Dva dny
s
didaktikou matematiky
2015

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 12.–13. 2. 2015

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2015. Systémem LaTeX zpracovali Zuzana Kocourková a Jan Kozubek.

ISBN 978-80-7290-843-1

Obsah

ZVANÉ PŘEDNÁŠKY **9**

Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice
Petr Eisenmann, Jarmila Novotná, Jiří Přibyl 9

K problematice testování a hodnocení (nejen žáků)
Karel Rýdl 23

PRACOVNÍ DÍLNY **49**

Obrazové informace
Michaela Kaslová 49

Zápis dítěte do ZŠ – kulatý stůl
Michaela Kaslová 53

Multikulturní témata ve vyučování matematice
Hana Moraová, Jarmila Novotná 57

Pojďme si hrát s dřívky, aneb i dřívka patří do matematiky
Ivana Procházková 63

Badatelské úlohy ve vyučování geometrii
Filip Roubíček 71

Využitie hlavolamu Tangram na rozvíjanie priestorovej predstavivosti pre učiteľov 1. stupňa ZŠ
Viera Uherčíková 77

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH **82**

Jak vysvětlit záporný exponent
Petra Bay 82

Mobil na hodine matematiky, výhoda alebo prekážka?
Erik Bayerl, Katarína Mojšová, Patrik Voštinár 85

Ako motivovať žiakov SOŠ k štúdiu matematiky?
Silvia Bažíková 89

Víra uživatelů ve výsledek dodaný softwarem
Alice Bílá, Antonín Jančařík 93

Úpravy algebraických výrazů v šetření TIMSS a v pracích vybraných žáků
Vladimír Bílek 97

Úloha o trpaslíkoch
Alžbeta Brišová, Jana Bukovinová 100

Čeho si na praxi všímají studenti – pohledy na realitu vyučování matematice v primární škole očima budoucích učitelů
Jana Cachová 105

Simulácia náhodných javov pomocou GeoGebry
Zoltán Fehér 108

Možnosť identifikovania úrovne schopností žiakov primárneho matematického vzdelávania prostredníctvom testových úloh
Lucia Ficová 112

Riešenie tokových úloh pomocou tabuľkového kalkulátora
Štefan Gubo 117

Hravé procvičování číselných a algebraických výrazů
Klára Holková, Zdeněk Lauermann 122

Tandemová výuka
Klára Holková, Zdeněk Lauermann 125

Modelovanie riešenia slovných úloh na spoločnú prácu pomocou GeoGebry
Ladislav Jaruska 129

Práce se znakem ve hře s pravidly
Anna Jungrová 135

Slovní úlohy v prvním a druhém ročníku ZŠ
Michaela Kaslová, Pavla Weinzettel 140

Zmena úlohy pri tvorbe testu z matematiky
Iveta Kohanová 148

Analýza řešení úlohy se sítěmi krychle a kvádru, řešení žáků vidících a nevidomých
Klára Kochová 153

Modifikace slovní úlohy
Michaela Králová 158

Jak využít úloh s volnými parametry
Hana Lišková 162

Jedna úloha pětkrát jinak – Jak a kdy jsou žáci schopni si uvědomit shodnost postupů u úloh z jiných prostředí
Tomáš Novotný 167

Evropský projekt Scientix – přínosy pro učitele i národní projekty (matematika, přírodní vědy, ICT)
Vladimíra Pavlicová 171

Po cestách mezi relacemi a posloupnostmi
Jarmila Robová, Oldřich Odvárko 174

Několik námětů k výuce dělitelnosti
Eva Semerádová 178

Metody řešení slovních úloh z pohledu jejich užití
František Šíma 182

Faktory ovlivňující výkony žáků v matematice: pohled učitelů
Alena Škaloudová, Anna Páchová 191

Výsledky vybraných výskumov používania didaktických hier v matematike
Peter Vankúš 196

Žákovská řešení geometrických úloh na 1. st. ZŠ – diagnostika a hodnocení
Renáta Zemanová 199

Milí přátelé, kolegové a kolegyně,

dostalo se mi té cti napsat několik úvodních slov k devatenáctému sborníku konference Dva dny s didaktikou matematiky. Bylo mi tak zřejmě velmi elegantně naznačeno, že se již stávám pamětníkem. Svým způsobem je to pravda, aktivně jsem se podílel na většině z doposud pořádaných ročníků konference. Při této příležitosti jsem prolistoval několik sborníků z let předcházejících a uvědomil si, čím jsou Dva dny s didaktikou matematiky mimořádné a vzácné. Již takřka po dvě desetiletí totiž nabízejí prostor pro setkávání těch, kterým vzdělávání v matematice leží na srdci, bez rozdílu, zda působí ve škole mateřské, základní, střední či na univerzitě. Díky této konferenci máme možnost společně sdílet své zkušenosti a vzájemně se obohacovat, máme také unikátní možnost sledovat vybrané kolegy přímo při výuce.

Při nahlédnutí do starších ročníků sborníku je vidět, že jádro účastníků – aktérů konference je velmi pevné. Mnozí kolegové přijíždějí rok co rok a vždy přinášejí nové podněty. Osobně jsem právě na této konferenci navázal mnohá přátelství. Ovšem naše komunita není uzavřená, každoročně se na konferenci setkáváme s novými kolegy. Nejinak tomu bylo i letos.

Přeji vám, ať je vám čtení následujících příspěvků inspirací do vaší každodenní práce. Současně vás zvu na společné setkání na příštím, jubilejním dvacátém ročníku naší společné konference v roce 2016.

Za programový a organizační výbor

Antonín Jančařík

ZVANÉ PŘEDNÁŠKY

Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice

Petr Eisenmann, Jarmila Novotná, Jiří Přibyl[1]

V příspěvku jsou popsány výsledky experimentu, jehož cílem bylo naučit žáky ve věku od 12 do 18 let používat heuristické strategie při řešení úloh. Kromě popisu těchto strategií a ukázek efektivních řešení úloh přibližujeme stručně výsledky dvouleté experimentální výuky, která přinesla jak u žáků, tak i u participujících učitelů zajímavé změny nejen v dovednostech, ale i v postojích k řešení problémů a výuce matematiky.

V letech 2012–2014 jsme provedli v rámci projektu GA ČR *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi* dlouhodobý experiment, ve kterém jsme se pokusili naučit žáky ve věku od 12 do 18 let používat heuristické strategie při řešení úloh. Experiment proběhl ve čtyřech třídách škol v České republice s celkem 70 žáky ve věku 12–18 let. Po dobu 18 měsíců se žáci seznamovali se šesti vybranými heuristickými strategiemi řešení problémů, a to prostřednictvím řešení úloh, které byly řešeny právě pomocí těchto strategií.

V našem experimentu jsme sledovali progres žáků v jejich úspěšnosti při řešení problémů a změnu vybraných vnitřních faktorů ovlivňujících úspěch žáka při řešení problémů (čtení s porozuměním, tvořivost, schopnost využít stávajících znalostí). Kromě toho byly vyhodnoceny změny postojů žáků k řešení problémů a změny ve stylu práce učitelů způsobené experimentální výukou. Důležitým výsledkem bylo také zjištění, které řešitelské strategie je možno během vymezeného období naučit žáky aktivně používat a u kterých je to velice obtížné nebo nemožné.

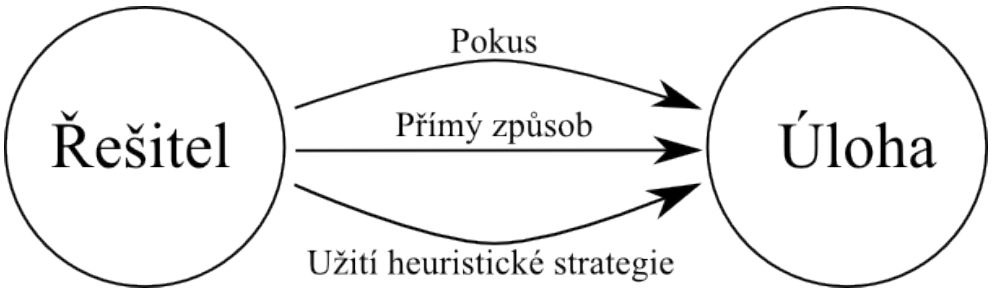
Výsledky této studie jsou podrobně představeny v práci (Eisenmann, Novotná, Přibyl & Břehovský, 2015). Některé heuristické strategie již byly popsány v časopisech pro učitele a studenty nebo ve sbornících z konferencí (Eisenmann & Břehovský, 2013; Přibyl & Ondrušová, 2014; Eisenmann & Přibyl, v tisku; Novotná, Eisenmann & Přibyl, 2015). O heuristických strategiích hovoří uceleně také kniha (Kopka, 2013).

[1]Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem, Petr.Eisenmann@ujep.cz, Jiri.Pribyl@ujep.cz; Pedagogická fakulta UK v Praze, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Tento příspěvek je stručnou verzí plenární přednášky popisující vybrané heuristické strategie a nejzajímavější výsledky celého experimentu z hlediska učitelské praxe.

Užití heuristických strategií

Řešení úlohy chápeme jako kognitivní proces, který lze realizovat jedním ze tří způsobů v závislosti na angažovanosti, schopnostech a dovednostech řešitele (viz obr. 1).



Obr. 1

První způsob označujeme jako *pokus*. Jedná se o nejprimitivnější způsob vypořádání se s problémem, který předpokládá pouze vnější motivaci řešitele. Řešitel si neklade otázku, zda úlohu správně vyřešil, a plní pouze cíl „vyřešit problém“, a to většinou pouze jednou, bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení.

Druhý způsob označujeme jako *přímý způsob* a je založen na aplikaci naučené znalosti. Řešitel zná požadovaný proces řešení a navíc je s to si uvědomit, že ho má použít, a aplikuje ho.

Třetí způsob řešení označujeme jako *užití heuristické strategie*. Řešitel nemá požadované znalosti nebo je neumí použít, nemůže tedy úlohu řešit přímým způsobem. Je motivován k řešení úlohy. Heuristická strategie mu umožní úlohu vyřešit.

Naše vymezení heuristických strategií je ve shodě s pracemi Polyi (2004) a Schoenfelda (1985). Tyto strategie jsme pro naše účely modifikovali a obohatili o další. Původně se jednalo o celkem 11 strategií. Na základě krátkodobých, čtyřměsíčních experimentů ve školách (viz Novotná, Eisenmann & Přibyl, 2014) jsme nakonec pro hlavní, dlouhodobý experiment vybrali těchto šest heuristických strategií: Analogie, Systematické experimentování, Pokus – ověření – korekce, Zavedení pomocného prvku, Cesta zpět, Konkretizace a zobecnění.

Při analýze žákovských řešení úloh v rámci krátkodobých experimentů jsme identifikovali následující jev. Různí žáci při řešení stejné úlohy a za použití stejné strategie postupovali odlišně. Jeden žák ke správnému řešení použil obrázek, druhý žák během řešení zavedl proměnnou a třetí žák vyřešil úlohu pouze aritmeticky.

Uvědomili jsme si, že důležitým aspektem při řešení úloh není jen použitá heuristická strategie, ale také způsob jejího použití. Nejde tedy jen o to, jakou strategii použít, ale také o to, jak ji použít. V tomto smyslu hovoříme o třech tzv. *cestách* řešení úlohy:

- aritmetické: je založena na číselném způsobu řešení bez zavedení neznámé,
- algebraické: je zavedena jedna či více neznámých a úloha se řeší pomocí rovnic,
- grafické: opírá se o obrázky či jiné grafické znázornění.

Doplňme ještě, že každá úloha může být řešena různými *prostředky*. Nejčastěji se jedná o prostředek, který jsme nazvali *Papír a tužka*. Řešitel ale může použít i prostředek *Počítač* nebo *Kalkulačka*, stejně jako *Papír* (překládání papíru) nebo *Pinboard*.

Představme si nyní postupně jednotlivé heuristické strategie. Po krátké charakteristice uvedeme vždy jednu nebo dvě úlohy, jejichž řešení bude příslušnou strategii pregnantně ilustrovat.

Analogie

V běžném životě i ve vědě často předpokládáme, že v podobných situacích platí i obdobné vztahy mezi věcmi, lidmi, jevy, objekty dané disciplíny apod. I v matematice hraje analogie velmi významnou roli. Matematické pojmy izomorfismus nebo homomorfismus matematických struktur jsou vyjádřením toho, že mezi těmito strukturami existuje určitá analogie. Tuto analogii pak matematikové bohatě využívají. Máme-li řešit určitý problém, najdeme si analogický problém, který bude pojednávat podobným způsobem o analogickém objektu. Pokud se nám podaří tento nový problém vyřešit, nebo pokud jeho řešení známe, můžeme často metodu jeho řešení nebo výsledek použít i při řešení původního problému. Názornou ukázkou je následující úloha č. 1.

Úloha č. 1

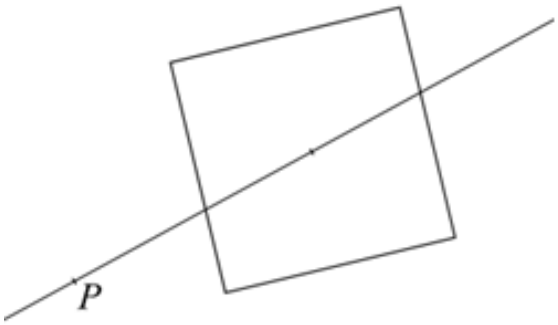
Zadání: Je dána přímka p a pravidelný osmistěn. Urči rovinu, která prochází přímkou p a rozdělí daný osmistěn na dvě stejně objemné části.

Řešení: Analogie zde spočívá v tom, že půjdeme o dimenzi níže. Místo pravidelného osmistěnu si vezmeme čtverec (průmět osmistěnu) a místo přímky bod. Shodnost útvarů (požadovaná) nám zajišťuje shodnost obsahů ploch.

Zadání analogické úlohy:

> Je dán čtverec a bod P, který není středem čtverce. Urči přímku, která prochází bodem P a rozdělí daný čtverec na dva shodné útvary.

Řešení analogické úlohy:



Obr. 2

Využijeme toho, že každá přímka procházející středem zřejmě rozdělí čtverec na dva shodné útvary, tudíž i přímka procházející středem čtverce a bodem P rozdělí čtverec na dva shodné útvary.

Odpověď na analogickou úlohu: Hledaná přímka musí procházet středem čtverce.

Odpověď na původní úlohu: Hledaná rovina musí procházet středem osmistěnu.

Jsme si vědomi toho, že obě dvě odpovědi zůstaly na úrovni hypotéz. Ve shodě s Polyou (2004) se domníváme, že řešení některých úloh ve školské matematice může být ponecháno na plauzibilní úrovni. Zatímco důkaz první hypotézy je relativně jednoduchý, důkaz druhé již vyžaduje náročnější prostředky.

V následující jednoduché úloze z praxe využijeme analogii ve smyslu tvorby úlohy s „přátelštějšími čísly“.

Úloha č. 2

Zadání: Rozhodněte. Který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$, nebo $\frac{124}{125}$?

Řešení: Kromě přímého způsobu řešení výpočtem na kalkulačce či převedením na společného jmenovatele je možno řešit tuto úlohu pomocí analogie.

Zadání analogické úlohy:

> Rozhodněte. Který zlomek je větší: $\frac{3}{4}$, nebo $\frac{2}{3}$?

Zde je odpověď zřejmá: $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

Odpověď na původní úlohu: $\frac{125}{126} > \frac{124}{125}$.

Systematické experimentování

Podstatou této strategie je uvědomění si skutečnosti, že lze k výsledku dojít pomocí určitého systému v provádění pokusů. Každý následující pokus bude pozměněný oproti předchozímu. Princip je založen na tom, že od základní hodnoty, kterou řešitel zvolí, se blíží postupně k danému řešení. Síla této strategie se ukazuje ve spojení s počítačem, který umožňuje realizovat pokusy v reálném čase. Velmi často se o použití počítače v rámci systematického experimentování hovoří jako o použití tzv. hrubé síly. Řešení hrubou silou vymezujeme jako vyčerpávání jednotlivých možností z množiny všech potenciálních výsledků. Ilustraci této situace dává následující úloha.

Úloha č. 3

Zadání: Máme připravit 50 kg bonbónové směsi v ceně 120 Kč za jeden kilogram. K dispozici máme dva druhy bonbónů, první v ceně 90 Kč za jeden kilogram, druhý v ceně 140 Kč za jeden kilogram. Kolik každého druhu je třeba smíchat?

Řešení: Experimentování realizujme pomocí tabulkového procesoru, které je zaznamenáno v tab. 1.

1. druh	2. druh	Cena za první	Cena za druhý	Celkem
0	50	0	7 000	7 000
1	49	90	6 860	6 950
2	48	180	6 720	6 900
3	47	270	6 580	6 850
4	46	360	6 440	6 800
5	45	450	6 300	6 750
...	...	...	...	...
18	32	1 620	4 480	6 100
19	31	1 710	4 340	6 050
20	**30**	**1 800**	**4 200**	**6 000**
21	29	1 890	4 060	5 950
22	28	1 980	3 920	5 900
...	...	...	...	...
46	4	4 140	560	4 700
47	3	4 230	420	4 650
48	2	4 320	280	4 600
49	1	4 410	140	4 550
50	0	4 500	0	4 500

Tab. 1

Odpověď: K přípravě směsi je třeba smíchat 20 kg prvního druhu a 30 kg druhého druhu.

Následující úloha ilustruje situaci, kdy systematické experimentování vede k ověření či zamítnutí hypotézy.

Úloha č. 4

Zadání: Čísla, která se čtou stejně odpředu i odzadu, jako např. 452 254, se nazývají palindromy. Můj přítel tvrdí, že všechny čtyřciferné palindromy jsou dělitelné číslem 11. Je tomu tak?

Řešení: Palindromy jsou např. čísla: 127 721, 94 749, 8 338, 565, 44, 8. Nás však budou v této úloze zajímat pouze čtyřciferné palindromy. Jsou to např. čísla 6 776, 1 001, 2 992. Vezměme nyní náhodně několik čtyřciferných palindromů a vydělme je jedenácti. Dostaneme např.:

$$\begin{aligned} 4\,554 &= 414 \cdot 11, \\ 1\,001 &= 91 \cdot 11, \\ 8\,338 &= 758 \cdot 11. \end{aligned}$$

Nyní se zdá, že by můj přítel mohl mít pravdu. Jistotu o pravdivosti však nezískáme, dokud nepřezkoušíme všech 90 možných čtyřciferných palindromů. K tomu bude efektivní použít tabulkový procesor (viz tab. 2).

A	***B***	**„=*B2*“**	**„=*A2*“**	**„=1 000*A2+100*B2+10*C2+1*D2“**	**„=E2/11“**
1	0	0	1	1 001	91
1	1	1	1	1 111	101
...	...	...	...	...	...
2	9	9	2	2 992	272
...	...	...	...	...	...
9	1	1	9	9 119	829
...	...	...	...	...	...
9	9	9	9	9 999	909

Tab. 2

Z posledního sloupce tab. 2 je zřejmé, že všechny podíly jsou opravdu celočíselné.

Odpověď: Můj přítel měl pravdu.

Pokus – ověření – korekce

Principem této strategie je proces přibližování se výsledku úlohy, kdy řešitel v prvním kroku provede náhodnou volbu. Ve druhém kroku ověří, zda jeho volba byla správná pokud ne, pokusí si uvědomit, jak moc se zmýlil. Konečně ve třetím kroku provede korekci, tedy opravu, která mu vygeneruje nový pokus. Celý proces začíná nanovo. Cílem je řízenými iteracemi dobrat se po konečném počtu kroků k cíli.

Úloha č. 5

Zadání: Část lístků do divadla pro děti stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Řešení: Zkusíme vzít 96 lístků po 11 Kč a 1 lístek za 8 Kč. Celkem je to 1 064 Kč. To je moc.

Zkusme vzít polovinu lístků (tedy 48) po 11 Kč a 49 lístků za 8 Kč. Celkem to je 920 Kč. To je málo.

Počet lístků po 11 Kč musí být mezi 96 a 48. Zkusme opět uvažovat polovinu lístků (tedy 72) po 11 Kč a 25 lístků po 8 Kč. Celkem to je 992 Kč. To je moc.

Počet lístků musí být mezi 72 a 48. Zkusme vzít znovu polovinu lístků (tedy 60) po 11 Kč a 37 lístků po 8 Kč. Celkem to je 956 Kč. To je málo.

Uvedený postup opakujeme, až dospějeme k hledanému řešení – viz tab. 3.

Počet lístků za cenu 11 Kč	Cena v Kč	Počet lístků za cenu 8 Kč	Cena v Kč	Celkem v Kč
96	1 056	1	8	1 064
48	528	49	392	920
72	792	25	200	992
60	660	37	296	956
66	726	31	248	974
63	**693**	**34**	**272**	**965**

Tab. 3

Odpověď: V divadle prodali 63 lístků po 11 Kč a 34 lístků po 8 Kč.

Zavedení pomocného prvku

Základní idea této strategie spočívá v tom, že zavedením pomocného prvku se řešení pro řešitele stane snadněji dosažitelné. Pomocný prvek vymezujeme jako objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje, a my jej do úlohy vpravíme s nadějí,

že nám usnadní přístup k řešení. U geometrických úloh se obvykle jedná o přímku, úsečku, bod či obrazec, v případě aritmetických či algebraických úloh o proměnnou, číslo či funkci.

Úloha č. 6

Zadání: Nechť p je prvočíslo větší než 3. Dokažte, že číslo $p^2 - 1$ je vždy dělitelné číslem 24.

Řešení: Nejprve zadaný kvadratický dvojčlen rozložíme:

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1),$$

a potom mezi čísla $p - 1$ a $p + 1$ vložíme číslo p (je naším pomocným prvkem). Uvažujme nyní trojici čísel

$$p - 1, p, p + 1.$$

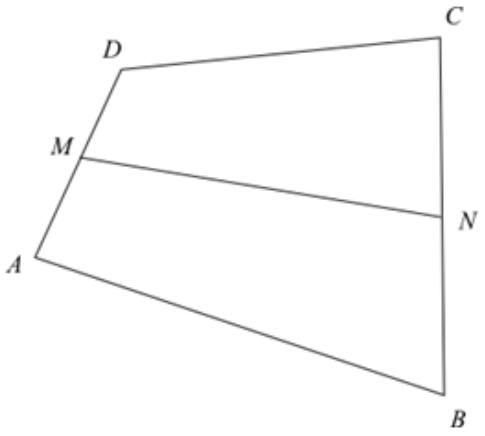
Jsou to tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Jedno z nich proto musí být dělitelné číslem 3. Prvočíslo p dělitelné třemi být nemůže. Proto je třemi dělitelné buď $p - 1$ nebo $p + 1$. Protože čísla $p + 1$ a $p - 1$ jsou obě sudá (jediné sudé prvočíslo je 2), jsou obě dělitelná dvěma a jedno z nich je dokonce dělitelné čtyřmi. Proto musí být součin

$$(p + 1)(p - 1)$$

dělitelný součinem čísel 3, 2 a 4, tj. číslem 24.

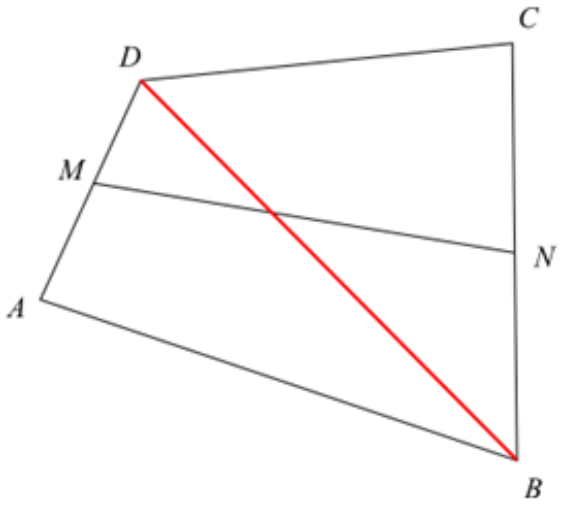
Úloha č. 7

Zadání: Je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$, viz obr. 3. Spojte středy M, N stran AD a BC. Zjistěte, jaký je vztah mezi $|MN|$ a $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.

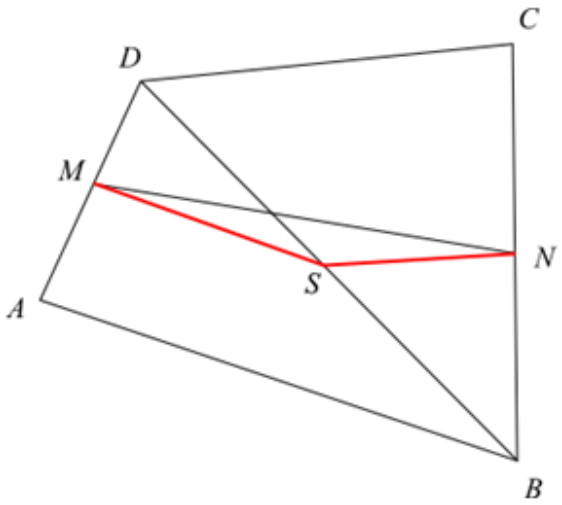


Obr. 3

Řešení: Do úlohy zaveďme pomocný prvek, kterým bude úhlopříčka BD (viz obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

Zabývejme se nyní situací ve vzniklých trojúhelnících. Pokud na úhlopříčce BD sestrojíme střed S, pak úsečky MS a NS jsou po řadě střední příčky v trojúhelnících ABD a CDB (viz obr. 5). Proto platí, že

$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|,$$

$$|NS| = \frac{1}{2}|CD|.$$

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník SNM dostaneme:

$$|MN| < |MS| + |NS| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Pozn.: Je zřejmé, že rovnost nastává v případě, když bod S (střed úhlopříčky BD) leží na úsečce MN, tedy v případě, že $ABCD$ je lichoběžník.

Odpověď: V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, v němž středy stran AD a BC označíme po řadě M a N, platí:

$$|MN| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Cesta zpět

V matematice se jedná o jednoduchou, často užívanou strategii, kdy známe koncový stav, známe počáteční stav a snažíme se jít od konce k počátku. Řešení úlohy je potom založeno na „otočení“ nalezeného postupu.

Úloha č. 8

Zadání: Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

Řešení: Postupujme od konce. Adamovi zbylo na konci hry 18 skleněnek, což bylo $\frac{3}{4}$ skleněných kuliček, které měl před druhou prohrou. Do druhé hry Adam vstupoval se $\frac{4}{4}$ skleněnek, tedy s 24 kuličkami, což bylo $\frac{3}{4}$ kuliček, se kterými hrál první hru. První hru Adam začal se $\frac{4}{4}$ kuliček, tedy se 32 skleněnkami, což byl původní počet.

Odpověď: Adam měl 32 skleněných kuliček.

Konkretizace a zobecnění

Idea této strategie je založena na tom, že pokud máme úlohu, která je zadána parametricky, nebo neurčitě, provedeme v první fázi řešení volbu konkrétní hodnoty nebo polohy, popř. volíme speciální případ. Tuto úlohu vyřešíme. Jsme-li schopni zobecnit výsledek této úlohy, vyslovíme hypotézu o výsledku úlohy původní. Hypotézu buď necháváme na plauzibilní úrovni, nebo dle možností řešitele provedeme její důkaz. Nejsme-li schopni provést zobecnění, pokračujeme v řešení dalších konkretizací.

Úloha č. 9

Zadání: Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

Řešení: Proveďme konkretizaci úlohy a předpokládejme, že původní cena knihy byla např. 56 Kč. Obchodník tedy koupil knihu za 8 Kč a prodal ji za 21 Kč. Jeho zisk snadno spočítáme:

$$21 - 8 = 13.$$

Zisk v procentech činí:

$$\frac{13}{8} \cdot 100 = 162{,}5.$$

Na základě naší konkretizace jsme získali jeden výsledek. Několika dalšími volbami ceny knihy bychom mohli snadno ověřit, že na volbě původní ceny nezáleží a provést tak zobecnění našeho výsledku.

Odpověď: Obchodníkův zisk byl 162,5 %.

Průběh experimentu

Experiment probíhal od září roku 2012 do února 2014 ve čtyřech třídách čtyř škol s celkem 70 žáky ve věku 12–18 let. Konkrétně:

- Gymnázium Jana Nerudy Praha, 20 žáků ve věku 16–18 let,
- Gymnázium Hořovice, 24 žáků ve věku 12–14 let,
- Základní škola Pod Vodojemem v Ústí nad Labem, 18 žáků ve věku 14–16 let,
- Základní škola Na Slovance v Praze, 8 žáků ve věku 14–16 let.

Žáci navštěvovali běžné třídy bez jakéhokoliv zaměření. Jedinou výjimku tvoří žáci z Ústí nad Labem, kteří navštěvovali třídu se zaměřením na matematiku. Žáci byli vybráni do této třídy ve věku 11 let, a to z dětí této školy tak, že do matematické třídy byl vybrán zhruba každý třetí žák.

Všichni čtyři participující učitelé se dají označit za angažované učitele, kteří svou práci berou zodpovědně a dlouhodobě se vzdělávají. Všichni učitelé byli za svou práci finančně odměňováni.

Po dobu 18 měsíců se žáci ve výuce matematiky seznamovali s heuristickými strategiemi řešení problémů popsanými v předchozím textu, a to prostřednictvím řešení úloh. Učitelé měli k dispozici celkem 120 úloh ilustrujících použití jednotlivých strategií, a to tak, aby je mohli přirozeně zařazovat do své plánované výuky po celou dobu trvání experimentu. Každá z heuristických strategií byla zastoupena přibližně 20 úlohami. U každé úlohy bylo uvedeno její řešení přímým způsobem, dále řešení danou strategií (úloha se pomocí ní dá řešit nejefektivněji) a ještě minimálně jedno další řešení pomocí jiné heuristické strategie.

Učitelé postupovali ve výuce následovně: Úlohu předložili svým žákům (většinou písemně, na pracovním listu). Nechali je pracovat a po vhodné době (alespoň polovina třídy úlohu vyřešila) vyzvali nějakého žáka, aby předvedl své řešení ostatním. Poté se ujistili, že ostatní žáci prezentované řešení pochopili. Poté vyzvali žáky k tomu, aby předvedli své řešení, mají-li ho jiné. Pokud se mezi prezentovanými řešeními neobjevilo to, kvůli kterému byla úloha žákům předložena, ukázal toto řešení žákům učitel sám. Žáci byli vždy vyzýváni k tomu, aby se snažili úlohu vyřešit více způsoby a aby své postupy řešení zapisovali. V diskusích byli žáci vedeni k tomu, aby obhájili svůj postup před ostatními. Občas dostávali žáci úlohy jako domácí cvičení. Forma probírání úloh ve škole ale byla vždy stejná.

Všichni žáci psali na začátku a konci experimentu písemnou práci, která obsahovala celkem 8 úloh. Vybrány byly po několikastupňovém pretestu takové úlohy,

které se daly nejefektivněji řešit jednou z probíraných strategií. Úlohy byly pro každou třídu jiné, přiměřené věku a znalostem žáků. Tyto úlohy učitelé se svými žáky během osmnáctiměsíčního experimentu neřešili, a to ani na začátku, po napsání vstupní písemky.

Abychom mohli lépe popsat schopnost žáka naučit se heuristickým strategiím, zavedli jsme charakteristiku, kterou jsme nazvali Kultura řešení problému žákem (KRP). Ta sestává ze čtyř položek:

1) inteligence;

2) tvořivost;

3) schopnost číst s porozuměním textu;

4) schopnost využít stávajících znalostí v matematice.

Všichni žáci byli na začátku experimentu, ještě před započetím experimentální výuky, a po jeho skončení (s výjimkou testu inteligence), testováni. První tři položky KRPu vyšetřovala psycholožka, poslední položka byla zjišťována pomocí sad úloh sestavených řešitelským týmem. Podrobně je metodika zjišťování výše uvedených položek KRPu popsána v práci (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014).

Výsledky experimentu

Je možné konstatovat, že po skončení experimentu došlo k nárůstu použití všech probíraných heuristických strategií žáky ve výstupních písemkách.

Experimentální strategie (Systematické experimentování, Pokus – ověření – korekce) a strategie Cesta zpět byly jako téměř jediné voleny žáky spontánně i na začátku experimentu, tj. ještě před zahájením experimentální výuky.

K největšímu nárůstu použití heuristických strategií došlo u Systematického experimentování a Zavedení pomocného prvku. Tyto strategie se žáci naučili nejsnáze aktivně používat.

Při použití strategií Systematické experimentování a Pokus – ověření – korekce byli žáci téměř vždy úspěšní. Při použití strategie Zavedení pomocného prvku tomu bylo zhruba v polovině případů. U této strategie učitelé upozornili na to, že žáci musí pomocí této strategie vyřešit s učitelem relativně velké množství úloh, aby byli schopni ji aktivně používat. U geometrických úloh se toto v rámci experimentu podařilo.

Žáci hodnotí strategii Systematické experimentování jako relativně univerzální. Uvádějí, že se dá použít pro řešení hodně typů úloh a její použití je jednoduché, dá se při něm použít počítač. O strategii Pokus – ověření – korekce říkají, že je

v případech, kdy nelze použít počítač, rychlou cestou k řešení úlohy. U strategie Zavedení pomocného prvku žáci vyzdvihují fázi tvorby ilustračního, resp. řešitelského obrázku. Jako zábavné označují v této fázi použití GeoGebry. Strategii Analogie oceňují v podobě sestavení úlohy s jednoduššími čísly. Na ní se pak dá pochopit, jak vypočítat úlohu původní.

Co se charakteristiky Kultura řešení problému týče, došlo v položce Porozumění textu u všech žáků k mírnému zlepšení, ovšem nikterak významnému. V položce Tvořivost došlo ve všech třídách k významnému zvýšení ukazatele tvořivosti. Podrobnější zkoumání ukazuje, že obzvláště výrazný je nárůst v oblasti plynulosti a flexibility.

Na základě dlouhodobého pozorování žáků po celou dobu experimentu, strukturovaných rozhovorů s žáky a učiteli lze u žáků konstatovat především větší ochotu experimentovat, lepší schopnost komunikovat s ostatními, obhájit a vysvětlit svoje řešení, reagovat na argumenty oponenta. Častěji jsou také schopni svá řešení zapsat a více se zabývají zpětnou vazbou (kontrolou výsledku).

Za patrně nejdůležitější výsledek ale považujeme změnu postoje žáků k řešení problémů obecně. Žáci se přestali bát řešit úlohy, neodkládali je, pokud jim hned na začátku nebyl jasný postup řešení. Naučili se řešení hledat, nevzdávat to. Tento jev jsme zaznamenali u zhruba poloviny žáků zapojených do experimentu.

Na základě poznatků získaných při dlouhodobém vedení učitelů po celou dobu experimentu a rozboru strukturovaných rozhovorů s nimi lze u učitelů konstatovat, že někteří z nich prokazují větší toleranci vůči různorodosti žákovských řešení, více se zajímají o myšlenkové pochody žáků při řešení úloh a přiznávají změnu svého postoje k výuce matematiky ve prospěch konstruktivistického, objevitelského přístupu.

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAČR č. 407/12/1939.

Literatura

[1] EISENMANN, P. & BŘEHOVSKÝ, J. (2013). Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie. *Matematika, fyzika, informatika*, 22(3), 183–191.

[2] EISENMANN, P. & PŘIBYL, J. (V tisku.). Analogie – užitečná heuristická strategie. *Učitel matematiky.*

[3] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J., PŘIBYL, J. & BŘEHOVSKÝ, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562.

[4] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J. & PŘIBYL, J. (2014). Culture of solving problems – one approach to assessing pupils' culture of mathematics problem solving. In Velichová, D. (Ed.). *Aplimat 2014. 13th Conference on Applied Mathematics* (pp. 115–122). Bratislava: Publishing House of STU.

[5] KOPKA, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy.* Praha: HAV – Hoza.

[6] NOVOTNÁ, J., EISENMANN, P. & PŘIBYL, J. (2014). Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. In Houška, M., Krejčí, I. & Flégl, M. (Eds.). *Proceedings of Efficiency and Responsibility in Education 2014* (pp. 514–520). Prague: Czech University of Life Sciences.

[7] NOVOTNÁ, J., EISENMANN, P., & PŘIBYL J. (2015). Impact of heuristic strategies on pupils' attitude to problem solving. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 8(1), 15–23.

[8] PÓLYA, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (Expanded Princeton Science Library ed.).* Princeton: Princeton University Press.

[9] PŘIBYL, J. & ONDRUŠOVÁ, J. (2014). Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. *Matematika, fyzika, informatika*, 23(2), 95–105.

[10] SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* London: Academic Press Inc. (London) Ltd.

K problematice testování a hodnocení (nejen žáků)

Karel Rýdl[1]

Myslím si, že ani učitelům matematiky neuškodí zamyslet se nad širšími filozofickými souvislostmi teorie hodnot a hodnocení, zejména v souvislosti s pojetím kvality, efektivity a tím i jisté míry spravedlivosti. Jsem přesvědčen, že právě poznáním a respektováním logických zákonitostí teorie hodnot můžeme nejlépe přispět k vyšší kvalitě navrhovaných evaluačních nástrojů a jimi hodnocených procesů.

K teorii hodnoty a pojetí kvality

Pokud budeme hledat smysl slova *hodnota (něm. Wert, angl. value)*, máme co dělat s pojmem *kvalita (jakost)*. Lze říci, že kvalitou rozumíme vlastnost nebo stav námi promítaný do předmětu (věc, jev, živá bytost), který je následně pozorován (s cílem zaujmout hodnotící soud) podle určitých kritérií. Problémem také často je, že se předmět hodnocení zaměňuje s hodnotou. Takové myšlení potom vede ke zmatení a omylům. Často totiž slyšíme, že někdo vytvořil kulturní nebo hospodářské hodnoty, ale ono se stalo pouze to, že někdo vytvořil předměty (statky, věci), které mají kulturní nebo hospodářskou hodnotu, ale předměty samy nemohou být onou hodnotou, protože tu jim přičítají a do nich vkládají a vnášejí lidé. Každé kvalitě odpovídá určitá (adekvátní) hodnota, protože hodnota je kvalita množstevně (kvantilně) určená, čili že hodnota je kvantitou (množstvím) kvality. Často se setkáváme s názorem, že hodnota je veličina svého druhu, že existuje sama o sobě. Myslím, že jde o zkratovité myšlení, protože každá veličina, tedy i hodnota je určená nejen obsahem, ale i mírou (kvantitou). Problém vzniká asi z toho, že se při procesu hodnocení onen obsah přičítá hodnocenému předmětu a stává se tedy (nebo lépe řečeno je) jeho kvalitou a pak hodnotou. Např., když říkám, že pozorovaný předmět je tvrdý, tak ho kvalifikuji v jeho vlastnosti (kvalitě), když ale říkám, že je tvrdší než něco jiného, v tom případě hodnotím jeho tvrdost (tedy míru jeho kvality). Určení stupně nebo míry kvality (tedy vlastnosti nebo stavu předmětu) jsou různá a vliv na to má povaha kvality. V případě, že vlastnost vykazuje jen jeden stupeň, je soud o kvalifikaci vlastnosti a soud o hodnotě jeden a tentýž. Neliší se. Zákon je platný na 100 %. Nemůže být stav, že zákon je tak trochu, více nebo méně platný. Logický postup našeho myšlení je potom stejný při kvalifikaci i hodnocení. Protože se při kvalifikaci, tedy sdělování či označování vlastnosti nebo stavu předmětu, musí logicky předpokládat nějaký byť minimální stupeň kvality, stává se pak každý náš

[1]Filozofická fakulta, Univerzita Pardubice, Karel.Rydl@upce.cz

kvalifikační soud zároveň i soudem (výrokem) hodnotovým. Je tedy potřebné při hodnocení odlišovat od sebe a mezi sebou kvality (vlastnosti) různého stupně (tedy kvantity téže kvality), což je někdy obtížné (a to vede k omylům), zvláště máme-li pro různé stupně kvality také různé názvy (např. horko, teplo, chlad, zima). Na závěr této části lze konstatovat, že kvality (tedy vlastnosti nebo stavy) jsou různé, když nelze domnělé různosti zredukovat na pouhé kvantilní rozdíly (v míře, stupních apod.).

Z výše uvedeného také vyplývá, že stejnost předmětu lze hodnotit různě a různé předměty hodnotit zase stejně. Např. strom můžeme hodnotit podle různých kritérií hospodářských, ekologických nebo estetických a zase esteticky (tedy dle stejného kritéria) můžeme hodnotit různé předměty (strom, dům, lavici). V tom je právě ukryto to tajemství myšlenkové operace a jejího obsahu, které jsou kryty slovem *hodnocení* (posuzování, vyvozování).

Hodnocení je tedy procesem, který je vztahován k určitému předmětu (jevu, bytosti), který v sobě nese určitou hodnotu, ale sám hodnotou není. V předmětu nesená hodnota je vlastně mírou určité očekávané kvality, o které vyvozujeme hodnotící soud. Kvalita hodnoceného předmětu nám udává směr a obsah hodnocení. Musíme tedy vědět, jak a co máme hodnotit, třeba na člověku nebo určitém domě. Je-li předmětem hodnocení např. škola, je základním problémem přijetí hodnoty kvality obecně jako hodnoty (např. celospolečensky platné a uznávané). Promýšlíme-li tuto problematiku hlouběji, dostáváme se do okruhu několika následujících problémů, např. vyjadřování hodnoty pomocí hodnotových a nehodnotových slov, což se váže na velmi konkrétní společenské podmínky. Dalším problémem bude jistě manipulativní role v hodnotovém vidění různých motivů jednání (strana prosazující je označí za „odvážné“, „správné“ a „potřebné“ a strana protivná je označí za „účelové“, „špatné“ nebo „zbytečné“. Míru manipulace s hodnotami můžeme odhalovat teoretickou reflexí, která v kombinaci s praktickým jednáním může podle I. Kanta aktualizovat pojetí hodnot. Při vnitřním hodnocení školy (interní autoevaluace) si musíme uvědomit skutečnost, že takové hodnocení nelze stavět na předem a z vnějšku stanovených hodnotách. V tom tkví celý soubor problémů se zaváděním autoevaluace, od které se očekává, že přinese vstupní informace pro evaluaci vnější. To je sice možné, ale šlo by o značnou redukci možností, které v sobě interní autoevaluace skrývá. Hlavním úkolem a smyslem autoevaluace je zlepšení kvalit předmětu, v našem případě školy, tím, že pomocí autoevaluačních procesů hlouběji a šířeji porozumíme procesům a jevům, které ve škole (také díky nám) probíhají a jeví se. Zároveň s tím jde o přijetí vlastní odpovědnosti za kvalitu procesů a jejich využívání pro správu a řízení „naší“ školy. Pomocí autoevaluačních nástrojů můžeme regulovat probíhající procesy ve prospěch těch subjektů, které mají na kvalitní existenci školy zájem.

Při pozorování jevů nebo předmětů nám žádné smyslové vnímání nesignalizuje užitečnost nebo účinnost jevů či předmětů. Tu si musíme napřed stanovit procesem myšlení, čímž vzniká námi daný účel, k němuž potom směřujeme otázky, kterými chceme zjistit vhodnost sledovaného předmětu nebo jevu. Míra užitečnosti či účelnosti se potom stává mírou kvality, která nám zase udává určitou hodnotu předmětu nebo jevu pro nás. Různé poznatky o různých vlastnostech a stavech předmětů a jevů získáváme tedy různou formou a podobou pozorování. A protože hodnota předmětů a jevů je podmíněna kvalitami předmětů a jevů, musí být podmíněna i různým způsobem pozorování, které zase souvisí s různým způsobem myšlení, zejména při hodnocení různého druhu. Při pozorování vnějšího světa existují v zásadě následující způsoby pozorování:

a) Smyslové pozorování, u něhož máme za to, že nám ukazuje svět takový, jaký skutečně je ve své objektivní existenci. Jde potom i o myšlení *ontologické*. Podobně vidí svět biolog nebo fyzik, který vnímá ontologické vlastnosti sledovaných předmětů a jevů, ale nevidí užitečnost nebo účelnost. Ta je vůlí člověka vložená později a vykazuje individuální povahu. Všechny jazyky na světě mají slova, kterými vyjadřují ontologické vlastnosti předmětů či jevů, které jsme jim my, lidé, přisoudili. S ontologickým myšlením souvisí myšlení *kauzální*, příčinné, které hledá odpověď na otázku „Proč?“ Jde o pochopení jevů a předmětů ve vzájemném působení. Proto někdy hovoříme o *kauzálně-ontologickém* způsobu pozorování. Důležité je si uvědomit, že není kauzality bez ontologie a není ontologie bez kauzality. V tomto případě se jedná o první skupinu vlastností, kvalit (jakoby daných předmětům a jevům), které zakládají také první skupinu ontologických hodnot.

b) Druhý způsob pohledu člověka na svět je charakterizován optikou jeho zájmů, přání, vůle a chtění, tedy jeho *postulátem*. Zatímco ontologické myšlení nevidí ošklivost, krásu, užitečnost a zbytečnost předmětů a jevů, na postulát zaměřené myšlení toto preferuje. Člověk potom posuzuje předměty a jevy podle toho, jak odpovídají jeho představám o obsahu krásy, ošklivosti, užitečnosti, či zbytečnosti. Podle různého zaměření postulátu pak vznikají různé obsahy a druhy kvalit. V tomto případě lze již vlastnosti polarizovat nebo škálovat, podle toho, jak odpovídají našim postulátům. Jazyky opět disponují řadou formálních pojmů, které nám vyjadřují svět chtěný nebo nechtěný. Jde o určenost v myšlenkovém řádu směrem k nějakému účelu. Proto se tomuto způsobu pohledu na svět také říká *teleologický* nebo *finální*. Jevy a předměty potom posuzujeme jako prostředky a účely.

c) Třetím možným způsobem pozorování světa je pohled *normologický*, který lze přiřazovat i ke způsobu teleologickému. Tento způsob vidění světa vzniká

tehdy, když se postulát jednoho subjektu stává příkazem (normou) pro subjekt druhý, který v něm vidí nebo je nucen vidět neporušitelnou normou (příkaz). Druhý subjekt se potom ptá: „Co mám dělat?“ „Co nesmím udělat?“ Ve společnosti vznikl rozkaz účelově, protože si tím někdo řeší vlastní zájmy a prosazuje vlastní vůli. Pro autora rozkazu se jedná o prostředek k prosazení vlastního účelu. Pro poslouchající subjekt jde potom o normu a z ní vyplývající povinnosti normu naplnit dle očekávání. Jde vždy o to, aby norma měla důvod vlastní platnosti v normě nadřízené, nebo je-li sama nejvyšší normou, potom ve vůli svého autora. K tomu se pojí pojmy poslušnostní, kázeňské, disciplinární a na ně navazují potom pojmy etické a mravní. Při tomto pozorování světa potom sledujeme, zda normy (např. právní, technické, zdravotní či mravní odpovídají svými kvalitami (vlastnostmi) očekávaným potřebám. V tomto případě lze opět při hodnocení škálovat či polarizovat. I pro tento způsob pozorování světa si jazyky vytvořily řady formálních pojmů, kterými se normy posuzují.

I když oba posledně jmenované způsoby pozorování světa vykazují společné vlastnosti vztahové (se společným formálním označením např. dobro a zlo, ale směřující k různé logice myšlení), je jejich způsob myšlení zásadně odlišný, protože u teleologického způsobu myšlení jde především o užitečnost, zatímco u normologického způsobu myšlení jde o správnost a platnost. Říkáme-li např. o škole, že je dobrá, může to znamenat, že je určena svým existenčním smyslem a účelem být užitečnou institucí, ale může to také znamenat, že právě nyní vyhovuje určitým platným normám.

Podle výše uvedených tří způsobů pozorování potom můžeme vyvozovat také jim odpovídající kvality a z nich vyplývající i hodnoty ontologické, teleologické a normologické. Vrátíme-li se nyní zpět k pojmu *hodnocení*, stává se pro nás zřejmě jasnějším a srozumitelnějším. Jde totiž o proces posuzování, tedy že přičítání kvality a hodnoty předmětu se děje soudem, který se stává novým poznatkem. Soudy o ontologických hodnotách nemají s našimi zájmy a očekáváními nic společného a jde o soud teoretický. Soudem, kterým vyjadřujeme vztah k našim zájmům (kritika), je soudem praktickým. Pro obě skupiny se potom otevírá další problém, který je při hodnocení velmi důležitým, a tím je dána míra objektivity a pravdivosti soudu.

K úskalím celoplošného testování žáků

V minulých letech byly schváleny dva programové dokumenty české vzdělávací politiky, známé pod názvem „Národní program rozvoje vzdělávání“, totiž tzv. Bílá kniha jako cílová vize a Dlouhodobý rozvoj…jako jízdní řád směřující k naplňování této vize. Zároveň byly rozpracovány a v roce 2004 schváleny legislativní dokumenty, které by měly zajistit zákonné krytí naplňování Národního programu

rozvoje vzdělávání. Součástí celého projektu je i nový evaluační systém vzdělávání, který ve svém návrhu počítá s celoplošným testováním žáků v určitých stupních s cílem zajistit informace o celkové výkonnosti školského systému v rámci povinné školní docházky. Chtěl bych v této části upozornit na rizika, která byla v zahraničí v souvislosti s celoplošným testováním výkonů žáků diagnostikována a kterých bychom si měli být vědomi i my. Budu se opírat o kritiky testovacích metod v Nizozemí, Německu, USA a Velké Británii, které jsou určitými skupinami odborníků hodnoceny jako nepedagogické a tím značně škodící a ubližující žákům i učitelům a v konečném důsledku i školám.

Protože jsou mezinárodní trendy v oblasti hodnocení školního vzdělávání víceméně jasně formulované, mají i mezinárodní srovnávací studie týkající se hodnocení výkonnosti žáků a škol dost značný vliv na rozhodování o podobě nástrojů pro zjišťování kvality na národních úrovních (Tillmann, 2001: s. 360). Tímto mezinárodně sledovatelným trendem je tendence formulování „učebního standardu“ v podobě nějaké, byť rámcové normy, a s tím související zavádění systému povinného testování jeho naplňování a dodržování.

V zemích, kde se tento trend dost silně prosazuje, je velmi málo psáno o kritických hlasech, a to i v zemích, které vykazují dlouhou tradici v uplatňování tohoto trendu, tedy v USA a Velké Británii. Přitom se nejedná o argumenty žádných sektářů nebo lidí stojících na okraji pedagogické sféry nebo publikujících v marginálních časopisech.[2] Lze samozřejmě namítnout, že takový výběr argumentů je subjektivní a proti nim lze postavit argumenty „druhé strany“. Toho jsem si vědom a zájemce odkazuji na prostudování literatury, ve které se jednotliví autoři s argumenty „druhé strany“ vyrovnávají.

Aby tedy nedošlo k nedorozumění, opakuji ještě jednou, že v tomto příspěvku mi nejde o kritiku testování jako metody, to by byl holý nesmysl, podobně jako odmítání formulace učebního standardu. Podobné standardy existují v řadě profesí, např. u lékařů, architektů, psychologů nebo právníků a jsou plně funkční a platné, protože obsahuji např. kritéria pro „dobrý výkon“ (standard of practice) ve smyslu profesionálního étosu. Takové standardy jsou potom základem pro stanovování úrovně dalšího vzdělávání, certifikace apod. Tento „profesionalizační“ motiv musí být ale velmi ostře odlišován od motivu „ovládnutí“ nebo „opanování“, jehož uplatňování pomocí testování je právě předmětem tohoto příspěvku.

Kdo si myslí, že u nás nemůže celá situace dojít do tak hrozivých stavů, jako je tomu ve výše jmenovaných zemích, má samozřejmě právo ve své naivitě setrvávat. Neměl by pak ale být v rozhodovacích politických nebo odborných pozicích a funkcích.

[2] Jedná se o odborníky jako Elliot Eisner, Deborah Meier, Linda Darling-Hammond, Selma Wassermann, Klaus-Jürgen Tillmann, John Elliott, Alfie Kohn, William Spady, Patricia Carini nebo Roger Standaert, kteří publikují v renomovaných časopisech a nakladatelstvích (viz literatura).

Současný stav testování v Nizozemí a jeho vliv v Německu

Renomovaný německý profesor pedagogiky na univerzitě v Bielefeldu, K. J. Tillmann, jeden z duchovních garantů alternativních škol, např. tzv. Laborschule v Bielefeldu, věnuje značnou pozornost tendenci zavádění mezinárodních srovnávacích šetření o výkonnosti žáků v oblasti matematiky, přírodních věd, čtení, cizích jazyků a občanské výchovy. Výsledky takových šetření vedou velmi často k velkým vzruchům – pokud je země hodnocena špatně – končícím rychlými politickými opatřeními s cílem dosáhnutí zlepšení stavu, jako tomu bylo a dosud je např. v Německu po šetřeních PISA.

Silným argumentem pro uskutečňování podobných mezinárodních šetření je, že přispívají ke zvyšování kvality ve školách. Potom by ale musela být jednoznačně vytvořená vazba na evaluační data i konfesijních škol a jejich tříd. Otázkou je, jak píše Tillmann (2001: s. 362), zda to skutečně chceme. Jde totiž o vedlejší účinky podobných procesů. Na pomoc si potom bere zkušenosti z Nizozemí: *Nizozemí je v Německu známé především svým vysokým podílem tzv. volných škol, které mohou být inspirující svým „krásným světem" vlastní nezávislosti a svobody. Jiné trendy nizozemského školství jsou v Německu známé již méně nebo vůbec, např. formy centrálního testování s vazbou na činnost školní inspekce a důsledky pro zostřování kontroly kvality ve školách.* Tillmann (2001: s. 363) dále uvádí tři podstatné součásti tohoto systému ve vztahu k inspekční činnosti, které jsou hodně diskutovány i v samotném Nizozemí. Pro zajímavost a inspirativnost v českém prostředí je uvádím ve vlastním českém překladu:

> 1. Centrální testy a „ranking", kam patří závěrečný test základní školy (po 12. roce věku dětí), vyvinutý organizací CITO, ale zatím ne jako povinný, i když je chápán a používán jako nástroj pro určování kvality školy, dále pak sem patří testy prováděné na konci první a druhé fáze sekundárního vzdělávání a které mají poloviční vliv na závěrečné hodnocení v každém předmětu (druhou polovinu vlivu tvoří ohodnocení učitelem), jejichž výsledky jsou zveřejňovány v novinách.
>
> 2. Úkolem školní inspekce je posuzování a hodnocení každé školy s ohledem na důležité oblasti kvality (učební nabídka, učební výsledky, klima školy apod.). Inspekce také podporuje zjišťování efektivity školního vyučování a to pomocí uznávaných externích výkonnostních evaluačních opatření. Zjištěná data jsou potom veřejně přístupná. Výsledky se mohou stát podnětem ke zpracovávání plánů na zlepšení stavu.
>
> 3. Cílená práce škol pro vlastní zlepšování, často na základě doporučení školní inspekce. Pokud škola vykazuje po tři po sobě jdoucí léta výsledky, které se více než z poloviny odchylují od schváleného stan-

dardu v rámci třídního a školního průměru, potom následuje hloubková důkladná inspekce s cílem analýzy stavu, nalezení příčin nedostatků a navržení opatření pro jejich odstranění a tím zlepšení stavu školy.

Tento model je vítán nizozemskými příznivci jako podařené propojení objektivního měření výkonu žáků, kvality školy a efektivního využívání veřejných prostředků ve prospěch úřadů, neziskových organizací a hlavně rodičů. Pro reprezentanty inovujících, samostatně plánujících a rozhodujících se škol, vycházejících ze zájmů a potřeb dětí a mládeže je tento model hodnocen spíše jako technokratická pomůcka pro kontrolu, jejíž účinky a důsledky pedagogického charakteru nejsou brány dostatečně vážně.[3] K. J. Tillmann (2001: s. 368) soustředil svoji kritiku do tří následujících bodů:

1. Spojení pravidelného centrálního testování s evaluací individuálního výkonu žáků a známkováním nutí učitele k tomu, aby upravovali vlastní vyučování podle potřeb testů. Jedná se o moderní variantu „norimberských trychtýřů“. Tím se výrazně zvýší tlak na využívání memorovacích metod a frontálních forem vyučování, které jsou dnes již v přímém rozporu s celospolečensky proklamovanými cíli vzdělávání, potřebami zaměstnavatelů, ale hlavně zcela odporují vědeckým poznatkům moderní vývojové a pedagogické psychologie a obecné pedagogiky didaktiky.

2. Výrobci testů získají v oblasti vzdělávání a školství neuvěřitelně silnou mocenskou pozici.

3. „Cejchování“ škol – v jejich značné různorodosti – povede k utilitárnímu chování rodičů a na základě znalosti jednotlivých statisticky přesných ukazatelů ke zvyšování sociálních rozdílů ve společnosti. „Dobré školy“ (podle ekonomicko-technické orientace) budou pro děti nadanější a zbytek zůstane „sedět“ v běžných průměrných školách bez motivace a další nabídky.

Tillmann v závěru svého příspěvku doporučuje široce otevřenou celostátní diskusi o tom, zda němečtí rodiče skutečně chtějí takovou praxi. Není snad ani nutné dodávat, že v německých politických kruzích se po takovéto výzvě rozhostilo velké ticho. Politici, stejně jako i v jiných zemích, totiž hlasy zkušených odborníků potřebují většinou jen jako žebřík pro vlastní kariéru, nikoliv jako zásobárnu idejí pro spravování věcí veřejných.

[3] Podobně uvažuje i R. Standaert v práci (Standaert, 2001), když v diskusi o kvalitě školy a evaluaci rozlišuje, zjednodušeně řečeno, dva protikladné jevy: ekonomicko-technickou orientaci a pedagogicko-didaktickou orientaci. Přitom ten první jev v současné světové diskusi zcela dominuje.

Stručný popis negativních působení celoplošného centrálně organizovaného testování

Následující stručný přehled popisuje nejzávažnější negativní efekty centrálního testování a to na základě rešerše odborné literatury, která mi byla v posledních letech i díky zahraničním kontaktům zpřístupněna.[4]

1. Učitelé budou důvěřovat výsledkům testů mnohem více než vlastním profesionálním úsudkům o dětech, které spočívají na delších pozorováních a vzájemné komunikaci (A. Kohn). To sice ještě negarantuje kvalitativně přiměřené hodnocení, ale testování tím méně. V této souvislosti se mi vybavují kritická slova Karla Stockkinga, školského reformátora v Utrechtu, zaměřená na podpůrný systém pro rozvoj žáků, že totiž takovým postupem je učitel vlastně „deprofesionalizován“.[5] V této souvislosti se také často objevuje argument, že silnější tlak zvnějšku školy, např. metodami externí evaluace, je důležitý a potřebný, protože jinak by upadala kvalita učitelů a neodpovídala by obecným požadavkům. Pokud ovšem tento argument přijmeme, ztrácíme nárok na chápání učitele jako samostatně uvažujícího profesionála a degradujeme jej na výkonnou loutku podle vnějších rozhodnutí.

2. Podle A. Kohna (2001: s. 352) budou pod tlakem výše uvedeného trendu dobří, tedy kreativní učitelé a ředitelé škol demotivováni a budou opouštět školství. Kohn uvádí několik interview s učiteli v amerických odborných učitelských časopisech, kteří se v nich vyjadřují o svém povolání jako o proměně z tvořivého prostředí do prostředí výrobního podniku se všemi charakteristikami takového způsobu chování a jednání. *Všude vidíme drtivý tlak na to, aby se škola proměnila v tvrdě řízený podnik s předem danými procesními i cílovými standardy, v němž se vyučování a učení dětí stává výrobkem. Taková proměna školství nás odpuzuje, kvůli tomu jsme do školství nenastupovali. To budeme raději pracovat přímo do skutečných výrobních podniků a za tomu odpovídající mzdy!*

3. Nizozemský pedagog K. Both (2003: s. 2001) uvádí, že učitelé stále méně přemýšlejí o své práci a stále méně se učí pomocí reflexe vlastní práce a práce svých kolegů. Místo toho se začínají stále více zaštiťovat a chránit vybranými výsledky externích evaluací a zaujímat obranné postoje, čímž se stávají vůči

[4] Čerpal jsem zejména z: (Ohanian, 1999; Kohn, 2000; Meier, Kozol & Cohen (vyd.), 2000; Kohn, 2001: s. 349–357; Ohanian, 2001).

[5] Nizozemské školy totiž musí dokumentovat celkový vývoj každého dítěte tzv. „průvodním systémem žákova rozvoje“. Inspekce se pak v praxi zajímá jen o takový systém, který umožňuje na základě zprůměrování srovnávání ročníkových tříd a škol navzájem, tedy o takový systém, který v sobě zahrnuje standardizované testy. Blíže viz (Both, 2001: s. 51 a 223).

sobě navzájem konkurenty. Profesor „East Anglia University“ v Norwichi, John Elliott (1998: s. 26), se k podobnému psychologickému procesu vyjadřuje poznámkou o tom, že práce učitelů byla ještě před 30 lety vnímaná s příliš nekritickou důvěrou. Dnes je tomu právě naopak. Vyučování bez důvěry je ale nemožné. Externí kontroly prostřednictvím inspekce se ale staly příliš neinspirující a značně mocensky obávané. V souvislosti se stále rostoucí snahou po průhlednosti a jasnosti učitelské práce před veřejností rychle mizí důvěra v učitele, ale i důvěra učitelů samotných, např. v pedagogickou integritu inspekce jako instituce a ve smysluplnou pomoc od pracovníků inspekce.[6] Z toho může velmi rychle vyrůstat patologický strach před inspekcí, ale také obavy, které působí kontraproduktivně vůči požadavkům na dlouhodobý kontinuální rozvoj stálého zlepšování škol. Učitelé ztrácí motivaci a tím i zájem o svoji práci, podceňují rizika a místo dynamického rozvoje dochází k dogmatizovanému ustrnutí. V naší nestabilní, ale dynamické společnosti nelze připustit ztrátu experimentování a inovačních procesů. V oblasti školství jsou na jedné straně prosazovány požadavky na jejich podporu, na druhé straně se je ale snažíme „sešněrovat“ standardy a předpisy, jejichž naplňování vede ke ztrátě smyslu po experimentování a inovativnosti.

4. Velký tlak a vážné důsledky pro další postupy vzniklé na základě plošně zjišťovaných testových výsledků vyvolávají zřejmé snahy po podvodném jednání.

5. V mnoha případech rozvíjejí učitelé negativní postoje vůči dětem, které mají nejhorší testové výsledky, protože jim kazí „průměry“ a jsou tedy charakterizovány jako nezodpovědné a neschopné, což logicky vede k ještě větší frustraci dětí, které v testech „neuspěly“.

6. Diskuse uvnitř školy mezi učiteli navzájem, učiteli a rodiči o dětech a učebních procesech se neuvěřitelně zúží. Již vůbec nepůjde o to, co škola vnímá jako důležité a co udělá pro podporu rozvoje každého dítěte, a co děti, často možná bezděčně, neočekávaně a překvapivě odhalují a objevují v průběhu učení, ale stále více o úspěšné zvládnutí trestů, stále více za každou cenu, tedy i za cenu přizpůsobování práce školy potřebám testů.

7. Je známo, že na amerických školách vedl systém celoplošně uplatňovaného testování k radikálním změnám v oblasti didaktiky s výsledkem zvýšené uniformity didaktických metod. Učitelé začali používat pouze metody a formy

[6] Dobří (tvoriví a potřeby dítěte respektující) učitelé jsou ve své činnosti velmi zranitelní, protože se, obecně řečeno, sami velmi silně emočně angažují v péči o žáky a cítí velmi silnou odpovědnost za blaho a učební úspěchy „svých“ žáků. K problému motivace učitelů a jejich zranitelnosti se vyjadřovala již řada známých autorů: (Hargreaves, 1998: s. 835–854; Tronau, 2000: s. 331–353; Vandenberge & Hubermann, 1999).

práce, které vedou k efektivnímu nácviku pro zvládnutí testových úloh. V týdnech před pravidelně zadávanými testy jsou určité vyučovací předměty a „neužitečné“ aktivity jako např. exkurze, laboratorní experimentování, volné diskuse, simulační hry apod. omezovány a obětovány ve prospěch profilových předmětů v očekávaném testovacím kole.[7] Jinými slovy vyjádřeno: veškeré technokratické způsoby zacházení s učebními standardy a jejich evaluací vedou ke standardizování obsahů a didaktických forem práce. Vrcholem tohoto trendu je zřejmě zavádění povinných hodin gramotnosti (literacy-hour) s pevně předepsaným a stanoveným schématem průběhu vyučování v anglických školách. Jde snad o exhumaci herbartistických forem vyučování z 2. poloviny 19. století?

8. Žáci jsou tříděni podle číselných výsledků dosažených na základě systému normovaných testů, místo toho, aby bylo zjišťováno, co skutečně v praxi umí a použitelně ovládají. Takový postup výrazně zvyšuje pedagogicky nežádoucí rivalitu mezi dětmi.

9. Žáci si tak osvojují pevné, ale jednostranné (pokud ne přímo falešné) představy o chování a způsobech myšlení a jednání, které vedou k docílení dobrých testových výsledků. Ty ale vedou více k návyku na testové situace, než k vnitřní potřebě dalšího poznávání světa. Testování umožňuje spíše jen upevňování určitých návyků a reflexů, kterou jsou pro takový způsob prezentace opakovány a procvičovány, ale rozhodně ve skutečnosti nevede k zjištění toho, co žáci skutečně umí vzhledem k nově proklamovaným cílům vyjádřených tzv. klíčovými kompetencemi.

10. Linda Darling-Hammondová (1997: s. 75 a násl.) to vyjádřila ve své práci z roku 1997 následovně: *Představ si, že bylo rozhodnuto, že nemocnice musí vykazovat lepší výkony a že budou zvýšeny normy. Všem pacientům musí být nadále podle standardizovaného postupu, tj. tedy i v přibližně stejném čase, měřena teplota. Krátce před tím ale rozdají sestry stejné dávky aspirinu a půl litru studeného nápoje. Výsledky jsou podle takového postupu ve skutečnosti pozoruhodné – nikdo totiž nemá zjištěnou horečku. Kvalita takové nemocnice je vynikající. Přirozeně nemá taková skutečnost s opravdovou lékařskou péčí a hodnocením její efektivity mnoho společného, jako nemá vyučování s cílem připravit na pravidelné testování mnoho společného s vyučováním vycházejícím vstříc potřebám dětí a jeho smysluplnou evaluací.*

11. Americký pedagog Alfie Kohn (1999: s. 35) cituje ve své práci jednoho „odborníka“ na celoplošné testování, které zcela vážně navrhoval, aby byly „li-

[7] Blíže viz (Ohanian, 1999) a (Kohn, 1999)

gové tabulky“ pořadí škol podle zprůměrovaných výsledků zveřejňovány na místech, kam patří, totiž ve sportovních rubrikách denního tisku.

12. Ve své kritice celoplošného testování se americká pedagožka Deborah Meier zaměřila na popis jeho rozbíjejících a zničujících důsledků v oblasti angažovanosti učitelů, rodičů a žáků uvnitř i vně školy, stejně jako ostatních lidí a podniků v okolí školy. (Meier, Kozol & Cohen (vyd.), 2000)

Demokratičnost tzv. demokratické kontroly kvality škol

V své již citované práci (Meier, Kozol & Cohen, 2000: s. 112) D. Meier píše: *Ve jménu demokratické kontroly je demokracie uvnitř i vně škol fakticky pohřbívána. Začíná to tím, že několika experty na celý školský systém nějaké země je zjišťováno, zda školství odvádí v poměru k investovaným částkám a ve srovnání s jinými podobně rozvinutými zeměmi dostatečné (tedy pro politiky a ekonomy uspokojivé) množství efektivity.* Pro taková zjištění je potřebné vyvinout, formulovat a prosadit celostátně platné normy, které budou specifikovány podle druhů a typů škol a také podle jednotlivých vývojových fází dětí a mládeže. Tyto normy je potom potřebné rozpracovat do podoby standardizovaných testů, s jejichž pomocí potom bude „možné“ „objektivně“ vzájemně porovnávat jednotlivce a školy, a to na úrovni místní, regionální, celostátní i mezinárodní. Kromě toho je nutné doplnit takto formulovaný evaluační systém o systém sankcí pro selhávající a neúspěšné školy. Takové školy by měly být identifikovány na nepolitické a nestranické úrovni, tedy pomocí institucí, které mají jasný odstup a vykazují maximální míru nezávislosti na školách. Tím je vytvořen prostor pro argument oprávněné spravedlivosti celého systému, protože se všem žákům dostává stejné možnosti (rovnost šancí) na minimální úrovni dobrého vyučování (což je vyučování, které na minimální úrovni splňuje kritéria stanovené normy). Konečně je vytyčen požadavek na formulaci znaků a kritérií „efektivního vyučování“, jež by mělo podpořit proces stálého „zlepšování“ školy. Jednotlivé kroky takového systému, stejně jako způsob myšlení, se projevují v logickém sledu. Nakonec se do ideových základů a východisek takto formulovaného a logicky provázaného celku dodá několik vhodných pojmů, které ve své obecnosti nic konkrétního nepředstavují, ale jde o pojmy, které jsou v současnosti „v kurzu“, a proto je nutné je v souvislosti s výše uvedeným systémem s ohledem na veřejnost propojit. Jde např. o pojmy jako „demokratičnost“, „rozvoj školy“, „kvalita a její hodnocení“, „reflexe“, „cílové kompetence“ apod.

V této souvislosti je, myslím, důležité uvést alespoň tři „alternativní“ aspekty, které by mohly být výše uvedenému modelu evaluačního systému v praxi značně prospěšné a vysoce funkční z hlediska zjišťování skutečné smysluplnosti probíhajících vzdělávacích procesů:

1. Pluralita škol jako uznávané bohatství ve smyslu více akceptovaných definic toho, co je „dobrou školou“. Tam, kde je ve školství zřetelná jedna hlavní tendence, musí dostat „alternativní“ vize a tendence možnost vlastního rozvoje uvnitř velkoryse definovaných všeobecně platných podmínek, např. ve vzdělávacím standardu (cíle, obsah a metody a formy). To by měl být asi případ České republiky.

2. Místní kontrola nesmí být v žádném případě podceněna a utlumována. Vedle externích hodnocení expertů má zásadní význam demokratické právo (ownership) obce (pospolitosti) všech zainteresovaných – učitelé, rodiče, žáci, zaměstnavatelé a odběratelé – na hodnocení vlastní práce a její reflexe s ohledem na specifika místních cílů, obsahů a způsobů práce. Tím je dán také důležitý vzor demokratického života uvnitř školy pro všechny žáky. To musí být případ České republiky.

3. Pro evaluaci musí být využity rozličné druhy pramenů. Na základě normalizovaného standardu by měly mít školy možnost formulovat si vlastní cíle a potřeby, které budou pro všechny zainteresované jasné a průhledné (a tím i stabilní). Ty by měly být zjistitelné na místní úrovni, nejlépe systémem vnitřní evaluace. Přitom by měl být důraz kladen na ukázání toho, čeho je schopen každý jednotlivec a co ve skutečnosti umí.[8] Tato interní evaluace (autoevaluace) by měla být doplněna hodnocením nezávislé skupiny z regionu, která vykoná v pravidelných časových odstupech na základě pozvání školy posuzovací a hodnotící návštěvu, jejíž závěry jsou potom porovnávány s výsledky interní evaluace školy, ale i s méně častými kontrolními návštěvami celostátní inspekce, soustřeďující se zejména na plnění všeobecných cílů platných standardizovaných norem. Kéž by toto byl případ České republiky.

Co je dobré pro sociálně hendikepované děti?

Velmi časté argumenty se objevují v souvislosti s tzv. společenskou rovností nebo s tzv. sociální spravedlností. D. Meier uvádí ve své knize polemiku s odpůrcem jejích myšlenek o tom, že formulování učebních standardů a jejich následné celoplošné testování ve svém důsledku udržují sociální nerovnosti a tím i nespravedlnosti, protože neodstraňují jejich příčiny. Uvádí argumenty druhé strany o tom, že právě formulace učebních standardů vedou k zohledňování sociálně ekonomicky podmíněných rozdílů, protože právě chudé rodiny mohou profitovat z vyšších nároků

[8] Blíže o této tzv. výkonové evaluaci (performance evaluation) nebo tzv. autentické evaluaci (authentic evaluation) pojednávají práce: (Allen, 1998) a (Darling-Hammond, Ancess & Falk, 1995).

školy.[9] V současné době je úroveň výuky dětí ze sociálně ekonomicky hendikepovaných rodin v USA na velmi špatné úrovni. Je to většinou zapříčiněno nízkým očekáváním vzhledem k těmto dětem, čehož důsledkem je potom nedostatečná stimulace těchto dětí.

D. Meier (1996: s. 28) ale nevěří tomu, že by právě standardizování a ústřední byrokratická kontrola zvnějšku měla být pro rozvoj místního školního společenství tím nejlepším prostředkem. *To poslední, co bychom měli dělat, by bylo právě posilování standardizace a centralizace, k čemuž stejně již dříve v případě škol pro chudé děti docházelo. Toto posilování je právě tím hlavním problémem.* D. Meier bojuje za to, aby to, co je v USA právem soukromých škol, zavádělo také do normálních (státních) škol v okrajových a chudých částech měst. Tím právem je více rozhodovací svobody ve prospěch služby dětem a školní obci. Poukazuje na úspěchy, které byly dosaženy na její škole ve Východním Harlemu v New Yorku[10] tím, že prosadila silné zastoupení rodičů ve správě školy, týmové učení, spoluúčast žáků na utváření podoby školy a vyučování, rodinnou podobu jednotlivých třídních společenství uvnitř školy (malé školy ve škole), vysoký intelektuální a motivační standard, který umožňoval každému respektovat jeho silné stránky a pomáhat mu v rozvoji stránek slabších. Technokratické změny zvnějšku škol ale vytváří tlak, který vede k ničení takovýchto experimentů, např. nyní v Bostonu, kde D. Meier vede jednu školu.

Celoplošná testování jsou pro výše uvedené školy a jejich žáky velmi nebezpečná v tom, že zakrývají svoji hodnotící relativnost příliš zdůrazňovanou objektivností statistických údajů, postavených na zprůměrovaných datech, která umožňují právě tu nepřípustnou operaci, totiž seřazení jednotlivých dětí podle dosažených výsledků v % do celkového pořadí ve společnosti. Slabší děti z testování zaujímají horší postavení a tím se snižuje jejich sebevědomí, motivace k úspěchu a angažmá pro vlastní aktivitu. Jde o systém vítězů a poražených. Kdo dosáhne dobrých výsledků, potlačuje v takovém systému jiné. A to je z hlediska cílů nového pedagogického paradigmatu, postaveného na humanizaci procesů, zcela protichůdné a nepřípustné.

Velmi podrobně jsou popsány negativní důsledky standardizovaného testování, zejména pro děti z chudých rodin, v knize L. M. McNeilla (2001), která končí větou: *Standardizování testů redukuje kvalitu a kvantitu toho, co se ve školách vyučuje a učí.* Jde o závěr, který byl již předtím mnohokrát potvrzován v různých studiích ze škol, které pod tlakem standardizovaného testování a kontrolování byly nuceny redukovat kvalitu učebních obsahů, oslabovat roli učitelů a odstraňovat aktivní učení žáků. To byla a jsou ale jen krátkodobá, lze říci přímo okamžitá působení. Dlouhodobá působení jsou samozřejmě méně viditelná, ale o to škodlivější, protože jejich náprava je zdlouhavá, pokud je vůbec možná. Nechme ale chvíli ho-

[9] Protiargumenty jsou formulovány podle motta: Vždyť je to tak dobře míněno, tak proč zrovna ty, Deborah Meier, jsi proti tomu! Viz (Meier, 1996).

[10] Jde dnes již o světoznámý „pedagogický zázrak“ z počátku 90. let rozkvětu školy „Central Park East Elementary and Secondary Schools“ (Meier, 1996: s. 35–46).

vořit L. M. McNeilla (2001: s. 134): *Z dlouhodobého hlediska vytváří standardizace neoprávněnou nerovnost a rozšiřuje mezeru mezi kvalitou vyučování pro mládež z chudých rodin a etnických menšin na straně jedné a pro mládež z privilegovaných rodin na straně druhé... ...čím déle standardizované kontroly působí, tím širší je tato mezera. Obsahově totiž systém testů a přípravy na tyto testy ve školách obsazuje pro děti z etnických menšin a chudých rodin místo kurikula, které dostávají děti z privilegovaných rodin jako nabídku. Tyto nové diskriminující struktury vznikají i za pomoci kontrol, které ve školách probíhají na předem vymezené vědecké úrovni. Tyto struktury se staly v průběhu let určujícím modelem školského systému v jednom z největších států podle počtu obyvatel s největší etnickou a národnostní pestrostí, totiž v Texasu. Četné studie dokumentují rostoucí moc externích kontrol, jejichž působením se vyučování pro všechny děti stává stále obtížnějším, zejména pro děti z afroamerického a latinského prostředí.*

Vědecká práce L. M. McNeilla byla původně zaměřená na zcela jiné problémy a otázky. Byla totiž míněna jako hledání organizačního modelu, který by umožňoval strukturální podporu autentického nebo angažovaného učení a vyučování. Takové způsoby práce – v tzv. magnetických školách (magnet schools) – které by byly určeny především pro žáky z chudých rodin z jiného etnického prostředí – musí být ale velmi přesně dokumentovány. To bylo právě záměrem vědecké práce McNeilla. Ale během zkoumání byly dotyčné školy vystaveny změně obsahu, které vyplývaly z režimu centralizovaného systému předepsaných pravidel a standardizovaných procedur kontroly kvality (monitoring). A tak rychle před očima všech mizely specifické kvality těchto mnohonárodnostních škol. Odhalení, která právě McNeillova vědecká práce přinesla, aniž byla předem hledána, byla o to překvapivější. McNeill (2001: s. 271) o tom píše v závěru své knihy toto: *Nikdy předtím jsme neměli jako lidé obecně a ani jako školní pedagogové a psychologové tak rozsáhlé znalosti a informace o vývoji dítěte jako máme dnes. Nikdy předtím jsme tolik nevěděli o poznávacích procesech a o fungování mozku, stejně jako o působení a vlivu pozornosti, péče, prostředí a společnosti jako dnes na růst a rozvoj dětí. Ještě nikdy v minulosti jsme neměli takové znalosti a nemohli je tolik využívat: naše bohaté kulturní dědictví v umění, literatuře, dějinách, přírodních vědách, matematice, astronomii, sportu, jazycích, zeměpisu a anatomii. Nikdy předtím jsme našim dětem nemohli nabídnout tolik, co dnes. Jak je potom možné, že jsou rozvíjeny a podporovány systémy, které výrazně omezují učební a poznávací možnosti dětem, podporují staré formy diskriminace a utlumování a rozvíjejí nové formy, jež omezují přístup ke vzdělání a kultuře určitým skupinám obyvatelstva? Jak můžeme takové struktury považovat za „normální“, když minimalizují vliv rodičů a ostatní společnosti na školu a její učební cíle? Právě naopak, musíme podporovat ty způsoby učení a takové učitele a školy, které dokáží dětem zprostředkovávat to nejlepší, co víme a umíme. Musíme utvářet kurikula a učební prostředí, které akceptují a uzná-*

vají všechny schopnosti a dovednosti dětí, mezi které patří také uznání různosti a odlišnosti jednotlivých dětí, co je výrazem síly našeho pedagogického snažení. Musíme uskutečňovat vědecké expertízy, které, slovy M. Greena, podpoří mnohotvarové a mnohaperspektivní čtení světa a které trvale umožní nejen interpretaci vyučovacích procesů, ale v konečném důsledku budou schopné nést také náklady.

Plánování vyučování ve smyslu jeho zvládnutí

Elliot W. Eisner, profesor pedagogiky na Stanfordské univerzitě v USA, se ve své práci snažil jít ještě dál a hledal základní postoje tvořící podstatu celého systému vzdělávacích standardů a jejich centralizované kontroly.[11] Za základní postoje přitom považoval vůli k racionálnímu ovládnutí našeho okolí včetně vývoje člověka a procesů mezi lidmi. Podle něj panuje pojetí, že „znát" znamená tolik co „umět předvídat", a „předvídat" stejně jako „umět zvládnout". Podle toho je tedy možné umět předvídat úspěšnost (lépe možná výtěžnost) vyučovacích procesů, stejně jako směrovat, aby vyučování přispívalo rozvoji dětí. Co možná nejpřesněji lze pak formulovat zohledňované výsledky, a sice tak dalece, jak je možné formulovat v měřitelné podobě – krátko- nebo dlouhodobě – (v rámci vyučovací hodiny, učebních let, jednotlivých roků, povinné délky vyučování apod.), lze zjistit počáteční stav a situaci dětí a tu pak kontrolovat, zda byly předvídané výsledky dosaženy. Rovněž je možné zjistit, čím přispělo vyučování celkovému rozvoji dítěte, např. přidanou nebo doplněnou hodnotou. „Kvalita" musí být pro větší objektivitu vyjádřitelná kvantitativně, protože měření znamená vědění. Snaha směřuje směrem k co možná nejuniverzálněji platnému a „vědecky podloženému souboru vyučovacích metod" (what works), které by garantovaly předvídané výsledky a které by musely být minimálně v povinném školství všeobecně uplatnitelné. Jako „vědecky" legitimní platí v tomto pojetí jen a jen tzv. tvrdá empiricko-analytická data a metody, při kterých jsou brány vážně jen měřitelné efekty. Takové velmi jednostranné, ale technokraticky lákavé pojetí lze potom uzavřít do kruhu následujícím způsobem:

a) Východiskem je, že vědění, a umění předvídání znamená ovládnutí; v rámci takových procesů lze získávat jisté poznatky jen kvantifikovatelným měřením. Na základě těchto dvou aspektů je pak co možná nejpřesněji formulován předpokládaný „zisk".

b) Pomocí metody, která garantuje předvídané výsledky co možná nejpřesněji, je potom směřováno k daným cílům.

c) Získaný „zisk" (výtěžnost) je měřen, čemuž se říká diagnóza.

[11] Blíže viz (Eisner, 2001: s. 368)

d) Pro děti, které prokázaly nedostatečné výsledky, je možné celou metodiku přitvrdit a přiostřit.

Taková filozofie ovládání vede potom v oblasti vyučovacích procesů velmi snadno k celé řadě zjednodušení a redukcí:

- Cíle, které je obtížné měřit nebo vykazují kvantitativní neměřitelnost, nejsou zohledňovány a není jim věnována žádná pozornost. Dělá se to tak, že se velmi brzy zjistí, že není dostatek peněz pro rozvoj komplexních dovedností vhodných evaluačních nástrojů nebo se dotyčné cíle prohlásí za příliš vágní.
- Vyučovací metody se redukují jen na ty, které slouží k dosahování jednoduše měřitelných cílů.
- Preferují se „přehledné“, „zvládnutelné“ moduly s krátkými učebními cykly na úkor dlouhodobě se uplatňujících procesů (působících také na dlouhodobou paměť), kterým je vytýkáno, že nejsou per definitionem modularizovatelné.

John Elliott (1998: celá V. kapitola) analyzoval diskusi, která je vedena okolo pojmu „efektivní škola“, včetně prováděných výzkumů na toto téma. Výsledky jeho práce potvrzují a ještě posilují výsledky Eisnerovy. Přívrženci „efektivní školy“ spoléhají při kritických otázkách a diskusích rádi na „výzkum“, který by připravil pro ně oprávněné odpovědi (what works). Zřídka je zmiňováno, že tato data se objevují v rámci zcela určitého druhu didaktického myšlení o vyučování a které Elliott označil jako „sociální inženýrství“ – vývoj kontrolního systému pomocí psychologických technik, tlaku, odměn a trestů.

Tento systém vlastně vykazuje stejnou strukturu jako ruské matrjošky: subsystém, který je kontrolovaný vyšším subsystémem a zároveň ale sám vykonává kontrolu subsystému uvnitř sebe sama. „Kvalita“ je potom primárně definovaná jako technická eficience; ale zatím se skrývá vize vyučování, ve kterém je vůdčím motivem důležitá role sociální kontroly a přizpůsobení se. Byrokratická orientace úřadů a školských institucí nachází v takovém systému ideální soubor nástrojů k zavádění směrnic a jejich následné kontrole – vše samozřejmě v dobré víře co nejlépe pomoci rozvoji vzdělávání a školství. Pro takový typ školních projektů je potom značně jednoduché získat i peníze. Učitelé jsou v systému těchto souvislostí chápáni především jako technici, kteří vykonávají postupy co možná nejpřesněji podle předem stanovených návodů, a nikoliv jako „reflektující praktici“, či, jak uvádí Eisner (2001: s. 371) „umělci“ ve smyslu „teaching is an art“. Elliott dále poukazuje na to, že pojmy „efektivní škola“ a „dobrá škola“ nejsou per definitionem identické. Rozdílnost vyplývá z toho, co vlastně pod pojmem „dobrá škola“ rozumíme. Hnutí ve školství zaměřené na efektivitu vyplývá z vědeckého pojetí (research-based), ale

v první řadě reprezentuje určitý způsob vidění školy. V jiném kontextu školy, který vyplývá z jiné vize školy, jsou prostřednictvím zkoumání odhalovány další „efekty“ vyučování, které se v rámci pojmu „efektivní školy“ nevyskytují vůbec nebo jen okrajově.[12]

Jedním z vedlejších efektů výše popsaného trendu je podle Eisnera (2001: s. 375) také fenomén posilování vypočítavosti žáků. Žáci neustále slyší signály o tom, že dosažení vysoké úspěšnosti v testování je pro ně tím nejdůležitějším ve škole. Dokáží potom nalézt nejrůznější triky a cestičky k tomu, aby v testování docílili co možná nejlepších výsledků s co možná nejmenší námahou. Obsah, pro jehož zajímavost se lze do něho ponořit a naučit se v něm orientovat se, ztrácí u žáků na významu, zatímco test a jeho výsledky ve významu značně stoupají. „Balast“ musí být hozen přes palubu a výsledkem potom je snižování starostlivosti o části obsahu, které jsou důležité pro rozvoj myšlení dítěte, a tím i omezování výchovných a vzdělávacích cílů. Podivuhodné přitom je, že se zdá, jakoby se vyučování stále méně orientovalo na potřeby normálního běžného života a stále více na bezproblémový chod školy ve smyslu toho, že dobré testové výsledky jsou předpokladem dosažení lepších testových výsledků v pozdější době. Atmosféra školy se potom stále více řídí pravidly vnější motivace žáků. Eisner ale nikde netvrdí, že by uzavřené formy vyučování nebo direktivně předávané instruktáže s měřitelnou zpětnou vazbou byly nějak zavrženíhodné, spíše naopak. Píše o tom, že takové vyučovací formy mohou být vysoce funkční a potřebné i ve fázích tzv. seberegulujícího učení. Na základě vlastních zkušeností z četných škol ale varuje před snahami o neustálé obsahové a didaktické ochuzování učebních procesů. V současné době se didaktici snaží důrazně prosazovat takové formy učení (méně se hovoří o vyučování), které poskytují učícímu se žákovi osobní smysl a mají pro něho význam vzhledem k jeho specifickým rysům osobnosti, a to i ve vztahu k ostatním žákům a dospělým lidem. Kde zůstaly moment překvapení, radost z objevování, síla fantazie, dovednosti improvizace? To již vyučování neznamená učení se vzájemným kontaktům a komunikaci? Nerozbíjíme silným zdůrazňováním cíle „chtít zvládnout za každou cenu“ ty nejdůležitější a zásadní dimenze školního vyučování?

E. W. Eisner potom navrhuje, zda bychom si dovedli představit, že by bylo na příštích pět let moratorium na celoplošně prováděného standardizovaného testování. Pak by nebylo ale možné se při hodnocení jednotlivých škol a žáků možné spolehnout se jednoduše na výsledky testování. Na základě čeho by potom rodiče nebo inspekce školy hodnotila? Eisner (1998: s. 169–170) pro takovou situaci nabízí řadu kvalitativních indikátorů, z nichž uvádíme ty nejdůležitější a nejzásadnější:

– Různost druhů problémů a aktivit, kterým se žáci věnují. Do jaké míry podněcují „údiv“, „překvapení“ a „radost z poznání“? Umí žáci klást vlastní

[12]Blíže viz (Kleinespel, 1998). Podobná vlna kritického rozlišování obou pojmů probíhala v USA počátkem 70. let: např. (Karrier, 1972: s. 159–180) nebo (Patton, 1975).

(nikoliv nadiktované dospělými) otázky k tomu, co právě zkoumají? Umění ptát se, je důležitější dovedností než se naučit hotové odpovědi nebo znát odpovědi na každou otázku.

- Jsou žáci konfrontováni s různými možnostmi řešení a dokáží se orientovat, aniž by propadali omylům či rezignaci?
- Jsou žáci a škola hodnoceny na základě různých (pestrých) hledisek a kritérií?
- Přijdou žáci do styku při poznávání skutečnosti, že se věci a jevy navzájem nevylučují, když jsou poznávány izolovaně, ale patří k sobě, navzájem se doplňují a tvoří celek světa (prostředí a společnost)?
- Jsou vytvářeny vazby mezi tím, co se ve škole učí a tím, co existuje v okolním světě mimo školu? Dokáží žáci používat to, co se ve škole naučili i v mimoškolním světě? Skutečně nejdůležitější proměnné vyučovacího procesu nenalezneme ve třídách nebo školách, ale mimo školu. Tam ale dosavadní evaluační nástroje sotva dosahují. Pravým smyslem a „ziskem“ vyučování je nalezení prostorů (zaměstnání, pracovní poměr), kde by žáci mohli dělat to, co oni sami dělat chtějí.

Lze tedy jen doufat, že pedagogičtí a didaktičtí badatelé nebudou nadále podporovat svým zkoumáním úzký prostor vznikající standardizovaným testováním a obhajovat jej tím, že jejich odborný prostor je omezen právě jen na obhajobu a nacházení argumentů ve prospěch takových procesů, a že se objeví politici, kteří budou mít zájem na tom, aby se ve školách učilo to, o co v životě potom skutečně jde, a budou s pomocí vědy prosazovat zlepšování vyučovacích procesů ve prospěch budoucího života dětí a tím i nás, dospělých.

Magická přitažlivost čísel

Promýšlíme-li dále a hlouběji výše uvedené skutečnosti, nemůžeme se vyhnout otázce, proč lidé kladou takový význam na měření a na čísla. Obecně řečeno, lidstvo počítá, měří věci a jevy ve značné míře. Pro naši vyspělou společnost se stalo měření velmi rozšířeným fenoménem, stačí se jen podívat např. na různé formy a druhy označování zboží na obalech. To je jistě funkční, protože to umožňuje kontrolovatelnost věcí. Jistě není přehnané tvrzení, že se naše společnost pohybuje na základě čísel. Lidé jsou potom vedeni k tomu, aby v pravdivost čísel důvěřovali. Ovšem vyjadřovat kvalitu věcí nebo jevů v číslech je již problematické, protože ne všechno lze takto vyjádřit, aby to bylo smysluplné a účelné. Selma Wassermann (2001: s. 28–40), profesorka kanadské „Simon Fraser University“ v Britské Kolumbii si také položila otázku, proč lidé kladou takový význam číslům a číselnému vyjádření.

Důvody jsou mnohem hlubší, než je postulát „intersubjektivní kontrolovatelnosti“, jak se s tím denně setkáváme např. v oblasti vědy, a také hlubší, než by tomu odpovídala jejich praktická funkce ve společnosti. Hodnotové ohodnocení čísel má především existenciální dimenzi: V rychle se měnícím světě se lidé cítí stále více nejistí, zažívají stres, musí se stále více rozhodovat na základě nedostatečných jistot, přičemž důsledky rozhodnutí nejsou také zcela očividné. Není přitom vůbec zásadní, zda jsou čísla nebo měření precizní, prostě se cítíme klidnější a jistější, pokud můžeme věřit, že existuje něco, co vykazuje pevnou a jasnou hodnotu nebo stav, něco, s čím můžeme pevně počítat, co můžeme jasně vymezit, když již „uháníme“ v životě stále větší rychlostí.

Myslím, že to mohou být i důvody pro vysvětlení jevu, proč se učitelé a rodiče stále tak rádi upínají při hodnocení dětí na jasná a jednoduchá čísla. I testový výsledek jasně číselně vyjádřený (třeba v bodech nebo procentech), je pro většinu lidí důvěryhodným vyjádřením určité jistoty, která má pevnou a zdánlivě srozumitelnou hodnotu.

S. Wassermann (2001: s. 38) se také zaštiťuje výrokem přírodovědce Richarda Feynmana o nesmyslnosti slepé víry v čísla a sama varuje před tím v oblasti vzdělávání a školství: *Myslím, že je velmi důležité a potřebné, aby se učitelé ve své praxi soustřeďovali více na jasná data vlastních (informativních) hodnotících pozorování. Ano, je pravdou, že se mohou mýlit, ano je pravdou, že jsou subjektivní, ano je pravdou, že takové soudy učitelů o výkonnosti dětí mohou být zavádějící nebo předpojaté. Ale zavádět místo nich mnohem méně použitelnou alternativu standardizovaných testů, to by bylo smysluplnější, věnovat naši energii na zlepšení podmínek a možností právě té učitelovy evaluace, tím, že jim umožníme její zpraktičtění ve smyslu její podpůrnosti nejen pro rodiče a žáky, ale celý učební proces.*

Myslím, že jednou z cest by mohla být formulace zcela konkrétních „standardů“ pro učení a rozvoj žáků, které by učitelé využívali ve svých třídách nebo žákovských skupinách jako stavebních kamenů pro učební procesy. Takové standardy by se týkaly kvality myšlení, zprostředkovávání myšlenek, dovedností zkoumat a bádat, mezilidských vztahů, rozvoje zdravého sebevědomí, rozvoje žádoucí hodnotové orientace a třeba i dovedností sebehodnocení a z toho vyplývajících postojů. Potom by byla sebeevaluace žáků chápána více ve smyslu autentického hodnocení, podpořeného prezentací vlastního portfólia.

Mnoho dětí je stále podceňováno

Standardizované testy jsou silně závislé na myšlenkovém a pracovním způsobu klasického obsahu pojmu inteligence. Takový „psychometrický“ model pracuje s následujícími předpoklady:

a) U každého člověka existuje nějaká spojující a sdělitelná celostnost dovednosti myšlení, kterou nazýváme „inteligencí“.

b) Lidé disponují vyšší nebo nižší mírou inteligence, která může být měřitelná a vyjádřitelná jednoduchým číslem, tzv. IQ.

c) Inteligenční kvocient je značně stabilní a určuje horní hranici intelektového vývoje daného člověka.

Tento psychometrický model je stále více napadán a kritizován.[13] Stále více vědců se přiklání k poznání, že inteligence je svazek mnoha utvářených možností, které se potenciálně vyskytují u všech lidí, ale u rozdílných lidí jsou prezentovány v rozdílné míře, respektive jsou u různých lidí rozvíjeny s různým zdůrazňováním. Howard Gardner hovoří o „mnohočetných projevech inteligence“ a devět z nich již popsal. Jedna z nich, tedy tzv. emoční inteligence (EQ), se stala velmi výrazným argumentem nového paradigmatu výchovy a vzdělávání. Tím se ale také stal původní předpoklad stabilnosti předpovězení hranice vzdělavatelnosti mnohem více zpochybnitelným.[14] Existují ale i jiná pojetí inteligence, např. profesoři psychologie na yaleské univerzitě (Robert Sternberg) nebo harvardské univerzitě (David Perkins) rozpracovali na základě vlastních výzkumů selektivních procesů teorii tzv. dekonstrukce konvenčního IQ. Hovoří o třech typech inteligence, které jsou důležité pro vedení dobrého života: analytické, kreativní a praktické inteligenci. Podle výše uvedených autorů mají všichni lidé možnost tyto inteligence rozvíjet po celý život a je nutné, aby se to naučili již ve škole. IQ podle nich prezentuje jen první typ inteligence, a proto vykazuje jen velmi omezenou možnost předpovídání školní a pracovní úspěšnosti (Sternberg, 1998). D. Perkins (1995) navíc uvádí, že inteligence může být učena a naučena – *the good use of the mind; the artful deployment of our faculties of thinking.*

Současná zahraniční praxe celoplošného testování působí na žáky často špatně, zejména na ty se slabým sociálně ekonomickým základem. V rámci jednoho projektu na cambridgské univerzitě (Velká Británie) bylo zkoumáno, zda nové hypotézy o inteligenci a kognitivním vývoji mohou přinést jinak uspořádaná data. Základem argumentace tohoto projektu byla situace v anglickém školství druhé poloviny 90. let (Hart, 1998: s. 153–168): V Anglii bylo zkoušeno udělat v rámci testování pro národní kurikulum a následné publikace výsledků v časopisech a novinách seriózní srovnání škol, které vykazují mnoho „zaostalých žáků“. Takové školy se vzhledem ke svým podmínkám vždy umisťovaly v tabulkách dole. Zodpovědné korigování

[13] Např. (Gipps, 1998; Gould, 1983). Česky vyšlo pod názvem „Jak neměřit člověka“ v Praze, nakl. Lidových novin 1997.

[14] Např. Feuerstein (1998) uvádí ve své práci jako příklady řadu překvapivých výsledků, které dosáhly děti s downovým syndromem.

surových testových výsledků při zohlednění sociálně ekonomických faktorů se ukázalo být nemožným úkolem.[15] Aby bylo možné činit smysluplná srovnávání, byly na počátku školní výuky žáků prvního a druhého stupně testovány jejich kognitivní dovednosti. Tento test se stal základem pro předpovídání kognitivních možností žáka ve srovnání s předpokládanou úrovní předchozího vzdělávacího stupně, násobenou počtem let stávajícího vzdělávacího stupně. K tomu byla zapracována ještě míra očekávaného přirozeného vývoje dítěte a školou dodané „přidané hodnoty". Autoři projektu vycházeli z předpokladu, že lze předpovědět „konečnou úroveň". Na základě testových výsledků byli žáci, zejména na druhém stupni, rozděleni do skupin podle schopností (ability), vždy s doplňující podporou. Děti tak byly fakticky rozděleny podle předem určené úrovně. Očekávání učitelů vyplývala z možností projevů dětí a byla buď vědomá nebo častěji nevědomá. Pro část dětí, u kterých bylo předpokládáno, že by se nacházely pod předem stanovenou úrovní, to mohlo být příznivé, protože mohly být poměrně dostatečně podporovány. Ale ukazovalo se stále více, že převážná část dětí byla v takové situaci podporována příliš málo a přitom dosáhla mnohem více. Žáci tak byli fakticky znevýhodněni, a zároveň byli znevýhodňováni i učitelé v praxi, kteří dělali všechno možné, aby jim mohli zlepšit učební výsledky. Biolog S. J. Gould (1983: s. 54 (v českém překladu)) vyjádřil podstatu hlavního smyslu projektu lapidárně: *Žijeme jen jednou. Málokterá tragédie může být větší než utlačovaný život, málokterá nespravedlnost hlubší než upření možnosti plně žít nebo dokonce jen doufat. A to vše kvůli vnějším omezením mylně považovaným za vnitřní.* Na základě mnohotvárného a nedeterministického (tzv. transformativního) pojetí inteligence (lépe: potenciálu k učení) je zcela jinak promýšleno a zpracováváno i pojetí školního vyučování, které by mělo být oprávněnější k dětem a jejich učebnímu potenciálu. Tím je, myslím, také zdůrazněno, že tradiční pojetí tzv. transmisivní didaktiky musí být podrobeno důkladné analýze ve smyslu její účelnosti vzhledem k didaktice konstruktivní, která zřejmě lépe odpovídá potřebám nového paradigmatu výchovy a vzdělávání. Jedná se také o nezanedbatelný argument proti udržování nebo dokonce zavádění celoplošného testování v době, kdy jejich podstata se ukázala být zcela obsoletní.

Na cestě k síťově provázané společnosti (network-society)

Ve většině rozvinutých zemích, stejně jako u nás, existuje značně silné a vlivné lobby pro zavádění celoplošně platných učebních standardů spojených s technokraticky organizovaným kontrolním systémem. Ale vzrůstá počet lidí, kteří považují takový projev vzdělávací politiky za bolestné selhání současné politické reprezentace, protože základem takové politiky jsou ideje minulého a snad již překonaného systému

[15] O tom blíže viz (Standaert, 2001).

industriální a byrokratické společnosti.[16] Základní charakteristikou takové společnosti by mohl být běžící pás pro masovou výrobu s jednotnou kontrolou kvality, dalekosáhle prováděnou racionalizací ve smyslu standardizace a rozdělováním úkolů, jak ji popisuje např. E. W. Eisner (1991) ve své práci. Podobné vlastnosti bychom mohli hledat i ve školství, když se několik „expertů“ snažilo prokázat, že školy jako instituce by mohly být také organizované podle průmyslového modelu tak, aby „produkovaly“ žáky podle předem daných „užitečných“ a „účelných“ znaků. Stačí si jen uvědomit skutečnou podstatu plánování vyučování, systém postupných ročníků s předem přidělenou vyučovací látkou, řešení problémů „pomalých“ žáků nebo systém kontroly inspekční činnosti. Mnoho škol se snažilo a někde se stále musí snažit takové meze a pravidla prolomit, protože se jim zdála být společnost, stejně jako nové generace dětí, jiná. Proto se nám jeví nové paradigma výchovy a vzdělávání, podložené výsledky vědeckých výzkumů a bádání v oblasti mozku, myšlení a chování lidí, jako jeden z pilířů nové organizace postindustriální společnosti, charakterizované dynamikou, pluralitním rozvojem a alternativností forem. Stále více se přikláníme k označení takové společnosti za společnost sítí (Network-Society). Hierarchické struktury jsou stále více z hlediska vlastní efektivity zpochybňovány a společnost může být stále méně efektivněji řízena „shora“ a „centrálně“. Stále ale bohužel nacházíme mezi představiteli současné řídící sféry jedince, kteří se snaží posilovat přežilé a hlavně již neefektivní způsoby řešení složitých problémů jednoduchým a hlavně neprovázaným a izolovaným centralizováním, v domnění, že prosté přeskupení může vést ke zvýšení dynamiky řešeného jevu. Tito lidé, pokud jim jde o věc, nic nepochopili nebo jim jde o zcela jiné věci. V každém případě se ale stávají brzdou dynamického vývoje společnosti. Nic nemůže zastavit myšlenku, když přišel čas její realizace.

Na základě poznání výše popisovaných trendů a studia dosavadní praxe ve vybraných zemích lze konstatovat, že platí rovnice: Čím dále jsme vzdáleni od školy a čím výše se nacházíme v dosavadní řídící hierarchii, tím více nadšení pro centralizované testování projevujeme. A naopak: Čím více víme o procesech poznávání a učení, tedy čím blíže jsme výchovné a vzdělávací praxi, tím kritičtější a složitější jsou naše úvahy o centralizovaném testování.

Učební procesy ve společnosti sítí jsou mnohem méně lineární a mnohem více důrazu a prostoru je poskytováno silám fantazie a kreativity. Perspektiva vize takové společnosti nám může pomoci, charakterizovat dnešní problémy sebevědomě, s humorem a fantazií a kreativně vystupovat proti návrhům falešných řešení (Taylor, 1998). Proto je nutné vytvářet sítě vzájemně komunikujících a podporujících se podobně myslících lidí, škol a organizací.[17]

[16](Castells, 2002) nebo (Spady, 2001)

[17]V této souvislosti vidím jako velmi důležitou kritickou analýzu pojmu „performativita“, který přinesl francouzský filozof Lyotard, popisující svírající tlak „efektivity“ a „eficience“, demonstrovaný na konkrétních výkonech. Ve jménu sociální spravedlnosti a vědecké pravdy je založena moc, jejíž optimalizace spočívá na výkonnosti (performance)

Co máme tedy dělat?

Mnohokrát citovaný Alfie Kohn uvádí na konci své knihy „The Case Against Standardized Testing“ seznam rad pro aktivity ve prospěch alternativních procesů a proti projevům škodlivosti testování. Poslední a nejrozšířenější radou je výzva: *Bojkotujte testy!* Potom podává přehled aktivit, které byly v USA realizovány zvláště značným přispěním rodičů a učitelů. Je nutné:

- Hledat v okolí školy podporu rodičů, dalších lidí a organizací.
- Zůstat politicky nezávislým, ale zároveň politicky uvědomělým a v žádném případě nepodléhat politické naivitě!!
- Mít vlastní jasnou a relativně jednoduchou a srozumitelnou vizi a motivaci.
- Získat na svoji stranu tisk a další média.

Konkrétně je nutné se snažit umět velmi dobře a jasně rozlišovat různé funkce testů. Testy pro mezinárodní porovnávání nesmí být spojovány se srovnáváním jednotlivých škol. Takové testy se mohou stát podnětem pro zlepšování škol, ale nejsou k tomu přímo orientovány a fungují na jiné rovině. Porovnávání škol má téměř vždy negativní důsledky a na dlouhou dobu může spíše zabránit procesu zlepšování školy a vyučování než ho podporovat. Školy si musí vybojovat přinejmenším dostatečný manévrovací prostor, aby mohly prezentovat hodnocení kvality způsobů vyučování, které odpovídají jejich vizi, koncepci a kritériím „dobré školy“. Tyto pedagogické sebeevaluační procesy musí probíhat permanentně a odpovědnost školy musí být odvozována od úrovně systematické podpory a dokumentování rozvoje jednotlivých dětí týmem učitelů.

Co se tedy musí dělat, je jít proti současnému hlavnímu proudu a klást mu odpor tím, že budeme vůči němu prosazovat jiné formy a způsoby školního vyučování a učení, které slouží, ale neposluhují našim dětem tím, že respektují jejich potřeby vzhledem k jejich různosti a odlišnosti.

Literatura

[1] ALLEN, D. (1998). *Assessing Student Learning. From grading to understanding.* New York, London: Teacher College Press.

[2] BACHMANN, H., et al. (2001). *Turning the Perspective. new Outlooks for Education.* Enschede.

systému, tedy efektivitě. Proto musí být všechno měřeno a vzájemně porovnáváno podle měřítek výkonnosti, aniž by se kdokoliv zeptal, proč se tak vlastně musí dělat?

[3] BOES, A. (2003). Tests – Sinn und Unsinn. *Pädagogische Forum: Unterrichten erziehen*, roč. 33, č. 2.

[4] BOTH, K. (2001). *Jenaplan 21. Schulentwicklung als pädagogisch orientierte Konzeptentwicklung.* Hohengehren: Schneider Verlag.

[5] BOTH, K. (2003). Schulqualität und innere Schulreform. *Die Deutsche Schule*, roč. 95, č. 2.

[6] CARINI, P. F. (2001). *Starting Strong: A different look at children, schols and standards.* New York, London.

[7] CASTELLS, M. (2002). *Die Netzwerkgesellschaft.* Opladen, Leske & Budrich.

[8] DARLING-HAMMOND, L. (1997). *The Right to learn. A Blueprint for Creating Schools that Work.* San Francisco.

[9] DARLING-HAMMOND, L., ANCESS, J. & FALK, B. (1995). *Authentic Assessment in Action.* New York, London.

[10] ELLIOTT, J. (1998). *The Curriclulum Experiment. Meeting the challenge of social change.* Philadelphia, Buckingham.

[11] EISNER, E. W. (2001). What does it mean to say a schol is doing well? *Phi Delta Kappan*, roč. 82, č. 1.

[12] EISNER, E. W. (1998). *The Kind of schools We need.* Portsmouth.

[13] EISNER, E. W. (1991). *The Enlightened Eye.* New York: Macmillan.

[14] FEUERSTEIN, R. (1998). *Don´t Accept me as I know.* Andover, Skyling Pub.

[15] GIPPS, C. V. (1998). *Beyond Testing: Towards a Theory of educational Assessment.* London, Washington.

[16] GOULD, S. J. (1983). *Der falsch vermessen Mensch.* Basel, Boston, Stuttgart.

[17] GOULD, S. J. (1997). *Jak neměřit člověka.* Praha: Lidové noviny.

[18] HARGREAVES, A. (1998). The emotional practice of teaching. *Teaching and Teacher Education*, roč. 14, č. 8.

[19] HART, S. (1998). A Sorrytail: Ability, Pedagogy and Educational Reform. *British Journal of Educational Studies*, roč. 46, č. 2.

[20] HIMLEY, M. & CARINI, P. F. (2000). *From Another Angle. Children's Strengths and School Standards.* New York, London.

[21] KARRIER, C. (1972). Testing for order and Control in Corporate Liberal State. *Educational Theory*, roč. 22.

[22] KLEINESPEL, K. (1998). *Schulpädagogik als Experiment.* Weinheim, Basel.

[23] KOHN, A. (2000). *The Case Against Standardized Test.* New York.

[24] KOHN, A. (2001). Fighting the tests. A practical guide to rescuing our schools. *Phi Delta Kappan*, roč. 82, č. 1.

[25] KOHN, A. (1999). *The School Our Children Deserve.* Boston, New York.

[26] MCNEILL, L. M. (2001). *Contradictions of School reform. Educational Costs of Standardized Testing.* New York.

[27] MEIER, D. (1996). *The Power of Their Ideas. Lessons for America from a Small School in Harlem.* Boston.

[28] MEIER, D., KOZOL, J. & COHEN, J. (vyd.) (2000). *Will Standards Save Public Education?* Boston.

[29] OHANIAN, S. (1999). *One Size Fits Few. The Folly of Educational Standards.* Portsmouth.

[30] OHANIAN, S. (2001). *Caught in the Middle. Nonstandard Kids and a Killing Curriculum.* Portsmouth.

[31] PATTON, M. Q. (1975). *Alternative Evaluation Research Paradigm.* University of North Dakota.

[32] PERKINS, D. (1995). *Outsmarting IQ. The emering science of learnable intelligence.* New York: Free Press.

[33] RÝDL, K. (2000). *Pedagogika rozmanitosti. Perspektivy pedagogického myšlení a zaměřenosti vzdělávací soustavy.* Pardubice, rkp.

[34] RÝDL, K. (1996). *Cesta k autonomní škole.* Praha: NEMES.

[35] RÝDL, K. (2003). *Inovace školských systémů.* Praha: ISV.

[36] SPADY, W. (2001). *Beyond Counterfeid Reforms. Forging an Authentic Future for All Learners.* London, Lanham, Maryland.

[37] STANDAERT, R. (2001). *The temptation of simplification. A plea for integration of internal and external quality control.* Enschede.

[38] STERNBERG, R. S. (1998). *Thinking styles.* New York: Cambridge University Press.

[39] TAYLOR, CH. (1998). *Das Unbehagen an die Moderne.* Frankfurt a/M.: Suhrkamp.

[40] TILLMANN, K. J. (2001). Leistungsvergleichstudien und Qualitätssicherung, oder: Auf dem Weg zu holländischen Verhältnissen? *Neue Sammlung*, roč. 41, č. 3.

[41] TRONAU, G. (2000). Teacher Stress in the Low-Trust Society. *British Journal of Sociology of Education*, roč. 21, č. 3.

[42] VANDERBERGE, R. & HUBERMANN, M. (1999). *Understanding and preventing teacher burnout. A sourcebook of international research and practice.* Cambridge, University Press.

[43] WASSERMANN, S. (2001). Quantum Theory, the Uncertainty Principle and the Alchemy of Standardized Testing. *Phi Delta Kappan*, roč. 82, č. 1.

PRACOVNÍ DÍLNY

Obrazové informace

(doma, v MŠ i v ZŠ)

Michaela Kaslová[1]

Obrázky, zejména na počátku školní matematiky plní řadu rolí. Klademe si otázky, zda obrázek chápe učitel stejně jako žák, v čem jsou shody a v čem rozdíly, které si někteří učitelé neuvědomují a zda lze dítě na práci s obrázkem připravovat, aby mohl plnit požadované role.

Motto:
„Nic nelze zobrazit bez vlastností, ani s vlastnostmi všemi“ (Goodman, 2007: s. 25).

Obraz/obrázek má vždy zástupnou funkci (Kaslová, 2010: s. 16–18 a 128–132). Někdy zastupuje objekty ze světa reality (v smyslu objekty, které vidíme, na které si lze sáhnout). Jindy obrázek/obraz zastupuje myšlenky, pocity, vztahy, atributy samy o sobě, představy vzdálené světu reality. Sem patří abstraktní pojmy. Svět obrazů je tedy světem, kde se stýká svět reality se světem abstrakce. Jak na obrázek (v učebnici matematiky) pohlížet?

Tato skutečnost zobrazení dvou odlišných světů na papír (v učebnici) způsobuje některá nedorozumění mezi světem laiků a matematiků. Přistupme k zobrazení čistě racionálně, pak **obraz reálného objektu** (1:1), například hrnečku (válcový, kameninový, bílý s obloukovým ouškem o průměru 0,7 cm, s červenými puntíky o průměru 1 cm, umístěných ve třech pruzích na principu trojúhelníkové sítě, kde v jednom pruhu je 8 puntíků) umožňuje za podmínky, že je hrneček ze všech stran stejný, jeho výrobu na bázi reprodukce (*re-produco tedy znovu vyrábím*). Tedy takový „realistický“ obraz umožňuje návrat do reality. Je otázka, co brát za „model“; reálný objekt před zobrazením byl modelem pro obraz, na druhé straně obraz je v jistém smyslu za specifických podmínek v roli modelu pro reprodukci objektu. Tato dualita pohledu na slovo model rovněž negativně působí v momentě, kdy obrázek zastupuje **objekt ze světa abstrakce**. Na jiném obrazu vidíme kompozici reálných objektů, která oproti předchozímu navíc vypovídá, v jakém vzájemném

[1]KMDM, PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

postavení se objekty nacházejí (strukturují prostor) a v jakém jsou například vzájemném velikostním poměru. Oba popsané obrázky navíc můžeme nazvat statickými. Obojí obrázky najdeme v různých rolích v učebnicích matematiky zejména na počátku školní docházky (ať již plní roli stimulaci představ, přinášejí data, motivují, vysvětlují, doplňují informace, zdůrazňují klíčové vztahy, strukturu, zjednodušují situaci/informace, ilustrují, napovídají, instruují kontext, ..., popisují, plní roli kontrolní, jsou výzvou pro komparaci a podobně).

Pokud do obrazu zahrnujeme i objekt, který je v reálném světě schopen pohybu (např. osoba, zvíře, dopravní prostředek), nebo naznačuje přítomnosti „síly", která může daný pohyb způsobit (živly jako voda, vítr, oheň a podobně), nebo zobrazíme objekty, které samy o sobě změnu provokují nebo potenciálně zahrnují (sopka, pípa), pak tímto způsobem naznačujeme, že v reálném světě dochází ke změně, z níž je zachycen jeden z momentů v průběhu toku času.[2] Na to, co předcházelo a co bude následovat, můžeme jen usuzovat, není zde bez dalších informací jistota, tedy představujeme si, případně komunikujeme možnosti, dohady, které s větší či menší pravděpodobností mohou korespondovat s realitou či autorovým záměrem.

Dimenze času je vázána zpravidla na prostorové změny (někdy ne např. jen barevnostní transformace). Při dekódování informací z obrazového kódu se často musí uplatnit časoprostorová představivost. U některých statických obrázků pak v procesu pochopení „ukrytých" informací dochází u „čtenáře" k dynamizaci obrázku (na druhém stupni např. u konstrukčních úloh). Pro další potřeby pomiňme rozdíl mezi obrázky v roli diagnostické, rozvíjející a terapeutické. Uvažujme obrázky v učebnicích matematiky a sledujme souvislost mezi uveřejněnými obrázky a učivem. V matematice, zjednodušeně řečeno, se rodí pojmy dvojím způsobem:

a) procesem postupného zobecňování, jehož kořeny jsou ve světě reality,

b) přímo ve světě abstrakcí.

V obou případech se z didaktických i praktických důvodů uchylujeme k užití obrázku v roli modelu či reprezentanta (rozlišuji dle fáze pojmotvorného procesu u pozorovatele, nikoli tvůrce). Předchozí krátké zamyšlení nás vede k dalším otázkám: *Jaká je situace v praxi? Uvědomují si učitelé mateřských škol a prvního stupně ZŠ zástupní roli obrázku, rozdílnost světů, které obrázek zastupuje, nebo nahlížejí v budování matematické gramotnosti na všechny obrázky stejně? Kdy a jak začít s obrázky v matematice? Jakou z mnoha možných rolí budou obrázky hrát?*

Použijeme slova obraz, obrázek v širším smyslu podobně, jako je užívají žáci prvního stupně či mladší, tedy jako na specifickou grafickou informaci. Podívejme se, jak někteří studenti na počátku VŠ studia nahlížejí např. na obrázek trojúhelníku. Z rozhovorů plyne, že je pro ně na stejné úrovni, jako obrázek domečku,

[2]Něco jiného je sekvence obrázků nebo animace, film, ale tyto situace do příspěvku nezahrnujeme.

tedy něco, co reálně existuje, má konkrétní rozměry, je z určitého materiálu (často uchopitelný do ruky) a dokonce s „tím“ lze manipulovat. Takové představy najdeme i u absolventů středních pedagogických škol, podobně jako u žáků 1. stupně ZŠ, kteří nerozlišují mezi obrázkem trojúhelníka, střechy, dílu stavebnice a trojbokého hranolu. Kde se vzalo navíc splynutí světa plošného se světem trojrozměrným? Plyne to pouze z chybné práce s obrázky? Jednou z příčin je nepropojenost vývojové psychologie a matematiky/didaktiky matematiky. Ve vývojové psychologii (nejen v ní, ale i v didaktice výtvarné výchovy pro práci v mateřské škole) se můžeme dočíst, že dítě vnímá obrázek „po svém“, podobně zobrazuje své okolí ne podle toho, jaké je, ale jak samo dítě toto okolí vidí – chápe. Rozdíl mezi dítětem a učitelem netvoří jen vzdělání, zkušenost, rozdíl v rozvinutí schopností, ale i skutečnost, že učitel na odlišnosti zapomíná. *Oko vždy přistupuje k dílu poznamenané, posedlé vlastní minulostí a tím, co mu v době dávné i nedávné podstrčily uši, nos, prsty, srdce a mozek* (Goodman, 2007: s. 24). Co jsme dítěti podstrčili, když vnímalo svět trojrozměrně a v obrázku vidělo i tento svět? Jak jsme hovořili k obrázku, který pro něho zastupoval statický/dynamický svět reality? Ve výpovědích (30 %) dotázaných žáků ZŠ slyšíme, že objekty, které drželi v ruce a posléze namalovali, byly terminologicky označovány dospělými jako objekty světa roviny, objekty ze světa reality označovány termíny spadajícími do světa abstrakce (střecha domečku na obrázku je nazývána trojúhelník, ale přitom si dítě představuje trojrozměrnou červenou střechu i s komínem ve světě reality, učitel mluví o plošném geometrickém útvaru ze světa abstrakce).

Neumíme v dětství „přečíst obrázek“ mezi čtvrtým a sedmým rokem? Není to náhodou proto, že se toto považuje za triviální? Nebo snad proto, že nahlížíme na obrázek očima dospělého a domníváme se, že dítě to vidí také tak? Volíme správné obrázky pro počátek rozvoje této schopnosti? Sledujme obrázky v učebnicích matematiky. Jsou to obrázky vhodné k racionálnímu zpracování tohoto grafického podnětu? Sledování kvality reakcí při „čtení objektivních informací z obrázku“ ukázalo, že jsou obrázky, u kterých žák na počátku školy má méně problémů než u jiných. Dobře žáci reagovali na autory jako např. Zmatlíková, Lada, Švejdová, Born. Pro některé žáky byly vhodné Filcíkovy obrázky, ale pro žáky i s menší poruchou zraku byl týž autor náročnější (jeho obrázky jsou menší – drobnější obrázky než u ostatních).

Zahájení „čtení“ obrázku v učebnici matematiky není většinou ve „čtenářském směru“, ale u mladších dětí od největšího nebo nejnápadnějšího objektu k dalším, nebo odspoda nahoru. U pseudo-dynamických obrázků (naznačují změnu; např. nakročená noha, čoudící výfuk u auta) sledují při „čtení“ **směr** natočení potencionálně pohybujícího se objektu. Ve škole je některými učiteli (menšina) vyžadováno čtení informací zleva doprava i u obrázků, což žáky blokuje. Poeticky laděné obrázky (např. Janeček, Trnka) navozovaly v první řadě emotivní reakce

(podobně jako obrázky zobrazující extrémně zajímavé téma), které do jisté míry bránily strukturovanému a úplnému „čtení“ informací (pochopitelná reakce mozku na emoce, viz funkce amygdaly).

U žáků na konci prvního stupně či na druhém stupni můžeme sledovat ve výpovědi **vynechání některých informací** v obrázku (důležitých pro řešení problému). Příčiny můžeme najít i v tom, že u některých obrázků drobné části nehrají roli, v jiných naopak ano. Učebnice se v práci s obrázky liší a na některé typy žáka nepřipravují.

Jsme překvapeni, když si dokonce některé informace k obrázku žák **přidá** (psychologové říkají, že vidíme víc, než pojme oko; tedy že mozek vjem dopracovává). Jsou žáci připraveni na to, že u obrázku zastupujícím svět reality, je tato aktivita mozku přípustná, avšak u obrázků zastupujících svět abstrakce lze popsat jen to, co je zobrazeno, není-li jiná úmluva (oznámena, prodiskutována a přijata).

K úmluvám patří i to, že někdy zobrazujeme jen **část objektu** (z kteréhokoli ze dvou světů), avšak hovoříme o obrázku, jako by byl objekt zobrazen celý (auto vyjíždí z garáže, vidíme jen přední kapotu; přímka). Ve které etapě žákovy docházky pracujeme cíleně na tom, aby zvažoval, kdy má pracovat s obrázkem tak, jak ho vidí, a kdy uvažovat o existenci úmluvy?

Jsou obrázky **„polotovary“**, do kterých má žák zasahovat již od prvního ročníku. To předpokládá schopnost obrázek zpravidla „přečíst vnitřní řečí“ a porovnat s představou (do které mohla zasáhnout již první fáze procesu řešení problému, vjem a představu porovnat a pak práci graficky dokončit.

Závěr

Smyslem nebylo rozebrat vyčerpávajícím způsobem všechny možné obtíže při práci s obrázky v učebnicích, ale upozornit na některé momenty práce s obrázky (přípravné období; práce s obrázkem průřezově učebnicemi), abychom lépe porozuměli žákovým obtížím a pohlédli jinak na současné učebnice a přípravné materiály. Práce s obrázky na tabletu nebo interaktivní tabule se svým charakterem od práce s obrázky v učebnicích liší podobně jako práce s fotografií.

Literatura

[1] DELVIN, K. (2002). *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán.

[2] GOODMAN, N. (2007). *Jazyky umění.* Praha: Academia.

[3] KASLOVÁ, M. (2011). The role of photography in the teaching of mathematics. In Novotná., J. (Ed.). *Proceedings SEMT´11.* Praha: UK PedF.

[4] KASLOVÁ, M. (2010). *Předmatematické činnosti.* Praha: RABE.

[5] KASLOVÁ, M. (2015). Transformace v předmatematické gramotnosti. In Fuch, E., Lišková, H. & Zelendová, E. (Eds.). *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku* (s. 102–130). Praha: JČMF.

[6] KUŘINA, F., et al. (2009). *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia.

Zápis dítěte do ZŠ – kulatý stůl

Michaela Kaslová[1]

Současná situace v ČR týkající se zápisů dítěte do prvního ročníku je velmi pestrá. Nejedná se pouze o budoucí prvňáčky, i když o těch je to především, jde i o jejich rodiny, i samotné ZŠ, mateřské školy a nepřímo i ČŠI. Zkušenosti z posledních deseti let otvírají řadu otázek dotýkajících se jak formy, tak obsahu rozhovoru s dítětem u zápisu, podobně i podmínek, za kterých se tento rozhovor odehrává. Specifickou problematikou, která je diskutována, je připravenost dítěte na vstup do školní matematiky.

Zachovat rozhovor s dítětem během zápisu do školy?

Určitě ano, a to z mnoha důvodů. Uveďme ty z nich, o kterých se nejvíce diskutovalo. Především je to naše tradice a dítě rozhovor očekává podobně jako celá jeho rodina. Rozhovor u zápisu má do jisté míry iniciační funkci, je hranicí, na které dochází oficiálně poprvé k přerodu předškoláka v prvňáčka nově náležejícího do komunity školáků.

Mezi další efekty rozhovoru u zápisu patří i to, že dítě pro tento akt dlouhodobě cíleně nejen sociálně zraje; rodina i mateřská škola na rozhovor dítě připravují zpravidla v kontextu „těšíme se do školy“ – v duchu „přejeme ti, aby se ti u zápisu a dále i ve škole dařilo“. K dalším efektům patří rovněž to, že dítě ví a připravuje se na to, že se ho ve škole budou na něco ptát, že bude odpovídat, že takové dialogy patří „do školy“ (do procesu učení).

Pro dospělé (na jakékoli straně) je to období (nikoli moment), ve kterém se musí zamyslet, jak na tom dítě je a zda pro školu dozrálo, zda není potřeba odborné pomoci (např. ze strany pedagogicko-psychologické poradny, logopeda či pediatra).

[1]KMDM, PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Zápis do školy může pro některé školy znamenat i nástroj selekce žáků tím, že kladou u zápisu na dítě vysoké nároky, nepřiměřené pro danou věkovou kategorii. Ze zápisu se tak de facto stává konkurz. Tím si škola buduje renomé výjimečnosti a zajišťuje si tak rodiče, kteří jsou ochotni s dětmi nadstandardně pracovat doma. Otázku smysluplnosti takových příprav ponecháme zatím stranou. Je ovšem nutné mít na mysli i jiné důvody, tedy co by se stalo, kdybychom rozhovory u zápisu zcela vynechali (nemluvme o tom, kdy a za jakých okolností se uskuteční). Jsou signály, že by některé školy kvůli snaze o naplnění minimálního početního stavu žáků v budoucím v prvním ročníku (otevření třídy, nezrušení školy) přijímaly i děti nezralé vzhledem k nižšímu věku nebo k pomalejšímu rozvoji (nejen u dětí mladších šesti let).

Může rozhovor s dítětem plnit diagnostickou funkci?

Ano i ne. Zde záleží na řadě okolností. Pokud vyjdeme z běžné praxe, kde u zápisu rodiče vyplňují či předkládají požadované dokumenty (právně administrativní akt), je jisté, že je dítě vystaveno rušnému prostředí. Současně je dítě pod sociálním a emočním tlakem a za takových podmínek se diagnostické aktivity neodehrávají. Nikdo z učitelů ZŠ neprošel za studií kurzem diagnostikování dítěte. Otázky (znalostně dovednostní) jsou převážně izolované, bez kontrolních (k obsahu se vyjádříme níže) a v jediném komunikačním kódu, často bez ohledu na předchozí dětské zkušenosti a zájmy. Za takových podmínek, nelze objektivizovat odpovědi. Postavení učitele a dítěte v místnosti (často i z organizačních důvodů) dává najevo nadřazenost postavení učitele.

Pokud dítě neodpoví dle očekávání, nenásleduje-li (ne nutně ihned) další ověření, pak lze považovat otázku za formální (nejde-li pouze o to, zda dítě otázce rozumí, zda na ni umí reagovat a zvládá výslovnost českých hlásek). Uveďme pro ilustraci případ tří dětí z jedné pražské školy, kde jde o reakce na připravené otázky cílené na matematickou gramotnost.

Případ A: Chlapec, 6 let a čtyři měsíce, poradnou diagnostikován jako nadprůměrný, měl reagovat na dotaz, zda umí nakreslit kruh. Chlapec požádal o pastelku, ale byla mu nabídnuta pouze tužka. Na to reagoval tak, že pokrčil rameny a řekl, že ne. Dále byl tázán na to, do kolika umí počítat s tím, že byl přerušen, když řekl: „Do sta, ale…“. Byl vyzván, aby počítal po jedné do dvaceti. Po zápisu byl experimentátorem dotázán, proč neumí nakreslit kruh a proč se ptal na pastelku. Vysvětlil, že „kruh musí být vybarvený, tužkou to jde blbě“. Proč dodal po slově sto slovo ale? Chtěl vysvětlit, že sice umí „počítat po jedné, taky po deseti, trochu sčítat, ale (neumí) ne pořádně odčítat, vůbec ne násobit, dělit“.

Případ B: Holčička, 6 let a šest měsíců, diagnostikována jako přiměřeně zralá pro školu; na otázku, zda umí nakreslit kruh, ihned odpověděla, že ne. Po zápisu

svoji odpověď zdůvodnila tak, že „to ví i máma, že vždycky kreslím šišku“. Na otázku, do kolika umí počítat, jasně odpověděla, že do sta a bez vyzvání začala odříkávat slova *jedna, dvě,...* Díky odpovědím bez váhání a díky suverenitě projevu byla hodnocena jako lépe připravená na školu než onen nadprůměrný chlapec, pro kterého byla typická krátká prodleva mezi otázkou a odpovědí, který měl u odpovědí sice tendenci používat souvětí (nezaregistrováno, protože byl přerušován), mluva s odbočkami, i s podmínkami či připomínkami (mimo očekávaný rámec). Co jsme se dozvěděli o těchto dvou dětech? Nic nenakreslily na rozdíl od případu C – šestiletého chlapce (hraniční případ pro odklad), který nakreslil ovál a odříkal číslovky od jedné do deseti vzestupně i sestupně, aniž by někdo zkoumal, zda umí „čtyři ukázat“, nebo zda umí vybrat šest věcí, nebo spočítat počet věcí na stole, což chlapec neuměl. Přitom toto dítě odcházelo od zápisu nejspokojenější.

To, zda dítě je/není zralé pro školu, nelze rozhodnout vzhledem k současnému pojetí zápisu do školy a odborné přípravě učitelů. Lze dát doporučení, které však musí posoudit specialisté. To, zda dítě před zápisem do školy (ne)navštěvovalo mateřskou školu, není pro přijetí rozhodující. Ani jednorázové vyšetření u některých jedinců v pedagogicko-psychologické poradně nemusí mít dostatečnou výpovědní hodnotu, u sporných případů je vhodné vyšetření s odstupem zopakovat. U dětí s odkladem je třeba zapojit rodinu do spolupráce. Neschopnost „podat výkon“ při jednorázovém vyšetření může zkreslit skutečný obraz o dítěti tím spíš, že se vyšetření koná v prostředí dítěti neznámému. Některé relativně standardizované otázky jsou pro nadprůměrné děti v oblasti matematické gramotnosti diskutabilní, takže se může stát, že takové dítě, které nechce přijmout relativně jednoduché otázky, vidí problém složitěji, nemusí (podobně jako případ A) reagovat standardně.

Vzhledem k tomu, že většinou děti zčásti slyší závěry rozhovoru (více či méně taktní) sdělované rodičům, tak se dle reakcí učitelky na konci zápisu u dětí měnilo sebehodnocení. Dle výpovědí studentů kombinovaného studia plyne, že jsou v ČR školy, kde dochází i ke „zkoušení“, po kterém jsou děti hodnoceny z očí do očí, kolik toho umí/neumí a po kterém jsou výsledky těchto rozhovorů předávány vně; děti a mateřské školy jsou nejen chváleny, ale hodnocení obsahují i výčitky (někdy z neznalosti problematiky předškolního věku) učitelkám mateřských škol, což blokuje další spolupráci obou institucí.

Je učitel prvního stupně připraven na vedení takového rozhovoru?

Záleží na tom, jaké si učitel/škola klade cíle. Pokud zkoumáme především sociabilitu a komunikaci, pak lze pojetí „tradičních“ zápisů považovat za relativně uspokojující. Je poněkud diskutabilní navrhnout standardy, kterých by dítě ke dni zápisu do školy mělo dosáhnout. Dítě zraje nerovnoměrně jak co do rychlosti, tak co do jednot-

livých oblastí (orientace v prostoru, jemná motorika, slovní zásoba aktivní/pasivní, soustředěnost, ...). Od ledna do září se ještě mnohé u dětí změní, a tak dítě vykazující relativní úspěšnost oproti ostatním se může jevit na počátku školní docházky jako „intelektově průměrné“ a naopak dítě „průměrné“ může za půl roku příjemně překvapit. Z daného pohledu je pak problematické něco mateřské škole vyčítat. Za výchovu dítěte je zodpovědná především rodina. Zkoumáme, kolik předškoláků umí zdravit, poprosit, poděkovat? Kolik jich má zvládnuté základy hygieny (smrkání, WC, zubní hygienu a podobně)? Je součástí denního režimu rodiny pobyt venku (okysličený mozek, pohyb – rozvoj svalů a orgánů) a pestrá strava? Je dítě navyklé ráno snídat, nebo přichází do školského v hypoglykemickém stavu, kdy není mozek připravený na další rozvíjení? Jaký má dítě spánkový režim? Je doma klid, nebo je zde hluk a neustále hru dítěte provází zvuková kulisa? Takové otázky, které se dotýkají rovněž příprav na školu, avšak učitele zpravidla nezajímají, respektive rodiče by to mohli považovat za příliš osobní, i když jde o okruhy pro nastupujícího školáka významné.

Co je smysluplné? Rezervy?

Pokud se chce učitel prvního stupně o budoucích prvňáčcích něco dozvědět, měl by mít možnost je vidět opakovaně v prostředí mateřské školy (jak si hraje, jak komunikuje s ostatními, jak se soustředí na vyprávění příběhu, na práci s tužkou, jak ji drží, jak kooperuje s ostatními, například při hraní divadla, jak si pamatuje básničky, trasu, pokyny k práci, zda respektuje zadané podmínky a podobně) a být na to uvolněn jako na jinou odbornou práci.

U pojetí zápisů jsou rezervy, chybí kooperace specialistů s rodinou a oběma školskými zařízeními. Chybí lepší a nikoli povrchní informovanost a propojení programů a požadavků s podstatou toho, co dítě opravdu potřebuje. To, že umí zapsat písmeno pí, umí odříkat řadu čísel, ještě nezaručuje úspěšnost ve školním procesu, ať již jde do školy jakéhokoli typu. Rozhodně nevhodné je přeskakování vývojových stadií (dítě je v kresbě na přechodu od hlavonožce k figuře, ale doma je cvičeno ve sčítání; nerozlišuje tvarově drobné předměty, ale odříkává pojmenování některých geometrických těles jako krychle). Přesun školské matematiky do prostředí mateřské školy nemusí dítěti vůbec zaručit úspěšnou školní docházku, pokud dítě neprošlo těmi fázemi, na které je jeho vývoj „naprogramován“ jako například základní pracovní návyky, rozvoj slovní zásoby a podobně (vývojová psychologie).

Multikulturní témata ve vyučování matematice

Hana Moraová, Jarmila Novotná[1]

Multikulturní výchova v současné škole není možnost, je to nutnost. Jde o jedno z průřezových témat a není dlouhodobě možné, aby se učitelé matematiky tomuto tématu ve svých hodinách vyhýbali. I proto, že matematika jiných kultur může hodiny velmi obohatit. V dílně bylo ukázáno, jak snadno lze upravit klasické vyučovací obsahy na obsahy multikulturní. Účastníci dílny byli seznámeni s již pilotovanými aktivitami a měli sami možnost navrhnout multikulturní úlohy, které budou moci využít ve vlastní výuce.

Příspěvek vznikl v rámci řešení projektu Socrates Comenius 2.1: M^{3}EaL – Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and 526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP.

Jedním z témat, která jsou aktuální ve všech evropských zemích, je rostoucí kulturní heterogenita společnosti a potřeba, aby škola (tedy učitelé) byli schopni na tuto situaci adekvátně a efektivně reagovat. Jak uvádí Straková (2012), moderní pracovní trh potřebuje pracovníky, kteří disponují rozmanitými kognitivními a afektivními schopnostmi, jež bývají definovány jako dovednosti pro 21. století, které zahrnují: **schopnost komunikovat s lidmi z rozdílných kultur**, využívat rozmanitých technologií, řešit komplexní problémy, kriticky uvažovat, spolupracovat s druhými, adaptovat se na rychle se měnící prostředí a podmínky k plnění úkolů, efektivně zvládat pracovní úkoly, samostatně získávat nové vědomosti a informace.

Není pochyb o tom, že schopnost komunikovat s lidmi z rozdílných kultur souvisí s vnímavostí k odlišným kulturám, otevřeností, tolerancí a pochopením druhých, schopnosti učit se od jiných kultur, naslouchat jejich příslušníkům a vybírat to, čím nás mohou obohatit. Tuto schopnost je třeba kultivovat a rozvíjet již od raného dětství, tedy i v rámci školní výuky. Ne náhodou je multikulturní výchova jedním z průřezových témat, která jsou definována v RVP pro základní vzdělávání (2010): „Multikulturní výchova zprostředkovává poznání vlastního kulturního zakotvení a porozumění odlišným kulturám. Rozvíjí smysl pro spravedlnost, solidaritu a toleranci, vede k chápání a respektování neustále se zvyšující sociokulturní rozmanitosti. U menšinového etnika rozvíjí jeho kulturní specifika a současně poznávání kultury celé společnosti, majoritní většinu seznamuje se základními specifiky ostatních národností žijících ve společném státě, u obou skupin pak pomáhá nacházet

[1]Ústav profesního rozvoje pracovníků ve školství, PedF UK v Praze, hana.moraova@pedf.cuni.cz; KMDM, PedF UK v Praze, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

styčné body pro vzájemné respektování, společné aktivity a spolupráci.“ Průřezové téma by mělo prostupovat výuky v rámci všech předmětů, tedy i výukou matematiky. Učitelé matematiky ale někdy v rozhorech uvádějí, že průřezová témata se týkají ostatních předmětů, nikoli přímo jich (Moraová, 2015a). To může souviset mj. s tím, že si učitelé s multikulturními prvky v hodinách matematiky neví rady. Tomu nasvědčují i závěry zjištění z dotazníkového šetření, které proběhlo v 5 evropských zemích (Moraová, Novotná & Favilli, 2015). Učitelé ze všech zemí nezávisle na procentu menšinových žáků v hodinách uvádějí, že by přivítali, kdyby existovaly vhodné hotové materiály, případně didaktické a metodologické ucelené jednotky.

Proto partneři z jednotlivých institucí v rámci projektu Socrates Comenius 2.1: M^3EaL – Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and 526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP vytvořili sadu vyučovacích jednotek, které byly v jednotlivých zemích pilotovány. Práce na těchto didaktických jednotkách ukázala dvě zajímavé věci: 1. multikulturní matematický obsah může znamenat, že se běžná matematika a obvyklé a standardní pojmy a postupy učí v kulturně nestandardním prostředí, nebo že se při výuce matematiky využívá neobvyklých postupů a algoritmů, které pocházejí z jiných kultur.

Ať už autoři vyučovacích jednotek zvolili první nebo druhý přístup, pilotování v různých zemích, na různých typech škol a s různě starými žáky ukázalo, že učitelé si vytvořené jednotky musejí upravovat pro potřeby své konkrétní třídy. Z tohoto pohledu se potom jeví efektivnější místo vytváření tisíce vyučovacích jednotek připravovat podnětná prostředí (Wittmann, 1995) s multikulturními prvky, která dávají učitelům témata a materiál a naznačují možnosti jejich zpracování.

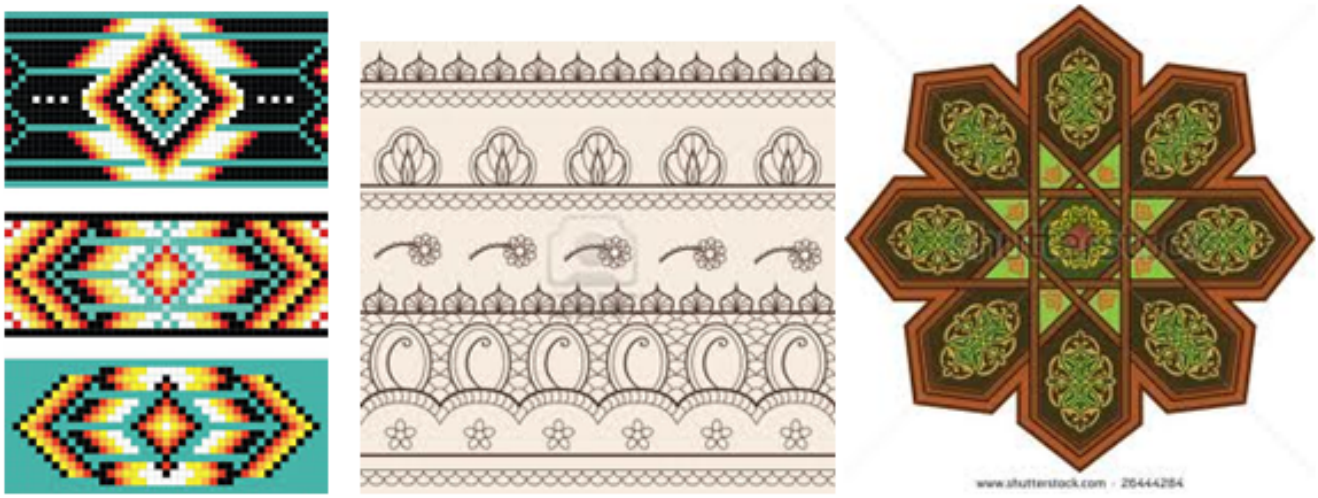
Dílna v rámci Konference Dva dny s didaktikou matematiky 2015 byla vedena tak, aby si učitelé na vlastní kůži vyzkoušeli, jaké jsou možnosti práce ve třech výukových prostředích – Ornamenty, Prstové a čárové násobení a Magické čtverce. Autorky jim ukázaly některé z možností práce v těchto prostředích a zkušenosti z pilotování na pražské základní škole. Poté dali prostor učitelům, aby hledali další úkoly a témata, která by se v těchto prostředích dala vyučovat.

Ornamenty

Ornament je v umění ozdobný detail, který slouží ke zkrášlení nebo členění stavby, předmětů a věcí všeho druhu. Ornamenty mají velké množství různých forem. Aktivita vychází z toho, že ornamenty jsou používány snad ve všech kulturách, i když jsou různorodé, tvořené pomocí různých pravidelností a základních motivů. To umožňuje minoritním žákům vnést do aktivity v hodině matematiky ukázky vlastní kultury. Charakteristickým znakem ornamentu je opakování zdobného prvku podle určitých pravidel. To z nich činí materiál vhodný k využití v řadě matematických témat, od souměrností, pravidelností apod. v geometrii po počítání poměrů barev

v ornamentech v aritmetice nebo hledání funkčních závislostí apod. Současně jsou vhodným materiálem pro zařazování mezipředmětových vztahů, ať už jde o souvislosti s výtvarnou výchovou, s historií, zeměpisem atd.

Více o tomto tématu lze najít v (Novotná & Moraová, 2014).



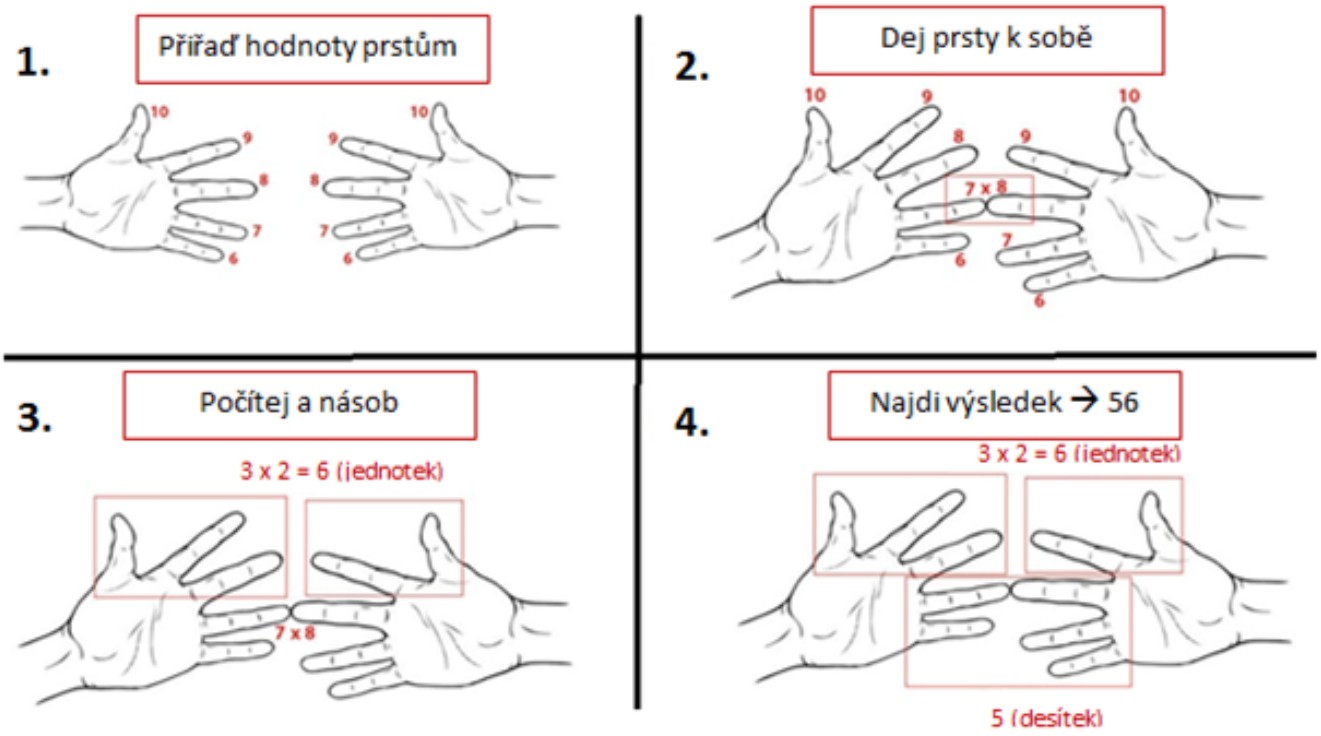
Obr. 1

Prstové a čárové násobení

Prstové a čárové násobení jsou příkladem situace, kdy ve výuce matematiky využíváme postupy, které pocházejí z jiných kultur. Pilotování výukové jednotky partnerů z Univerzity Adger v Norsku ukázalo, že prstové násobení čísel 6 až 10 se dá vhodně využít nejen na 1. stupni základní školy v situaci, kdy žáci již zvládají násobilku čísel 1 až 5, ale ještě se neučili malou násobilku pro čísla 6 až 10, tedy na začátku 3. ročníku, ale také na středoškolské úrovni. Na 1. stupni si žáci vyzkouší, že násobení nemusí nutně znamenat jen memorování, procvičí si sčítání i násobení od 1 do 5, na střední škole mohou odhalovat principy celého systému, hledat a odůvodňovat, proč prstové násobení funguje.

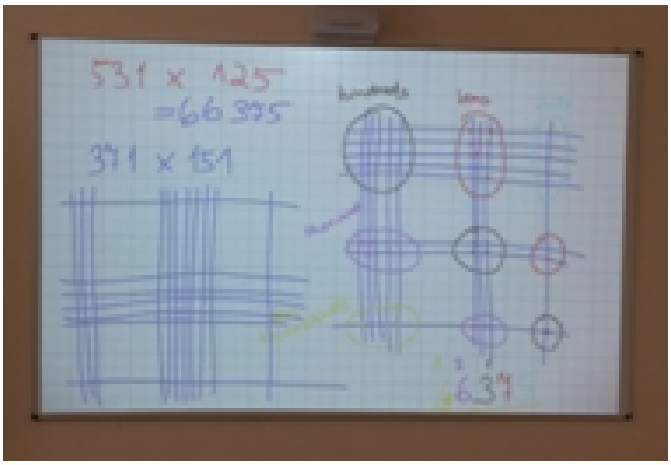
Čárové násobení, které údajně pochází z Číny, je další postup, který může vnést multikulturní prvky do hodin matematiky. Dá se využít ve 3. i 4. ročníku, dříve než se žáci naučí princip násobení čísel pod sebou. Ve 3. ročníku na žáky celý systém působí magicky, zjistí, že zvládnou násobit velká čísla, připadají si jako kouzelníci. Zároveň si ale procvičují princip zápisu čísel v desítkové soustavě i sčítání s přechodem přes desítku. Ve vyšších ročnících se znovu dá hledat princip, proč celý systém funguje, odhalovat zákonitosti.

Více o tomto tématu lze najít v (Moraová, Novotná & Favilli, 2015).



Obr. 2

Obr. 3



Obr. 4

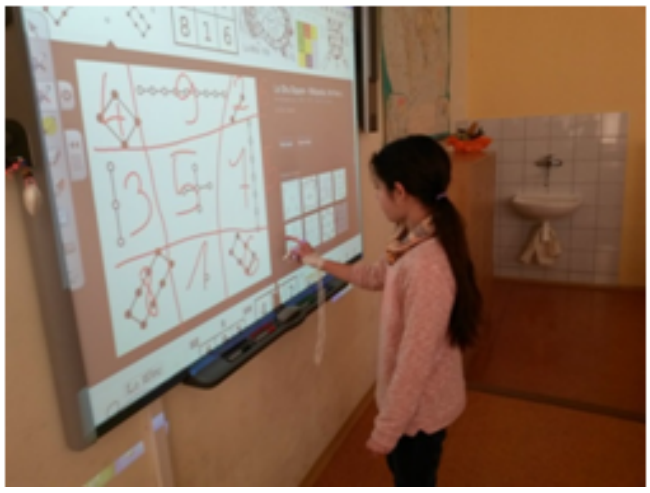
Magické čtverce

Posledním z prostředí, která byla v rámci dílny představena, je prostředí magických čtverců. V tomto případě jde opět o prostředí, které je legendami spojováno s jinými kulturami a jinými historickými epochami a nabízí se k celé řadě matematických aktivit. Základní magický čtverec s čísly 1 až 9 je spojen s legendou želvy Lo-Shu, která měla magický čtverec na krunýři. Teprve když se obyvatelům poda-

řilo rozluštit význam znaků na ulitě, uměli bohu řeky Lo věnovat správný počet obětních darů a zabránit dalším ničivým povodním. Tato legenda je vhodným úvodem do hodiny, ve které budou žáci rozvíjet svoji matematickou kreativitu a hledat magické číslo 15 (musejí odhalit, že se jedná o součet čísel v řádce, sloupci a po diagonále). Od 5. ročníku už může toto prostředí sloužit k zjišťování vlastností početních operací (co se stane, pokud ke každému číslu přičteme stejné číslo, bude čtverec i nadále magický?; co se stane, pokud každé číslo ve čtverci vynásobíme stejným číslem (např. 3), bude čtverec i nadále magický?; co se stane, pokud přehodíme řádky či sloupce, které jsou stejně vzdálené od středu?, proč?). Jinou možností je ukázat dětem algoritmus tvoření magického čtverce lichého řádu (začněte v horní řádce uprostřed, další čísla zapisujte doprava nahoru, pokud už je pole plné, přímo pod). Budou se učit pracovat podle návodu.

Jiná legenda o magickém čtverci je spjata s řádem templářů. Toto výukové prostředí bylo využito v učebnici Matematika s Betkou (Novotná et al., 1996).

Více o tomto tématu lze najít v (Moraová, 2015b).



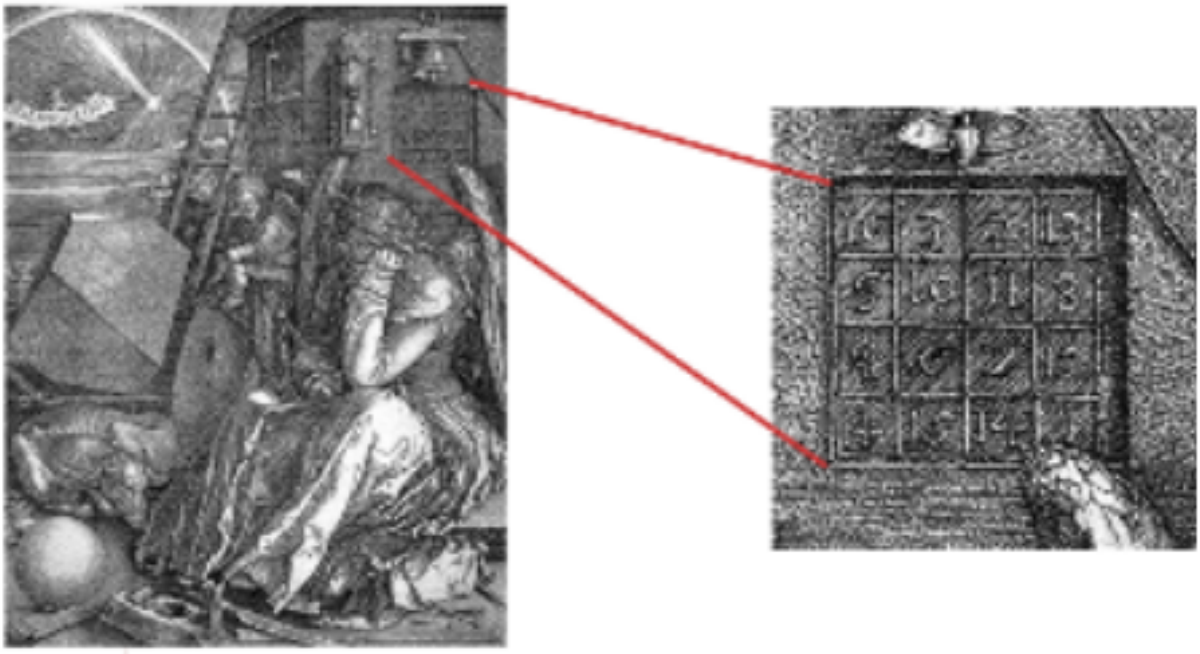
Obr. 5

Obr. 6

A ještě zajímavost: Obraz Melancholie Albrechta Dürera (1471–1528) na obrazu Melancholie (http://bennetti.blog.cz/1102/dureruv-magicky-ctverec) známý hlavně magickým čtvercem v pravém horním rohu.

Závěr

V dílně byly zařazeny ukázky ze tří aktivit založených na využití multikulturních prvků ve výuce (nejen) matematiky. Takových témat je mnoho. Jen s mírnou nadsázkou lze říci, že každé téma školní matematiky lze snadno obohatit o multikulturní prvky. V učebnicích se taková obohacení nenajdou často, ale zdroje informací k nim jsou snadno přístupné v jiných materiálech. Vhodné materiály není obtížné



Obr. 7

najít nebo si vytvořit. Bude však pro učitele snazší, bude-li se s nimi setkávat už v pregraduální přípravě nebo v rámci kurzů dalšího vzdělávání.

Literatura

[1] MORAOVÁ, H. (2015a). Non-mathematical aspects of mathematics textbooks – What are the values and who is responsible for them. In *Proceedings of the 14th Conference on Applied Mathematics Aplimat* (pp. 589–601). Bratislava: Slovak University of Technology.

[2] MORAOVÁ, H. (2015b). Going interactive and multicultural in CLIL. In Krejčí, I., Flégl, M. & Houška, M. (Eds.). *Proceedings of the 12th International Conference Efficiency and Responsibility in Education 2015* (pp. 377–384). Praha: Česká zemědělská univerzita.

[3] MORAOVÁ, H., NOVOTNÁ, J. & FAVILLI, F. (2015). Including multicultural elements in teaching and learning mathematics at elementary level. In Novotná, J. & Moraová, H. (Eds.). *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT'15, Proceedings. Developing mathematical language and reasoning* (pp. 372–374). Praha: UK PedF.

[4] NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V. & SINKOVÁ, M. (1996). *Matematika s Betkou 1 pro 6. ročník základní školy.* Praha: Scientia.

[5] NOVOTNÁ, J. & MORAOVÁ, H. (2014). Multikulturalita v hodinách matematiky. In Fuchs, E. (Ed.). *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let* (s. 202–213). Praha: JČMF.

[6] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (2010). [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani.

[7] STRAKOVÁ, J. (2012). *Kompetence pro 21. století. Mezinárodní trendy v definování a měření vědomostí a dovedností.* [online]. Dostupné z http://www.ucitelske-listy.cz/2012/06/jana-strakova-kompetence-pro-21-stoleti.html.

[8] WITTMANN, E. CH. (1995). Mathematics education as a „Design Science". *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 355–374.

Pojďme si hrát s dřívky, aneb i dřívka patří do matematiky

Ivana Procházková[1]

Věřím, že většina učitelů se snaží svůj předmět žákům přiblížit tak, aby je zaujal. Snaží se přinést do výuky nové prvky, nové metody, aby byl vyučovaný předmět atraktivnější. Aby se žáci něco naučili, ale zároveň pro ně byla činnost zajímavá. Pokud žáka učitel zaujme, má ve většině případů „vyhráno". Žák aktivity plní s nadšením a je pro práci motivovaný.

V dílně byl představen rozdíl mezi tradiční geometrií a manipulativní geometrií. Dále byla účastníkům krátce představena manipulativní prostředí, která se vyskytují v učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ autorů Hejný et al. (2007, 2008, 2009, 2010, 2011). Hlavní cílem dílny bylo seznámit účastníky s prostředím dřívek způsobem, jakým je koncipováno v učebnicích autorů Hejný et al. Účastníci se s prostředím seznámili, řešili v něm různé úlohy, vedli diskusi nad různými strategiemi řešení, hráli hru Sova a Telefon a seznámili se s matematickým potenciálem vybraných úloh.

Dílna byla koncipována tak, aby si účastníci mohli odnést náměty do své praxe.

[1]KMDM, PedF UK v Praze, magicek@email.cz

Tradiční výuka geometrie × manipulativní výuka geometrie

Ve většině tradičně koncipovaných učebnic pro 1. stupeň ZŠ začíná výuka geometrie přes pojmy a definice. Najdeme zde definici trojúhelníku, úsečky, přímky, čtverce, obdélníku. Žákům je předložen například obrázek obdélníku a pod obrázkem je napsáno: „Obdélník má protilehlé strany stejně dlouhé.“ Poučku si žák přečte a má se za to, že dané látce rozumí a pochopil ji. Je zde pouze vizualizace pomocí obrázku, která má žákům pomoci s porozuměním.

Manipulativní geometrie je vedena opačným způsobem. Nejdříve jsou žákům předkládány různé manipulativní úlohy, které vedou žáka k činnosti s daným objektem. Obdélník nejdříve skládá ze dřívek, skládá ho z papíru, modeluje na geoboardu atd. Žák popisuje to, co dělá. Zkušenost s pojmem přichází od činnosti ke slovům. Pomocí popisu toho, co žák právě dělá, si vyjasňuje vlastnosti daného objektu a sám je formuluje. Tříbí si jazyk a formuluje vlastnosti objektu jazykem, který je mu blízký a kterému rozumí.

Jedny z mála učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ, které jsou v českém prostředí dostupné a předkládají žákům výuku geometrie manipulativním způsobem, jsou učebnice autorů Hejný et al. (2007, 2008, 2009, 2010, 2011). Autoři zavedli již od první třídy práci v prostředích, která učí žáka poznávat svět geometrie přes manipulaci. Prostředí bych jednoduše charakterizovala jako úlohy, k jejichž řešení musí řešitel dodržovat stejné zákonitosti (stejná pravidla). Úlohy jsou gradované, ale ne vždy nutně musí být následující úloha gradací úlohy předcházející.

Pokud zvolíme manipulativní činnost v hodinách matematiky, podporujeme u žáka rozvoj jemné motoriky, rozvíjíme tvořivost, kreativitu, rozvíjíme intuici. Žák se nenásilně seznamuje s objekty 2D a 3D geometrie. Žák většinou všechny tyto aktivity chápe v počátku školní docházky jako hru. Tím jsou úlohy pro něj motivační. Všechny úlohy jsou vizualizované, myšlenky navazují na činnost rukou, dítě vidí, co vytvořilo.

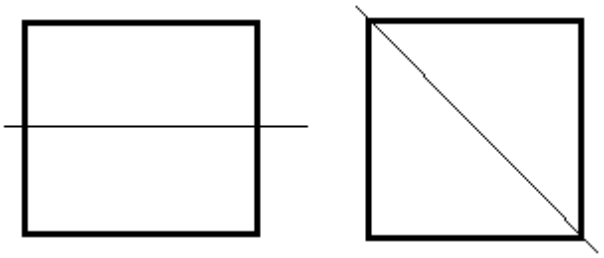
Manipulativní prostředí v učebnicích autorů Hejného et al.[2]

Prostředí překládání papíru

S prostředím překládání papíru se žáci seznamují jako s jedním z prvních prostředí. Manipulativní úkoly jsou typu: přelož papírový čtverec jedním přehybem na polovinu. V úvodu první třídy je v učebnicích nakreslen ilustrativní obrázek, jak mají žáci přehyb udělat (obr. 1), později se podobná úloha žákům předloží bez obrázku.

[2]Všechny úlohy jsou převzaty z učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ autorů Hejný et al., (2007, 2008, 2009, 2010, 2011).

Další typy úloh vedou žáka ke skládání čtverce z obdélníkového papíru, k vytváření různých deček podle návodu, ke skládání „rohů“ či „parníku“, ke skládání různých origamů.



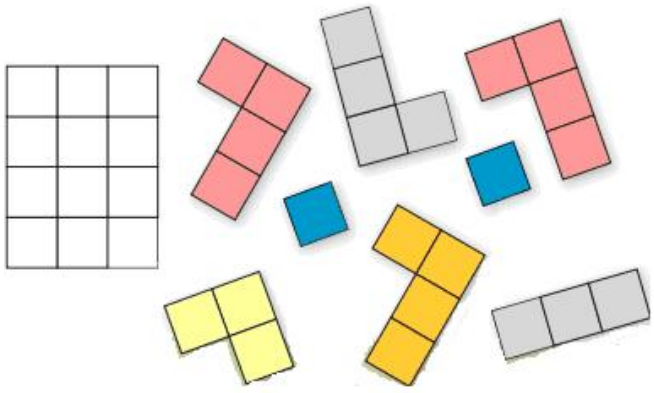
Obr. 1

Prostředí parkety

Prostředí parkety je také zařazováno od prvního ročníku. Žák se průběžně seznamuje s různými typy parket a pokrývá jimi „podlahu“. Ve většině úloh je podlaha dána rozměry např. 2×3 čtverečky či 3×4 čtverečky. Podlaha je na 1. stupni ZŠ vždy zadána jako pravidelný konvexní výřez z čtvercové sítě. Žák má ve většině případů za úkol poskládat daný soubor parket na podlahu tak, aby využil všechny parkety ze zadání a podlahu jimi pokryl a žádné parkety se nepřekrývaly. Žák se zde setkává se zkušeností, že úloha nemusí mít vždy řešení.

V prostředí parkety dochází například k rozvoji pojmu obsah, dále žák získává zkušenosti s otáčením a osovou souměrností. Prostředí parkety navazuje na prostředí čtvercové sítě.

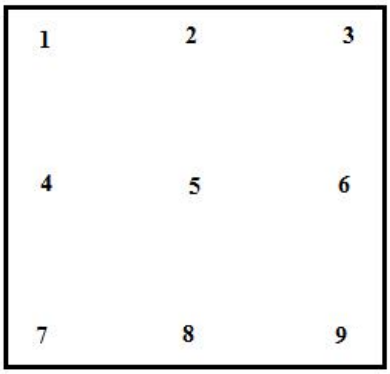
Ukázka úlohy z prostředí parket: Pokryj obdélníkovou podlahu 3×4 parketami (obr. 2). Hledej více řešení.



Obr. 2

Prostředí geoboardu

Geoboard je čtvercová destička s pravidelně rozmístěnými devíti hřebíčky (obr. 3 – na obrázku jsou místo hřebíčků rozmístěna čísla od 1 do 9). Pomocí gumičky žáci na destičce modelují různé konvexní i nekonvexní[3] obrazce. Žák si uvědomí, že trojúhelník nemusí být pouze rovnoramenný, ale že lze vymodelovat různé trojúhelníky.

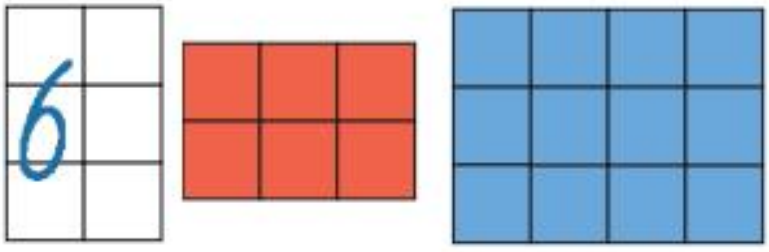


Obr. 3

Prostředí čtverečkovaného papíru

Prostředí čtverečkovaného papíru plynule navazuje na prostředí parkety a geoboardu. Úlohy z tohoto prostředí jsou bohatě gradované a jednotlivé, pečlivě připravené posloupnosti kroků vedou žáka při řešení úloh k poznatkům o geometrických obrazcích či k zjištění obsahu mřížových útvarů. Jedním z takových počátečních úkolů, kdy se buduje pojem obsah, je úloha: Spočítej počet čtverců v obrazci (obr. 4).

Učitel dokonce může vhodně zvolenými úkoly na čtverečkovaném papíru dovést žáka až k matematickému objevu Pythagorovy věty.



Obr. 4

[3]Má zkušenost z výuky ukazuje, že je potřebné dát žákům vždy dostatečný prostor a čas pro seznámení s modelováním obrazců na geoboardu. Žáci nejdříve samovolně tvoří nekonvexní obrazce a snaží se co nejvíce obtočit gumičku kolem hřebíčků. Pokud učitel nevěnuje dostatečný čas tomuto období, nebudou žáci schopni vnímat úlohy, které pro ně bude mít učitel připravené.

Prostředí krychlových staveb

V prostředí krychlových staveb si žák manipulací vytváří především představy z 3D geometrie. Učí se poznávat vlastnosti krychle (počet vrcholů, stěn, hran atd.), seznamuje se různými geometrickými jazyky, s různými zápisy, s plánem stavby. Vytváří „oblečky“ pro krychli (obr. 5) – poznává různé sítě krychle.

Obr. 5

Prostředí dřívka

S prostředím dřívek jsou žáci seznámeni na začátku 1. ročníku souběžně s prostředím překládání papíru. Na prostředí dřívka navazuje prostředí geoboardu, prostředí parket a prostředí čtverečkovaného papíru.

V prostředí dřívek se vyskytuje několik činností:

- *skládej* obrazec – žák skládá obrazec, který vidí v zadání.

  Ilustrace: Žák podle obrazce, který vidí v učebnici, skládá ze čtyř dřívek čtverce. Žák má za úkol složit ze dřívek obrazec, který je na obrázku (obr. 6).

- *přelož* dřívko – žák vidí obrazec jako celek. Dřívko je již v obrazci vloženo, pouze se překládá. S obrazcem se manipuluje.

  Ilustrace: Přelož dvě dřívka tak, aby vznikl čtverec (obr. 7).

- *přilož* dřívko – dřívko není v obrazci obsaženo, musí se přidat nové. S obrazcem se nemanipuluje, k obrazci se přidává:

  – přilož jedno dřívko,
  – přilož dvě dřívka,
  – přilož více dřívek.

  Ilustrace: Přiložením jednoho dřívka utvoř další trojúhelník (obr. 8).

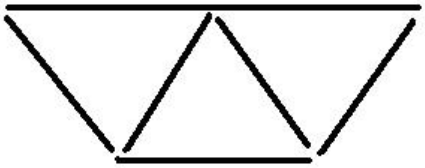
- *odeber* dřívko – žák vidí obrazec jako celek, ale neví, které dřívko má odebrat, aby vznikl požadovaný útvar

  – odeber více dřívek.

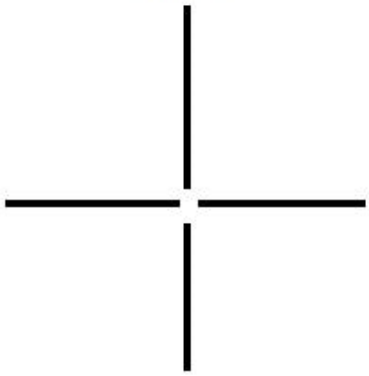
  Ilustrace: Odeber jedno dřívko tak, aby zůstal trojúhelník a dva čtyřúhelníky (obr. 6).

- *sestroj* – žák před sebou na obrázku vidí nápomocný obrazec. Obrazec je sestrojen z jiného počtu dřívek, než který má žák použít.

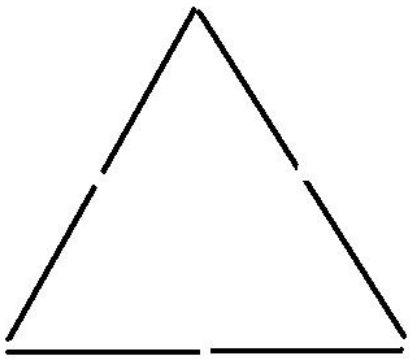
  Ilustrace: Sestroj z 12 dřívek šest trojúhelníků. K úloze je přikreslen pomocný obrázek (obr. 6).



Obr. 6

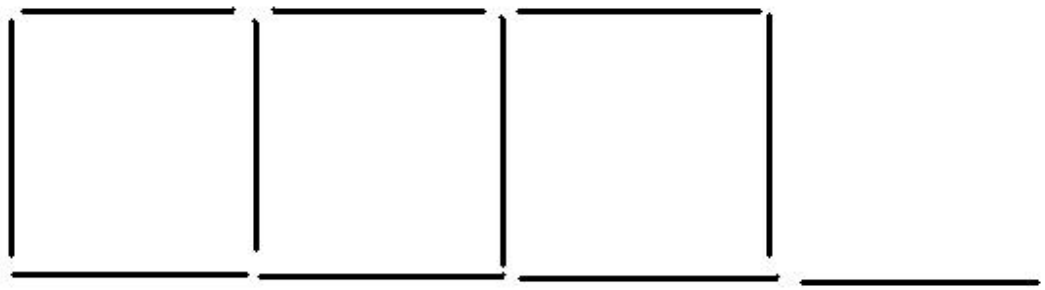


Obr. 7



Obr. 8

Prostředí dřívka rozvíjí porozumění geometrickým obrazcům – žák staví geometrické obrazce ze dřívek, obrazce pojmenovává, seznamuje se s jejich vlastnostmi. Některé dřívkové úlohy rozvíjí porozumění pojmu obvod a obsah. V případě obvodu je dřívko jako neurčitá jednotka – nemusí být jen dřívko, může být i špejle. Pokud žák postaví čtverec a učitel se ho zeptá na otázku: „Kolik si potřeboval dřívek ke stavbě jednoho čtverce?“ A žák odpoví: „Čtyři.“ Vzniká první vazba v žákově mysli mezi počtem dřívek a obvodem. O něco náročnější je úloha, kde se učitel žáka ptá: „Kolik potřebuješ dřívek ke stavbě tří oken, která na sebe navazují?“ (obr. 9) Opět je zde vazba na obvod čtverce. Žák získává zkušenost i s posloupností: nejdříve zjistí, kolik je potřeba dřívek na stavbu jednoho čtverec, poté na stavbu tří po sobě jdoucích čtverců (obr. 9), následně na 10 po sobě jdoucích oken, 15 po sobě jdoucích oken. Počet čtverců/oken se bude zvětšovat a žák může pomocnými otázkami dojít až k zjištění univerzálního vzorce pro tuto posloupnost: $3n + 1$, kdy n je počet oken. Toto zjištění žák neobjeví hned, ale přes sérii úloh, kterou mu učitel zadává. Objevení vzorce může trvat i několik let. Není dobré, aby učitel tento vzorec žákům předložil. Žáci si musí k jeho objevu dojít sami.



Obr. 9

Při modelování čtverce ze čtyř dřívek žák vidí jedno okno. Obsah čtverce o straně jedno dřívko je jedna.

Shrnutí významu prostředí dřívek:

- Žák se seznamuje s rovinnou geometrií manipulativní činností – získává zkušenosti s tvořením rovinných obrazců.
- Žák získává první zkušenost s pohledem na obrazce jako celek a část obrazce jako na část celku.
- Žák získává zkušenost s tvorbou a přeměnou tvarů podle zadaných podmínek.
- Žák získává první zkušenosti s obsahem.
- Žák získává první zkušenosti s obvodem.
- Žák získává první zkušenosti se znázorněním jednoduchých zlomků.
- Žák získává první zkušenosti s posloupností.
- Žák získává zkušenost s prvním vyvozováním obecných zákonitostí a pravidel.
- Žák se seznamuje s evidencí počtu.
- Žák vizuálně upevňuje tvary číslic.
- Žák získává zkušenost se světem 3D geometrie.
- Žák rozvíjí jemnou motoriku.

Závěrem

Zařazování dřívkových úloh do hodin matematiky na 1. stupni ZŠ se mi z mé praxe jeví jako smysluplné a účinné. Účastníci dílny si vyzkoušeli ve skupinách hru SOVA (Jirotková, 2004). Jednotlivé obrazce byly postaveny ze dřívek do hrací galerie. Každý účastník skupiny vymodeloval jeden obrazec, ať již geometrický či negeometrický. Účastnící si ve skupinách zahráli i hru Telefon, kdy jeden z účastníků vymodeloval ze dřívek obrazec a musel druhému hráči popsat obrazec „jako do telefonu“. Účastníci k sobě seděli zády. Tyto hry je možné zařadit i do hodin matematiky. Hráči obou her se shodli, že dřívka barevná jsou sice atraktivní, ale odvádějí pozornost od vlastností obrazců. Hráči se potom soustředí na barevné složení obrazce a nevnímají geometrické vlastnosti, které jsou pro obě hry podstatné. Stejně tak je to i ve výuce. Ve výuce je lépe využít dřívka přírodní – nebarevná.

Publikace byla podpořena projektem SVV 206228/2015 Výzkum výchovy a vzdělávání.

Děkuji za konzultaci k dílně své školitelce Doc. RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. & SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. (2007). *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy.* Vyd. 1. Ilustrace Dana Raunerová. Plzeň: Fraus, 67 s.

[2] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. & MICHNOVÁ, J. (2008). *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy.* Vyd. 1. Ilustrace Dana Raunerová. Plzeň: Fraus, 65 s.

[3] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. & MICHNOVÁ, J. (2009). *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy.* Vyd. 1. Ilustrace Lukáš Urbánek, Dana Raunerová. Plzeň: Fraus, 109 s.

[4] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. & BOMBEROVÁ, E. (2010). *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy.* Vyd. 1. Plzeň: Fraus.

[5] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., BOMBEROVÁ, E. & MICHNOVÁ, J. (2011). *Matematika: učebnice pro 5. ročník základní školy.* Vyd. 1. Plzeň: Fraus, 112 s.

[6] JIROTKOVÁ, D. (2004). Hra SOVA a její využití v přípravě učitelů 1. stupně základní školy. In *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: UK PedF, 247–268.

Badatelské úlohy ve vyučování geometrii

Filip Roubíček[1]

Některá témata školské geometrie je možné a přínosné prezentovat žákům prostřednictvím badatelských úloh, tj. takových úloh, které umožňují uplatnění badatelských postupů, jako jsou experimentování, usuzování, ověřování domněnek, zobecňování, diskutování závěrů apod. Jejich řešení přispívá k upevňování a prohlubování nabytých vědomostí a dovedností a k porozumění významu geometrie. Podnět k bádání většinou představuje neurčitá, nejednoznačná nebo neznámá situace, která má být žáky prozkoumána. V příspěvku jsou prezentovány náměty několika badatelských úloh z učiva geometrie základní školy.

Badatelsky orientovaná výuka, která je v posledních letech prezentována jako jedna z cest zkvalitňování přírodovědného a matematického vzdělávání (Samková, 2014; Samková et al., 2015), není ve své podstatě novým přístupem, ale zahrnuje již dříve uplatňované principy. Souvisí s projektovým a problémovým vyučováním, tvořením úloh, budováním schémat a dalšími konstruktivistickými přístupy. Badatelsky orientované vyučování vychází z myšlenky, že aktivizace žáků skrze bádání zvyšuje jejich zájem o učení a obohacuje jejich poznání. Je třeba upozornit, že bádání zde není chápáno ve smyslu vědecké činnosti založené na studiu jevů, vytváření teorií a jejich dokazování, ale rozumí se jím specifická činnost žáků, která je založena na cílevědomém uplatňování badatelských postupů. Mezi takové postupy bezesporu patří pozorování matematických objektů a jevů, kladení otázek, vyhledávání informací z různých zdrojů, plánování postupů, experimentování a modelování, sběr a analýza dat, usuzování a zobecňování, formulování a ověřování domněnek, vyvozování a diskutování závěrů (Hošpesová, 2014). Badatelsky orientované vyučování matematice si klade za cíl nejen upevňovat a prohlubovat nabyté vědomosti a dovednosti, ale také rozvíjet dovednosti učit se, zpřesňovat své poznání, porozumět podstatě matematiky a jejímu významu pro řešení problémů.

Badatelsky orientované vyučování předpokládá změnu rolí žáka a učitele oproti tradičnímu modelu vyučování. Učitel nesděluje hotové poznatky žákům, ale předkládá jim podnětné situace, které vyžadují jejich prozkoumání, poskytuje prostor pro sdílení poznatků a reflektuje žákovská řešení prezentovaná v diskusi. Od žáků se očekává, že se aktivně zapojí do řešitelského postupu tím, že budou klást otázky, navrhovat různé postupy řešení a vysvětlovat závěry, ke kterým dospěli. Nezbytným předpokladem je jejich vybavenost potřebnými poznatky z matematiky i jiných oborů a podpora kooperativního a autonomního učení ze strany učitele. Charakteristickým rysem vyučování založeného na bádání žáků je tedy řešení otevřených

[1]Matematický ústav AV ČR, v. v. i. v Praze, roubicek@math.cas.cz

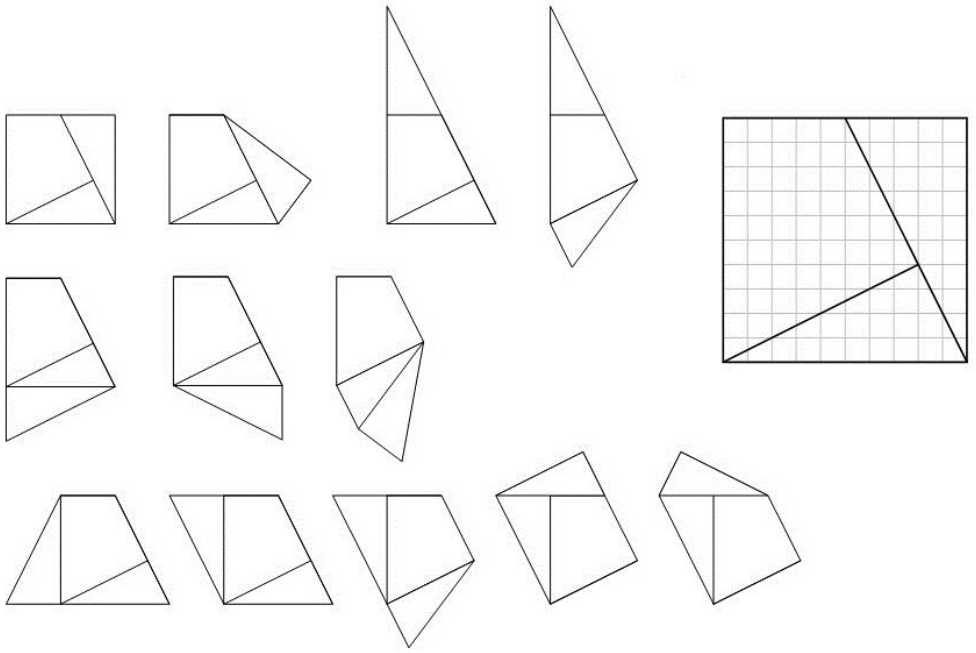
úloh a matematická diskuse ve třídě, kde učitel vystupuje spíše v roli moderátora. Prostřednictvím řešení úloh, které lze různě interpretovat, umožňují užití několika řešitelských postupů a nabízejí více správných řešení, žáci sami objevují matematické postupy a zákonitosti, které byly již objevené, ale žákům doposud neznámé.

Badatelské úlohy

Badatelské úlohy popisují neurčitou, nejednoznačnou nebo neznámou situaci a požadují její komplexní prozkoumání. Neurčitá vstupní situace nabízí řešiteli možnost rozhodnout se, jakými případy se bude zabývat, a vybrat si cesty, kterými se vydá. Východiskem pro tvoření badatelských úloh s geometrickým zaměřením může být jak reálná situace, tak specifické geometrické prostředí. Pro mladší žáky je vhodné volit takové situace, aby je mohli modelovat jim dostupnými prostředky (skládačky, obrázky, tabulky apod.). Dále je popsáno několik námětů geometrických úloh vhodných pro badatelsky orientované vyučování.

Úloha 1

Modelujte z trojdílné skládačky různé mnohoúhelníky. Které konvexní mnohoúhelníky lze ze skládačky sestavit?



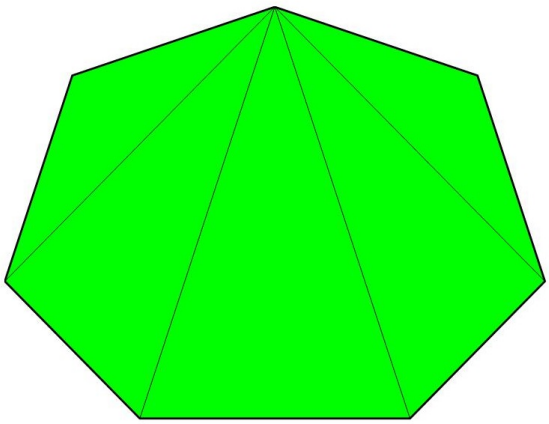
Obr. 1: Trojdílná skládačka a z ní sestavené konvexní mnohoúhelníky.

Ze skládačky ve tvaru čtverce rozděleného na dva pravoúhlé trojúhelníky a různoběžník (viz obr. 1) lze sestavit několik rozmanitých mnohoúhelníků a ty následně

klasifikovat podle různých kritérií, přičemž volba kritérií je na samotných žácích. Mohou je rozdělit do skupin například podle počtu stran (trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník), podle jejich tvaru (s pravým úhlem, s rovnoběžnými stranami, osově souměrné atd.) nebo podle metrických vlastností (s nejdelší stranou, s nejmenším/největším obvodem). Výsledkem zkoumání žáků mohou být nejen různé klasifikace, ale také popis vztahů (tvarových souvislostí) mezi třemi díly skládačky a mnohoúhelníky z nich sestavených, případně objevení jiných zákonitostí (Kdy má mnohoúhelník nejmenší obvod?). Při sestavování mnohoúhelníků nemusí použít všechny tři díly, mohou uvažovat i případy mnohoúhelníků tvořených jedním nebo dvěma díly skládačky. Tím vznikne rozmanitější situace, ve které má smysl zabývat se také obsahem sestavených mnohoúhelníků.

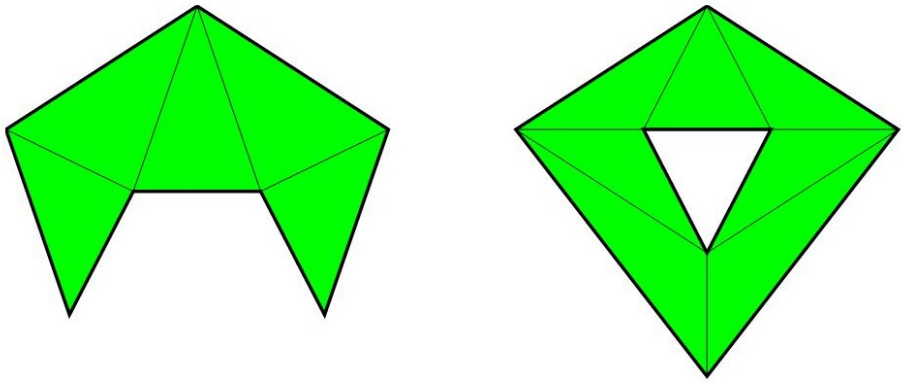
Úloha 2

Jaký je součet vnitřních úhlů v mnohoúhelníku?



Obr. 2: Sedmiúhelník rozdělený na pět trojúhelníků.

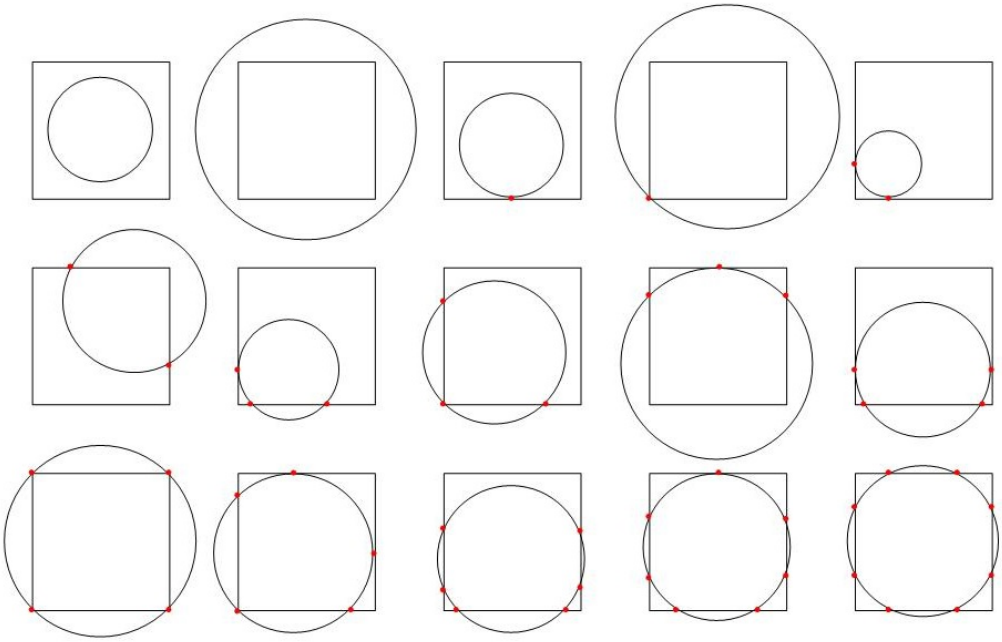
Do geometrického učiva na základní škole jsou běžně zařazovány poznatky o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a čtyřúhelníku, výjimečně je pozornost věnována součtu vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku vyjádřený vztahem $180° \cdot (n-2)$. Otázka, zda uvedený vztah platí také pro libovolný nekonvexní mnohoúhelník, se může zdát banální, přesto představuje zajímavou příležitost pro žákovská bádání. Vodítkem může být právě uvědomění si poznatku, že každý konvexní n-úhelník lze rozdělit na $(n-2)$ trojúhelníků (viz obr. 2). Obdobně lze postupovat i v případě nekonvexních mnohoúhelníků, je však třeba rozlišit dva typy nekonvexnosti (viz obr. 3). Problematika nekonvexních mnohoúhelníků je pro žáky dostatečně neznámá, ale přitom snadno uchopitelná prostředky, které si již osvojili, aby se mohla stát předmětem jejich bádání.



Obr. 3: Dva typy nekonvexních mnohoúhelníků.

Úloha 3

Kolik společných bodů může mít kružnice s hranicí čtverce?



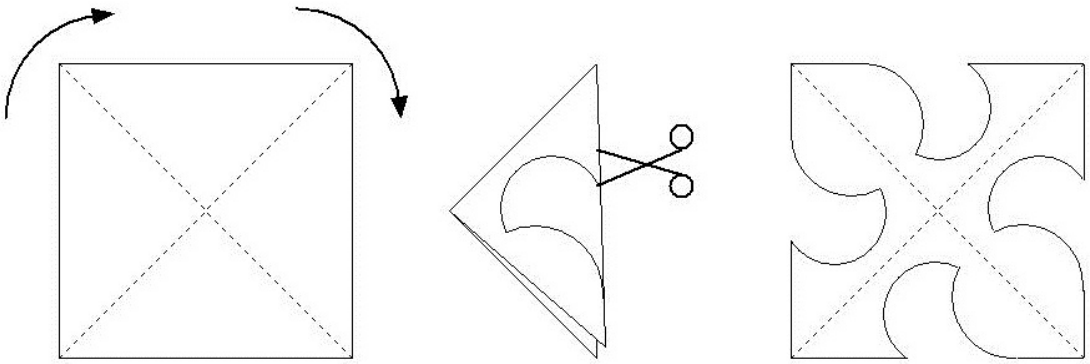
Obr. 4: Společné body kružnice a hranice čtverce.

Zkoumání vzájemné polohy kružnice a hranice čtverce je propedeutikou konstrukcí, ve kterých je klíčovým prvkem kružnice a její průsečíky nebo body dotyku. Žáci hledají různé případy, kdy se kružnice dotýká stran čtverce nebo je protíná. Vzhledem k tomu, že v zadání není specifikována velikost kružnice a čtverce ani jejich vzájemná poloha, je třeba modelovat různé případy a klasifikovat je podle počtu společných bodů. Některé případy jsou žákům známé (1, 2 nebo 4 společné body), jiné jsou méně obvyklé (3, 5 nebo 7 společných bodů). Důležitým momentem

bádání je určení mezních hodnot a s tím související diskuse. Některé případy jsou znázorněny na obr. 4.

Úloha 4

Jak lze vytvořit překládáním papíru a vystřihováním obrazce s různým počtem os souměrnosti?



Obr. 5: Postup konstrukce obrazce se dvěma osami souměrnosti.

Modelování hraje důležitou roli v řadě geometrických úloh. Manipulativní činnost s listem papíru je v tomto případě nezbytným krokem k prozkoumání situace a rozšíření zkušeností se skládáním papíru a možnou podobou souměrných obrazců. Žáci většinou znají případy s jednou, dvěma (viz obr. 5), čtyřmi nebo osmi osami souměrnosti, ale málokdy dovedou vytvořit obrazce se třemi, šesti nebo pěti osami souměrnosti. Situace tedy vede k experimentování nejprve nahodilým skládáním, poté ověřováním postupů, které jsou založeny na konstruování úhlů dané velikosti.

Úloha 5

a) Jak lze prakticky ověřit, že daný čtyřúhelník je obdélník?
b) Jak lze přesně určit střed kruhové desky?

V rámci učiva geometrie základní školy lze najít poznatky, které jsou přímo uplatnitelné praxi. Řešení úlohy 5 a) není nijak náročné – zvládnou ji i mladší žáci, kteří znají vlastnosti obdélníku (obdélník má shodné protější strany a shodné úhlopříčky). Úlohu 5 b) je vhodné zařadit v rámci tématu kružnice opsaná mnohoúhelníku nebo Thaletova kružnice. Součástí řešení uvedených úloh je nejen nalezení postupu, resp. klíčových vlastností zkoumaných objektů, ale také argumentace, že ověření určitých vlastností je postačující podmínkou.

Úloha 6

Krabice na nápoje se vyrábějí v různých velikostech. Jaké rozměry by měly krabice mít, aby jejich výroba byla hospodárná?

Obr. 6: Nápojové krabice o objemu 250 ml.

Uchopení popsané geometrické situace je podpořeno zkušeností z běžného života a možností ji modelovat dostupnými prostředky. Předpokládá se, že žáci rozpoznají v obecně popsané situaci problém, který mohou zkoumat, vymezí oblast, ve které se budou pohybovat, a blíže určí vstupní podmínky. Volba řešitelského postupu se odvíjí od uchopení zadané situace žáky a její konkretizace. Pro konkretizaci situace je vhodné nabídnout žákům reálné modely (viz obr. 6), které mohou využít při řešení. Konkrétní model pomůže žákům uvědomit si podstatu problému a přeformulovat zadání: určete rozměry kvádru s daným objemem tak, aby spotřeba obalového materiálu byla co možná nejmenší.

Závěr

Předložení tzv. badatelské úlohy žákům představuje jen prvotní podnět k bádání a nezaručuje, že k bádání ve třídě skutečně dojde. Záleží na vybavenosti žáků potřebnými poznatky a jejich ochotě se aktivně podílet na řešení zadaného problému. Důležitou roli zde hraje nejen motivace žáků pro badatelský přístup a jejich zkušenosti s užitím různých badatelských postupů, ale také styl výuky, který učitel běžně uplatňuje, a jeho schopnost vytvořit prostředí vhodné pro badatelsky orientovanou výuku. Na řešení badatelské úlohy se nelze zcela připravit – učitel musí být vnímavý k tomu, co žáci sdělují a jak uvažují, a umět jejich nápady okamžitě vyhodnocovat a pružně na ně reagovat. Koordinace žákovského bádání vyžaduje určité dovednosti, které lze získat jen na základě osobní zkušenosti s badatelským přístupem ve vyučování.

Příspěvek byl vytvořen s podporou projektu GAČR 14-01417S a RVO 67985840.

Literatura

[1] HOŠPESOVÁ, A. (2014). Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni ZŠ a příprava učitelů. In *Matematika 6. Matematické vzdělávání v primární škole – tradice, inovace* (s. 8–14). Olomouc: UP.

[2] SAMKOVÁ, L. (2014). Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování matematice I. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 187–192). Plzeň: Vydavatelský servis.

[3] SAMKOVÁ, L., et al. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122.

Využitie hlavolamu Tangram na rozvíjanie priestorovej predstavivosti pre učiteľov 1. stupňa ZŠ

Viera Uherčíková[1]

Geometria robí problémy žiakom na všetkých stupňoch školskej dochádzky. Preto je dôležité venovať sa metódam a didaktickým prostriedkom na rozvíjanie priestorovej predstavivosti už od útleho veku. Tangram ako ideálne spojenie hry a učebnej pomôcky je v tomto smere veľkým prínosom.

Snahou učiteľov i rodičov je pripraviť deti na čo najúspešnejšie sa uplatnenie v spoločnosti a čo najlepšie zvládanie rôznych životných situácií vrátane stresových. To priamo súvisí s rozvíjaním vlastností a schopností v záujme dosiahnutia uvedeného cieľa. v tomto smere jednou z najdôležitejších schopností je práve priestorová predstavivosť.

Podľa psychológov, kto má dobre rozvinutú predstavivosť, môže byť úspešnejší v živote. Môže ľahšie zvládať aj ťažké životné situácie, keď si ich najprv v mysli predstaví.

Bez predstavivosti by sme sa v živote nezaobišli ani v situáciách každodenného života. Musíme si napr. predstaviť, aký nákup môžeme urobiť, aby sa nám zmestil do tašky alebo do chladničky, ako máme uložiť veci do skrinky, ako zaparkovať auto,

[1]FMFI UK v Bratislave, v.uhercikova@gmail.com

a pod. Ani športovci sa nezaobídu bez priestorovej predstavivosti. Aj umelecké diela a skvosty architektúry vznikli najprv v predstavách ich tvorcov.

Predstavivosť je základom tvorivosti. Ako sa vyjadril A. Einstein: „Predstavivosť je dôležitejšia, ako vedomosť“. Vo vynikajúcej publikácii: „O představivosti a její roli v matematice“, sa venujú autori Z. Půlpán, Z. Kebza, F. Kuřina danej problematike z rôznych hľadísk. Podľa nich: „V bežnom jazyku chápeme predstavivosť ako *schopnosť* vybavovať si a vytvárať predstavy. Predstava je potom *obraz* vytvorený v mysli na základe minulého vnemu, rozumovou činnosťou alebo na základe skúseností.“

Úlohy na rozvíjanie priestorovej predstavivosti

Predstavivosť je dôležitá pri zapamätávaní a teda aj pri učení sa. Je základom všetkých tvorivých schopností. Podrobnejšie sa môžete dočítať o nej, jej rozvíjaní a rôznych zaujímavých didaktických hrách v publikácii (Brincková, Uherčíková & Vankúš, 2013).

Verím, že bol dostatočne vysvetlený a zdôraznený význam priestorovej predstavivosti. Je potešiteľné, že sa táto dôležitá schopnosť dá „trénovať“. Jedným z didaktických prostriedkov, pomocou ktorých sa dá priestorová predstavivosť rozvíjať, je Tangram. Ide o hlavolam, ktorý predstavuje ideálne spojenie hry a učebnej pomôcky. Jedná sa o štvorec, rozdelený na sedem častí: päť trojuholníkov (dvoch najväčších, stredného, dvoch najmenších), štvorca a rovnobežníka.

S Tangramom sa dá pracovať dvoma spôsobmi:

- poskladať jednotlivé časti do vopred daných obrysov,
- vytvárať postavy ľudí, zvierat, známe predmety, veci, geometrické obrazce podľa vlastnej fantázie a výsledok si zaznačiť.

Pravidlá hry:

- v každom obrazci musí byť použitých všetkých 7 častí skladačky,
- žiadne časti sa nesmú prekrývať,
- rovnobežník môže byť použitý aj prevrátený.

Stratégie oboznámenia sa s Tangramom:

- pripraviť si nakreslený, vyriešený obrazec (ako sú napr. uvedené v ďalšom texte) s jednotlivými dielikmi v skutočnej veľkosti Tangramu a potom už len jednotlivé dieliky hlavolamu k danému obrazcu priraďovať,

- zostavovať obrázky iba podľa obrysov,
- oboznamovať sa s Tangramom pomocou hry.

Miešame Tangramy

Deti si vyberú niektorý obrázok z predlôh v skladačke Tangram. Učiteľka ho poskladá. Deti si poskladaný obrázok dobre poprezerajú. Potom učiteľka dieliky premieša. Deti majú za úlohu poskladať taký istý obrázok z dielikov svojho Tangramu.

Obr. 1: Ukážky niektorých obrazcov

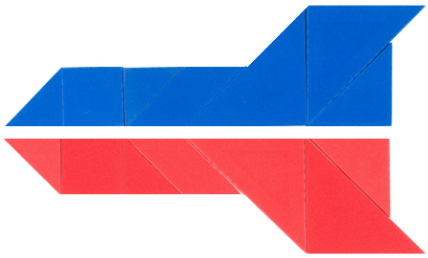
V citovanej knihe sa zameriavame aj na propedeutiku matematických pojmov ako napr. zhodnosť, osová súmernosť, atď. prostredníctvom didaktických hier.

Príklady týchto hier:

- **Prikladaj dieliky Tangramu zhodnou stranou:**
  Zostav podľa vlastnej predstavivosti útvar prikladaním jednotlivých dielikov Tangramu postupne k sebe zhodou stranou. Pomenuj ho. Pri tejto úlohe si matematický pojem „zhodnosť“ vlastne precvičujú aj tí, ktorí sa nezaoberajú matematikou. Pri pomenovaní jednotlivých útvarov rozvíjame aj komunikáciu.

Obr. 2: Lyžička

- **Hra na zrkadlo:**
  Zostav z dvoch Tangramov osovo súmerný útvar. Pomenuj ho.



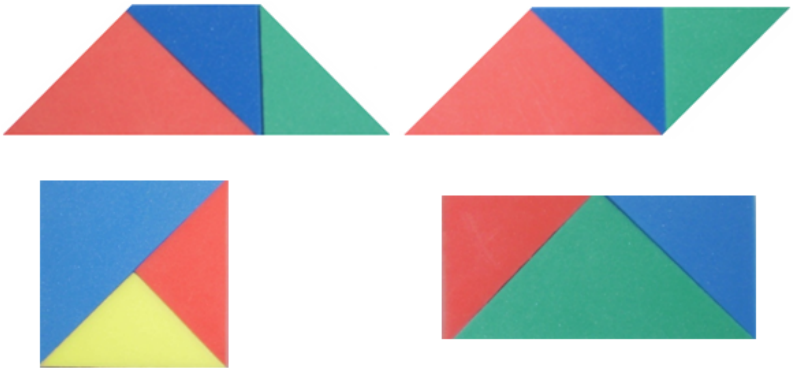
Obr. 3: Raketa

V citovanej publikácii sú uvedené úlohy, ktoré možno využiť aj priamo pri vyučovaní geometrie, ako napr.:

- Z dvoch najväčších, stredného a dvoch najmenších trojuholníkov zostav dva obdĺžniky s rôznym obvodom. Majú rovnaký obsah?

Obr. 4

- Aké geometrické útvary dokážeš zostaviť z jedného stredného a dvoch najmenších trojuholníkov?



Obr. 5

Záver

Verím, že predchádzajúce riadky sú dôkazom, že Tangram je nielen zaujímavá hra, ale zároveň aj výborná učebná pomôcka. Je veľmi efektívny zvlášť pre rozvíjanie priestorovej predstavivosti, logického a tvorivého myslenia, psychomotoriky, aj jemnej motoriky. Prostredníctvom Tangramu môžeme viesť deti k presnému vyjadrovaniu, komunikácii, k rozvíjaniu sociálnych a emocionálnych schopností detí pomocou Tangramových rozprávok, ako aj k rozvíjaniu ďalších potrebných kompetencií.

Dôležitým faktom je aj to, že deti, ktoré sa hrajú už od predškolského veku so stavebnicami, hlavolamami a rôznymi skladačkami, majú lepšie rozvinutú priestorovú predstavivosť a neskôr dosahujú lepšie výsledky v geometrii.

Hry s Tangramom sú teda pre deti nielen zábavou, ale aj podnetom pre ich ďalší osobnostný rozvoj.

Príspevok vznikol s podporou grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 074UK-4/2014.

Literatúra

[1] BRINCKOVÁ, J., UHERČÍKOVÁ, V. & VANKÚŠ, P. (2013). *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike.* Bratislava: FMFI UK. Dostupné z http://www.comae.sk/netradicnemetody.pdf.

[2] PŮLPÁN, Z., KUŘINA, F. & KEBZA, V. (1992). *O představivosti a její roli v matematice.* Praha: ACADEMIA.

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Jak vysvětlit záporný exponent

Petra Bay[1]

Článek se zabývá možnostmi, které může učitel zvolit při zavádění záporného exponentu. Vysvětluje, co vlastně znamená záporný exponent a jaký je jeho vztah k převrácené hodnotě čísla. Možnosti zavedení záporného exponentu jsou rozšířeny i o zavedení nulového exponentu.

Nejjednodušší a nejrychlejší možností, jak zavést záporný exponent, je sdělit žákům, že platí vztah

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}.$$

Nutnou propedeutikou je samozřejmě znalost zlomků a kladných exponentů. Učitel pak může ihned přejít k procvičování a zafixování tohoto vztahu. Často jsem se ale setkala s tím, že jde u mnohých žáků o formální poznatek ve smyslu M. Hejného a žáci nevidí v tomto vztahu souvislost. Tu odhalují další možnosti.

Učitel může například využít znalost mocninných výrazů, konkrétně vztahu

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ a pokračovat ke sdělení: $\frac{1}{a^x} = \frac{a^0}{a^x} = a^{0-x} = a^{-x}$.

Nebo může nechat žáky, aby tento vztah objevili sami, a položit jim podnětnou otázku: *Jak byste upravili výraz* $\frac{1}{a^x}$ *pomocí vztahu* $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$*, aby se odstranil zlomek?*

Třetí možnost zkoumá výše popsaný vztah dynamicky. Dobře to ilustruje video na webu Khanova škola. Já jsem zápis při vysvětlování z didaktického hlediska mírně upravila. Nejprve žákům ukážete posloupnost mocnin výrazu a, a názorně doplníte nad tuto posloupnost násobení číslem a (ve videu je násobení znázorněno pod posloupností)

[1]Střední škola knižní kultury v Praze 3 – Vinohrady, petrabay@seznam.cz

$$a^1 \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad \ldots \quad a^1 \overset{\cdot a}{\rightarrow} a^2 \overset{\cdot a}{\rightarrow} a^3 \overset{\cdot a}{\rightarrow} a^4$$

Následně využijete analogie pro opačný proces. Tedy, že dělíme číslem a (ve videu je dělení nad posloupností, ale mně se více zamlouvá uvádět dělení pod posloupností jako zlomek)

$$\frac{a^1}{a} \leftarrow \frac{a^2}{a} \leftarrow \frac{a^3}{a} \leftarrow \frac{a^4}{a}$$

Lze místo zlomkových čar psát samozřejmě i znaménko děleno

$$a^1 \quad a^2$$
$$\leftarrow$$
$$: \; a$$

až se dostanete k a^0

$$\frac{a^{-2}}{a} \leftarrow \frac{a^{-1}}{a} \leftarrow \frac{a^0}{a} \leftarrow \frac{a^1}{a}$$

A odtud již získáváte záporný exponent. Celý zápis vypadá takto:

$$\frac{a^{-2}}{a} \leftarrow \frac{a^{-1}}{a} \leftarrow \frac{a^0}{a} \leftarrow \frac{a^1}{a} \overset{\cdot a}{\leftarrow} \frac{a^2}{a} \overset{\cdot a}{\leftarrow} \frac{a^3}{a} \overset{\cdot a}{\leftarrow} \frac{a^4}{a}$$

Čtvrtý přístup, který se mi podařilo objevit s pomocí jednoho mého žáka, je velmi intuitivní a je dobré vysvětlení podpořit grafickým náčrtkem pro lepší pochopení. Opět se předpokládá žákovská znalost výrazů s kladným exponentem. Informaci lze žákům předat prostým sdělením, nebo je nechat vztah formulovat samotné.

Ve výrazu exponent určuje kolikrát se mezi sebou číslo a v případě kladného exponentu násobí. A v případě záporného exponentu, kolikrát se číslem a dělí.

Tyto čtyři přístupy lze aplikovat i pro vysvětlení, proč platí $a^0 = 1$ namísto $a^0 = 0$, jak to žáci velmi často uvádějí, protože jim to přijde „logičtější“. Jako první možnost můžeme opět zvolit prosté sdělení vztahu. Dost často ale nastávají u žáků potíže a důkaz „autoritou“ dlouhodobě nefunguje.

Vysvětlením přes vztah $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, lehce dojdeme i k tomuto závěru $1 = \frac{a^x}{a^x} = = a^{x-x} = a^0$.

Třetí možností je opět ve skutečnosti vysvětlení druhé, pouze zachyceno v procesu změny a učitel s žáky na nulový exponent narazí již při přechodu z kladného na záporný exponent. Stačí se tedy u předchozího zápisu zdržet a položit žákům otázku: *Jakou hodnotu má* a^0*?*

Čtvrtá možnost je opět intuitivní a to, že výchozí číslo je 1, to pak číslem a násobíme (získáváme kladný exponent). Začnete zápisem pro a^1, pak a^2 atd. Z kladných exponentů přejdete přes nulu do záporných exponentů, kdy číslem a dělíme. Celý zápis vypadá takto:

$$\begin{aligned} a^3 &= 1 \cdot a \cdot a \cdot a \\ a^2 &= 1 \cdot a \cdot a \\ a^1 &= 1 \cdot a \\ a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ a^{-2} &= \frac{1}{a \cdot a} \\ &\dots \end{aligned}$$

Obdobně je tomu například i ve vztahu $0! = 1$, kde je číslo 1 výchozí pro další operace.

Všechny uvedené možnosti mají stejný cíl – aby žák získal dovednost pracovat se záporným (případně nulovým) exponentem a s exponenty ve zlomku. Vždy je dobré, když učitel volí více přístupů, protože ne všichni žáci uvažují a osvojují si znalosti stejným způsobem.

Literatura

[1] Vysvětlení záporného exponentu. [online]. *Khanova škola* (2007). [cit. 2015-02-16]. Dostupné z https://khanovaskola.cz/video/10/50/1921-vysvetleni-zaporneho-exponentu

Mobil na hodine matematiky, výhoda alebo prekážka?

Erik Bayerl, Katarína Mojšová, Patrik Voštinár[1]

V súčasnom modernom svete, ktorý je bohatý na informačné a komunikačné technológie (IKT) sa čoraz častejšie stretávame s pojmom „využitie IKT vo vyučovaní matematiky“. Cieľom informatizácie školstva je zvyšovanie efektivity vyučovacieho procesu, pričom žiak nie je len pasívnym prijímateľom informácii, ale predovšetkým aktívnym účastníkom výučby. Napriek skutočnosti, že naše školy v poslednom období prebehli značnou modernizáciou, trend výučby pomocou moderných technológii nám nie je ešte celkom vlastný. V článku je popísaná jedna z možností ako využiť mobil, či tablet na hodine matematiky. Zaoberá sa jednoduchou mobilnou aplikáciou „Zlomky“, ktorú sme sami vytvorili a ktorá je voľne dostupná v internetovom obchode Google Play.

Používanie nových technológií prináša množstvo príležitostí ako vylepšiť proces výučby a možnosti štúdia. Jednou z množstva výhod je, že moderné technológie môžu prispieť k formovaniu kladných postojov žiakov k preberanej problematike a zvyšujú možnosť ich sebarealizácie (Lukáč, 2001). Prínosy spojené s využívaním moderných technológii vo vyučovaní matematiky závisia v značnej miere od postoja učiteľa k informačným a komunikačným technológiám. Záleží len na tvorivosti a vynaliezavosti učiteľa, aby vyučovanie matematiky bolo pre žiakov zaujímavé, motivujúce, moderné, lákavé a reagujúce na každodenné reálne životné situácie (Žilková, 2009). Ďalším aspektom, ktorý má vplyv na využitie IKT vo výučbe je dostupnosť materiálov a aplikácií. Na prípravu niektorých materiálov do tabletov, či iných zariadení by potreboval učiteľ pokročilé znalosti z programovania

Z tohto dôvodu sme sa rozhodli vytvoriť **aplikáciu** na mobily a tablety, s operačným systémom *Android*, ktorá je zameraná na tematický celok *Zlomky*. Aplikácia je určená pre žiakov a učiteľov základných škôl, ale môže si ju na svoj mobil, či tablet stiahnuť ktokoľvek zadarmo. Používateľ si môže nastaviť jeden z troch jazykov – slovenčina, čeština alebo angličtina, v ktorom chce aplikáciu používať. Aplikáciu možno zaradiť medzi „user friendly“ aplikácie. Pre žiaka má pútavý vzhľad, je prehľadná a jednoduchá vzhľadom na ovládanie. Samotná inštalácia taktiež nie je náročná. Z dôvodu jednoduchosti a nenáročnosti ovládania je aplikácia vhodným materiálom, ktorý môže slúžiť ako doplnok vyučovacieho procesu.

[1]Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, erik.bayerl@gmail.com, mojsovak@gmail.com, patrik.vostinar@gmail.com

Štruktúra aplikácie

Prvým krokom k používaniu aplikácie *Zlomky* je jej stiahnutie a následná inštalácia. Aplikáciu možno stiahnuť z internetového obchodu *Google Play*, je dostupná na https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pavo.fraction. Po úspešnej inštalácii aplikácie sa na mobilnom zariadení, alebo tablete zjaví ikona aplikácie (obr. 1).

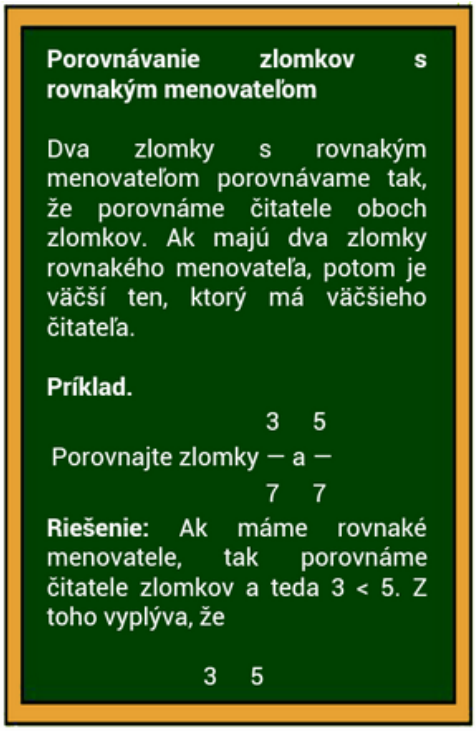
Obr. 1: Ikona aplikácie

Kliknutím na ikonu aplikácie sa po niekoľkých sekundách objaví úvodné menu (obr. 2).

Obr. 2: Úvodné menu

Po kliknutí na ľubovoľnú ponuku v úvodnom menu sa používateľovi zobrazia ďalšie možnosti: *Pomocník, Úlohy, Overenie výsledku*. Každá z možností má svoju funkciu. *Pomocník* (obr. 3) ponúka krátku teóriu ilustrovanú vzorovým riešením

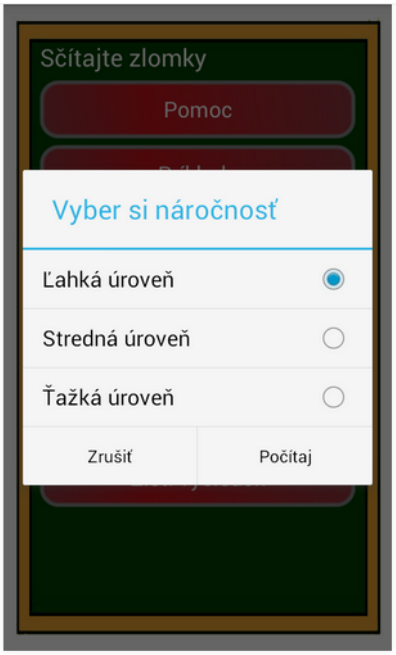
príkladu. Zvolená možnosť obsahuje stručný výklad, ako má používateľ postupovať pri riešení úloh.



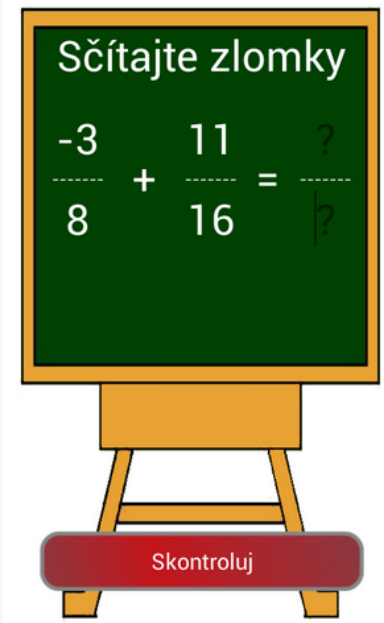
Obr. 3: Pomocník

Možnosť *Úlohy* slúži používateľovi na precvičovanie operácií so zlomkami. Ak si používateľ klikne na možnosť *Úlohy*, aplikácia mu ihneď ponúkne zvolenie si úrovne náročnosti riešenia úlohy (obr. 4). Pri väčšine úloh si môže používateľ voliť z dvoch úrovní: z ľahkej a ťažkej. Sú však aj ponuky (napr. *Sčítaj a odčítaj zlomky*), kde si používateľ volí z troch úrovní: ľahkej, strednej a ťažkej. Náročnosť úrovní je odstupňovaná na základe náročnosti príslušných operácii so zlomkami. Po zvolení úrovne aplikácia automaticky vygeneruje úlohu, ktorú používateľ následne rieši (obr. 5). Po jej vyriešení používateľ zadá svoj výsledok a aplikácia overí správnosť riešenia. V prípade, že je výsledok správny, používateľ sa môže vrátiť späť do hlavného menu alebo pokračovať v riešení ďalších úloh. Ak výsledok nie je správny, používateľ rieši úlohu opäť. V školskej praxi sa často stretávame s javom, že žiaci síce úlohu so zlomkami vyriešia správne, ale výsledok neupravia na základný tvar. Ak nastane situácia, že používateľ zadá do mobilu, či tabletu výsledok, ktorý v základnom tvare nie je, aplikácia ho upozorní na možnosť úpravy zlomku na základný tvar.

Aplikácia ponúka ešte ďalšiu možnosť *Overenie výsledku*, ktorá slúži používateľovi na overenie výsledku akejkoľvek úlohy so zlomkami. Vyzve používateľa, aby zadal svoju úlohu do zariadenia, ktorú následne vyrieši a zobrazí správny výsledok. Vychádzajúc z praxe sme sa snažili vyhnúť prípadu, kedy by používateľ zadal do



Obr. 4: Úroveň náročnosti



Obr. 5: Riešenie úlohy

menovateľa zlomku číslo 0. V takomto prípade upozorní používateľa na nesprávnosť jeho zadania.

Záver

Vytvorená aplikácia je jednoduchá a ľahko dostupná. Môže poslúžiť na precvičovanie a upevňovanie tematického celku Zlomky. Aplikácia môže čiastočne riešiť problém s nedostatkom učebných materiálov v školách a môže slúžiť ako elektronická zbierka úloh s neobmedzeným množstvom príkladov. Učiteľovi matematiky môže byť nápomocná pri tvorbe vyučovacej hodiny, písomných prác, či zadávaní úloh. Napriek tomu, že aplikácia obsahuje stručný výklad učiva spolu s vyriešenými ukážkovými príkladmi, neodporúčame ju ako náhradu, ale len ako obohatenie vyučovacieho procesu. Žiaci môžu mať aplikáciu „Zlomky“ vo svojom mobile či tablete, vďaka čomu majú neustále k dispozícii elektronickú zbierku úloh, ktorú môžu využívať kdekoľvek a kedykoľvek.

Literatúra

[1] LUKÁČ, S. (2001). *Multimédiá a počítačom podporované učenie sa v matematike.* Košice: Prírodovedecká fakulta UPJŠ.

[2] ŽILKOVÁ, K. (2009). *Školská matematika v prostredí IKT.* Bratislava: Polygrafické stredisko UK.

Ako motivovať žiakov SOŠ k štúdiu matematiky?

Silvia Bažíková[1]

Článok je zameraný na motiváciu vo vyučovaní matematiky. Cieľom článku je ukázať, ako sa dá motivovať žiakov na SOŠ. Ukážeme Vám to na konkrétnych príkladoch, ktoré sme riešili so žiakmi SOŠ v Ružomberku.

„Na čo nám to v živote bude?“ To je otázka, ktorú si položí každý zúfalý žiak na hodine matematiky. Odpoveď žiaka po pokazenej písomke alebo odpovedi obsahuje len jeden veľmi jasný, ale unáhlený záver – matematika je nám na nič. S touto odpoveďou sa ale pri triezvom a rozumnom uvažovaní súhlasiť nedá, a tak stojí za to nájsť aj tie ostatné závery.

Je to aj otázka, ktorú počul asi každý učiteľ na hodine matematiky. Dostala som ju aj ja a tak som sa rozhodla, že žiakom dám na ňu odpoveď a zároveň ukážem im, kde všade matematiku využijú.

Popri úlohách v zbierkach učiteľ by mal využívať úlohy, ktoré urobia vyučovanie matematiky zábavnejším a radostnejším. Dôležitý je objaviteľský prístup pri získavaní nových poznatkov a radosť zo samostatne vyriešenej úlohy, ktorá posilňuje pozitívny vzťah žiaka k matematike. Optimálna situácia nastane, ak žiak prijme úlohu za svoju a rieši ju ako svoj vlastný problém. Potom žiak prestáva riešiť úlohu pod vonkajším tlakom, interiorizácia úlohy mu vytvára predpoklady pre originálne riešenie.

Pokiaľ bude učiteľ sústavne vyvolávať dojem, že v matematike ide predovšetkým o zapamätanie pravidiel a „vzorčekov“, je vysoko pravdepodobné, že žiaci vnútorne motivovaní nebudú.

Problematika motivácie je komplikovaná a nedá sa vytvoriť obecne platný návod, ako žiakov správne motivovať. Nejde len o samotné úlohy, ale o celé prostredie, klímu triedy, ktoré učiteľ spolu so žiakmi na hodinách matematiky vytvárajú.

Matematika nás obklopuje v každodennom živote a riešiť matematickú úlohu neznamená len vybrať si z nejakej zbierky matematických úloh jedno alebo niekoľko zadaní a vyriešiť ich, ale riešiť vzniknuté problémy (úlohy) v našom reálnom živote, v rôznych situáciách, pomocou známych matematických metód. Ak si všimneme svet okolo nás, problémy a situácie, ktoré nás obklopujú, ľahšie nájdeme možnosti a metódy k ich riešeniu a uvedomíme si, že matematika je samozrejmou súčasťou nášho života a užitočným partnerom pri riešení rôznych úloh v bežných situáciách.

[1]Spojená škola Ružomberok, silvia.bazikova@gmail.com

Konkrétne príklady

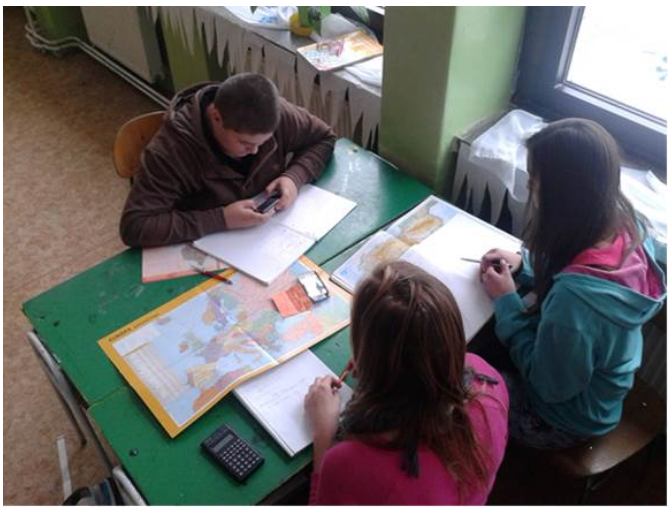
V tomto článku opíšeme štyri vyučovacie hodiny, ktoré sme vyučovali u žiakov 1. ročníka v odbore manažment regionálneho cestovného ruchu na SOŠ. Študenti na túto školu prichádzajú so slabšími študijnými výsledkami, a to nielen z matematiky, ale aj z iných predmetov, vrátane správania. Preto učiť matematiku takýchto žiakov je pre učiteľa výzva. Naši žiaci mi každodenne kládli otázku: „Na čo mi to v živote bude?“. Preto som sa rozhodla žiakov motivovať na hodinách a odpovedať im na ich otázku.

Vyučovacie hodiny

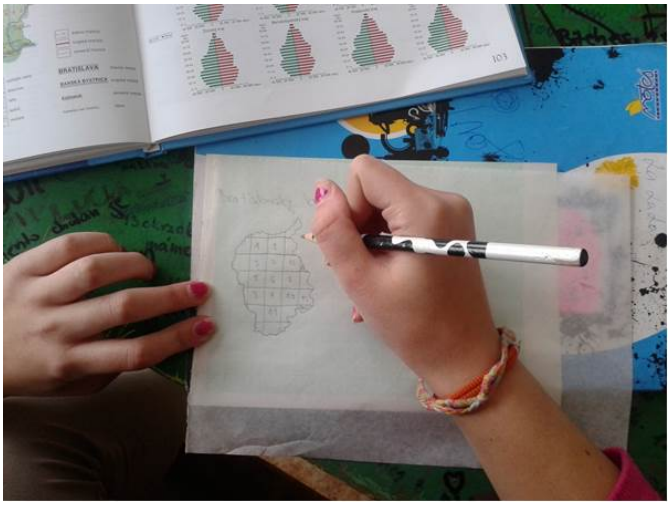
Téma vyučovacej hodiny premena jednotiek. Cieľom bolo motivovať žiakov, tak som si na hodinu priniesla mapy rôznych dĺžok. Každý žiak dostal inú mierku mapy. So sebou mali kalkulačku, pravítko. Žiakov som rozdelila a každá skupina dostala príklad:

- Aká dlhá je skutočná vzdialenosť medzi Trnavou a Bratislavou? (km, m)
- Aká dlhá je skutočná vzdialenosť medzi B. Štiavnicou a Ružomberkom? (km, m)
- Aká dlhá je skutočná vzdialenosť medzi Ružomberkom a Žilinou? (km, m)
- Aká dlhá je skutočná vzdialenosť medzi Bratislavou a Košicami? (km, m)

Žiaci merali, premieňali, každý pracoval sám (obr. 1) a popri tom si zopakovali premenu jednotiek dĺžky pomocou mapy.



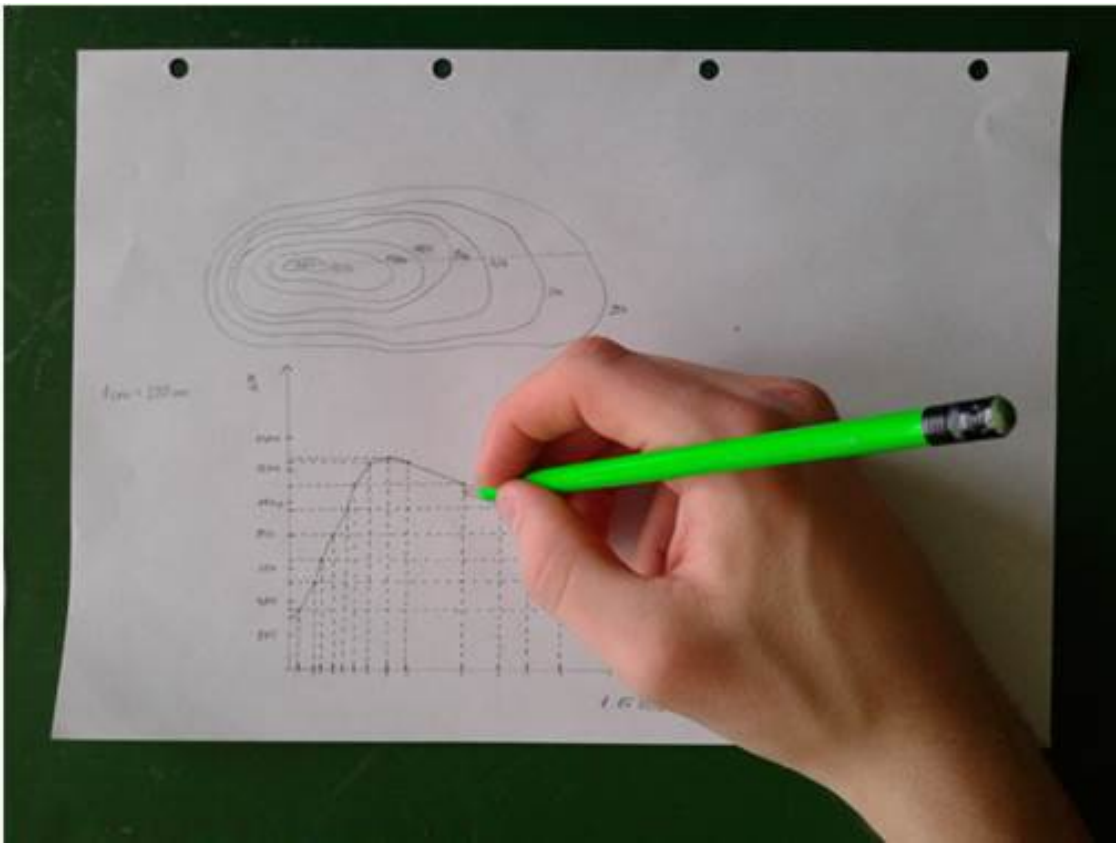
Obr. 1



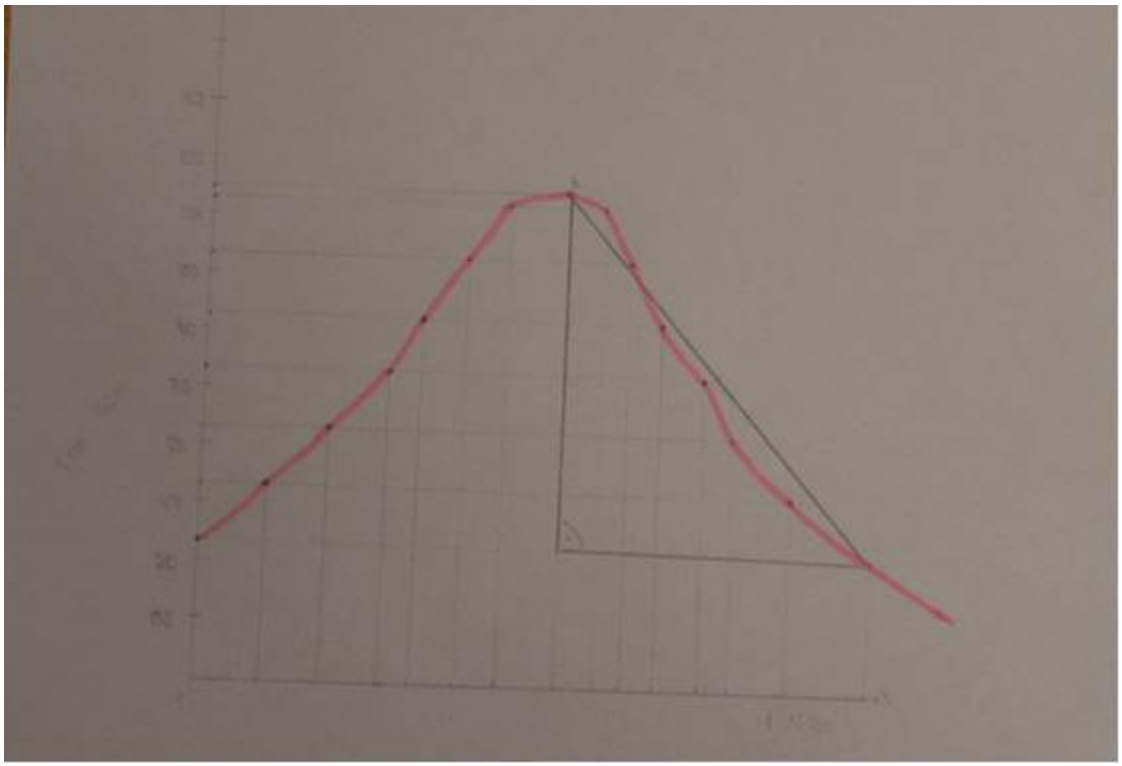
Obr. 2

Na ďalšej hodine žiaci mali vypočítať rozlohu kraja. Na hodinu som priniesla atlasy, štvorčekový papier. Každý žiak si vybral iný kraj. Pomocou štvorčekového papiera vypočítali rozlohu (obr. 2). Svoju rozlohu si skontrolovali s údajom v atlase. Žiaci vedeli, že tam budú odchýlky, pretože mapy sú skreslené a štvorčeková metóda tiež nie je najpresnejšia. Žiakov to bavilo a precvičili si premenu jednotiek obsahu.

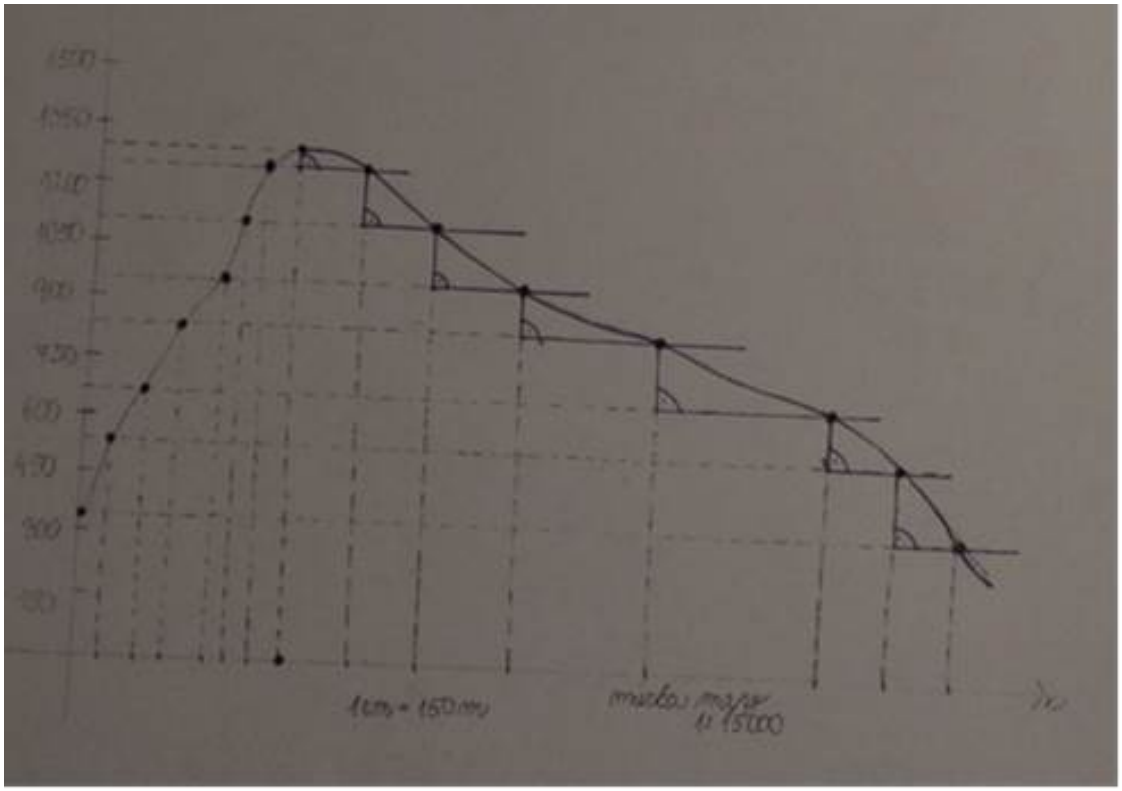
Pythagorovu vetu som sa rozhodla precvičiť pomocou vrstevníc. Pomôcky, ktoré potrebovali na hodine: pravítko, ceruzku, kalkulačku. Najprv žiaci musia ovládať, čo je vrstevnica, ako sa znázorňuje (obr. 3). Ideálny tvar vrstevníc neexistuje, preto som navrhla nech si sami nakreslia vrstevnicu spolu s mierkou. Ich úlohou bolo znázorniť terén svojich vrstevníc. Po narysovaní terénu úlohou žiakov bolo zistiť, akú skutočnú vzdialenosť prejdem z nadmorskej výšky 500 metrov na vrchol kopca (toho svojho – ideálneho). Prvý nápad žiakov bolo vypočítať vzdialenosť pomocou Pytagorovej vety cez jeden pravouhlý trojuholník (obr. 4). Nápad dobrý, ale to by trasu až tak nekopírovalo. Ako sa na to žiaci pozerali zistili, že presnejšie to bude vypočítať pomocou tých malých trojuholníkov, a potom ich sčítať (obr. 5). V tejto úlohe sme využili nielen Pytagorovu vetu, premenu jednotiek, ale aj zostrojenie grafu, čítanie z grafu.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Záver

Cieľom článku bolo ukázať, že opakovanie matematiky v prvom ročníku na SOŠ môže byť zábavnejšie a aj prínosnejšie pre žiakov. Na konkrétnych príkladoch sme chceli ukázať, ako sa dá motivovať žiakov na hodine matematiky. Chceli sme, aby žiaci získali konkrétnu predstavu, kde sa s jednotlivými poznatkami a postupmi v živote stretnú a hlavne, že viaceré z nich aj sami využijú aj v praxi.

Víra uživatelů ve výsledek dodaný softwarem

Alice Bílá, Antonín Jančařík[1]

Představíme některé překážky při práci se softwarem. Zaměříme se na překážky na straně uživatele při interpretaci dodaných výsledků softwarem i na překážky na straně softwaru. Ukážeme příklady, ve kterých matematické programy zpravidla chybují. Zmíníme nový typ překážky – přílišnou víru v software, a naznačíme, jak tuto víru může učitel oslabovat. Zaměříme se zejména na software dynamické geometrie GeoGebra a na WolframAlpha.

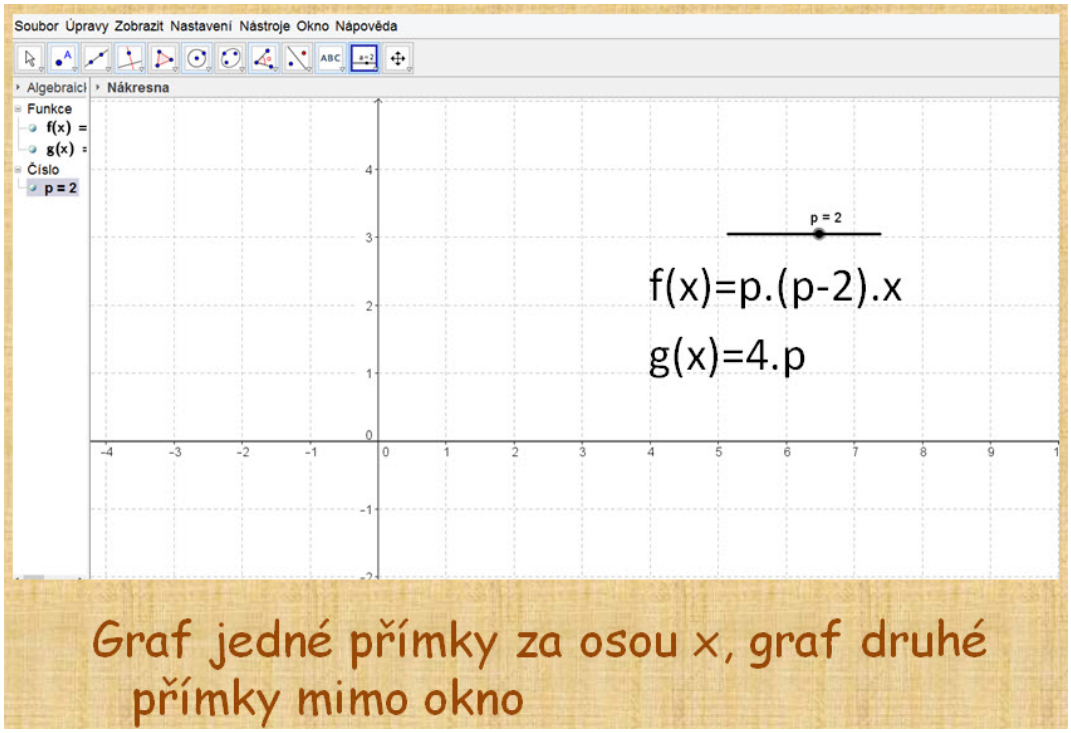
Moderní doba přináší i moderní překážky, obvyklou překážkou je špatná interpretace výsledku při práci s nevhodným rozlišením nebo pouze ve standardním okně. Při troše nešikovnosti se například graf funkce (na levé straně níže uvedené rovnice) „schová“ za osu, graf funkce (na pravé straně níže uvedené rovnice) se nezobrazí v daném okně.

Demonstrujeme na obr. 1 při řešení parametrické rovnice $p\,(p-2)\,x = 4p$ pomocí posuvníků v Geogebře.

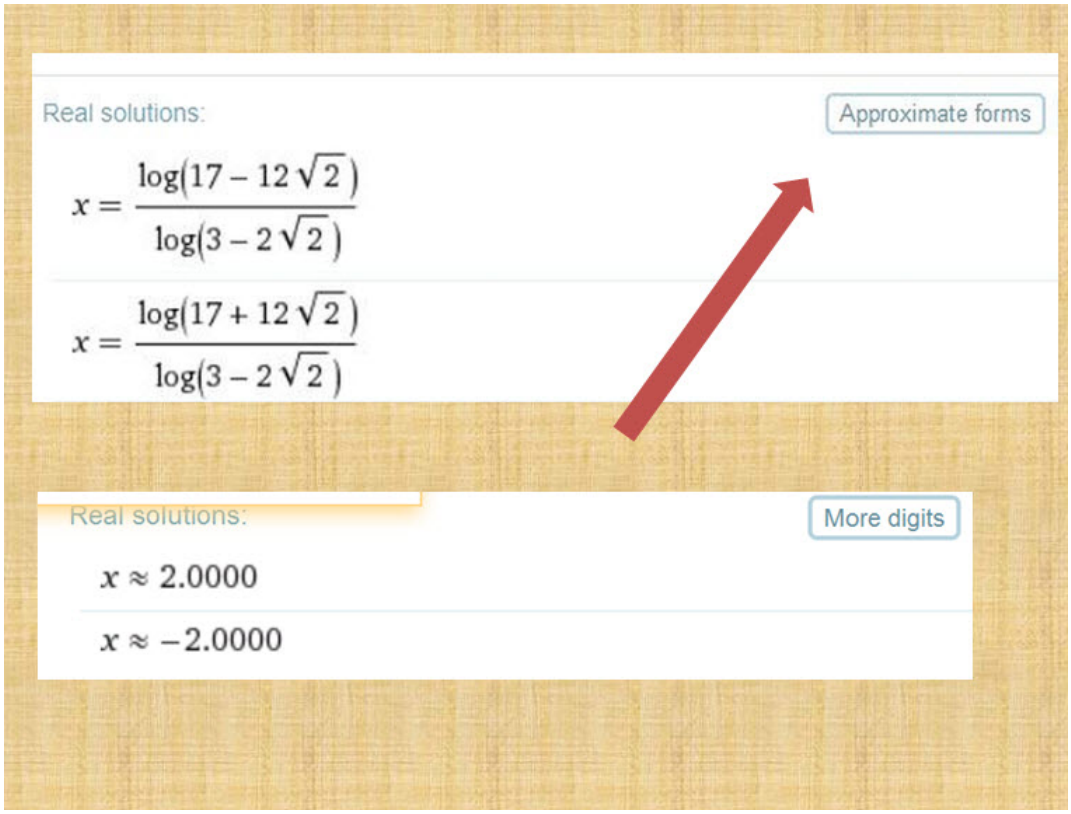
Otázka standardnosti okna, rozlišení apod. je již dobře popsána, viz např. (Drijvers, 2000), (Guin & Trouche, 1999) a (Artigue, 2002).

Dalším okruhem potíží je problém ekvivalentnosti výrazů či čísel. Vzniká například otázka: Je výsledek přibližný, nebo přesný? Co udělal software s desetinným rozvojem? Odsekl ho? Zaokrouhlil? Jde o jiný zápis téhož? Máme ukázky i toho, že uživatel může považovat přesný výsledek dodaný kalkulačkou či softwarem za přibližný. Například z výsledků dodaných WolframemAlpha by se mohlo zdát, že výsledky dodané softwarem budou přibližné (viz obr. 2), přestože 2 i -2 jsou přesným výsledkem číselného výrazu na levé straně rovnosti, jak lze snadno ukázat metodou papír – tužka. Podobně uvádí i Řezáč pro výsledek získaný kalkulačkou (Řezáč, 2011), totiž že 2 či -2 jsou podle kalkulačky pouze přibližnými výsledky.

[1]KMDM, PedF UK v Praze, alicebila@seznam.cz, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz


Soubor Úpravy Zobrazit Nastavení Nástroje Okno Nápověda
Algebraici
Nákresna
Funkce
f(x) =
g(x) =
Číslo
p = 2
p = 2
f(x)=p.(p-2).x
g(x)=4.p
Graf jedné přímky za osou x, graf druhé přímky mimo okno

Obr. 1


Real solutions:
Approximate forms
$x = \frac{\log(17 - 12\sqrt{2})}{\log(3 - 2\sqrt{2})}$
$x = \frac{\log(17 + 12\sqrt{2})}{\log(3 - 2\sqrt{2})}$
Real solutions:
More digits
$x \approx 2.0000$
$x \approx -2.0000$

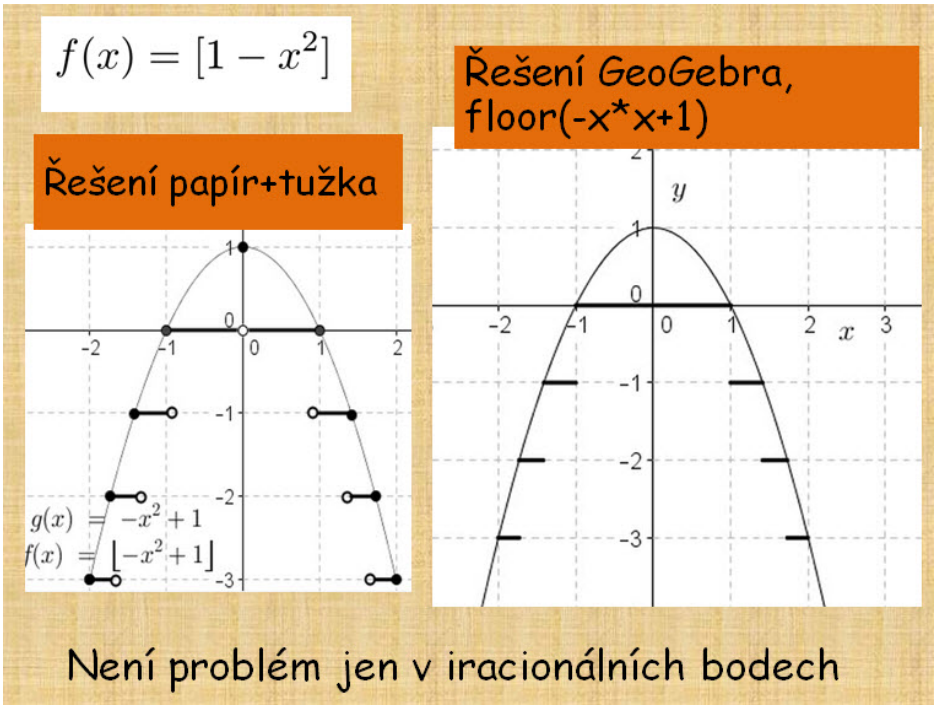
Obr. 2

Problematickým okruhem zůstávají nadále například grafy nespojitých funkcí, které uživatel snadno řeší rozborem jednotlivých případů nebo vhledem. Ani sofistikovaný software nemůže tento postup použít, v některých případech udělá chybu. GeoGebra například některou hodnotu přeskočí, nespočítá hodnotu v „zajímavých“ případech.

Grafy nespojitých funkcí

Symbolem $\mathbb{Z}$ dále míníme množinu všech celých čísel. Budeme-li mluvit o funkci, máme na mysli reálnou funkci jedné reálné proměnné. Celou část $[x]$ reálného čísla x definujeme těmito vlastnostmi: $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leq x$ a $[x]+1 > x$. Definici jsme přejali z (Calda, 1995).

Srovnejme výsledek dodaný GeoGebrou a získaný metodu tužka – papír (obr. 3).



Obr. 3

Jak vidíme, GeoGebra nevykreslí krajní body jednotlivých intervalů, ale také nepřiřadí správnou funkční hodnotu v bodě $x = 0$.

Závěr

Současný digitale native na rozdíl od předchozí generace často věří ve výsledek dodaný softwarem až příliš. Z pochopitelných důvodů i obrázek lehce zfalšovaný a dodaný pomocí software Word je pro ně věrohodnější než týž obrázek načrtnutý

na tabuli. Tuto „víru ve výsledek dodaný softwarem“ považujeme za šířeji pojatou překážku (obstacle). Ukázky, kdy software chybuje, mohou pomoci oslabit takřka neomezenou víru ve výsledky dosažené pomocí výpočetních programů. Zdá se dokonce, že předpovídání toho, co software udělá se speciálními úlohami jednoduše řešitelnými metodou tužka a papír, bude patřit k novým schopnostem a znalostem uživatelů zejména v případech, kdy řešení softwaru se bude odlišovat od řešení tužka a papír a v některých případech bude i chybné. Chyby softwaru se mohou stát motivujícími (Kdo správně odhadne, co software udělá? Umíme si správně vybrat, zda pracovat metodou tužka – papír, nebo pomocí softwaru? Mám pravdu já nebo software?).

Literatura

[1] ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

[2] BÍLÁ, A. & JANČAŘÍK, A. (2015). Limity matematického software a jeho uživatelů. In Szarková, D., et al. (Eds.). *Aplimat 2015. 14th Conference on Applied Mathemtatics. Proceedings* (pp. 45–52).

[3] CALDA, E. (1995). *Rovnice ve škole neřešené.* Praha: Prometheus.

[4] DRIJVERS, P. (2000). Students encoutering obstacles using CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 189–209.

[5] GUIN, D. & TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 195–227.

[6] ŘEZÁČ, M. (2011). *Exponenciální, logaritmické rovnice a jejich soustavy s využitím internetu.* [online] [Diplomová práce]. Praha: UK MFF. [cit. 2014-09-12]. Dostupné z http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/miroslav_rezac/.

Pozn.: Příspěvek vychází z (Bílá & Jančařík, 2015).

Úpravy algebraických výrazů v šetření TIMSS a v pracích vybraných žáků

Vladimír Bílek[1]

Příspěvek se zabývá žákovskými obtížemi a chybami při úpravách algebraických výrazů na druhém stupni základní školy. Je založen na klinických rozhovorech se čtrnácti žáky a vybraných výsledcích mezinárodní srovnávací studie TIMSS. Cílem je poukázat na to, že závěry vyvozené na základě výsledků TIMSS mohou být do jisté míry odlišné od závěrů vyvozených z klinických rozhovorů.

Srovnávací studie v matematice nám pomáhají k tomu, abychom určili místa, ve kterých mají žáci obtíže. Testy hojně využívají uzavřených úloh, v nichž mají žáci na výběr obvykle ze čtyř možných odpovědí. Jedna z možností je správná, ostatní odpovědi ale nejsou nijak nahodilé. Ve většině jsou vytvořené tak, aby pokud možno upřesnili místo a krok, ve kterém žák chyboval. Na základě četnosti žákovských odpovědí můžeme vyvozovat, jakých konkrétních chyb se žáci dopouštějí a v kterých krocích nejčastěji selhávají. Snahou je se v budoucnu těmto místům více věnovat a u již chybujících žáků zvolit vhodnou reedukaci.

Metodou sběru dat vlastního výzkumu byly klinické rozhovory s celkem čtrnácti průměrnými a mírně nadprůměrnými žáky ze tří škol. Klinické rozhovory byly vedeny tak, že žák řešil jednotlivé úlohy a buď v průběhu či na konci práce okomentoval své řešení, případně odpovídal na doplňující otázky tazatele. Žákovi nebyly dány žádné možné odpovědi. Na konci každé úlohy mu ale bylo sděleno, zda je výsledek správný, či nikoli. V takovém případě měl žák možnost úlohu řešit znovu. Rozhovory byly nahrávány na videokameru a získaný záznam byl spolu s písemným žákovým řešením analyzován. Přitom jsem zjistil, že se mé výsledky ne vždy shodují s tím, jak jsou problémy žáků u konkrétní úlohy popisovány na základě studie TIMSS. Příkladem je následující dvojice úloh.

Úloha 1 (TIMSS, Úloha M04-03)

Zadání: **Nechť $a = 3, b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?**

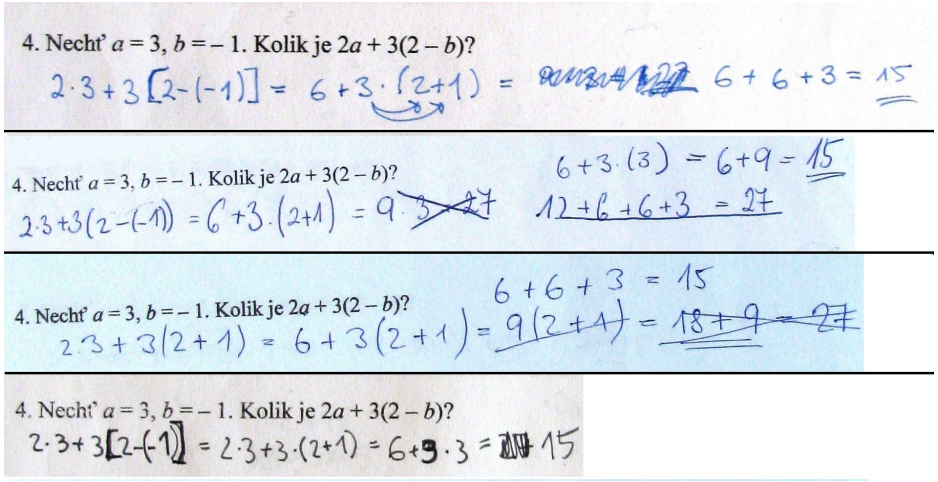
A) 15 **B) 14** **C) 13** **D) 9**

Nejčastější chybnou odpovědí českých žáků byla odpověď D s četností 44,6 %. Správnou odpověď A zvolilo 33,8 % žáků (Tomášek et al., 2009). Z odpovědi D) 9

[1]Základní škola a mateřská škola ANGEL v Praze 12 a doktorand na KMDM, PedF, UK v Praze, ladamtb@seznam.cz

lze usuzovat, že žáci nejčastěji chybně dosadili záporné číslo za proměnnou b, tedy $2 \cdot 3 + 3(2 - 1) = 6 + 3 = 9$.

Totožnou úlohu řešili i žáci účastnící se rozhovorů. Z analýzy jejich postupu řešení vyplynulo, že chybného dosazení záporného čísla za proměnnou b se dopustili pouze 2 ze 14 žáků. Objevila se ale jiná, z mého pohledu závažnější chyba. Po dosazení číselných hodnot za proměnné nedalo sedm žáků přednost násobení před sčítáním při úpravě číselného výrazu (obr. 1). Všichni žáci, jenž se dopustili této chyby, dospěli ke stejnému výsledku 27. Po upozornění na chybný výsledek se všichni opravili na konečných 15.



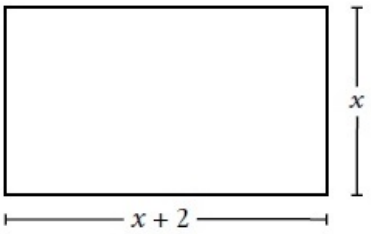
Obr. 1: Čtveřice žákovských řešení, v nichž není dána přednost násobení před sčítáním. V prvním řádku si žák pomohl šipkami až poté, co mu bylo řečeno, že výsledek 27 je chybný.

Kdyby žáci účastnící se rozhovorů řešili úlohu v testu TIMSS, číslo 27 by jim žádná z možností nenabízela, což by je pobídlo k novému řešení. V následující opravě by se zřejmě dostali k možnosti A) 15 (jako se to stalo při rozhovorech), čímž by se zařadili do skupiny správně odpovídajících žáků.

Úloha 2 (TIMSS, Úloha M10-08)

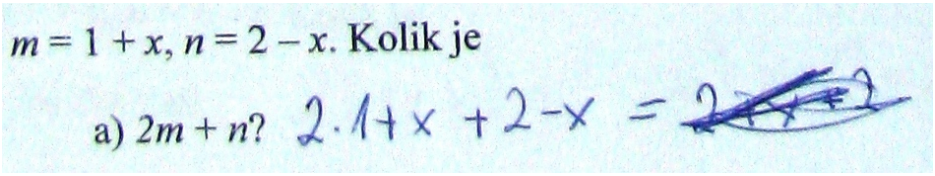
Zadání: **Který výraz vyjadřuje obsah tohoto obdélníku?**

A) $x^2 + 2$ **B)** $x^2 + 2x$ **C)** $2x + 2$ **D)** $4x + 4$

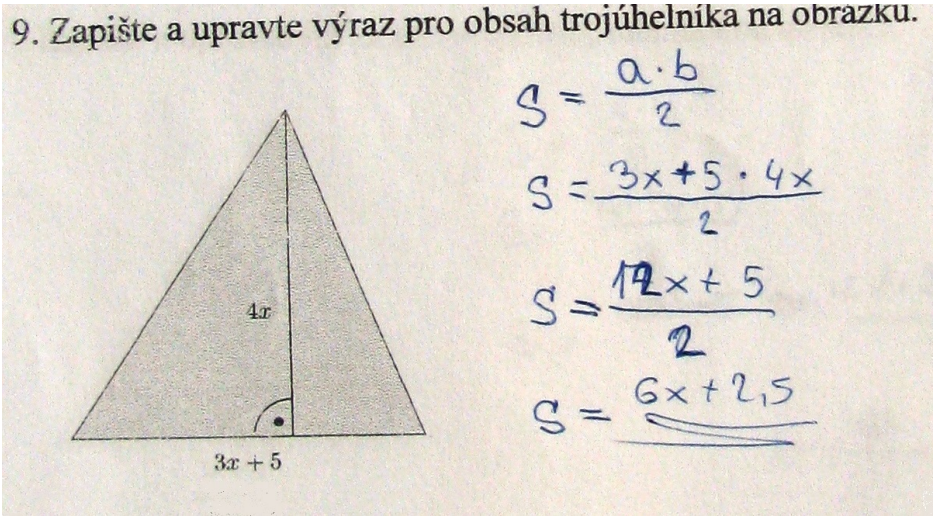


Správně odpovědělo 35,5 % českých žáků. Nejčastější nesprávná odpověď $x^2 + 2$ (36,1 %) odpovídá nesprávně provedenému roznásobení závorky – žáci nechápou výraz v závorce jako jeden celek (Rendl & Vondrová, 2014). Vypadá to, že žáci postupovali takto: $x(x + 2) \to x^2 + 2$.

V rozhovorech byly použity obdobné úlohy s geometrickým kontextem i úlohy, kde bylo úkolem pouze dosadit výraz za proměnnou do jiného výrazu a nový výraz zjednodušit. Objevila se chyba, kdy žák dosadil výraz za proměnnou, ale v nově vzniklém výrazu opomenul závorky (obr. 2 a obr. 3). Zdá se, že žák neměl problém v „mechanické výměně“ m za $1+x$, ale v pochopení matematického zápisu (obr. 2). Obdobně je tomu i u trojúhelníku, kdy žák navíc chyboval i v úpravě (obr. 3).



Obr. 2: Žák opomenul závorky při dosazení výrazu za proměnnou.



Obr. 3: Žák si zapsal obecný výraz pro obsah trojúhelníku, ovšem dosadil bez závorek.

Pokud se vrátím k úloze z TIMSS, mohli někteří žáci postupovat takto: Obsah obdélníku je roven výrazu $x \cdot x + 2 = x^2 + 2$. Chyba tedy není v úpravě mezi algebraickými výrazy, ale již ve vytvoření prvního výrazu, který neodpovídá zadání úlohy. Na základě výsledků z TIMSS by se učitel při reedukaci žáka více zaměřil na úpravy algebraických výrazů než na jejich vytváření s geometrickým kontextem, což by nejspíš nemělo požadovaný efekt.

Závěr

Snahou příspěvku bylo poukázat na to, že na základě žákovy chybně zvolené odpovědi, nemusí být skutečná chyba nebo žákův nedostatek zjištěn přesto, že výběr odpovědí je postaven tak, aby chybu konkretizoval.

Literatura

[1] RENDL, R. & VONDROVÁ, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace,* 24(1), 22–57.

[2] TOMÁŠEK, V., et al. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Úloha o trpaslíkoch

Alžbeta Brišová, Jana Bukovinová[1]

Presvedčenie, že riešenie matematických problémov sa nachádza v centre vyučovania a učenia sa matematiky, upriamilo našu pozornosť na spôsob riešenia matematických problémov perspektívnymi učiteľmi primárneho vzdelávania. Ponúknutá je nielen analýza rôznych typových postupov uvažovania a riešenia bonusovej úlohy o trpaslíkoch, ale aj rozbor najčastejších chýb a ich možných príčin. V súvislosti s ohodnotením bonusových úloh vzniká pomerne rozsiahly priestor na diskusiu ohľadom podmienok, za akých ich zadávať.

Charakteristika študijného predmetu Matematická gramotnosť

Študenti bakalárskeho študijného programu Predškolská a elementárna pedagogika na Univerzite Mateja Bela sú povinní v rámci svojho vysokoškolského vzdelávania absolvovať predmet Matematická gramotnosť, ktorý je zaradený do zimného semestra prvého ročníka. V akademickom roku 2014/2015 naň bolo zapísaných 104 študentov. Zo strany vyučujúcich je snaha vytvoriť podnetné prostredie pre nadobúdanie a rozvoj schopností a matematického myslenia v súlade s matematickou

[1]Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, alzbeta.brisova@umb.sk, jana.bukovinova@umb.sk

gramotnosťou. Dôraz je kladený aj na formovanie kladného vzťahu budúcich učiteľov k matematike. Tieto východiská sa odrazili aj v organizácií tohto predmetu, ktorý ponúkal študentom zapojiť sa aj do nepovinných častí, ako je napr. riešenie bonusových úloh. Hlavné dôvody pre zadávanie týchto úloh sú:

– motivujú riešiteľov venovať sa matematike,

– ich riešením sa rozvíjajú kompetencie riešenia úloh,

– slovné ohodnotenie riešenia ponúka spätnú väzbu riešiteľovi,

– sú cenným zdrojom spätnej väzby pre zadávateľa.

Riešenie bonusových úloh, ktoré boli postupne zadávané cez LMS Moodle v priebehu seminára Matematická gramotnosť, bolo dobrovoľné. Podľa charakteru ich možno nazvať neštandardnými matematickými úlohami či (podľa Gehlbacha in Zelina, 1994) úlohami s vyššou úrovňou tvorivosti, keďže sa vyznačujú divergentnosťou v riešení i vo výsledkoch. Mali formu slovných úloh a ponúkali pre študentov priestor na hľadanie vhodného algoritmu, ktorý korešpondoval s preberanou témou ale nebol nacvičený. Študenti za ich riešenie získavali bonusové body, ktoré sa im pripočítavali do celkového hodnotenia predmetu. Špecifikom týchto úloh je, že existujú rôzne spôsoby ich riešenia, no na získanie plného počtu bodov za danú úlohu bolo postačujúce uviesť aspoň jeden správny spôsob. Počas semestra boli zadané štyri takéto úlohy. Úloha analyzovaná na konferencii *Dva dny s didaktikou matematiky, Úloha o trpaslíkoch*, mala štyri správne riešenia. Prostredie úlohy je prispôsobené záujmom cieľovej skupiny. Svoje riešenie odovzdalo 65 zo 104 zúčastnených študentiek (63 % z celkového počtu). Presné znenie úlohy je uvedené nižšie.

Úloha o trpaslíkoch

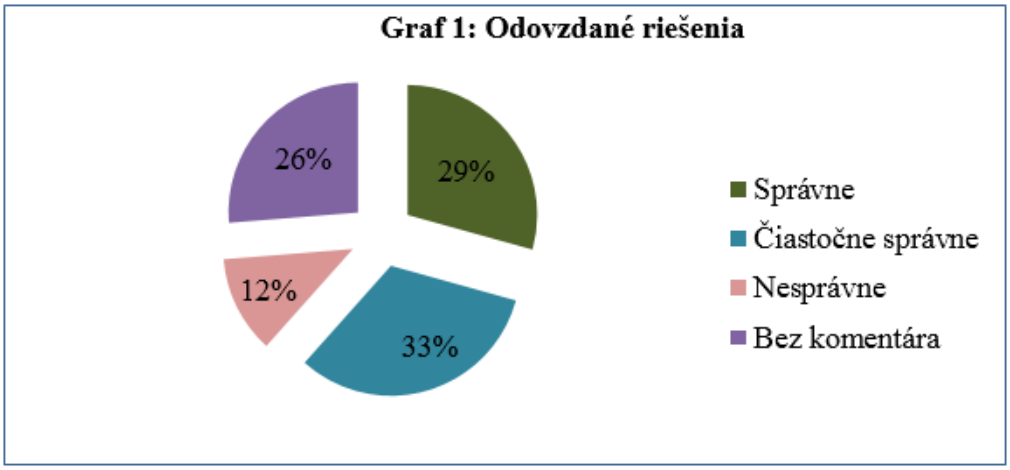
Kde bolo, tam bolo, za siedmymi horami a siedmymi dolinami žili štyria trpaslíci: Alica, Bruno, Cilka a Denis. Každý z nich mal na hlave buď bielu alebo zelenú čiapku. Aj keď žiadny trpaslík nevidel svoju čiapku, ten, ktorý mal bielu čiapku, vždy hovoril pravdu. Trpaslík, ktorý mal zelenú čiapku, vždy klamal. Jednotliví trpaslíci povedali tieto výroky:

- Alica: Vidím 2 zelené a 1 bielu čiapku.
- Cilka: Vidím 3 biele čiapky.
- Denis: Vidím 1 bielu a 2 zelené čiapky.

Zistite, aké čiapky mali jednotliví trpaslíci. Nájdite všetky možnosti.

Analýza riešenia úloh

Úloha mala štyri možné správne riešenia: (1) Biele čiapky majú Alica a Denis, zelené Bruno a Cilka; (2) Alica a Bruno majú biele čiapky, Cilka a Denis majú zelené; (3) Nositeľmi bielych čiapok sú Bruno a Denis, zatiaľ čo Alica a Cilka majú zelené čiapky; (4) Všetci majú zelené čiapky. Nasledujúci graf popisuje správnosť/nesprávnosť odovzdaných riešení a je aj ukazovateľom percentuálneho zastúpenia študentov v jednotlivých kategóriách.



Z grafu je možné vyčítať, že 62 % riešení, ktoré obsahovali komentár, obsahovali aspoň jedno správne riešenie. Postupy riešenia a ich výskyt môžeme zhrnúť do nasledujúcich kategórií:

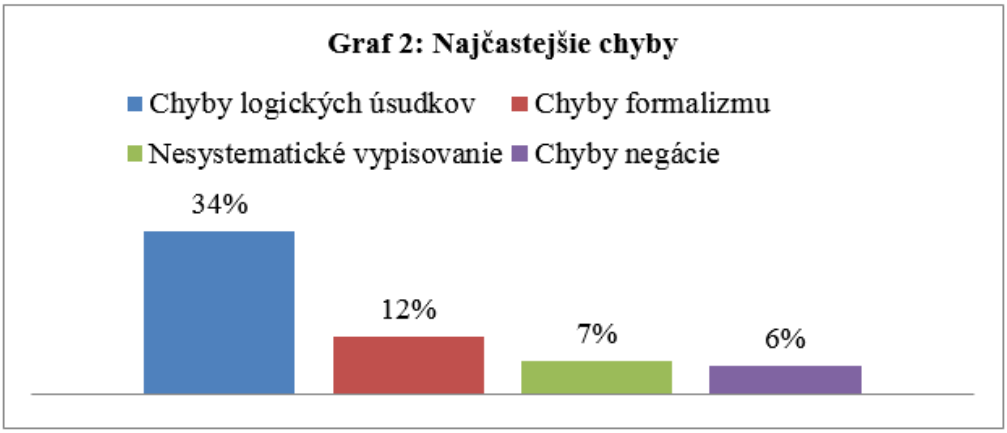
- tabuľka pravdivostných hodnôt (34 %) – vypísanie rôznych kombinácii bielych a zelených čiapok;
- úvaha o rozdelení bielych a zelených čiapok (12 %) – kritériom rozdelenia bola početnosť výskytu jednotlivých čiapok a ich možné priradenia (4 zelené, 1 biela a 3 zelené, 2 biele a 2 zelené, 3 biele a 1 zelená, 4 biele čiapky);
- úvaha o (ne)pravdivosti výpovedí (19 %) – rozdelenie zelených a bielych čiapok len tým trpaslíkom, ktorých výpoveď je známa;
- nesystematické riešenie (9 %);
- bez postupu (26 %).

Chyby v riešení

Pri analýze odovzdaných riešení sme sa zamerali na typy chýb a pokúšame sa vysvetliť aj ich príčiny. Zdôrazňujeme, že chybu vnímame ako zdroj nových poznatkov, keďže nás môže priviesť na stopu svojrázneho (často neúplného) uvažovania študentov. (Čáp & Mareš, 2001)

Prostredie v LMS Moodle nám umožnilo promptnú spätnú väzbu aj v podobe otázok alebo požiadavky na objasnenie uvažovania čím sa vytvoril priestor, aby študenti samostatne prišli na to kde a akú chybu urobili.

Chyby sme podľa typu rozdelili do štyroch kategórií, pričom v niektorých riešeniach sa vyskytlo aj niekoľko druhov chýb. Nasledujúci graf podáva prehľad najčastejších chýb.



Viaceré chyby (vyskytujúce sa v 34 % riešení) súviseli s logickými závermi a svedčia o medzerách riešiteľov v tejto oblasti. Nazvali sme ich **chyby logických úsudkov**. Do tejto výskytovo najpočetnejšej skupiny chýb sme zaradili dva druhy chýb:

(1) Zo správnych predpokladov vyplývali nepravdivé alebo s predpokladmi nesúvisiace závery. Nasledujúce výroky sú nositeľmi takejto chyby: *Cilka vraví, že vidí tri biele čiapky, z toho vyplýva, že Cilka má zelenú čiapku, teda klame,* alebo *Alica a Denis majú rovnaký výrok, tak musia mať rovnaké čiapky.*

(2) Nevedomosť, že disjunkcia je pravdivá práve vtedy keď aspoň jeden z výrokov je pravdivý. Tento nedostatok možno nájsť v nasledujúcom uvažovaní študentky: *Možnosť, žeby všetci klamali a mali zelené čiapky, ale toto tvrdenie vylučujem lebo v zadaní je, že mali buď zelené alebo biele.*

Druhú veľkú kategóriu chýb (objavili sa v 12 % riešení), tzv. **chyby formalizmu**, predstavujú chyby, ktoré poukazujú na formálne znalosti. Pod formálnymi znalosťami, opierajúc sa o definíciu Hejného rozumieme „také znalosti, ktoré sa neopierajú o izolované a univerzálne modely, sú chorobou kognitívnych štruktúr“ (Hejný & Kuřina, 2009). Nasledujúce výroky sú ukážkou takejto znalosti: *V tabuľke je preto 16 riadkov, pretože keď si dáme 2 na počet prvkov, čiže v našom prípade 4, vyjde nám výsledok 16.* V niektorých riešeniach sa objavoval zápis: *Vidím 2 zelené a 1 bielu čiapku* $\rightarrow a \wedge b$ a *vidím 1 bielu čiapku a 2 zelené* $\rightarrow b \wedge a$, no ďalej v riešení so symbolom „a“ riešitelia pracovali ako s celým výrokom Alice. Zrejme riešiteľky zbadali spojku „a“ a mali vedomosť, že táto spojka súvisí s konjunkciu, preto tento symbolický zápis nesprávne použili aj v tomto prípade.

Až v 7 % postupov riešení, snaha o vypisovanie možností viedla k strate jedného alebo viacerých riešení práve kvôli **nesystematickému vypisovaniu**. Takéto riešenia síce naznačujú použitie spôsobu riešenia pokus-omyl, ktorý je pri určitých typoch tvorivých úloh žiadaný, ale má smerovať k objaveniu určitých zákonitostí súvisiacich so zadaním úlohy. Autori týchto riešení sa ďalším hľadaním súvislostí ďalej nezaoberali a uspokojili sa s tým, že našli aspoň jedno správne riešenie.

Poslednú kategóriu častých chýb predstavujú samostatne kategorizované **chyby negácie**, ktorých príčina tkvie v nesprávnom logickom prevrátení hodnoty výroku. Objavili sa v 6 % riešení a upozorňujú nás na nedostatky v negácii jednoduchých výrokov. *Ak klame Alica, tak musí vidieť 2 biele a jednu zelenú čiapku.* Nemenej zaujímavé je sledovať nasledujúce úsudky: *Cilka má zelenú čiapku, teda klame. A teda negácia jej výroku je: „Nevidím 3 biele čiapky.“ Čo je to isté akoby vravela: „Vidím 3 zelené čiapky.“*

Záver

Tento príspevok ponúka vhľad do študentských riešení bonusovej matematickej úlohy neštandardného charakteru. Jej algoritmus riešenia nie je jednoznačný a navyše má niekoľko správnych riešení. Študenti prejavili o úlohu záujem – riešilo ju 63 % študentov. Svoje riešenia posielali elektronicky, pričom na riešenie mali limitovaný časový úsek, 10 dní. Avšak vyskytuje sa problém s identickými alebo podobnými riešeniami (identifikovaných bolo až 23 % podobných riešení) a následne sa otvára diskusia s ich bodovým ohodnotením. Kolektívne riešenie nepovažujeme za nežiadúci jav, avšak v súvislosti s pridelením bodov, nemožno zanedbať ani tento faktor. Zadávanie takýchto úloh je dôležité ako pre učiteľov, tak aj pre samotných študentov, ktorí sa dobrovoľne zaoberajú zaujímavou matematikou. Zdôrazňujeme, že študentské riešenia môžu ponúknuť pohľad do úrovne premýšľania, argumentácie a chýb na strane študentov a stávajú sa tak cennou spätnou väzbou pre učiteľov.

Literatúra

[1] HEJNÝ, M. & KUŘINA, F. (2009). *Dítě, škola a matematika.* Praha: Portál, 240 s.

[2] ČÁP, J. & MAREŠ, J. (2001). *Psychologie pro učitele.* Praha: Portál, 656 s.

[3] ZELINA, M. (1994). *Stratégie a metódy rozvoja osobnosti dieťaťa.* Vyd. 1. Bratislava: Iris, 232 s.

Čeho si na praxi všímají studenti – pohledy na realitu vyučování matematice v primární škole očima budoucích učitelů

Jana Cachová[1]

Příspěvek přináší prostřednictvím několika didakticko-matematických situací z praxe, zaznamenaných studenty učitelství, pohled na realitu školního vyučování matematice na 1. stupni ZŠ. Poukazuje na význam zaznamenávání a následných rozborů didakticko-matematických jevů pro studenty učitelství, ale i pro učitele z praxe. Zároveň upozorňuje, že je pro některé studenty obtížné všímat si didakticko-matematického obsahu vyučování. Proto je zapotřebí tuto citlivost vnímání u studentů systematicky pěstovat.

Postřehy z reality školního vyučování jsou pro studenty učitelství primárního vzdělávání důležitým studijním materiálem (viz Cachová, 2008). Na základě rozborů didakticko-matematických jevů, kterých si na praxi sami všímají, zaznamenávají si je a zpětně pak o nich navzájem diskutují (na semináři, nebo prostřednictvím diskusního fóra v LMS systémech) se učí pružně reagovat na situace, které mohou při vyučování nastat. Zároveň se hledáním lepšího či vhodnějšího řešení určité situace učí aplikovat didakticko-matematické poznatky do školní praxe a v neposlední řadě také zvyšovat svou citlivost vnímat a zaznamenávat jevy, kterým by při vyučování matematice měli věnovat pozornost, protože jsou z pohledu didaktiky matematiky důležité.

Zpočátku je pro studenty problémem zaměřit se při sledování jevů z praxe na skutečně didakticko-matematický obsah. Většinu studentů zprvu upoutávají spíše obecně pedagogicko-psychologické jevy, nedokážou věnovat patřičnou pozornost didakticko-matematickému obsahu. Schopnost všímat si, identifikovat a interpretovat didakticko-matematické jevy je podle Stehlíkové (2010) součástí didaktických znalostí obsahu. Postupem času se schopnost studentů vidět matematický obsah a všímat si ho zlepšuje – u některých více, u některých méně. Domnívám se, že to hodně závisí i na úrovni matematické gramotnosti jednotlivých studentů učitelství.

Následující tři ilustrace, které zaznamenali studenti učitelství primárního vzdělávání, ukazují, že realita školního vyučování matematice na prvním stupni základního vzdělávání není zdaleka uspokojivá a že by podle mého názoru neškodilo, pokud by i učitelé z praxe dostali příležitost reflektovat svoje vyučování např. prostřednictvím diskusního fóra v LMS systému s dalšími kolegy, studenty učitelství a odborníky na didaktiku matematiky.

[1]Katedra matematiky PřF UHK v Hradci Králové, jana.cachova@uhk.cz

Ilustrace 1: **Obsah čtverce ve čtvercové síti** (5. ročník, z pozorování studentky učitelství pro primární vzdělávání)

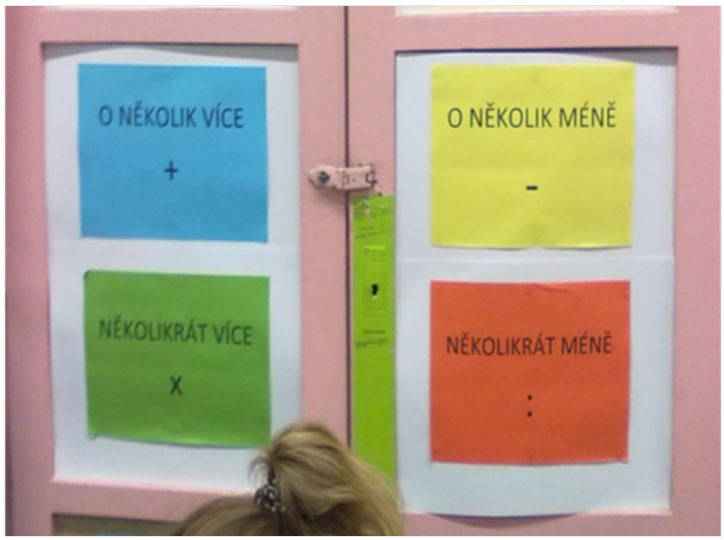
> Žáci pracovali se čtverečkovaným papírem. Ukázali si, jak vypadá čtverec o rozměrech 1 cm, 1 dm, 1 m a jaký je jejich obsah, tudíž 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2. Pak ale paní učitelka zadala čtverec o rozměrech 3×3 cm. Žáci si do papíru namalovali čtverec.
>
> U: *Jaký je jeho obsah?...*
>
> Většina třídy odpověděla *tři* (nejspíš na základě negativního transferu – pro čtverec o straně délky jedna byl výsledek roven jedné, u čtverce o délce strany tři bude jeho obsah roven třem...).
>
> Názor studentky: *Když už s tímto papírem pracovaly, očekávala jsem, že děti budou počítat hlavně čtverečky, aby zjistily obsah daného útvaru...*

Jak je vidět z ilustrace, pouhé užití čtvercové sítě ve vyučování ještě nezajistí dosažení kýženého efektu, v tomto případě pochopení podstaty určování obsahu útvaru právě na základě jeho zobrazení v této síti. Daleko důležitější je, jak (jakým způsobem) se s nástrojem v hodině pracuje.

Na základě výše uvedené ilustrace vyvstává i naléhavá otázka:

Pěstujeme skutečně ve školách správné porozumění matematickým pojmům, vztahům a souvislostem, rozvíjíme u žáků správné představy o nich?

Ilustrace 2: **„Tahák“ na zdi** (4. ročník, z pozorování studentky učitelství pro primární vzdělávání)



Obr. 1

Pěstování správných představ tato nápověda (viz obr. 1) určitě nenapomáhá. Učitel dosahuje naopak opačného výsledku – u slovních úloh s antisignálem budou děti úlohy řešit špatně, nebo budou zmatené, protože jejich řešení nebude odpovídat tabulce na zdi.

Ilustrace 3: **Řešení slovní úlohy** (2. ročník, z pozorování studentky učitelství pro primární vzdělávání)

> Paní učitelka bez motivace zadá nové téma: *slovní úlohy*. Na tabuli napíše zápis slovní úlohy.
>
> U: *autíčko . . . 5 Kč*
> *panenka . . . 8 Kč*
> *Kolik stojí hračky dohromady?*
>
> Žáci přepisují zápis do svých sešitů, protože jim to učitelka řekla. Učitelka žáky napomíná, nutí je dodržovat krasopis při hodině matematiky. Děti jsou zmatené, nerozumí práci. Pouze přepisují, nepočítají samostatně.

Výše uvedené situace zaznamenané studentkami dokládají, že se v realitě školního vyučování najde mnoho momentů, které by bylo možné společně reflektovat s kolegy a hledat možnosti zlepšení.

O tom, že někdy podněty ke zlepšení školní praxe navrhují sami žáci, vypovídá poslední z ilustrací.

Ilustrace 4: (1. ročník, z pozorování studentky učitelství pro primární vzdělávání)

> Při celodenním projektu v první třídě paní učitelka četla pohádku. Zadání pro žáky znělo tak, že když se vyskytovala v textu čísla od 1 do 5, měli zareagovat zvednutím kartičky s příslušným číslem nad hlavu. Jeden z žáků u prvních několika čísel zvedal vždy správnou kartičku, pak ale začal například při čísle 3 zvedat dvě kartičky, a to s číslicemi 1 a 2. Sám pro sebe si vymyslel složitější variantu této aktivity, a to tak, že pokud to šlo, tak výsledek ukázal jako součet dvou čísel.

Děti mnohdy dokážou samy dobře odhadnout, nakolik je pro ně úloha zajímavá a náročná. Je patrné, že chlapec z ukázky chce pracovat, sám pro sebe si hledá složitější variantu, jak se zabavit a zároveň zaměstnat. Pokud učitel dokáže citlivě reagovat na projevy dětí, je to jedna z možných cest, jak zlepšit svou práci.

Literatura

[1] CACHOVÁ, J. (2008). Cesty ke zlepšení školní praxe. In Stehlíková, N. & Jirotková, D. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2008* (s. 39–41). Praha: UK PedF.

[2] STEHLÍKOVÁ, N. (2010). Interpretace některých didakticko-matematických jevů u studentů učitelství a u učitelů matematiky. *Pedagogika*, roč. LX, č. 3–4, 108–118.

Simulácia náhodných javov pomocou Geogebry

Zoltán Fehér[1]

Vhodná vizualizácia matematického obsahu podporí lepšie pochopenie učiva a pomáha pri porozumení súvislostí aj pri vyšetrení vlastností pojmov. V príspevku chceme poukázať na možnosti podpory vyučovania náhodných javov pomocou počítačovej simulácie. Analyzujeme hlavné možnosti použitia simulácie a poukážeme na využitie dynamickej vizualizácie softvérom GeoGebra s cieľom efektívnejšieho vyučovanie náhodných javov.

Vo vyučovaní náhodných javov v rôznych stupňoch školskej matematiky sa najčastejšie využíva metóda demonštrovania a pozorovania, keď učiteľ ukazuje žiakom reálne javy alebo ich modely, ktoré žiaci pozorujú. Metóda demonštrovania vo vyučovacom procese spĺňa rôzne didaktické funkcie: ak je zaradené na začiatku vyučovacej jednotky, môže žiakov motivovať; v spojení s výkladom slúži na osvojovanie nového učiva; po osvojení učiva žiakmi môže slúžiť na potvrdenie platnosti teórie, princípu, zákona a na upevnenie a prehĺbenie učiva.

Uskutočnenie experimentov je tradičná forma získania výsledkov z pozorovania prírodných javov. Vo vyučovaní matematiky je experimentovanie práve najčastejšie používaná v súvislosti s pravdepodobnostnou tematikou. Experimentovanie umožní žiakom získanie priamich skúseností na základe ktorých je možné vysloviť všeobecné pravidlá, matematické zákonitosti. V prípade náhodných javov reálne uskutočnené pokusy môže efektívne doplniť alebo aj nahradiť experimentovanie pomocou výpočtovej techniky.

Dynamické matematické softvéry zvyšujú úroveň vizualizácie vo výučbe a práve dynamika poskytuje možnosť objavovať súvislosti vyšetrením vzájomných vzťahov

[1]Ekonomická Fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne, feherz@ujs.sk

medzi pojmami. Pomocou GeoGebry (GeoGebra, 2015) môžeme úspešne podporiť vytvorenie uceleného vzhľadu na jednotlivé pojmy teórie pravdepodobnosti vytvorením modelov a vizualizáciou všeobecných súvislostí. Tematike využitia GeoGebry vo vyučovaní sa venuje aj práca (Bukor et al., 2012), v ktorom sa nachádzajú rôzne možnosti použitia dynamickej vizualizácie v praxi.

Hlavné možnosti použitia počítačovej simulácie

Počítačovú simuláciu môžeme využiť v závislosti od didaktických cieľov v rôznych fázach vyučovacieho procesu. Samozrejme v prvom rade simuláciu využívame na vizualizáciu a na modelovanie matematického obsahu, čím v značnej miere prispievame k lepšiemu osvojeniu si učiva študentmi. Počítačovú simuláciu vo vyučovaní náhodných javov využijeme:

- pri zavedení základných pojmov ako je *početnosť*, *relatívna početnosť* a *pravdepodobnosť* náhodnej udalosti na znázornenie týchto pojmov;
- pri vysvetľovaní pojmu *elementárnej udalosti*, ktorá má dôležitý význam pri správnom výpočte pravdepodobnosti;
- ako pomôcku pri overení teoretických predpokladov o pravdepodobnosti udalosti resp. rozdelenia pravdepodobnosti v súvislosti s daným javom;
- pri pozorovaní všeobecných vlastností, vzájomných súvislostí premenných;
- ako pomôcku pri riešení úloh, v takých prípadoch, keď priamy výpočet je náročný, zdĺhavý alebo vyžaduje pre žiakov ešte neznáme teoretické vedomosti;
- na demonštráciu teoretických poznatkov, zákonov z teórie pravdepodobnosti.

Príklady simulácie náhodných javov

V školskej matematike predovšetkým pozorujeme diskrétne, rovnomerne rozdelené náhodné javy ku ktorým patria hod mincou, hod kockou, výber gulôčok z urny. Podstatou počítačovej simulácie týchto náhodných javov je generovanie pseudonáhodných čísel. Počítačová simulácia umožní uskutočniť dostatočne veľký počet pokusov, na základe čoho je možné lepšie pozorovať zákonitosti náhodných javov v porovnaní s reálne uskutočnenými experimentmi.

Matematický softvér GeoGebra obsahuje príkazy na generovanie pseudonáhodných čísel, čo umožní vytvoriť simulácie náhodných udalostí. V GeoGebre pre generovanie náhodného celého čísla použijeme príkaz *RandomBetween*$[a, b]$. Výsledok hodu mincou generujeme príkazom *RandomBetween*$[0, 1]$, a hodu kockou príkazom *RandomBetween*$[1, 6]$. Pre simuláciu javu vytvoríme applet, v ktorom potrebujeme

použiť aj ďalšie príkazy na spracovanie údajov a na ich znázornenie. Jednotlivé príkazy v GeoGebre zapíšeme do vstupného poľa resp. do okienka vlastností objektu v paneli *„Skriptovanie“*.

Učebné materiály, ktoré sme vytvorili pre simuláciu základných typov náhodných javov sme zverejnili na stránke GeoGebraTube v časti GeoGebraBooks pod názvom *Simulations* (Fehér, 2015). GeoGebraBook obsahuje tieto applety:

1. *Flipping 1 coin* (hod 1 mincou): použijeme na zavedenie a znázornenie základných pojmov. Sledujeme početnosť a relatívnu početnosť padnutia hlavy, pozorujeme súvislosť ako hodnota relatívnej početnosti sa blíži k pravdepodobnosti 0,5.

2. *Rolling a dice* (hod 1 kockou): v dvoch oknách súčasne sledujeme počet aj relatívny počet padnutia čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, ktoré sú graficky znázornené aj zaznamenané v tabuľke s uvedením hodnoty pravdepodobnosti $\frac{1}{6}$.

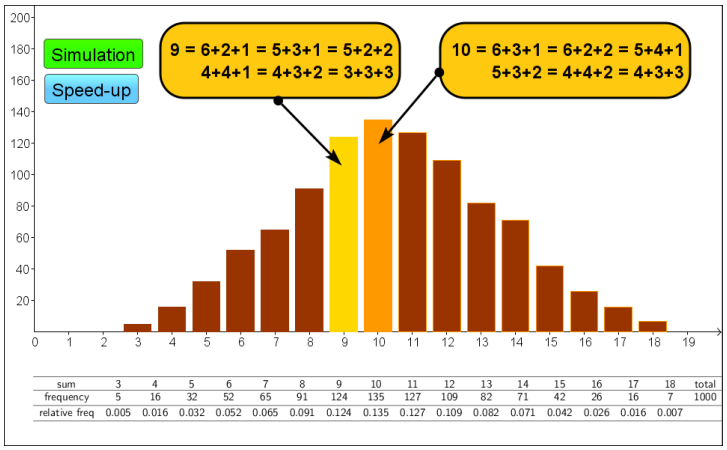
3. *Flipping 2 coins* (hod 2 mincami): použijeme ako pomôcku pri overení teoretických predpokladov o rozdelenia pravdepodobnosti, ak sledujeme počet padnutia hlavy: 0, 1, 2. Tieto hodnoty podľa rôznych úvah môžu byť v pomere $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ alebo $\frac{1}{4} : \frac{2}{4} : \frac{1}{4}$, správnosť predpokladu overíme na základe pozorovaní.

4. *Rolling two dice* (hod 2 kockami): applet použijeme na objasnenie klasického problému, ktorá vychádza z tvrdenia, že v prípade hádzania 2 kockami súčet 9 aj 10 nastane rovnako dvomi spôsobmi. Simulácia však poukazuje na skutočnosť, že súčet 9 má väčšiu početnosť ako súčet 10. To ale nie je v súlade s tvrdením, preto treba overiť správnosť teoretického výsledku a zistiť správny počet všetkých výsledkov pokusu a určiť počet výsledkov 9 a 10.

5. *Rolling 3 dice* (hod 3 kockami): podobne ako v prípade hodu 2 kockami aj v tejto simulácii riešime otázku (známu ako Galileov problém), že súčet 9 a 10 nastane rovnako šiestimi spôsobmi, ale pozorovanie dáva iný výsledok (obr. 1). Aby pozorovania boli v súlade s výpočtom treba správne určiť počet nastania elementárnych udalostí.

6. *Coin flipping 2n times* (hod $2n$ mincami): v prípade hádzania $2n$ mincami pozorujeme rozdiel padnutia hlavy a znaku. Tento rozdiel bude najčastejšie nulový (prípad $10 - 10$), ale môžu nastať aj väčšie rozdiely, napr. pre $2n = 20$ pozorujeme aj rozdiely 8, 10, 12.

7. *Dice roll* (hod 1 kockou): v simulácii sledujeme počet pokusov potrebných na dosiahnutie vopred daného súčtu ak hádžeme 1 kockou. Výpočet pravdepodobnosti pre všetky výsledky je náročné. Simuláciu použijeme na pozorovanie relatívnej početnosti a pravdepodobnostného rozdelenia.



Obr. 1: hod 3 kockami

8. *Guess the game* (hádanie hry): v applete sú zadané tri náhodné pokusy, z ktorých počítač vyberie jeden a zopakuje n-krát. Na základe výsledkov treba uhádnuť, ktorá hra bola zahraná. Simulácia je vhodná na preverenie znalostí žiakov, pred rozhodovaním treba určiť pravdepodobnostné rozdelenie v troch prípadoch a vytvoriť pravidlo na základe ktorého budú rozhodovať v závislosti od výsledkov pokusu.

Záver

Využitím výpočtovej techniky môžeme vhodne podporiť vyučovanie náhodných javov. V prvom rade počítačovú simuláciu využijeme na vizualizáciu a na modelovanie ale možnosti použitia simulácie sú oveľa širšie. V ukážkach základných typov náhodných javov sme predstavili tieto možnosti použitím softvéru GeoGebra.

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci projektu MŠVVaŠ SR KEGA 002UJS-4/2014.

Literatúra

[1] BUKOR, J., CSIBA, P., FEHÉR, Z. & JARUSKA, L. (2012). Aplikácia GeoGebry v rôznych oblastiach. In *GeoGebra v praxi* (s. 32–113). Komárno: UJS.

[2] GEOGEBRA (2015). [online]. [cit. 07-03-2015]. Dostupné z http://www.geogebra.org.

[3] FEHÉR, Z. (2015). *GeoGebraBook: Simulations*. [online]. [cit. 07-03-2015]. Dostupné z http://tube.geogebra.org/material/show/id/640259.

Možnosť identifikovania úrovne schopností žiakov primárneho matematického vzdelávania prostredníctvom testových úloh

Lucia Ficová[1]

Príspevok je zameraný na jednu z možností identifikovania úrovne schopností žiakov prostredníctvom kognitívnych testov s akcentom na tematický okruh Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika na primárnom stupni vzdelávania v podmienkach Slovenskej republiky. Takýto spôsob zisťovania a mapovania úrovne schopností žiakov prostredníctvom testových úloh, môže slúžiť ako zdroj na vytvorenie rozsiahlej banky úloh pre potreby testovania ako takého, ale aj adaptívneho testovania, ktoré je špecifické výberom testových úloh adaptovaných (prispôsobených) aktuálnej vedomostnej úrovni testovaného žiaka.

Identifikovanie úrovne schopností žiakov sa realizuje prostredníctvom procesu hodnotenia výkonu, resp. správania v určitej – presne vymedzenej – situácii. Jednou z možností merania úrovne schopností žiakov sú aj kognitívne testy, ktoré obsahujú rôzne typy úloh zamerané na posúdenie určitých čiastkových schopností. Identifikovanie úrovne schopností má nesporný význam pre edukačnú realitu a jej procesné nastavenie v čase.

Tvorba testovacích nástrojov so zameraním na zistenie úrovne schopností žiakov je súčasťou národného projektu Zvyšovanie kvality vzdelávania na základných a stredných školách s využitím elektronického testovania, ktorého riešiteľom je Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM). Cieľom projektu je inovovať a realizovať systém meraní na úrovni školy a na národnej úrovni v rámci primárneho, nižšieho sekundárneho a vyššieho sekundárneho vzdelávania, ktorý umožní hodnotiť kvalitu vzdelávania, monitorovať vývoj vzdelávania na základných a stredných školách a ovplyvňovať strategické rozhodnutia v oblasti vzdelávacej politiky. V projekte sú realizované testovania, ktorých cieľom je pilotovanie úloh, ktoré na základe štatistických parametrov môžu byť zaradené do jednej z dvoch bánk úloh (školská banka, NÚCEM banka). Okrem pilotovania úloh sa realizuje aj pilotovanie testov, ktoré môžu presne tak ako v prípade úloh byť zaradené do jednej z bánk. Úlohy vznikajú zo všetkých všeobecno-vzdelávacích predmetov na rôznych stupňoch vzdelávania. Svoju pozornosť zameriame na vzdelávaciu oblasť Matematika a práca s informáciami na primárnom stupni vzdelávania s akcentom na tematický okruh Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika.

[1]Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, Lucia.Ficova@nucem.sk

Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika predstavuje z hľadiska obsahu, v podmienkach Slovenskej republiky, približne desať percent z celkového matematického obsahu na primárnom stupni vzdelávania. Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie – príloha matematika v danej oblasti zameriava svoju pozornosť predovšetkým na riešenie jednoduchých úloh s kombinatorickou motiváciou; na hľadanie všetkých možností usporiadania dvoch, troch predmetov, farieb, písmen, čísel; na vytváranie skupín podľa daného i objaveného pravidla; na riešenie slovných úloh s kombinatorickou motiváciou (ŠVP, 2009: s. 13–32).

Každá testová úloha má zadefinované vlastnosti. Za základné považujeme zadefinovanie obsahu, na ktorý sa úloha zameriava a kognitívnu náročnosť, ktorú určujeme podľa revidovanej Bloomovej taxonómie. Vysoký dôraz kladieme na kvalitu úloh. Overujeme ju v skúšobnom testovaní, ktoré priradí k úlohám aj štatistické ukazovatele.

Testové úlohy sú tvorené dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý spôsob predstavuje vytvorenie testu, ktorého súčasťou je súbor úloh, ktorý komplexne pokrýva celý matematický obsah prvého stupňa (homogénny celok). V tomto prípade je zámerom testovať test ako celok s jednotlivými testovými úlohami. Druhý spôsob predstavuje začlenenie testovej úlohy do testového zošita, ktorý nemusí pokrývať vyvážené zastúpenie jednotlivých matematických obsahov v rámci prvého stupňa (izolovaná jednotka). Tu ide o testovanie samotnej úlohy, ktorá nepredstavuje žiaden vzťah a homogenitu k zvyšným úlohám v testovom zošite.

Počas riešenia projektu bolo doteraz z kombinatoriky na primárnom stupni vzdelávania vytvorených cca 150 úloh do testových zošitov aj testov. Pokúsime sa analyzovať niektoré z týchto úloh a opísať možnosti ich využitia pri identifikovaní úrovne schopností žiakov v kombinatorike. Sústredíme sa na základné vlastnosti úloh a ich štatistické parametre, prostredníctvom ktorých možno predikovať kvalitu testovej úlohy a úroveň schopností žiakov. Na základe týchto zistení možno zaradiť testové úlohy do balíkov úloh, ktoré v budúcnosti môžu slúžiť na vytvorenie školských testov, certifikačných ale aj adaptívnych testov. Práve možnosť zostavovania adaptívneho testu je veľmi inovatívna a aktuálna. Adaptívnosť testovania môžeme interpretovať ako výber testových úloh adaptovaných (prispôsobených) aktuálnej vedomostnej úrovni testovaného žiaka. Zatiaľ čo test v klasickom testovaní nemôžeme prispôsobiť podľa individuálneho výkonu každého žiaka, adaptívne testovanie nám túto možnosť ponúka. Základným predpokladom pre adaptívne testovanie je veľká banka kvalitných úloh. Na základe týchto vlastností sú rozdelené do kategórií. Každý žiak, ktorý pristúpi na testovanie takéhoto typu, začína úlohou spadajúcou do kategórie tzv. strednej náročnosti. Ak žiak zodpovie správne, ďalšia úloha je z kategórie ťažších. Ak sa stane, že žiak zodpovie nesprávne, nasledujúca úloha je z kategórie ľahších úloh. Na to, aby bolo možné úlohy takto kategorizovať do príslušných bánk, je potrebné mať presné informácie o ich kvalitách.

Uvažujme teda o vlastnostiach niekoľkých úloh z kombinatoriky a pokúsme sa naznačiť možnosti ich použitia pri zostavovaní klasického aj adaptívneho testu. Tak ako uvádzame vyššie za základné vlastnosti úloh považujeme ich kognitívnu náročnosť a obsahové zameranie. Z tabuľky 1 vyplýva, že pri takomto koncepčnom nastavení a uvažovaní o úlohách sme vybrali kombinatorické úlohy s rôznou kognitívnou úrovňou (Bloomova taxonómia), čo je jedným z ukazovateľov náročnosti úlohy. Testové úlohy č. 1, 2, 3, 5, 6 boli súčasťou testového zošita a testové úlohy č. 4, 7 boli súčasťou testu.

Úloha	**Názov úlohy**	**Kognitívna úroveň**	**Zameranie**	**Typ úlohy**
1	Čísla	K3[2]	matematika	custom fill[2]
2	Oblečenie	K3[2]	matematika	custom fill[2]
3	Gombíky	K3[2]	matematika	custom fill[2]
4	Mince	P5[2]	matematická gramotnosť	single choice[2]
5	Kuchyňa	P3[2]	matematika	single choice[2]
6	Stará mama	P3[2]	matematika	single choice[2]
7	Kalendár	P5[2]	matematická gramotnosť	single choice[2]

Tab. 1: Základná charakteristika úloh

Ukážka vybraných testových úloh s kombinatorickým obsahom:

1. Koľko všetkých rôznych trojciferných čísel sa dá vytvoriť z číslic 1, 3 a 5, ak sa číslice v čísle nemôžu opakovať?

   Dá sa vytvoriť _____ trojciferných čísel.

2. Manželia Zajčíkoví si chcú vymaľovať kuchyňu, pričom chcú na natieranie použiť dve farby. Predavačka im ponúkla oranžovú, hnedú, modrú, fialovú, žltú a béžovú farbu. Vyber, koľko všetkých dvojíc je možné vytvoriť z ponúknutých farieb.

   A) 3 B) 12 C) 15 D) 30

3. Stará mama mala narodeniny. Na jej oslavu prišla dcéra Žofka, teta Anna, ujo Fero a strýko Števo. Každý s každým sa pri dverách zvítal objatím. Vyber,

[2]Vysvetlenie: Zaradenie do dvojdimenzionálnej kognitívnej úrovne podľa revidovanej Bloomovej taxonómie, K3 – Konceptuálne poznatky/aplikovať; P3 – Procedurálne poznatky/aplikovať; P5 – Procedurálne poznatky/hodnotiť. Custom fill – úloha s možnosťou doplnenia viacerých textových odpovedí v rámci textu; Single choice – úloha s možnosťou definovania jednej správnej odpovede.

koľko objatí bolo pri ich vzájomnom zvítaní.

A) 7 B) 1 C) 14 D) 20

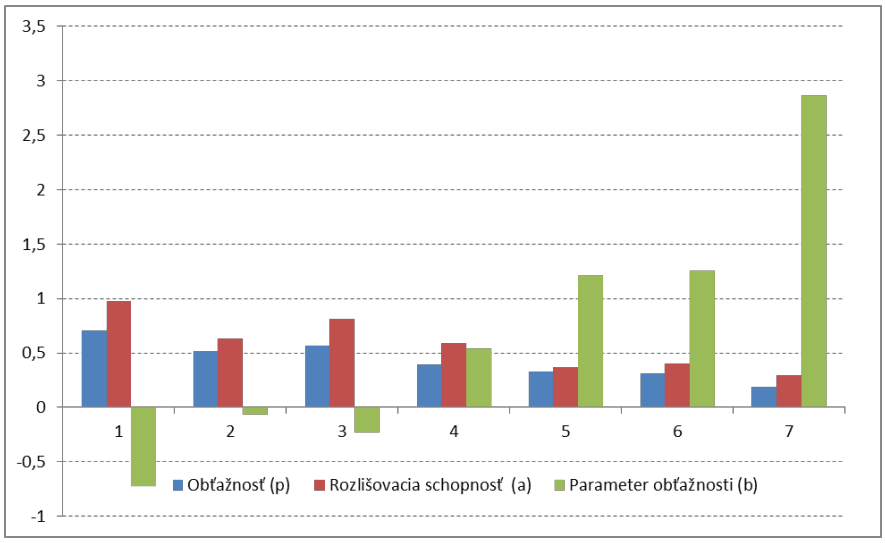
Ďalším identifikačným parametrom úlohy je špecifický cieľ, ktorý reflektuje na konkrétny kombinatorický obsah. Cieľom pri úlohe č. 1, 4 bolo riešiť úloh s kombinatorickou motiváciou; cieľom pri úlohe č. 2 bolo riešiť slovnú úlohu na násobenie s kombinatorickou motiváciou; cieľom pri úlohe č. 3 bolo vytvoriť systém pri vypisovaní možností; cieľom pri úlohe č. 5, 6 bolo vytvoriť všetky možné skupiny predmetov z daného počtu predmetov po dvoch; cieľom pri úlohe č. 7 bolo riešiť slovnú úlohu s kombinatorickou motiváciou.

Pri štatistickej analýze testových úloh bola použitá IRT metóda – Teória odpovede na položku. IRT vychádza z dvoch nasledovných predpokladov (Hambleton, Swaminathan & Rogers, 1991). Výkon žiaka v teste môže byť predikovaný (aj vysvetlený) na základe určitých faktorov, ktoré môžeme nazývať aj latentný rys resp. úroveň schopností. Vzťah medzi odpoveďou žiakov na položku a ich schopnosťou môžeme opísať prostredníctvom stúpajúcej krivky (charakteristická krivka položky). Krivka opisuje, aká je pravdepodobnosť správnej odpovede pri danej úrovni schopnosti.

Úloha	**Názov úlohy**	**Počet žiakov**	**Obťažnosť (p)**	**Rozlišovacia schopnosť (a)**	**Parameter obťažnosti (b)**	**Pomenovanie parametra obťažnosti**
1	Čísla	1032	0,704	0,978	−0,721	ľahká položka
2	Oblečenie	1032	0,518	0,636	−0,063	ľahká položka
3	Gombíky	1032	0,565	0,813	−0,233	stredne ťažká položka
4	Mince	617	0,390	0,587	0,540	ťažká položka
5	Kuchyňa	1032	0,329	0,368	1,216	ťažká položka
6	Stará mama	1032	0,311	0,405	1,257	ťažká položka
7	Kalendár	617	0,190	0,297	2,869	veľmi ťažká položka

Tab. 2: Štatistická analýza úloh metódou IRT (Teória odpovede na položku)

Z tabuľky a grafu je zrejmé, že obťažnosť úlohy č. 1, 2, 3 bola vyššia ako 0,5 a disponovali dobrou rozlišovacou schopnosťou. To znamená, že úlohy rozlišovali medzi žiakmi na rôznej úrovni v intervale najslabších až najlepších žiakov. Úlohy č. 4, 5, 6, 7 mali úroveň obťažnosti nižšiu ako 0,4 a rozlišovacia schopnosť nebola až na takej dobrej úrovni ako to bolo v predchádzajúcich troch úlohách. Niektoré z úloh v tomto prípade rozlišovali dobre len na malom intervale, a to buď len intervale podpriemerných žiakov alebo na intervale priemerných žiakov. Parameter obťažnosti (b) jasne predikuje náročnosť samotnej úlohy (podľa IRT metódy), čo odzrkadľuje aj súlad so samotným zaradením v rámci revidovanej Bloomovej taxonómie. Úlohy, ktoré odzrkadľovali úroveň konceptuálnych poznatkov boli pre žiakov



Graf 1: Štatistická analýza úloh metódou IRT (Teória odpovede na položku)

na základe analýzy jednoduchšie riešiteľné ako úlohy na úrovni procedurálnych poznatkov. Úroveň procedurálnych poznatkov sa zameriava na vzájomné vzťahy medzi základnými prvkami, ide o zameranie sa princípy a zovšeobecnenia. Na úrovni konceptuálnych poznatkoch sú myšlienkové procesy zamerané na ovládanie algoritmov, metód a postupov pri riešení nastoleného problému. Ponúkajú žiakom riešiť úlohy, a týmto spôsobom prichádzať k novým poznatkom. Určite je nemenej dôležité sa po takejto analýze pozrieť na samotnú kvalitu danej položky a pokúsiť sa prípadne identifikovať jej problémy, či už z pohľadu kľúča správnych odpovedí, kvality ponúkaných distraktorov alebo aj samotného znenia, ktoré môže v niektorých prípadoch žiaka zavádzať a tým spôsobovať neriešenosť danej úlohy. Pilotovaním úloh identifikujeme základné vlastnosti samotnej úlohy (úspešnosť, citlivosť, neriešenosť...), ale aj identifikovanie úrovne schopností testovaných žiakov. Takto identifikované parametre poskytujú potenciál pre vytváranie kvalitných testov, tak ako sme to uviedli vyššie v texte. Pre klasické testy to má význam vo vzťahu k optimálnemu výberu úloh do jedného homogénneho celku – testu, kde bude zabezpečená kvalita úloh po obsahovej, kognitívnej a formálnej stránke. V prípade adaptívnych testov takéto analýzy úloh prispejú k vytvárania kategórii úloh so spoločnými charakteristikami, ktoré sú podľa potreby a špecifík každého žiaka pri testovaní ponúkané. V prípade vyššie uvedených úloh je zrejmé, že charakter daných úloh nám tieto možnosti poskytuje.

Proces tvorby úloh je dlhodobý a náročný. Napriek tomu, že sú k dispozícii odborné východiská pre optimálne nastavenie procesu samotnej tvorby úlohy, až samotné štatistické vyhodnotenie nám poskytuje objektívne charakteristiky o úlohe (avšak nie jediné). Snahou príspevku bolo na ukážke úloh z kombinatoriky, ktorá v súčasnosti predstavuje „problémovú“ oblasť matematického obsahu, poukázať na využitie potenciálu úlohy a jej charakteristík na zistenie úrovne schopností žiakov.

Literatura

[1] ANDERSON, L. W. & KRATHWOHL, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives.* New York: Longman.

[2] BAGLJAŠ, I. (2013). *Správa zo štatistického vyhodnotenia testu TZ1.* Analýza prostredníctvom IRT. Bratislava: NÚCEM.

[3] HAMBLETON, R. K., SWAMINATHAN, H. & ROGERS, H. J. (1991). *Fundamentals of item response theory.* Newbury Park, CA: Sage.

[4] HAJDÚK, M. (2014). *Správa zo štatistického vyhodnotenia testu MG5.* Analýza prostredníctvom IRT. Bratislava: NÚCEM.

[5] *Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie – matematika* (2009). Bratislava: ŠPÚ.

Riešenie tokových úloh pomocou tabuľkového kalkulátora

Štefan Gubo[1]

Špeciálnou skupinou optimalizačných úloh v teórii grafov sú úlohy analýzy tokov v sieťach. Pojem tok, ktorý budeme v tomto príspevku používať, je abstrakciou bežne zaužívaných fyzikálnych tokov (*tok kvapaliny, elektrický prúd, tok vozidiel* atď.). Závažným podnetom pre riešenie úloh optimálnych tokov boli predovšetkým problémy vyplývajúce z dopravy produktov k spotrebiteľom, či už po cestnej resp. železničnej sieti alebo produktovodmi. V príspevku uvádzame riešenie úlohy hľadania maximálneho toku v sieťovom grafe pomocou tabuľkového kalkulátora MS Excel 2013.

Tokova úloha

Definícia (Kátai, 2008): Nech G (V, H) je neorientovane súvislý hranovo ohodnotený *digraf* (graf s orientovanými hranami), v ktorom existuje práve jeden *zdroj* (s) a práve jedno *ústie* (t), pričom ku každej hrane je priradená číselná charakteristika,

[1]Ekonomická fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne, guboi@ujs.sk

tzv. *kapacita hrany* (nezáporné číslo, $c : \mathrm{H} \to \mathbb{R}_0^+$), ktorá predstavuje priepustnosť hrany. Usporiadaná štvorica (G, s, t, c) sa nazýva **sieťový graf**.

Zo zdroja do ústia siete tečie nejaký substrát (kvapalina, vozidlá, dáta, elektrický prúd atď.) – hovoríme, že sieťou tečie nejaký tok. Na popis toku v sieti nám stačí pre každú hranu zadať množstvo substrátu tečúce danou hranou.

Definícia (Kátai, 2008): **Tok v sieťovom grafe** (G, s, t, c) je funkcia $f : \mathrm{H} \to \mathbb{R}^+$ definovaná na množine orientovaných hrán H, ktorá ku každej hrane h priraďuje nezáporné číslo $f(h)$ nazývané **tok hranou**, tak aby boli splnené nasledujúce podmienky:

- pre **všetky hrany** $h \in \mathrm{H}$ platí $f(h) \leq c(h)$, t. j. po žiadnej hrane netečie viac jednotiek ako je jej kapacita,
- pre **všetky vrcholy** $u \in \mathrm{V} \setminus \{s, t\}$ platí zákon zachovania substrátu, t. j. množstvo substrátu do vrcholu vchádzajúceho sa rovná množstvu substrátu z vrcholu vychádzajúceho,
- množstvo substrátu zo zdroja vytekajúceho sa rovná množstvu substrátu do ústia vchádzajúceho.

Tok v sieťovom grafe (G, s, t, c) **je maximálny** ak má najväčšiu veľkosť zo všetkých možných tokov v sieťovom grafe. Na určenie maximálneho toku slúži Fordov-Fulkersonov algoritmus (pozri Saha Ray, 2013), Edmondsov-Karpov algoritmus (pozri Saha Ray, 2013) a Dinitzov algoritmus (pozri Even, 2012).

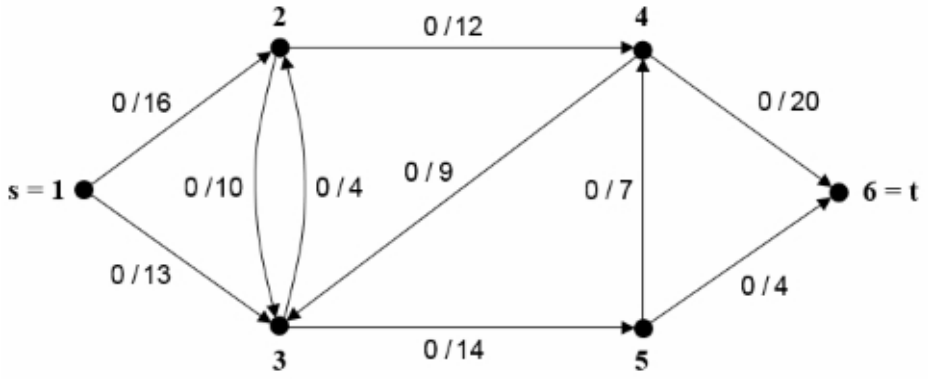
Riešenie tokovej úlohy pomocou tabuľkového kalkulátora

V tabuľkovom kalkulátore MS Excel 2013 pomocou doplnku **Riešiteľ** (angl. Solver) môžeme vyhľadať optimálnu (*MAX* alebo *MIN*) hodnotu vzorca *účelovej funkcie* v jednej bunke, tzv. *cieľová bunka*, na základe obmedzení hodnôt iných buniek so vzorcom v pracovnom hárku. Doplnok pracuje so skupinou buniek, tzv. *meniace sa bunky* (alebo variabilné bunky), a upravuje hodnoty v týchto bunkách tak, aby sa neprekročili limity v bunkách s obmedzeniami a aby sa získal požadovaný optimálny výsledok pre cieľovú bunku.

Úloha: Nájdi maximálny tok v sieti na obr. 1!

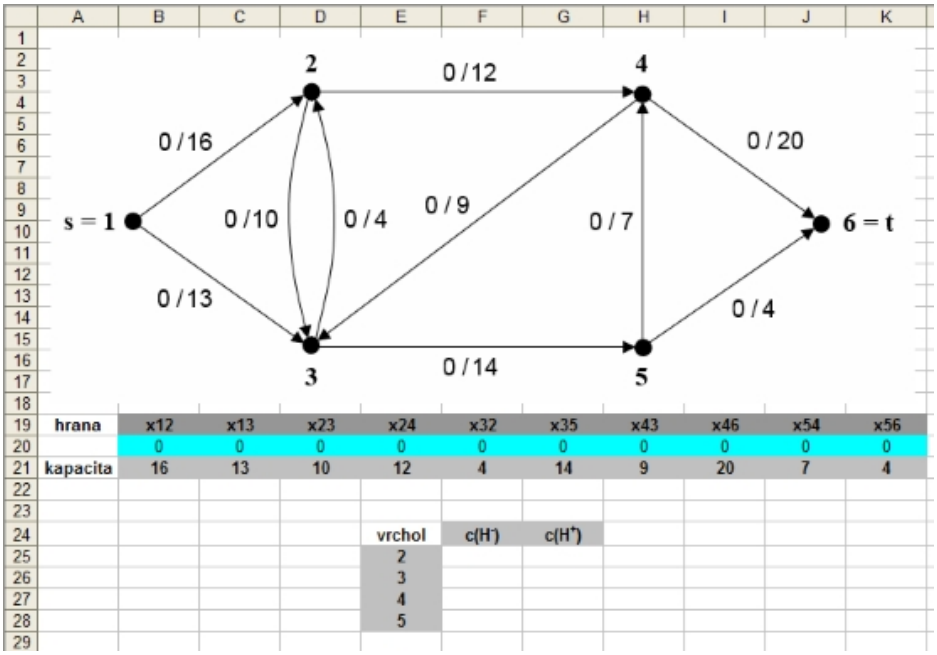
V prvom kroku treba vytvoriť matematický model úlohy. Úlohu budeme chápať ako lineárnu optimalizačnú úlohu, a model tejto optimalizačnej úlohy bude pozostávať z troch častí: z *účelovej funkcie, meniacich sa buniek* a *ohraničujúcich podmienok*.

Zo zdroja s do ústia t tečie nejaký substrát. Tok je úplne charakterizovaný prietokmi cez jednotlivé orientované hrany. Našou úlohou je pre každú hranu zadať



Obr. 1: Sieťový graf tokovej úlohy

množstvo substrátu tečúce danou hranou. Sieťový graf obsahuje 10 hrán, preto v matematickom modely budeme potrebovať 10 *variabilných buniek* (oblasť **B20: K20**), obsah ktorých môžeme počas optimalizácie zmeniť tak, aby sa optimalizovala cieľová bunka. Ich počiatočné hodnoty sú nulové (obr. 2).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
19	hrana	x12	x13	x23	x24	x32	x35	x43	x46	x54	x56
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	kapacita	16	13	10	12	4	14	9	20	7	4

24	vrchol	c(H⁻)	c(H⁺)
25	2		
26	3		
27	4		
28	5		

Obr. 2: Meniace sa bunky (oblasť **B20:K20**) optimalizačnej úlohy

V sieťovom grafe tokovej úlohy pre všetky vrcholy okrem zdroja a ústia musí platiť zákon zachovania substrátu, t. j. množstvo substrátu do vrcholu vchádzajúceho sa rovná množstvu substrátu z vrcholu vychádzajúceho.

Najprv si pre vrcholy **2** až **5** určíme množstvo substrátu do vrcholu vchádzajúceho. Do vrcholu **2** vchádzajú hrany **x12** a **x32**, t. j. množstvo substrátu do tohto vrcholu vchádzajúceho vyjadríme priradením **F25 := B20 + F20**. Do vrcholu **3** vchádzajú hrany **x13**, **x23** a **x43**, t. j. množstvo substrátu do tohto vrcholu vchádzajúceho vyjadríme priradením **F26 := C20 + D20 + H20**. Do vrcholu **4**

vchádzajú hrany **x24** a **x54**, t. j. množstvo substrátu do tohto vrcholu vchádzajúceho vyjadríme priradením **F27 := E20 + J20**. Nakoniec do vrcholu **5** vchádza iba hrana **x35**, t. j. množstvo substrátu do tohto vrcholu vchádzajúceho vyjadríme priradením **F28 := G20**.

Podobným spôsobom si pre tieto vrcholy určíme množstvo substrátu z vrcholu vychádzajúceho. Z vrcholu **2** vychádzajú hrany **x23** a **x24**, t. j. množstvo substrátu z tohto vrcholu vychádzajúceho vyjadríme priradením **G25 := D20 + E20**. Z vrcholu **3** vychádzajú hrany **x32** a **x35**, t. j. množstvo substrátu z tohto vrcholu vychádzajúceho vyjadríme priradením **G26 := F20 + G20**. Z vrcholu **4** vychádzajú hrany **x43** a **x46**, t. j. množstvo substrátu z tohto vrcholu vychádzajúceho vyjadríme priradením **G27 := H20 + I20**. Nakoniec z vrcholu **5** vychádzajú hrany **x54** a **x56**, t. j. množstvo substrátu z tohto vrcholu vchádzajúceho vyjadríme priradením **G28 := J20 + K20**.

Teraz už môžeme sformulovať *ohraničujúce podmienky* lineárnej optimalizačnej úlohy:

F25:F28 = G25:G28 (zákon zachovania substrátu pre vrcholy **2** až **5**),

B20:K20 ≤ B21:K21 (po žiadnej hrane nemôže tiecť viac substrátu ako jej kapacita),

B20:K20 ≥ 0 (po žiadnej hrane nemôže tiecť záporné množstvo substrátu).

Veľkosť maximálneho toku v sieťovom grafe sa rovná súčtu množstiev substrátu vychádzajúcich zo zdroja (a to sa samozrejme rovná súčtu množstiev substrátu vchádzajúcich do ústia). V cieľovej bunke **B25** sformulujeme *účelovú funkciu* lineárnej optimalizačnej úlohy nasledovne: **B25 := B20 + C20**. Našou úlohou je maximalizovať túto účelovú funkciu. Po spustení doplnku **Riešiteľ** sa nám objaví dialógové okno (obr. 3).

Do poľa **Nastaviť cieľ** zadáme odkaz na cieľovú bunku (**B25**). Pretože chceme, aby cieľová bunka nadobúdala maximálnu možnú hodnotu, tak kliknime na položku **Maximum**.

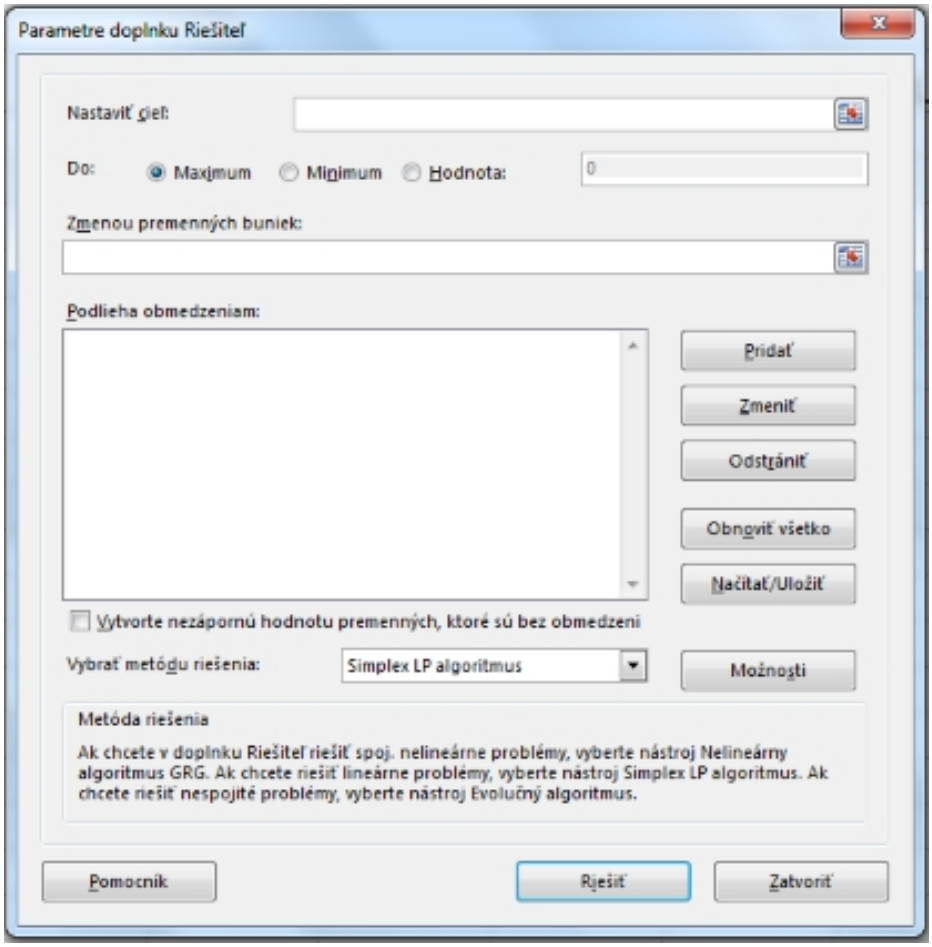
Do poľa **Zmenou premenných buniek** zadáme odkazy na meniace sa bunky (**B20:K20**).

Do poľa **Podlieha obmedzeniam** kliknutím na tlačidlo Pridať zadáme všetky ohraničujúce podmienky.

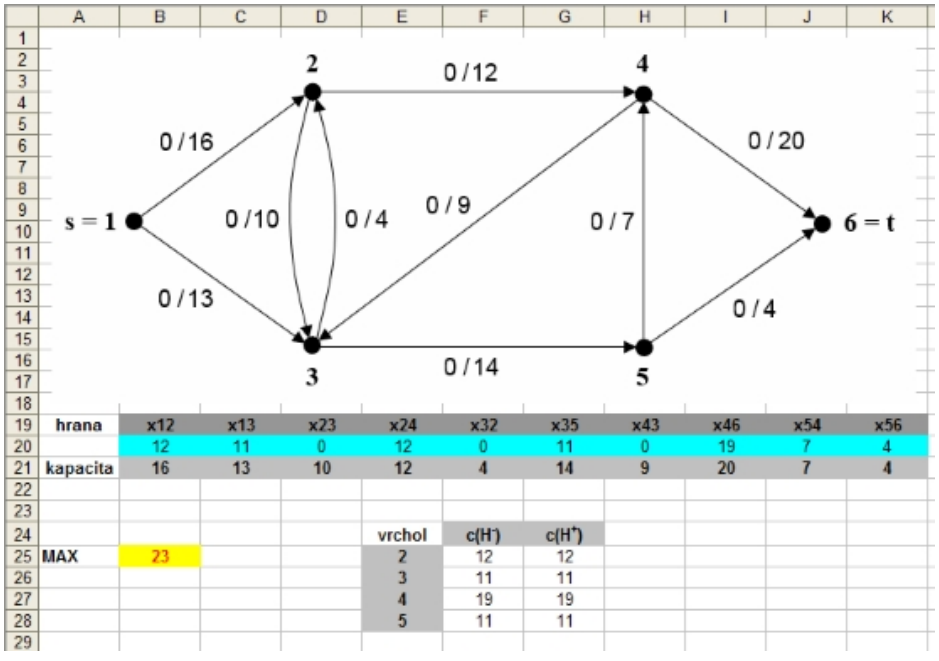
Pretože chceme riešiť lineárnu optimalizačnú úlohu, vyberieme metódu *Simplex LP algoritmus*. Nakoniec kliknime na tlačidlo **Riešiť**.

Objaví sa ďalšie dialógové okno so správou, že doplnok **Riešiteľ** našiel optimálne riešenie. Ak chceme hodnoty riešenia v hárku zachovať, v tomto dialógovom okne kliknime na položku **Ponechať riešenie doplnku Riešiteľ**.

V meniacich sa bunkách **B20:K20** sú vypočítané hľadané optimálne hodnoty prietokov cez jednotlivé hrany sieťového grafu, a v cieľovej bunke **B25** sa objaví hodnota maximálneho toku (obr. 4).



Obr. 3: Dialógové okno doplnku Riešiteľ



hrana	x12	x13	x23	x24	x32	x35	x43	x46	x54	x56
	12	11	0	12	0	11	0	19	7	4
kapacita	16	13	10	12	4	14	9	20	7	4

		vrchol	c(H')	c(H*)
MAX	23	2	12	12
		3	11	11
		4	19	19
		5	11	11

Obr. 4: Riešenie tokovej úlohy

Záver

Na základe vyššie spomenutého môžeme skonštatovať, že tabuľkový kalkulátor MS Excel je vhodným nástrojom na riešenie úloh hľadania maximálneho toku v sieťovom grafe bez použitia algoritmov z teórie grafov.

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci projektu MŠVVaŠ KEGA 010UJS-4/2014.

Literatura

[1] EVEN, S. (2012). *Graph Algorithms.* New York: Cambridge University Press.

[2] KÁTAI, Z. (2008). *Gráfelméleti algoritmusok.* Cluj-Napoca: Scientia.

[3] SAHA RAY, S. (2013). *Graph Theory with Algorithms and its Applications.* New Delhi: Springer.

Hravé procvičování číselných a algebraických výrazů

Klára Holková, Zdeněk Lauermann[1]

V tomto příspěvku nabízíme dvě vybrané autorské aktivity, které jsme v rámci tandemové výuky s žáky úspěšně zkoušeli. První aktivita je Domino s číselnými výrazy. Ve druhé žáci hledají dvojice algebraických výrazů se stejnou hodnotou.

Domino

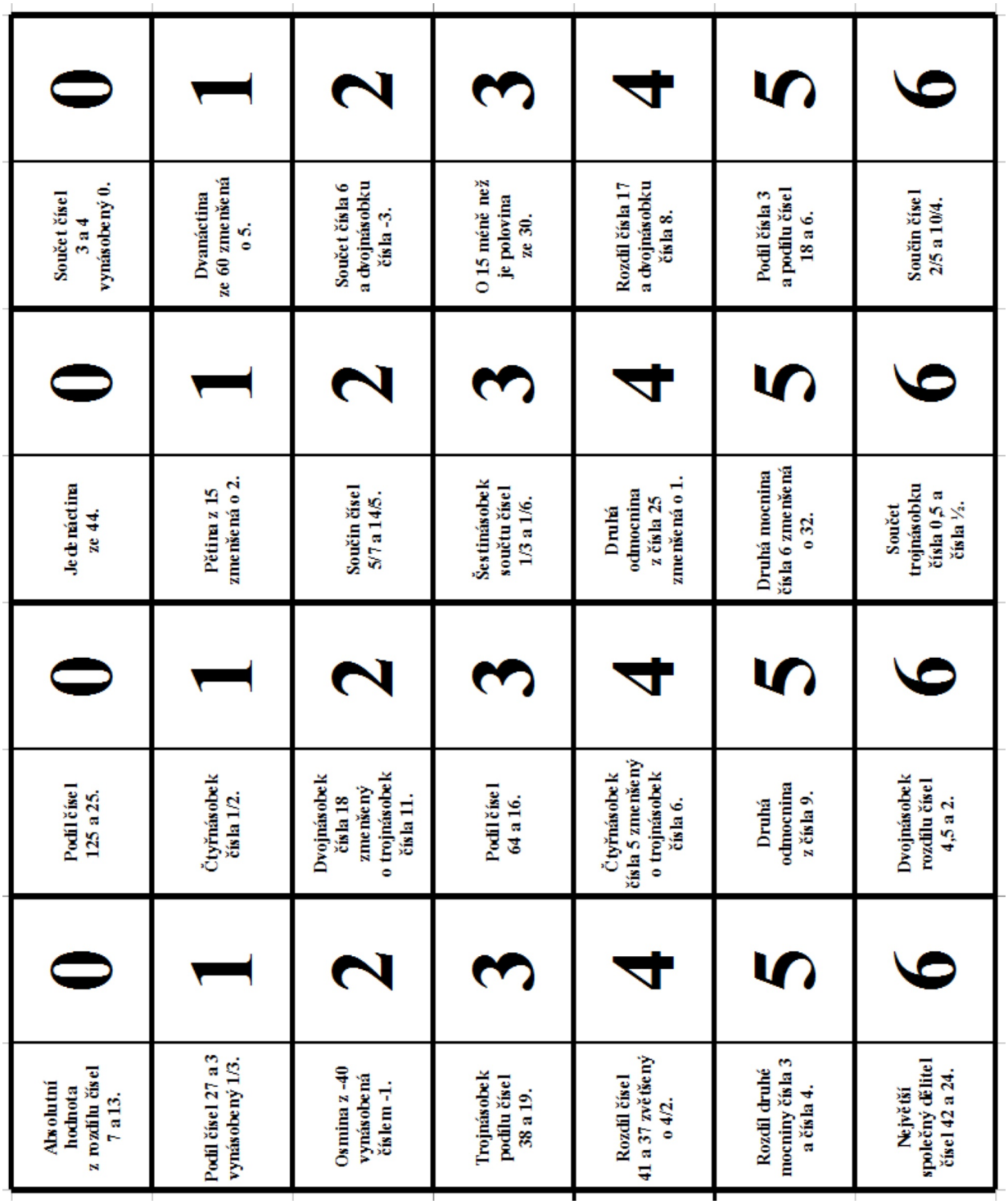
Zaměření aktivity: Procvičení převedení slovně zadaného číselného výrazu do číselné podoby a následné vyčíslení, které je prostředkem k další aktivitě, která slouží jako motivace. Žáci mají sestavit z kostek domina uzavřený obrazec, přikládat smí jen číselný výraz k číslu, nikoliv číslo k číslu a výraz k výrazu. Sami ve skupině volí strategii, jak obrazec sestavovat, jestli nejdříve všechny výrazy vyčíslí, a potom budou skládat, nebo budou vždy hledat jednu potřebnou kostku. Aktivita je

[1]Studentka KMDM, PedF UK v Praze, klara.holkova@gmail.com; Základní škola a mateřská škola Angel v Praze, lauermann@zsangel.cz

částečně „samoopravná“, pokud některý výraz špatně vyčíslí, obrazec nezvládnou uzavřít a budou muset hledat chybu.

Instrukce pro žáky: Dostali jste do skupiny kartičky domina. Vaším úkolem je složit z nich uzavřený obrazec, který se nebude nikde větvit. Kartičky lze k sobě přikládat pouze tak, že k části s číselným výrazem přiložíte číslo z jiné kartičky, které odpovídá výsledku číselného výrazu.

Časový odhad: 20–25 minut

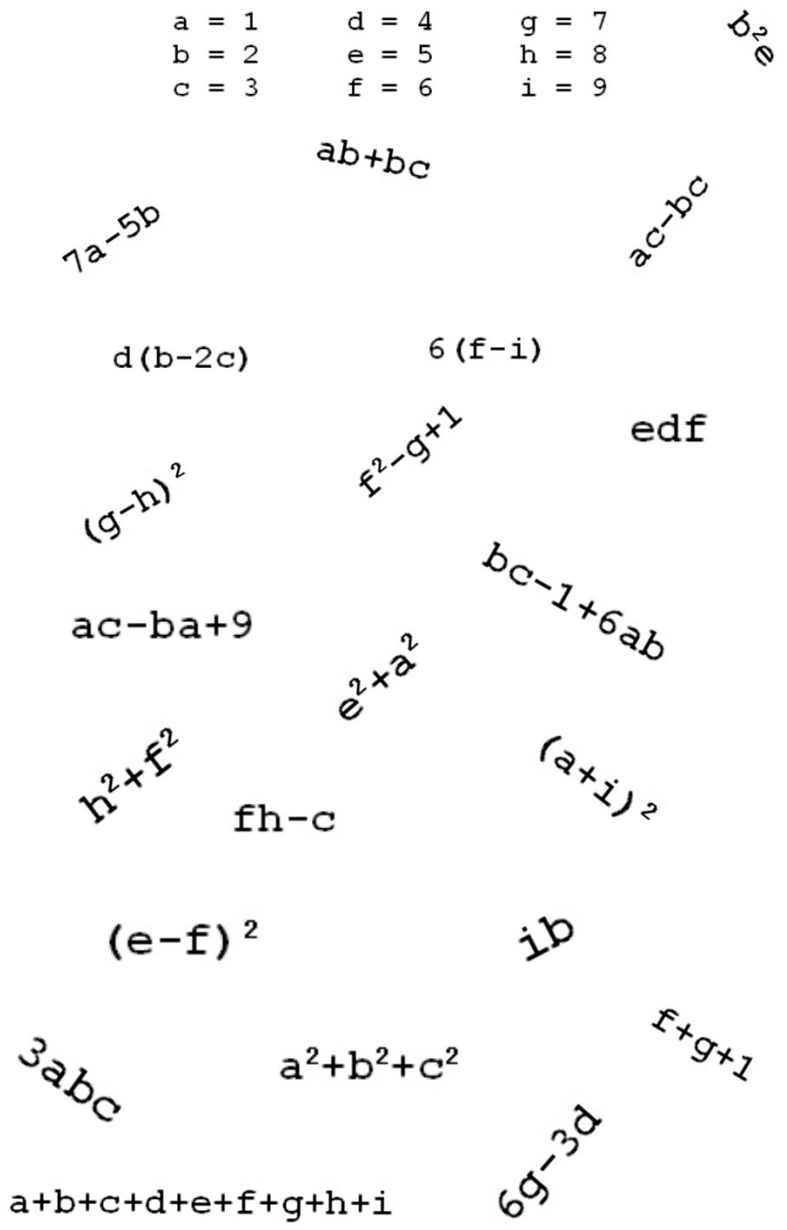


Algebraické výrazy se stejnou hodnotou

Zaměření aktivity: Procvičení určování hodnoty algebraických výrazů. Nalezení systému, jak si zaznamenávat výsledky při chaotickém uspořádání. Je vhodné vytvořit vyrovnané dvojice žáků.

Instrukce pro žáky: Do dvojice jste dostali papír s algebraickými výrazy. Vaším úkolem bude nalézt co nejvíce dvojic algebraických výrazů se stejnou hodnotou, za každou dvojici dostanete bod. Budete soutěžit proti sobě, pokud jeden z vás některou dvojici označí, druhý už ji označit nesmí. Pokud spolužákovi objevíte chybně označenou dvojici, tak také získáváte bod.

Časový odhad: 20 minut



Tandemová výuka

Klára Holková, Zdeněk Lauermann[1]

Krátké povídání o zajímavém příkladu studentské praxe, kdy se před tabulí společně setkávají učitel matematiky s dlouholetou praxí a studentka učitelství.

Zdeněk Lauermann: Již téměř dvacet let pracuji jako učitel matematiky na druhém stupni základní školy. Za tu dobu jsem získal mnoho zkušeností, vyzkoušel různé formy a metody práce a setkal jsem se s řadou studentů učitelství, které jsem vedl při jejich praxích. Mám tedy letité zkušenosti se studentskými praxemi, proto si myslím, že mohu porovnat přínosy těchto praxí pro studenty, žáky i učitele s přínosy tandemové výuky, o které je náš příspěvek.
Klára Holková: Jsem studentkou posledního ročníku navazujícího magisterského studia Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Bakalářský titul mám z Matematicko-fyzikální fakulty. Mé dosavadní zkušenosti s učením se skládaly ze 7 let doučování studentů všech možných věkových kategorií i různých předmětů a čtyř týdnů oborové praxe na druhém stupni základní školy.

Naše první setkání s tandemovou výukou

Zdeněk Lauermann: V červnu roku 2014 jsem dostal od paní docentky Dariny Jirotkové z katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy nabídku zapojit se do projektu „Tandemy 2“ navazujícího na projekt „Tandemy 1“, který již rok běžel za podpory nadace České spořitelny – Nadace Depositum Bonum. Nadace se zabývá podporou různých vzdělávacích projektů. Například podporou programu Elixír do škol a projektu Heuréka zaměřeného na moderní metody a formy výuky fyziky, a nově i podporu výuky matematiky založené na koncepci pana profesora Milana Hejného. Paní Jirotková mi sdělila, že bych spolupracoval se studentkou, která by plnila současně povinnosti asistentské praxe a zapojila se tak do projektu Klinická škola. Projekt „Tandemy 2“ se zaměřoval na podporu výuky fyziky na druhém stupni ZŠ. Náš tandem měl být v zimním semestru akademického roku 2014/2015 prvním matematickým. V této době jsme ani já ani nikdo ze zúčastněných „matematiků“ s tandemovou výukou neměli žádné zkušenosti. Začal jsem proto studovat dostupné materiály a čím více informací jsem se postupně dozvídal, tím více jsem si uvědomoval, že se jedná o velmi zajímavou myšlenku, která může přispět ke zkvalitnění výuky matematiky a tím samozřejmě

[1]Studentka KMDM, PedF UK v Praze, klara.holkova@gmail.com; Základní škola a mateřská škola Angel v Praze, lauermann@zsangel.cz

prospět žákům, studentům i učitelům. Proto jsem s nabídkou souhlasil a náš tandem byl přijat do rodiny „Tandemy 2“.
Klára Holková: O letním zkouškovém období studentům přišel e-mail s informacemi, že se lze zapojit do projektu „Tandemy 2“, informací bylo minimum, snad proto jsem se přihlásila jediná. K účasti na projektu mě přiměla vidina možnosti strávit celý školní rok v prostředí jedné základní školy a získat další tolik potřebnou praxi a zkušenosti.

Koncepce tandemové výuky

Koncepce tandemové výuky vychází z následujícího modelu – zkušený učitel a zapálený student. Učitelova výuka se osvěží, dobije novou energií, nadšením a neotřelými nápady podloženými nejnovějšími poznatky z oborové didaktiky, zkrátka „vyjede ze zajetých kolejí“. Student učitelství má možnost poznat učitelovo dlouhodobé know-how, vyzkouší si bez rizika kolapsu nové postupy, získá ucelený pohled na výuku a seznámí se s léty vypilovaným pohledem na žáky. Také si zkusí, jak odborné poznatky propojit s praxí, jak komunikovat se žáky, popřípadě i s jejich rodiči, vše s profesionálním partnerem po boku. Oba si mohou dát okamžitou zpětnou vazbu na své působení ve třídě a učí se reflektovat svou výuku i výuku svého kolegy. Žáci díky tandemové výuce získávají pestřejší, zajímavější a nápaditější vyučovací hodiny. Také je více možností, jak věnovat pozornost jednotlivým žákům, jak je diagnostikovat a pak výuku individualizovat, což znamená formulovat úlohy žákům podle jejich momentální úrovně v probírané oblasti, aby každý dostal sobě přiměřenou úlohu, aby se rozvíjeli jak slabší žáci, tak i ti nadanější v různých oblastech matematiky.

Předpoklady dobrého fungování tandemu

Tandem by měl být sestaven ze dvou stejně výrazných osobností, které jsou schopny argumentovat a obhajovat svůj vlastní názor, ale zároveň i naslouchat druhému a umět přijmout jeho myšlenky. Zkrátka vztah učitel-student by měl být partnerský a respektující. Situaci zjednoduší, pokud oba mají podobný pohled na výuku matematiky a nestřetávají se dva zásadně odlišné výukové styly. Případná různost postojů vyžaduje od obou ochotu zkusit dělat věci jinak. Učitel by měl studenta vnímat jako rovnocenného partnera, nikoli jen jako asistenta plnícího pokyny, a dát mu prostor pro realizaci vlastních myšlenek a nápadů, pokud jsou argumentovány zkušenostmi nebo didaktickými principy a teoriemi.

Podpora našeho tandemu

Podporu pro náš tandem čerpáme z projektu „Tandemy 2“ v kombinaci s projektem Klinická škola.

Podpora Nadace Depositum Bonum v projektu „Tandemy 2“ má několik rovin, ale díky prvotnímu zaměření projektu na výuku fyziky, je nelze využít všechny. První druh podpory jsou třikrát za školní rok organizované *instituty*. Jedná se o čtyřdenní výjezdová společná setkání tandemových dvojic s lektory a mentory projektu. Na těchto setkáních jednotliví učitelé i studenti sdílejí s ostatními své zkušenosti a nápady, ukázky dobré i špatné praxe. Nově sestavené tandemy, což byl i náš případ, mají možnost se seznámit a blíže poznat, naplánovat svou budoucí spolupráci a prakticky si vyzkoušet, jak vést hodinu společně, diskutovat o tom, jaká forma společné výuky je efektivní, jak spolu komunikovat při výuce, aby se vytvářelo bezpečné a tvořivé prostředí pro žáky.

V průběhu období mezi dvěma instituty je pro tandemy možné dostat mentorskou podporu a řešit konkrétní situace na pravidelných setkávání se svými supervizory. Další pomoc pro práci tandemů i samotných učitelů poskytují regionální centra, kterých je po republice 18 a která jsou budovaná v jednotlivých regionech tak, aby učitelé měli přístup k zapůjčení fyzikálních pomůcek, které si každá škola nemůže dovolit zakoupit, a aby věděli, že zde mohou v domluvené době získat i metodickou podporu.

V oblasti matematiky asi není tak aktuální získat nákladné pomůcky, které umožní ve třídách provádět různé pokusy a měření. Zde bychom z pohledu výuky matematice viděli spíše nutnost získávání odborné didaktické podpory zejména se zaváděním inovativních způsobů výuky jako je například Hejného metoda. Právě v rámci projektu Klinická škola získáváme podporu oborově didaktickou od paní Jirotkové, která vnímá tuto aktivitu jako pilotáž nové formy praxe pro budoucí studenty. Dobré zkušenosti z tandemové výuky se pokusí zpracovat do návrhu na inovace souvislých, popřípadě asistentských praxí studentů katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Praktické začátky

V září po prázdninách jsme se jako tandem poprvé setkali u paní Jirotkové na katedře. Jednalo se o krátké představení se sobě navzájem. Další týden jsme odjeli na náš první institut, kde jsme byli jediná dvojice matematiků mezi samými fyzikálními tandemy. Brzy po příjezdu bylo jasné, že jsme ve společnosti chytrých a nadšených lidí, od kterých se můžeme něco naučit. Učitelé vesměs prošli Heurékou, tj. sérií školení o výuce fyziky vedených již po mnoho let manželi Irenou a Leošem Dvořákovými a dalšími kolegy z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Byli to tedy učitelé zapálení a dychtiví měnit obraz výuky fyziky na oblíbený a užitečný předmět.

Tandemy se tu sešly z různých škol z Čech i z Moravy, někteří kolegové již měli s fungováním tandemů roční zkušenost, jiné tandemy přijely jako nově sestavené. Tyto dvě skupiny měly v některých bodech odlišný program. „Tandemy 1“, které za sebou již měly rok společné výuky, mohly sdílet své dobré i špatné zkušenosti a z toho vyplývající nové nápady, obohacovaly se o nové zkušenosti, didaktické postupy, odborné poznatky i dovednosti. U nově sestavených tandemů dvojek byl kladen důraz na to, aby byl dostatek času i odborné pomoci pro seznámení a plánování budoucí spolupráce.

Řada aktivit ale byla pro obě skupiny společná. To jsme shledali jako velice užitečné pro náš nový tandem, neboť tehdy bylo možné získat od zkušenějších kolegů cenné rady a postřehy, vycházející z jejich vlastních zkušeností s tandemovou výukou. Začaly se nám prokreslovat principy párové výuky, její možnosti i její úskalí. Nejcennější byly modelové hodiny, které každý tandem pro své kolegy připravil. Viděli jsme mnoho velmi zajímavých pokusů a pěkně připravených hodin a to, že obsahem byla fyzika, nevadilo. Také my sami jsme připravili modelovou hodinu a předvedli ji. Naše vystoupení bylo hodnoceno jako podařené a inspirativní i pro fyzikáře, což nás povzbudilo k další práci. Když jsme z Institutu odjížděli, měli jsme jasnou představu o tom, jakým způsobem chceme ve škole při hodinách matematiky pracovat, kam chceme směřovat a jak budeme žáky motivovat.

Dosavadní zkušenosti

Společná práce našeho tandemu ve škole začala v prvním říjnovém týdnu. Pracujeme s jednou třídou šestého a s jednou třídou osmého ročníku. Již od prvních hodin bylo jasné (a další týdny to potvrdily), že náš tandem splňuje to, co jsme popsali výše v odstavci „Předpoklady dobrého fungování tandemu“. Žáci vnímají skutečnost, že v hodině s nimi pracují 2 učitelé, jako zpestření, protože se setkají s jinými typy úloh, pracovních listů... Třídy se na hodiny těší a jednotliví žáci oceňují, že je čas pracovat s nimi individuálně.

Oproti běžným praxím studentů učitelství, které trvají obvykle několik týdnů, tento typ asistentské praxe umožňuje studentům pracovat s určitou skupinou žáků od října do června, mají tedy dostatek času své žáky dobře poznat, mohou je oslovovat jménem, znají jejich možnosti, silné i slabší stránky. To vše následně umožňuje studentům plnit kvalitně jejich úkoly v tandemu – reakce rodičů je velmi pozitivní, rodiče oceňují skutečnost, že hodiny matematiky jsou pro žáky pestřejší, zajímavější a tedy atraktivnější a i oblíbenější. Pro studenty se ukázaly ještě další přínosy, jako znovu objevení pravidelného brzkého vstávání, které je potom v praxi čeká, a zvládnutí lepší organizace času obecně, protože na tandemy se chodí i přes zkouškové období, což na studenta klade nemalé časové nároky.

Slovo závěrem

Z našich dosavadních zkušeností vyplývá, že tandemová výuka je pro všechny výše jmenované prospěšná, ale současně platí, že nemusí být vhodná pro všechny studenty a učitele, například i díky časové náročnosti. Každý zapojený do tandemu by měl být výraznou osobností schopnou samostatně pracovat, argumentovat a obhajovat vlastní názor, současně ale schopnou naslouchat druhému a umět přijmout i jeho myšlenky.

Modelovanie riešenia slovných úloh na spoločnú prácu pomocou GeoGebry

Ladislav Jaruska[1]

Článok sa zaoberá s možnosťami dynamického programu GeoGebra vo vyučovaní. Obsahuje niekoľko jednoduchých príkladov, ktoré prezentujú možnosti GeoGebry na dynamické modelovanie slovných úloh, a tým potvrdzuje použiteľnosť a aplikovatelnosť matematických poznatkov v každodennom živote a praxi. Prezentované slovné úlohy sú na spoločnú prácu.

V súčasnosti moderné technológie sú integrované vo väčšine oblastí vyučovania. Rozvoj IKT má dôležitý vplyv na výchovnovzdelávací proces. Ponúka nové možnosti pedagógom aj študentom na zvyšovanie efektivity výchovnovzdelávacieho procesu a možnosť pripravovania žiakov na problémy reálneho života. Dôležitým cieľom premeny vyučovania je rozvíjanie kreatívneho myslenia a zručnosti riešenia problémov žiakov, ich príprava na riešenie zložitých-náročnejších úloh v modernej dobe. Vďaka novým technológiám sa sformulujú nové požiadavky – rozvoj foriem a metód vyučovania a aplikovanie moderných.

Možnosti aplikovania GeoGebry

Jednou takou možnosťou aplikovania moderných technológií do vyučovania je používanie dynamického programu GeoGebra. GeoGebra je voľne šíriteľný matematický softvér, ktorý bol vytvorený hlavne na podporu vyučovania matematiky. Spája v sebe geometriu, algebru a matematickú analýzu a môžeme využívať v edukačnom procese od základných škôl až po univerzity. GeoGebra ponúka nové možnosti počas hodiny matematiky pedagógom aj študentom.

[1]Univerzita J. Selyeho v Komárne, jaruskal@selyeuni.sk

Prínosy GeoGebry pre pedagóga

- zvyšovanie efektivity vyučovacieho procesu,
- aktivizácia žiakov – prenesenie aktivity na žiakov,
- úspora času na hodine aj doma,
- okamžité znázornenie,
- atraktívnejšia matematika,
- príprava vlastných pomôcok,
- využitie vlastných odborných vedomostí pri príprave apletov,
- možnosť grafického znázornenia závislosti veličín,
- modelovanie javov, experimentov.

Prínosy GeoGebry pre žiakov

- samostatná práca žiakov v škole aj doma,
- zbierka úloh s meniacimi sa údajmi,
- motivácia,
- zaujímavejšia hodina,
- možnosť experimentovania, objavného a bádateľského učenia sa,
- možnosť lepšieho pochopenia učiva,
- podporuje predstavenie si konkrétnych situácií a problémov,
- možnosť grafického znázornenia závislosti veličín.

Postavenie slovných úloh

Počas pedagogickej praxe sa často stretávame so slovnými úlohami, ktoré vo vyučovaní matematiky obsadia špeciálne miesto. Úlohy sú sformulované pomocou jednoduchých príbehov, ktorými potvrdzujeme žiakom, že matematické poznatky sa dajú používať aj v reálnom živote. Tým podporujeme rozvoj zručností a schopností žiakov, pomocou ktorých modelujú konkrétne situácie, javy v jazyku matematiky.

Hlavnými cieľmi slovných úloh sú:

- motivovanie žiakov, vzbudenie ich záujmu o matematiku,
- zaujímavý príbeh – aplikovateľnosť matematických poznatkov v reálnom živote,
- modelovanie konkrétnej situácie, javu v jazyku matematiky,
- rozvíjame žiakom schopnosti pochopenia a riešenia problémov, abstrakčné a logické myslenie.

Špeciálnu skupinu slovných úloh tvoria slovné úlohu na spločnú prácu. Slovné úlohy na spoločnú prácu. Väčšina z nich vychádza z toho, že určíme, osoba alebo zariadenie akú časť práce je schopné spraviť za jednotku času z celej práce. Pomocou tejto informácie môžeme zistiť, koľko bud trvať vykonanie celej práce. Typickým prípadom môže byť, že ak pracuje viac osôb alebo zariadení, za aký čas vykonajú danú celú úlohu.

Počas riešenie zdôraňujeme, že:

- jedná sa o rovnomerné vykonanie práce, čo to znamená,
- celú prácu označíme nejakým písmenom, číslom,
- dôležitosť výpočtu množstva práce vykonanej za jednu hodinu,
- odvodenie množstva práce vykonanej za neznámy čas,
- čo znamená, ak dvaja pracujú spolu a práca je hotová,
- pomocou tabuľky text, zadanie a riešenie úlohy sú prehľadnejšie.

Počas riešenia týchto úloh dobré grafické znázornenie uľahčí žiakom pochopenie a vnímanie úlohy, predstavenie si a modelovanie javu. V takých prípadoch môže pomôct pedag´gom aj žiakom modelovanie priebehu GeoGebrou.

Nasledovné úlohy slúžia ako jednoduché pomôcky, ukážky na modelovanie riešenia slovných úloh na spoločnú prácu pomocou GeoGebry.

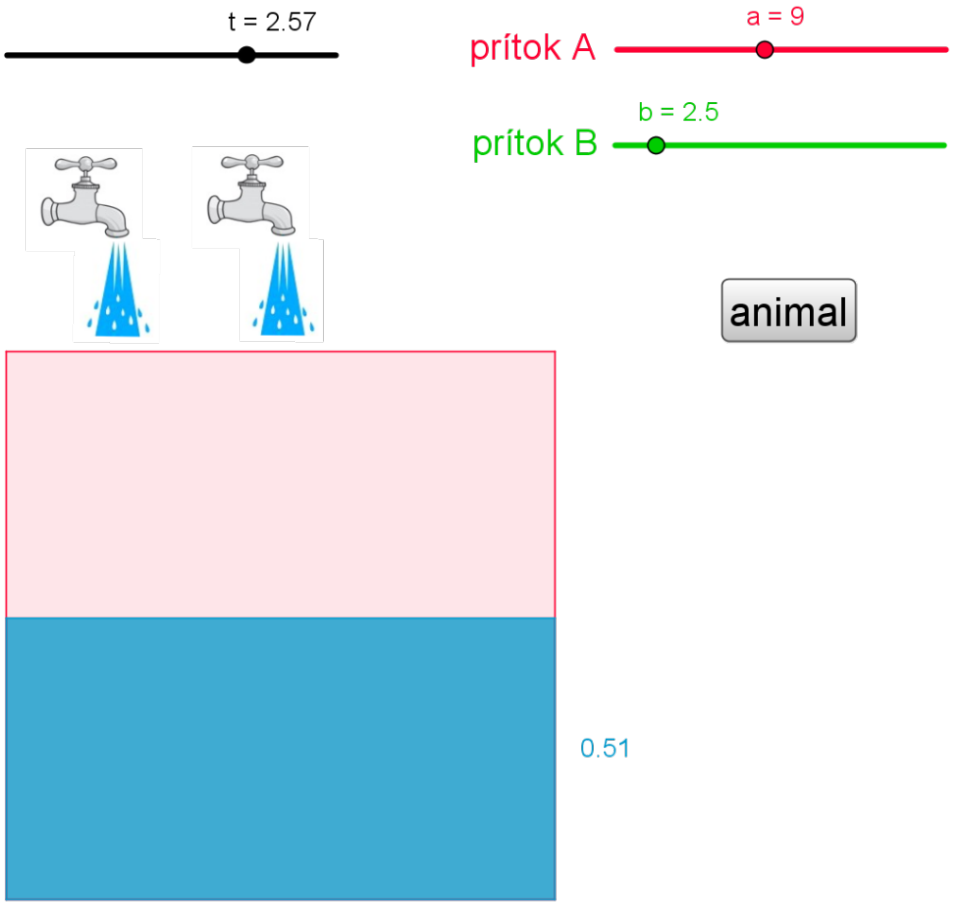
1. Úloha

Bazén sa môže napĺňať dvoma rôznymi prítokmi. Prítokom A by sa naplnil bazén za 9 hodín, prítokom B za 2,5 hodín. Najprv otvoríme prítok A. Ak bazén po dvoch hodinách po otvorení prítoku A nie je naplnený, tak otvoríme aj prítok B. Ak sa bazén naplní, zatvoríme obidva prítoky. Za koľko hodín sa naplní bazén?

Rovnicou:

$$\frac{x}{9} + \frac{x-2}{2{,}5} = 1 \qquad / \cdot 24$$

Animácia riešenia 1. úlohy pomocou GeoGebry.



Obr. 1: Animácia 1. úlohy

Pomocou posuvníkov môžeme zmeniť výkon prítokov, tým vlastne riešime, modelujeme všetky prípady daného typu.

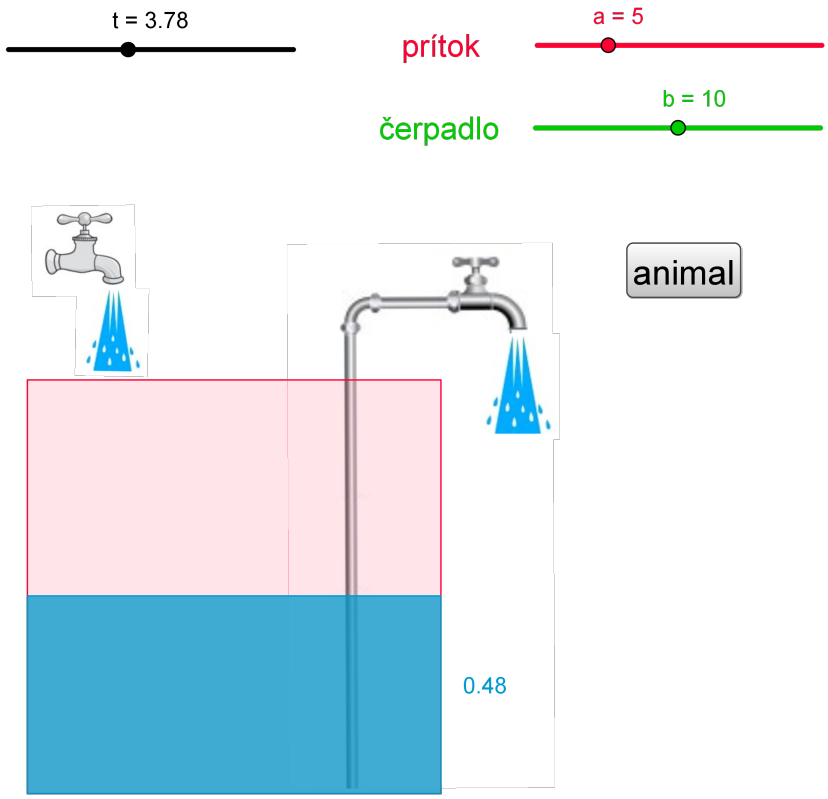
2. Úloha

Bazén sa môže napĺňať jedným prítokom a vyprázdniť jedným čerpadlom. Ak je otvorený len prítok, tak sa bazén naplní za 5 hodín. Čerpadlo naplnený bazén vyprázdni za 10 hodín. Otvoríme prítok a po uplinutí jednej hodiny zapneme aj čerpadlo. Ak sa bazén naplní, zatvoríme prítok a vypneme čerpadlo. Za koľko hodín sa naplní bazén?

Rovnicou:

$$\frac{x}{5} - \frac{x-1}{10} = 1 \qquad / \cdot 10$$

Animácia riešenia 2. úlohy pomocou GeoGebry.



Obr. 2: Animácia riešenia 2. úlohy

Pomocou posuvníkov môžeme zmeniť výkon prítoku a čerpadla, tým vlastne riešime, modelujeme všetky prípady daného typu.

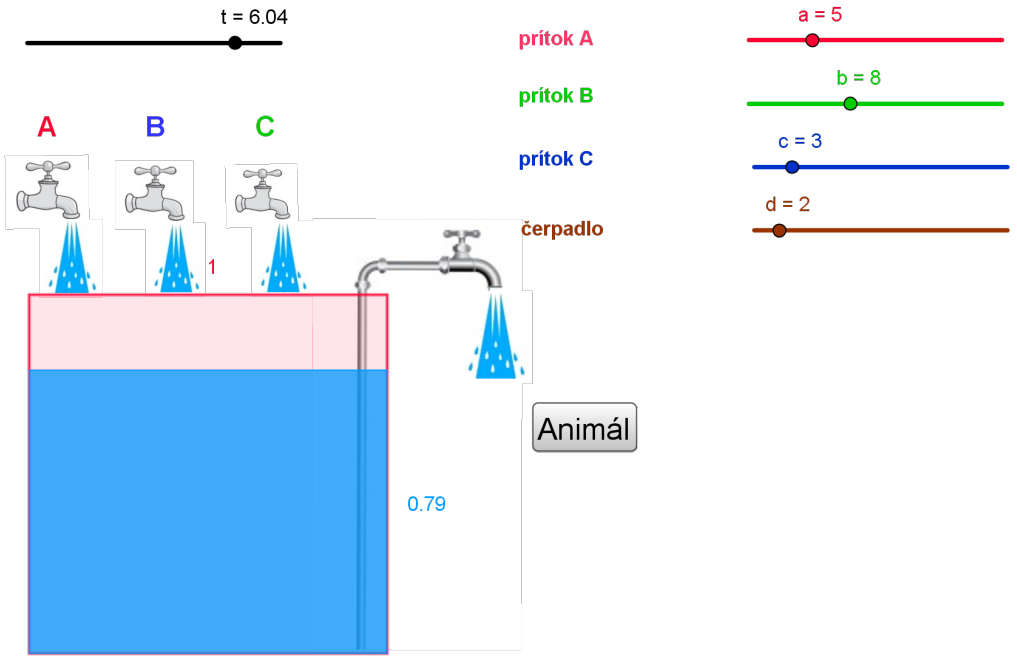
3. Úloha

Bazén sa môže napĺňať troma prítokmi a vyprázdniť jedným čerpadlom. Prítokom A by sa bazén naplnil za 5 hodín, prítokom B za 8 hodín a prítokom C za 3 hodiny. Čerpadlom by sa naplnený bazén vyprázdnil za 2 hodiny. Ak hodinu po otvorení prvého prítoku bazén nie je naplnený, tak zapneme čerpadlo. Ak dve hodiny po otvorení prvého prítoku bazén nie je naplnený, tak otvoríme všetky prítoky. Ak sa bazén naplní, zatvoríme všetky prítoky a vypneme čerpadlo. Za koľko hodín sa naplní prázdny bazén, ak najprv otvoríme prítoky A a B a potom všetko necháme na automatiku?

Rovnicou:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{2}=1 \qquad / \cdot 120$$

Animácia riešenia 3. úlohy pomocou GeoGebry.



Obr. 3: Animácia riešenia 3. úlohy

Pomocou posuvníkov môžeme zmeniť výkon prítokov a čerpadla, tým vlastne riešime, modelujeme všetky prípady daného typu.

Záver

Použitím vizualizácie a modelovania počas vyučovania podporujeme motiváciu a predstavivosť žiakov a zvyšujeme efektivitu vyučovacích metód. Vytváranie virtuálnych dynamických modelov pomocou GeoGebry prináša nové možnosti aj v objavovaní matematických súvislostí. Vhodná vizualizácia podporí porozumenie súvislostí, pomáha pri vyšetrení vlastností pojmov.Animácia úloh pomocou GeoGebry podporuje ľahšie pochopenie podobných úloh. Pomocou posuvníkov sa dajú modelovať všetky úlohy daného-horeuvedeného typu. V GeoGebre žiaci môžu používať vlastné teoretické poznatky, a tým získavajú poznatky a zážitky o využití matematických poznatkov v reálnom živote.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou KEGA 002UJS-4/2014 *Interaktívne elektronické učebné materiály na podporu implementovania moderných technológií do vyučovania matematiky a informatiky.*

Práce se znakem ve hře s pravidly

Anna Jungrová[1]

Příspěvek se zabývá grafickou komunikací v předmatematických činnostech u dětí předškolního věku. Poukazuje na dvě základní roviny práce s grafickým znakem, jejich využití popsané na příkladové aktivitě a význam zařazení těchto aktivit do mateřských škol.

Grafická komunikace je velice důležitá forma dorozumívání se s ostatními a doprovází nás takřka po celý život. V tomto příspěvku se budu věnovat grafické komunikaci u dětí předškolního věku, čímž je myšlena zejména komunikace prostřednictvím obrázků a piktogramů. Grafické znaky jsou izolované a jsou součástí kódu nebo zadaného kontextu. Je s nimi systematičtěji pracováno v mateřské škole v oblasti předmatematických činností, kde děti získávají základy matematických představ. Matematika má řadu úskalí. Na některá můžeme přijít již v předškolním věku, jiné se projeví až později ve školní matematice.

Dítě se světem verbálně i graficky komunikuje, ale to ještě nemusí znamenat, že rozumí grafické stránce okolního světa. Mělo by tedy nejen tvořit své vlastní nové znaky, ale zároveň se snažit porozumět znakům ostatních a přijmout je jako takové. To, že se bude snažit porozumět cizím znakům, u něj lépe rozvine schopnosti k pochopení znaků neznámých či složitějších a usnadní mu to například i vyřešení úkolu. Jak zmiňuje Kaslová: *Uvědomujeme si, že nerozvinutí některé oblasti může následně vytvářet bloky v procesu učení.* (Kaslová, 2010: s. 1)

Grafickou komunikací u dětí předškolního věku jsem se hlouběji zabývala ve své bakalářské práci „Grafický znak v přípravě na školní matematiku“. Cílem práce bylo zjistit, jak hluboce děti rozumí znaku. Zda jsou schopné porozumět nově vytvořenému znaku, který je zasazen do daného kontextu. Jestli ze znaku umí vyčíst informace a využít je k dalšímu postupu. A dále zjistit, jestli je dítě schopno vytvořit v daném kontextu znak nový, za předpokladu, že porozumělo znakům vytvořeným. Zjištění toho, zda dítě rozumí nebo nerozumí obrázkům, je důležité z hlediska návaznosti školní matematiky na předškolní vzdělávání. Úkolem práce bylo sestavit sérii aktivit a část z nich s dětmi vyzkoušet. S grafickým znakem je v aktivitách pracováno v oblasti dvou rovin. První rovina se týká porozumění novému neznámému znaku, ze kterého je potřeba vyčíst informace, které jsou pro nás důležité (například pro vyřešení úkolu). Druhou rovinou je dovednost tahu, pokud dítě porozumí znakům vytvořeným někým jiným, umí tyto znaky i použít a mělo by dokonce na základě těchto grafických informací být schopno i vytvořit svůj vlastní nový znak.

[1]Studentka, annajungrova@seznam.cz

Jednu z připravených aktivit bych zde chtěla blíže charakterizovat. Tato aktivita byla realizována s dvanácti dětmi předškolního věku.

Desková hra

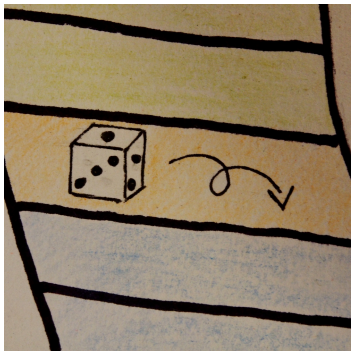
(autor: Anna Jungrová)

Tato desková hra byla vytvořena v rámci zmiňované bakalářské práce, ale je využitelná i v běžné praxi. Desková hra má základní hrací plochu (obr. 1). Na ní jsou vyobrazena klasická a speciální hrací pole. Speciální hrací pole jsou jasně graficky vyznačena. Jsou na nich možné čtyři druhy činností: „házíš kostkou ještě jednou“ (obr. 2), „jedno kolo stojíš“ (obr. 3), „lízni si kartu“ (obr. 4, 5) a „zkratka/objížďka“ (obr. 6). Dětem nejsou pravidla nijak interpretována a musí na ně přijít samy. Ke zjištění pravidel jim stačí informace, které vyčtou z hrací plochy. Je přípustná možnost doplňujících otázek. Například: „Proč jsou políčka tak široká?“, „Kde je start a cíl?“. Přesná interpretace pravidel závisí na kontextu, ve kterém jsou zadávaná a na tom, jak si je děti stanoví. Je tedy možné, že se vytvořená pravidla budou s jinou skupinou dětí mírně lišit. Avšak po zvolené interpretaci dojde k dohodě na tom, jaká jsou obecná pravidla, co obrázky na hrací ploše znamenají. Daná interpretace se tedy stává pravidlem a je trvalá. Ve hře nebylo graficky kódováno pravidlo postupu figurkou. Předpokládá se, že děti mají tuto dovednost již z obdobných deskových her, avšak není to tak zřejmé jak se zdá. Dívka (5 let) při postupu figurkou započítávala i výchozí pole, na kterém stála. To bylo v rozporu s technikou počítání po jedné. Výchozí pole tedy bylo započítáno dvakrát. Vysvětlila mi, že tato pravidla užívá při hře doma se svojí sestrou. Zajímavé na celé situaci je, že v mateřské škole ve stejné třídě měla dívka svého bratra (dvojče), který takto hrací pole nezapočítával.

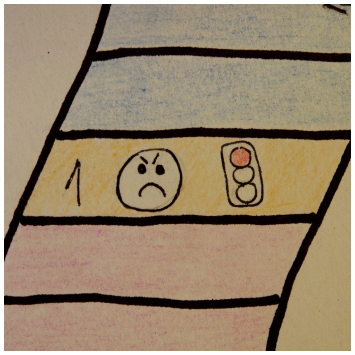
Vstup na speciální hrací pole byl velice často spojován s emotivním prožitkem dětí. Ten byl pozitivní, či negativní podle toho, co od daných polí děti očekávaly na základě své zkušenosti či zkušenosti ostatních hráčů. Emoce se projevovaly gestikou, mimikou, silnějším hlasovým projevem, zvýšením hlasu, intonací řeči, opakováním slov atd.

Předpokládá se, že mají děti zkušenost s hrou „Člověče, nezlob se“ či s jinými obdobnými deskovými hrami. Kdyby stály obrázky izolovaně bez hrací plochy, je velice pravděpodobné, že se jejich interpretace dětmi bude hodně lišit. Tím, že jsou ale zasazeny do kontextu deskové hry, umožní to dětem jejich identifikaci. Při řešení tohoto úkolu byla většina dětí úspěšná. Děti méně úspěšné mají buď malou zkušenost s obdobnými deskovými hrami, nebo na ně byl postup skupiny při tvoření pravidel příliš rychlý. To, že si dítě není jisté při tvorbě pravidel, ještě neznamená, že by pravidlům nerozumělo a neumělo je použít. Čas potřebný pro tvorbu pravidel nemá vliv na jejich následnou kvalitu.

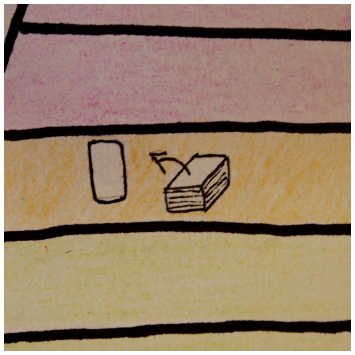
Obr. 1



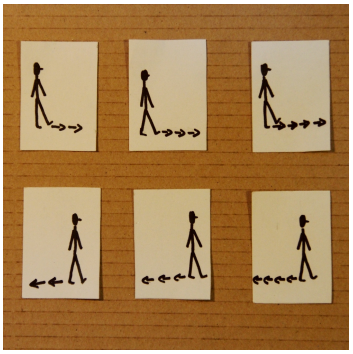
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Obr. 6

Doplňková aktivita k činnosti „Desková hra“

Z diagnostických důvodů bylo nutné zařadit rovinu, kdy dítě tvoří v zadaném kontextu znak nový. Doplnila jsem tedy hru o doplňkovou aktivitu. Ta by měla být realizována s odstupem alespoň jednoho dne. Než přejdeme s dítětem k samotné tvorbě grafického znaku, necháme ho, aby znovu interpretovalo vytvořená pravidla hry. Dále zavedeme pravidlo, že zkratku a objížďku může každý projít pouze jednou. Po dítěti chceme, aby toto pravidlo graficky ztvárnilo a umístilo do hrací plochy. Vzhledem k tomu, že v zadání bylo „projít pouze jednou“, byl předpoklad, že děti, které již znají číslice, tuto formu zápisu využijí. To byla tedy jedna často volená forma zápisu. Dále byla několikrát zvolena možnost šipky. Dětem se pravděpodobně spojila představa zadaného pravidla s hracími kartami doplňující deskovou hru, kde počet šipek u panáčka určuje počet kroků. Tedy projít zkratku/objížďku jen jednou znamená přiřadit šipku. Doplňková aktivita byla realizována s devíti dětmi. Většina dětí si pravidla deskové hry vybavila. Dvě děti z devíti si nevybavily všechna pravidla. První dítě mělo problém již s tvorbou pravidel u Deskové hry. Je tedy možné, že má malou zkušenost s deskovými hrami. Druhé dítě s tvorbou pravidel u Deskové hry problém nemělo, a přesto si část pravidel po delší době nevybavilo. Mohlo to zapříčinit momentální rozpoložení či neschopnost se soustředit. Jedno dítě nevytvořilo znak vůbec, tři děti ho zvládly vytvořit s oporou (znovu vysvětlení zadání jinými slovy) a pět dětí zvládlo vytvořit grafický znak pro pravidlo samostatně. Čas potřebný pro tvorbu grafického znaku pro pravidlo nemá vliv na jeho kvalitu. V analýze výsledků bylo zjištěno, že fakt, že si dítě pamatuje pravidla Deskové hry z dřívější doby, ještě neznamená, že je schopno vytvořit znak nový a naopak. Chlapec si pravidla hry pamatoval, ale novou značku nevytvořil. Na rozdíl od jiného chlapce, který si pamatoval pouze část pravidel, ale značku vytvořil nejrychleji ze všech sledovaných dětí.

I přesto, že měly v této práci testované aktivity záměr diagnostický, vzhledem k jejich úspěšnosti je mohu doporučit i jako aktivity rozvíjející. Konkrétně aktivita Desková hra je neobyčejná v tom, že nabízí nepřeberné množství hracích polí, které můžeme vytvořit, a grafických úprav. Dá se tedy uzpůsobit potřebám dětí i požadovanému kontextu. Podněcování dětí v mateřské škole k práci s grafickým znakem je velice důležité. „Přinést ovoce“ to může zejména v oblasti matematiky a to jak na prvním, tak i na druhém stupni základní školy. V první třídě v hodinách matematiky ještě částečně nahrazuje latinkové písmo obrázek. Ten například ve slovních úlohách znázorňuje část nebo i celé zadání. Pokud by mu dítě nerozumělo, způsobí to jeho neúspěch. Později na druhém stupni u složitějších slovních úloh je po dětech vyžadováno si samostatně zakreslit náčrt zadání. U lehkých slovních úloh to dětem přijde banální. U těch těžších to bez patřičné přípravy nemusejí zvládnout. To znamená, že dítě ve školní matematice má již přijmout zástupnou funkci grafického znaku, který má být oporou, zdrojem informací. Má být tedy schopné ho číst a dle

potřeby doplňovat či dokonce tvořit. To vše je bez přípravy v mateřské škole obtížnější. Proto nepodceňujme podněcování dětí v této oblasti a umožňujme jim řešit obrázkové úkoly, šifry, hlavolamy a další úkoly týkající se grafické reprezentace.

Literatura

[1] BABYRÁDOVÁ, H. (2004). *Symbol v dětském výtvarném projevu.* Brno: Masarykova Univerzita v Brně.

[2] DIVÍŠEK, J. (1987). *Metodika rozvíjení matematických představ v mateřské škole.* Praha: SPN.

[3] FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H. & ZELENDOVÁ, E. (2015). Předškolní věk. In Sodomková, S. (Ed.). *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku.* Brno: Jednota českých matematiků a fyziků.

[4] FUCHS, E. LIŠKOVÁ, H. & ZELENDOVÁ, E. (2015). Prelogické myšlení. In Kaslová, M. (Ed.). *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku.* Brno: Jednota českých matematiků a fyziků.

[5] JUNGROVÁ, A. (2015). *Grafický znak v přípravě na školní matematiku.* Praha. Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/147247/. [Bakalářská práce]. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce PhDr. Michaela Kaslová.

[6] KASLOVÁ, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání.* Praha: Raabe.

[7] RENDL, M. & VONDROVÁ, N. (2013). Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Jirotková, D. & Kloboučková, J. (Eds.). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: UK PedF.

Slovní úlohy v prvním a druhém ročníku ZŠ

Michaela Kaslová, Pavla Weinzettel[1]

Příspěvek vychází ze dvou zdrojů: jednak z komparativní analýzy dvou řad učebnic matematiky (nakladatelství Prodos a Alter) pro první a druhý ročník ZŠ prezentované v diplomové práci Pavly Weinzettel (dále jen PW), jednak ze starších šetření prováděných Michaelou Kaslovou (dále jen MK). Z problematiky slovních úloh se zaměřujeme především na fenomén času a volbu kontextů.

Slovní úlohy v užším slova smyslu

Slovní úlohy bývají vymezeny poněkud odlišně z pohledu učitelů či vědců a jinak z pohledu žáků. Odborné definice (Např. Divíšek) zmiňují, že jde o reálný problém řešitelný výpočtem. Kaslová (2010) upozorňuje na slovní úlohy řešitelné měřením, porovnáváním, konstrukcí a podobně. Reálnost problému zdůrazňují i další autoři, např. Kuřina. V šetření (Kaslová, 1994) na ZŠ Vojtěšská, Praha 1, žáci prvních a druhých ročníků zdůrazňovali, že mohou mít pohádkové nebo scifi-téma a přesto to bude slovní úloha. Z diskuse kolem historických kontextů vyplynulo, že jsou pro žáky na úrovni scifi či pohádkových kontextů pro přílišnou vzdálenost žákovské zkušenosti.

Slovní úlohou (zejména s ohledem na počátek školní docházky) (MK) budu chápat jako problém zasazený do kontextu reálného světa (reálného nejen dospělého, ale i pro dítě – řešitele). Slovní úloha může ovšem také představovat problém, který s danými daty je neřešitelný.

Slovní úloha (Kaslová, 2010) má **dvě části**, které se pořadím liší dle sociokulkturního kontextu. Jedna část sděluje informace majoritně slovy (mluvou, písmem – v Evropě hláskovým), má podobu popisu nebo vyprávění. Druhá část má podobu otázky, nebo výzvy či úkolu. Část z popisu či vyprávění vytváří problém, jehož řešení vyžaduje matematické metody řešení, kam kromě kalkulu řadíme, např. i uvažování a usuzování, porovnávání, měření, odhad, určení limitů, konstrukci, k řešení jedné slovní úlohy lze použít i více metod řešení. **Problém** se ve slovní úloze rodí teprve otázkou nebo úkolem vztahujícím se ke struktuře informací ve vyprávěcí či popisné části. Pokud řešitel není schopen vytvořit si představu popisu/vyprávění jako struktury, pak jde o jeden z důvodů nepochopení slovní úlohy. U mladších dětí je někdy problém pochopení otázky, nebo nerozlišení některých slov v otázkách (např. jak, jaký, který). Informace ve slovních úlohách jsou zpravidla dominantně prezentovány slovně, ale v učebnicích u mladších dětí (prvních

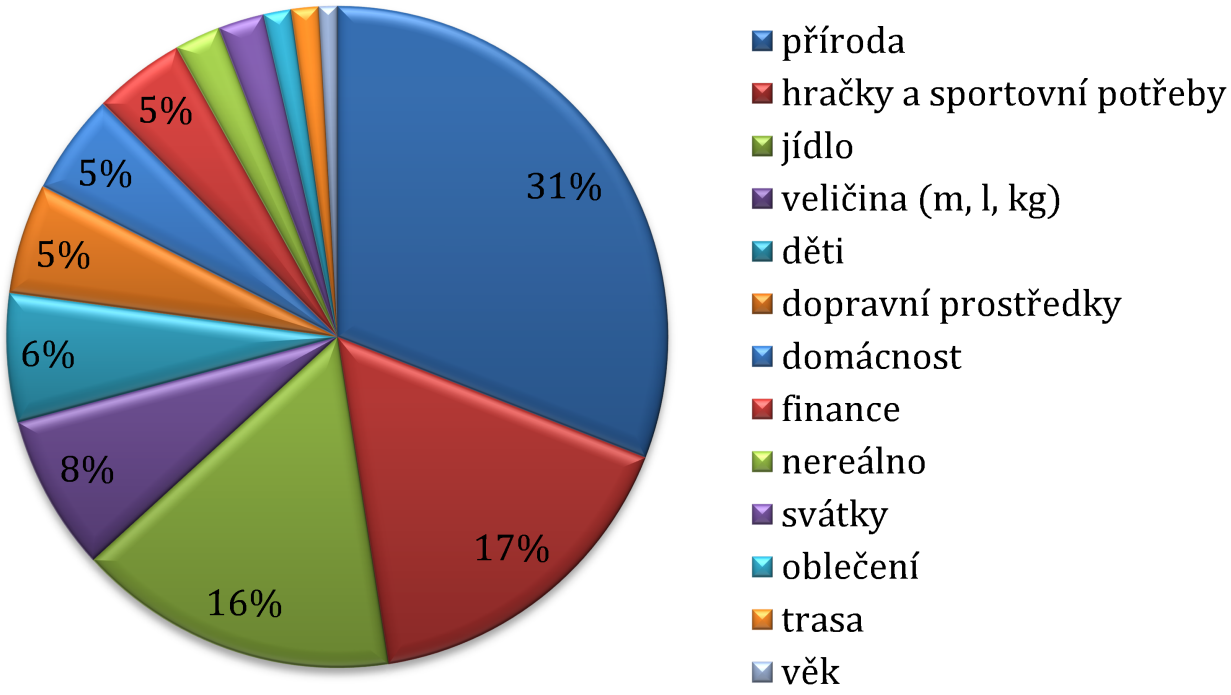
[1]KMDM, PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz, delfinjirankova@seznam.cz

čtenářů) je v písemné podobě mix mezi obrázky a hláskovým písmem a matematickou symbolikou, obrázky zastupují v textu vybraná podstatná jména (nejčastěji označující počítané jednotky). U vyšších ročníků najdeme zpravidla u textu obrázek nejvýše jeden, avšak v jiné roli. Mezi obrázky řadíme i schéma, graf, diagram, fotografii a podobně. Slovní úloha může být propojena s tabulkou, což se zpravidla na počátku školní docházky nevyskytuje pro nerozvinutou schopnost orientovat se ve strukturované ploše různými směry. Neporozumění obrázkům či malá orientace v tabulce mohou být jednou z dalších příčin nepochopení problému.

Kontext slovní úlohy v 1. a 2. r.

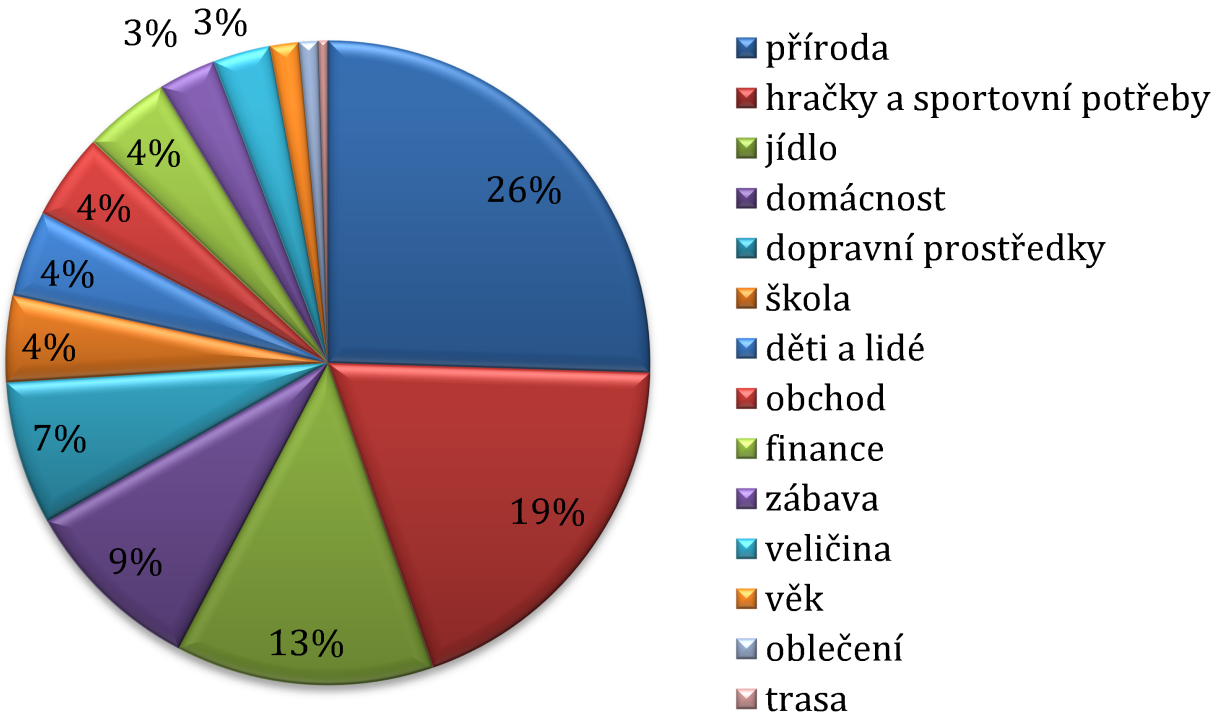
Šetření PW se zaměřilo na učebnice matematiky pro první dva ročníky ze dvou nakladatelství. Bylo analyzováno přes 600 slovních úloh (Weinzettel, 2015).

a) Alter (1. a 2. r.)



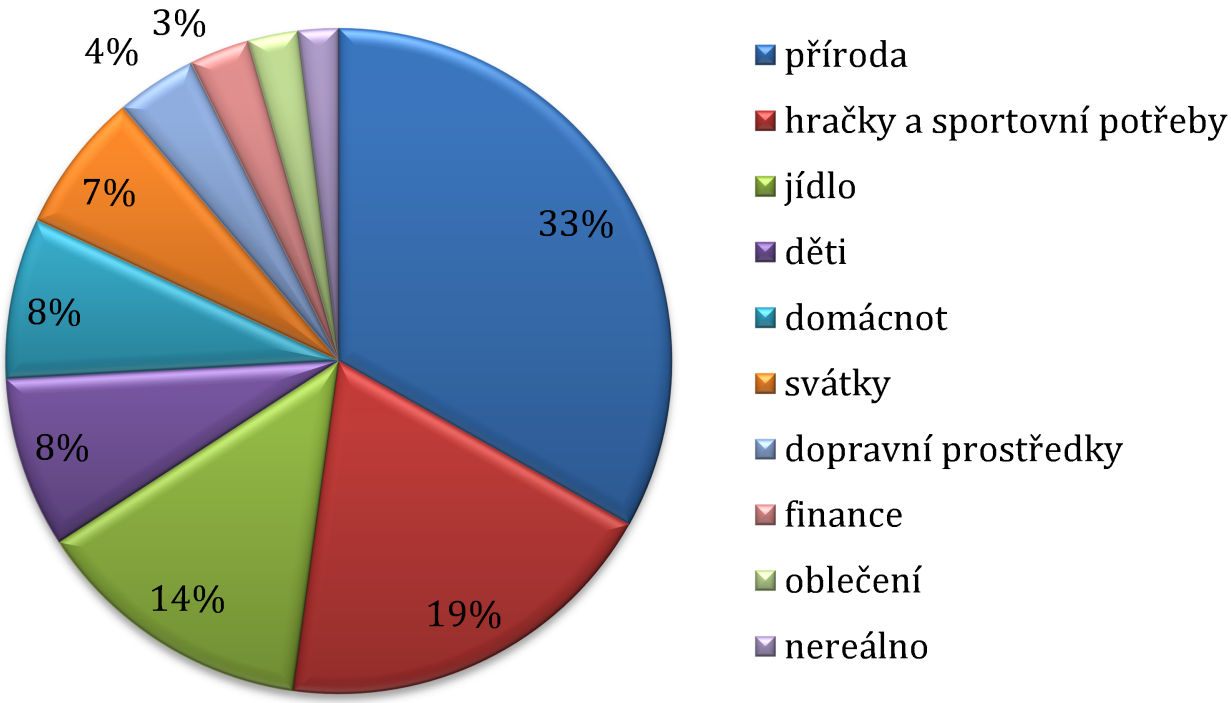
Graf 1: Alter 1. ročník

Převažují kontexty „příroda, děti, jídlo“, pořadí kontextů je v obou ročnících shodné. Počet kontextů je přibližně týž. V prvním ročníku najdeme kontexty ze světa fantazie dětí (označeno nereálné). Téma Děti a lidé představují 6 %, respektive 4 % úloh.

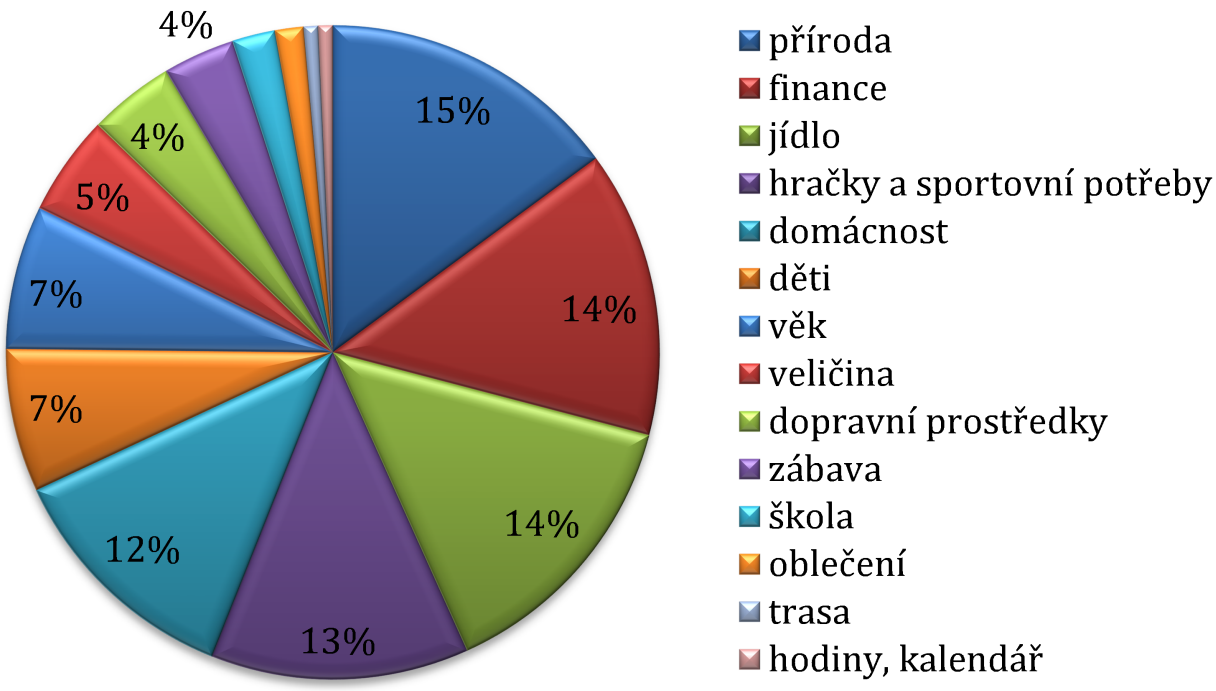


Graf 2: Alter 2. ročník

b) Prodos (1. a 2. r.)



Graf 3: Prodos 1. ročník



Graf 4: Prodos 2. ročník

Počet kontextů se vstupem do druhého ročníku v porovnání s prvním rozšiřuje. Dětský svět (nereálné kontexty) pomáhá překlenout přechod z dětského světa do světa školního a objevuje se v prvním ročníku, v druhém ustupuje.

Zvolené kontexty se u Alteru a Prodosu proporcí neshodují, najdeme i odlišnosti. V obou ročnících převažují kontexty: příroda, hračky, jídlo.

Co opravdu žáky tohoto věku zajímá? Na tuto otázku jsme hledali odpověď mimo jiné i v žákovské tvorbě slovních úloh (PW, MK). Slovní úlohy vytvořené žáky jsou do značné míry obdobou úloh, které se objevily v analyzovaných učebnicích. Na základě provedené analýzy však v tomto případě nelze jednoznačně potvrdit vliv slovních úloh v učebnicích na tvorbu žákovských úloh, určitý vliv má jistě i učitel tím, na které úlohy klade důraz, podle toho, které úlohy sám tvoří, případně který typ v případné tvorbě preferuje. V porovnání výsledků tvorby s užitým kontextem v učebnicích plyne, že je odlišný zájem o témata, která tvoří kontext slovních úloh, a to z různých pohledů. Ve srovnání s učebnicemi používanými v devadesátých letech a výsledky šetření mezi žáky tehdy (MK) a dnes je patrný generační posun v zájmech. Podívejme se na výsledky obou šetření (MK, PW) v čem se liší vytvořené žákovské slovní úlohy a úlohy v učebnicích. Sledované jevy obou šetřeních: a) velikosti počítaných objektů (MK); b) reálnosti počítaných objektů (PW, MK); c) aktuálnosti – volnočasové aktivity, televize, počítačové hry, hračky, reklama, ... (MK, PW); d) osobní zkušenosti s počítanými objekty (MK, PW). Kontexty volené autory učebnic jsou v některých případech mimo oblast, která žáky zajímá.

Problém není pouze v generačních rozdílech (autoři – žáci), ale i v tom, že některé dětmi preferované kontexty neumožňují ve druhém ročníku propojení s požadovanou matematickou podstatou či nový typ slovní úlohy.

U některých žáků (Kaslová, 1993, 1995 a 2005) se vyskytuje volba kontextu v závislosti na tom, jaké představy jsou vůbec žáci schopni zpracovat. Ti žáci, kteří mají problém zpracovávat časoprostorové představy, mají tendenci ve vlastní tvorbě volit kontexty na úrovni mikroprostoru nebo mezzoprostoru (termíny prezentované v přednášce – C. Marchini, Praha 2009), vždy po toku času (nejde-li o úlohy statické). U nadprůměrných žáků se vyskytuje vysoká tendence pracovat s většími čísly, avšak někdy na úkor reálnosti situace. Pokud je žákům přímo zadán kontext (Kaslová, 1993, nepublikovaný výzkum s Kanadou – B. Janvier, N. Bednarz), nadprůměrní žáci v daném kontextu jsou schopni vytvořit pestrou škálu úloh, avšak průměrní nejdříve hledají podobnost kontextu s učebnicovými úlohami, rozpomínají se a pak tvoří, tvorba je často obměnou či variací na školní úlohu.

Užití času ve slovních úlohách

Dimenze času má na jedné straně pro děti svojí dynamičností větší přitažlivost, na druhé straně je náročnější pro tvorbu představ. Přítomnost dimenze času dělí úlohy na dva typy:

A) **Statické** (E. Malinová, M. Kaslová) slovní úlohy jsou založené na popisu jedné neměnné situace, tato situace může být pojímána dvojím způsobem:

a) Situaci sledujeme nejdříve jako **celek**, pak se zabýváme částmi tohoto celku (podle zadaných informací se ptáme na jednu z nich, nebo ve vyšších ročnících na obě, například známe-li vztah mezi nimi);

b) Situaci sledujeme po částech, vycházíme **od částí** celku (známe údaje o částech, nebo o vztahu mezi nimi) a zajímá nás celek – měníme pohled na situaci.

B) **Dynamické** – úlohy se opírají o vyprávění, nebo popis postupu, kde hraje dimenze času významnou roli, zpravidla stojí na sekvenci 2–3 obrazů. Úlohy jsou dvojího typu:

a) **po toku času (B. Sarrazy, M. Kaslová)** – sled informací v zadání i otázce sledují jedinou časovou linii a první podaná informace je časově *nejstarší*;

b) **proti toku času (B. Sarrazy, M. Kaslová)** jsou dvou typů:

ba) zadání proti toku času *od druhého nejmladšího* obrazu, ptáme se na obraz *nejmladší*;

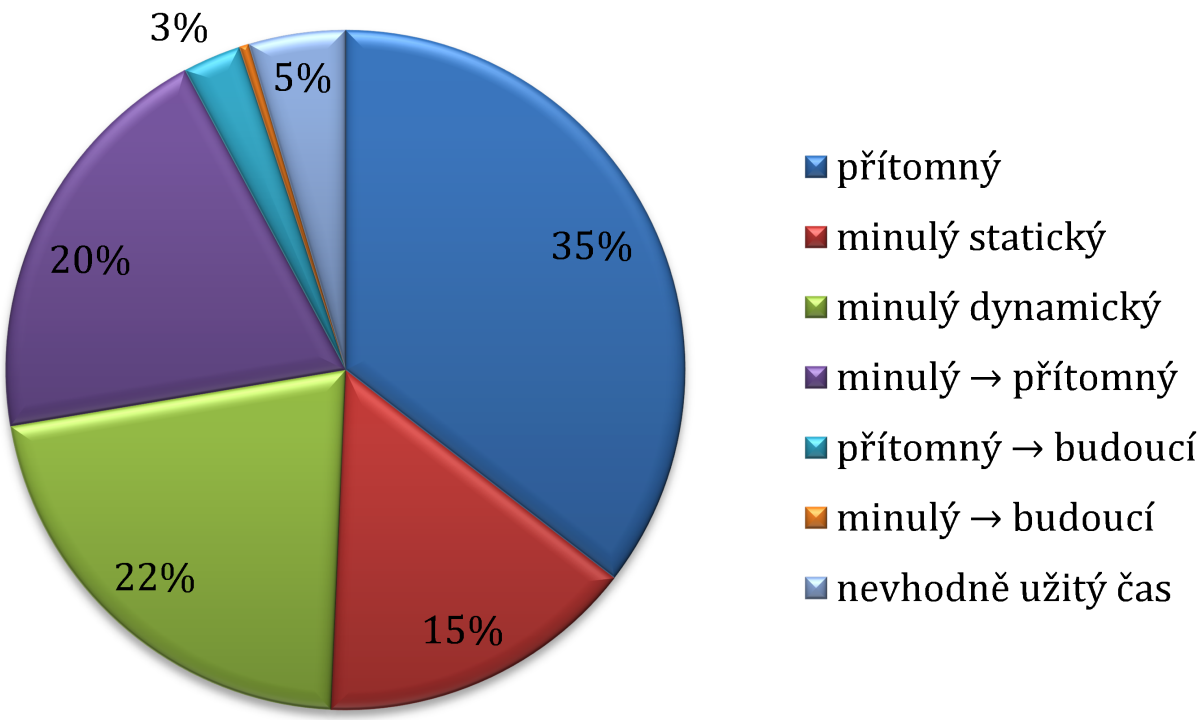
bb) zadání po toku času *od druhého nejstaršího* obrazu a ptáme se na obraz *nejstarší*.

Poslední šetření (MK) ukázala, že může existovat slovní úloha na první pohled dynamická, avšak dimenze času pro její řešení nehraje významnou roli, mnohé závisí na formulaci úlohy.

Z pohledu českého jazyka (MK) sledujeme formulaci slovní úlohy: **a) Minulý, b) Přítomný (statické úlohy), c) Budoucí, d) Mix tří typů:** 1. minulý – přítomný, 2. minulý – budoucí, 3. přítomný – budoucí. Pozor v textu na jevy související s časem: na souslednost časovou; na významovou **nadčasovost** (Z. Dlouhý, přednášky z matematické analýzy II, 1980), na práci s podmínkou (ne)reálnou. Nadčasovost je jazykově spjata s přítomným časem (za daných podmínek „je“ užíváme ve smyslu *bylo, je a bude*).

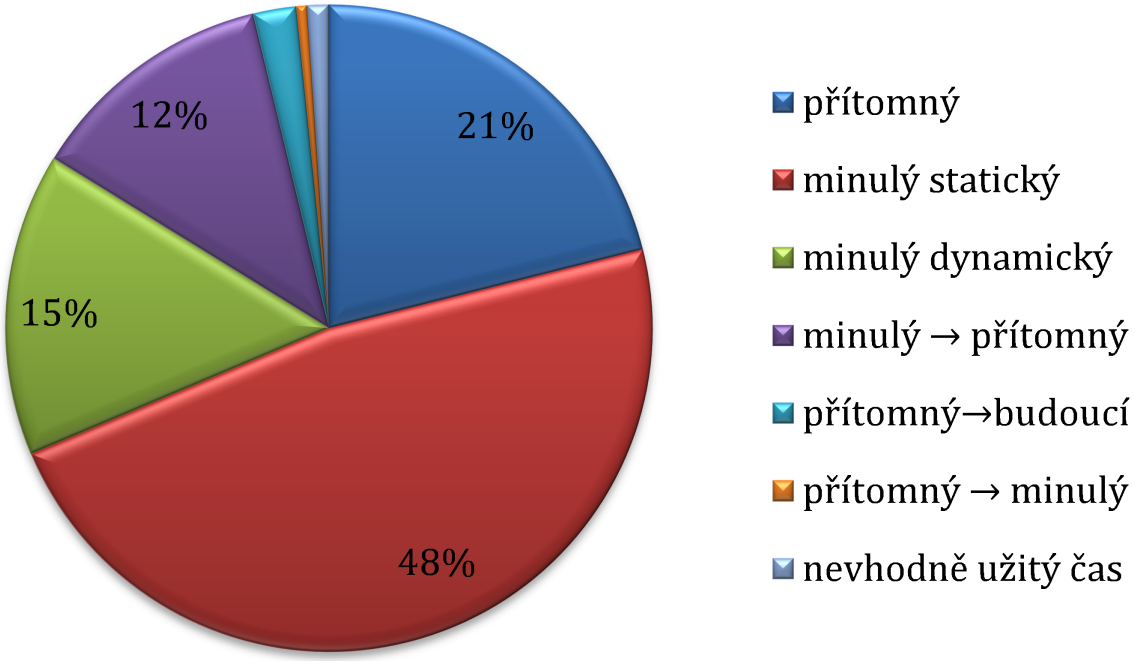
V šetření (PW) analyzovala slovní úlohy týchž učebnic z pohledu práce s dimenzí času.

a) Alter (1. a 2. r.)



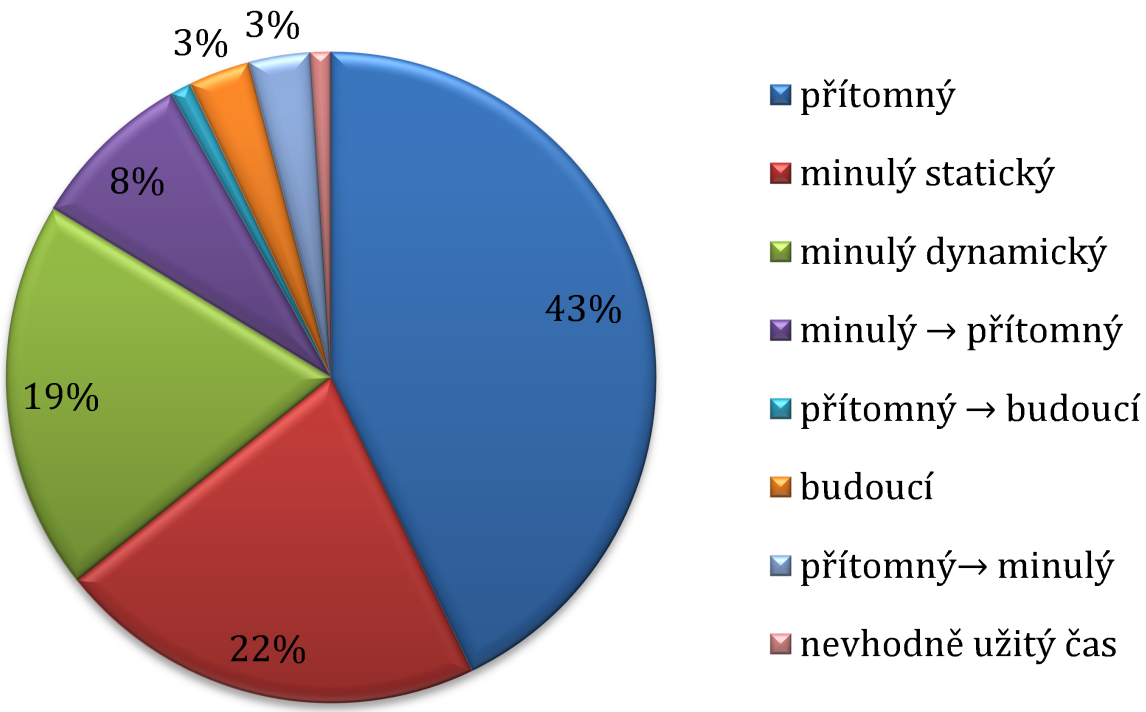
Graf 5: Alter 1. ročník

Převažuje přítomný a minulý čas. Dynamické slovní úlohy dle gramatického času jsou v menšině. Přechod z jednoho času do druhého nedosahuje čtvrtinu všech úloh.



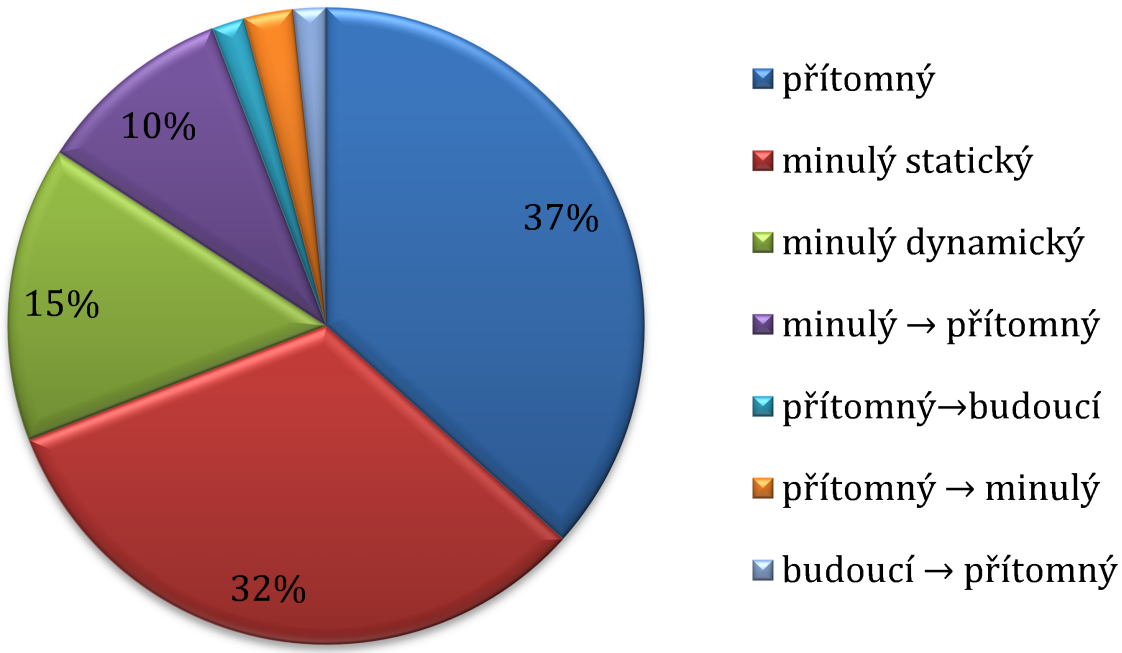
Graf 6: Alter 2. ročník

b) Prodos (1. a 2. r.)



Graf 7: Prodos 1. ročník

Pokud užití přítomného času uznáme jako stavovou situaci v daném okamžiku, pak slovní úlohy v učebnicích nakladatelství Prodos klasifikujeme jako dominantně



Graf 8: Prodos 2. ročník

statické. Přítomný čas může být užit i tak (MK), že jde i o **skrytě dynamickou slovní úlohu** (např. *v pondělí máme 4 vyučovací hodiny, v úterý máme 5 hodin, ...*).

Ve zkoumaném souboru slovních úloh se vyskytuje nový typ práce s časem, který označuji (PW) novým termínem **nejednoznačně užitý čas**. Vymezení odvineme od příkladu (Alter, 1. roč., 2. díl, str. 5): *Táta má 7 per. 4 pera dal Jule. Kolik per zbylo tátovi?* **Časová nejednoznačnost (PW)** se vyskytuje ve slovní úloze, pokud je první věta (obraz) chápána jako tvrzení vyjadřující současný stav a následující věty jsou formulovány v čase minulém bez zjednoznačnění časové následnosti. Danou úlohu lze časově zjednoznačnit. Úpravy dělíme (PW) na:

A) **Převedení na slovní úlohu po toku času:** *Táta měl 7 per. 4 pera dal Jule. Kolik per zbylo tátovi?*

B) **Vytvoření úlohy proti toku času:** *Táta má 7 per. 4 pera dal (předtím) Jule. Kolik měl táta per původně? / Táta má 7 per, i když někdy dříve dal 4 pera Jule.*

Literatura

[1] KASLOVÁ, M. (2010). *Předmatematické činnosti.* Praha: RABE.

[2] KASLOVÁ, M. (2000). *Transformation of mathematical code.* Kodaň: ICME.

[3] KASLOVÁ, M. (1999). Pupil´s creation of verbal problems. In Hejný, M. & Novotná, J. (Eds.). *Proceedings SEMT 99* (pp. 145–150). Praha: UK PedF.

[4] ROZOVÁ, J. (2007). *Role času ve slovních úlohách.* [Diplomová práce]. Praha: UK PedF.

[5] WEINZETTEL, P. (2015). *Slovní úlohy v 1. a 2. r. ZŠ.* [Diplomová práce]. Praha: UK PedF.

Zmena úlohy pri tvorbe testu z matematiky

Iveta Kohanová[1]

V tomto príspevku opíšeme proces tvorby úloh z matematiky v rámci slovenského národného projektu Zvyšovanie kvality vzdelávania na základných a stredných školách s využitím elektronického testovania. Zameriame sa na zmenu kognitívnej úrovne podľa revidovanej Bloomovej taxonómie a vysvetlenie rozdielu medzi konceptuálnymi a procedurálnymi poznatkami.

Vzdelávacie ciele a ich taxonómie

Cieľ je ideálna predstava toho, čo sa má v činnosti dosiahnuť (Průcha, Walterová & Mareš, 2009). Jednou z kategórií výchovno-vzdelávacích cieľov sú ciele špecifické, ktoré by mali jednoznačne definovať stav osobnosti, správania sa žiaka, ktorý sa má dosiahnuť na konci vyučovacieho procesu, t. j. čo konkrétne sa má žiak naučiť, čo konkrétne má žiak vedieť, do akej hĺbky a za akých podmienok (Turek, 2008). V literatúre možno nájsť viacero taxonómií vzdelávacích cieľov (Bloom, Niemerko, Kratwohl, Simpson, Talyzinová, ...), s ohľadom na ich klasifikáciu podľa psychických procesov (kognitívne, afektívne, psychomotorické). V našom príspevku sa sústredíme na revidovanú Bloomovu taxonómiu (Anderson & Krathwohl, 2001) kognitívnych procesov. Táto taxonómia je na rozdiel od pôvodnej Bloomovej taxonómie dvojdimenzionálna, kde k dimenzii kognitívnych procesov, pribudla dimenzia poznatkov.

Kým dimenzia kognitívnych procesov je istým spôsobom hierarchizovaná (v tabuľke smerom zľava doprava), čo znamená, že porozumieť nemožno bez zapamätania, aplikovať bez porozumenia, ..., o dimenzii poznatkov sa to už povedať nedá.

[1]NÚCEM v Bratislave, iveta.kohanova@nucem.sk; FMFI UK v Bratislave, kohanova@fmph.uniba.sk

Dimenzia poznatkov	**Dimenzia kognitívnych procesov**					
	Zapamätať si	Porozumieť	Aplikovať	Analyzovať	Hodnotiť	Tvoriť
Faktické poznatky						
Konceptuálne poznatky						
Procedurálne poznatky						
Metakognitívne poznatky						

Túto taxonómiu, hoci sa primárne viaže k špecifickým cieľom vyučovania, sme aplikovali aj pri tvorbe testových úloh z matematiky v rámci národného projektu, ktorý sme spomenuli v abstrakte tohto článku. Asi 80 učiteľov z rôznych častí Slovenska vytváralo úlohy, pričom dôraz sa okrem obsahu kládol aj na kognitívne procesy a dimenziu poznatkov. Je dôležité uvedomiť si, že aj úlohy testujúce nižšie kognitívne procesy (zapamätanie, porozumenie) a poznatky (faktické) majú v testoch svoju opodstatnenosť. V priebehu riešenia projektu sme zistili, že učitelia majú tendenciu sústrediť sa na procesy aplikácie a analýzy, viažuce sa zväčša k procedurálnym poznatkom. Bolo preto dôležité zorganizovať pre nich niekoľko školení, na ktorých sa naučili rozlišovať medzi faktickými, konceptuálnymi a procedurálnymi poznatkami a meniť aj kognitívnu úroveň týchto úloh. Pochopenie toho, ktoré úlohy testujú zvládnutie faktických poznatkov (napr.: *Ktoré číslo sa v rímskej číselnej sústave označuje písmenom D?*), bolo omnoho jednoduchšie ako vnímanie rozdielov medzi konceptuálnymi a procedurálnymi poznatkami. Preto v nasledujúcom texte uvedenie pár definícií týchto pojmov, ako aj pár ukážok úloh, ktoré sa zameriavajú práve na tieto procesy.

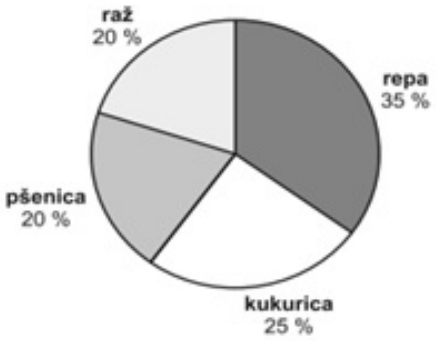
Konceptuálne verzus procedurálne poznatky

Ako úvodný príklad použijeme typickú úlohu, ktorá sa tradične vyskytuje v národnom testovaní deviatakov pri výstupe zo základnej školy. Nasledujúca úloha je z testu z roku 2014.

Na určenie kognitívnej úrovne každej úlohy je potrebné vedieť, ktorý výkonový štandard sa ňou testuje, resp. čo má žiak vykonať na získanie správneho riešenia. Autor úlohy mal pravdepodobne úmysel testovať, či žiaci vedia analyzovať graf a správne dopočítať rozlohu prislúchajúcu k danému počtu percent. Z hľadiska

09

Graf znázorňuje rozdelenie poľnohospodárskej pôdy s rozlohou 48 hektárov, na ktorej boli vysiate štyri plodiny. Na koľkých ároch bola vysiata repa?



kognitívnych procesov ide teda o úlohu zameranú na analýzu (čítanie grafu a selekcia vhodných údajov). Testuje však táto úloha konceptuálne alebo procedurálne poznatky? Aby sme správne odpovedali na túto otázku uvedieme niekoľko definícií týchto poznatkov podľa viacerých autorov.

Procedurálne poznatky sú:

- Postupnosť krokov na vyriešenie úlohy (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).
- Učenie (sa), ktoré zahŕňa iba memorovanie operácií bez porozumenia ich základného významu (Arslan, 2010).
- Vykonávanie postupu bez toho, aby žiaci rozumeli jeho dôvodom.

Konceptuálne poznatky sú:

- Explicitné alebo implicitné pochopenie princípov daného poznatku a vzájomných vzťahov medzi poznatkami (Rittle-Johnson & Alibali, 1999).
- Učenie (sa), ktoré zahŕňa porozumenie a interpretáciu pojmov a vzťahov medzi nimi (Arslan, 2010).
- Porozumenie pojmom aby sme vyriešili danú úlohu (pričom žiak použije ľubovoľnú procedúru/postup).

Keď uvedené definície zhrnieme, možno povedať, že pri procedurálnych poznatkoch žiak vie **čo** treba robiť, pri konceptuálnych rozumie **prečo** to robí. Keďže touto úlohou nezistíme či žiak naozaj rozumie podstate pojmu percento a vzťahov medzi nimi, preto uvedenú úlohu zaradíme do kategórie procedurálne poznatky – analýza. Ako túto prerobiť, aby testovala „nižšie“ kognitívne procesy? Ak z úlohy

odstránime graf a potrebný údaj vložíme do textu: *Na ploche 48 hektárov boli vysiate štyri plodiny. Repa zaberala 35 % plochy. Na koľkých ároch bola vysiata repa?*, dostaneme sa na úroveň procedurálnych poznatkov – aplikácia. Ak naopak úlohu chceme posunúť „vyššie“, na úroveň tvorivosti (čo vzhľadom na časovú náročnosť úlohy treba zvážiť jej zaradenie do testu), možno text úlohy zmeniť nasledovne:

Navrhnite, ako si má obec podeliť svoju poľnohospodársku pôdu na pestovanie 5 plodín na nasledujúci rok tak, aby boli splnené všetky nasledujúce podmienky:

- *Kukurica a raž sa majú pestovať na navzájom rovnako veľkých plochách.*
- *Zemiaky sa majú pestovať na ploche, ktorá zodpovedá 60 % plochy, na ktorej sa bude pestovať repa.*
- *Pšenica sa má pestovať na ploche 30 %.*
- *Všetky plodiny sa majú pestovať na ploche, ktorej percentuálne vyjadrenie je násobkom 5.*

Váš návrh, aké veľké majú byť časti plochy v % pre každú pestovanú plodinu zapíšte do tabuľky

	raž	*repa*	*pšenica*	*kukurica*	*zemiaky*
plocha v %					

Ak chceme preveriť, či žiaci rozumejú pojmu percento, teda overiť ich konceptuálne poznatky (porozumenie), možno pôvodnú úlohu preformulovať takto (pričom sme zmenili aj typ úlohy, z otvorenej na uzavretú):

Ktoré spojenie najlepšie interpretuje slovné spojenie 35 % žiakov školy. . . ?

(A) 35 žiakov triedy. . .
(B) Každý 35-ty žiak. . .
(C) Zo sto žiakov 35 žiakov. . .
(D) 1,35 násobok počtu žiakov. . .

Záver

Didaktické testy, by okrem iných vlastností (validita, reliabilita, citlivosť) mali byť aj objektívne a praktické, teda jednoznačne a rýchlo vyhodnotiteľné. Úlohy do didaktického testu, ktoré sa zameriavajú na kognitívne poznatky, nie je jednoduché vytvoriť, ak má žiak možnosť odpovedať len jednoslovne, resp. vybrať správnu odpoveď spomedzi ponúkaných možností. V literatúre možno nájsť niekoľko odporúčaní, ako merať konceptuálne poznatky.

Explicitne (Rittle-Johnson & Star, 2009; Berthold & Renkl, 2009; Lavigne, 2005):

- tvorba definícií a vysvetlení,
- selekcia správnej definície pojmu zo zoznamu,
- vysvetlenie, prečo algoritmy/procedúry fungujú,
- nakreslenie pojmovej mapy.

Implicitne (Rittle-Johnson & Star, 2009; Schneider & Stern, 2010; Lavigne, 2005):

- porovnanie mnohostí,
- hodnotenie neznámych procedúr,
- hodnotenie kvality odpovede niekoho iného,
- triedene príkladov do kategórií.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že ak chceme písomnou formou merať žiacke kognitívne poznatky, je dôležité zamerať sa skôr na úlohy s výberom odpovede, kde by ponúkané možnosti mali odrážať časté miskoncepcie žiakov týkajúce sa pojmov, ale aj procedúr.

Literatúra

[1] ANDERSON, L. W. & KRATHWOL, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives.* New York: Longman.

[2] ARSLAN, S. (2010). Traditioanal instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29(2), 94–107.

[3] BERTHOLD, K. & RENKL, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, 101, 70–87.

[4] LAVIGNE, N. C. (2005). Mutually informative measures of knowledge: concept maps plus problem sorts in statistics. *Educational Assessment*, 101, 39–71.

[5] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E. & MAREŠ, J. (2009). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál.

[6] RITTLE-JOHNSON, B. & ALIBALI, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 175–189.

[7] RITTLE-JOHNSON, B. & STAR, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101, 529–544.

[8] SCHNEIDER, M. & STERN, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: a multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46, 178–192.

[9] TUREK, I. (2008). *Didaktika.* Bratislava: Iura Edition.

ANALÝZA ŘEŠENÍ ÚLOHY SE SÍTĚMI KRYCHLE A KVÁDRU, ŘEŠENÍ ŽÁKŮ VIDÍCÍCH A NEVIDOMÝCH

Klára Kochová[1]

Práce se sítěmi krychle představuje most mezi dvourozměrnou a trojrozměrnou geometrií na 1. stupni ZŠ. Tato látka bývá vyučována pomocí manipulačních úloh, při kterých žáci mohou sami zkoumat vlastnosti sítí.

Vybrali jsme jednu úlohu z tohoto prostředí a nechali ji řešit třem skupinám žáků: dva žáci byli úplně nevidomí, dva žáci byli vidící, ale měli zavázané oči a dva žáci byli vidící bez zavázaných očí. Řešení úlohy všech dětí byla natočena na video. Po vyřešení měli žáci komentovat své postupy a vysvětlit své řešení. Věk všech řešitelů spadal do 2. ročníku ZŠ, tedy tak, aby žáci ještě sítě krychle ve škole předem neprobírali.

Zadání úlohy

1. Dávám ti do ruky něco (experimentátor dává do ruky dítěti dřevěnou krychli). Nyní ti dávám ještě něco (experimentátor podává do ruky dítěti dřevěný kvádr).

2. Co to je? (dítě pojmenuje oba objekty X a Y)

3. Nyní ti podávám několik šatů pro pana X a pro pana Y. Rozhodni, které patří panu X a které panu Y.

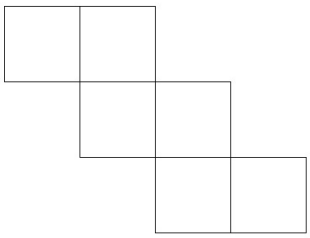
[1]Doktorandka KMDM, PedF UK v Praze, klara.kochova@gmail.com

Pozn. k zadání: Žáci pojmenovali oba objekty různě. V celém experimentu pak byla nadále používána žákovská pojmenování.

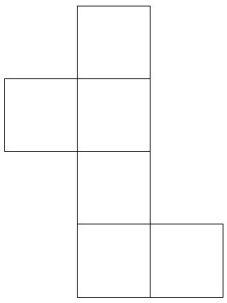
Přehled sítí/šatů

Sítí (neboli šatů pro objekty) bylo celkem 6, z toho 2 pro krychli, 2 pro kvádr a 2 „falešné“, které nešly obléci ani jednomu objektu. V případě falešných šatů pro krychli byla jedna stěna pokryta dvakrát a jedna vůbec, v případě falešných šatů pro kvádr spolu po kratší hraně sousedily dvě větší stěny, šaty tedy nešly vůbec obléci bez toho, abychom jednu z těchto stěn ohnuli. Pro přehlednost jsme sítě pojmenovali podle toho, co svým tvarem připomínají.

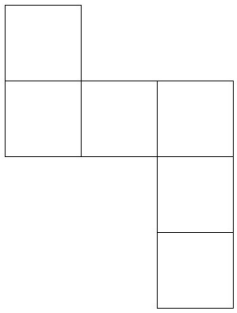
Sítě krychle:



Obr. 1: Síť schody

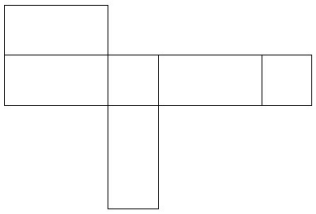


Obr. 2: Síť modlitba

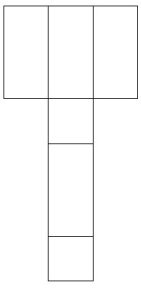


Obr. 3:
„Falešná“ síť židle

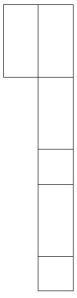
Sítě kvádru:



Obr. 4: Síť vrtačka



Obr. 5: Síť smeták



Obr. 6:
„Falešná“ síť sekera

Popis řešení

Za správné řešení považujeme situaci, kdy žák zároveň:

1. rozpozná sítě schody a modlitba jako šaty pro krychli (přičemž nerozhoduje, jakým názvem krychli pojmenoval);
2. všimne si, že u sítě židle je jedna stěna pokryta dvakrát, zatímco jiná vůbec;
3. rozpozná sítě vrtačka a smeták jako šaty pro kvádr (opět nerozhoduje, jakým názvem kvádr pojmenoval);
4. označí síť sekera jako falešnou síť pro kvádr anebo síť, která nepatří ani k jednomu tělesu.

Řešení se zúčastnilo šest žáků, viz tab. 1:

označení	**zrak**	**jméno**	**výsledek řešení**	**délka**
01nevidPav	nevidomý	Pavel	nevyřešil	05:25
02nevidAdam	nevidomý	Adam	vyřešil	04:55
03vid-zavazAgn	vidící se zavázanýma očima	Agnes	vyřešila částečně	02:53
04vid-zavazVojt	vidící se zavázanýma očima	Vojtěch	vyřešil částečně	03:22
05vidEliz	vidící	Elizabeta	vyřešila částečně	02:53
06vidSam	vidící	Samuel	vyřešil částečně	03:42

Analýza řešení

Pojmenování těles

Krychli pojmenovali žáci v pěti případech kostka a v jednom případě krychle. Během řešení ale více žáků použilo pojmenování čtverec, případně na toto pojmenování úplně přešlo (03vid-zavazAgn).

Kvádr pojmenovali žáci ve dvou případech kvádr (šlo o nevidomé spolužáky), ve třech případech obdélník a v jednom případě (04vid-zavazVojt) osmiroh. Vzhledem k dlouhým pauzám se lze domnívat, že si Vojtěch snažil vzpomenout na pojmenování kvádr. Na výzvu: „Navrhni nějaké pojmenování, které budeme používat.“ ho pojmenoval osmiroh, což ukazuje na hlubší uvědomění si vlastností kvádru.

V pojmenováních se také objevil výraz trojúhelník (při mluvení o kvádru) a čtverec (o krychli).

Pojmy krychle a kvádr tedy nebyly mezi žáky upevněny, přestože znalost vlastností těchto těles už u žáků nějak vybudována byla. Usuzujeme tak z jejich práce s tělesy. Jazyk žáků byl tedy opožděn oproti jejich zkušenostem s tělesy.

Rozpoznání sítí

Téměř všichni žáci (až na Pavla, který až do konce neporozuměl zadání úkolu) rozpoznali bez problémů sítě krychle schody a modlitba. Ani se sítěmi kvádru vrtačka a smeták (opět až na Pavla) neměli žádný větší problém.

Síť židle byla některými žáky zařazena mezi „správné“ sítě krychle, přičemž z videozáznamů můžeme vyvodit, že si všimli toho, že síť nepokryje všechny stěny krychle a jedna strana také bude překryta dvakrát. Někteří to nepovažovali za chybu sítě.

Síť sekera byla jednoznačně nejobtížnější. Někteří ji pojmenovali jako špatnou, někteří ji přešli a zařadili ji mezi sítě kvádru. Samuel si všiml, že nějak nesedí, nakonec se ale rozhodl, že patří mezi sítě kvádru.

Jediný Pavel řekl o síti kvádru oblečené na krychli, že jí sedí. Jinak nikdo ze žáků sám od sebe nezkoušel obléci sítě krychle na kvádr a obráceně.

Hmatové vnímání

Mechanismus hmatové manipulace je způsob, jakým si žáci těleso pomocí hmatu prohlížejí. Je při tom vyloučen zrak. Popis následujících mechanismů hmatové manipulace vychází z výzkumů Jirotkové a Hejného (například v Jirotková, 2001, 2006) a dále Jirotkové a Littlera (například v Littler & Jirotková, 2004).

1. **Globální mechanismus**
   Žák drží těleso oběma rukama a vnímá ho globálně jako celek. Útvar si otáčí v rukách, ale není zaměřen na vnímání jednotlivých dílčích charakteristik.
   Úroveň 1: Jednotlivé znaky tělesa nehrají pro dítě při určování tvaru žádnou roli.

2. **Náhodný mechanismus**
   Žák drží těleso oběma rukama a s pomocí prstů objevuje některé průvodní jevy tělesa. V tomto postupu nemá žádný systém nebo řád.
   Úroveň 2a: Pro těleso se stává určující jeden z jeho znaků spíše než jeho celkový tvar.
   Úroveň 2b: Těleso je vnímané na základě několika znaků, které jsou ale považovány za nezávislé na sobě.

3. **Systematický mechanismus**
   Žák drží těleso v jedné nebo v obou rukách a systematicky pomocí prstů hodnotí jeho průvodní jevy.
   Úroveň 3: Znaky jsou správně spatřovány ve svých vzájemných vztazích.

Popsaný mechanismus hmatové manipulace se týká poznávání těles. V případě našeho úkolu ale můžeme popis využít i na poznávání sítí jakožto mezistupeň mezi rovinným útvarem a tělesem.

U každého žáka jsme zkoumali, jak využíval obě ruce (kterou část rukou, zda byla některá jeho ruka dominantní), jak systematicky hmatově poznával tělesa, jaký mechanismus hmatové manipulace použil a jak sítě rozpoznával (zda těleso „oblékal“ či skládal sítě v ruce).

Nejzajímavější byl zřejmě Pavel, který si prohlížel předměty konečky prstů obou rukou a dělalo mu velký problém udržet zároveň těleso a síť. Bylo pro něj těžké těleso skutečně obléci, princip ohýbání sítě mu nebyl jasný. Pomocí prstů spíše „jezdil“ sítí po povrchu tělesa, tiskl je k sobě. Obtížný pro něj zřejmě byl přechod mezi plochou a prostorem, protože sítě představují jen plášť tělesa. Když mu bylo přímo ukázáno, jak může síť na těleso „obléci“, řekl, že síť kvádru „sedí“ krychli. Chvíli držel v ruce kvádr i síť a bylo pro něj těžké obojí udržet, takže se mu celek ještě v ruce rozpadl.

Mechanismus hmatové manipulace, který Pavel použil, byl globální.

Závěr

Nevidomí žáci Pavel a Adam řešili úlohu nejdéle. Pomineme-li pojmenování kostka (pro krychli), nesměšovali pojmenování z rovinné a prostorové geometrie dohromady. Z poznatků z tyflopsychologie vyplývá, že řeč má pro osoby se zrakovým postižením větší význam než pro vidící proto, že musí navíc plnit i kompenzační funkci. Domníváme se proto, že nevidomí žáci již krychli i kvádr v ruce mnohokrát měli a ve škole se je učili také pojmenovávat. Pavel jako jediný úlohu nevyřešil prakticky vůbec, Adam jako jediný ji vyřešil úplně. Při hmatovém vnímání oba využívali obě ruce, prsty i dlaně po celé délce.

Vidící žáci se zavázanýma očima Agnes a Vojtěch ani jeden nerozpoznali sekeru jako „falešnou“ síť pro kvádr. Oba pracovali relativně rychle, nepříliš pečlivě s podrobným prohlížením sítí.

Vidící žáci Elizabeta a Samuel oba pojmenovali tělesa kostka a obdélník. Oba žáci komunikovali s experimentátorem pohledem, jako by vyžadovali ujištění či potvrzení svých řešení. Oba vnímali již od pohledu rozdíl mezi sítěmi pro krychli a pro kvádr. Oba také vnímali, že síť židle pro krychli je něčím zvláštní.

Cílem analýzy bylo popsat řešení šesti žáků. Očekávali jsme, že se v jejich řešení bude vyskytovat více úplných řešení a méně chyb.

Porovnání žáků vidících a nevidomých je velmi obtížné, jde o velmi malý zkoumaný vzorek žáků. Obecně se dá říci, že vidící žáci pracovali rychleji, ať už měli zavázané oči či ne. Vidící žáci bez zavázaných očí se snažili o oční kontakt s examinátorem, což z pochopitelných důvodů ostatní nedělali.

Literatura

[1] JIROTKOVÁ, D. (2001). *Zkoumání geometrických představ.* [Disertační práce]. Praha: UK PedF.

[2] JIROTKOVÁ, D. (2006). Pojmotvorný proces v prostorové geometrii. In Pokorná, V. (Ed.). *Inkluzívní a kognitivní edukace* (s. 258–272). Praha: UK PedF.

[3] LITTLER, G. & JIROTKOVÁ, D. (2004). Learning about solids. In Clarke, B., et al. *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 51–66). Goteborg: Goteborg University, NCM, Sweden.

Modifikace slovní úlohy

Michaela Králová[1]

Příspěvek se zabývá možnostmi modifikovat slovní úlohy a jejich tvůrčím využitím ve výuce. Na jedné konkrétní slovní úloze jsou prezentovány způsoby modifikací a následné vytváření úloh pro aktuální individuální potřeby žáků.

Slovní úloha patří mezi základní stavební prvky výuky matematiky. Učiteli poskytuje široké možnosti k výkladu, procvičování i testování, proto by se měl zamýšlet nad jejím edukačním a diagnostickým potenciálem a zejména nad způsobem, jak slovní úlohy upravit „na míru“ pro konkrétní potřeby žáků. Článek prezentuje část výzkumu zaměřeného na rozpracování edukační metody VOBS (Vyučování orientované na budování schémat) realizovaného pod vedením M. Hejného.

Uvedenou úlohu jsme předložili v roce 2014 padesáti sedmi žákům 4. ročníku běžné ZŠ.

[1]PedF UK v Praze; ZŠ a MŠ Praha Vinoř, michala.kralova@post.cz

Úloha 1

(převzata z učebnice Matematika pro 4. ročník, Fraus, str. 24)

Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik Kč stál velký míč?

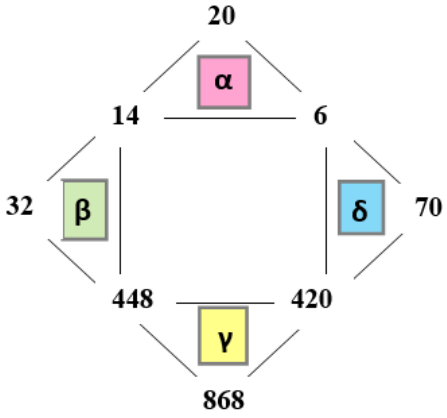
Řešení: Velkých míčů bylo $20 - 14 = 6$. Za malé míče Honza zaplatil $14 \cdot 32 = 448$ korun. Tedy za velké míče zaplatil $868 - 448 = 420$ korun. Cena velkého míče je $420 : 6 = 70$ korun.

Z vyřešené úlohy vytvoříme nyní **úlohovou situaci** – evidujeme všechny stavy a vazby, které se v dané úloze vyskytují.

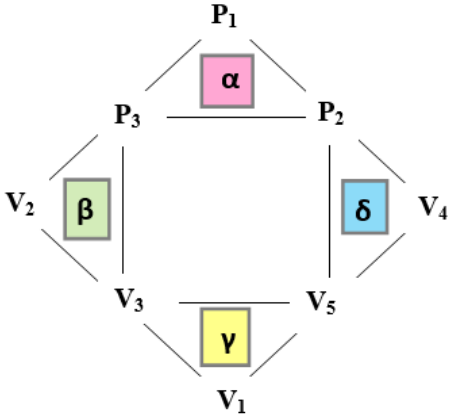
stavy	tři stavy vyjádřené **počtem**: P_1 = počet všech míčů (20) P_2 = počet malých míčů (14) P_3 = počet velkých míčů (6)	pět stavů vyjádřených **veličinou**: V_1 = cena všech míčů (868 Kč) V_2 = cena jednoho malého míče (32 Kč) V_3 = cena všech malých míčů (448 Kč) V_4 = cena jednoho velkého míče (70 Kč) V_5 = cena všech velkých míčů (420 Kč)	
vazby	$P_1 = P_2 + P_3$	(resp. $P_2 = P_1 - P_3$, resp. $P_3 = P_1 - P_2$)	$\boldsymbol{\alpha}$
	$V_3 = V_2 \cdot P_2$	(resp. $V_2 = V_3 : P_2$, resp. $P_2 = V_3 : V_2$)	$\boldsymbol{\beta}$
	$V_1 = V_3 + V_5$	(resp. $V_3 = V_1 - V_5$, resp. $V_5 = V_1 - V_3$)	$\boldsymbol{\gamma}$
	$V_5 = V_4 \cdot P_3$	(resp. $V_4 = V_5 : P_3$, resp. $P_3 = V_5 : V_4$)	$\boldsymbol{\delta}$

Tab. 1: Úlohová situace

Nyní úlohovou situaci vizualizujeme pomocí **grafu úlohové situace**.



Obr. 1: Graf úlohové situace číselně



Obr. 2: Graf úlohové situace algebraicky

V úlohové situaci jsou všechny objekty i vazby známy. Tím, že některé objekty z uvedených osmi údajů utajíme, dostáváme úlohu. V úloze 1 byla utajena čtyři čísla: 6, 448, 70 a 420. Známá byla čtyři čísla: 20, 14, 868 a 32. Tedy čtyři čísla byla dána, čtyři utajena. Ptáme se, zda toto musí platit vždy, nebo zda se počet utajených/známých čísel může měnit. Jelikož v úlohové situaci existují čtyři vazby a každá z nich může najít pouze jedno utajené číslo, je jasné, že utajených čísel nesmí být více než čtyři, aby úloha měla jednoznačné řešení. Na druhé straně, pokud bude utajených čísel méně, je zřejmé, že některá vazba nebude potřebná. I tyto úlohy jsou didakticky zajímavé, protože právě ony jsou vhodné pro slabší žáky. Nyní se zaměříme na ty modifikované úlohy, ve kterých jsou právě čtyři čísla utajena. Vzniká otázka, zda lze utajit libovolnou čtveřici čísel. Pokud by tomu tak bylo, nabízela by tato úlohová situace celkem $\binom{8}{4} = 70$ modifikovaných úloh. To ale neplatí, protože pokud by například byla utajena čísla V_1, V_2, V_3 a V_4, pak by čísla P_1, P_2, P_3 a V_1, V_2, V_3 a V_4, byla dána. Avšak čísla P_1, P_2, P_3 jsou na sobě závislá, jedno můžeme z druhých dvou vypočítat, tedy kdybychom je zadali například takto: $P_1 = P_2 = P_3 = 5$, pak by úloha neměla žádné řešení. Z uvedeného tedy plyne, že ne každá čtveřice objektů může být utajena. Čtveřice daných objektů musí být **nezávislá**, tj. z žádné trojice těchto objektů není možné vypočítat čtvrtý objekt pomocí uvedených čtyř vazeb úlohové situace.

Ilustrace modifikované úlohy

V úloze 1 je dáno $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, hledáme $\mathbf{V_4}$. V úloze 1a je dáno $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_5}$, hledáme $\mathbf{V_3}$.

Koupili jsme 20 míčů, z toho 6 bylo velkých. Za tyto velké míče jsme zaplatili 420 Kč. Kolik jsme zaplatili za malé míče, když jeden stál 32 Kč?

Nyní se podíváme na další možnosti, kterými lze původní znění úlohy 1 obměnit a tím měnit její obtížnost:

- ▷ **způsob zadání veličin, stavů a vztahů**
  Veličiny, stavy a vztahy lze zadat pomocí číslic nebo slov. Pokud je zapíšeme slovně, úloha bude komplikovanější pro ty žáky, kteří mají potíže se čtením s porozuměním. Stává se, že někteří žáci vezmou čísla ze zadání a začnou s nimi provádět nahodile početní operace ve snaze alespoň něco vypočítat. V tomto případě pro ně bude toto zadání výrazně obtížnější, jelikož čísla na první pohled nejsou vidět. Úloha by vypadala následujícím způsobem:

  Úloha 1/I: *Honza koupil celkem dvacet míčů a zaplatil za ně osm set šedesát osm korun. Z toho bylo čtrnáct malých míčů po třiceti dvou korunách a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?*

▷ **velikost zadaných hodnot**
Další jev, který ovlivňuje obtížnost úlohy, je velikost zadaných hodnot. S rostoucími čísly poroste i náročnost kladená na výpočty. Zadání je následující:

Úloha 1/II: *Honza koupil celkem 240 míčů a zaplatil za ně 22 416 Kč. Z toho bylo 156 malých míčů po 85 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?*

▷ **matematické vyjádření zadaných hodnot**
Hodnoty v úloze můžeme zadat různým matematickým vyjádřením. Pokud např. použijeme zlomky nebo desetinná čísla, řešení úlohy je opět náročnější zejména s ohledem na výpočty.

Úloha 1/III: *Honza koupil takový počet míčů, který je roven $\frac{1}{5}$ ze 100 a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo tolik malých míčů, kolik je dvojnásobek 7, a zbytek byly velké míče. Malé míče byly po 32 Kč. Kolik stál velký míč?*

▷ **nadbytečné informace**
Do úlohy můžeme rovněž žákům zadat informace nadbytečné, což bude rozvíjet jejich čtení s porozuměním a práci s informacemi. Je velmi prospěšné takovéto úlohy žákům zadávat a diskutovat s nimi o zadání úlohy. Ukázka takové úlohy:

Úloha 1/IV: *Honza koupil 5 švihadel po 43 Kč a k tomu 20 míčů, za které zaplatil 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?*

▷ **změna strukturace textu**
V první variantě oddělíme celkový počet koupených míčů od celkové částky:

Úloha 1/A: *Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?*

V následující variantě 1/B odstraníme spojení „14 malých míčů po 32 Kč“, které žáci dobře znají z učebnic (úlohy jsou velmi často tímto způsobem zadávány).

Úloha 1/B: *Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč?*

Varianta 1/C obsahuje kombinaci výše uvedeného. Roztrhli jsme vazbu 20 míčů za 868 Kč a 14 malých míčů po 32 Kč. Zadání vypadá následovně:

Úloha 1/C: *Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč a za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?*

Další modifikace úlohy lze vytvořit různým kombinováním předchozích variant, např. kombinací úlohy 1/I a 1/C získáme takovéto zadání:

Úloha 1/IC: *Honza koupil celkem dvacet míčů. Z toho bylo čtrnáct malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po třiceti dvou korunách a za všechny zakoupené míče zaplatil Honza osm set šedesát osm korun?*

Ukázali jsme, jak široké možnosti nabízí jedna slovní úloha. Učitel může pomocí těchto modifikací diferencovat výuku ve třídě a zadávat žákům různě obtížné úlohy. Navíc je zde prostor k vzájemné diskusi, jelikož úlohy pracují se stejným kontextem a pouze odlišným vyjádřením. Žáci mohou poukazovat na odlišné způsoby vyjádření zadaných hodnot a zároveň srovnávat řešitelské strategie.

Literatura

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. & BOMEROVÁ, E. (2010). *Matematika: pro 4. ročník základní školy.* Vyd. 1. Plzeň: Fraus. 255 s.

Jak využít úloh s volnými parametry

Hana Lišková[1]

Ukázka několika úloh s volnými parametry, které vytvářejí příležitosti a možnosti ke skupinové práci v hodinách matematiky na druhém stupni základní školy, popř. mohou být inspirací pro jiný stupeň nebo typ škol. Úlohy efektivně podporují společný rozvoj matematické a čtenářské gramotnosti. Ukázky úloh jsou opatřeny metodickými poznámkami a komentáři, vyplývajícími z konkrétních zkušeností získaných při práci s úlohami s volnými parametry.

Úlohy s volnými parametry jsou takové úlohy, které svým zadáním umožňují aktivní vstup žáků do procesu řešení tím, že musí nejprve zadání úlohy doplnit. Úloha, která je žákům předkládána, má několik neúplných, popř. nepřesných informací. Žáci tak doplňují a samostatně volí např. číselné hodnoty, tvar objektu, hledají různé varianty zadání, upřesňují zadání, přičemž ovlivňují (vědomě či nevědomě) náročnost úlohy, popř. úpravou zadání ovlivňují počet řešení úlohy.

[1]VOŠP a SPgŠ v Litomyšli, liskova@lit.cz

Charakteristika úloh

Inspirací pro zadávání úloh s volnými parametry mohou být běžné reklamní letáky, ve kterých reálně některé informace chybí. Při práci s těmito úlohami vzniká prostředí příznivé pro komunikaci a diskusi mezi žáky, kdy se musí společně zamyslet nad tím, které informace jim text úlohy neposkytuje. Úlohy tohoto typu vytvářejí prostor pro porozumění textu, matematickým pojmům a operacím. Úlohy nejsou tematicky omezené, najdeme vhodné příklady pro zadání s geometrickou, aritmetickou i algebraickou tematikou. Výběr úloh musí odpovídat zkušenostem žáků z reálného života. Pak jsou žáci schopni doplnit zadání úlohy tak, aby měla reálné řešení.

Skupinová práce

Na doplnění textu úlohy se musí skupina žáků domluvit. Vzniká tak výhodná situace pro učitele, který má prostor a čas vyhodnotit jednotlivé návrhy na doplnění textu. Stává se pozorovatelem dění, sleduje vědomostní, dovednostní a strategickou úroveň jednotlivých skupin. Může do procesu vstoupit, pokud chce vyprovokovat skupinu k vysvětlení, argumentaci nebo chce zjistit, zda daný návrh je nahodilý nebo promyšlený (například z důvodu zjednodušení celé úlohy). Samozřejmě se zde objeví další výhody práce žáků ve skupinách, např. sdílení společné zodpovědnosti za výsledek, rozdělení rolí, vzájemné učení a kontrola. Pozitivně se projevuje i využívání odhadu a jeho korigování.

Úloha 1 – Solární panel

Honza zkoumá reklamní leták a má dojem, že neví vše důležité. Přemýšlí, jak velkou plochu může mít zahradní solární panel, který mají Horáčkovi u bazénu.

1. Jaké rozměry může mít solární panel, který má plochu metrů čtverečných?

2. Jaké rozměry má panel, je-li to čtverec?

3. Jaké rozměry může mít panel, je-li obdélníkového tvaru a jeho délka je maximálně dvojnásobkem šířky.

4. Jaké rozměry může mít panel, jsou-li délky jeho stran celočíselné údaje v centimetrech?

Metodické poznámky

Úloha není obtížná, její řešení je nenáročné na výpočty, proto navozuje příležitosti k mnoha návrhům pro rozměry panelu. Sledujeme, zda žáci plochu volí „šikovně“ tak, aby byl následný výpočet snadný, nebo zda volí plochu panelu nahodile. Sledujeme úroveň strategie, početní dovednosti, úroveň diskuse. Nezanedbatelný je také reálný odhad žáků. Při diskusích se objevuje potřeba žáků pracovat s pojmem poměr, dělitel, mocnina a odmocnina.

Úloha 2 – Domek

Děda Tonda nad reklamním letákem dumá a má dojem, že neví vše potřebné.

Firma „Hoblík“ nabízí zahradní domeček pro děti.
Jednoduchý domeček pro děti na zahradu se skluzavkou.
Rychlá montáž, vyrobeno v ČR.
Rozměry (bez schodů a skluzavky):
šířka 140 x délka 200 x výška 205 cm
výška podlahy 65 cm
naše cena 11 990 Kč (444 EUR)

zdroj: Mountfield

1. Jaká informace mu chybí nebo je diskutabilní?
2. Doplňte potřebné údaje odhadem a počítejte s údaji, na kterých se shodnete.
3. Jaká je délka modrých trámků?
4. Jaká je plocha střechy?
5. Jaký je objem vzduchu uvnitř domečku?
6. Jaký je podle uvedené ceny kurz české měny k evropské?
7. Pokuste se obdobný domeček načrtnout a narýsovat.

Metodické poznámky

První informace, která žákům chyběla z důvodu černobílé kopie zadání, byla zpřesňující informace, který trámek je modrý. Byla to náhodná, ale užitečná zpětná

vazba pro učitele. Ten tak mohl zaznamenat, jak rychle a pozorně skupina analyzuje text. Probíhaly velmi živé a věcné diskuse ve skupinách žáků. Postupně si žáci uvědomovali vztahy mezi jednotlivými částmi domečku. Uveďme některé výroky žáků.

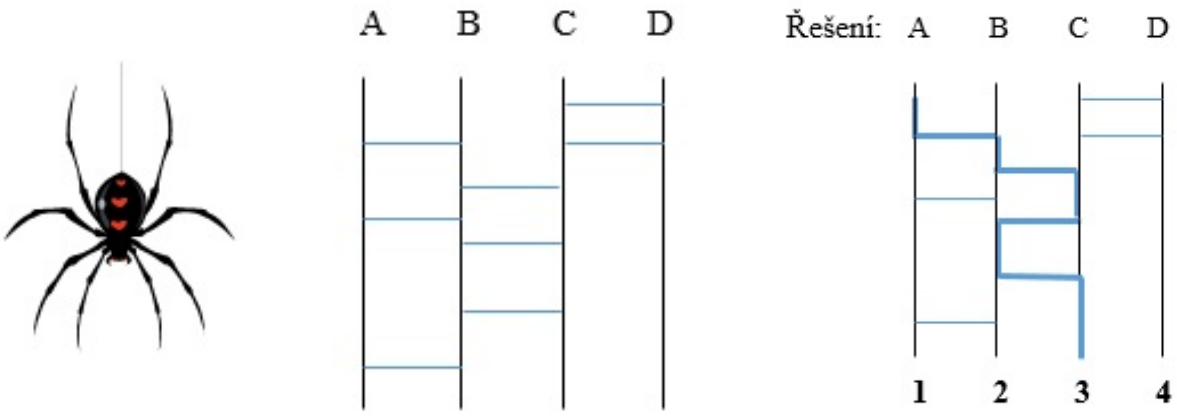
„Schody nejsou ani do poloviny domku.“ „Co je ta výška podlahy? Aha, asi to jsou ty nožky.“ „Místnost v domku může být čtvercová.“ „Je ta výška až na vrcholek střechy?“ „Odměř to.“ „Může mít domek uvnitř strop? To by bylo dobrý.“

V diskusích se u některých skupin projevily strategické postupy, kdy si uvnitř domku doplnily strop a tím se výpočet podstatně zjednodušil. Některé skupiny tento „trik“ postřehly až při prezentaci výsledků jednotlivých skupin. Žádná ze skupin neprotestovala, přijaly naopak tento způsob jako velmi chytrý. Někteří žáci měli tendenci poměřovat jednotlivé části domku (bez měřítka pouze prsty) a sledovat vzájemné poměry tak, aby to „sedělo“. Tento jev je chvályhodný a do reálného života jistě potřebný. Vzhledem k tomu, že obrázek nabízí mnoho různých souvislostí, byla diskuse bohatá. Postupně se objevovaly a diskutovaly jednotlivé dílčí otázky. Úloha dávala dostatek prostoru všem žákům, časové rozvrstvení umožnilo i pomalým žákům dobře reagovat a ocenili, že měli čas a prostor úlohu dobře pochopit. Ve výjimečných případech svěřila skupina výpočty jedné osobě, většinou však provádělo výpočty více žáků.

Úloha 3 – Pavučina

Sleduj následující „pavučinu“. Kam se dostane pavouček z „domečku A“, pokud jeho pohyb směřuje vždy dolu a jakmile narazí na příčnou vodorovnou spojnici, přeleze na její druhou stranu.

Například:



Vidíme, že se pavouček dostal do čísla 3.

Je to ale velký lenoch. Proto si hledá „domeček“ tak, aby jeho cesta dolů na zem byla co nejkratší.

1. Hledej optimální místo (z nabídky A, B, C, D) pro jeho „domeček“.

2. Zjisti, ze kterého „domečku“ je cesta k zemi nejdelší.

3. Jakou dráhu pavouček vykonal?

Metodické poznámky

Úloha dává možnosti volby různých tvarů „pavučin“, které si žáci vytvářejí. Třetí otázka vede k upřesnění zadání ve smyslu konkretizace rozměrů (velikost svislice a vzdálenost dvou sousedních svislic). Žáky vedeme k doplnění číselných údajů podle jejich matematických dovedností (celá čísla, desetinná čísla), později k využití proměnných (např. svislice – s, vzdálenost svislic – v). Úloha nabízí výbornou možnost gradování obtížnosti.

Poznámka: Úloha byla inspirována digitální hrou, její úpravu a další náměty úloh můžete najít na www.suma.jcmf.cz – Matematika pro všechny, 2. stupeň ZŠ (Pavučina, Pavučina2, Líný pavouk).

Literatura

[1] ALFÖLDYOVÁ, I. & ČERNEK, P. (2013). *Zbierka úloh pre vzdělávací stupeň ISCED 1.* Bratislava: NÚCEM.

[2] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., et al. (2010). *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

[3] FRÝZKOVÁ, M., POTUŽNÍKOVÁ, E. & TOMÁŠEK, V. (2006). *Netradiční úlohy: Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA.* Praha: ÚIV – TAURIS.

[4] KUBÁČEK, Z., ČERNEK, P., ŽABKA, J., et al. (2008). *Matematika a svet okolo nás.* Bratislava: Mgr. Pavol Cibulka.

[5] LIŠKOVÁ, H. (2014). Geometrie a aritmetika v jednom. In Fuchs, E. (Ed.). *Sborník konference Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let, Litomyšl 2013* (s. 167–172). Praha: JČMF.

Jedna úloha pětkrát jinak – Jak a kdy jsou žáci schopni si uvědomit shodnost postupů u úloh z jiných prostředí

Tomáš Novotný[1]

Článek je popisem pilotního výzkumu, který byl realizován v rámci mého doktorského studia v předmětu Didaktika matematiky II. Je zaměřen na dovednost žáků rozpoznat při řešení slovních úloh z různých prostředí, že vedou ke stejnému matematickému modelu. Analogie jsou ve výukovém procesu pro žáka stěžejní pro rozšiřování již nabytých znalostí do dalších oblastí. Navíc pokud žák není schopen si uvědomit analogii mezi tématy či postupy, dochází u něj k duplicitě informací, neboť si dané postupy či informace nepropojí a učí se každou odděleně znovu.

Rozpoznávání analogií obecně se věnovaly například Gick a Holyoak (1983), které zjišťovaly, jak jsou žáci schopni využít analogickou situaci, pro kterou znají řešení, k řešení situace původní. Rozlišují dvě dovednosti související s tématem analogií, a to rozpoznání analogického postupu a hledání společného schématu. Holyoak a Bassok (1989) se věnovaly přímo analogiím mezi matematikou a fyzikou. V článku se zabývají tím, zda a jak si žáci uvědomují souvislost mezi aritmetickou posloupností a rovnoměrně zrychleným pohybem. V didaktice matematiky se setkáváme s termínem matematický model, který se v české literatuře shoduje s termínem schématu, jak ho popisuje Gick a Holyoak (1983). Novotná, Brousseau, Bureš, Nováková (2012) například zkoumali, jak jsou žáci schopni ze zadání úloh matematický model identifikovat.

Výzkum

Cílem výzkumu bylo zjistit, v jaké fázi řešení úlohy si žáci uvědomí, že je úloha založena na stejném matematickém modelu – neboť všechny úlohy v testu, který je uveden v dalším textu, se dají řešit pomocí jedné soustavy rovnic.

Výzkumnou otázkou bylo, zda při řešení více úloh se stejným matematickým modelem těsně za sebou jsou žáci schopni analogii odhalit v dřívější fázi než při řešení úloh postupně.

Testování proběhlo formou testu obsahujícího pět úloh, na jejichž řešení měli žáci padesát minut. Úlohy mohli žáci řešit v libovolném pořadí. Při řešení úloh měli možnost požádat zadávajícího o vysvětlení zadání, pokud jim nebylo zcela jasné. V případě potřeby jim byla poskytnuta nápověda k dalšímu postupu, neboť

[1]Základní škola U Roháčových kasáren; KMDM, PedF UK v Praze, zdurbanane@email.cz

vyřešení úloh nebylo předmětem zkoumání a žádoucí bylo, aby žáci vyřešili všechny úlohy (pomoc byla potřebná převážně u úlohy číslo 3 a 4, kde je převedení zadání do matematického modelu poměrně náročné). Po skončení řešení testu proběhl s každým žákem krátký rozhovor, ve kterém byli žáci dotázáni, kdy si analogie mezi úlohami všimli. Pokud prohlásili během řešení, že je úloha „stejná“ jako předchozí, následovalo bez potvrzení jejich hypotézy dotázání, zda tím pádem bude mít úloha i stejný výsledek.

Pro odpověď na otázku, kdy si žáci analogii uvědomí, byly použity fáze řešení úlohy vycházející z Kintsche (1986), který stanovil tyto čtyři fáze řešení úlohy:

1) První čtení zadání;

2) Přemýšlení nad textem;

3) Sestavení matematického aparátu;

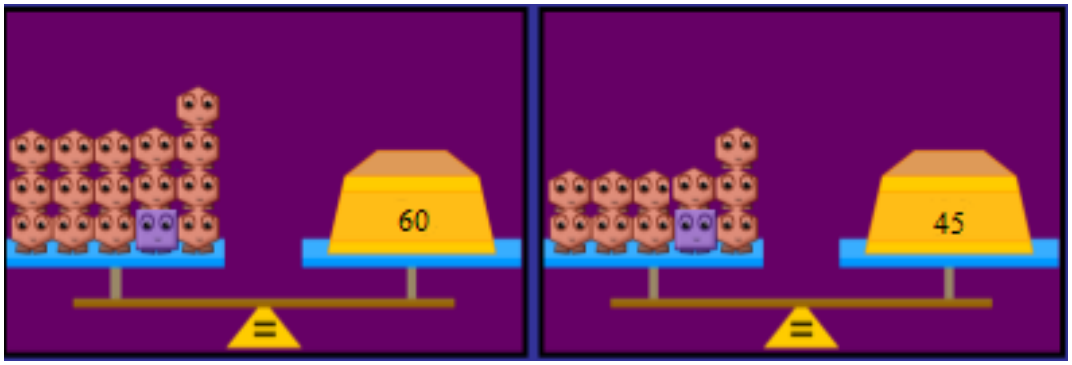
4) Řešení.

V tomto výzkumu byla přidána ještě fáze 5. Reflexe výsledků, neboť Kintsch pracoval pouze s jednou úlohou. Zde je úloh více a při kontrole výsledků nastává přidaná fáze, kdy srovnáním s výsledky již vyřešených úloh si žák uvědomí, že se dobral stejným postupem ke stejnému výsledku.

Výzkumu se zúčastnilo deset žáků – osm z devátého ročníku základní školy a dva z prvního ročníku střední školy – z toho sedm chlapců a tři dívky.

Zadání

1) Zjistěte podle obrázku, kolik váží jednotlivá tělesa.



2) V obchodě vedle sebe stojí dva sloupce stejných květináčů. Výška sloupce tvořeného 10 květináči je 45 cm. Výška sloupce tvořeného 15 květináči je 60 cm. Jak vysoký je jeden květináč?

3) Jaké jsou strany obdélníku, když víme:

   - Pokud první stranu zvětšíme o 10 cm a druhou o 1 cm, obsah obdélníku se zvětší o 55 cm^2.
   - Pokud první stranu zvětšíme o 15 cm a druhou o 1 cm, obsah obdélníku se zvětší o 75 cm^2.

4) Karel má babičku, která bydlí nedaleko od něj a jezdí jí navštěvovat. Jednou k ní jel na návštěvu na kole a zpátky šel pěšky a cesta mu trvala 60 minut. Když pak za ní byl druhý den, cestou k ní se proběhl a zpátky jel na kole, trvala mu cesta 45 minut. Karel ví, že když jde, tak za jednu minutu urazí průměrně $\frac{1}{15}$ km, a když běží, tak za jednu minutu urazí $\frac{1}{10}$ km. Jak daleko od babičky Karel bydlí?

5) Jonáš a Marcel si v obchodě koupili lízátko a bonbony. Jonáš si koupil jedno lízátko a 10 bonbonů a zaplatil 45 Kč. Marcel si koupil jedno lízátko a 15 bonbonů a zaplatil 60 Kč. Jaká je cena jednoho lízátka? A kolik stojí jeden bonbon?

Výsledky

V následující tabulce jsou zaznamenány výsledky testování. V prvním sloupci je uvedeno pořadí úlohy podle toho, jak je daný žák řešil. V prvním řádku jsou pak rozděleny jednotlivé fáze přemýšlení nad úlohou (viz výše). V jednotlivých buňkách jsou počty žáků, kteří v dané fázi analogii odhalili. První úloha ve sloupci samozřejmě uvedena není, protože u ní není možné, aby si žáci uvědomili analogii, neboť není, s čím by si ji mohli spojit.

	1. fáze	2. fáze	3. fáze	4. fáze	5. fáze
2. úloha	0	1	0	0	6
3. úloha	1	2	0	2	4
4. úloha	1	0	2	4	2
5. úloha	5	0	2	2	1

Při řešení úloh se u všech žáků kromě jednoho objevil zajímavý fakt, že i po odhalení analogie měli žáci potřebu úlohu dopočítat do konce, a to i přesto, že na otázku, zda bude výsledek stejný, odpověděli ano. To může být způsobeno buď zvyklostmi ze školního prostředí, kde je po žácích dopočítání požadováno, nebo tím, že žáci věří více matematickému aparátu než vlastnímu úsudku.

V jednom případě žák správně predikoval výsledek, avšak jelikož si neznámou zvolil nestandardně, vyšel mu jiný výsledek (přesto však správný). Tato skutečnost ho vedla k tomu, že se sám snažil přijít na to, proč výsledek neodpovídá jeho předpokladům. Nakonec se dobral k závěru, že jeho předpokládaný výsledek je sice správný, ale pro jinak sestavenou rovnici, respektive jinak zvolenou neznámou. V tomto jediném případě se projevil žákovský úsudek silnější než algebraický postup.

Jako další zajímavý příklad lze uvést jednoho žáka, který poměrně bez problému řešil všech pět úloh, ale analogii úloh odhalil až při reflexi výsledku poslední úlohy. To může být opět způsobeno ve své podstatě důvěrou v postupy, neboť pak již žáci často nepřemýšlí nad tím, co dělají či počítají. Pokud žáci, kteří takto úlohy řeší, při výpočtu pak udělají nějakou numerickou chybu, či chybu v postupu, která je vede k výsledku častokrát v kontextu úlohy nesmyslnému, nejsou schopni sami si chybu uvědomit.

Závěry

Představené výsledky ukazují, že ve skupině žáků, kteří úlohu řešili, se prokázalo, že při řešení více úloh se stejným matematickým modelem těsně za sebou jsou žáci schopni analogii odhalit v dřívější fázi než při řešení úloh postupně.

Vyvstávají však další otázky, které mohou být předmětem dalšího zkoumání. Jelikož se jednalo nejen o jeden matematický model, ale navíc i o totožné hodnoty, značná část žáků předpokládala pouze na základě stejných předchozích výsledků, že i další úloha bude mít stejný výsledek, a více se snažila analogie použít. Do výsledků sice nejsou zahrnuty případy, když žák řekl, že výsledek bude stejný, protože například u předchozích dvou úloh tomu tak bylo, přesto však tato skutečnost mohla z výše uvedeného důvodu ovlivnit směřování žáků.

Jedna z možných navazujících otázek by mohla proto být, jak by se změnily výsledky testu, pokud by se změnily i hodnoty, nebo při použití více matematických modelů.

Literatura

[1] BASSOK, M. & HOLYOAK, K. (1989). Interdomain Transfer Between Izomorphic Topic in Algebra and Physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, Vol. 15, 153–166.

[2] BUREŠ, J. & HRABÁKOVÁ, H. (2008). Žákovská tvorba slovních úloh. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2008* (s. 87–92). Praha: PedF UK v Praze.

[3] GICK, M. & HOLYOAK, K. (1983). Schema Induction and Analogical Transfer. *Cognitive Psychology, 15*, 1–38.

[4] KINTSCH, W. (1986). Learning From Text. *Cognition and Instruction*, 87–108.

[5] NOVOTNÁ, J., BROUSSEAU, G., BUREŠ, J. & NOVÁKOVÁ, H. (2012). From Changing Students' "Culture of Problems" Towards Teacher Change. *Journal of Applied Mathematics, Volume 5*, 325–336.

Evropský projekt Scientix – přínosy pro učitele i národní projekty (matematika, přírodní vědy, ICT)

Vladimíra Pavlicová[1]

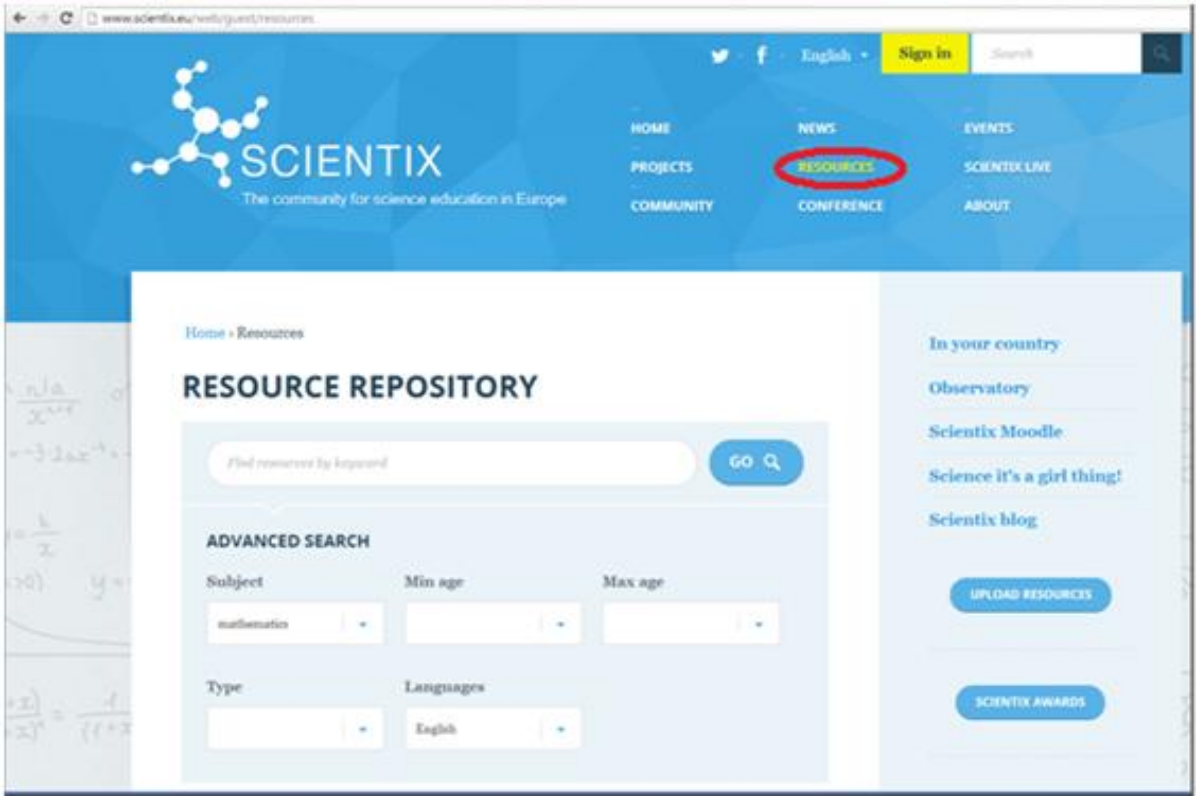
Evropský projekt Scientix (www.scientix.eu) shromažďuje informace o zajímavých projektech z oblasti matematiky, přírodních a technických věd, z nichž mnohé zahrnují výukové materiály, jež jsou volně k dispozici pro potřeby učitelů základních či středních škol. Cílem je vytvořit komunitu pro přírodovědné vzdělávání v Evropě, která bude sdílet své nápady a vytvořené výukové materiály, diskutovat o aktuálních otázkách vzdělávání prostřednictvím on-line nástrojů či osobních setkání (konference, workshopy) a vzájemně se inspirovat.

Projekt Scientix je iniciován Evropskou komisí s cílem podpořit inovativní výukové metody, smysluplné využití informačních a komunikačních technologií (ICT) ve vzdělávání a badatelsky orientovanou výuku matematiky a přírodních věd. Administruje jej sdružení European Schoolnet (www.eun.org), síť zahrnující národní agentury či přímo ministerstva školství. V České republice je národním koordinátorem Dům zahraniční spolupráce, na jehož webových stránkách se lze dočíst více informací o samotném projektu Scientix i dalších aktivitách v rámci sdružení European Schoolnet (www.dzs.cz/eun).

Na portálu projektu Scientix (www.scientix.eu) mohou učitelé volně vyhledávat a stahovat výukové materiály, užitečným nástrojem je filtr v záložce *Resources*

[1]Dům zahraniční spolupráce, euncr@dzs.cz

umožňující třídit materiály podle předmětu, věku žáků či jazyka. Registrovaní uživatelé mohou navíc požádat o překlad libovolného materiálů např. do českého jazyka (registrace je zdarma) pomocí možnosti *Request translation* a výběru příslušné jazykové verze. V případě, že bude mít o tuto službu zájem více učitelů, Scientix překlad na vlastní náklady zajistí.



Obr. 1: Vyhledávání výukových materiálů na portálu Scientix

Například jeden z výukových materiálů s názvem *Dangerous Cold* nabízí kromě podrobné metodiky pro učitele a pracovního listu pro žáky také dva aplety. V nich žáci prozkoumají, jak se mění teplota uvnitř domu v závislosti na vnější teplotě, počtu topných těles a dalších podmínkách. Vše se rovnou znázorňuje do grafu. Tento materiál vznikl v rámci projektu *Compass*, který se snaží propojit učivo matematiky a přírodních věd se situacemi z běžného života.

Další možností je vyhledávat přímo jednotlivé projekty v záložce *Projects* a zobrazit si například projekty s českou účastí. U každého projektu je uveden jeho stručný popis včetně odkazu na domovské webové stránky, některé projekty jsou doplněny informacemi pro vědecké pracovníky (např. výzkumné zprávy) nebo obsahují ukázky výukových materiálů, které byly v rámci projektu vytvořeny.

Projekt Le-Math, který je na portálu Scientix zveřejněný, například propojuje matematiku s dramatickou výchovou a dalšími komunikačními prostředky. Snaží se tím matematiku zatraktivnit, ale také vést žáky k hlubšímu porozumění matematických konceptů prostřednictvím hraní rolí či psaní vlastních scénářů s matematickým

Obr. 2: Ukázka výukového materiálu, který je k dispozici na portálu Scientix

obsahem. Jelikož se do projektu zapojil také český partner, je většina materiálů již přeložených a tedy snadno dostupných pro české učitele.

Na portálu Scientix je k dispozici také široká nabídka Moodle kurzů (*Scientix Moodle*), které se týkají využití informačních technologií ve výuce nebo přímo matematiky a přírodních věd. První jmenovaná skupina uživatele seznámí s tvorbou jednoduchých webových stránek, aplikací pro vytváření křížovek či prezentací nebo s tím, jak využít twitter či blog ve výuce. Druhá skupina zahrnuje např. kurzy věnující se Geogebře nebo flash animacím v matematice a fyzice.

Zaregistrovaní uživatelé se také mohou zapojit do diskusních fór a sdílet své zkušenosti s kolegy napříč Evropou (*Community of Practice*, viz záložka *Community*). Diskusní fóra probíhají několikrát do roka a věnují se aktuálním tématům (např. jak zvýšit motivaci dívek ke studiu matematiky a přírodních věd, věda a občanská společnost).

Scientix je otevřen nejen učitelům, ale také vědeckým pracovníkům, rodičům, pracovníkům státní správy v oblasti školství či dalším zájemcům. Národním projektům, které jsou financované z veřejných zdrojů, umožňuje začlenit projekt na portál a tím zvýšit propagaci projektu i okruh možných uživatelů. Pro více informací se lze obrátit na Dům zahraniční spolupráce (euncr@dzs.cz), národního koordinátora projektu Scientix.

Po cestách mezi relacemi a posloupnostmi

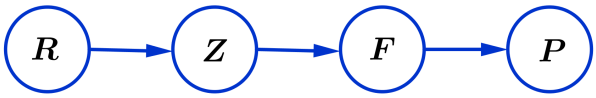
Jarmila Robová, Oldřich Odvárko[1]

V rámci nové magisterské akreditace oboru *Učitelství matematiky* na MFF UK, podle které budou učitelé připravováni od akademického roku 2015/2016, probíhají změny, které se týkají také předmětu *Didaktika matematiky* a bezprostředně na něj navazujících *Pedagogických praxí z matematiky II, III*. V předmětu *Didaktika matematiky* se kromě jiného zaměřujeme na různé okruhy školské matematiky, ve kterých se s budoucími učiteli věnujeme cílům vyučování, vhodným metodám i formám vyučování. Důležitou součástí předmětu *Didaktika matematiky* je seznámení budoucích učitelů s možnostmi vytváření a rozvíjení pojmů ve vybraných tématech školské matematiky.

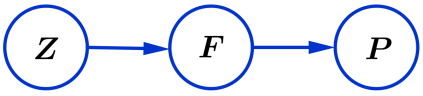
V tomto článku se budeme věnovat příkladům systematizace a klasifikace pojmů z oblasti zobrazení, funkcí a posloupností tak, jak je připravujeme pro výuku *Didaktiky matematiky*.

Systematizace pojmů relace, zobrazení, funkce a posloupnost

Při zavedení pojmu *posloupnost* na střední škole využíváme tzv. funkční přístup, kdy na posloupnost nahlížíme jako na speciální případ funkce. Výhoda tohoto přístupu spočívá v tom, že řadu pojmů a vztahů známých z tématu *Funkce* můžeme přenést na posloupnost. Z hlediska pochopení pojmů funkce a posloupnost i jejich vlastností je důležité, aby budoucí učitelé znali vztahy mezi relací ($\boldsymbol{R}$), zobrazením ($\boldsymbol{Z}$), funkcí ($\boldsymbol{F}$) a posloupností ($\boldsymbol{P}$). Jsou zachyceny na obr. 1, kde orientované úsečky znázorňují vazbu od obecného pojmu ke speciálnímu.



Obr. 1

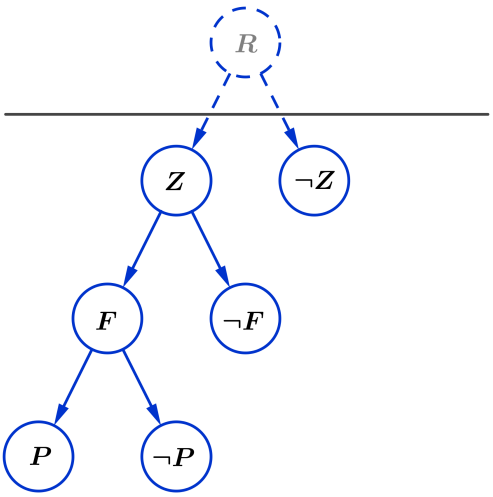


Obr. 2

Uvedené pojmy včetně vztahů mezi nimi byly v sedmdesátých a osmdesátých letech součástí středoškolské matematiky. V současné době se nejčastěji uvádějí souvislosti zachycené na obr. 2, přičemž s pojmem zobrazení se žáci setkají převážně jen u geometrických zobrazení v rovině.

[1]MFF UK v Praze, Jarmila.Robova@mff.cuni.cz, Oldrich.Odvarko@mff.cuni.cz

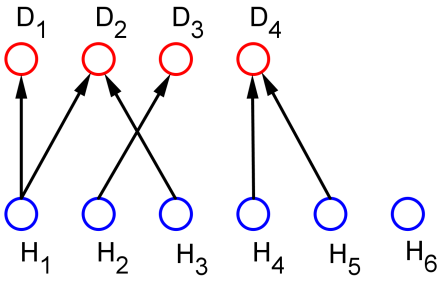
Na základě našich zkušeností považujeme za nezbytné při budování matematického pojmu předkládat žákům i „protipříklady“, tj. uvádět případy objektů, které nesplňují definici daného pojmu. Na obr. 3 je zachyceno schéma cesty postupné specializace od pojmu relace až k pojmu posloupnost. Pojem relace lze charakterizovat jako libovolné přiřazení prvků z množiny A k prvkům z množiny B. Následně můžeme ukázat příklad relace-zobrazení a relace, která není zobrazením.



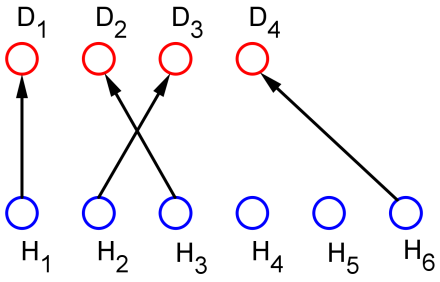
Obr. 3

Uvažujme situaci v tanečních, kdy na parketu stojí proti sobě řada hochů a řada dívek a hoši si vyhlížejí partnerky pro tanec; je znázorněno na obr. 4. Orientované úsečky znázorňují uvažované přiřazení; jde o relaci, která není zobrazením.

Okamžik zahájení tance zachycuje obr. 5, kde již o zobrazení jde (dokonce je to prosté zobrazení).



Obr. 4



Obr. 5

Obdobně lze tvořit příklady na zobrazení, které je či není funkcí, resp. příklady na funkce, které jsou či nejsou posloupnostmi. Po zavedení pojmu posloupnost je vhodné prověřit jeho pochopení žáky pomocí příkladů. Jeden z nich uvádíme.

Příklad 1

Pomocí symbolu f_i zapište následující zobrazení do příslušných polí Vennova diagramu na obr. 6. (Řešení viz obr. 7.)

$f_1 : y = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$;

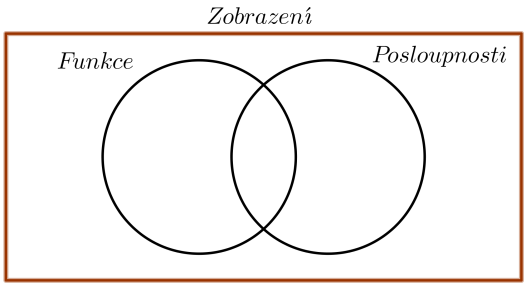
$f_2 : y = -x + \sqrt{3}, x \in \mathbb{N}$;

$f_3 : y = \frac{x^2}{x+3}, x \in \langle 4, 12 \rangle$;

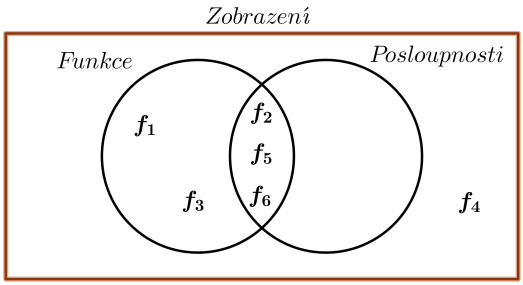
f_4 : identita v rovině;

$f_5 : y = \log(4 + x), x \in \mathbb{Z}^+$;

$f_6 : y = \frac{x+4}{3x}, x \in \mathbb{Z} \cap (0, 16)$.

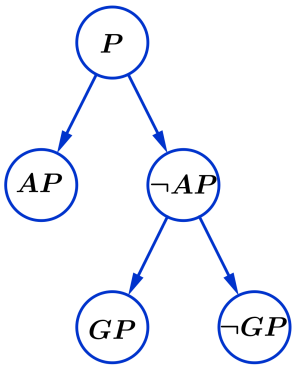


Obr. 6

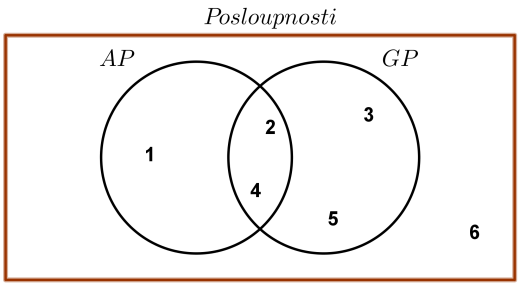


Obr. 7

V tématu o posloupnostech hrají významnou roli aritmetické posloupnosti (***AP***) a geometrické posloupnosti (***GP***). Navážeme-li na schéma na obr. 1, můžeme dále klasifikovat i případy posloupností. Obr. 8 ukazuje zdánlivý rozklad třídy posloupností na podtřídy po dvou disjunktní. Při bližším zkoumání se však ukáže, že o rozklad nejde, jak ukazuje *Příklad 2*.



Obr. 8



Obr. 9

Příklad 2

Každá z následujících nekonečných posloupností **1** až **6** je zadána svým n-tým členem. Zapište číslo posloupnosti do příslušného pole Vennova diagramu, do kterého posloupnost svými vlastnostmi náleží.

1: $a_n = \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$;
2: $b_n = n - n$;
3: $c_n = e^{2-n}$;
4: $d_n = sin\,(\pi n)\,;$
5: $f_n = \frac{1}{10^n}$;
6: $g_n = \frac{1}{n}$.

Řešení je na obr. 9. Konstantní posloupnost je jak aritmetická, tak geometrická.

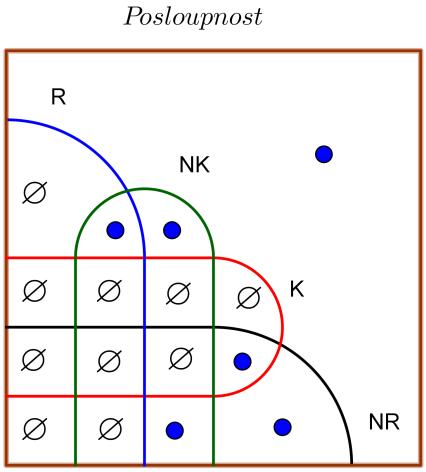
V tématu o posloupnostech se zavádějí pojmy rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající posloupnost. Pro pochopení vazeb mezi uvedenými pojmy je vhodné využít opět Vennovy diagramy, jak ilustruje *Příklad 3*.

Příklad 3

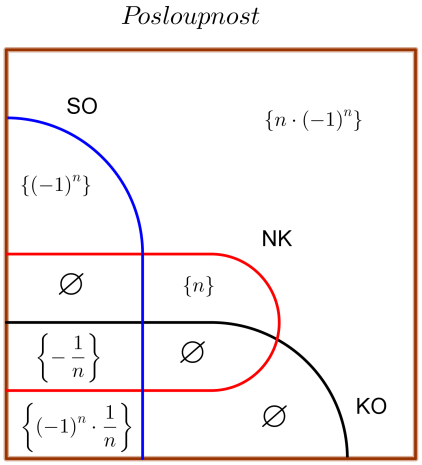
Do každého pole Vennova diagramu pro čtyři množiny vyznačte kolečkem či symbolem pro prázdnou množinu skutečnost, zda existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ příslušných vlastností. K dispozici máte definice jednotlivých vlastností:

- Rostoucí (R): $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- Nerostoucí (NR): $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- Klesající (K): $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
- Neklesající (NK): $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$

Řešení je zachyceno na obr. 10.



Obr. 10



Obr. 11

Příklad 3 je poměrně jednoduchý, neboť se při jeho řešení můžeme opřít o uvedené definice. Obtížnější problém je uveden v *Příkladu 4*.

Příklad 4

Do každého pole Vennova diagramu pro tři množiny zapište příklad posloupnosti, která má příslušné vlastnosti: shora omezená (SO), neklesající (NK), konvergentní (KO).

Řešení příkladu je zachyceno na obr. 11. Žáci při této příležitosti mohou dospět k hypotéze, že každá posloupnost shora omezená a neklesající, je konvergentní. V tomto případě nám klasifikace může pomoci i k „objevení“ nové vlastnosti.

Několik námětů k výuce dělitelnosti

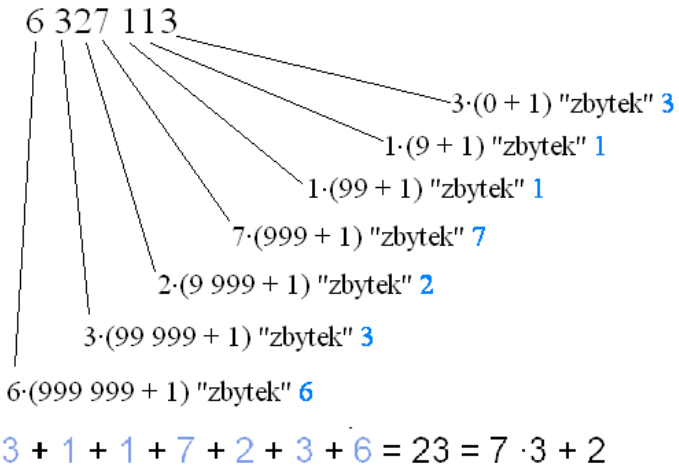
Eva Semerádová (Patáková)[1]

V článku si ukážeme několik zajímavostí, které se vážou k tématu „dělitelnost“ a je možné je využít např. při diferencované výuce za účelem rozvoje nadaných žáků.

Zbytek po dělení třemi

Všichni jistě známe odvození znaku dělitelnosti třemi. Přesto si jej připomeňme:
$1 = 0 + 1$
$10 = 9 + 1$
$100 = 99 + 1$
$1\,000 = 999 + 1$
$10\,000 = 9\,999 + 1$
...

Neboli každou jednotku, desítku, tisícovku, ... můžeme rozdělit na část dělitelnou třemi a „zbytkovou“ jedničku. Znak dělitelnosti třemi říká, že číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Počítáme-li ciferný součet čísla, skládáme vlastně „zbytkové“ jedničky. A je-li možné je seskupit do trojic, pak i původní číslo bylo dělitelné třemi. (Viz obr. 1, kde je ukázáno číslo, které dělitelné třemi není.)



Obr. 1: Fungování znaku dělitelnosti třemi

[1]KMDM, PedF UK v Praze; Mensa gymnázium v Praze, eva.semeradova@email.cz

Z uvedeného odvození však vyplývá jeden mnohdy opomíjený fakt. Tím, že skládáme „zbytkové“ jedničky, nezískáme pouze prostou informaci typu „ano/ne“ o dělitelnosti čísla trojkou. Informace, kolik „zbytkových“ jedniček nesložíme do trojic, nám zároveň sdělí zbytek původního čísla po dělení trojkou.

Uvedenou větu o znaku dělitelnosti třemi proto můžeme zobecnit na: **Číslo dává po dělení třemi právě takový zbytek jako jeho ciferný součet.**

Vše zmíněné samozřejmě funguje i pro dělitelnost devíti.

Odvození znaku dělitelnosti jedenácti

Ač aplikace znaku dělitelnosti jedenácti není součástí povinných výstupů dle platného RVP, mnozí z nás jej při výuce ukazují jako rozšiřující učivo pro žáky nadané na matematiku.

Věta o znaku dělitelnosti jedenácti říká, že číslo je dělitelné jedenácti právě tehdy, když jeho alternovaný ciferný součet (tj. součet čísel na lichých pozicích čísla zmenšený o součet čísel na sudých pozicích) je dělitelný jedenácti. (Např. číslo 2 013 je dělitelné jedenácti, protože $(3+0)-(2+1)=0$, což dělitelné jedenácti je.)

Snažíme-li se s žáky tento vztah odvodit, téměř v každé třídě se objeví nápad, že přidáme-li k číslu 11, zvětšíme tím o 1 součet čísel na lichých pozicích a o 1 součet čísel na sudých pozicích, takže (ne)dělitelnost čísla jedenácti zůstane zachována. Tento vztah funguje ale pouze tehdy, když přidáním jedenáctky nepřecházíme přes desítku. Vezměme např. číslo 1 991, které dělitelné jedenácti je. Přičtením jedenáctky jsme ale získali číslo, $1\,991 + 11 = 2\,002$, kde jsme sice počet jednotek navýšili o 1, ale počet desítek naopak o 9 klesl a ovlivněny byly i pozice stovek a tisíců. Důkaz tímto stylem by sice bylo možné dokončit, byl by však podstatně obtížnější než prosté konstatování, že jsme přidali 1 do součtu čísel na lichých i na sudých pozicích.

Známé odvození využívající sumace je pro použití ve třídách základní školy poněkud nevhodné. Podívejme se nyní tedy na to, jak lze větu odvodit i s nadaným žákem šesté třídy:

Zaměřme se nejprve na liché pozice (počítáno odzadu). To jsou pozice jednotek, stovek, desetitisíců, ...

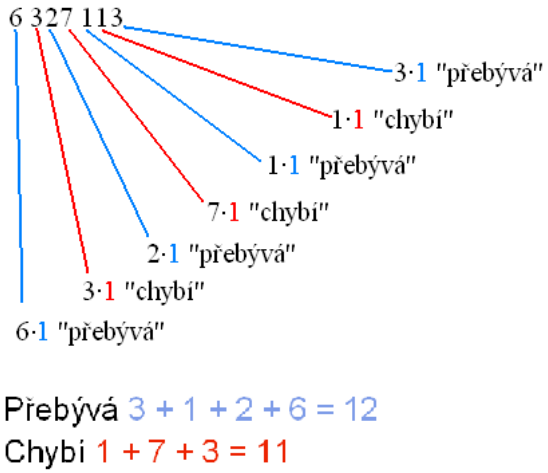
$1 = 0 + 1$
$100 = 99 + 1$
$10\,000 = 9\,999 + 1$
$1\,000\,000 = 999\,999 + 1$
...

Stejně jako při odvození znaku dělitelnosti třemi nám vždy 1 „přebývá“ k tomu, abychom měli číslo dělitelné jedenácti. Součet čísel na lichých pozicích je proto součtem „přebývajících jedniček“.

Pro sudé pozice v čísle (opět samozřejmě počítáno odzadu) je situace jiná:
$10 = 0 + 10 = 0 + 11 - 1$
$1\,000 = 990 + 10 = 990 + 11 - 1$
$100\,000 = 99\,990 + 10 = 99\,990 + 11 - 1$
...

U desítek, tisíců, statisíců, ... tedy naopak vždy jednička „chybí“ k tomu, aby číslo bylo dělitelné jedenácti. Součet čísel na sudých pozicích pak ukazuje, kolik nám „chybí“ do čísla dělitelného jedenácti.

„Přebývající“ a „chybějící“ jedničky se navzájem kompenzují. Pokud jsme schopni rozdíl jejich počtů seskupit do jedenácti, pak původní číslo bylo dělitelné jedenácti (viz obr. 2).



Obr. 2: Fungování znaku dělitelnosti jedenácti

I zde lze rovnou z alternovaného ciferného součtu odvodit i hodnotu zbytku původního čísla po dělení jedenácti. Např. v situaci na obr. 2 je alternovaný ciferný součet $12 - 11 = 1$, tzn. 1 „přebývá“ oproti číslu dělitelnému jedenácti. Zbytek po dělení jedenácti je proto 1.

Kdyby vyšla hodnota alternovaného ciferného součtu např. 16, byl by zbytek po dělení jedenácti $16 - 11 = 5$. Kdyby alternovaný ciferný součet vyšel záporný (např. -1), znamenalo by to, že 1 chybí k tomu, aby původní číslo bylo dělitelné jedenácti, a zbytek po dělení by tedy byl 10.

Znak dělitelnosti číslem 2^n

Žáci si mnohdy sami všimnou, že znak dělitelnosti dvěma požaduje, aby dvojkou byla dělitelná poslední číslice čísla. Znak dělitelnosti čtyřmi požaduje poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi; znak dělitelnosti osmi poslední trojčíslí dělitelné osmi. Platí

to i dále? Je číslo dělitelné šestnácti právě tehdy, když je šestnácti dělitelné poslední čtyřčíslí čísla? Platí to i pro další mocniny dvojky?

Uvědomme si opět odvození příslušných znaků dělitelnosti. Každou desítku je možné zapsat jako $2 \cdot 5$, proto je každá desítka (a dále i každá vyšší mocnina desítky) dělitelná dvěma. My se pak musíme starat pouze o tu část čísla, která následuje až za řádem desítek. Čtyřkou jsou dělitelné řády od stovek výš ($100 = 2^2 \cdot 5^2$), takže prozkoumat je třeba pouze číslo napsané za řádem stovek, tj. poslední dvojčíslí. Stejně tak u osmičky je nutné zkoumat poslední trojčíslí, protože $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$. Šestnáctkou jsou pak zajisté dělitelné desetitisíce, protože $10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$, a hlídat stačí opravdu poslední čtyřčíslí.

Obecně tedy protože $10^n = 2^n \cdot 5^n$, platí věta: **Číslo je dělitelné číslem 2^n (kde $n \in \mathbb{N}$) právě tehdy, když je jeho poslední n-číslí dělitelné číslem 2^n.**

Několik námětů na úlohy

Úloha 1

Největší společný dělitel dvou čísel je roven 2, nejmenší společný násobek těchto čísel je roven 90. Určete tato čísla. (Najděte všechny možnosti.) (Patáková, 2013)

Řešení: [2 a 90; 18 a 10]

Možné variace úlohy: Více prvočísel v rozkladu; nemožná situace ($\mathrm{NSD}\,(a, b)$ není dělitelem $\mathrm{nsn}\,(a, b)$); ...

Úloha 2

Kolik čísel složených z číslic 2, 3, 5, 6 můžeme sestavit, aby číslo bylo dělitelné jedenácti a žádná číslice se neopakovala?

Řešení: [3 652, 5 632, 6 325, 6 523, tedy 4 čísla]

Možné variace úlohy: Umožnit opakování číslic; více cifer; cifry takové, aby se musel vzít v úvahu i alternovaný ciferný součet $11/-11$, nejen 0; ...

Literatura

[1] PATÁKOVÁ, E. (2013). *Metody tvorby úloh pro nadané žáky.* Praha: UK PedF.

Metody řešení slovních úloh z pohledu jejich užití

František Šíma[1]

Když jsem analyzoval reakce vyučujících na různé způsoby (metody) řešení slovních úloh, došel jsem k závěru, že by bylo dobré zjistit, co vyučující k těmto postojům vede. Proto jsem začal pátrat, jaká řešení jsou uváděna v literatuře a jaká řešení slovních úloh užívají žáci základních škol a studenti středních škol. Zaměřil jsem se na učebnice matematiky, sbírky úloh a knihy jim odpovídající. Pro zjištění užitých řešení žáky a studenty jsem využil výsledků testů, které jsem prováděl v rámci přípravy své disertační práce. A došel jsem k zajímavým zjištěním.

Nejprve jsem si všiml, jak málo jsou v literatuře (až na výjimky) zastoupeny řešené slovní úlohy (viz část 1). Mnohem častěji jsou řešeny ryze matematické úlohy (řešení rovnic, matematické důkazy, konstrukční úlohy apod.) než úlohy slovní. Dalším problémem je klasifikace slovních úloh (co je slovní úloha, jaké známe typy slovních úloh). Zejména rozdělení slovních úloh na jednotlivé typy se liší (viz Kalová, 2014: s. 95; Šíma, 2013: s. 15 či Trávníček, 2002: s. 397). Vycházím z vlastní klasifikace a výběru čtyř zřejmě nejfrekventovanějších typů slovních úloh, kterými jsou: slovní úlohy o celku a částech, o směsích, o pohybu a o společné práci. Tyto čtyři typy jsem zvolil také proto, že jsem prováděl na základních a středních školách testy řešení slovních úloh právě těchto typů.

Celkově se tedy zabývám způsoby řešení uvedených slovních úloh žáky a studenty, které měli zadány v testu (test byl proveden v roce 2011), dále autory učebnic a sbírek (z let 1936 až 2006) a nakonec vlastním řešením v disertační práci (z roku 2013). Bohužel nebylo v mých silách zjistit, jakých metod řešení slovních úloh používají pedagogové při výuce.

Způsoby řešení jsem rozdělil do těchto kategorií:

- *rovnice*: zde jsou postupy, kdy k řešení byla užita lineární rovnice, kvadratická rovnice nebo rovnice vyššího stupně, dále pak soustavy rovnic a také vzorce (např. v úlohách o pohybu známý vztah pro rovnoměrný pohyb);
- *aritmeticky*: zde jsou postupy, kdy jsou úlohy řešeny pomocí aritmetických nebo algebraických operací;
- *úsudek*: při postupu byl jako hlavní užit úsudek;
- *graficky*: zde jsou zařazeny postupy, kdy k řešení úlohy slouží graf nebo grafické znázornění (nejsou zde zařazeny případy, kdy řešení začíná náčrtkem a pak je použit jiný postup);

[1]VŠTE v Českých Budějovicích, simafr2@seznam.cz

– *speciální*: zde jsou zařazeny postupy, které nepatří do předchozích (např. užití metody chybného předpokladu, nekonečné geometrické řady, kongruencí, analytické geometrie, odvození vzorce a další).

Toto dělení je pak použito v uvedených tabulkách.

Zastoupení požadovaných slovních úloh v literatuře

Pro ilustraci zastoupení slovních úloh v řešených příkladech jsem si vybral 6 dílů učebnice Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť.

Z vyřešených úloh v těchto učebnicích tvořily slovní úlohy pouze část (je jich 21,55 %). Chceme-li se zaměřit pouze na čtyři uvedené typy, pak jejich počet je ještě mnohem menší (je jich 1,94 % ze všech řešených úloh). Zastoupení v jednotlivých dílech uvádí tab. 1.

Díl	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**Celkem**
Řešený příklad	103	76	65	85	128	58	515
Slovní úloha	14	10	12	36	1	38	111
Požadovaná slovní úloha	0	9	0	1	0	0	10

Tab. 1: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU

Z tabulky je zřejmé, že „výtěžnost“ byla velmi malá. Vzhledem k tomu, že typů slovních úloh je hodně, z úloh, které jsou klasifikovány, je v uvedeném příkladu pouze 9 % těch, kterými se budu dále zabývat.

Užití metod řešení slovních úloh v literatuře

Abych získal přehled o zastoupení jednotlivých postupů při řešení slovních úloh, prozkoumal jsem 68 učebnic matematiky a sbírek úloh z matematiky. Ve většině z nich se počet řešených slovních úloh daných typů pohyboval do deseti, pouze některé knihy (zejména sbírky) tento počet překračovaly.

Odbornou literaturu jsem rozdělil do dvou skupin, a to knihy vydané do roku 1995 (včetně) a po roce 1995 (tedy v roce 1996 a dalších letech). Výsledky shrnují následující tabulky 2a–2c (1. příklad je slovní úloha na celek a část, 2. příklad je slovní úloha o směsích, 3. příklad je slovní úloha o pohybu, 4. příklad je slovní úloha o společné práci). Hodnoty jsou pro lepší porovnání uvedeny v procentech, celkem bylo prozkoumáno 640 řešení, nejvíce úloh o celku a části (1. příklad – 269 úloh), nejméně úloh o společné práci (4. příklad – 99 úloh).

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	73,68	10,53	0	7,02	8,77	100 %
2. př.	69,70	18,18	6,06	0	6,06	100 %
3. př.	77,14	8,57	2,86	11,43	0	100 %
4. př.	78,95	15,79	0	5,26	0	100 %
celé	74,31	12,50	2,08	6,25	4,86	100 %

Tab. 2a: Knihy vydané 1936–1995

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	92,92	2,83	0	4,25	0	100 %
2. př.	100,00	0	0	0	0	100 %
3. př.	94,12	0,98	0	3,92	0,98	100 %
4. př.	98,75	0	1,25	0	0	100 %
celé	95,56	1,41	0,20	2,62	0,20	100 %

Tab. 2b: Knihy vydané 1996–2015

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	88,85	4,46	0	4,83	1,86	100 %
2. př.	92,59	4,44	1,48	0	1,48	100 %
3. př.	89,78	2,92	0,73	5,84	0,73	100 %
4. př.	94,95	3,03	1,01	1,01	0	100 %
celé	90,78	3,91	0,63	3,44	1,25	100 %

Tab. 2c: Knihy vydané 1936–2015 (tj. celé období)

Z tabulek je jasné, že při řešení daných typů slovních úloh drtivě převládalo užití rovnic, do roku 1995 je to téměř 75 %, po roce 1996 ještě o více než 20 % více. Z dalších postupů je do roku 1995 nejvíce užíván aritmetický postup (12,5 %), po roce 1996 je to řešení grafické (pouze 2,6 %). Také celkově je nejčastěji užito řešení pomocí rovnic (přes 90 %), dále pak postup aritmetický a grafické řešení (v obou případech pod 4 %). Navíc se zde ukazuje trend postupem času snižovat pestrost řešení ve prospěch užití rovnic.

Užití metod řešení slovních úloh v testech žáků a studentů

Pro porovnání užívaných postupů řešení rovnic žáky ZŠ a studenty SŠ jsem zvolil výsledky testu uveřejněné ve své disertační práci (viz Šíma, 2013: s. 151). Celkem 269 žáků a studentů řešilo soubor čtyř slovních úloh (opět 1. příklad je slovní úloha na celek a část, 2. příklad je slovní úloha o směsích, 3. příklad je slovní úloha o pohybu, 4. příklad je slovní úloha o společné práci). Celkem žáci a studenti řešili 1 076 úloh. Protože některé postupy však nebylo možné přesně určit a některé úlohy nebyly řešeny, bylo celkem vybráno 685 úloh, z toho nejvíce úloh o celku a části (1. příklad – 225 úloh), nejméně úloh o společné práci (4. příklad – 142 úloh). Výsledky jsou v následujících tabulkách 3a–3d, hodnoty jsou opět uvedeny v procentech.

Z tabulek vyplývá, že při řešení daných typů slovních úloh opět výrazně převládalo užití rovnic, celkem kolem 85 %, na základních školách více než 90 %, na středních školách a gymnáziích (včetně nižších) pak kolem 80 %. Z dalších postupů se nejčastěji objevovalo užití úsudku, výrazněji na středních školách a gymnáziích (přes 11 %). Další postupy jsou již méně časté (do 5 %).

příklad	**rovnice**	**aritmeticky**	**úsudek**	**graficky**	**speciální**	**celkem**
1. př.	96,89	1,78	0,89	0,44	0	100 %
2. př.	85,21	5,33	3,55	1,78	4,14	100 %
3. př.	76,51	2,01	19,46	0	2,01	100 %
4. př.	78,17	3,52	17,61	0	0,70	100 %
celé	85,69	3,07	9,05	0,58	1,61	100 %

Tab. 3a: Práce žáků a studentů – všechny školy

příklad	**rovnice**	**aritmeticky**	**úsudek**	**graficky**	**speciální**	**celkem**
1. př.	97,94	1,03	1,03	0	0	100 %
2. př.	91,03	3,85	1,28	2,56	1,28	100 %
3. př.	86,44	1,69	11,86	0	0	100 %
4. př.	85,19	0	14,81	0	0	100 %
celé	91,32	1,74	5,90	0,69	0,35	100 %

Tab. 3b: Práce žáků a studentů – základní školy

Zde bylo možno též porovnat užité postupy s výsledky v testech. Ukázalo se, že čím pestřejší užití postupů, tím byla známka lepší. Úspěšnost při řešení byla také

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	96,09	2,34	0,78	0,78	0	100 %
2. př.	80,22	6,59	5,49	1,10	6,59	100 %
3. př.	70,00	2,22	24,44	0	3,33	100 %
4. př.	73,86	5,68	19,32	0	1,14	100 %
celé	81,61	4,03	11,34	0,50	2,52	100 %

Tab. 3c: Práce žáků a studentů – střední školy

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	96,19	2,86	0	0,95	0	100 %
2. př.	80,68	6,82	3,41	2,27	6,82	100 %
3. př.	72,46	2,90	21,74	0	2,90	100 %
4. př.	54,72	9,43	33,96	0	1,89	100 %
celé	79,68	5,08	11,43	0,95	2,86	100 %

Tab. 3d: Práce žáků a studentů – gymnázia (včetně víceletých)

závislá na oblibě jednotlivých typů úloh. Čím byl typ úlohy oblíbenější, tím byl výsledek lepší. Sami žáci a studenti často přiznávali, že určitý typ slovní úlohy mají oblíbený, protože „jim jde“.

Porovnání užití metod řešení slovních úloh v disertační práci

Pro porovnání ještě uvádím užité způsoby řešení slovních úloh uvedených typů v mojí disertační práci. Vzhledem k tomu, že práce je zaměřena na užití jednotlivých typů úloh, jsou výsledky v této části nejpestřejší. V disertační práci je celkem 504 řešených slovních úloh (217 v práci, 287 v příloze), z toho nejvíce úloh o celku a části (1. příklad – 170 úloh), nejméně úloh o směsích (2. příklad – 85 úloh). Výsledky jsou v následujících tabulkách 4a–4c opět uvedeny v procentech.

Z tabulek je vidět, že v disertační práci je sice opět nejčastěji užito pro řešení slovní úlohy rovnic, ale v mnohem větší míře jsou zde uvedeny i jiné postupy. Ve vlastní práci jsou jiné postupy převažující, „kazí“ to až přidaná sbírka úloh. Z dalších postupů jsou užity nejčastěji speciální metody, které jsou zde opravdu pestré. Speciální metody jsou užity ve více než 20 %, což v jiných případech (literatura, řešení žáků a studentů) není tolik užito.

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	47,17	15,09	7,55	9,43	20,75	100 %
2. př.	40,00	11,43	14,29	11,43	22,86	100 %
3. př.	40,00	17,14	7,14	8,57	27,14	100 %
4. př.	45,76	10,17	18,64	3,39	22,03	100 %
celé	43,32	13,82	11,52	7,83	23,50	100 %

Tab. 4a: Disertační práce (Šíma, 2013)

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	66,67	3,42	5,98	0	23,93	100 %
2. př.	78,00	4,00	0	0	18,00	100 %
3. př.	60,27	1,37	19,18	6,85	12,33	100 %
4. př.	65,96	6,38	0	0	27,66	100 %
celé	66,90	3,48	7,32	1,74	20,56	100 %

Tab. 4b: Disertační práce – příloha: Sbírka řešených úloh (Šíma, 2013)

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	60,59	7,06	6,47	2,94	22,94	100 %
2. př.	62,35	7,06	5,88	4,71	20,00	100 %
3. př.	50,35	9,09	13,29	7,69	19,58	100 %
4. př.	54,72	8,49	10,38	1,89	24,53	100 %
celé	56,75	7,94	9,13	4,37	21,83	100 %

Tab. 4c: Disertační práce – celkem (Šíma, 2013)

Shrnutí

Celkem bylo vyhodnoceno 1 829 řešených slovních úloh, z toho nejvíce slovních úloh o celku a části – 664, nejméně slovních úloh o společné práci – 347 (viz tab. 5a–c).

Vzhledem k tomu, že jednotlivých typů příkladů je různé množství, pro porovnání budu vycházet nikoliv z tabulky absolutních čísel (tab. 5a), ale z tabulek percentuálních (tab. 5b a 5c). Porovnávat budu podle užitých metod řešení (tab. 5b) a podle jednotlivých typů úloh (tj. podle příkladů – tab. 5c).

Nejčastěji užívanou metodou řešení bylo užití rovnic, celkem téměř 80 %. Další

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	560	28	13	19	44	664
2. př.	322	21	13	7	26	389
3. př.	309	20	49	19	32	429
4. př.	263	17	37	3	27	347
celé	1 454	86	112	48	129	1 829

Tab. 5a: Celkový počet hodnocených řešených příkladů

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	84,34	4,22	1,96	2,86	6,63	100 %
2. př.	82,78	5,40	3,34	1,80	6,68	100 %
3. př.	72,03	4,66	11,42	4,43	7,46	100 %
4. př.	75,79	4,90	10,66	0,86	7,78	100 %
celé	79,50	4,70	6,12	2,62	7,05	100 %

Tab. 5b: Celkový počet hodnocených řešených příkladů – podle metod řešení

příklad	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	celkem
1. př.	38,51	32,56	11,61	39,58	34,11	36,30
2. př.	22,15	24,42	11,61	14,58	20,16	21,27
3. př.	21,25	23,26	43,75	39,58	24,81	23,46
4. př.	18,09	19,77	33,04	6,25	20,93	18,97
celé	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

Tab. 5c: Celkový počet hodnocených řešených příkladů – podle typů příkladů

metody byly již užívány v mnohem menším počtu, nejvýše 7 %. Druhou v pořadí byla metoda speciální, dále užití úsudku, potom aritmetický postup a nejméně byl užíván grafický postup. Užití metod v jednotlivých příkladech se jevilo celkem rovnoměrné, větší rozdíly se jevily pouze u užití úsudku. V prvních dvou typech příkladů (o celku a části, o směsích) byl úsudek používán velmi málo, naopak v druhých dvou typech příkladů (o pohybu, o společné práci) byl úsudek používán mnohem více. Tento rozdíl byl kompenzován užitím rovnic. Celkem byla nejméně zastoupena grafická metoda ve 4. příkladu (o společné práci – méně než 1 %).

Porovnáme-li zastoupení jednotlivých typů příkladů v užitých metodách řešení, nejčastěji bývá zastoupen 1. typ příkladu (o celku a části), uprostřed se pohybují 2. (o směsích) a 3. typ příkladu (o pohybu), nejméně často bývá zastoupen 4. typ příkladu (o společné práci). Výjimku tvoří metoda úsudku, kde převažuje 3. typ následován 4. typem, na konci s odstupem jsou 1. a 2. typ. Drobné rozdíly jsou i v grafické metodě (spíše v procentech než v pořadí).

Závěr

Zjištěné výsledky nejsou sice příliš povzbudivé, ale mnohé vysvětlují. Řešení pomocí rovnic je mechanické, snadno kontrolovatelné, a proto pro řešitele i opravujícího „přináší“ menší námahu než ostatní postupy. Ty jsou často považovány (podle mého názoru zcela neoprávněně) za „vyumělkované“, „těžko popsatelné“ či „nepochopitelné“. Velice častým užíváním rovnic k řešení slovních úloh je matematika ochuzována o mnoho krásných a originálních postupů řešení. Dokladem toho jsou některá originální řešení žáků a studentů. Právě toto zjištění je nadějí, že ne všichni se v budoucnu spokojí s „otrockým“ řešením pomocí rovnic.

Proto také chápu nechuť některých vyučujících k „uvádění“ dalších řešení, když jim stačí na vše pouze rovnice. Navíc pomocí těchto postupů žáci a studenti (zejména ti průměrní a podprůměrní) často dosahují požadovaných výsledků. Jde o to, zda chceme ze žáků a studentů vytvořit „poslušné roboty“, kteří budou relativně úspěšní a nebudou mít na svých budoucích pracovištích problémy, nebo z nich chceme vytvořit opravdu „originální jedince“ schopné prosadit svůj názor na základě svých schopností a znalostí. Tato volba už je pouze na každém vyučujícím.

Literatura

[1] BĚLOUN, F., et al. (2001). *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Dotisk 8., upraveného vydání. Praha: Prometheus, 256 s.

[2] BUŠEK, I. & CALDA, E. (1999). *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky.* Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 180 s.

[3] CZUDEK, P., et al. (1998). *Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ.* Vyd. 1. Praha: sdružení podnikatelů HAV.

[4] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E. & ŠIMŠA, J. (1997). *Matematika. Rovnice a nerovnice. Tercie.* Dotisk 1. vydání. Praha: Prometheus, 124 s.

[5] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E. & ŠIMŠA, J. (1999). *Matematika. Rovnice a jejich soustavy. Kvarta.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 144 s.

[6] KABELE, J., MIKULČÁK, J., BARTOŠ, P., DAŇKOVÁ, B. & KRŇAN, F. (1964). *Matematika pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnasií).* Vyd. 4., nezměněné vydání. Praha: SPN, 308 s. 1211/45-10-21/14-515-74.

[7] KALOVÁ, J. (2014). Jsou aplikační úlohy ve výuce matematiky vždy přínosem? In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 95–101). Vyd. 1. Plzeň.

[8] KALOVÁ J. (2014). Application in Mathematical education. *Proceedings of ICPM'14*, Liberec.

[9] KOVÁČIK, J. (2004). *Řešené příklady z matematiky pro střední školy.* Vyd. 1. Praha: ASPI Publishing, s. r. o., 712 s.

[10] KRAEMER, E., BARTOŠ, P., HUSTÁ, A., VOŘÍŠEK, J. & ZÖLDY, M. (1965). *Matematika pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnasií).* Vyd. 2., nezměněné vydání. Praha: SPN, 320 s. 1212/55-10-12/14-289-73.

[11] KRAEMER, E., HRADECKÝ, F. & JOZÍFEK, V. (1956). *Sbírka řešených úloh z matematiky (6. až 8. postupný ročník).* Vyd. 1. Praha: SPN, 248 s.

[12] MAŠKA, O. (1936). *Matematika v úlohách I. Aritmetika a algebra.* Vyd. 5. Brno: Nakladatelství Barvič & Novotný, 224 s.

[13] ODVÁRKO, O. & KADLEČEK, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 272 s.

[14] OSTRÝ, M. (1948). *Aritmetika v úlohách ke zkouškám z matematiky.* Vyd. 2., přepracované vydání. Praha: Česká grafická unie a. s., 332 s.

[15] ROBOVÁ, J., et al. (2014). *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 160 s.

[16] ŠÍMA, F. (2013). *Matematizace reálných situací a slovní úlohy.* [Disertační práce]. Olomouc, 198 s.

[17] ŠÍMA, F. (2014). K jednomu způsobu řešení slovních úloh o společné práci. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2014* (s. 141–156). Vyd. 1. Praha.

[18] TRÁVNÍČEK, S. (2002). *Matematizace reálných situací.* Olomouc, MFI 11, 2001/2002, č. 7, 388–398.

[19] VEJSADA, F. & TALAFOUS, F. (1969). *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* Vyd. 1. Praha: SPN, 688 s. 1271/15-534-69.

[20] ZEDEK, M., KRŇAN, F., SVOBODA, J. & ROVAN, K. (1964). *Matematika pro I. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnasií).* Vyd. 6., nezměněné vydání. Praha: SPN, 352 s. 1210/55-10-10/14-518-75.

Faktory ovlivňující výkony žáků v matematice: pohled učitelů

Alena Škaloudová, Anna Páchová[1]

V rámci širšího výzkumu kritických míst matematiky na základní škole (GA ČR 407/11/1740) probíhalo od června 2014 do září 2014 výzkumné šetření formou internetového dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky 2. stupně.

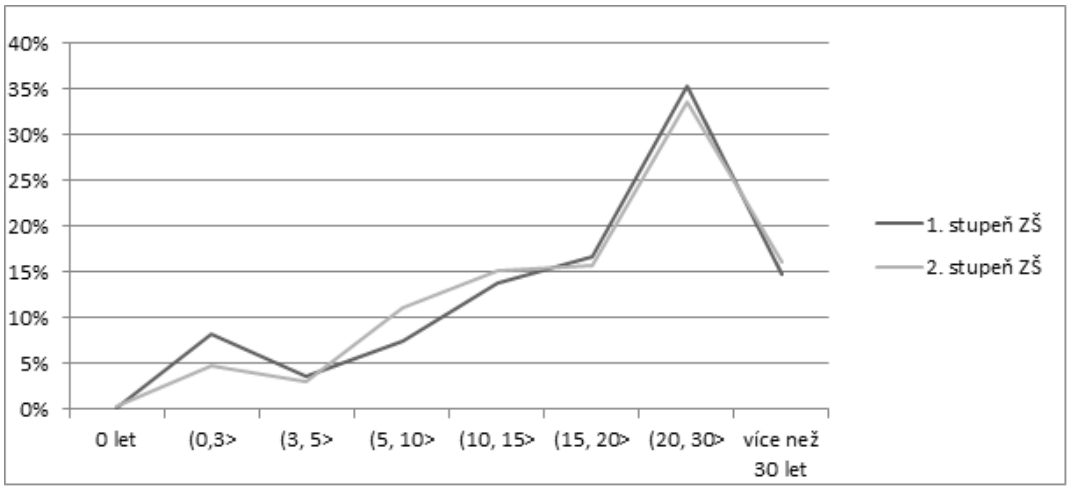
Dotazník byl zaměřen zejména na problematické oblasti matematiky. Kromě toho se ale vyučující měli vyjádřit rovněž k faktorům, které podle jejich názoru ovlivňují úspěšnost žáků v matematice. A právě této dílčí oblasti se budeme věnovat v následujícím textu.

Účastníci výzkumu a metody sběru dat

Informace o dotazníku byla zaslána elektronicky na všechny základní školy a osmiletá gymnázia v České republice a dále o něm byli informováni konkrétní učitelé, s nimiž mají řešitelé projektu kontakt. Do ukončení šetření se navrátilo cca 645 vyplněných dotazníků od učitelů 1. stupně a cca 280 od učitelů matematiky. Počet učitelů, kteří vyplnili závěrečné položky dotazníku týkající se faktorů školní úspěšnosti, byl však nižší a kolísal od 323 do 377 v případě učitelů 1. stupně a od 130 do 184 v případě učitelů matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání.

Nejedná se o náhodně vybraný vzorek vyučujících, jelikož se učitelé sami rozhodovali o tom, zda dotazník vyplní. Spíše lze tedy uvažovat tak, že se jedná o výběr vyučujících, kteří se o svůj obor zajímají. Šetření se zúčastnili učitelé s různou délkou praxe, přičemž na obou stupních převažovali učitelé s dlouhodobějšími zkušenostmi s výukou (viz graf 1).

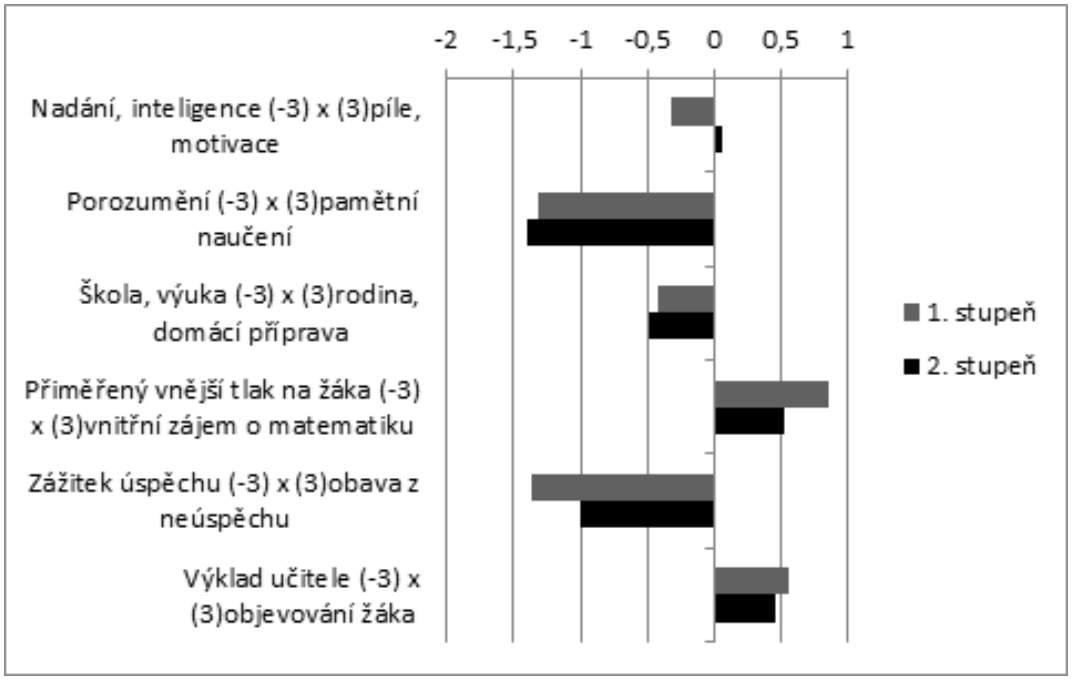
[1]Pedf UK v Praze, anna.pachova@pedf.cuni.cz



Graf 1: Procentuální zastoupení vyučujících s různou délkou praxe

Výsledky

Vyučující se měli vyjádřit k dvanácti faktorům ovlivňujících výuku, z nichž vždy dva byly dány do kontrastu. Vzniklo tak 6 otázek, ve kterých se učitelé na škále od -3 do $+3$ vyjadřovali k tomu, zda pokládají za důležitější první nebo druhý faktor. Pokud učitelé považovali oba faktory za stejně důležité, měli označit střed škály, tedy nulu. Zkoumané faktory jsou uvedeny v grafu 2. Výsledky výpovědí učitelů jsou vyjádřeny aritmetickým průměrem.



Graf 2: Faktory podílející se na školních výkonech

Pro dobré porozumění grafu 2 si je třeba si uvědomit, že nízké sloupce grafu vyjadřují, že učitelé se nepřiklánějí k žádnému z kontrastních výroků. Můžeme tedy

konstatovat, že z hlediska učitele jsou pro dobrý výkon žáka nadání a inteligence (zejména na 2. stupni ZŠ) stejně důležité jako jeho píle a motivace. Více danou problematiku rozvedeme v závěrečné diskuzi.

Mírný příklon k jednomu z kontrastních výroků byl zaznamenán u tří položek: 1. Školní výuka se učitelům jeví mírně důležitější než domácí příprava a rodinné zázemí. 2. Vlastní objevování žáka hraje o něco větší roli než výklad učitele. 3. Zájem žáků o matematiku je pro jejich výkon jen o něco významnější než vnější tlak na žáka.

Z uvedeného grafu dále vyplývá, že bez ohledu na stupeň ZŠ lze konstatovat, že existují dva faktory výkonu s největší vyhraněností učitelů. 1. Porozumění probíranému učivu je podle vyučujících pro úspěšné zvládnutí matematiky mnohem důležitější než pamětné učení. 2. Učitelé silně vnímají význam pozitivní výkonové motivace. Prožitek úspěchu žáků se jim jeví pro zvládnutí matematiky jako mnohem podstatnější než obava z neúspěchu.

Ačkoliv je možné ve výpovědích učitelů prvního a druhého stupně ZŠ vypozorovat společné základní rysy, neznamená to, že by mezi těmito dvěma skupinami učitelů neexistovaly vůbec žádné rozdíly. Statisticky významné rozdíly[2] nacházíme u tří faktorů. Učitelé na 1. stupni ZŠ

- přikládají větší význam nadání a inteligenci dětí než učitelé na 2. stupni;
- kladou vyšší důraz na zájem žáků o matematiku;
- více vnímají důležitost pozitivní výkonové motivace žáků.

Tyto rozdíly jsou neočekávané, zvláště v případě prvního a druhého tvrzení. V průměru totiž učitelé považují nadání za o něco málo důležitější nežli píli. Vzhledem k tomu, že obtížnost matematiky na druhém stupni základní školy roste, očekávali bychom, že druhostupňoví učitelé budou považovat nadání za podstatnější faktor. Zjištěné rozdíly však spíše ukazují na domněnku učitelů, že právě díky vyšší náročnosti druhostupňového učiva je pro jeho úspěšné zvládnutí kromě nadání potřeba rovněž píle. Z tohoto úhlu pohledu ale není zase jasné, proč druhostupňoví učitelé kladou nižší důraz na zájem žáků o matematiku, který by mohl píli podněcovat.

Diskuze a závěr

V předchozí části textu byly představeny výsledky týkající se faktorů školní úspěšnosti tak, jak jej vnímají učitelé. Vzhledem ke způsobu, jakým byly dané položky

[2]Statistická významnost byla zkoumána za pomoci Mann-Whitneyova testu pro dva nezávislé soubory. Neparametrický test byl zvolen proto, že data neměla normální rozdělení. Vzhledem k velkému rozsahu výběru jsme volili hladinu významnosti 1 %.

v dotazníku prezentovány, nemůžeme zjistit, který z faktorů vyučující považují za nejdůležitější.

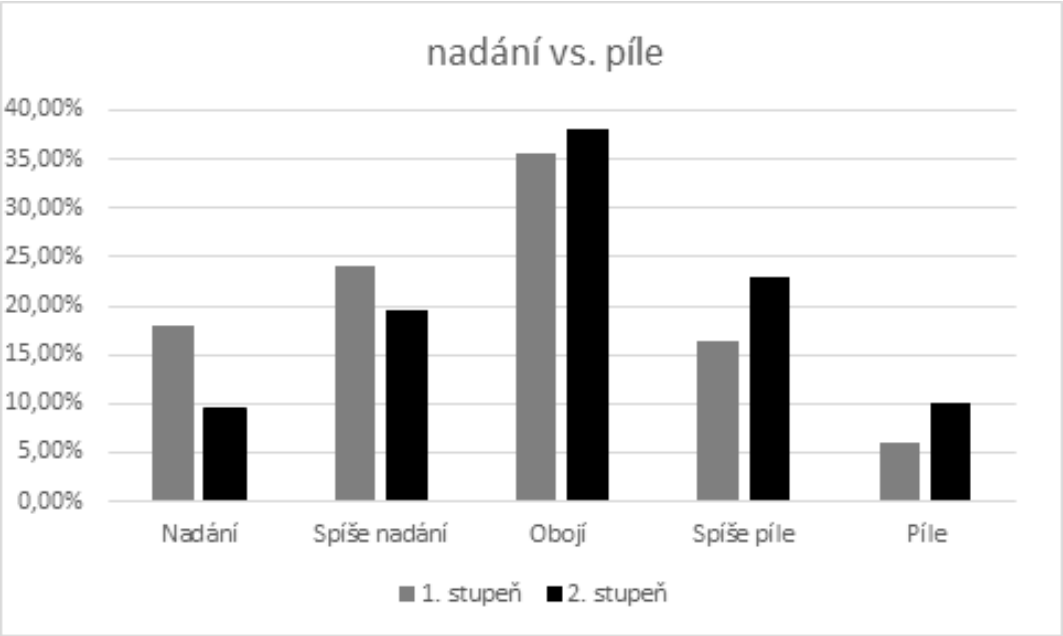
Se školní úspěšností bývají nejčastěji spojovány faktory nadání a píle, zvláště pak v matematice. Naši učitelé jim v dotazníku připisovali obdobnou důležitost (viz graf 2). Rovněž v našem dřívějším výzkumu (Hříbková & Páchová, 2013) byly na základě kvalitativní analýzy rozhovorů s vyučujícími právě tyto dvě oblasti učiteli nejvíce akcentovány.[3] Ukazuje se, že zejména na základě těchto dvou dimenzí si učitelé vytvářejí modely o úspěšnosti či neúspěšnosti svých žáků.

Výroky učitelů, které se vztahovaly k dané problematice, jsme v uváděném výzkumu rozdělili do čtyř kategorií. „Extrémními typy" žáků byli žáci nadaní a snaživí, respektive žáci nenadaní a nesnaživí. V kategoriích školního úspěchu byl pak první typ tvořen žáky školsky úspěšnými a druhý typ žáky školsky neúspěšnými. Těmito typy žáků se vyučující v rozhovorech zabývali méně, nežli žáky „hraničními" – tedy žáky nadanými a nesnaživými a žáky nenadanými a snaživými. To se zřejmě dělo ze dvou důvodů.

Prvním důvodem je skutečnost, že u „extrémních typů" žáků je situace pro vyučující jasnější. Žáci nadaní a snaživí jsou úspěšní a nepotřebují větší pomoc učitele. V případě žáků nenadaných a nesnaživých zase učitelé hovořili o ztrátě energie se řešením jejich potíží zabývat. Oproti tomu „hraniční typy" žáků jsou, co se týče jejich matematických výkonů, pro učitele méně jasní a ti jim proto věnují větší pozornost. Druhým důvodem je pak skutečnost, že někteří vyučující v našem výzkumu uvažovali tak, že nadání a snaha se vzájemně vylučují. Za takovýchto podmínek je vlastně existence „extrémních typů" žáků v podstatě vyloučena. Setkávali jsme se např. s těmito typy tvrzení (z rozhovoru s jednou z učitelek – Hříbková & Páchová, 2013: s. 247): „Vidím to na svědomitých žácích, nejsou to žádní Einsteini, nic takového, ale díky svědomitosti a píli – teď to řeknu středně – se na tu dvojku matematiku naučí a zvládnou ji."

V prezentovaném dotazníku byl dotaz na nadání a píli obsažený v první otázce (viz graf 3). Z grafu vyplývá, že dotazovaní učitelé v průměru nadání a píli přisuzují při zvládání matematiky stejnou váhu. Tento fakt může být interpretován tak, že pro úspěch v matematice jsou shodně nutné oba faktory. Interpretace ale může stejně tak směřovat k tomu, že se jedná o faktory vzájemně zaměnitelné. Druhá interpretace by pak byla v souladu s našimi předchozími zjištěními. Učitelé v našem minulém výzkumu totiž často hovořili o tom, že nadání je možné částečně kompenzovat pílí či přístupem. Význam píle byl akcentován zejména druhostupňovými učiteli, naopak prvostupňoví učitelé hovořili více o dispozicích žáků. Pokud se podíváme na podrobnější zpracování dotazníkové položky týkající se nadání, zjistíme, že i kvantitativní šetření tento trend do jisté míry potvrzuje.

[3]Rozhovory byly primárně zaměřeny a obtížná místa výuky matematiky, nicméně učitelé spontánně často hovořili o tom, jak matematiku zvládají různé skupiny žáků.



Graf 3: Nadání vs. píle

Učitelé se k důležitosti jednoho či druhého faktoru vyjadřovali pomocí bipolární škály nabývající hodnot od -3 do $+3$ (viz výše). Volby krajních hodnot (-3 a -2, respektive $+3$ a $+2$) jsme pro přehlednost souhrnně zařadili do kategorie „nadání“, respektive „píle“. „Spíše nadání“ pak reprezentuje hodnotu -1, zatímco „spíše píle“ hodnotu $+1$. Pod kategorii „obojí“ pak spadají výroky vyučujících, kteří volili na škále hodnotu 0.

Graf potvrzuje skutečnost, že většina vyučujících považuje oba faktory za shodně důležité. Ze zbývajících voleb pak u prvostupňových učitelů převládá volba „spíše nadání“, zatímco u druhostupňových učitelů je převládající volbou „spíše píle“.

Pokud však sečteme sloupce „nadání“ a „spíše nadání“, dostaneme se na 42 % vyučujících v případě prvostupňových učitelů, respektive na 29 % v případě druhostupňových učitelů. Tito učitelé tedy považují nadání za podstatnější faktor, nežli píli či motivaci. To jsou čísla velmi vysoká zvláště v souvislosti s tím, že nadání bývá učiteli pojímáno převážně staticky, neměně (Hříbková & Páchová, 2013). Takovýto model vysvětlení školního výkonu však může snadno vést k rezignaci – a to jak na straně učitele, tak rovněž následně i na straně žáka. Pokud je v rámci tohoto pohledu za matematický výkon zodpovědné převážně nadání, které nelze měnit, motivace pochopitelně klesá. Na tento problém upozorňuje i National Mathematics Panel (2008). Na zde citovaných výzkumných studiích autoři ukazují, že pokud žáci věří, že za jejich matematické výkony odpovídá spíše jejich snaha, nežli nadání, více se snaží a jejich matematické výkony jsou lepší.

Pozn. Příspěvek byl vypracován v rámci projektu GA ČR 407/11/1740.

Literatura

[1] National Mathematics Advisory Panel. (NMAP) (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

[2] HŘÍBKOVÁ, L. & PÁCHOVÁ, A. (2013). Typy žáků v diskurzu učitelů základní školy. In Rendl, M., Vondrová, N. et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 209–258). Praha: UK PedF.

Výsledky vybraných výskumov používania didaktických hier v matematike

Peter Vankúš[1]

V príspevku sa venujeme výskumom zisťujúcim efektívnosť vyučovania matematiky metódou didaktických hier. Ponúkame stručný prehľad 7 takýchto výskumov, pričom sa zameriame na dosiahnuté zistenia ohľadne vplyvu používaných didaktických hier na stanovené faktory efektívnosti. Príspevok je určený učiteľskej verejnosti so záujmom o používanie didaktických hier v matematike, pričom ponúka výskumne overené fakty podporujúce využívanie tejto didaktickej metódy vo vyučovaní.

Na základe rýchleho pokroku vedy a techniky je nevyhnutná neustála inovácia obsahu, foriem a cieľov školského vyučovania a tým aj používaných vyučovacích metód. A práve preto je potrebné realizovať štúdie, ktoré overujú efektívnosť týchto inovovaných vyučovacích metód a tak potvrdzujú ich potencionálny prínos. V našom článku sa venujeme potom výskumom, ktoré zisťovali efektívnosť vyučovania s používaním didaktických hier v matematike.

Ako dôležitý pojem pre náš článok si priblížime efektívnosť vyučovacej metódy. Tento veľmi komplexný pojem budeme charakterizovať nasledovnými faktormi (Vankúš, 2014):

– Subjektový faktor: Množina subjektov, pre ktorú je daná metóda vhodná (kategória subjektový faktor – vhodnosť) resp. zohľadnenie vplyvov charakteristík množiny subjektov na efektívnosť metódy (kategória subjektový faktor – charakteristiky).

[1]FMFI UK v Bratislave, peter.vankus@gmail.com

– Rezultatívny faktor: Dosiahnutá úroveň vedomostí a zručností žiakov z matematického učiva preberaného počas experimentálneho pôsobenia (kategória rezultatívny faktor – vedomosti) a tiež zmeny v postojoch žiakov k predmetu matematika, k vyučovaniu matematiky, ich sebahodnotenie vlastných schopností z matematiky a pod. (kategória rezultatívny faktor – postoje).

– Subjektové zážitkové charakteristiky žiakov: Zážitky úspechu a neúspechu, emocionálne prežívanie, motivačné a kognitívne pochody žiakov a pod.

Prehľad vybraných výskumov efektívnosti používania didaktických hier v matematike

V tejto časti článku ponúkneme prehľad 7 vybraných výskumov efektívnosti vyučovania didaktických hier v matematike. Pri výbere výskumov sme sa zamerali na žiakov vo veku 10 rokov a vyššie (nižšie sekundárne vzdelávanie, vyššie sekundárne vzdelávanie a tiež univerzitné vzdelávanie). Výskumy sme prevzali s recenzovaných prestížnych vedeckých časopisov, aby sme zabezpečili ich požadovanú úroveň metodickej realizácie.

V rámci prehľadu výskumov uvedieme vek a počet žiakov, ktorí sa výskumu zúčastnili. Následne uvedieme faktory efektívnosti zisťované v rámci výskumu a tiež fakt, či bol zistený pozitívny, negatívny resp. žiaden vplyv použitej didaktickej hry na uvedené faktory. Uvedený prehľad je vzhľadom na obmedzený rozsah príspevku veľmi stručný a neobsahuje množstvo informácií, potrebných pre vytvorenie uceleného obrazu o daných výskumoch. Preto záujemcom odporúčame prečítať si podrobnú analýzu týchto výskumov v rámci našej publikácie (Vankúš, 2014), ktorá je dostupná na webovej stránke http://www.comae.sk/efektivnost.pdf.

Prehľad výskumov obsahuje tab. 1.

Záver

Ako má čitateľ možnosť vyčítať z tabuľky uvedenej v článku, analyzované výskumy preukázali vo väčšine prípadov pozitívne vplyvy didaktických hier, používaných v rámci experimentálneho pôsobenia na stanovené faktory efektívnosti vyučovania. Preto môžeme konštatovať, že uvedené výskumy podporujú tvrdenie, že vhodne vytvorená didaktická hra má pri jej správnej aplikácii potenciál prispieť k efektívnemu vyučovaniu matematiky.

Ako sme už konštatovali vyššie v rámci nášho príspevku, tu uvedená analýza je vzhľadom na obmedzenie rozsahu príspevku málo detailná. Ponúka ale náhľad na skutočnosť, že efektívne používanie didaktických hier v matematike má podporu v rámci výsledkov relevantných výskumov a je preto povzbudením učiteľskej verejnosti k používaniu tejto vyučovacej metódy aj v ich pedagogickej činnosti.

Článok, vek a počet žiakov	**Zisťované faktory efektívnosti**
Ke, Grabowski (2007), 10–11 rokov, 25 žiakov	subjektový faktor (vhodnosť) – žiaden vplyv, rezultatívny faktor (vedomosti) – pozitívny vplyv, rezultatívny faktor (postoje) – pozitívny vplyv
Sedig (2007), 11–12 rokov, 49 žiakov	rezultatívny faktor (vedomosti) – pozitívny vplyv, subjektívne zážitkové charakteristiky – pozitívny vplyv
Kebritchi, Hirumi, Bai (2010), 14–16 rokov, 93 žiakov	subjektový faktor (vhodnosť) – pozitívny vplyv, subjektový faktor (charakteristiky) – žiaden vplyv, rezultatívny faktor (vedomosti) – pozitívny vplyv, subjektívne zážitkové charakteristiky – žiaden vplyv
Miller, Robertson (2011), 10–11 rokov, 635 žiakov	subjektový faktor (charakteristiky) – žiaden vplyv, rezultatívny faktor (vedomosti) – pozitívny vplyv, rezultatívny faktor (postoje) – žiaden vplyv
Afari, Aldridge, Fraser, Khine (2012), 18–35 rokov, 352 žiakov	rezultatívny faktor (postoje) – pozitívny vplyv, subjektívne zážitkové charakteristiky – pozitívny vplyv
Riconscence (2013), 10–11 rokov, 122 žiakov	rezultatívny faktor (vedomosti) – pozitívny vplyv, rezultatívny faktor (postoje) – pozitívny vplyv
Barzilai, Blau (2014), 6–14 rokov, 182 žiakov	rezultatívny faktor (vedomosti) – žiaden vplyv, rezultatívny faktor (postoje) – pozitívny vplyv, subjektívne zážitkové charakteristiky – pozitívny vplyv

Tab. 1: Prehľad vybraných výskumov

Grantová podpora

Príspevok vznikol s podporou grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 074UK-4/2014.

Literatúra

[1] AFARI, E., ALDRIDGE, J. M., FRASER B. J. & KHINE M. S. (2012). Students' perceptions of the learning environment and attitudes in game-based mathematics classrooms. *Learning Environ Res*, 16, 131–150.

[2] BARZILAI, S. & BLAU, I. (2014). Scaffolding game-based learning: Impact on learning achievements, perceived learning, and game experience. *Computers & Education*, 70, 65–79.

[3] KE, F. & GRABOWSKI, B. (2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not? *British Journal of Educational Technology*, 38(2), 249–259.

[4] KEBRITCHI, M., HIRUMI, A. & BAI, H. (2010). The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation. *Computers & Education*, 55, 427–443.

[5] MILLER, D. J. & ROBERTSON, D. P. (2011). Educational benefits of using game consoles in a primary classroom: A randomized controlled trial. *British Journal of Educational Technology*, 42(5), 850–864.

[6] RICONSCENCE, M. M. (2013). Results From a Controlled Study of the iPad Fractions Game Motion Math. *Games and Culture*, 8(4), 186–214.

[7] SEDIG, K. (2007). Toward operationalization of 'flow' in mathematics learnware. *Computers in Human Behavior*, 23, 2064–2092.

[8] VANKÚŠ, P. (2014). *Zisťovanie efektívnosti vyučovacích metód. Analýza výskumov efektívnosti vyučovania matematiky metódou didaktických hier.* Bratislava: KEC FMFI UK Bratislava.

Žákovská řešení geometrických úloh na 1. st. ZŠ – diagnostika a hodnocení

Renáta Zemanová[1]

Představujeme jedno písemné řešení geometrické úlohy žáka 4. ročníku ZŠ a jeho analýzu za účelem hodnocení a klasifikace. V úloze žák rýsuje úsečku zadané délky, popisuje její krajní body, konstruuje čtyřúhelník, popisuje jeho vrcholy, měří úsečku a délku úsečky zapisuje. Studenti oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ a žáci 4. ročníku ZŠ identifikují chyby v řešení, důvod jejich vzniku a práci klasifikují. Na závěr se ke strategii řešení úlohy, chybám a důvodům jejich vzniku vyjadřuje autor řešení.

[1]Katedra matematiky s didaktikou, Pedagogická fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě, renata.zemanova@osu.cz

Formulace problému

Dlouhodobě se zabýváme studiem didaktické empatie učitelů a studentů učitelských studijních oborů, zejména za účelem navržení a ověření optimálních nástrojů pro její rozvoj. Aktuálně optimalizujeme nástroje pro rozvoj didaktické empatie studentů oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ. Je kladen velký důraz na propojení vysokoškolského studia a praxe, kdy studenti v rámci didaktiky analyzují části skutečných 1) vyučovacích hodin, 2) písemných žákovských prací. Součástí závěrečného didaktického testu je rozbor žákovského řešení písemné práce a její klasifikace. Jednotlivé úlohy písemné práce jsou sestaveny ze skutečných řešení jednotlivých žáků, a to takových, kde může student prokázat schopnost své empatie. Jedná se o práce se zajímavými chybami, jejichž důvod není na první pohled zřejmý.

Diagnostická úloha, interpretace a klasifikace žákovského řešení

Představíme jednu z úloh, které byly zařazeny do didaktických testů studentů oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ (4. ročník ZŠ): *Narýsuj úsečku MN dlouhou 64 mm. Narýsuj čtyřúhelník MNOP, body O, P si zvol libovolně. Změř a zapiš délku úsečky NO.*

Úloha sestává ze tří částí, z nichž každá obsahuje dva úkoly:

1) konstrukce úsečky zadané délky, popis krajních bodů úsečky;

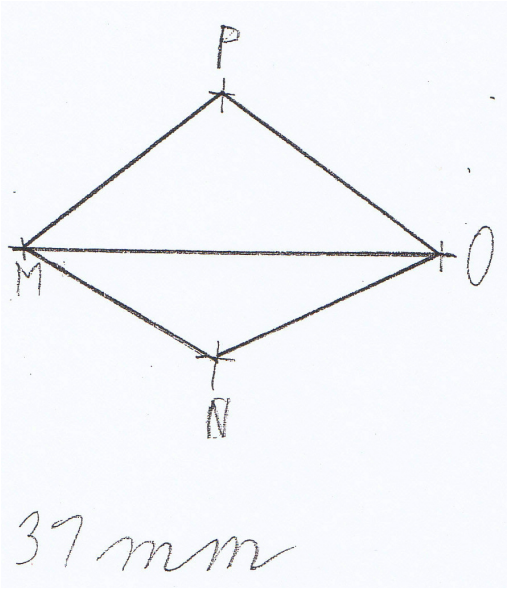
2) konstrukce čtyřúhelníku, popis vrcholů;

3) měření délky úsečky, symbolický zápis délky úsečky.

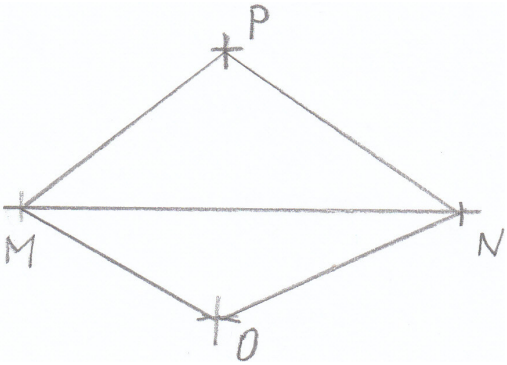
V obr. 1 se nám jeví, že žák nejprve sestrojil úsečku délky 64 mm, pravděpodobně ji pojmenoval v souladu se zadáním MN. Poté zvolil body O, P, avšak v opačných polorovinách s hraniční přímkou MN. Narýsoval čtyřúhelník, avšak všiml si, že vrcholy čtyřúhelníku nejsou pojmenovány postupně $MNOP$, ale $MONP$ (obr. 2). Problém vyřešil tak, že zaměnil označení vrcholů O a N (jména bodů vygumoval a změnil na N a O), čímž získal finální řešení úlohy (obr. 1). Následně měřil délku úsečky NO (správně 36 mm), ale zapsal 31 mm. Předpokládáme, že buď chybně odečítal z měřítka namísto 6 mm jen 1 mm (namísto 36 mm četl 31 mm), nebo neměřil od nuly, ale od začátku měřítka.

Sledovali jsme studentské interpretace žákovského řešení a jeho klasifikaci. Práci hodnotilo celkem 28 studentů prezenční formy studia a 20 studentů kombinované formy studia. V jejich rozborech jsme se zaměřili na dva klíčové jevy:

1) Zda si v první části úlohy všimnou, že délka úsečky MO je 64 mm (úhlopříčka MO je narýsovaná), zda tuto informaci propojí se zadáním úlohy (narýsuj úsečku MN délky 64 mm) a zda budou zvažovat možný důvod chyby.



Obr. 1: Žákovské řešení úlohy, finální



Obr. 2: Žákovské řešení úlohy, průběžné

2) Zda budou druhou část úlohy (změř délku úsečky NO) posuzovat nezávisle na chybě v první části úlohy.

ad 1) Z celkového počtu 48 studentů si 9 studentů (19 %) všimlo, že délka úsečky MO odpovídá zadané délce úsečky MN (64 mm) a zahrnulo tuto skutečnost do svých úvah. Předpokládali, že žák zaměnil body O a N, jeden student udal důvod záměny (obíhání vrcholů). V tab. 1 uvádíme v počtech a procentech, sloupec „záměna“.

ad 2) Z celkového počtu 48 studentů 28 studentů (58 %) hodnotilo měření úsečky NO nezávisle na chybě v předchozí části (chybném označení/měření úsečky MN). Jednalo se o všechny studenty, kteří si všimli záměny bodů N a O a některé další studenty. V tab. 1 uvádíme v počtech a procentech, sloupec „nezávislost“.

Žákovské řešení studenti hodnotili známkou, tab. 2. Studenti klasifikovali stupněm 2–5, v tabulce uvádíme počet studentů v jednotlivých skupinách.

	1 – ano (záměna)		**2 – ano (nezávislost)**	
	počet	**%**	**počet**	**%**
prezenční	4	14	16	57
kombinovaní	5	25	12	60
celkem	9	19	28	58

Tab. 1: Jevy „záměna“ a „nezávislost“ – počet a procenta v hodnocení studenty

známka (stupeň)	**2**	**3**	**4**	**5**
prezenční	3	19	6	0
kombinovaní	2	11	5	2
celkem	5	30	11	2

Tab. 2: Klasifikace žákovského řešení, studenti

Práce s chybou v hodině matematiky

Žákovské řešení jsme následně předložili spolužákům autora (žáci 4. ročníku, 27 žáků) s požadavkem, aby řešení opravili – našli a zdůvodnili chyby a napsali známku. Každý žák měl řešení před sebou, mohl úsečky měřit a obrázek detailně zkoumat. Současně bylo řešení přerýsováno na tabuli. Žáci mohli řešení nahlas diskutovat, z diskuze je pořízeno video. Jeden z žáků po cca 3 minutách diskuze vyslovil myšlenku záměny bodů, ostatní se k ní přiklonili (záměnu bodů uznali jako nejpravděpodobnější příčinu chyby v řešení). Práci již samostatně klasifikovali, tab. 3. Během této diskuze nebyl autor řešení přítomen.

známka (stupeň)	**1**	**2**	**3**
počet žáků	5	11	11

Tab. 3: Klasifikace žákovského řešení, žáci

Po této diskuzi se autor řešení vrátil do třídy, aby se ke svému řešení vyjádřil. Jeho vystoupení je zaznamenáno na video. Žák o chybě věděl, pamatoval si, že ji v práci udělal. Jako důvod uvedl záměnu bodů N a O ve fázi, kdy měl popsat vrcholy čtyřúhelníku a zjistil, že neobíhají postupně ($MNOP$), nýbrž $MONP$. Názvy bodů N a O potom zaměnil (gumoval). Už si nevšiml, že výsledný obrázek nesouhlasí se zadáním. Mezi vypracováním úlohy žákem a touto aktivitou uběhlo pět dnů.

Závěr

Diagnostiku žákovských řešení považujeme za klíčovou aktivitu ve výuce didaktiky matematiky. K její kvalitě velmi přispívá rozvoj didaktické empatie studentů, kteří se zdokonalují v dovednosti odhalovat v projevu žáka příčiny jeho chyb a hodnotit jeho matematický projev co nejreálněji. Dobrých výsledků dosahujeme v diskuzích se skupinou studentů, kdy jednotlivci přinášejí mnoho nových myšlenek, tyto se ve skupině argumentují, přijímají či odmítají. Následné propojení studentských závěrů se skutečností, tedy s výpovědí žáka, dává studentům dokonalou zpětnou vazbu.

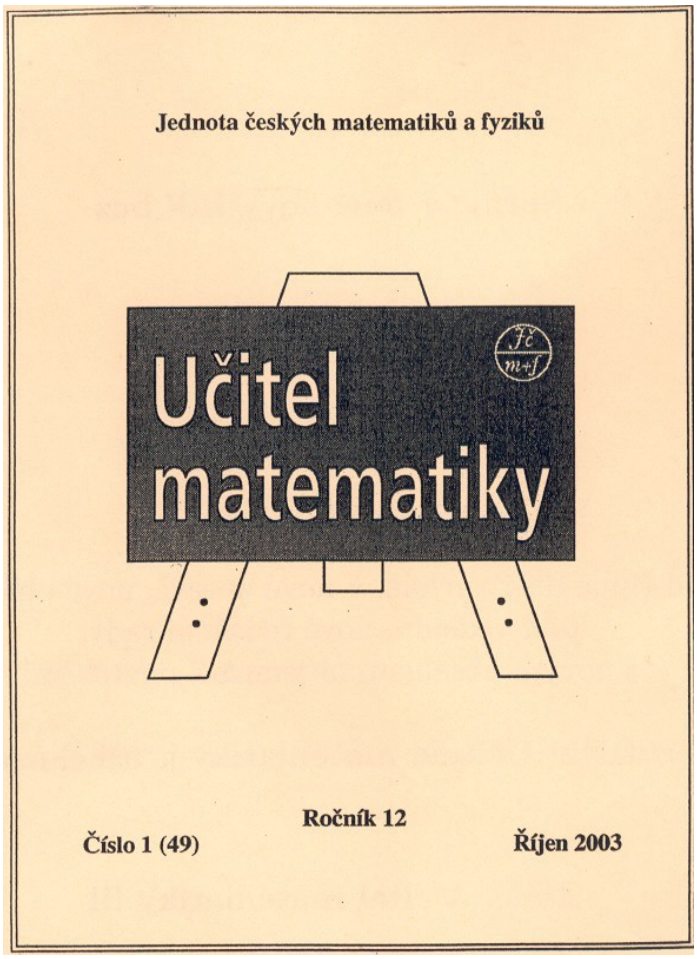
Literatura

[1] KRPEC, R. (2014). Zkušenosti s výukou matematiky na 1. stupni ZŠ v inkluzivním prostředí. In Kaleja, M. & Zezulková, E. *Předškolní a základní vzdělávání* (s. 191–198). Ostrava: Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta.

[2] NOVÁK, B. (2013). K matematickému vzdělávání učitelů primárních škol. In Tomková, B. & Mokriš, M., *Matematika v primárnej škole. Rôzne cesty, rovnaké ciele* (s. 17–27). Prešov: Prešovská univerzita, Pedagogická fakulta.

[3] NOVOTNÁ, J. (2014). Nadaní žáci, jejich učitelé a matematika. In Kovářová, R. & Škrabánková, J., *Učíme nadané žáky* (s. 105–114). Ostrava: Ostravská Univerzita, Pedagogická fakulta.

[4] TOMKOVÁ, B. (2010). Analýza riešení matematických úloh jednej súťaže. In *Tradície a inovácie vo výchove a vzdelávaní modernej generácie učiteľov IV* (s. 275–281). Ružomberok: Verbum – vydavateľstvo Katolíckej univerzity.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 24. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na wwww.suma.jcmf.cz/ucitel.

Administrace časopisu:
Miluše Hrubá
Gymnázium, A. K. Vítáka 452, 569 43 Jevíčko
e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2015. Sborník příspěvků.

Editor:	Naďa Vondrová
Sazba:	Zuzana Kocourková a Jan Kozubek, systémem LaTeX
Počet stran:	207
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2015
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7290-843-1