovina nevyřešila úlohu A. Počet žáků, kteří vyřešili právě dvě úlohy, byl ve všech třech případech stejný. Kolik žáků vyřešilo všechny tři úlohy?

Úloha 2

V soustavě souřadnic Oxy uvažujme oblast omezenou osou x a parabolou o rovnici

$$y = x^2 + 6x.$$

a) Určete rovnici kružnice opsané této oblasti.
b) Určete rovnici kružnice vepsané této oblasti.

Úloha 3a

Pro každé přirozené číslo n je dána kvadratická funkce předpisem

$$f_1(x) = (x - 1)^2$$
$$f_2(x) = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x) = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2 + \dots + (nx - 1)^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

a) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

b) Každou funkci f_n lze převést na tvar

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n. \qquad (*)$$

Určete koeficienty a_n, b_n, c_n jako funkce proměnné n.

c) Určete souřadnice x_n, y_n vrcholu každé paraboly dané předpisem (*) jako funkce proměnné n.

d) Dokažte, že posloupnost $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

e) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Úloha 3b

a) Sestrojte grafy funkcí

$$f\colon y = \sqrt{3-x}$$
$$g\colon y = \sqrt{x+1}$$

v jedné soustavě souřadnic a na jejich základě sestrojte odhadem graf funkce

$$h\colon y = f(x) - g(x).$$

b) Pomocí diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce $y = h(x)$.

c) Řešte v oboru reálných čísel nerovnici

$$h(x) > 1.$$

Úloha 4a

Nechť $ABCD$ je čtverec o straně délky jedna, M je střed strany CD, N je střed strany AD, P je průsečík úseček BM a CN.

a) Najděte shodné zobrazení v rovině, které zobrazí trojúhelník MBC na trojúhelník NCD (ty jsou shodné).

b) Umístěte čtverec $ABCD$ do Gaussovy roviny tak, že body A, B, C, D jsou postupně označeny komplexními čísly $a = 0$, $b = 1$, $c = 1+\mathrm{i}$, $d = \mathrm{i}$.
Dokažte, že každý z těchto čtyř bodů z se ve shodnosti z bodu a) zobrazí na bod

$$w = \mathrm{i}\cdot z + 1.$$

c) Dokažte, že lze čtyřúhelníkům $ABPN$ a $NPMD$ opsat po řadě kružnice k a l.

d) Vypočtěte mocnost bodu C vzhledem ke kružnici k.

Úloha 4b

V pravidelném čtyřstěnu $A_1A_2A_3V$ jsou K_1, K_2, K_3 postupně středy hran A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Středem hrany VA_1 je vedena rovina rovnoběžná se stěnou $A_1A_2A_3$, která protíná přímky VK_1, VK_2, VK_3 postupně v bodech L_1, L_2, L_3.

a) Určete poměr obsahů trojúhelníků $L_1L_2L_3$ a $A_1A_2A_3$.

b) Nakreslete těleso (komolý antijehlan) $A_1A_2A_3L_1L_2L_3$.

c) Určete poměr objemů komolého antijehlanu $A_1A_2A_3L_1L_2L_3$ a čtyřstěnu $A_1A_2A_3V$.

Literatura:

[1] Hejný, M., Michalcová, A.: Analýza písomného prejavu riešenia matematických úloh. *Banská Bystrica, Metodické centrum 1999*

[2] Stehlíková, N.: Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. *In: Novotná, J., Analýza řešení slovních úloh. Praha, PedF UK 2000, s. 98-117*

[3] Zhouf, J.: Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice. *Doktorská disertační práce. Praha 2001, s. 71-77, 157-158*

CCHI-KUNG OSEM KUSOV BROKÁTU

Zuzana Berová

Cchi-kung je východné cvičenie, ktoré podľa Číňanov nechali bohovia ľuďom ako dar umožňujúci dosiahnutie a udržanie zdravia, dlhovekosti, telesnej a duševnej rovnováhy.
Existuje veľa foriem cchi-kungu. My sme si ukázali jeden z dynamických cchi-kungov, ktorý má názov **Osem kusov brokátu**.
Cvičenie pozostáva z **rozcvičky**, ktorej cieľom je ponaťahovanie všetkých šliach a svalov, rozhýbanie celého tela a samotného **cchi-kungu**, ktorého cieľom je dosiahnutie optimálneho prúdenia našej vnútornej energie.
Pri rozcvičke postupujeme v poradí: hlava – krk – ramená – ruky – trup – kolená – nohy – členky.
Osem kusov brokátu sa cvičí v poradí: naberanie vody – luk – roztláčanie rukami – had – posilnenie obličiek – psík – odtláčanie rukou – vytriasanie negatívneho.

ISBN 80-968298-4-X