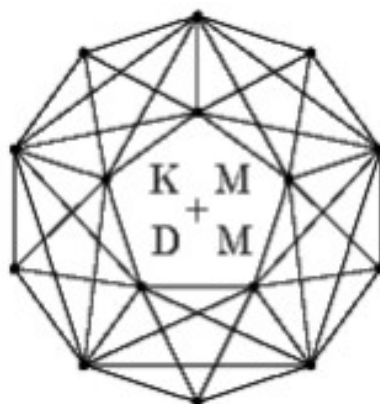


DVA DNY
S
DIDAKTIKOU MATEMATIKY
2014

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 13.–14. 2. 2014

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nada Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Nada Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2014. Systémem L^AT_EX zpracovali Zuzana Kocourková a Jan Kozubek.

ISBN 978-80-7290-801-1

Obsah

ZVANÁ PŘEDNÁŠKA	9
Řešení a tvoření úloh (nejen v přípravě učitelů) Alena Hošpesová, Marie Tichá	9
PRACOVNÍ DÍLNY	18
Veria ľudia dôkazom? Anino Belan	18
Hry vo vyučovaní matematiky Mária Beniačiková, Alžbeta Brišová, Miriam Dubovská, Daniela Guffová, Michaela Chvojková, Elena Murinová	25
Jak si zavázat boty, rozstříhat čtverec ANEK zase ta Pythagorova věta Alice Bílá, Veronika Havelková	31
Chyby, překážky a výuka matematiky Jarmila Novotná	38
Využití analogií ve výuce matematiky Eva Patáková	43
Tabulka 100 – gradované úlohy Jana Slezáková	47
Aditivní mnohoúhelníky Anna Sukniak	49
Matematické rarity a jejich role ve výuce na 2. stupni ZŠ a na SŠ Lukáš Vízek, Petr Řehák	54

Tvorba video-databázy pomocou pera SmartPen Katarína Furcoňová, Veronika Hubeňáková	62
Využitie GeoGebry pri riešení lineárnych optimalizačných úloh Štefan Gubo	66
Formulator Tarsia – jednoduchý program pro tvorbu matematických skládaček Veronika Havelková	70
Možnosti GeoGebry pri medzipredmetových vzťahoch matematiky a fyziky Ladislav Jaruska	74
Tvorba problémů jako motivační faktor i jako nástroj intelektového rozvoje dítěte Michaela Kaslová	81
Aplikačné úlohy zo stochastiky pre 8. ročník ZŠ Zuzana Kellnerová, Jaroslava Brincková	87
Využitie e-testov pri rozvíjaní schopnosti odhadu v školskej matematike Lilla Koreňová	91
Proces řešení slovních úloh žáky prvního stupně Michaela Králová	96
Výuka elementární matematiky pro posluchače s rozdílnými vstupními znalostmi na oboru Arts management na VŠE Ondřej Machek, Hana Scholleová	99
Výuka matematiky metodou CLIL – jak sladit jazykové a matematické cíle výuky Hana Moraová	103
Lineární rovnice (Analýza učebnic ZŠ) Anežka Nováková	107
Využití aplikačních úloh při zavádění soustav lineárních rovnic Tomáš Novotný	114
Uchopení matematických výukových prostředí dětmi předškolního věku (5–7 let) Jana Slezáková, Eva Šubrtová	120

Kombinované studium matematiky I	
– sonda do názorů studentů	
Dana Smetanová, Jana Vysoká	125
Tabulkový kalkulátor vo vyučovaní algebry na ZŠ	
Noémi Székelyová	131
Koncepce kombinatoriky s důrazem na problem-solving	
Pavel Šalom	135
K jednomu způsobu řešení slovních úloh o společné práci	
František Šíma	141
Sebehodnocení žáků (nejen) v hodinách matematiky	
Vladimír Škuta	156
Studentské reflexe výuky elementární matematiky metodou budování schémat	
Renáta Zemanová	161

Milí čtenáři, všichni, kteří se zajímáte o vyučování matematice,

skutečnost, že se stále scházíme na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky a že nacházíme stále nová a nová témata, která nás uchvacují, pálí, zajímají a někdy i děsí, jen dokazuje, že didaktika matematiky je dynamický obor, respektive že práci učitele matematiky či badatele v didaktice matematiky můžeme považovat za svým způsobem dobrodružnou. Vydejme se tedy na exkurzi do „krajiny didaktiky matematiky“ popsané v tomto sborníku.

Některé následující texty se nás snaží poučit, jiné nám nabízejí oporu pro přípravu hodin, plánů či pro vlastní reflexi, další nám pomáhají analyzovat a interpretovat nám více či méně známé situace. Každý text plní kromě role po/naučné i roli svým způsobem inspirativní, záleží na úhlu pohledu čtenáře. Může se tedy stát, že se na tentýž článek podíváte podruhé a může nás oslovit novým způsobem třeba i do té míry, že se k nám na následujících Dnech s didaktikou matematiky 2015, 2016, ... vrátíte a obohatíte nové sborníky i o vlastní náhledy.

Těšíme se na Vás.

Za programový a organizační výbor
Michaela Kaslová

ZVANÉ PŘEDNÁŠKY

Řešení a tvoření úloh (nejen v přípravě učitelů)

ALENA HOŠPESOVÁ, MARIE TICHÁ¹

Řešení slovních úloh patří v matematickém vzdělávání na základní škole k nejobtížnějším oblastem učiva. Někteří autoři (i naše vlastní výsledky) ukazují, že úspěšné řešení úloh můžeme podpořit tím, že řešitelé úlohy také tvoří. V příspěvku jsou připomenuty různé možnosti tvoření úloh (k danému výpočtu, se zadanými údaji nebo výsledkem, určené struktury) a jejich ilustrace pomocí úloh vytvořených studenty učitelství. Z výsledků našich šetření vyplývá, že tvoření úloh lze vnímat jako cíl vzdělávání, vzdělávací a diagnostický prostředek a také jako zdroj motivace.

Souvislost řešení a tvoření úloh

Řešení slovních úloh je jedna z nejobtížnějších partií učiva v základním matematickém vzdělávání. Např. (Rendl, Vondrová et al., 2013) označují řešení slovních úloh za kritické místo. Důvodů je řada. Jmenujme alespoň:

- není možné nacvičit se žáky algoritmus, který by „bezpečně“ vedl k vyřešení úlohy; řešení úloh spočívá v řadě rozhodnutí užít při řešení posloupnost metod, o které se domnívám, že povede k nalezení výsledku (Tichá, 1982),
- při řešení se zapojují složitější myšlenkové operace ve smyslu revidované Bloomovy taxonomie: hledání faktů – transformace – výpočty – ověření – transformace (Anderson & Krathwohl, 2001).

Proces řešení úloh byl popsán mnoha autory. V tabulce 1 ukažme alespoň dva z nich (Polya, 1957; Fridman, 1977).

Na celý proces řešení slovní úlohy se můžeme dívat jako na *rozhovor řešitele s úlohou* (Jak začít? Jak pokračovat z dosaženého stavu?) (Tichá, 1982). Svá rozhodnutí řešitel modifikuje na základě informací od úlohy a konfrontace s cílem (otázkou úlohy). Střídá se řešení úlohy a tvoření otázek, resp. úloh. Řešení úloh

¹Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, hospes@pf.jcu.cz; Matematický ústav AV ČR, v.v.i, ticha@math.cas.cz

G. Polya	L. M. Fridman
– uchopení úlohy	– analýza úlohy
– stanovení strategie	– hledání plánu řešení
– realizace strategie	– uskutečnění nalezeného plánu
– interpretace řešení	– kontrola a posouzení celé činnosti při řešení úlohy

Tab. 1

a tvoření úloh jsou tak činnosti vzájemně propojené. Závěrem řady uskutečněných výzkumů je, že úspěšné řešení úloh můžeme podpořit tím, že *řešitelé úlohy také tvoří* (Tichá & Hošpesová, 2010).

Ve školním vyučování často učitel žákovi poskytuje podporu při řešení úlohy, např. tím, že úlohu přeformulovává, tvoří její jednodušší variantu, formuluje otázky „vedlejších“ úloh (Dopočítejte si ...).

V našem předchozím výzkumu jsme realizovaly řadu studií, kdy žáci a studenti tvořili úlohy, např.:

- k danému výpočtu,
- se zadanými údaji, např. se zadaným výsledkem (Tichá & Hošpesová, 2011),
- určené struktury apod.

Většinou jsme se zaměřovaly na tvoření úloh v prostředí zlomků. Jednak považujeme vztah celku a části za jeden z nejdůležitějších, jednak se v prostředí zlomků často projeví ne zcela správné představy o některých pojmech. Představy a znalosti jsou často formální, to znamená, že je studenti (ani učitelé) nejsou schopni ani aplikovat (v řešení matematických i „nematematických“ úloh), ani dále rozvíjet a prohlubovat (např. zjednodušená představa o aritmetické operaci, formální představy o zlomcích) (Hošpesová & Tichá, 2009; Tichá & Hošpesová, 2013 a).

Dlouhodobě se zabýváme zařazováním tvoření úloh do přípravy budoucích učitelů. Ukazuje se, že tvoření úloh není jen cílem a prostředkem vzdělávání učitelů. Je to také prostředek diagnostický a zdroj motivace (podrobněji v (Tichá & Hošpesová, 2010, 2013 a)). Ilustrujme toto tvrzení na několika ukázkách z našeho dosavadního výzkumu.

Tvoření úloh, které lze vypočítat daným výpočtem

S budoucími učiteli prvního stupně základního vzdělávání jsme tvořily úlohy k zadanému výpočtu. Zadalý jsme jim následující sekvenci úkolů:

- tvoření úloh, které lze vypočítat výpočtem $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$,
- řešení vytvořených úloh a individuální reflexe/hodnocení (obojí tvůrcem úlohy i jinými studenty),
- společná reflexe/hodnocení vytvořených úloh.

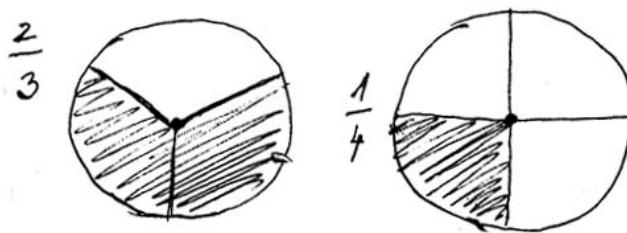
Na závěr jsme se studentů zeptaly, jak hodnotí zařazení tvoření úloh do přípravy učitelů.

Ve vytvořených úlohách i jejich následné reflexi se objevily signály, že studenti mají některé nepřesné představy. Pro ilustraci uveďme tři úlohy jedné ze studentek:

1. Na stole ležely $\frac{2}{3}$ koláče. Dušan snědl $\frac{1}{4}$ ze $\frac{2}{3}$ koláče. Kolik koláče zbylo?
2. Na stole ležely $\frac{2}{3}$ kg mandarinek. Veronika snědla $\frac{1}{4}$ kg. Kolik mandarinek zbylo?
3. Sklenice byla ze $\frac{2}{3}$ plná. Gabriel vypil $\frac{1}{4}$. Z kolika byla sklenice plná?

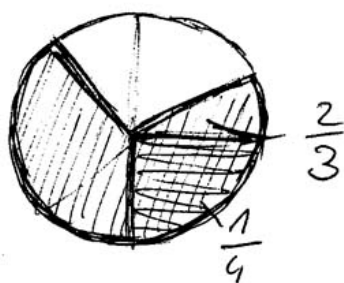
Nedostatky v porozumění násobení zlomků byly ještě výraznější v následné reflexi, kterou prováděli jiní studenti v semináři. Podrobně jsme o tomto šetření informovaly v roce 2009 na konferenci Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let (Tichá & Hošpesová, 2010). Připomeňme dvě „varující“ hodnocení vytvořených úloh:

Jeden ze studentů napsal k první úloze: „Jestliže máme $\frac{2}{3}$ koláče, můžeme sníst $\frac{1}{4}$, ale jmenovatel se nám neshoduje. Kdyby snědl $\frac{1}{3}$ ze $\frac{2}{3}$ to ano. Prakticky by to udělat šlo, ale matematicky to správně není.“ Toto vyjádření student doplnil obrázkem (obr. 1) a úlohou, o které byl přesvědčen, že je dobře: „Dnes máme ve třídě A $\frac{1}{4}$ žáků z celkového počtu, ve třídě B $\frac{2}{3}$ z celkového počtu. Pokud počet přítomných žáků obou tříd vynásobíme, jaký výsledek dostaneme?“



Obr. 1

Další student hodnotil 1. úlohu následovně: „David snědl $\frac{1}{4}$ ze $\frac{2}{3}$ koláče = $= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ koláče. Úloha je správně.“ To vypadalo nadějně. Své řešení ale doplnil obrázkem 2 a ten odhalil závažné nepochopení.

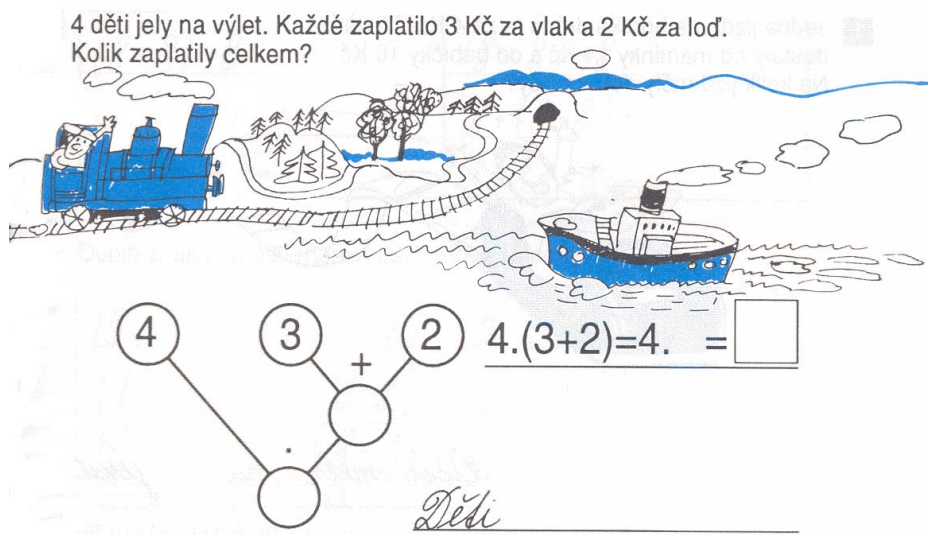


Obr. 2

Tvoření úloh dané struktury

Podle Mareše (2013) by měla úloha, model problémové situace fixovaný v jistém jazyce, vykazovat určité charakteristiky: strukturu, způsob jazykového vyjádření, logickou správnost, stupeň určenosti, míru zobecnění a úplnosti. Ten, kdo tvoří úlohy, by měl tyto charakteristiky mít na mysli. Z toho důvodu jsme začaly zařazovat do přípravy učitelů tvoření úloh dané struktury. Domníváme se, že tato aktivita pomůže (budoucímu) učiteli (a) odstranit stereotyp vytvářených úloh (uvědomí si stavbu úloh a potřebnou pestrost), (b) získat při řešení úlohy vhled do struktury a (c) přestat vnímat jen posloupnost výpočtů, které vedou k získání výsledku.

Pro *zviditelnění* struktury úloh jsme použily schémata podobná větveným řetězcům, které byly používány v učebnicích Kabinetu pro didaktiku matematiky MÚ AV ČR (Kittler & Kuřina, 1994, např. úloha ze str. 71 na obr. 3) zpracovaných na základě dlouhodobého výzkumu a spolupráce s učiteli experimentálních škol (Tichá, 2013). Kittler větvené řetězce charakterizoval jednak jako grafické znázornění postupu řešení, ale také jako model struktury úlohy v jazyku řetězců.



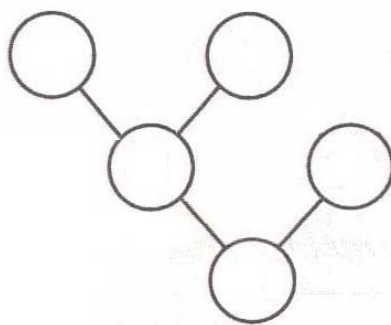
Obr. 3

Šetření realizujeme dlouhodobě. Při rozborech úloh vytvořených respondenty se zamýšlíme také nad tím, zda a jak tvůrci a řešitelé úloh uvažují o struktuře slovních úloh:

- zda „vidí“ grafická schémata jako znázornění struktury úlohy nebo procesu jejího řešení,
- jaké jsou překážky při tvoření úloh s danou strukturou,
- jak je možné rozvíjet schopnost vědomě a záměrně pracovat se strukturou.

Naznačíme jednu sérii zadaných úkolů. (Podrobněji jsme o zadávaných úkolech mluvily také na podzim 2013 na konferenci Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let, Tichá & Hošpesová, 2013 b).

Úkol 1: Studentů (a také učitelů v praxi) jsme se zeptaly: „Co vám připomíná tento obrázek (schéma na obr. 4)? Použili jste něco podobného ve vyučování? A k čemu? A jak byste ho nazvali?“ Poté jsme zadaly úkol: Sestavte úlohu (historku, příběh) k tomuto schématu, (větvenému řetězci, modelu, reprezentaci ...)



Obr. 4

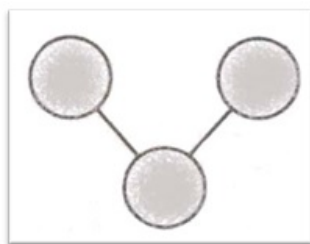
Studenti vytvořili například následující úlohy:

4. Matyáš dostává do školy kapesné od maminky a tatínka. Od maminky vždy dostane 20 Kč a od tatínka 30 Kč. Kolik celkem korun dostal Matyáš v jednom týdnu, pokud nebylo žádné volno?
5. Matyáš si koupil autíčko za 450 Kč. Na autíčko si šetřil ze svého kapesného 15 dní. Kolik korun mu musela maminka doplatit, pokud jeho kapesné je 15 Kč na den?
6. Veverka za zimu spotřebuje 50 lískových ořechů, myši stačí 35. Babička spotřebuje do rohlíčků dvakrát tolik, co veverka a myš dohromady. Kolik oříšků spotřebuje babička?

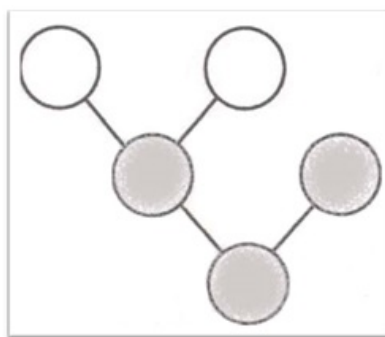
Poslední úlohu uvádíme pro pobavení, úlohy 4 a 5 ale opět vykazují nepřesnosti ve vyjádření i neschopnost popsat pravděpodobnou situaci, vytvořit „pěknou“ úlohu.

Následoval Úkol 2:

- Vytvořte úlohu k obr. 5.
- Poté jeden ze zadaných údajů nahraďte jednoduchou úlohou (např. jako na obr. 6), aby vznikla úloha, k jejímuž vyřešení stačí dva výkony.
- Najděte jiné možnosti „rozšíření“ obr. 5.



Obr. 5



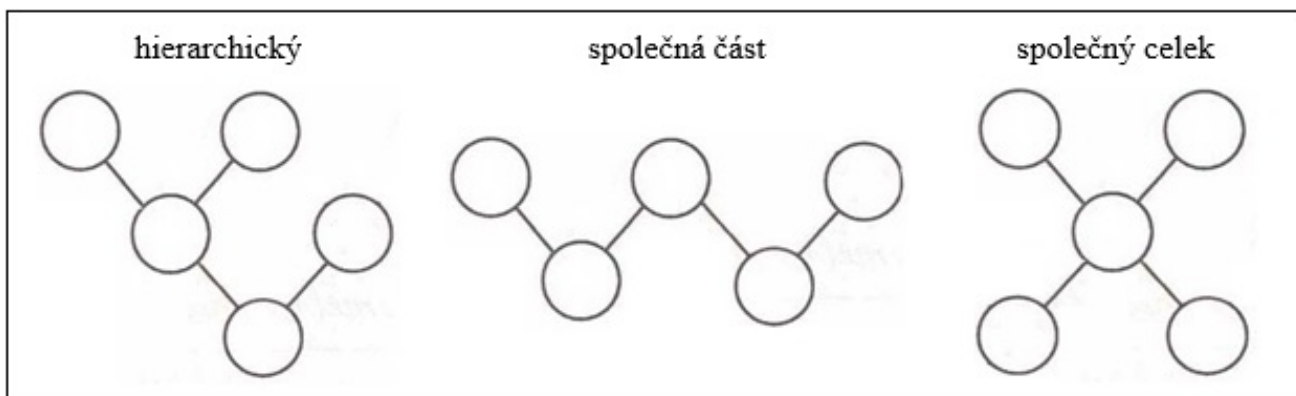
Obr. 6

K obr. 5 vytvořili studenti úlohu: Koupím 4 koláče po 7 Kč. Kolik za ně zaplatím? Následovala společná reflexe vytvořených úloh, ve které měli, např. posoudit a odůvodnit (Proč ano?, Proč ne?), zda obr. 6 odpovídají úlohy, resp. situace:

7. Koupím 1 koláč makový a 3 povidlové. Každý koláč stojí 7 Kč. Kolik zaplatím?
8. Koupím 4 koláče po 7 Kč. Platím dvacetikorunou a dvěma dvoukorunami.

V další fázi jsme studenty seznámily s přístupem popsaným v (Nesher, Herskovitz, 1994). Autorky vytvořily tři možná uspořádání dvou jednoduchých schémat a ve svém výzkumu použily pro reprezentaci úloh se dvěma operacemi následující tři „diagramy pro schémata“ (diagram for schemas) (obr. 7):

Na závěr byl studentům zadán Úkol 3: Vytvořit ke každému z uvedených tří „diagramů pro schémata“ slovní úlohu a požádaly jsme je, aby napsali, jak hodnotí práci se schématy (jednoduchými grafickými znázorněními).



Obr. 7

Výše popsany výzkum je v současnosti na svém počátku. Zpracováváme data a získáváme další.

Co si respondenti myslí o zařazování činností spojených s tvořením úloh

Na otázku, zda pro ně znamenalo tvoření úloh přínos, odpovídali studenti většinou pozitivně. Např. „Určitě důležitější je tvoření úloh. Naučím se tvořit úlohy tak, že kombinuji, přetvářím, zkouším, dosazuji. Říkám si, na co musím dát pozor, s čím mohou mít žáci potíže a podobně, ... při řešení se nad zadáním jen krátce zamyslím a snadněji mi mohou uniknout obohacující poznatky.“ Je ovšem otázkou, zda studenti vyjadřovali opravdu své přesvědčení.

Jak vidíme přínos zařazování tvoření úloh do přípravy učitelů?

Přínos tvoření úloh shrnujeme do několika bodů:

- Změna klimatu: tvoření úloh motivuje a povzbuzuje studenty, zlepšuje jejich přístup a přesvědčení, sebedůvěru, ...
- Změna charakteru úloh:
 - od jednoduchých, snadno řešitelných úloh „učebnicového“ typu, které byly nezajímavé (kontext i matematika), chybně formulované;
 - k úlohám, které jsou výzvou pro žáky, nejsou běžné; mají pestré zadání (grafy, tabulky, ...); umožňují různé metody řešení, přístupy; vyžadují vysvětlení, další úvahy (otevřené úlohy).
- Hlubší porozumění a vhled do obsahu školní matematiky.

Tvoření úloh se nám v současnosti jeví jako metoda, která respektuje konstruktivistické přístupy a podporuje badatelsky orientované aktivity v přípravě učitelů.

Pozn.: Výzkum byl uskutečněn s částečnou podporou projektu GA ČR 14-01417S *Zkvalitňování znalostí matematického obsahu u budoucích učitelů 1. stupně* a RVO 67985840.

Literatura

- [1] ANDERSON, L. W., KRATHWOHL, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Complete ed. New York: Longman, 352 s.
- [2] KITTLER, J., KUŘINA, F. (1994). *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Praha: MÚ AV ČR.
- [3] MAREŠ, J. (2013). *Pedagogická psychologie*. Vyd. 1. Praha: Portál, 702 s.
- [4] NESHER, P., HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics* (1–23). vol. 26, issue 1. DOI: 10.1007/BF01273298.
- [5] RENDL, M., VONDROVÁ, N., HŘÍBKOVÁ, L., JIROTKOVÁ, D., KLOBOUČKOVÁ, J., KVASZ, L., PÁCHOVÁ, A., PAVELKOVÁ, I., SMETÁČKOVÁ, I., TAUCHMANOVÁ, E., J. ŽALSKÁ. (2013) *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: UK v Praze, PedF, 360 s.
- [6] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. (2013 a). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics* (133–143). vol. 83, issue 1. DOI: 10.1007/s10649-012-9455-1.
- [7] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. (2011). Gramotnost učitele matematiky a tvoření úloh. In A. Hošpesová, et al. *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (39–56). Vyd. 1. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta.
- [8] HOŠPESOVÁ, A., TICHÁ, M. (2009). Rozvíjení didaktických znalostí obsahu matematického vzdělávání v přípravě učitelů 1. stupně. In T. Janík, et al. *Možnosti rozvíjení didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů* (119–128). Brno: Paido.
- [9] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. (2013 b). Tvoření úloh dané struktury. In E. Fuchs (ed.) *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let, sborník příspěvků celostátní konference*. Praha: JČMF a SUMA, 2014, 288–300.

- [10] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. (2010). Tvoření úloh jako cesta k matematické gramotnosti. In N. Stehlíková (Eds.), *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let. Sborník příspěvků celostátní konference* (133–145). Plzeň: Vydavatelský servis.
- [11] TICHÁ, M. (1982). *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na základní škole*. Praha: Kandidátská disertační práce. Matematický ústav ČSAV Praha.
- [12] TICHÁ, M. (2013). Modernizace vyučování matematice v letech 1965–1985. *Orbis scholae* (119–130). roč. 7, č. 1.
- [13] FRIDMAN, L. M. (1977). *Logiko-psychologičeskij analiz školnych učebnych zadač*. Moskva: Pedagogika.
- [14] POLYA, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press.

PRACOVNÍ DÍLNY

Veria ľudia dôkazom?

ANINO BELAN¹

Článok sa zaoberá vnímaním matematických dôkazov ako kritéria pravdivosti. Respondentom prieskumu sme predložili desať rôznych matematických dôkazov, z ktorých niektoré boli správne a niektoré nie. Tieto dôkazy samy o sebe predstavujú zaujímavý námet na diskusiu so žiakmi. Následne sme na odpovediach, ktoré sme získali, skúmali, či sú ľudia schopní uveriť správne dôkazu a odmietnuť nesprávny, či sú v prípade nesprávneho dôkazu schopní správne určiť, kde je v ňom chyba a ktoré typy dôkazov robia ľuďom najväčšie problémy.

V prípade hádok a diskusii v bežnej konverzácii sa ľudia často dožadujú dôkazov. Je to spôsobené tým, že dôkaz ako taký má už od antického Grécka istú autoritu. V prípade demokratického štátneho zriadenia, ktoré sa v antickom Grécku objavuje, bolo totiž nutné svoje názory obhájiť a metóda dokazovania sa vyvinula ako dôsledok tejto potreby.

Umenie dokazovať sa vyvíjalo v dvoch paralelných líniách. Jednou je logika. Najvýznamnejšou osobnosťou antiky v tejto oblasti bol Aristoteles – spomeňme napríklad jeho spis (Aristoteles, 1961). Druhou vetvou je matematika. Za všetkých slávnych matematikov staroveku spomeňme Euklida, ktorý vo svojich Základoch (Eukleides, 2008) prvýkrát použil spôsob dokazovania z axióm.

Žiaci sa s logikou a matematickými dôkazmi stretnú na matematike v prvých ročníkoch stredných škôl a s logikou sa opätovne ale väčšinou len okrajovo stretnú v štvrtom ročníku na náuke o spoločnosti. V našom výskume sme sa rozhodli zistiť, aké stopy na žiakoch tieto stretnutia zanechali. Prieskum sme robili formou dotazníku, v ktorom sme respondentom predviedli 10 dôkazov z rôznych oblastí matematiky: 3 z logiky, 3 z aritmetiky, 1 z geometrie, 2 z pravdepodobnosti a štatistiky a 1 z matematickej analýzy. Respondenti mali určiť, či sú dôkazy správne a v prípade, že nie sú, popísať, kde je v nich chyba. Museli sa potýkať s týmito dôkazmi:

¹Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium, Teplická 7, Bratislava, anino@smnd.sk

Tvrdenie 1: Existujú mimozemšťania.

Dôkaz: Všetkých mimozemšťanov si rozdelíme na dve skupiny – na existujúcich mimozemšťanov a na neexistujúcich mimozemšťanov. Tými neexistujúcimi sa nebudeme zaoberať, lebo sú pre nás nezaujímaví. Budeme teda dokazovať, že existujú tí existujúci mimozemšťania. Ale existujúci mimozemšťania nemôžu neexistovať, pretože by došlo k logickému sporu. Takže existujúci mimozemšťania existujú a teda mimozemšťania existujú.²

Tvrdenie 2: Ak vieme, že o Dlhom, Širokom a Bystrozrakom platia tieto tri vety:

- Ak nie je doma Dlhý, tak je doma Široký.
- Ak je doma Bystrozraký, tak nie je doma Široký.
- Ak nie je doma Bystrozraký, tak je doma Dlhý.

Tak je zaručené, že Dlhý bude doma.³

Dôkaz: Aká by bola situácia, keby Dlhý doma nebol? Podľa prvej vety vieme, že tým pádom musí byť doma Široký. Keďže je Široký doma, tak podľa druhej vety vieme, že Bystrozraký byť doma nemôže. A keďže Bystrozraký doma nie je, tak podľa tretej vety je Dlhý doma. Ukázali sme, že ak Dlhý nie je doma, tak je Dlhý doma. Takže Dlhý musí byť doma.

Tvrdenie 3: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99 = 1\,000$, teda súčet všetkých nepárnych čísel od 1 do 99 je tisíc.

Dôkaz: Pre súčet nepárnych čísel od 1 do n platí vzťah

$$1 + 3 + 5 + \dots + n = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + 2\right)$$

V prípade, že za n dosadíme 99, dostaneme $1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 34 \cdot 35 = 1\,000$.

Tvrdenie 4: Máme test, ktorý vie zistiť, či má niekto AIDS. V prípade, že má niekto AIDS, test vyjde zaručene pozitívne. V prípade, že niekto AIDS nemá, je pravdepodobnosť 0,04 %, že test tiež vyjde pozitívne. Predpokladajme, že na Slovensku je 5 miliónov obyvateľov a 50 z nich má AIDS. Ak sa niekto na Slovensku podrobí zmienenému testu a ten vyjde pozitívne, tak pravdepodobnosť, že naozaj AIDS má, je menej ako 3 %.

Dôkaz: Koľkým ľuďom na Slovensku vyjde test pozitívne? V prvom rade tým päťdesiatim, ktorí ho majú. Zvyšných obyvateľov je 4 999 950 a z nich vyjde pozitívny test 0,04 %, čiže 2 000 ľuďom. Dokopy teda vyšiel test pozitívne 2 050 ľuďom, pričom

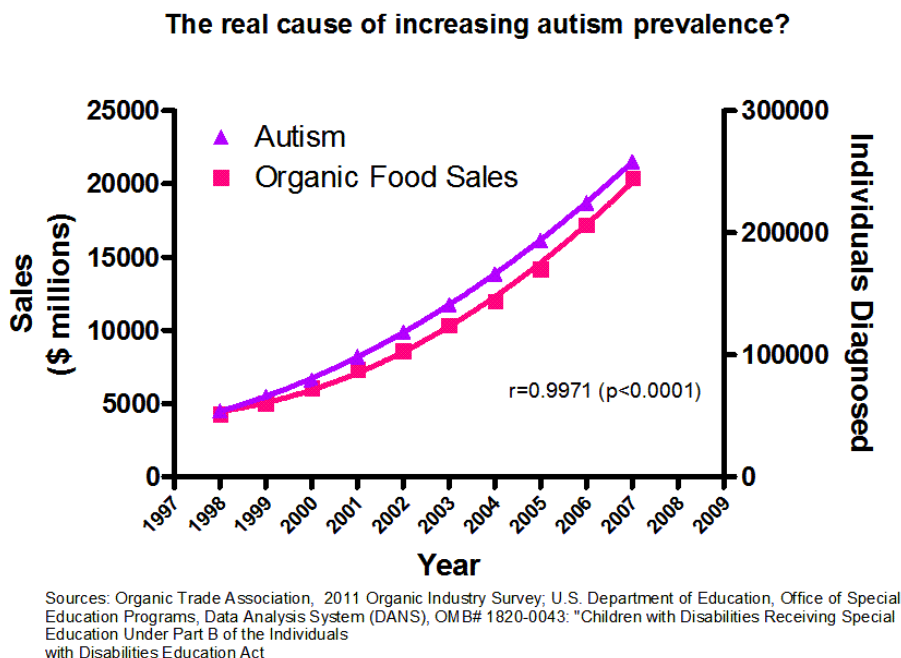
²Dôkaz je parafrázou na Descartov dôkaz Božej existencie a je prevzatý z (Smullyan, 1986)

³Úloha pochádza z knihy (Sochor, 2011)

AIDS má len 50 z nich. Pravdepodobnosť, že človek AIDS naozaj má, je teda $50 : 2\,050 = 2,44\%$.

Tvrdenie 5: Autizmus je spôsobený zvýšenou spotrebou biopotravín.

Dôkaz: Korelácia medzi počtom ľudí s diagnostikovaným autizmom a predajom biopotravín je extrémne vysoká ($r = 0,9971$) Vid' graf na obr. 1.



Obr. 1: Autizmus a biopotraviny.

Tvrdenie 6: Všetky nepárne čísla väčšie ako 1 sú deliteľné presne dvomi inými prirodzenými číslami.

Dôkaz: Vyskúšajme. Vezmime si číslo 3. Ako delitele do úvahy pripadajú čísla 1, 2 alebo 3.

$$3 : 1 = 3$$

$$3 : 2 = 1,5$$

$$3 : 3 = 1$$

Celé číslo sme dostali v prvom a treťom prípade, takže to funguje. Vezmime si číslo 5. Ako delitele do úvahy pripadajú čísla 1, 2, 3, 4 alebo 5:

$$5 : 1 = 5$$

$$5 : 2 = 2,5$$

$$5 : 3 = 1,666\,666$$

$$5 : 4 = 1,25$$

$$5 : 5 = 1$$

Celé číslo sme dostali iba v prvom a poslednom prípade, takže tvrdenie opäť platí. Vyskúšajme to ešte aj pre 7. Skúsime vydeliť všetkými číslami od 1 do 7:

$$7 : 1 = 7$$

$$7 : 2 = 3,5$$

$$7 : 3 = 2,333\ 333$$

$$7 : 4 = 1,75$$

$$7 : 5 = 1,4$$

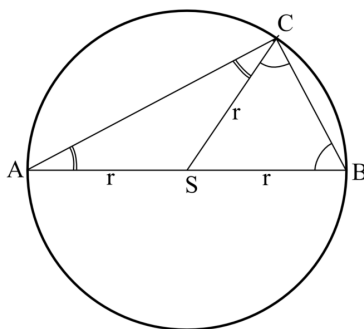
$$7 : 6 = 1,166\ 666$$

$$7 : 7 = 1$$

Opäť sme celé číslo dostali iba v dvoch prípadoch. Platnosť tvrdenia sme overili až na troch rôznych číslach, takže tvrdenie platí.

Tvrdenie 7: Keď si narysujeme kružnicu a nejaký jej priemer AB a okrem toho si na tej kružnici zvolíme bod C , pričom ten bod nesmie byť rovnaký ako bod A ani ako bod B , tak uhol ACB bude vždy 90 stupňov, bez ohľadu na to, kde sme si bod C zvolili.

Dôkaz: Stred kružnice si spojíme so všetkými tromi bodmi A, B, C . Dostaneme tak veľký trojuholník ABC a dva malé trojuholníky ASC a BSC , z ktorých sa ten veľký skladá (viď obr. 2).



Obr. 2: Ilustrácia k dôkazu č. 7.

Obidva malé trojuholníky sú zaručene rovnoramenné, pretože každý z nich má ako dve zo svojich strán polomery kružnice. A rovnoramenné trojuholníky majú uhly pri ramenách rovnaké. Rovnaké uhly vidíte vyznačené na obrázku.

Súčet uhlov v trojuholníku je vždy 180 stupňov. Pozrime sa teda na trojuholník ABC . Súčet jeho uhlov sú dva jednočiarkované uhly a dva dvojčiarkované uhly. Tie musia dať dohromady 180 stupňov. Takže jeden jednočiarkovaný uhol a jeden dvojčiarkovaný uhol musia dávať dohromady 90 stupňov. A jeden jednočiarkovaný a jeden dvojčiarkovaný uhol tvoria dohromady presne uhol ACB .

Tvrdenie 8: Ak označíme dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka a, b a dĺžku jeho prepony c , tak platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Dôkaz: Predpokladajme, že sa výrazy $a^2 + b^2$ a c^2 nerovnajú. Ich rozdiel označme d a platí

$$a^2 + b^2 = c^2 - d.$$

Obe strany rovnosti vynásobíme výrazom $(a^2 + b^2) - c^2$ a dostaneme

$$(a^2 + b^2)((a^2 + b^2) - c^2) = (c^2 - d)((a^2 + b^2) - c^2).$$

Na oboch stranách roznásobíme zátvorky:

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)c^2 = c^2(a^2 + b^2) - (c^2)^2 - d(a^2 + b^2) + dc^2.$$

K obom stranám pripočítame výraz $d(a^2 + b^2)$ a dostaneme

$$(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)c^2 + d(a^2 + b^2) = c^2(a^2 + b^2) - (c^2)^2 + dc^2.$$

Vľavo vyjmeme pred zátvorku $(a^2 + b^2)$ a vpravo vyjmeme pred zátvorku c^2 . Dostaneme

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - c^2 + d) = c^2(a^2 + b^2 - c^2 + d).$$

Obe strany vydelíme výrazom $a^2 + b^2 - c^2 + d$ a dostaneme

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tvrdenie teda platí.

Tvrdenie 9: Chlieb s klobásou je lepší, ako večná blaženosť.

Dôkaz: Čo je lepšie, ako večná blaženosť? Nič. A chlieb s klobásou je lepší ako nič.⁴

Tvrdenie 10: $0,999\,999\,9\dots = 1$ (Po slovensky: „nula celá deväť periodických – teda deviatky v desatinnom zápise až do nekonečna – je iný zápis čísla 1“).

Dôkaz: Nekonečný geometrický rad s kvocientom z intervalu $(-1, 1)$ môžeme sčítat podľa vzťahu

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots = \frac{a}{(1 - q)}.$$

Číslo $0,999\,999\,9\dots$ znamená, že máme zobrať deväť desatín, deväť stotín, deväť tisícín atď. Teda

$$\begin{aligned} 0,999\,999\dots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \frac{9}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \dots = \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{100} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1\,000} + \dots \end{aligned}$$

⁴Úloha opäť pochádza z knihy (Smullyan, 1986)

To je geometrická postupnosť s prvým členom $\frac{9}{10}$ a kvocientom $\frac{1}{10}$ a podľa uvedeného vzťahu je jej súčet $\frac{9}{10} : (1 - \frac{1}{10}) = \frac{9}{10} : \frac{9}{10} = 1$ Takže $0,999\ 999... = 1$.

Nášho prieskumu sa zúčastnilo 354 respondentov. Správne odpovede, úspešnosť a percentuálne zastúpenie jednotlivých typov odpovedí nájdete v tabuľke 1. Tabuľka je zoradená od dôkazov, ktoré odhadlo najviac ľudí správne po dôkazy, ktoré boli najtvrdšími orieškami.

V tabuľke 1 je možno nájsť niekoľko zaujímavých pozorovaní. V prvom rade sme boli zvedaví, ako dopadnú tvrdenia 4 a 10, o ktorých vieme, že sú pre človeka, ktorý sa hlbšie nevenuje matematike, prekvapujúce. (Např. tvrdenie č. 4 je známe aj ako „false positive paradox.“) Ukázalo sa, že prítomnosť správneho matematického dôkazu nie je úplne dostatočná protiváha faktoru, že tvrdenia sú kontraintuitívne a približne tretina respondentov ich ako pravdivé odmietla uznať.

Dôkaz	Správne	Dôkaz je úplne správny	Dôkaz sa mi zdá byť správny	To je ťažká matematika	Dôkaz je asi zle	Dôkaz je zle (bez udania dôvodu)	Dôkaz je zle (nesprávny dôvod)	Dôkaz je zle (správny dôvod)	Správne odhadlo
5. Korelácia	Nie	4,73%	2,21%	3,15%	11,99%	10,09%	17,67%	50,16%	89,91%
6. Inžinierska indukcia	Nie	5,97%	2,20%	3,14%	3,77%	8,49%	0,31%	76,10%	88,68%
7. Tálesova veta	Áno	82,08%	5,66%	5,97%	3,77%	2,52%			87,74%
1. Mimoszemšťania	Nie	9,91%	5,11%		8,41%	9,01%	36,34%	31,23%	84,98%
9. Večná blaženosť	Nie	13,78%	3,21%		9,62%	8,65%	16,67%	48,08%	83,01%
3. Súčet radu	Nie	6,67%	2,86%	8,89%	9,84%	6,03%	0,00%	65,71%	81,59%
8. Pytagorova veta	Nie	11,29%	7,42%	12,58%	10,65%	5,48%	11,29%	41,29%	68,71%
10. $0,9999... = 1$	Áno	54,29%	13,65%	9,52%	10,79%	11,75%			67,94%
4. AIDS	Áno	51,10%	15,36%	3,45%	9,72%	20,38%			66,46%
2. Dlhý a spol	Áno	46,18%	7,03%		12,54%	34,25%			53,21%

Tab. 1: Výsledky

Istý vplyv je treba pripísať aj vplyvu toho, že tvrdenia, o ktorých sa ľudia v škole učili ako o pravdivých, sú automaticky pokladané za správne dokázané. Preto sa pravdepodobne Tálesova veta umiestnila najvyššie spomedzi pravdivých tvrdení a Pythagorova veta s jej nesprávnym dôkazom sa zase umiestnila najnižšie medzi nesprávnymi dôkazmi.

Veľmi nás prekvapilo umiestnenie dôkazu o súčte nepárnych čísel od 1 do 99. Pokladali sme ho za úplne zjavnú demagógiu – vzťah nefunguje a dá sa to ľahko overiť pre malé n . Okrem toho $34 \cdot 35$ rozhodne nie je 1 000. Napriek tomu obsadil

tento „dôkaz“ šieste miesto a takmer 20 % respondentov neprišlo na to, že ide o podvod.

Za úplne najväčšie prekvapenie považujeme to, ako dopadli logické úlohy. Jednak sme vôbec nečakali, že dôkaz sporom z úlohy č. 2 bude za pravdivý považovať len niečo vyššie polovice respondentov. Okrem toho nás prekvapilo, že dôkaz s mimozemšťanmi síce pokladalo za nesprávny približne 85 % respondentov, ale iba asi 31 % respondentov bolo schopných správne zdôvodniť, kde je v dôkaze chyba. To je úplne najmenšie percento spomedzi všetkých nesprávnych dôkazov.

Na druhú stranu vzbudzuje mierny optimizmus, že každý dôkaz správne odhadla viac ako polovica respondentov, ktorí sa mu venovali. Niektoré komentáre nás potešili a príjemne prekvapili. Napríklad komentár k Tálesovej vete: „Krásny dôkaz, nikdy mňa nenapadlo nad Thaletovou kružnicou takto uvažovať.“ Takéto komentáre sú presne dôvodom, prečo matematiku učíme.

Komentáre k jednotlivým dôkazom, ktoré sme počas výskumu nazbierali, tvoria pomerne rozsiahly a pestrý materiál a pravdepodobne sa k ich rozboru vrátíme v niektorom ďalšom článku. Takýto rozbor, ktorý by obsahoval analýzu bežných chýb, by mohol byť užitočný pre pedagógov, ktorí danú oblasť vyučujú.

Komentáre k jednotlivým dôkazom a „správne riešenia“ testu nájdete na linke: <https://docs.google.com/document/d/14L2QufZEhHWADYgJ6vInn19aQCIo0Z1I pOHAW4kdkJ8>

Literatura

- [1] ARISTOTELES. (1961). *První analytiky*. Praha: ČSAV.
- [2] EUKLEIDES. (2008). *Základy I–IV*. Nymburk: OPS.
- [3] SMULLYAN, R. M. (1986). *Jak se jmenuje tahle knížka?* Praha: Mladá fronta.
- [4] SOCHOR, A. (2011). *Logika pro všechny ochotné myslet*. Praha: Karolinum.

Hry vo vyučovaní matematiky

MÁRIA BENIAČIKOVÁ, ALŽBETA BRIŠOVÁ, MIRIAM DUBOVSKÁ,
DANIELA GUFFOVÁ, MICHAELA CHVOJKOVÁ, ELENA MURINOVÁ¹

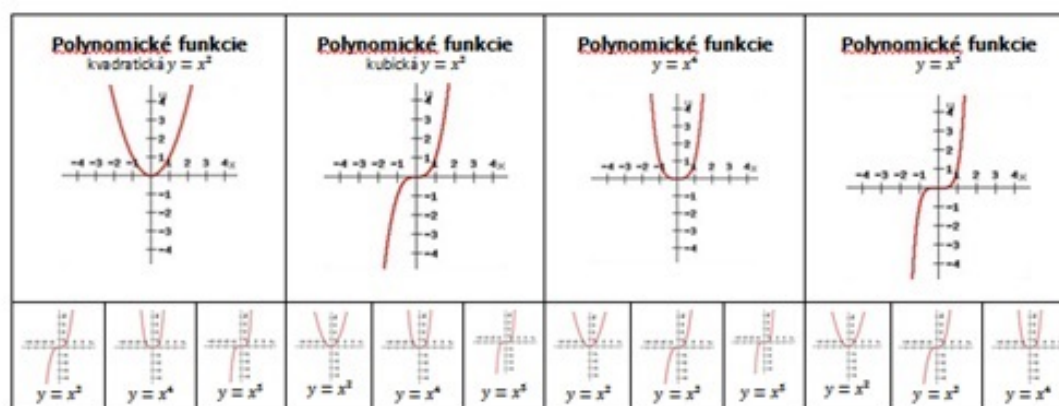
Existuje množstvo hier, ktoré sú využiteľné vo vyučovaní matematiky. Je dostupných niekoľko publikácií, venovaných rôznym typom matematických hier s kockami, kartami, papierom a ceruzkou. My sa venujeme využitiu moderných spoločenských stolových hier. Mnohé z nich priamo nabádajú k využitiu v hodinách matematiky. Pri iných stačí kreatívna úprava pravidiel, ďalšie slúžia ako inšpirácia na tvorbu podobnej hry s matematickým obsahom. Niekoľko nápadov uvádzame.

Najprv ponúkame hry, ktoré sme na základe známych spoločenských hier upravili tak, aby boli využiteľné vo vyučovaní matematiky.

Matematické kvarteto

Klasická detská hra *Kvarteto* pozostáva z 32 kariet, je určená pre 3–6 hráčov. Vo verzii, ktorú sme vytvorili pre študentov stredných škôl, sú karty rozdelené do ôsmich skupín tak, aby každú štvoricu (kvarteto) spájala jednotná téma. Na každej karte sú znázornené aj ostatné karty z kvarteta. Za každé získané kvarteto má hráč 1 bod.

Hru je možné modifikovať pre študentov všetkých stupňov škôl (v závislosti od zvolených tém). Ďalšou možnosťou je ponúknuť výrobu tejto hry samotným študentom. Hra slúži na precvičovanie matematických pojmov a vlastností matematických objektov, rozvoj krátkodobej pamäti, pozornosti, strategického myslenia.



Obr. 1: Príklad jedného kvarteta z našej úpravy hry.

¹Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici,
maria.beniackikova@umb.sk, alzbeta.brisova@umb.sk, miriam.dubovska@umb.sk, daniela.guffova@umb.sk,
michaela.chvojkova@umb.sk, elena.murinova@umb.sk

Matematické človeče, nehnevaj sa!

Pravidlá sú podobné ako pri klasickej hre *Človeče, nehnevaj sa!*, hádže sa kockou, koľko bodov hráč hodí, o toľko políčok sa posunie. Hrá sa na upravenom hracom pláne. Keď hráč zastane na vyfarbenom políčku, musí vyriešiť zadanú úlohu. Úlohu rieši hráč, ktorý stojí na políčku, ostatní nemôžu pomáhať. Pri riešení môže požiadať o pomoc učiteľa, ale za každú pomoc sa musí posunúť o 2 políčka späť. Ak úlohu nevyrieši, získa jeho počet bodov na posunutie súper po pravej strane. Ak úlohu vyrieši správne, môže hádzať ešte raz. Vyhráva ten hráč, ktorý sa ako prvý dostane do domčeka, prípadne ten hráč, ktorý prejde najväčšiu vzdialenosť od štartu. Ak sa hráč dostane na políčko, ktoré je už obsadené iným hráčom, dostanú títo dvaja hráči rozstrelovú otázku. Kto správne odpovie ako prvý, zostáva na políčku. Druhý hráč sa vracia na štart. Ak hráč vyrušuje, alebo nerešpektuje pokyny, dostane trestné body – musí sa posunúť o 5 políčok späť (určuje učiteľ).

Cieľovou skupinou sú študenti strednej školy. Po prispôsobení otázok je možné hru hrať so žiakmi prvého i druhého stupňa základných škôl. Pomocou hry je možné precvičovať práve preberané učivo a rozvíjať logické myslenie.

Na hracej ploche môžu byť rozložené príklady typu:

- Vyrieš rovnicu $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 = 0$.
- Nájdí súradnice vrcholu grafu funkcie $f : y = -2x^2 + 2x - 24$.
- Vyrieš nerovnicu $x^2 - x - 2 > 0$.
- Načrtni graf funkcie $f : y = -2x^2 + 2x + 4$.
- Dievča hnalo husi na pašu. Jedna hus šla pred dvomi, jedna medzi dvomi a jedna za dvomi. Koľko husí dievča hnalo? Jedna tehla váži 1 kg a pol tehly. Koľko vážia dve tehly?
- Otec mal tri dcéry, každá z nich mala jedného brata. Koľko detí mal otec?
- Ktoré číslo je o tri väčšie, keď ho obrátíme hore nohami?

Rozstrelové otázky: Čo musíme vložiť medzi číslice 5 a 9, aby sme dostali číslo väčšie ako 5 a menšie ako 9? Koľko krát môžete odčítať číslo 2 od čísla 32? Koľko vajíčok môžeš vložiť do prázdneho košíka? Čo váži viac: kilo železa, alebo kilo peria?

K výrobe hry prispeli študentky Jana Kollárová a Katarína Krišková.

Násobkové človeče

Cieľom hry je precvičiť násobky čísel, zvolenú tému a dostať sa presne na políčko „CIEĽ“. V nultom kole každý z hráčov raz hodí kockou, komu padne najväčšie číslo, začína. Na začiatku hry hráč nemusí čakať, kým mu padne číslo 6, posunie

sa o toľko políčok, koľko bodov mu padlo na kocke. Ak hodí číslo 6, posunie sa o 6 políčok, nehádže ešte raz ako pri klasickom Človeče.

Na každom políčku hracieho plánu je napísané číslo, niektoré políčka sú vyfarbené zelenou farbou – ide o „prémiové“ políčka. Ak sa hráč dostane na políčko s násobkom čísla 7, hádže ešte raz a posunie sa späť o toľko políčok, koľko mu padlo na kocke. Ak hráč skočí na políčko s násobkom čísla 8, stojí jedno kolo. Ak sa hráč dostane na políčko s násobkom čísla 9, hádže ešte raz a posunie sa dopredu o toľko políčok, koľko bodov mu padlo na kocke. Ak hráč prejde na prémiové políčko, zoberie si kartičku s úlohou. Pokiaľ úlohu vyrieši správne, posunie sa o dve políčka dopredu. Ak nie, ostáva stáť na mieste. Ak sa hráč dostane na políčko deliteľné súčasne dvoma deliteľmi (spomedzi čísel 7, 8, 9), riadi sa pokynmi pre väčšieho deliteľa. Hráči sa navzájom nevyhadzujú, len si vymenia pozície. (Napríklad ak hráč 1 stojí na políčku 29 a hráč 2 na políčku 27, pričom hráč 2 hodí dvojku, hráči sa vymenia – hráč 1 pôjde na políčko 27 a hráč 2 na políčko 29.)

Hru je možné využiť na prvom, druhom stupni základných škôl, ako aj na strednej škole. Prémiové úlohy je možné meniť a prispôbiť tej oblasti matematiky, ktorú chceme so žiakmi precvičiť.

Matematické pexeso

Pri hraní tejto hry si deti zopakujú násobilku, trénuje sa ich strategické myslenie, pozornosť, pamäť.

Na stole sú kartičky s číslami 1–9 a hrací plán s tridsiatimi políčkami (tabuľka 6x5), pričom každé políčko obsahuje jeden zo súčinov ľubovoľných dvoch čísel od 1 po 9. Cieľom hry je ako prvý mať v riadku, stĺpci alebo na diagonále 4 svoje značky. Hru hrajú dvaja hráči, ktorí si určia poradie. Kartičky s číslami sú otočené tak, aby hráči tieto čísla nevideli. Prvý hráč otočí dve kartičky, vynásobí čísla, označí súčin svojou značkou (krížik/krúžok) na hracom pláne a obráti kartičky späť. Pokračuje druhý hráč a ďalej sa striedajú. (Ak už je niektoré políčko obsadené, nemôže byť znova označené).

Hru môžeme využiť na prvom aj druhom stupni základnej školy. Môžeme meniť počet kartičiek pexesa, prípadne početovú operáciu, a tak vytvoriť hru vhodnú na precvičenie práve preberaného učiva.

Matematické dobble

Dobble je hra obsahujúca 55 rôznych kariet, na každej karte je umiestnených 8 obrázkov (symbolov). Každé dve karty majú spoločný práve jeden symbol. Je veľa spôsobov ako hrať hru s týmito kartami. Vždy však ide o to, čo najrýchlejšie nájsť na dvoch kartách ich spoločný symbol.

My sme sa hrou *Dobble* inšpirovali a vytvorili sme sadu 13 kariet, na každej sú 4 vyjadrenia dĺžky, resp. objemu. Na rozdiel od klasickej hry, nehľadajú sa na kartách rovnaké symboly, ale rôzne vyjadrenia tej istej dĺžky, resp. objemu. Napríklad na jednej karte je napísané 1 m, 100 l, 50 cm, 5 km, na druhej karte je 5 dm, 100 mm, 500 m, 100 cl. Ich spoločným prvkom je 50 cm = 5 dm.

Cieľovou skupinou tejto konkrétnej úpravy sú žiaci druhého stupňa základných škôl. Na spestrenie hodín matematiky je možné vytvoriť si vlastné hracie karty na princípe hry *Dobble*. Ako symboly môžeme použiť matematické pojmy alebo geometrické objekty, ktoré chceme precvičiť.

V Tabuľke 1 uvádzame východisko na zostavenie vlastnej sady kariet. S1, S2..., S13 reprezentujú rôzne symboly, K1, K2..., K13 zastupujú karty, + znamená, že príslušný symbol sa na danej karte nachádza. Napríklad na karte K7 sú znázornené symboly S2, S7, S10, S13.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
K1	+	+	+	+									
K2	+				+	+	+						
K3	+							+	+	+			
K4	+										+	+	+
K5		+			+			+			+		
K6		+				+			+			+	
K7		+					+			+			+
K8			+		+				+				+
K9			+			+				+	+		
K10			+				+	+				+	
K11				+	+					+		+	
K12				+		+		+					+
K13				+			+		+		+		

Tab. 1: Zostavenie vlastnej sady kariet
(podľa http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane).

Hra *Dobble* má matematické pozadie. Hľadanie čo najväčšieho systému kariet s n symbolmi na jednej karte, s čo najmenším počtom rôznych symbolov tak, aby každé dve karty mali spoločný práve jeden symbol je problém analogický s konštrukciou konečnej projektívnej roviny rádu $n - 1$. Maximálny počet rôznych kariet je potom $n^2 + n + 1$, minimálny počet rôznych symbolov v hre je tiež $n^2 + n + 1$.

Hra *Dobble* zodpovedá konečnej projektívnej rovine rádu 7 (keďže na jednej karte je 8 symbolov). Teda minimálny počet rôznych použitých symbolov je 57 a v hre môže byť maximálne 57 kariet.

So žiakmi môžeme riešiť rôzne úlohy súvisiace s hrou *Dobble*. Napríklad: Nájdite, ktoré dve karty by sa dali do sady doplniť. Aká je minimálna sada kariet, z ktorých môžem zrekonštruovať ostatné?

Chyť ma!

Podľa spoločenskej hry *Duch* sme vytvorili hru *Chyť ma!* (určenú pre žiakov prvého, druhého stupňa základných škôl) na tréning postrehu, logického myslenia a opakovanie pomenovaní geometrických útvarov.

Hra obsahuje 5 drevených kvádrov so znázornenými geometrickými útvarmi, 120 hracích kariet (na každej karte sú znázornené 2 geometrické útvary rôznych farieb). Ak sa na otočenej karte nachádza niektorý z útvarov v správnej farbe, cieľom je chytiť kváder s týmto útvarom. Ak na otočenej karte nie je ani jeden z útvarov v správnej farbe, cieľom je chytiť ten kváder s útvarom, ktorý na karte nie je zastúpený ani farbou, ani tvarom.

Objekty v hre *Chyť ma!* možno prispôbiť aktuálne preberanej téme, môžeme napríklad vytvoriť farebné telesá a na karty farebne uviesť vzorce na výpočet ich objemu, alebo načrtnúť grafy funkcií a na kartách uviesť ich predpis, vlastnosti, alebo napísať farebne rímske číslice a na kartách uviesť arabské (alebo naopak).

Nasledujúce hry možno použiť v hodinách matematiky aj bez úpravy, ich pravidlá možno nájsť na internetových stránkach. Pri niektorých poskytujeme nápady na prípadnú modifikáciu.

Mathable Quattro

Moderná spoločenská hra určená pre 2–4 hráčov. Prikladaním vhodných kartičiek k už vyloženým si deti 1. stupňa ZŠ precvičia sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie čísel do 100 a strategické myslenie. Na opakovanie je hra vhodná aj pre 2. stupeň ZŠ.

Po úprave môžeme tento herný princíp využiť pre všetky stupne škôl, po doplnení vhodných čísel je takto možné precvičovať umocňovanie, odmocňovanie; po úplnej výmene číselných kartičiek za obrázky alebo symboly zopakujeme napríklad množinové operácie, či goniometrické funkcie.

Zeus na úteku (Zeus on the loose)

Hra určená pre 2–5 hráčov, pre 1.–2. stupeň základných škôl, ale môžu ju hrať aj viacerí hráči rôzneho veku. Pôvodné pravidlá umožnia precvičovanie sčítania do 100, odčítania, zaokrúhľovania, násobkov desiatich, postrehu, strategického myslenia, pozornosti.

Po úprave pravidiel môžeme precvičovať všetky násobky, prípadne postupnosti, mocniny, sčítanie, odčítanie, či násobenie väčších čísel.

6 bere!

Pri tejto hre si dvaja až desiati žiaci 1. a 2. stupňa ZŠ precvičia usporiadanie čísel do 104, ich porovnávanie, odčítanie, strategické myslenie.

SushiZock im Gockelwok

Táto hra môže poslúžiť ako prvé stretnutie so zápornými číslami pre deti 1.–2. stupňa ZŠ, aj na precvičovanie sčítania a odčítania prirodzených čísel, záporných čísel, rozvoj odhadu pravdepodobnosti a krátkodobej pamäti.

Swish

Hra je určená pre žiakov prvého, druhého stupňa základných škôl, študentov stredných škôl. So študentmi druhého a tretieho stupňa môžeme rozoberať matematické pozadie hry *Swish* – aké zhodné zobrazenia využívame, keď hľadáme „swish“? Ktoré karty sú osovo súmerné? Sú niektoré stredovo súmerné? Sú niektoré dvojice kariet stredovo súmerné? Takto je možné precvičiť postreh, priestorovú predstavivosť, zhodné zobrazenia.

Continuo

Žiaci prvého a druhého stupňa základných škôl, a študenti stredných škôl si pri tejto hre precvičujú sčítanie, násobky 3, deliteľnosť, strategické myslenie, logické myslenie. Snažia sa získať čo najviac bodov vytváraním čo najdlhších reťazcov.

Grabolo

So žiakmi prvého stupňa základných škôl pri hraní tejto hry precvičíme farby, čísla od 1 do 6, postreh, pamäť. So žiakmi druhého stupňa môžeme v rámci kombinatoriky diskutovať o počte kariet v prípade, že hráme hru *Grabolo* s dvoma kockami (1 číselná, 1 farebná), prípadne s tromi kockami (2 číselné, 1 farebná).

Okrem hier, ktoré sme popísali, je možné nájsť inšpirácie i v ďalších spoločenských hrách, napríklad: Scopa, Quixx, 20 Express, Superfarmár, Rummikub, Heckmeck.

Literatura

- [1] DICKSON, B. *Math Circle Problem: Analysis of the Game "Spot it!"* [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: <http://bowmandickson.com/2012/07/15/math-circle-problem-analysis-of-the-game-spot-it/>
- [2] WIKIPEDIA.CZ. *Projective plane*. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane
- [3] WORDPRESS.COM. *Dobble visto da un matematico* [online]. [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: <http://eliacalderan.wordpress.com/2012/11/12/dobble-visto-da-un-matematico/>

Jak si zavázat boty, rozstříhat čtverec ANEB zase ta Pythagorova věta

ALICE BÍLÁ, VERONIKA HAVELKOVÁ¹

Způsobů, jak zavádět a procvičovat Pythagorovu větu, je celá řada. V odborné literatuře a učebnicích najdeme jistě celé desítky způsobů. Cílem dílny bylo představit tři ze způsobů, jak se tomuto tématu věnovat. Všechny tyto způsoby se nesou v duchu konstruktivistického způsobu vyučování a je v nich kladen důraz především na samotnou aktivitu žáka. První z nich „Jak objevit Pythagorovu větu“ se věnuje tomu, jak žáci mohou postupně objevit Pythagorovu větu, druhý „Jak rozstříhat čtverec“ ukazuje, jak si mohou žáci tuto větu „dokázat“, a třetí „Jak si zavázat boty“ dává námět k tomu, jak je možné tuto látku postupně procvičovat a ukázat v jiné souvislosti.

Pro tvorbu pracovních listů byl použit program GeoGebra (www.geogebra.org), který rovněž slouží i jako pomocník při řešení úloh a generování úloh nových.

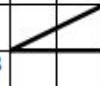
¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, alicebila@seznam.cz, veronika.havelkova@pedf.cuni.cz

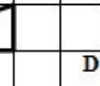
Jak objevit Pythagorovu větu

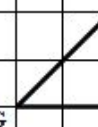
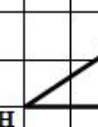
První aktivita má za úkol žáky postupně navést na vlastní objevení Pythagorovy věty. K tomuto účelu slouží dva pracovní listy², které obsahují posloupnost gradovaných úloh, které žáci řeší prostřednictvím čtverečkovaného papíru. V prvním pracovním listu (obr. 1) mají žáci za úkol dokreslovat čtverce nad přepony (zde je výhodou, nikoliv však nutností, pokud žáci mají již předchozí zkušenost s prací na čtverečkovaném papíru). Zároveň zaznamenávají do tabulek hodnoty pro a , b , c^2 a dopočítávají hodnotu c . Trojúhelníky jsou voleny tak, aby hodnoty žáky navedly na vztah mezi c^2 , a a b .

	c	c^2	a	b
A				
B				
C				
D				
E				
⋮	⋮	⋮	⋮	1
F			30	1

	c	c^2	a	b
G				
H				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I			30	4

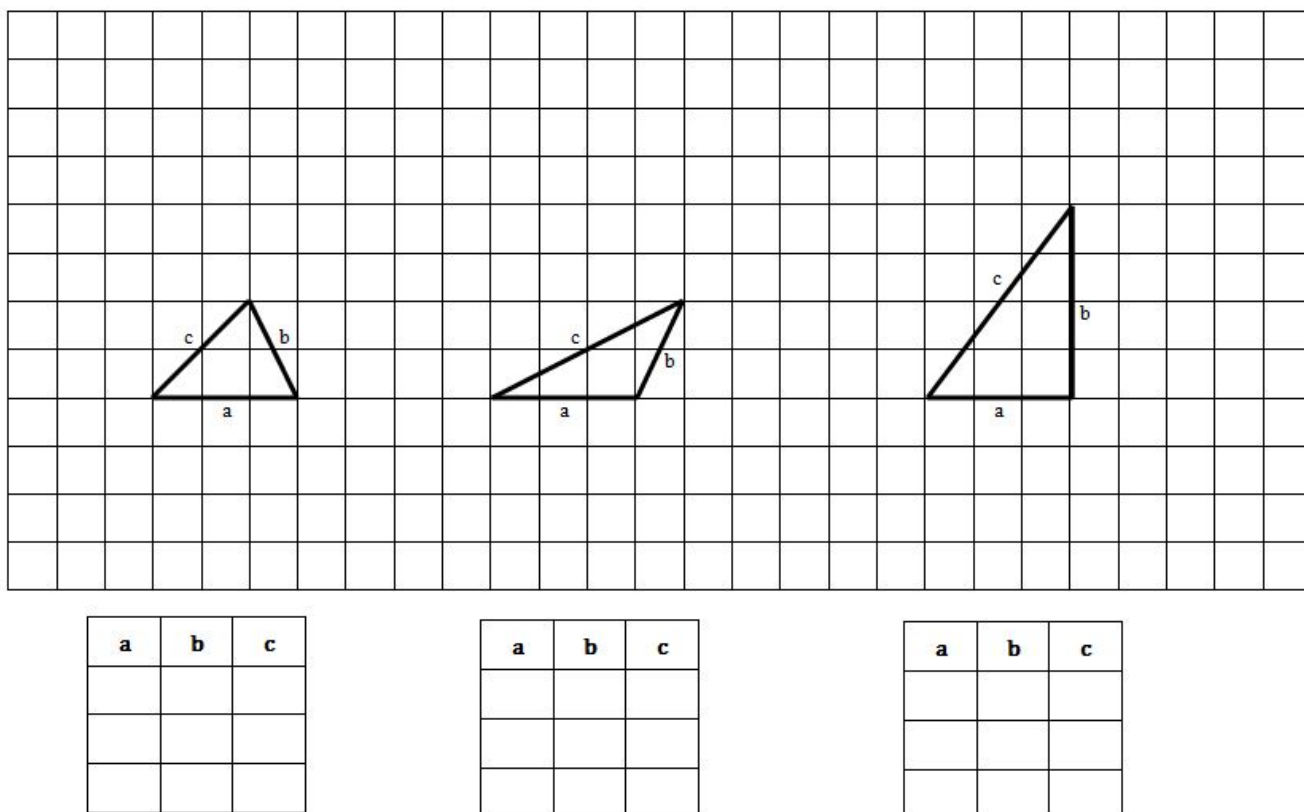


Obr. 1: Pracovní list č. 1

V momentě, kdy žáci společně s učitelem přijdou na vztah Pythagorovy věty pro předložené konkrétní příklady, přichází na řadu druhý pracovní list (obr. 2). Při práci s ním žáci zjišťují na konkrétních příkladech, zda nalezený vztah platí u všech typů trojúhelníků či jen u trojúhelníku pravoúhlého. Žáci opět dokreslují čtverce, dosazují hodnoty a přepočítávají prostřednictvím již objeveného vztahu.

²Tyto pracovní listy vznikly jako součást během předmětu Didaktika matematiky I na PedF UK (autory listů jsou V. Havelková, V. Svobodová, K. Zavřel). Výuka s pomocí těchto listů probíhala pak na FZŠ Tábořská během dvou vyučovacích hodin pod dohledem garantky předmětu N. Vondrové.



Obr. 2: Pracovní list č. 2

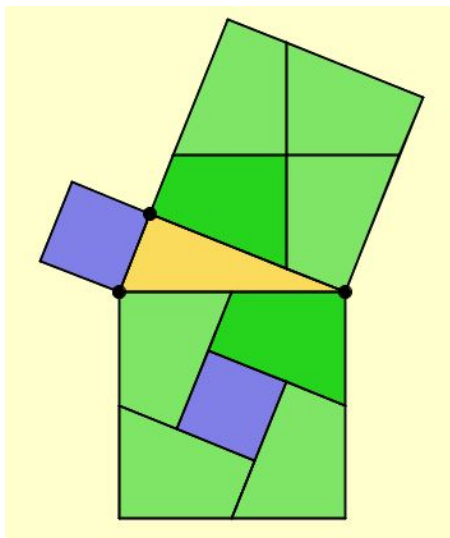
Jak rozstříhat čtverec

Druhá aktivita má za úkol dokázat pravdivost objevené Pythagorovy věty. Tato aktivita není sice tradičním matematickým důkazem, ale vzhledem k znalostem a možnostem žáků tohoto věku má tato aktivita k důkazu asi nejbližší. Inspiraci k této aktivitě jsme získaly v knize *Dítě, škola a matematika* (Hejný & Kuřina, 2001).

Úkolem žáků zde je narýsovat na list A4 libovolný pravoúhlý trojúhelník se čtverci nad jeho každou stranou. Následně vést průsečíkem úhlopříček u většího čtverce nad odvěsnou trojúhelníku rovnoběžku s přeponou trojúhelníku a na ni vést tímto průsečíkem ještě kolmici. Podle vzniklých úseček mají pak žáci za úkol čtverec rozstříhat a společně s menším čtvercem nad odvěsnou trojúhelníku tyto kusy naskládat do čtverce nad přeponou.

Tato aktivita zabere poměrně mnoho času, protože doba, kterou žáci potřebují k vyrýsování objektů, není krátká. Pokud chceme aktivitu zkrátit, můžeme žákům připravit pracovní listy, na kterých již budou trojúhelníky se čtverci připraveny; žáci tak již budou pouze stříhat a skládat. Přijďme tak však o ten moment, kdy si žáci sami vyzkouší, že věta platí skutečně pro každý trojúhelník, který zvolí, a ne jen pro ten trojúhelník, který jim nabídl učitel. V obou případech je také možné si

pomoci již hotovým appletem (obr. 3, dostupný a volně stažitelný z profilu Veroniky Havelkové na GeoGebraTube), na kterém lze pomocí manipulace s body ukázat obecnou platnost.



Obr. 3: Pythagorova věta v programu GeoGebra

Jak si zavázat boty

Vstup do problému³

Třetí způsob práce s Pythagorovou větou ukazuje, jak je možné tuto látku aplikovat v netradičním prostředí. Zvoleným způsobem pro procvičování je řešení problémové situace. Součástí práce s problémovou situací je přesnější formulace problému, jehož jádrem je hledání takového vzoru vázání na botě, aby tkanička byla co nejkratší. Byly ukázány a hledány vzory šněrování, délky vzorů byly porovnávány v závislosti na parametrech; některé hrozny problémů jsou naznačeny v obrázku 4, který je výběrem z pracovního listu.

Vztahy pro délku tkaniček vyjádřené pomocí parametrů:

- americký: $g + 2(n - 1)\sqrt{d^2 + g^2}$
- evropský: $(n - 1)g + 2\sqrt{d^2 + g^2} + (n - 2)\sqrt{4d^2 + g^2}$
- obchodní: $(n - 1)\sqrt{d^2 + g^2} + (n - 1)g + \sqrt{(n - 1)^2 d^2 + g^2}$
- kanadský: $2(n - 1)d + (n - 1)g = (n - 1)(2d + g)$

³Vycházíme přitom z kapitoly Aritmetika a tkaničky do bot z knihy Iana Stewarta *Jak rozkrájet dort* (Stewart, 2009).

TKANIČKOVÝ PROBLÉM

* Vyjádřete délku tkaniček nejdříve obecně pro n, g, d . Spočítejte délku tkaniček pro americký, obchodní a evropský vzor, je-li $n=8, d=1, g=2$.

obchodní

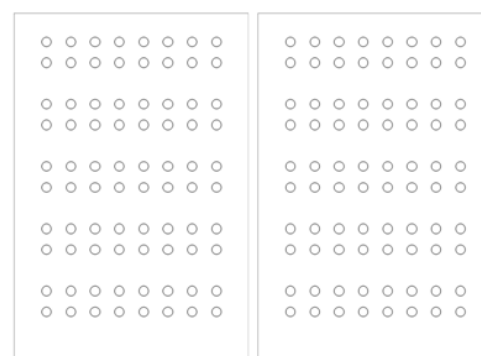
n... počet párů dírek

evropský americký

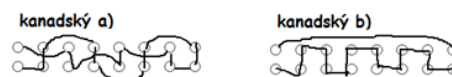
* Načrtněte vlastní vzory šněrování, má-li bota 8 párů dírek.

* Jaký vzor přijmeme, jaký odmítneme?

* Najděte alespoň jeden typ šněrování, který je osově souměrný (pro $n=8$).



- * Spočítejte délku tkaniček na svých vzorech a porovnejte s délkou vzoru amerického (pro $n=8, d=1, g=2$). Vyjádřete též pomocí parametrů n, d, g .
- * Hledejte vzor šněrování, který má co nejkratší tkaničku (pro $n=8, d=1, g=2$). Má Váš vzor kratší tkaničku než na americký vzor? Než obchodní?
- * Znázorněte americký, evropský a obchodní vzor do sítě (viz příloha).
- * Pomocí sítě (a souměrností) ukažte, že americký vzor je kratší než evropský pro libovolné možné d, g . Dále ukažte, že evropský vzor je kratší než obchodní (viz příloha).
- * Vyjádřete délku tkaniček kanadských vzorů pomocí parametrů. Zjistěte, zda existuje n takové, že kanadský vzor je kratší než americký. Počítejte s $d=1, g=2$.



Obr. 4: Některé vybrané problémy z pracovního listu

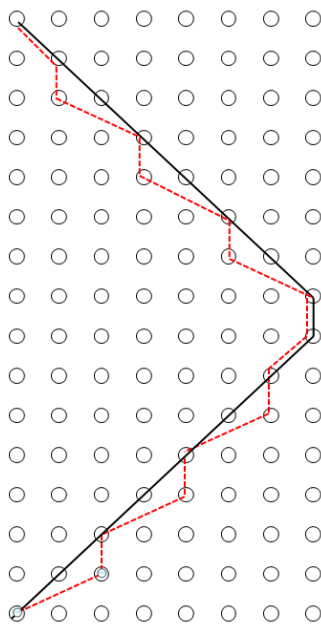
Několik zajímavých speciálních případů

- Pro $n = 8, g = 2, d = 1$:
americký vzor – 33,3;
evropský vzor – 35,4;
obchodní vzor – 36,9;
kanadský vzor – 28.
- Pro $n = 18, g = 2, d = 1$:
americký vzor – 78;
kanadský vzor – 68.
- Pro $g^2 + d^2 = 25$:
 $g = 3, d = 4$: kanadský je pro libovolné vhodné n kratší než americký;
 $g = 4, d = 3, n = 4$: kanadský je stejně dlouhý jako americký;
 $g = 4, d = 3, n > 4$: kanadský je delší než americký.

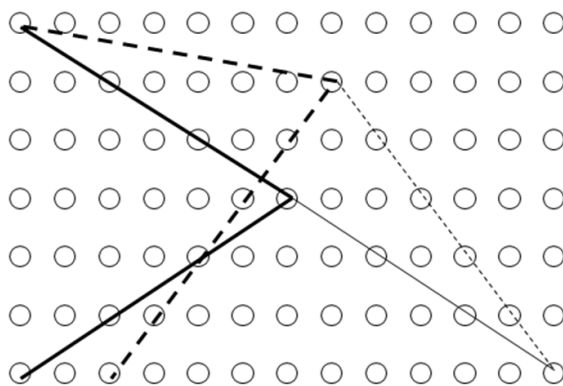
Porovnání délky tkaniček pomocí práce se sítí

Pro libovolné možné d, g a vhodné n je evropský vzor kratší než obchodní; americký je kratší než evropský. Pěkná demonstrace tohoto tvrzení je demonstrace na síti.

Vzor je do sítě zanesen takto: 1. řada puntíků na síti představuje nejdříve levou řadu oček na botě, 2. řada puntíků představuje pravou řadu oček na botě, 3. řada puntíků představuje opět levou řadu oček atd., délka tkaničky na vzoru je tak stejná a situace se zpřehlední. Na obr. 5 je porovnání amerického a evropského vzoru pro $n = 8$, má však obecnou platnost. Na obr. 6 je porovnání evropského a obchodního vzoru po vypuštění společných úseků.



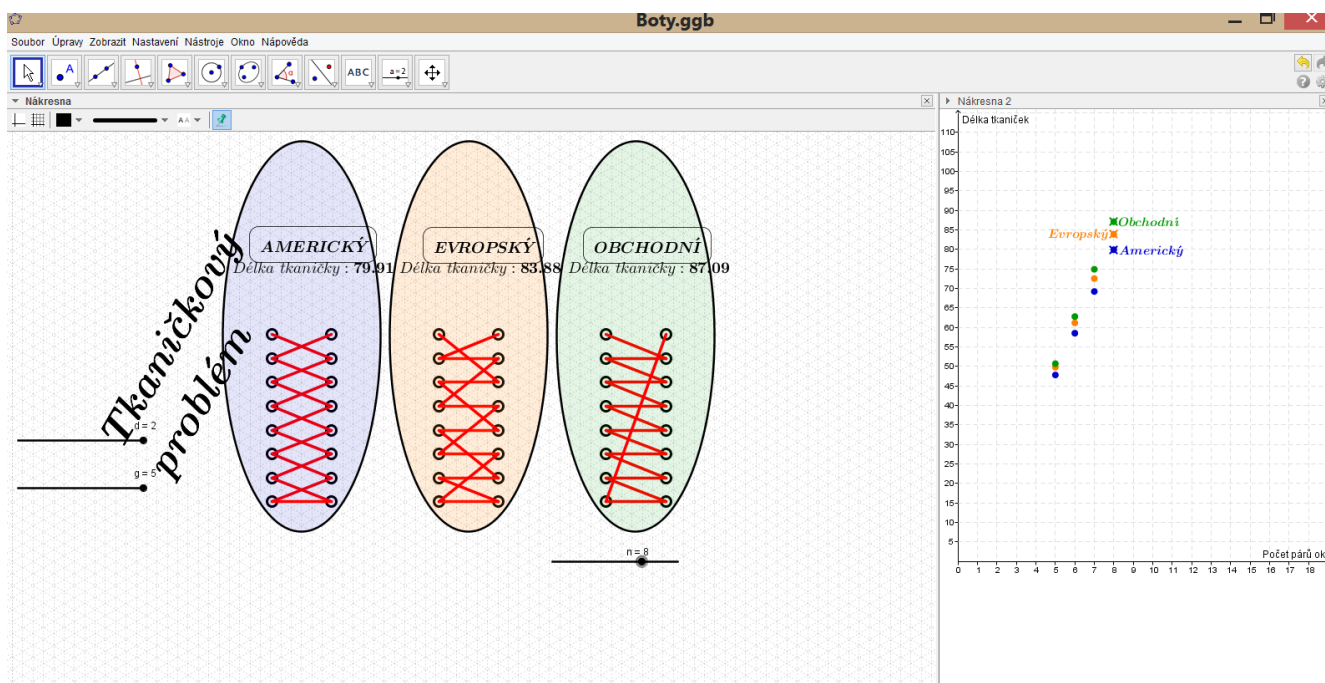
Obr. 5: Americký vzor – nepřerušovaně, evropský vzor přerušovaně podle Stewart (2009).



Obr. 6: Evropský vzor souvislou čarou tlustě, obchodní přerušovanou tlustě, po využití osových souměrností některé úseky tenče podle Stewart (2009).

Pomoc prostřednictvím programu GeoGebra

Umožní hledat zajímavé hodnoty parametrů a jiné závislosti mezi délkou vzorů. Může pomoci učiteli i ke kontrole výsledků, mají-li žáci počítat metodou tužka a papír. Příklad využití na obr. 7.



Obr. 7

Další rozvíjení úlohy

Práce s parametry, porovnávání vlastních vzorů, práce s různým softwarem (Excel, GeoGebra), úvaha o různém počtu tkaníček a další.

Závěr

Uvedené tři aktivity měly za úkol čtenáři poskytnout náměty na možnosti zavádění a procvičování Pythagorovy věty a dokázat netriviální tvrzení demonstrací na síti pomocí jednoduchého geometrického triku. První dvě aktivity byly úspěšně vyzkoušeny u žáků osmého ročníku, třetí aktivita na vyzkoušení teprve čeká. Doufáme tedy, že vás aktivity natolik zaujaly, že vyzkoušíte alespoň jednu z nich.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. (2001) *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

- [2] GALE, D. (1995). *Mathematical Entertainments. The mathematical intelligencer*. 17. No. 4. New York: Springer–Verlag.
- [3] GEOGEBRA [online]. [cit. 2014-01-09]. Dostupné z: <https://tube.geogebra.org/>
- [4] GEOGEBRA TUBE: Osobní profil – Veronika Havelková [online]. [cit. 2014-01-09]. Dostupné z: <https://tube.geogebra.org/material/show/id/267947#>
- [5] STEWART, I. (2009). *Jak rozkrájet dort a další matematické záhady*. Dokořán, Argo.

Chyby, překážky a výuka matematiky

JARMILA NOVOTNÁ¹

Príspevek vychádzajúci ze stejnojmenné dílny na konferenci je věnován nezdaru, chybě a překážkám ve vyučování matematice. Seznamuje se základními pohledy na tyto pojmy důležitými jak pro školu, tak i v běžném životě. Kromě charakteristik a klasifikace jednotlivých pojmů je velká pozornost věnována také práci učitele s chybou a překážkou a možnostem jejich odstraňování. Príspevek predstavuje časť rozsáhlejšej práce publikovanej v rámci projektu OPPA: Podpora vzdelávania študentů stredných škôl v prírodovedných predmetych a matematice (Novotná, 2014).

S nezdarů a chybami se každý člověk setkává nejen ve škole, ale i v běžném životě. Jinde než ve škole je chyba většinou považována za přirozenou součást procesu učení. Ve škole je však často na chybu nahlíženo jako na něco negativního, na něco, čemu je třeba se vyhnout.

Tento text představuje pohled na nezdar a chybu tak, jak je zpracována v Teorii didaktických situací v matematice (TDSM) (Brousseau, 1997, 2012); neomezuje se však jen na tuto perspektivu, ale doplňuje ji i jinými pohledy na problematiku chyb ve vyučování.

V TDSM jsou v souvislosti s problematikou chyb rozlišovány tři různé pojmy: nezdar, chyba a překážka. V textu uvedeme základní charakteristiky těchto pojmů. Budeme je ilustrovat na několika konkrétních příkladech z prostředí vyučování matematice.²

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

²Řadu příkladů ilustrujících pojmy a myšlenky, se kterými v příspěvku pracujeme, lze najít v (Novotná, 2014).

Nezdar a chyba

V TDSM jsou tyto dva pojmy velice pečlivě odlišovány. Nezdar je ukazatelem toho, že výsledek, který byl očekáván, požadován, nebyl dosažen. Odhalení toho, že došlo k nezdaru, je prvním krokem k nápravě. Je třeba hledat, co je jeho příčinou, kde došlo k chybě. Chybou tedy není, např. špatný výsledek, k chybě došlo někde v procesu řešení, kdy se řešitel odklonil od správného postupu. Odstranění nezdaru tedy vyžaduje najít, kde došlo k chybě a jak chybu opravit.

Pokud má žák být schopen vysvětlit svůj nezdar, musí zjistit svůj nezdar u výsledku, nalézt místo, kde došlo k volbě, která k nezdaru vedla (k chybě), nalézt souvislost s chybnou volbou a upravit ji tak, aby nové řešení už neskončilo nezdařem.

Typy chyb

Chyby mohou být jednorázové nebo se mohou opakovat, často v odpovědích na určité otázky. Jednorázové chyby nejsou závažné a není třeba se jim nějak mimořádně věnovat. Opakujícím se chybám je třeba věnovat zvýšenou pozornost. Máme zde na mysli chyby, se kterými se každý učitel setkává, a to nejen opakovaně u jednoho žáka, ale stejné chyby se opakují u mnoha žáků. U takových chyb je třeba hledat jejich příčinu; odstranění příčiny současně vede i k odstranění chyby.

Příklad: Velice často žáci používají, např. zápisy jako $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, případně $\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + b$; $0 \cdot a = a$; $\sqrt{a^2} = a$; $(0,3)^2 = 0,9$; $1,1 < 1,09$.

Chyba nemusí být jen důsledkem neznalosti nebo náhody. Může být důsledkem nějaké předchozí znalosti, kterou žák získal v jiných podmínkách a která v nových podmínkách už je nesprávná nebo nevhodná. Chyba je v takovém případě projevem překážky při získávání znalostí.

Příklad: S takovými situacemi se učitelé matematiky na všech stupních škol setkávají poměrně často: např. při přechodu od uspořádání přirozených čísel podle velikosti k uspořádání zlomků žáci zapíší $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ a odůvodňují to tím, že $3 < 4$.

Překážky

V tomto případě máme na mysli situace, kdy žák použije znalost, která je pravdivá za nějakých konkrétních podmínek, je za těchto podmínek správná, v prostředí, kde už správná není. Tedy původně správná znalost vyvolala při nevhodném použití chybu a následný nezdar žáka při řešení úlohy, stala se tedy v novém prostředí překážkou.

Chyby, které jsou projevem překážky, jsou obvykle stálé, opakují se. Může je opakovat jedinec sám nebo je opakuje mnoho jedinců (tj. „děti obvykle dělají tuto

chybu“), případně se opakují v historii daného pojmu či pojetí. (Brousseau, 1997; Krátká, 2009) Je to způsobeno tím, že překážkou je znalost, pro kterou existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá, lze ji úspěšně použít; existuje však také oblast, v níž je tato znalost chybná a vyvolává chybné odpovědi. Když se jedinec dostane do obdobné situace, znalost-překážka se opět projeví stejným způsobem.

Mezi překážkou a obtíží je zásadní rozdíl: Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale „neznalostí“, případně chybějící dovedností. Pokud se jedinci podaří obtíž překonat, již se neopakuje. Překážka však je výsledek přítomnosti nějaké znalosti, často správné v jedné oblasti, která se v jiných podmínkách stává nesprávnou. Jestliže ten, kdo chce tuto znalost použít, nekontroluje, zda je ještě v oblasti platnosti nebo už mimo ni, projeví se to výskytem chyby. Díky tomu, že je v některé oblasti překážka platná, je obtížné ji odstranit. I potom, kdy byla vysvětlena a odstraněna chyba, kterou překážka způsobila, může se znovu nečekaně objevit, např. v úloze, která je trochu obtížnější, nebo při zmenšené pozornosti. (Brousseau, 1997, 2003; Brousseau & Antib, 2002).

Překážky v didaktickém systému mohou mít různé příčiny. Ve shodě s TDSM rozlišíme překážky ontogenetického, didaktického a epistemologického původu.

Překážky ontogenetického původu jsou překážky, jejichž příčinou jsou omezení (mezi jinými neurofyzilogická) jedince v daném okamžiku jeho vývoje: Jedinec rozvíjí znalosti s ohledem k svým prostředkům a cílům odpovídajícím věku. Na odstranění těchto překážek nemá učitel vliv, je třeba počkat, až žák dospěje do potřebného vývojového stupně.

Překážky didaktického původu jsou překážky, které se vztahují k vyučování a závisí na výběru učebního stylu, výukových strategií, řazení učiva apod. Vhodným nástrojem k jejich omezení je důkladná analýza a priori (Brousseau, 1997; Nováková, 2013), kterou učitel provede.

Zastavíme se u překážek epistemologických. Myšlenka epistemologických překážek pochází od francouzského filozofa G. Bachelarda (1938), který považuje překážku za znalost vytvořenou jinou cestou a pro jiný účel, přizpůsobenou jiným podmínkám, než je ten, při němž se překážka projevuje. Proto jsou epistemologické překážky zdrojem opakujících se chyb, které nejsou náhodné a kterých se jedinec dopouští při řešení odpovídajících problémů.

Epistemologické překážky se vztahují k procesu nabývání znalostí. Nemůžeme (a ani nesmíme) se jich v procesu vyučování vyvarovat, protože jsou zásadní pro cílovou znalost. Můžeme je najít v historii samotných pojmů. Epistemologická překážka souvisí pouze se znalostí jako takovou (Radford, Boero & Vasco, 2000).

Příklady epistemologických překážek už se v článku vyskytly (viz např. příklad s porovnáváním zlomků ilustrující typy chyb).

Práce učitele s chybou

Analýza chyby je jednou z nejdůležitějších fází procesu učení. Kromě toho, že objevení chyby, její interpretace a korekce je důležité pro žáka, je i významným diagnostickým nástrojem učitele. Není to pouze informace o chybném výkonu, ale také ukazatel způsobu žákova myšlení a kvality jeho představ.

Chyba však nemusí být jen výsledkem nesprávných postupů nebo představ žáků. Chyba může být úmyslně učitelem vyvolána. V (Heemsoth & Heinze, 2013) jsou odlišovány dva typy výukového prostředí využívajícího práci s chybou:

Prostředí, označované jako *error management training*, je charakterizováno tím, že žáci pracují s úlohami, které přesahují jejich dosavadní znalosti; je tedy velmi pravděpodobné, že se v průběhu řešení vyskytnou chyby – látka je obtížnější, než co mohou žáci se svými dosavadními znalostmi zvládnout. Žáci jsou zde aktivně vedeni k tomu, aby přijímali chyby jako pozitivní a přirozenou součást vzdělávacího procesu. V literatuře (např. Keith & Frese, 2005) je dokumentováno, že žáci získávají více v případech, kdy jsou jim kromě příkladů s chybami předkládány také příklady správných řešení.

V prostředí označovaném jako *guided error training*, jsou žákům vybrané chyby přímo předkládány; učitel schválně udělá chybu, ale tak, aby nebylo na první pohled vidět, kde chyba je, zřejmé je pouze to, že došlo k nezdaru; žáci pak při hledání chyby aktivují řadu znalostí, které už mají, případně tyto znalosti kombinují.

Závěrečná poznámka

Příklady práce v takových prostředích je možno najít např. v (Novotná, 2014).

V (Lorenzet, Salas & Tannenbaum, 2005) je doloženo, že žáci, kteří se učili v prostředí, v němž nejsou chyby využívány (*error-free training*), dosahují horších výsledků v porozumění látce a mají nižší sebedůvěru než ti, kteří jsou vedeni k učení se z chyb (vlastních i cizích). O důvodech, proč učení se z chyb podporuje rozvoj znalostí a dovedností žáků, panuje v literatuře shoda (Joung, Hesketh & Neal, 2006): Chyby dodávají žákům odvahu, aby testovali své vlastní kognitivní modely. Přitom je nejen upravují a rozvíjejí, ale také odhalují to, co je v nich nesprávně. To vede žáky k hlubšímu porozumění látce a následně k tomu, že jsou nejen schopni vyhnout se chybným postupům a faktům, ale i např. použití neefektivních strategií.

Literatura

- [1] BACELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vin.
- [2] BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical situations in mathematics 1970–1990*. [Edited and translated M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland

- and V. Warfield.] Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (Francouzská verze (1998). *Théorie des situations didactiques*. [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Grenoble: La pensée sauvage.)
- [3] BROUSSEAU, G. (2003). *Erreurs, difficultés, obstacles. Enseignement, pédagogie, psychologie cognitive, sémiotique et didactique*, Scoop.it. Dostupné z: <http://www.scoop.it/t/enseignement-pedagogie-psychologie-cognitive-semiotique-et-didactique?q=Brousseau> [cit. 2013-12-22].
 - [4] BROUSSEAU, G. (2012). *Úvod do Teorie didaktických situací v matematice*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.
 - [5] BROUSSEAU, G. & ANTIBI, A. (2002). Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Revue des Sciences de l'éducation du LEMME Toulouse*.
 - [6] HEEMSOTH, T. & HEINZE A. (2013). Learning fractions from errors. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25–32). Kiel, Germany: PME.
 - [7] JOUNG, W., HESKETH, B. & NEAL, A. (2006). Using "War Stories" to train for adaptive performance: Is it better to learn from error or success? *Applied Psychology*, 55(2), 282–302.
 - [8] KEITH, N. & FRESE, M. (2005). Self-Regulation in error management training: Emotion control and metacognition as mediators of performance effects. *Journal of Applied Psychology*, 90(4), 677–691.
 - [9] KRÁTKÁ, M. (2009). *Srovnání ontogenetického a fylogenetického vývoje porozumění jevu nekonečno v geometrickém kontextu*. Doktorská disertační práce. Praha: Univerzita karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
 - [10] LORENZET S. J., SALAS E. & TANNENBAUM S. J. (2005). Benefiting from mistakes: the impact of guided errors on learning, performance, and self-efficacy. *Human Resource Development Quarterly*, 16(3), 301–322.
 - [11] NOVOTNÁ, J. (2014). *Chyby, překážky a výuka matematiky*. Příručka k projektu OPPI Podpora vzdělávání studentů středních škol v přírodovědných předmětech a matematice. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

- [12] NOVÁKOVÁ, H. (2013). *Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku*. Doktorská disertační práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [13] RADFORD, L., BOERO, P. & VASCO, C. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics: Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.

Využití analogií ve výuce matematiky

EVA PATÁKOVÁ¹

Slovník cizích slov (Petráčková, Kraus et al., 1998, obě citace jsou ze str. 49) uvádí několik významů slova analogie. Jako základní vymezení předkládá: „Existující nebo zjištěná shodnost některých vlastností mezi netotožnými předměty (objekty), jevy apod., obdoba“. Pro účely tohoto článku je zajímavé i vymezení z hlediska logiky, kde analogií je „obdoba objektů na základě společných charakteristik“. J. Kopka (Kopka, 2007: str. 35) definuje analogii v matematice takto: „Analogie je určitý druh podobnosti. Např. analogické objekty se shodují jeden s druhým v určitých relacích definovaných na jejich částech.“.

Pro účely našeho článku zavedeme v souladu s vymezením J. Kopky pojem „analogická prostředí“ v matematice. Budeme jím mínit dvojice tematických celků, ve kterých platí „obdobné“ vztahy – shodují se v určitých relacích definovaných na jejich částech. (Např. planimetrie – stereometrie; desítková soustava – číselné soustavy s jiným základem;...)

Podívejme se nyní na příklady využití analogií ve výuce:

- **Analogie jako strategie řešení úlohy:** Existuje několik metod řešení úloh na hledání analogií založených nebo s nimi alespoň souvisejících. Řešení úloh metodou analogií znamená, že si řešitel sám hledá analogické úlohy, které vyřešit umí (nebo jsou mu zadány osobou, která mu s řešením pomáhá – třeba učitelem). Pak se snaží přenést postupy, kterými analogickou úlohu řešil, do řešení úlohy původní.

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, eva.patakova@email.cz

- **Hledání analogií jako úkol pro žáky:** Hledat analogie mohou také žáci sami. Pomocí hledání analogií a pozměňování dané situace (např. metodou „Co když ne?“ autorů Browna a Walterové (1990)) mohou prozkoumávat sami nějaké matematické prostředí. Úkol může být zadán jako krátká práce v hodině nebo komplexní prozkoumání situace, např. v rámci seminární práce.
- **Analogie jako pomůcka při výkladu:** Při výkladu využíváme analogie tak, že žákům připodobníme novou látku k něčemu, co již znají (ať již z hodin matematiky, z jiných vyučovacích předmětů, z běžného života, ...). Na obr. 1 je znázorněno využití analogie „reálná čísla s racionální a iracionální složkou – komplexní čísla s reálnou a imaginární složkou“.

$$\begin{aligned}
 (2+i)^2 &= \underline{4} + \underline{4i} + \underline{i^2} &= \underline{4} + \underline{4i} - \underline{1} &= \underline{3} + \underline{4i} \\
 (2+\sqrt{3})^2 &= \underline{4} + \underline{4\sqrt{3}} + \underline{(\sqrt{3})^2} &= \underline{4} + \underline{4\sqrt{3}} + \underline{3} &= \underline{7} + \underline{4\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Obr. 1: Využití analogie při výkladu.

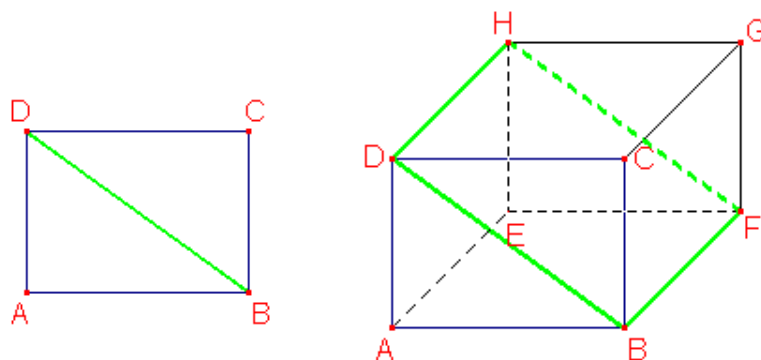
- **Tvorba analogických úloh²:** Analogickou úlohu můžeme z již existující úlohy získat tak, že pojmy v ní obsažené nahradíme odpovídajícími pojmy z analogického prostředí. Následující ukázka je založena na analogii „planimetrie – stereometrie“.

Původní úloha: Dokažte, že **obdélník $ABCD$** je **úhlopříčkou BD** rozdělen na dva shodné **rovinné útvary**.

Analogická úloha: Dokažte, že **kvádr $ABCDEFGH$** je **rovinou BDF** rozdělen na dva shodné **prostorové útvary**.

Situace znázorňuje obr. 2. Všimněte si, že v řešení úloh se objevují stejné prvky – zde situace vypadá tak, že řešení původní (rovinné) situace musíme využít k řešení analogické (prostorové) úlohy.

²Část o tvorbě analogických úloh je zpracována podle Patáková (2013).



Obr. 2: Ilustrace k úloze

Vytvoříme-li úlohu výše popsaným způsobem, mohou nastat tři situace:

1. Analogická úloha je řešitelná stejným způsobem, jakým byla řešitelná úloha původní, pouze s přihlédnutím ke specifikům analogického prostředí; výsledek úlohy je stejný.

Úloha: Jakou hodnotu musíme přidat ke každému z čísel napsaných v následujícím příkladu, aby výpočet byl správný?³

$$13 + 12 + 10 = 39$$

Analogická úloha: Jakou hodnotu musíme přidat ke každému z čísel v jedenáctkové soustavě napsaných v následujícím příkladu, aby výpočet byl správný?

$$(13)_{11} + (12)_{11} + (10)_{11} = (39)_{11}$$

V obou případech je řešením hodnota 2 (popř. $(2)_{11}$). Mimochodem, vyvstávají hezké otázky pro nadané žáky: Platí to tak u příkladů stejného typu vždy? Nebo je to pouze díky vhodné volbě čísel a číselné soustavy? Za jakých podmínek bude úloha vycházet stejně?

2. Úloha je řešitelná podobným, analogickým způsobem; výsledek vychází jinak.

Úloha: Jakou částí obsahu čtverce $ABCD$ je obsah menšího z útvarů, na které rozdělí čtverec $ABCD$ přímka PQ ? Bod P leží ve třetině úsečky AB blíže bodu A a bod Q leží ve třetině úsečky AD blíže bodu A .

³Upraveno podle L. Hozová: MO, 62. roč., Z5 — I — 2.

Analogická úloha: Jakou částí objemu krychle $ABCDEFGH$ je objem menšího z útvarů, na které rozdělí krychli $ABCDEFGH$ rovina PQR ? Bod P leží ve třetině úsečky AB blíže bodu A , bod Q ve třetině úsečky AD blíže bodu A a bod R ve třetině úsečky AE blíže bodu A .

Řešením původní úlohy je $\frac{1}{18}$, řešením analogické úlohy $\frac{1}{162}$.

3. Úloha v analogickém prostředí ztrácí smysl.

Úloha: Najděte v $\mathbb{N}$ všechny dělitele čísla 75.

Analogická úloha: Najděte v $\mathbb{Q}$ všechny dělitele čísla 75.

Taková situace nás však může inspirovat ke tvorbě jiné úlohy, která řešitelná je. Např: „Najděte v $\mathbb{Q}$ všechny dělitele čísla 75 takové, aby výsledkem dělení bylo přirozené číslo.“

Závěrem lze shrnout, že využití analogií ve výuce matematiky je užitečná technika, kterou může učitel ve své práci využít různými způsoby. Příslušné analogie může hledat jak učitel sám, tak jeho žáci. Analogie můžou učiteli zjednodušit práci – např. při výkladu nových témat nebo při tvoření úloh.

Literatura

- [1] BROWN, S. I., Walter, M. I. (1990). *The Art of Problem Posing*. Second Edition. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Ltd., Publisher.
- [2] KOPKA, J. (2007). *Metody řešení matematických úloh* [online]. [cit. 2013-08-21]. Dostupné z: kma.ujep.cz/souby/opory/Metody_reseni_matematickych_uloh.doc.
- [3] PATÁKOVÁ, E. (2013). *Metody tvorby úloh pro nadané žáky*. Praha: PedF UK.
- [4] PETRÁČKOVÁ, V. KRAUS, J., et al. (1998). *Akademický slovník cizích slov*. Praha: Academia.

Tabulka 100 – gradované úlohy

JANA SLEZÁKOVÁ¹

V didaktice matematiky je často zvažováno, jak zapojit více žáků do řešení úloh, neboť právě řešitelským procesem se učí. Je například diskutováno, že matematika musí bavit, tedy hledají se taková témata, která jsou přitažlivá pro žáky. Další možností je nabídka gradovaných úloh, neboť je žádoucí, aby úlohy řešili žáci na všech úrovních matematického myšlení. Jedná se o to, aby žák měl možnost si vybrat přiměřeně náročnou úlohu, tedy takovou, která je pro něj výzvou. Je-li zadána příliš jednoduchá úloha, tak se žák jejím řešením neobohatí, je-li příliš náročná, tak ji pravděpodobně žák odmítne, nebo se o její řešení pokusí, ale neúspěšně a příště takový pokus vzdá předem. Takové úlohy žákovi nepřinesou radost z intelektuální činnosti. Požadavek, aby žák řešil úlohy přiměřeně náročné (jak v běžné výuce, tak i při testech) a aby byly pro něj přitažlivé, se domnívám, není jednoduché splnit. K promýšlení této myšlenky posloužila pro inspiraci Tabulka 100 jako téma vyučovací hodiny pro žáky 6. ročníku (Hejný et al., 2014: s. 27). Úlohy nabídnuté v materiálu graduji. Cílem pracovní dílny bylo hledat parametry obtížnosti úloh a diskutovat tvorbu testů s gradovanými úlohami.

Tabulka 100

V materiálu je téma uvedeno následujícím textem: Po tabulce T-100 chodíme vpravo ($\rightarrow$), vlevo ($\leftarrow$), nahoru ($\uparrow$) a dolů ($\downarrow$). *Cesta* $52 \rightarrow 53 \uparrow 43 \uparrow 33$ má *začátek* v čísle 52 a *konec* v čísle 33. Její stručný *zápis* je $52 \rightarrow \uparrow \uparrow 33$ a její *součet* je $S(52 \rightarrow \uparrow \uparrow) = 52 + 53 + 43 + 33 = 181$. Navíc je formulována domluva, že z tabulky nelze vyjít ven. Cestu $19 \rightarrow \rightarrow$ nelze provést a součet $S(19 \rightarrow \rightarrow)$ tak nemá smysl.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Účastníkům dílny byly zadány a následně s nimi diskutovány úlohy:

Tabulka T-100

1. úloha: Najděte $S(x \rightarrow)$ pro x rovno a) 21; b) 32; c) 43; d) 54; e) 65; f) 76.

Řešení: a) $S(21 \rightarrow) = 43$; b) $S(32 \rightarrow) = 65$; c) $S(43 \rightarrow) = 87$; d) $S(54 \rightarrow) = 109$; e) $S(65 \rightarrow) = 131$; f) $S(76 \rightarrow) = 153$.

¹Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, jana.slezakova@pedf.cuni.cz

1. úlohou si učitel zjišťuje, zda žák rozumí symbolu $S(x \rightarrow)$. Žák rozumí celé úloze, jestliže ví, že podle uvedeného čísla najde druhé číslo a sečte je. Navíc všechna zadání a) – f) v našem případě mají řešení. Náročnější úlohou by bylo: Nadějte $S(x \rightarrow)$ pro x rovno 70. Takové $S(x \rightarrow)$ neexistuje, protože z tabulky nelze vyjít, viz domluva. Ještě náročnější úlohou by bylo: Najděte takové x , pro které $S(x \rightarrow)$ neexistuje. Řešením této úlohy jsou všechna čísla pravého sloupce tabulky.

2. úloha: Najděte číslo y , pro které a) $S(y \downarrow) = 12$; b) $S(y \leftarrow) = 99$; c) $S(y \uparrow) = 100$.

Řešení: a) $y = 1$; b) $y = 50$; c) $y = 55$.

2. úlohu žák řeší strategií pokus-omyl. V zadání a) žák hledá cestu s malým součtem (12), tedy hledá malá čísla tabulky, zjistí, že se nacházejí v levé horní části tabulky. V zadání b) žák opět hledá cestu, ale už ví, že se nejedná o cestu s malým součtem jako v předchozím případě, zjišťuje, že se nejedná ani o cestu s velkým součtem. Z hlediska strategie se jedná o orientovaný pokus-omyl. V zadání c) již žák objevuje vztah (případně více vztahů), například že když vezmeme jakékoliv $S(y \uparrow)$, tak se jedná o číslo sudé. V tomto případě je to součet 100, jedná se o číslo dělitelné 10. Když sečteme dvě čísla, která mají na místě jednotek 5, tak dostaneme číslo dělitelné 10. Žák využívá orientovanou strategii pokus-omyl s postupnými objevy vztahů.

3. úloha: Najděte $S(z \rightarrow) - z$ pro z rovné: a) 6; b) 17; c) 28; d) 39; e) 40.

Řešení: $z + 1$ pro všechna čísla tabulky T-100 kromě čísel pravého sloupce, tedy e) pro $z = 40$ úloha nemá řešení.

3. úlohou učitel zjišťuje, zda žák rozumí zadání $S(z \rightarrow) - z$. Žák pravděpodobně udělá první dvě úlohy a už má řešení. V případě e) úloha nemá řešení, proto je vhodná pro společnou práci ve třídě.

4. úloha: Najděte n tak, aby číslo $S(n \rightarrow) - S(n \uparrow)$ bylo co největší.

Řešení: Vždy 11. Nemá řešení pro všechna čísla pravého sloupce a prvního řádku.

4. úlohou učitel zjišťuje, zda žák rozumí zadání $S(n \rightarrow) - S(n \uparrow)$. Žák hledá řešení v množině čísel a přechází od aritmetiky k algebře.

5. úloha: Najděte n tak, aby číslo $S(n \downarrow) - S(n \rightarrow)$ bylo co nejmenší.

Řešení: Vždy 9. Nemá řešení pro všechna čísla pravého sloupce a posledního řádku.

5. úloha je možností pro žáky, kteří ve 4. úloze neobjevili řešení, ale rozuměli spolužákům, aby v této úloze objev učinili.

6. úloha: Najděte součty všech cest délky 2 začínajících v čísle 23. Poznámka: Byla udělána domluva, že počet šipek v cestě nazýváme *délka cesty*. Cesta nesmí obsahovat některé číslo opakovaně.

Řešení: Součty cest jsou: $39 = S(23 \uparrow\uparrow)$, 48, 50, 57, 61, 66, 72, 77, 81, 88, 90, 101.

Struktura ve výsledcích 6. úlohy je netriviální. Další výzvou pro žáky může být, aby našli, jak to funguje pro stejné cesty, ale začínající v čísle 44. Řešení s číslem 23 uspořádáme (viz uvedené řešení). Najdeme s číslem 44 cestu s nejmenším součtem (102). Každé další řešení vznikne přičtením stejného rozdílu jako je rozdíl $102 - 39$.

Účastníci dílny byly vyzvány vytvořit gradovaný test ze tří úloh na téma tabulky T-100 po probrání výše uvedených úloh. V závěru dílny byl vytvořen test:

Úloha A (podobně jako v 1. úloze): Najděte $S(x \downarrow)$ pro x rovné: a) 5; b) 23; c) 64.

Úloha B (podobně jako ve 3. úloze): Najděte $S(z \downarrow) - z$ pro z rovné: a) 7; b) 36; c) 79.

Úloha C (podobně jako v 5. úloze): Najděte n tak, aby číslo $S(n \downarrow) - S(n \leftarrow)$ bylo co největší.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., et al. (2014) *Matematika. Díl Ar1 pro 2. stupeň ZŠ*. Výukové materiály určené pro pilotáž. Vydáno pro vnitřní potřebu H-mat, o. p. s.

Aditivní mnohoúhelníky

ANNA SUKNIÁK¹

V roce 2012 byl tým M. Hejného požádán o vytvoření sbírek úloh pro 6.–9. ročník. Dostala jsem možnost podílet se na tvorbě jedné kapitoly věnované novému prostředí, které bylo nazváno *Aditivní mnohoúhelníky a Mnohostěny*. Toto prostředí jsem rozpracovala ve své diplomové práci (Sukniak, 2013). Jedná se o didaktické matematické prostředí, ve kterém lze snadno aplikovat výuku orientovanou na budování schémat (VOBS), viz (Hejný, 2007), (Jirotková, 2007), (Slezáková, 2007). Zde didaktika matematiky čerpá z poznatků psychologie. Pojem schéma se v psychologii prvně objevuje v roce 1932 u Barletta a to v souvislosti s pamětí (Atkinson, 2003: s. 298–299). V kognitivní psychologii jej rozpracoval Gerrig, ve formě použitelné i pro didaktiku matematiky (1991: s. 244–245):

¹Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, anna.sukniak@gmail.com

Teoretici vytvořili termín schéma, aby poukázali na paměťovou strukturu, která obsahuje shluky informací důležitých k porozumění. . . Základní myšlenkou teorie schémat je, že v paměti nemáme prostě jen izolovaná fakta. Informace jsou shromážděny do smysluplných funkčních jednotek.²

Ideu didaktického matematického prostředí (substantial learning environment) do literatury zavedl E. Wittmann (2001). Rozumí tím soubor vzájemně provázaných pojmů, vztahů, procesů a situací, propojených na životní a matematické zkušenosti žáků, umožňující tvořit úlohy, pomocí nichž se žáci dopracují k hlubokým myšlenkám matematiky. Ideu hluboké matematické myšlenky, která souvisí s mírou porozumění matematickým objektům, podrobně rozpracoval Z. Semadeni (2002). Ne každé prostředí, které rozvíjí matematické myšlení, nutně vede k hlubokým matematickým myšlenkám. Například šachy nebo Sudoku určitě cvičí mysl, ale k hlubokým matematickým myšlenkám mohou vést pouze ty, kteří se těmto prostředím věnují profesionálně. K Wittmanovým požadavkům – propojení na zkušenosti žáka a možnosti vést k objevům – přidal Hejný ještě další dva požadavky – dlouhodobost (například v prostředí pavučin lze tvořit úlohy pro žáka 2. ročníku i pro maturanta) a nastavitelnost obtížnosti. M. Hejný popsal i proces tvorby úloh požadované náročnosti v daném prostředí. Proces je tvořen posloupností čtyř kroků:

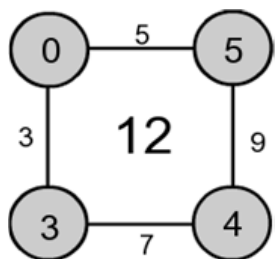
1. Je zvolena jistá výchozí situace, ve které není žádné neznámé číslo.
2. Když některá ze známých čísel utajíme, vznikne úloha tato čísla najít.
3. Rozbor výchozí situace z hlediska možností utajení jistých skupin čísel. Cílem rozboru je úplný přehled úloh, které lze z výchozí situace vytvořit.
4. Vytvoření gradované série úloh, které nabízí rozbor z bodu 3.

Zavedení prostředí

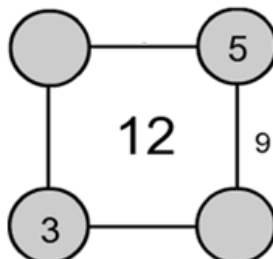
Aditivní mnohoúhelník je z matematického hlediska číselně ohodnocený graf, kde každý vrchol je ohodnocen jedním číslem, každá hrana je ohodnocena jedním číslem a celý graf je ohodnocen jedním číslem, které nazýváme číslem centrálním. V aditivním mnohoúhelníku platí dvě základní vazby: 1. číslo hrany je součet čísel v koncových vrcholech hrany; 2. centrální číslo je součet všech čísel ve vrcholech.

Na obrázku 1 vidíme vyplněný aditivní čtyřúhelník (bod 1. – výchozí situace). Když v něm zaslepíme 5 čísel (bod 2. – úloha) a necháme pouze 4 čísla (viz obr. 2), vznikne úloha.

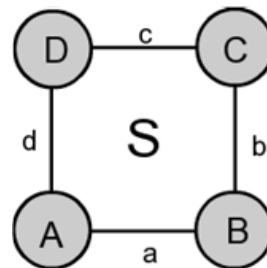
² „Theorists have coined the term schemes to refer to the memory structure that incorporate clusters of information relevant to comprehension. . . a A primary insight to scheme theories is that we do not simply have isolated facts in memory. Information is gathered together in meaningful functional units.“



Obr. 1



Obr. 2

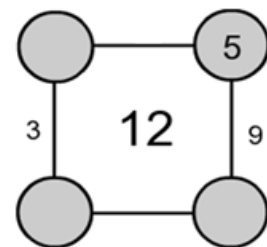


Obr. 3

Vytvořenou úlohu lehce vyřešíme. Abychom si snadněji porozuměli, uvádím označení jednotlivých prvků aditivního čtyřúhelníku (viz obr. 3).³ Pomocí obrázku 3 můžeme úlohu danou obrázkem 2 popsat souborem čtyř možností: $A = 3$, $C = 5$, $b = 9$, $S = 12$... Číslo B dostaneme jako $b - C$, tedy $9 - 5$, tedy $B = 4$. Podobně zjistíme, že $D = S - A - B - C = 12 - 3 - 4 - 5 = 0$. Ostatní čísla lehce dopočítáme (viz základní vazby).

Aditivní čtyřúhelník z obrázku 3 vede k otázce: *Kolik nejméně z daných devíti čísel musíme znát, aby byla úloha jednoznačně řešitelná?* Takovéto otázky jsem předkládala i osmi účastníkům dílny. Nejdříve jsme se bavili o aditivních trojúhelnících, pak čtyřúhelnících atd. Účastníci měli možnost řešit různé úlohy, tím nabývat zkušenosti a postupně odhalovat další vztahy. Když jsme u aditivního trojúhelníku zjistili, že potřebujeme znát alespoň tři čísla, mnozí už tušili, že u aditivního čtyřúhelníku to budou asi čísla čtyři. Pokusy účastníků najít tři čísla, která by jednoznačně popsala všechna čísla aditivního čtyřúhelníku, byly neúspěšné. Tato zkušenost vedla k přesvědčení, že k určení všech čísel čtyřúhelníku je potřeba znát alespoň čtyři jeho čísla. To bylo důvodem, proč jsme tyto úlohy začali nazývat 4dimenzními. Přesný důkaz zmíněného tvrzení vyžaduje probrat všechny případy trojic, a to by řešitele po několika případech přestalo bavit, protože na 4dimenznost tohoto prostoru nahlíželi jako na samozřejmost. Nejsnazším případem čtveřice čísel, které dají jednoznačné řešení, je když se tato čísla nachází ve vrcholech. Ptáme se: *Která další čtveřice čísel dá jednoznačné řešení?*

Díky předchozímu řešení několika úloh, které sloužily zejména k nalezení dimenze aditivního čtyřúhelníku, a které si účastníci tvořili sami metodou pokus-omyl, bylo už jasné, že se nejedná o jakákoliv čtyři čísla. Pro ilustraci zde uvádím úlohu na obrázku 4. I u této úlohy jsou známá právě 4 čísla tak, jak tomu bylo i u úlohy na obrázku 2.



Obr. 4

³Značení odpovídá konvencím geometrie s tím, že se zde objevuje i centrální číslo, které značíme S . Písmeno S je odvozeno od slova středové, protože žákům centrální číslo prezentujeme jako číslo středové. Tyto rozdíly mezi matematickým a didaktickým popisem, které se mohou jevit matoucí či zbytečné, vznikly pouze z nedostatku písmen v abecedě. V didaktické části totiž písmenem C , kterým bychom jinak označili číslo centrální, označujeme jeden z vrcholů. V matematické části zase písmenem S , kterým bychom mohli označit číslo středové, označujeme jedno ze zavedených zobrazení. (blíže viz Sukniak, 2013)

Nicméně, tato úloha má více řešení, tj. scházející čísla lze doplnit různými způsoby.

Příčina tohoto jevu spočívá v tom, že tři z daných čísel jsou závislá. Konkrétně se jedná o čísla 3, 12 a 9. Z těchto tří čísel tedy můžeme kterékoliv vymazat a na zadání se tím v podstatě nic nezmění.

V duchu vyučování orientovaného na budování schémat, nabízí prostředí aditivních mnohoúhelníků názornou a zajímavými úlohami obdařenou oblast, vhodnou pro základy schématu Lineárního prostoru. Jev závislosti respektive nezávislosti čísel, se kterým jsme se na obrázku 4 setkali, poukazuje na vztah tohoto prostředí k lineárním prostorům. Tato skutečnost dává prostředí aditivních mnohoúhelníků orientaci k hlubokým matematickým myšlenkám. Domnívám se, že když se student potká s pojmem lineárního prostoru v této sémanticky lépe uchopitelné vazbě, bude snadněji pronikat do teorie lineárních prostorů. Dodávám, že pro účastníky dílny, mezi nimiž byli i matematicky erudovaní lidé, byl poukaz na vazbu mezi lineárními prostory a aditivními mnohoúhelníky překvapením. To je příkladem toho, jak jsou v našich myslích drženy některé matematické fakty izolovaně, a nikoliv ve formě schémat.

Počet vrcholů mnohoúhelníku určuje dimenzi lineárního prostoru, který je s mnohoúhelníkem provázán. Soubor čísel ve vrcholech interpretujeme i jako bázi lineárního prostoru. Všechna ostatní čísla jsou z čísel vrcholů jednoznačně zjištělná. Když se vrátíme k otázce tvorby úloh v tomto prostředí, vzniká úkol najít všechny báze k danému mnohoúhelníku, a ke každé bázi popsat algoritmus, jak doplnit všechna scházející čísla. Žákům samozřejmě toto zadání formulujeme pro ně v přijatelném jazyce. Řešením úloh získávají zkušenosti se závislostí a nezávislostí prvků, hledají báze. Objeví-li například, že nějaký mnohoúhelník má n -prvkovou bázi, pak každá jeho další báze má právě n prvků. Zjistí, že skupinu závislých prvků nikdy nelze doplnit na bázi. K těmto zjištěním/objevům dojde po nalezení několika bází. Fakt, že počet prvků báze je neměnný, může být pouhou hypotézou podloženou sérií izolovaných modelů. Poté je namístě otázka týkající se důkazu této hypotézy. Žákům ji lze formulovat jako prosbu o vysvětlení jejich předpokladu. Právě díky vytvořeným izolovaným modelům se žáci mohou vrátit do situací, kde našli či nenašli bázi a použít je jako důkaz své hypotézy. Sofistikovanějším vysvětlením by bylo nahlížet na aditivní mnohoúhelník, jako na soubor n vrcholových čísel, pomocí kterých dopočítáme další čísla. Pokud tedy chceme dopočítat všechna čísla, musíme jich znát alespoň n , respektive právě n nezávislých.

V aditivním n -úhelníku je $2n + 1$ čísel. Každá n -tice z těchto čísel, která umožní jednoznačné doplnění čísel dalších, se nazývá bázi daného n -úhelníku. Vznikají zde dvě třídy n -úhelníku v závislosti na tom, zda je číslo n sudé nebo liché. Když je n číslo liché, tak n -tice čísel stran tvoří bázi. Když je n číslo sudé, tak n -tice čísel stran je závislá. Očíslujeme-li strany tak, jak za sebou obíhají kolem mnohoúhelníku,

pak se součet čísel lichých stran rovná součtu čísel sudých stran (tento součet je středovým číslem). Tato vazba říká, že soubor stran v příslušném lineárním prostoru tvoří nadrovinu. Báze takového mnohoúhelníku nemůže tedy obsahovat všechna stranová čísla, ale jedno z nich musí být nahrazeno vrcholem.

Úlohy z prostředí aditivních mnohoúhelníků mají silný didaktický potenciál. Rozhodující pro aplikaci daného didaktického prostředí je tvorba vhodných úloh, případně úlohových kaskád.

Na obecné úrovni umožňují vést žáky k odhalování nových pojmů, k analýze geometricko-aritmetických struktur, k rozvoji argumentace i k přesnému vyjadřování. Na konkrétní úrovni úlohy umožňují rozvoj tematických celků jako dělitelnost, soustavy rovnic, parametrické rovnice, výroková logika, rozšiřování číselných oborů a kombinatorika. Lze v něm vytvořit i úlohy týkající se například procent, posloupnosti a řad apod. Navíc prostředí rozvíjí jazyk algebry a umožňuje propedeutiku lineární algebry tím, že dává řešiteli zkušenosti s pojmy závislost, nezávislost a báze. O didaktické účinnosti tohoto prostředí svědčí i skutečnost, že i účastníci dílny dobře ovládající lineární algebru, měli radost z odhalování jednotlivých vazeb lineární závislosti.

Prostředí aditivních mnohoúhelníků lze rozšířit na prostředí aditivních mnohostěnů. Jestliže u aditivních mnohoúhelníků máme 3 druhy čísel, pak u mnohostěnů k nim přibudou čísla stěnová a situace se značně zkomplikuje. Přibudou otázky o přechodu mezi bázemi, které lze popsat maticemi. Tím se celé prostředí stane motivujícím pro náročnější partie lineární algebry.

Literatura

- [1] ATKINSON, R. L. aj. (2003) *Psychologie*. Vyd. 2. (298–299). Praha: Portál.
- [2] GERRIG, R. J. (1991) Text comprehension. In Sternberg, R. J.; Smith, E. E. (Eds.), *The psychology of human thought* (244–245). Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] HEJNÝ, M. (2007) Budování matematických schémat In Hošpesová, A.; Stehlíková, N.; Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (81–122). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [4] JIROTKOVÁ, D. (2007) Budování schématu síť krychle, In Hošpesová, A.; Stehlíková, N.; Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (143–176). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [5] SEMADENI, Z. (2002) Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzczeniowe, modele formalne. *Dydaktyka matematyki*, 24, (41–92).

- [6] SLEZÁKOVÁ, J. (2007) Prostředí Krokování, In Hošpesová, A.; Stehlíková, N.; Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (123–142). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [7] SUKNIÁK, A. (2013) *Didaktické prostředí aditivních mnohoúhelníků a mnohostěnů*. Diplomová práce. Praha : Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [8] WITTMANN, E. (2001) Developing mathematics education in a systematic process. *Educational Studies in Mathematics Education*, 48, (1–20).

Matematické rarity a jejich role ve výuce na 2. stupni ZŠ a na SŠ

LUKÁŠ VÍZEK, PETR ŘEHÁK¹

Obsahem tohoto příspěvku je ukázka některých „kuriozních“ matematických úloh z oblasti logiky, geometrie, aritmetiky nebo topologie a představení přímých zkušeností se zařazením prezentovaných příkladů do výuky na 2. stupni základní školy a na střední škole. Závěrem je diskutována užitečnost matematických rarit jako nástroje pro inspiraci, motivaci a rozvoje myšlení žáků a studentů.

Příspěvek byl inspirován knihou *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta* (Stewart, 2013) britského matematika, popularizátora této vědy, profesora Warwické univerzity Iana Stewarta.² V jejím úvodu nastínil autor pojem matematická kuriozita, resp. rarita takto:

Když mi bylo čtrnáct let, začal jsem si vést jeden zvláštní sešit. Byl to matematický deník ... zapisoval jsem si do něj cokoli zajímavého o matematice, na co jsem narazil a co se ve škole neučilo ... Sešit se časem rozrostl na šestisešit, který stále vlastním a který se posléze rozpadl na prvočinitele rozsypané po šuplatech. Je to rozmanitá směs úchvatných matematických her, hádanek, příběhů a kuriozit. (Stewart, 2013: str. 11)

¹Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze; Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové, vizek@karlin.mff.cuni.cz; Základní škola a mateřská škola Jana Pavla II., Hradec Králové, petr.rehak@czshk.cz

² Vedle jmenovaného titulu byly do češtiny přeloženy ještě jeho knihy *Hraje Bůh kostky?*, *Jak rozkrájet dort*, *Odsud až do nekonečna* a *Truhlice matematických pokladů profesora Stewarta*.

K pracovní dílně letošní konference „2 dny“ jsme vybrali několik úloh zmíněného typu, předvedli jejich řešení (resp. nechali je účastníky dílny vyřešit) a prezentovali zkušenosti s nimi na 2. stupni základní školy a na střední škole. Při výběru příkladů jsme dbali na jejich přiměřenou časovou náročnost a vzájemnou rozmanitost. Přiznejme, že volba úloh byla subjektivně ovlivněna a vycházela z našeho „sběru“ v průběhu času podobně jako u profesora Stewarta.

Nejprve předvedeme jednotlivé úlohy. Jejich řešení a doplňující informace (zejména o původu úloh) uvedeme v poznámkách pod čarou.

Logické úlohy

Poctivci a padouši³

Na ostrově žijí obyvatelé, které lze přesně rozdělit na dva kmeny. Jeden tvoří *poctivci*, již mluví jenom pravdu, a druhý *padouši*, co vždy lžou.

- a) Vypravíte se na ostrov a zeptáte se nějakého obyvatele, ke kterému kmeni patří. Jak vám odpoví?⁴
- b) Rozhodnete se, že si obyvatele z předchozí otázky najmete za svého průvodce, a vypravíte se s ním na cestu po ostrově. Cestou potkáte dalšího člověka. Vyšlete svého společníka, aby se jej zeptal, ke kterému kmeni patří. Učiní tak a sdělí vám, že domorodec tvrdil, že mluví vždy pravdu. Byl váš průvodce poctivec nebo lhář?⁵
- c) Na druhé straně ostrova objevíte park, kde spolu klábosí tři zahradníci. Zeptáte se prvního: „Jste padouch nebo poctivec?“ Odpoví vám, ale tak nezřetelně, že mu nerozumíte. Zeptáte se tedy druhého: „Co říkal?“ Sdělí vám: „Pravil, že je padouch.“ V tom okamžiku se ozve poslední: „Nevěřte mu, lže!“ Ke kterému kmeni patří každý ze zahradníků?⁶
- d) Z ostrova se už chystáte odcestovat. Na letišti vás však ještě zastaví tři uřečnění domorodci: Bohumil, Kazimír a Cyprián. Bohumil hned žaluje, že Kazimír je padouch. Na to se vnucuje Kazimír: „Bohumil a Cyprián nepatří ke stejnému

³ Máme zkušenost, že úlohy o poctivcích a padouších jsou vesměs známé napříč obcí učitelů matematiky. O jejich původu však nemáme informace.

⁴ Poctivec vám potvrdí, že je poctivec. Padouch však o sobě neřekne, že lže, neboť nemluví pravdu. Mohl by, např. prohlásit: „Nepatřím k žádnému kmeni.“ Takové tvrzení by odpovídalo jeho povaze, bořilo by však určitou eleganci celého problému. Doporučujeme jej (a jemu podobná prohlášení) neuvažovat. Tedy jednoduše, každý obyvatel ostrova o sobě říká, že je poctivec.

⁵ Domorodec jistě prohlásil: „Mluvím pravdu.“ Náš průvodce tuto skutečnost potvrdil, musí být tedy poctivec.

⁶ O prvním zahradníkovi nelze rozhodnout, druhý je padouch a třetí poctivec. První na položenou otázku musí odpovědět, že je pravdomluvný. Druhý jeho prohlášení neguje, tedy lže, což schvaluje třetí, tudíž poctivý obyvatel ostrova.

kmeni,“ k čemuž Cyprián dodá: „Bohumil je poctivec.“ Nechtějí vás pustit, dokud nerozsoudíte, ke kterému kmeni každý patří...⁷

Vlk, koza a zelí⁸

Sedlák chtěl zajet na trh a s sebou vzít vlka, kozu a zelí. Přijel k řece, přes níž se bylo možné přeplavit jen na malé loďce. Spolu s ním se do loďky vešla jen jedna z věcí, jež vezl. Ze zřejmých důvodů nebylo možné, aby na kterémkoliv břehu zanechal bez dozoru vlka s kozou nebo kozu se zelím (vlk naštěstí zelí nežere). Jak se má sedlák dostat přes řeku s celým svým nákladem?⁹

Manželská nedůvěra¹⁰

Tři žárliví muži se svými manželkami potřebují překonat řeku a najdou loď bez převozníka. Uveze však jen dvě osoby. Existuje možnost, jak se všichni dostanou na druhou stranu, aby žádná žena nebyla nikdy ponechána ve společnosti jiného muže bez dozoru svého manžela? Veslovat mohou muži i ženy. Žárlivost mužů je velická, nemohou nechat bez dozoru své ženy ve společnosti jiného muže ani tehdy, je-li zároveň přítomna jeho manželka.¹¹

⁷ Bohumil a Cyprián jsou poctivci a Kazimír je padouch. Pokud Bohumil tvrdí, že Kazimír lže, musí být poctivec a Kazimír skutečně padouch nebo přesně naopak. Každý patří k různému kmeni. Z (poslední) výpovědi Cypriána analogicky plyne, že on a Bohumil patří ke stejnému kmeni. To je však v rozporu s Kazimírovým prohlášením. On proto musí lhát a Bohumil s Cypriánem mluvit pravdu.

⁸ Úloha byla pravděpodobně sestavena anglickým filozofem, opatem a rádcem Karla Velikého (742–814) Alcuinem z Northumbrie (835–804). Více viz (Mačák, 2001: str. 11.)

⁹ Nejprve sedlák převezme kozu a přepluje zpět. Následně pojede s vlkem (nebo zelím) a při návratu odveze kozu. Na třetí cestě naloží zelí (nebo vlka) a nakonec se otočí pro kozu.

¹⁰ Úloha byla převzata z (Stewart, 2013: str. 94–95).

¹¹ Řešení naznačíme pomocí tabulky, v níž A, B, C představuje muže a a, b, c jejich manželky.

pořadí	start	cesta	cíl
	$AaBbCc$		
1.	$BbCc$	$Aa \rightarrow$	
2.	$BbCc$	$\leftarrow A$	a
3.	ABC	$bc \rightarrow$	a
4.	ABC	$\leftarrow a$	bc
5.	Aa	$BC \rightarrow$	bc
6.	Aa	$\leftarrow Bb$	Cc
7.	ab	$AB \rightarrow$	Cc
8.	ab	$\leftarrow c$	ABC
9.	b	$ac \rightarrow$	ABC
10.	b	$\leftarrow B$	$AaCc$
11.		$Bb \rightarrow$	$AaCc$
			$AaBbCc$

Geometrické úlohy¹²

Sfinga

Sfingou budeme v této úloze rozumět rovinný geometrický útvar složený ze šesti rovnostranných trojúhelníků (viz obr. 1). Úkol zní takto: Složte ze čtyř těchto sfing jednu dvojnásobně zvětšenou. Jednotlivé díly lze posunovat, otáčet i zrcadlově převracet.



Obr. 1: Sfinga a Řecký kříž.

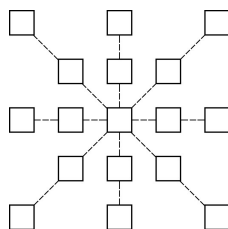
Řecký kříž

Řeckým křížem budeme v této úloze rozumět rovinný geometrický útvar složený z pěti shodných čtverců (viz obr. 1). Úkol zní takto: „Rozstříhejte“ řecký kříž na čtyři stejné části, jež by bylo možné složit do čtverce.¹³

Aritmetické úlohy

Magická hvězda¹⁴

Vepište do políček hvězdy (viz obr. 2) čísla od 1 do 17 tak, aby v každém ze čtyř vyznačených směrů dávaly jednotlivé pětice součet 45.



Obr. 2: Magická hvězda.

¹² Původ úloh o sfince a řeckém kříži neznáme. Uvádí je (Stewart, 2013: str. 46 a 80–81), lze je také jednoduše dohledat v různých internetových zdrojích.

¹³ Poznámka k řešení kříže: naznačené rozstříhnutí „vychází“ z polovin příslušných stran útvaru.



¹⁴ Úloha byla převzata ze staré učebnice (Hořčíčka, Nešpor, 1905: str. 10).

Slepené zlomky¹⁵

Prostudujte následující řešení součinu zlomků:

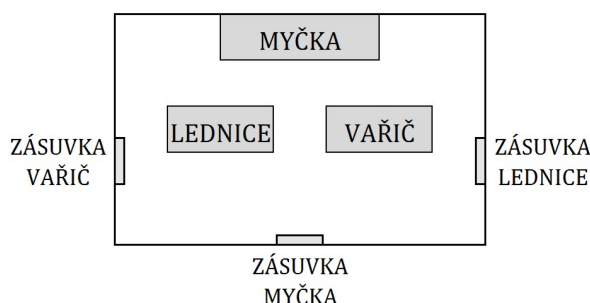
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{45} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{2}{5}.$$

Výsledek je evidentně správně, $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$, ale první krok je poněkud „podivný“. Nalezněte další příklady součinu dvou zlomků, jejichž čitatele i jmenovatele tvoří jednociferná (nenulová) přirozená čísla, a jež lze správně vypočítat tak, že zlomky pouze „slepíme“.¹⁶

Topologická úloha

Myčka, lednice a vaříč¹⁷

Propojte myčku, lednici a vaříč s příslušnými zásuvkami (viz obr. 3.) tak, aby se jednotlivé kabely nekřížily.¹⁸



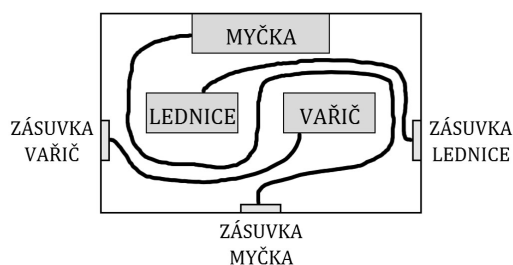
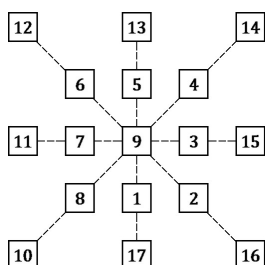
Obr. 3: Myčka, lednice a vaříč.

¹⁵ Úlohu uvádí (Stewart, 2013: str. 190).

¹⁶ Obecně řešíme rovnici $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{10a+c}{10b+d}$, resp. $ac(10b+d) = bd(10a+c)$, kde a, b, c a d jsou přirozená čísla od 1 do 9 včetně. Existuje 81 jednoduchých řešení pro případy, kde $a = b$ a $c = d$. Netriviálních řešeních je 7: $(a, b, c, d) = (1, 2, 5, 4), (1, 4, 8, 5), (1, 6, 4, 3), (1, 6, 6, 4), (1, 9, 9, 5), (2, 6, 6, 5)$ a $(4, 9, 9, 8)$, resp. 14, pokud uvažujeme převrácené hodnoty (b, a, d, c) .

¹⁷ S touto úlohou, resp. jejími variantami danými různými předměty k zapojování se podle naší zkušenosti setkala mnoho učitelů matematiky. Původ příkladu však neznáme.

¹⁸ Řešení (spolu s úlohou magická hvězda):



Fyzikální úloha na závěr

Bazén v Praze 4 – Podolí¹⁹

Plujete na kánoji v plaveckém bazénu v Praze – Podolí (po zavírací době). S sebou vezete balvan, špalek a barel s vodou. Zvedne se, zůstane stejná nebo se zvýší hladina vody v bazénu, pokud do ní z lodi hodíte balvan, špalek nebo vylejete barel?²⁰

Reflexe

K představení zkušeností s uvedenými netradičními úlohami nyní znovu projdeme tyto příklady a u každého uvedeme několik postřehů.

Domníváme se, že úlohy z ostrova poctivců a padouchů tematicky nejvíce souvisejí s výrokovou logikou. Proto byly často řazeny při výuce tohoto celku (zpravidla v prvním ročníku SŠ),²¹ sloužily zejména k motivaci v úvodu. Jejich řešení vychází ze dvou prostých podmínek: poctivci mluví pravdu, padouši lžou. V dobrém slova smyslu řečeno, k rozluštění hádanky je třeba jen „čistě uvažovat“. Ohlasy studentů byly zpravidla velmi pozitivní. Na úlohy představené výše je navíc možné navázat složitějšími situacemi z ostrova,²² k jejichž řešení lze efektivně využít přepis do výrokové logiky, upotřebit logické spojky, složené výroky a jejich negace. Dojde tím k propojení „standardního učiva“ a kuriózních problémů ostrova, čímž je možno přispět k zlepšení znalostí a dovedností studentů v této látce.

Vlk, koza a zelí je svým způsobem legendární úloha. Je obsažena v řadě (nejen) popularizačních knih o matematice. Do hodin matematiky byla řazena volně, nezávisle na probíraném učivu, sloužila jako rozcvička, způsob odreagování nebo smysluplného zaplnění zbývajících času. Výhoda úlohy spočívá v její časové nenáročnosti a přiměřené obtížnosti i pro žáky základní školy. Ke správnému výsledku došla většina, mnozí si všimli i dvou řešení. Manželská nedůvěra je podobné zadání, avšak zabere více času a je náročnější.²³

¹⁹ Úlohu vymyslel nezávisle na literatuře L. Vízek se svým bratrem MgA. Adamem Vízkem před několika lety. Části veřejnosti bude však úloha známá, shodou okolností byl v principu podobný problém uveřejněn dne 20. března 2014 pod názvem *Záhada vysypané lodi* na serveru Alík (viz http://alik.idnes.cz/zabavna-fyzika-archimeduv-zakon-daa-/alik-alikoviny.asp?c=A140214_114336_alik-alikoviny_jit [cit. 2014-03-20]).

²⁰ Hodíte-li z lodi do vody balvan, hladina bazénu klesne. Pokud vrhnete špalek nebo vylejete barel, hladina zůstane stejná. Jak to jen učinit, aby voda v bazénu stoupla?

²¹ V letech 2010 až 2013 působil L. Vízek na Gymnáziu Nový Bydžov

²² Například úlohami typu *Dva obyvatelé ostrova*, *Eva a Adam podali tyto výpovědi. Eva: „Jestli není Adam poctivec, pak jsem poctivec já.“ Adam: „Padouch je Eva, nebo je na ostrově zlato.“ Rozhodněte o Adamovi, Evě a zlatu na ostrově.*

²³ Obě úlohy bývají v angličtině označovány jako *river crossing puzzle*, dalším známým příkladem je problém přechodu mostu v noci se svíci. Řešení rozebírá, např. článek Rote G., *Crossing the bridge at night*, dostupný on-line na <http://page.mi.fu-berlin.de/rote/Papers/pdf/Crossing+the+bridge+at+night.pdf> [cit. 2014-03-21].

Sfinga a řecký kříž mají vizuální povahu. Jejich význam spatřujeme v možném zvýšení zájmu žáků a studentů o geometrii. Sfinga je poměrně jednoduchou hádankou, úspěšných řešitelů bývá mnoho. Řecký kříž dovedla rozstříhat na stejné části rovněž většina, ovšem, aby z nich bylo možné složit čtverec, bylo již problematické. Ke správnému přístupu lze vhodně nasměrovat, aniž bychom výsledek prozradili. Můžeme zdůraznit, že vzhledem ke středové souměrnosti kříže podle jeho středu, musí stříhy procházet tímto bodem. V podstatě řez vedeme osovým křížem, jenž je třeba jen vhodně natočit. K problému je možné přistoupit i algebraicky. Na základě plošného obsahu řeckého kříže vypočítáme velikost strany „budoucího“ čtverce, což nás navede na správné natočení stříhů.

Dvojice aritmetických úloh magická hvězda a slepené zlomky představují opět nejprve lehčí a následně obtížnější úlohu. Výše ukázané řešení hvězdy samozřejmě není jediné možné. Pořadí umístění čísel je však svým způsobem elegantní a vystihuje motivační úlohu cvičení. Zlomky jsou omnoho náročnější. Často se žákům podaří nalézt triviální řešení nebo převrácené zlomky k ukázkovému příkladu. Objevit netriviální varianty je obtížné, může být otázkou domácí práce. Největší přínos problému spatřujeme v jistém zaujetím zlomky, látky, v níž nebývají někteří žáci příliš bezchybní.

Předposlední topologická úloha byla vždy velmi úspěšná a rychlá. Rozluštila ji většina řešitelů. Lze ji zadat pro osvěžení hodin nebo k odreagování takřka při jakékoliv probírané látce. Její povaha je opět vizuální, můžeme ji zařadit jako motivační úlohu, pokud bychom rádi studentům přiblížili svět topologie nebo teorie grafů.

Závěrečná úloha s bazénem byla zadávána pro pobavení zejména ostatním kolegům vyučujícím. Představuje jednoduché cvičení na Archimédův zákon, k našemu překvapení nebyla úspěšnost řešitelů nikterak vysoká. Další zkušenosti s příkladem již ponecháme na čtenáři.

Závěr

Tento příspěvek budiž vnímán jako určitá sonda do života nestandardních matematických úloh, k jejichž objevování, řešení a užívání v učitelské praxi jsme chtěli inspirovat. Naše zkušenosti se zařazením těchto úloh v hodinách matematiky byly vesměs velmi dobré. Docílili jsme nimi zvýšení pozornosti, uvolnění atmosféry i zlepšení klimatu ve třídách. Závěrem vyzdvihneme ještě jeden poznatek. V řešení problémů byli mnohdy rychlejší žáci, resp. studenti, jenž jsou prospěchově spíše průměrní, ba i podprůměrní. Radost těchto řešitelů ze správných výsledků je pro nás velice cenná. Máme naději, že nejen jim mohou matematické rarity otevírat dveře k dalšímu objevování, tvoření a učení se v matematice.

Literatura

- [1] HORČIČKA, J., NEŠPOR, J. (1905). *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí. Díl I.* 2. vyd. Praha: J. Otto.
- [2] MAČÁK, K. (2001). *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 15. Praha: Prometheus.
- [3] STEWART, I. (2013). *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta.* Edice Atelier, svazek č. 53. Praha: Argo, Dokořán.

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Tvorba video-databázy pomocou pera SmartPen

KATARÍNA FURCOŇOVÁ, VERONIKA HUBEŇÁKOVÁ¹

Chyba je pri učení prirodzeným javom. Dobrý učiteľ matematiky sa na ňu nepozera ako na prekážku poznania, ale ako na bohatý zdroj informácií o žiakovi, o úrovni jeho myslenia. Chyby môže vo svoj prospech využiť aj žiak sám, učiť sa na chybách vlastných či cudzích, a tak ich zúžitkovať na rozvoj svojich schopností. V príspevku predstavíme žiacke riešenie slovnej úlohy spracované formou videa, ktoré je krok po kroku doplnené otázkami na diskusiu medzi žiakmi a učiteľom.

Slovné úlohy z matematiky a žiacka chyba

Riešenie slovných úloh je neustálym problémom matematického vzdelávania. Vychádza z intuície, skúseností a znalostí riešiteľa a z jeho schopnosti pamätať si, kombinovať, uvažovať. Ako tvrdí Kuřina (2011) „neúspech žiaka pri riešení úlohy nemusí byť spôsobený neznalosťou logiky napr. metódami dokazovania, ale nízkou úrovňou predstavivosti, neschopnosťou vidieť súvislosti a nahliadnuť na situáciu z nového pohľadu.“ V počiatočkoch učenia by mal učiteľ chápať chybu ako zákonitý jav, ktorý je potrebné využiť v prospech žiaka v ďalších etapách učenia. Piaget preukázal, že ak sa dieťa dopustí chyby, nie je to obvykle spôsobené jeho neschopnosťou, dieťa jednoducho reaguje na základe svojej dosiahnutej úrovne myslenia. „Túto úroveň je možné zvýšiť, ak poskytneme deťom príslušnú znalostnú základňu a ak venujeme pozornosť procesom, ktorých prostredníctvom môžu túto základňu vhodne štrukturovať a využívať.“ (Fontana, 2010)

Z týchto dôvodov považujeme za dôležité, aby sa budúci učelia matematiky naučili využiť žiacke chyby v prospech rozvoja žiackej schopnosti riešiť matematické úlohy. Inými slovami, rozvinúť svoje diagnostické kompetencie (základné zložky profesijných kompetencií pedagóga), ktoré Bajtoš (2007) definuje ako schopnosť „vycítiť a poznať, ako žiak myslí, cíti a správa sa, aké to má príčiny, kde má problémy, ako mu je možné pomôcť, čiže tieto kompetencie umožňujú individualizovať

¹PF UPJŠ, Ústav matematických vied v Košiciach, katarina.furconova@gmail.com, veronika.hubenakova@student.upjs.sk

pôsobenie učiteľa smerom k žiakom.“ Súčasťou diagnostických a intervenčných kompetencií je hodnotenie žiakov, ktoré je kľúčovým faktorom efektívnosti výučbového procesu. Na matematike sa často zužuje len na klasifikáciu písomných prác žiakov. To poukazuje na nedostatky v príprave budúcich učiteľov matematiky v oblasti formatívneho hodnotenia.

Hľadanie a analýza chýb, ktoré sa vyskytujú pri riešení úloh, môžu samotným žiakom pomôcť rozvíjať ich kompetencie na úrovni reflexie. Kompetencie na tejto úrovni možno opísať charakteristikami ako sú napríklad rozvinuté uvažovanie, argumentácia, abstrakcia, zovšeobecnenie a modelovanie použité v nových, neznámych kontextoch (zadaniach slovných úloh), originálny matematický prístup, spojenie viacerých zložitejších metód, získavanie vhľadu do problémov.

Prečo SmartPen

Spôsobov, ako analyzovať chybu v riešení, resp. riešenie ako také, je viacero. Pri didaktických experimentoch majú žiaci najčastejšie riešiť jednu alebo viacero matematických úloh použitím iba pera a papiera. Výhodou je prirodzenosť riešenia, pretože žiaci sú zvyknutí na taký spôsob riešenia úloh. Avšak na druhej strane tieto vedecké texty sú často záznamom výsledku myslenia, nie záznamom procesu myslenia žiakov, ako ukazuje DeBock (1998) alebo Uesaka (2007). Čoraz rozšírenejšia metóda získavania vedeckých výsledkov Eye tracking (Duchowski, 2007) je technologicky presná, zaznamenáva proces, no myslíme si, že na experimenty so žiakmi je nevhodná. Ide o fixovanie hlavy, kalibráciu očí a to spôsobuje nepohodu pri riešení aj jednoduchých matematických úloh. Inou technologickou pomôckou pre zachytenie riešenia žiaka je grafický tablet. Jeho nevýhodou je však to, že žiak píše na dotykovú plochu a pritom musí pozeráť na monitor počítača, aby videl, čo skutočne napísal. Tento faktor opäť negatívne ovplyvňuje sústredenosť žiaka na samotné riešenie zadanej úlohy.

SmartPen je na pohľad obyčajné pero, no v jeho vnútri sa skrýva malý počítač, ktorý audiovizuálne nahráva písaný text v reálnom čase (viac o tejto technológii na www.smartpen.sk). Pomocou SmartPen dokážeme zabezpečiť prirodzenosť riešenia, zaznamenanie detailov procesu – ako sa riešenie vyvíjalo, nápady, pokusy, a taktiež umožňuje vhodné video spracovanie, ktoré bude využiteľné vo forme databázy pre budúcich učiteľov na seminároch a cvičeniach, ale aj na vyučovacích hodinách na základných a stredných školách. Pomocou interaktívneho videa spracovaného pomocou SmartPen chceme prispieť k aktivizácii všetkých žiakov v danej triede, k rozvoju schopnosti logickej argumentácie, kritického myslenia a zabrániť zlyhávaniu žiakov v rôznych fázach riešenia slovnej úlohy.

Ukážka riešenia slovnej úlohy a metodické komentáre

V tejto časti uvádzame metodický popis práce s videom, ktoré obsahuje riešenie Anity, žiačky 5. ročníka ZŠ. Anita v ňom rieši slovnú úlohu o Pinocchiov: *Keď Pinocchio zaklame, nos sa mu predĺži o 6 cm. Keď povie pravdu, nos sa mu o 2 cm skráti. Keď sa ráno zobudil, jeho nos meral 9 cm. Pri raňajkách povedal tri nepravdivé vety a dve pravdivé vety. Koľko meral Pinocchiov nos po raňajkách?*

Učiteľ pri práci s videom ho po každej očíslovanej inštrukcii/otázke pozastaví a podľa potreby opäť spustí:

1. *Vyrieš slovnú úlohu do svojho zošita.* – učiteľ podľa vlastného uváženia poskytne žiakom čas na samostatné vyriešenie zadanej slovnej úlohy. Aby žiakov video pri riešení nerušilo, učiteľ ho pozastaví počas 6 sekundového čierneho pozadia.
2. *Riešme slovnú úlohu spolu s Anitou.* – po tejto inštrukcii nasleduje samotný záznam Anitinho riešenia. Pozn. autora: Po prečítaní úlohy sa Anita vyjadrila, že tomu vôbec nerozumie. Bolo by zaujímavé zistiť, do akej miery má takéto vyjadrenie žiaka hneď po prvom prečítaní úlohy vplyv na celkovú úspešnosť riešenia.
3. *Čo podľa teba teraz Anita robila?* – učiteľ očakáva od žiakov odpoveď, že Anita čítala zadanie, snažila sa správne porozumieť textu. Ak to neurobia žiaci sami, učiteľ im pripomenie, že na prvú fázu riešenia slovných úloh (poriadne si prečítať zadanie) nesmú zabúdať.
4. *Sleduj Anitine riešenie slovnej úlohy a porovnaj ho so svojim riešením zo zošita.* – každý žiak si priebežne porovnáva vlastné riešenie s riešením Anity, robí si do vlastného riešenia poznámky.
5. *Prečo asi Anita napísala číslo 9?* – učiteľ kladie otázku smerom k žiakom, sám na ňu neodpovedá, čaká, kým sa žiaci v názoroch zjednotia a prípadne s nimi potom prediskutuje správnosť ich záverov.
6. *Urobila Anita správne výpočty? Čo nimi vyjadrila?* – riešenie Anity pokračuje výpočtami $6 \cdot 3 = 18$; $9 + 18 = 27$. Opäť postupujeme ako v bode 5.
7. *Čo si myslíš, ako bude teraz Anita pokračovať v riešení úlohy?* – po tejto otázke očakávame rozdelenie žiakov na skupiny (postupujú vo vlastnom riešení rovnako ako Anita, nepostupujú rovnako, ich riešenie sa iba čiastočne podobá Anitinmu, atď.). Ak má učiteľ priestor a čas, môžu vzniknúť tieto skupiny aj fyzicky, čím vyučovacia hodina získa na dynamike. Učiteľ očakáva, že žiaci, ktorí sú v rôznych skupinách, budú odpovedať rôzne podľa ich vlastného zápisu v zošite a podľa presvedčenia, že práve ich riešenie je to správne. Zaujímavé sú najmä názory, ktoré hovoria, akú matematickú operáciu Anita

použije. Sú povolené do istej miery aj rozhovory medzi žiakmi, učiteľ sa však neprikloní ani k jednej z možností, hoci je správna. Ak niektorý zo žiakov zmení v procese riešenia úlohy názor na svoje vlastné riešenie, prejde do inej skupiny.

8. *Je Anita odpoveď správna?* – nasleduje diskusia o tom, či Anita odpovedala správne alebo nie, resp. čo mohla urobiť inak. Vítané sú názory všetkých žiakov, aby učiteľ získal prehľad, kto ako o úlohe premýšľa. Až v tejto chvíli má byť žiakom jasné, že Anitine riešenie je správne a ukáže sa, ktorej skupine žiakov sa má učiteľ ešte venovať a ktorú môže za správne riešenie pochváliť.
9. *Ako by vyzeralo riešenie tejto úlohy pomocou obrázka?* – Pre tých žiakov, ktorým úloha robila problémy, je vhodné jej zadanie a riešenie názorne vizualizovať a tým pomôcť k zlepšeniu porozumenia úlohy. Na záver sa ešte vo videu objaví zadanie slovnej úlohy, takže učiteľ môže ešte raz zhrnúť, na čo si majú žiaci dávať pozor.

Pre budúcich učiteľov pozorovanie riešení jednotlivých žiakov znamená najmä odhaľovanie, v ktorej etape riešenia slovnej úlohy nastáva u žiaka problém a odpovedanie na otázky typu: *Porozumela Anita zadaniu slovnej úlohy? Zostavila správne matematický model? Vyriešila správne matematický model? Interpretovala správne riešenie matematického modelu?* Je to dobrý spôsob, ako študentom priniesť informáciu o etapách riešenia slovnej úlohy, neostávame však len pri strohých odpovediach. Chceme vedieť, ktorá časť videoukážky, ktorá veta/zápis ich o tom presvedčil.

Zaujíma nás ďalej reakcia budúceho učiteľa na žiacke riešenie a formulácia pomocných a diagnostických úloh: *Čo poviete Anite bezprostredne po riešení tejto úlohy? Za čo ju pochváľite? Na čo ju je potrebné upozorniť? Ako to všetko poviete?* V tejto časti je dôležitý nácvik správneho formulovania spätnej väzby pre žiaka. Preto by študenti mali formulovať svoje odpovede tak, ako by ich skutočne povedali žiačke Anite. Je rozdiel povedať: „Ja by som to vypočítal tak, že. . .“ a skutočne vyriešiť nejakú úlohu. Len vtedy totiž zistíme, kde robíme chyby a na čom potrebujeme popracovať. Študenti sa tu učia jednak tým, že sami formulujú vety adresované žiakom a jednak tým, že sa navzájom počúvajú a hľadajú spôsob, ako výpovede ostatných kolegov zlepšiť.

Úlohy na formulovanie otázok/inštrukcií, ktoré pomôžu žiakovi nájsť a poučiť sa z vlastných chýb vyžadujú od študentov matematické porozumenie úlohe, aj porozumenie chybe žiaka. Učiteľ matematiky by mal byť schopný namodelovať situáciu tak, aby sa v nej ukázala chyba, ktorú žiak urobil a zároveň pripraviť podobnú situáciu, na ktorej sa ukáže, či došlo k náprave v myslení žiaka. Okrem schopnosti formatívne hodnotiť tak rozvíjame aj schopnosť tvoriť úlohy.

Poznámka: V prípade záujmu o video s riešením slovnej úlohy o Pinocchiovi, kontaktujte nás na email: katarina.furconova@gmail.com.

PodĎakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou grantu VVGS-2013-119.

Literatura

- [1] BAJTOŠ, J. (2007). *Kapitoly zo všeobecnej didaktiky*. Košice: Equilibria.
- [2] DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L. & JANSSENS, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. In *Educational Studies in Mathematics* (65–83), vol. 35. ISSN 0013-1954.
- [3] DUCHOWSKI, A. (2007). *Eye Tracking Methodology: Theory and practice*. London: Springer.
- [4] FONTANA, D. (2010). *Psychologie ve školní praxi*. Praha: Portál.
- [5] KUŘINA, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [6] UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use diagrams in mathematics problem solving? In *Learning and Instruction* (322–335), vol. 17. ISSN 0959-4752.

Využitie GeoGebry pri riešení lineárnych optimalizačných úloh

ŠTEFAN GUBO¹

Optimalizačné úlohy sú také výpočtové úlohy, ktorých cieľom je nájdenie optimálneho riešenia na množine prístupných riešení. V prípade lineárnych optimalizačných úloh účelová funkcia je lineárna a všetky ohraničujúce podmienky sa dajú vyjadriť lineárnymi rovnicami alebo nerovnicami. V príspevku uvádzame grafické riešenie takýchto úloh pomocou dynamického geometrického softvéru GeoGebra.

¹Ekonomická fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne, guboi@ujss.sk

Lineárna optimalizačná úloha a jej grafické riešenie

Definícia (Berežný & Kravecová, 2012): Lineárna optimalizačná úloha je optimalizačná úloha s n premennými a m ohraničujúcimi podmienkami, ktorú všeobecne možno zapísať matematickým modelom v tvare:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \longrightarrow \mathbf{opt} \text{ (max, min)} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geqslant \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geqslant \leqslant b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geqslant \leqslant b_m \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde b_i, c_j a a_{ij} sú reálne konštanty a x_j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) sú neznáme reálne čísla. Rovnica (1.1) vyjadruje účelovú funkciu a sústava nerovníc príp. rovníc (1.2) popisuje ohraničujúce podmienky lineárnej optimalizačnej úlohy.

Úlohy lineárnej optimalizácie môžeme rozdeliť do niekoľko skupín, napr. výrobná úloha, dopravná úloha, zmiešavacia úloha, rezný plán, priradovacia úloha atď., pozri (Kolman & Beck, 1995). V ďalšej časti príspevku uvedieme riešenie nasledovnej výrobnéj úlohy:

*Firma vyrába dva druhy produktov **X** a **Y**. Oba druhy sa vyrábajú zo surovín **A**, **B**, **C** a **D**. Na vyrobenie jednotkového množstva produktu **X** firma spotrebuje 2 jednotky zo suroviny **A**, 2 jednotky zo suroviny **B** a 4 jednotky zo suroviny **C**. Na vyrobenie jednotkového množstva produktu **Y** firma spotrebuje 4 jednotky zo suroviny **A**, 1 jednotku zo suroviny **B** a 4 jednotky zo suroviny **D**.*

*Zisk z predaja jednotkového množstva produktu **X** je 4 EUR a produktu **Y** 6 EUR.*

*Na sklade je k dispozícii 16 jednotiek zo suroviny **A**, 10 jednotiek zo suroviny **B**, 16 jednotiek zo suroviny **C** a 12 jednotiek zo suroviny **D**.*

Otázka: Aké množstvá jednotlivých produktov má firma vyrobiť zo surovín, aby dosiahla maximálny zisk?

Všetky potrebné údaje si zapíšeme do tabuľky (tabuľka 1).

Na výrobu x kusov produktu **X** a y kusov produktu **Y** firma spotrebuje $2x + 4y$ jednotiek zo suroviny **A**. Avšak k dispozícii má len 16 jednotiek. Matematickou symbolikou toto obmedzenie vyjadríme ako nerovnosť $2x + 4y \leq 16$. Podobne pre surovinu **B** platí nerovnosť $2x + y \leq 10$, pre surovinu **C** nerovnosť $4x \leq 16$ a pre surovinu **D** platí nerovnosť $4y \leq 12$.

		produkty		kapacita
		X	Y	
suroviny	A	2	4	16
	B	2	1	10
	C	4	0	16
	D	0	4	12
zisk		4 EUR	6 EUR	
množstvo		x	y	

Tab. 1: Počiatočné údaje výrobnéj úlohy

Je zrejmé, že firma nemôže vyrobiť záporný počet kusov akéhokoľvek produktu a preto k podmienkam pridáme aj podmienky nezápornosti: $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

Ak firma vyrobí x kusov produktu **X** a y kusov produktu **Y**, zisk z predaja oboch produktov vypočítame podľa vzťahu $f(x, y) = 4x + 6y$. Našou úlohou je maximalizovať túto účelovú funkciu.

Matematický model lineárnej optimalizačnej úlohy teda môžeme zapísať v tvare:

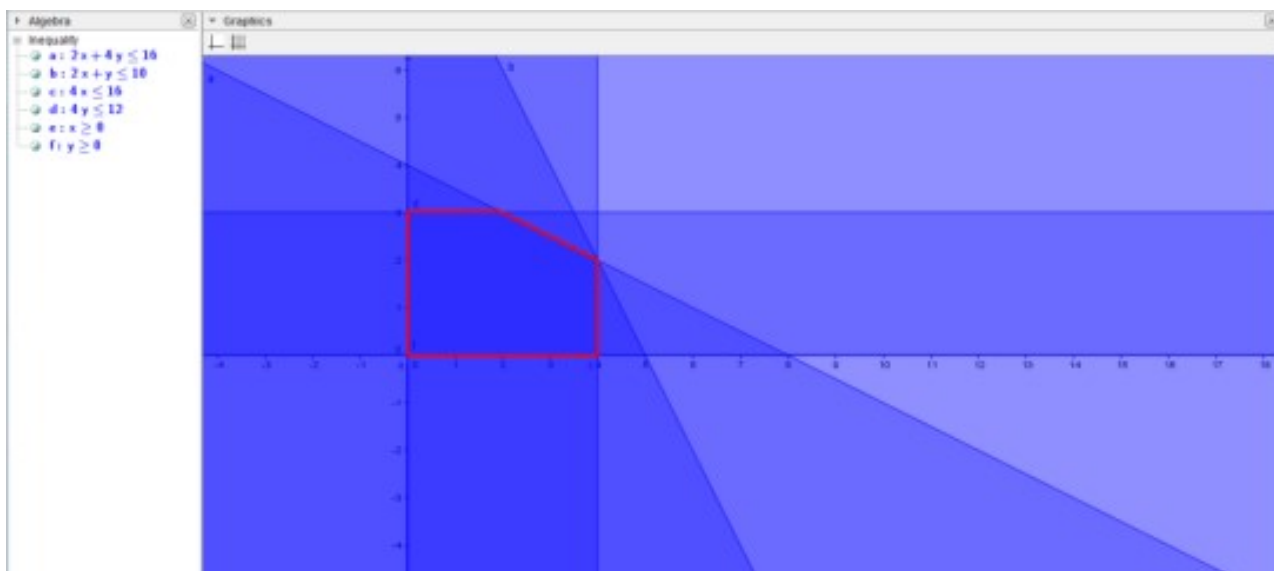
$$f(x, y) = 4x + 6y \longrightarrow \mathbf{max}$$

$$\begin{aligned} \text{za podmienok:} \quad & 2x + 4y \leq 16 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & 4x \leq 16 \\ & 4y \leq 12 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy nerovníc je každá usporiadaná dvojica kladných celých čísel, po dosadení ktorých za x a y dostaneme z každej nerovnice sústavy pravdivý výrok. Všetky riešenia tejto sústavy tvoria **množinu prípustných riešení** optimalizačnej úlohy. Naším cieľom je nájsť také prípustné riešenie, pre ktoré má účelová funkcia maximálnu hodnotu.

Grafická metóda znázorňuje riešenia jednotlivých nerovníc sústavy v karteziánskej súradnicovej sústave. Z podmienok nezápornosti vyplýva, že všetky riešenie budú v prvom kvadrante, v prieniku štyroch polrovín. Obrazom množiny prípustných riešení je mnohoúholník najtmavšej farby, ktorého strany ležia na hraničných priamkach príslušných polrovín (obr. 1).

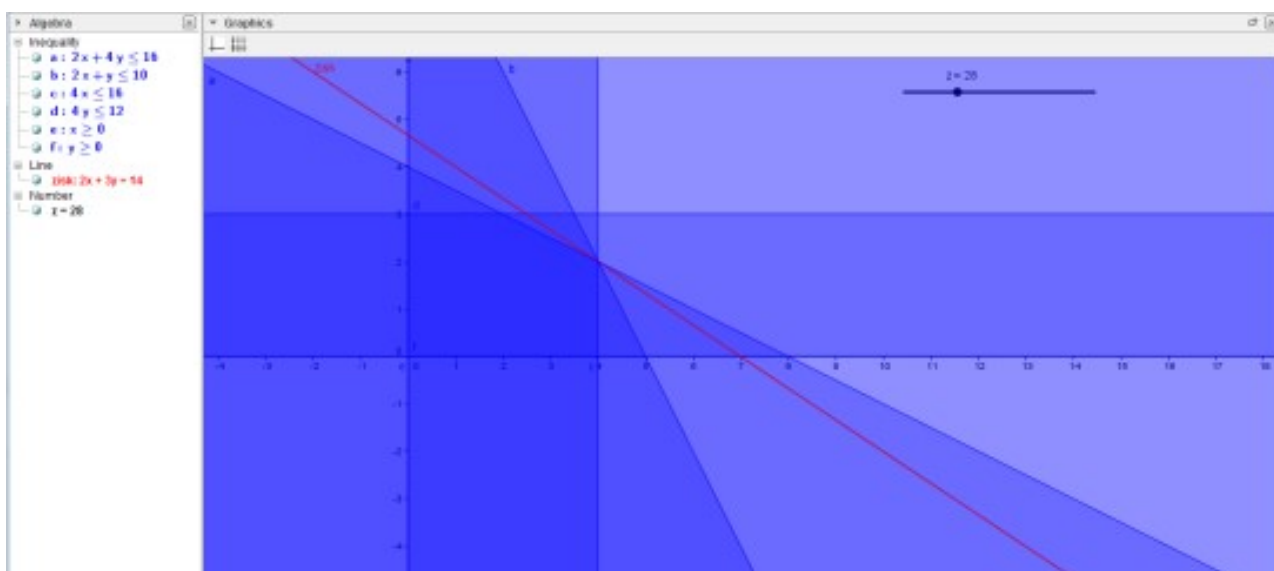
V tomto mnohoúholníku budeme hľadať optimálne celočíselné riešenie. Triviálnym prípustným riešením je dvojica $x = 0, y = 0$, ktorá vyjadruje, že firma nebude vyrábať produkty, ale to jej neprinesie žiadny zisk. Do súradnicovej sústavy zakreslíme priamku účelovej funkcie pre ľubovoľne zvolenú hodnotu parametra c , a bu-



Obr. 1: Obráz množiny prípustných riešení výrobnéj úlohy

deme hľadať taký bod mnohoúhelníka, cez ktorý prechádza „najvyššie“ umiestnená rovnobežka. Využijeme dynamiku softvérového riešenia a použijeme nástroj posuvník softvéru GeoGebra. Ľahko zistíme, že bod $[4,2]$ je obrazom optimálneho riešenia tejto výrobnéj úlohy (obr. 2). Firma by teda mala vyrobiť 4 kusy z produktu X a 2 kusy z produktu Y .

Všimnime si, že bod $[4,2]$ leží na prieniku troch hraničných priamok polrovín. V kontexte výrobnéj úlohy to znamená, že zásoby surovín A , B a C sa použijú bezo zvyšku.



Obr. 2: Obráz optimálneho riešenia výrobnéj úlohy

Záver

Na základe uvedených môžeme voľne širiteľný dynamický geometrický softvér GeoGebra považovať za vhodný nástroj pre grafické riešenie lineárnych optimalizačných úloh s dvomi premennými bez používania poznatkov z vyššej matematiky.

Literatura

- [1] BEREŽNÝ, Š. & KRAVECOVÁ, D. (2012). *Lineárne programovanie*. Košice: Technická univerzita v Košiciach. ISBN 978-80-553-0910-1.
- [2] KOLMAN, B. & BECK, R. E. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. San Diego, CA: Academic Press. ISBN 978-0-12-417910-3.

Formulator Tarsia – jednoduchý program pro tvorbu matematických skládaček

VERONIKA HAVELKOVÁ¹

Príspevek se zabývá programem Formulator Tarsia, který umožňuje tvorbu domin, triomin a jiných her vhodných k oživení procvičovaného učiva nejen v matematice.

Program *Formulator Tarsia* není v České republice příliš známý a to i přes to, že se může stát velmi šikovným pomocníkem učitele při přípravě didaktických materiálů, který je navíc zdarma a podporuje matematický text. Jako nevýhoda se může pro někoho jevit to, že program nabízí prostředí v angličtině a nikoliv v češtině. Vzhledem k jednoduchému rozhraní programu to však nemusí být překážkou ani pro ty, kteří angličtinu neovládají. Cílem tohoto příspěvku je čtenáře seznámit s možnostmi tohoto programu a návodem na jeho použití tak, aby byl čtenář schopen si následně materiály v programu sám vytvářet.

Stažení, instalace a první spuštění

Program si lze zdarma stáhnout na:

<http://www.mmlsoft.com/index.php/products/tarsia>

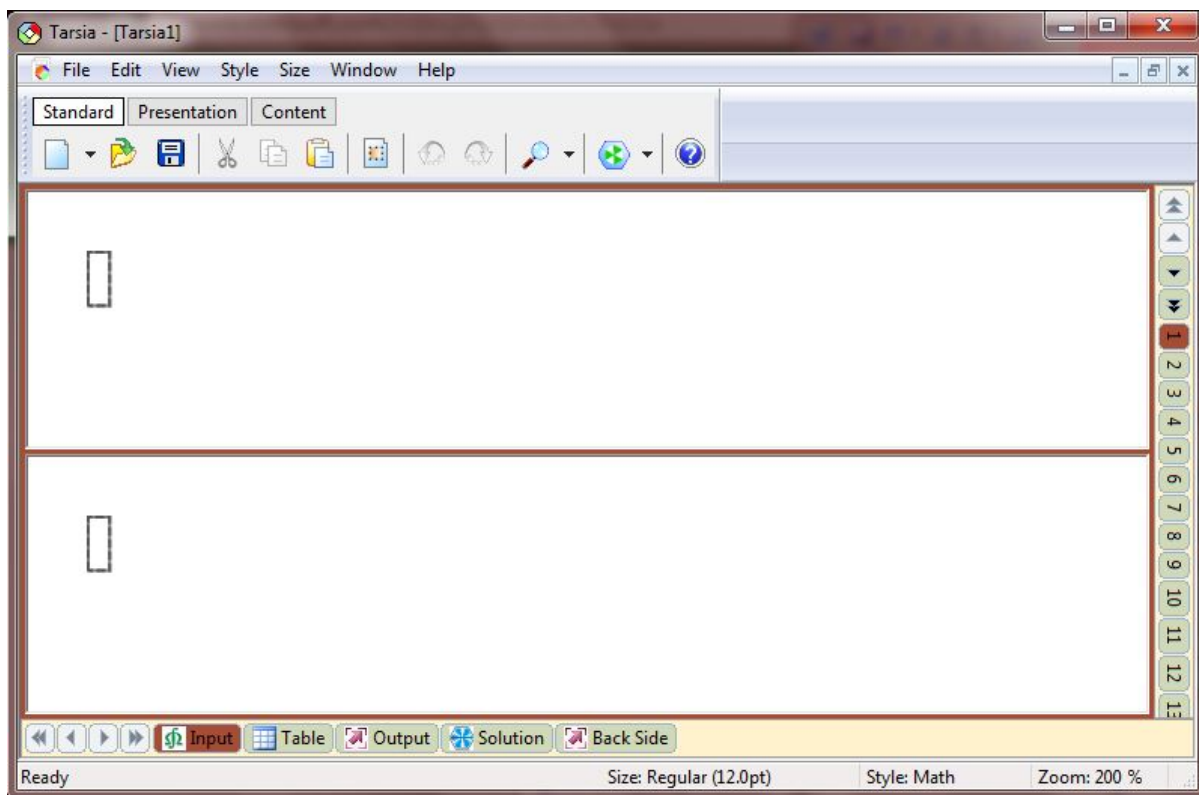
¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, veronika.havelkova@pedf.cuni.cz

Poté program klasickým způsobem nainstalujeme. Sympatické je, že autoři programu nevyžadují žádnou registraci apod. Při spuštění programu program nabízí *Tip of day* (typ dne), který není nijak důležitý. Pokud nechceme, aby se nám příště zobrazoval, stačí odškrtnout políčko *Show Tips on StartUp* a okno zavřít tlačítkem *Close*. Následně se zobrazí nové okno, které umožňuje výběr z různých typů skládaček. Pod názvem *Standard Jigsaw* a *Extended Jigsaw* se nacházejí zdánlivě totožné skládačky. Jediný rozdíl mezi nimi je však ten, že u *Extended Jigsaw* máme možnost zadávat i okraje skládaček a tím žákům skládání trochu zkomplikovat. Pro účely lepšího popisu nyní zvolíme *Extended Triangular Jigsaw* (princip je však v základu stejný u všech) a klikneme na *OK*.

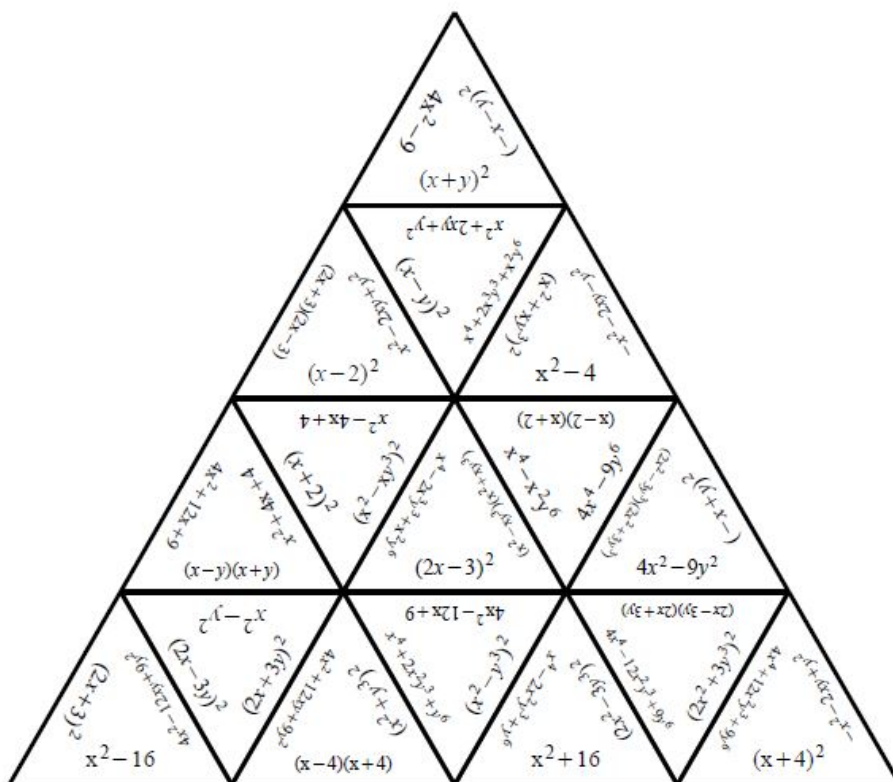
Práce v programu

Po zvolení typu skládačky se již zobrazí základní rozhraní programu (obr. 1). V dolním panelu se nachází možnosti zobrazení, mezi kterými je možno přepínat. Položka *Input* umožňuje zadávat jednotlivé dvojice. V případě, že zvolíme variantu *Extended*, nám program umožňuje zadávat i jednotlivé kraje skládačky. Mezi dvojicemi můžeme přepínat pomocí pravého panelu, kde tlačítka 1 až 18 symbolizují jednotlivé dvojice a d1 až d12 symbolizují kraj skládačky. Posledním políčkem *Back Side of the Card* můžeme nastavit zadní popis skládačky. V položce *Table* si můžeme zobrazit již hotové dvojice, což je vhodné zejména pro zpětnou kontrolu. Položka *Output* slouží k tisku skládačky. V jejím pravém rohu můžeme měnit velikosti výsledné skládačky. Položka *Solution* umožňuje vytisknout řešení skládačky (obr. 2) a položka *Back Side* může zobrazit a vytisknout zadní stranu skládačky. Pokud chceme skládačku vytisknout, musíme mít vždy zvolen ten pohled, který chceme vytisknout. Samotný tisk pak provedeme prostřednictvím ikony tiskárny v horním panelu programu. Na stejném místě můžeme soubor uložit prostřednictvím ikony diskety.

Nejvíce zajímavou, z hlediska tvorby skládačky, je položka *Input*, kterou jednotlivé dvojice zadáváme. Text zadáme postupně vždy do šedivého obdélníčku. Velkou výhodou tohoto programu je, že nám umožní vkládat nejen běžný text, ale i obrázky a matematický text. Obrázky je možno vkládat pomocí ikony obrázku, která se nachází v horním panelu pod položkou *Standard*. Pokud chceme vložit matematický text, využijeme položek *Presentation* a *Content*. V těchto položkách se nacházejí různé matematické symboly, které můžeme rozkliknout a vybrat si ten znak či rovnici, kterou potřebujeme. Jednotlivé vzorce je možno do sebe vnořovat, podobně jako je tomu u editoru rovnic programu *Microsoft Word*.



Obr. 1: Základní prostředí programu



Obr. 2: Vytisknuté řešení z verze *Solution*

Pokud se nám písmo na výsledné skládačce zdá příliš malé, můžeme velikost písma změnit prostřednictvím ikony lupy se čtverečkovým pozadím (ve všech oknech kromě *Input*). Pokud jsme však do skládačky vnořili obrázky, je velmi pravděpodobné, že tyto obrázky budou při zvětšení písma přesahovat okraje.

Pokud bychom se rozhodli zpětně změnit tvar skládačky, můžeme tak učinit prostřednictvím horní nabídky programů položkou *File – Properties – Change document type*, kde si můžeme zvolit jiný tvar skládačky. Program nás vždy varuje, že při změně skládačky s větším počtem dílků na skládačku s menším počtem dílků můžeme přijít o již vytvořené dvojice.

Typy na použití v praxi

Při vytváření skládačky je vždy vhodné předem promyslet, kolik času chceme skládání s žáky věnovat. Pokud chceme zařadit skládání jako krátkou aktivitu, měli bychom se vyvarovat skládačkám s mnoha díly. Naopak pokud program chceme použít na téma výrazů či rovnic, je vhodné se vyvarovat použití různých písmen jako neznámých, protože samo písmeno může napomoci řešení.

V mé osobní praxi jsem před tiskem verze *Output* upřednostňovala verzi *Solution*, která umožňovala tisknout menší dílky, jež mi pro žáky druhého stupně přišly jako dostačující (tato varianta má však tu nevýhodu, že neumožňuje vytisknout položku *Back Side*). Rovněž se mi osvědčilo, když jsem žákům vytiskla i prázdnou verzi *Solution*, na které si pak dílky skládali.

Řadu již hotových skládaček naleznete na:
<http://www.mrbartonmaths.com/jigsaw.htm>

Závěr

Přestože není program *Formulator Tarsia* příliš známý, jeho možnosti uplatnění jsou velmi široké. Lze ho využít ve výuce na prvním stupni, druhém stupni i na středních školách. Program je rovněž velmi dobře možné využít nejen ve výuce matematiky, ale také v celé řadě dalších předmětů...

Literatura

- [1] HERMITECH LABORATORY. *Information on Formulator Tarsia* [online]. [cit. 2014-01-09]. Dostupné z: <http://www.mmlsoft.com/index.php/products/tarsia>
- [2] MR BARTON MATHS. *Tarsia jigsaw files* [online]. [cit. 2014-01-09]. Dostupné z: <http://www.mrbartonmaths.com/jigsaw.htm>

Možnosti GeoGebry pri medzipredmetových vzťahoch matematiky a fyziky

LADISLAV JARUSKA¹

Článok sa zaoberá s možnosťami dynamického programu GeoGebra vo vyučovaní. Program je využívaný nielen v matematike, ale aj pri riešení fyzikálnych úloh. Článok obsahuje niekoľko jednoduchých príkladov na modelovanie fyzikálnych javov a tým na podporovanie medzipredmetových vzťahov matematiky a fyziky.

V súčasnosti moderné technológie sú integrované vo väčšine oblastí vyučovania. IKT ponúkajú nové možnosti pedagógom aj študentom na zvyšovanie efektivity výchovnovzdelávacieho procesu. Jednou takou možnosťou aplikovania moderných technológií do vyučovania je používanie dynamického programu GeoGebra. GeoGebra je voľne šíriteľný matematický softvér, ktorý bol vytvorený hlavne na podporu vyučovania matematiky. Spája v sebe geometriu, algebru a matematickú analýzu a môžeme využívať v edukačnom procese od základných škôl až po univerzity.

Možnosti aplikovania GeoGebry

V pedagogickej praxi sa často stretávame s prípadmi, ktoré nepatria len do tematických celkov matematiky, ale zaoberajú sa s fyzikálnymi javmi. Riešenie takých úloh a problémov potvrdzuje študentom využiteľnosť a aplikovateľnosť matematických poznatkov v praxi. Naopak, na hodinách fyziky, pri riešení úloh a problémov sa žiaci presvedčia a potrebu matematického aparátu. Prezentovanie javov prírody a riešenie praktických úloh podporuje posilnenie medzipredmetových vzťahov matematiky a fyziky.

Na podporu a rozvíjanie medzipredmetových vzťahov nám môže pomôcť GeoGebra, ako pomoc pri predstavovaní si zmyslu učiva aj problému s jeho aplikáciou a praktickým využitím v bežnom živote. Počas riešenia úloh s fyzikálnou tematikou dobré grafické znázornenie uľahčí žiakom cestu k pochopeniu a rozšíreniu si matematickej predstavivosti. Problém pri riešení horeuvedených úloh môže znamenať, že k riešeniu potrebujeme poznatky z fyziky. Tieto úlohy pochádzajú z rôznych oblastí fyziky a vyjadrujú vzájomné pôsobenie medzi matematikou, fyzikou a realitou.

Hlavnými cieľmi praktických úloh sú:

- rozvíjanie logického, algoritmického a kritického myslenia žiakov,

¹Univerzita J. Selyeho v Komárne, jaruskal@selyeuni.sk

- schopnosť čítať s porozumením súvislé texty obsahujúce čísla, závislosti a vzťahy a nesúvislé texty obsahujúce tabuľky, grafy a diagramy,
- používanie rôznych spôsobov reprezentácie matematického obsahu (text, tabuľky, grafy, diagramy),
- naučiť žiaka matematicky vyjadriť problémy pozorované alebo zámerne demonštrované v reálnych situáciách, (symboliky a znázorňovania),
- motivovať žiaka k ovládnutiu matematického aparátu tým, že sa preukáže jeho potrebnosť a účelnosť v praxi,
- ukázať aplikovateľnosť preberaného matematického učiva,
- naučiť žiaka vyhľadávať a zisťovať potrebné údaje pre riešenie daného problému,
- naučiť žiaka vyhľadávať a sledovať jednoduché funkčné vzťahy a kvantitatívne súvislosti vo svojom okolí.

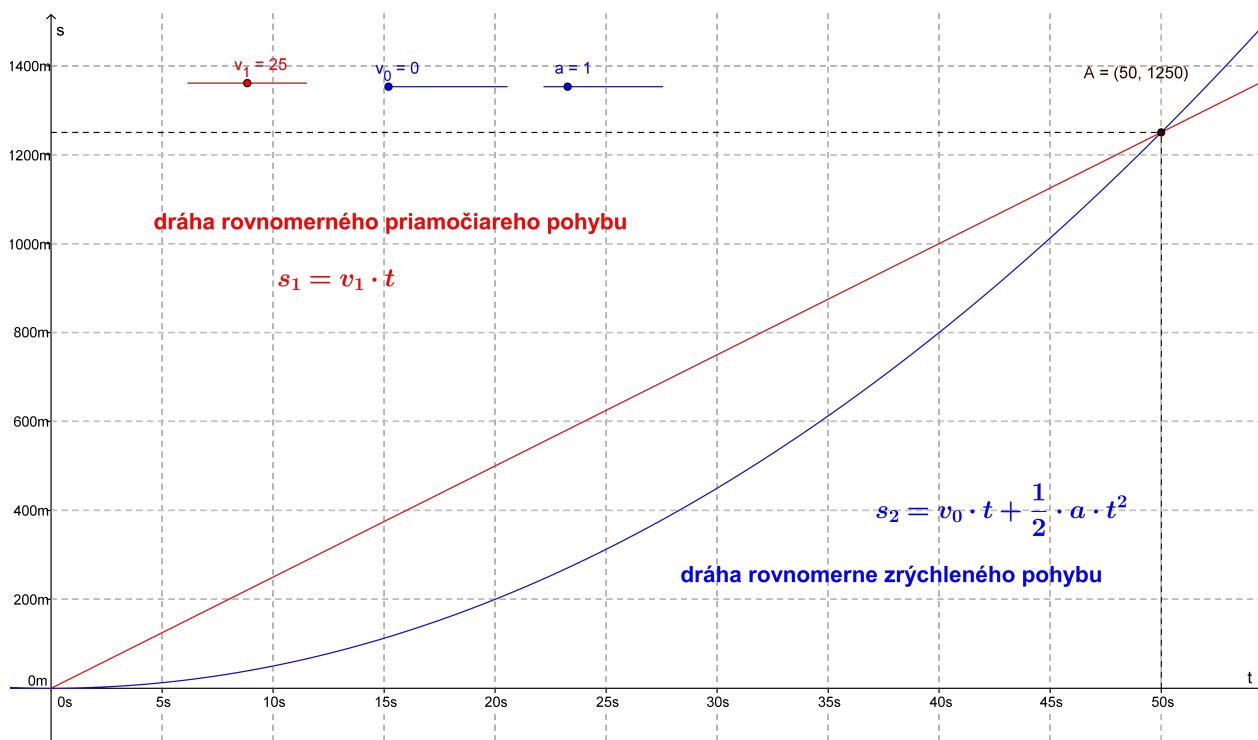
GeoGebra nám ponúka možnosť grafického riešenia niektorých úloh, alebo grafickým znázornením priebehu javov, závislostí veličín podporuje predstavenie si konkrétnych situácií a problémov. Najjednoduchšie sú napr. úlohy týkajúce sa pohybov (priamočiary rovnomerný pohyb – grafické riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, alebo rovnomerný zrýchlený pohyb, voľný pád – kvadratická rovnica, funkcia).

GeoGebra pri riešení úloh s fyzikálnou tematikou podporuje pochopenie niektorých fyzikálnych javov pomocou virtuálnych experimentov (voľný pád, vodorovný a šikmý vrh, pohyby, kyvadlo, ...). Umožňuje ľahšie osvojenie si fyzikálnych zákonov (zákon zachovania energie, premena energie, Ohmov zákon. Podporuje lepšie predstavenie si súvislosti medzi fyzikálnymi veličinami a pozorovanie a pochopenie závislosti niektorých fyzikálnych veličín od času (rýchlosť). Z hľadiska medzipredmetových vzťahov umožňuje používanie funkcií a rovníc. Podporuje osvojovanie si pojmov z rôznych oblastí fyziky, ako napr. pohyby, energia, trenie, kmity, vlny, optika, elektrina, teplo. GeoGebra sa môže použiť pre objavné vyučovanie, lebo podporuje experimenty a matematické objavy. lepšie pochopenie úloh s fyzikálnou tematikou.

Príklad 1

Z mesta naraz odštartovali dve autá. Jedno auto vykonáva rovnomerný priamočiary pohyb, pohybuje sa stálou rýchlosťou 25 m/s . Druhé auto vykonáva rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb, počiatočnou rýchlosťou 0 m/s a zrýchlením 1 m/s^2 . Kedy a v akej vzdialenosti od miesta štartu sa stretnú?

GeoGebra nám ponúka grafické riešenie úlohy, kde zobrazíme grafy (s, t) lineárnych funkcií (obr. 1).



Obr. 1: Grafické riešenie 1. príkladu

$v_1 = 25 \text{ m/s}$ – rýchlosť rovnomerného priamočiareho pohybu

$s_1 = v_1 \cdot t$ – dráha rovnomerného priamočiareho pohybu

$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ – dráha rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu

$v_0 = 0 \text{ m/s}$ – počiatočná rýchlosť – $v_0 \cdot t = 0$

Pri grafickom riešení rovnomerný priamočiary pohyb opíšeme pomocou lineárnej rovnice, ktorú chápeme a znázorníme ako lineárnu funkciu. Rovnomerne zrýchlený pohyb opíšeme pomocou kvadratickej rovnice, ktorú chápeme ako kvadratickú funkciu.

Priesečník grafov je vlastne riešením úlohy, kde prvá súradnica znamená čas, a druhá súradnica dráhu, t.j. $A = (50, 1250)$.

Počas riešenia použitím posuvníkov máme možnosť zmeniť hodnoty v zadaní, ktoré sú rýchlosť nákladného auta, osobného auta a oneskorenie osobného auta.

Ďalšia možnosť spojenia matematických poznatkov a fyzikálnych javov je zobrazenie a popis pohybu matematického kyvadla.

Príklad 2

Zobrazenie pohybu matematického kyvadla

Na hodinách matematiky sa žiaci stretávajú s trigonometrickými funkciami. Zobrazením pohybu matematického kyvadla ukážeme žiakom možnosť využitia matematických poznatkov v ďalšej oblasti fyziky.

Matematické kyvadlo je vlastne hmotný bod zavesený na vlákne stálej dĺžky – l zanedbateľne malej hmotnosti – m . (napr. oceľová guľôčka zavesená na tenkom nepružnom vlákne).

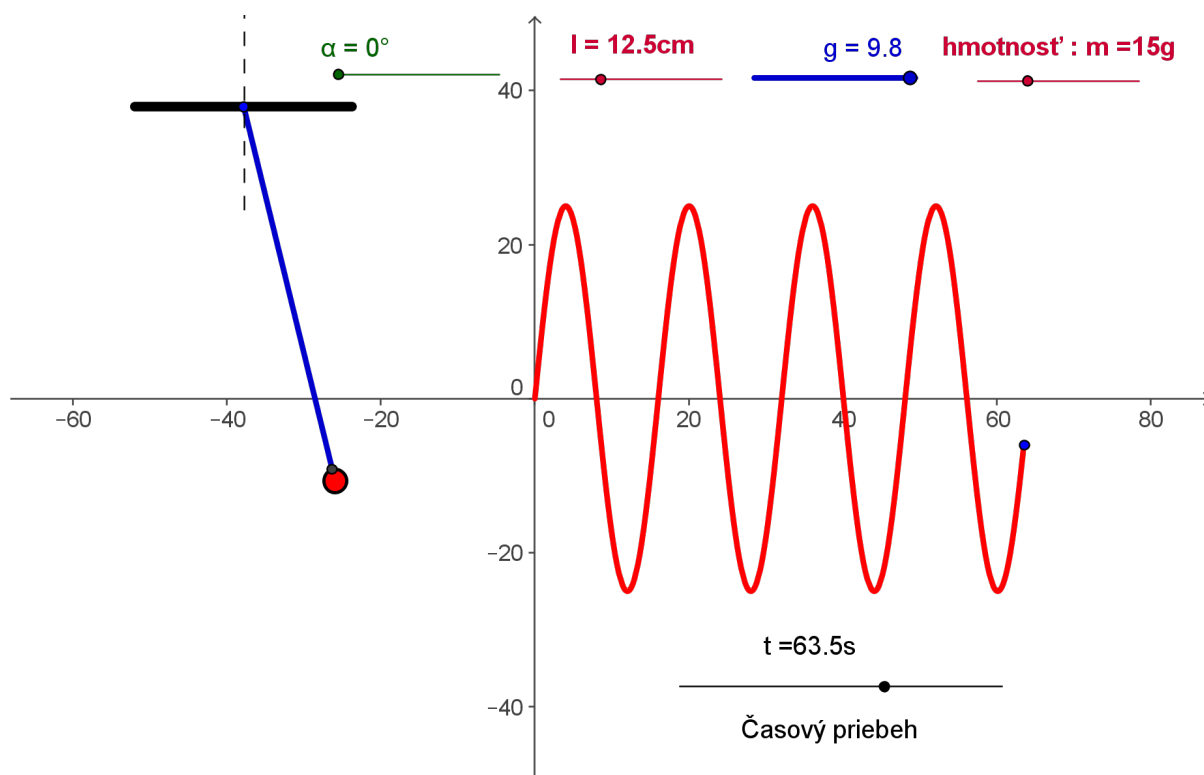
Pohyb zaveseného telesa na vlákne znázorníme v súradnicovej sústave, kde môžeme pozorovať vychýlenie v závislosti času, a dĺžky vlákna. (obr. 2)

Doba kmitu matematického kyvadla je priamo úmerná druhej odmocnine dĺžky kyvadla a nepriamo úmerná druhej odmocnine tiažového zrýchlenia.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okamžitá výchylka matematického kyvadla

$$y = y_m \cdot \sin \omega t .$$



Obr. 2: Zobrazenie pohybu kyvadla

Doba kmitu je čas, za ktorý kyvadlo prejde napr. z jednej krajnej polohy do druhej a späť. Doba kyvu je polovica doby kmitu.

GeoGebra nám poskytuje pomoc aj pri popise a zobrazení pohybu kyvadla. Pomocou posuvníkov máme možnosť zmeniť parametre kyvadla.

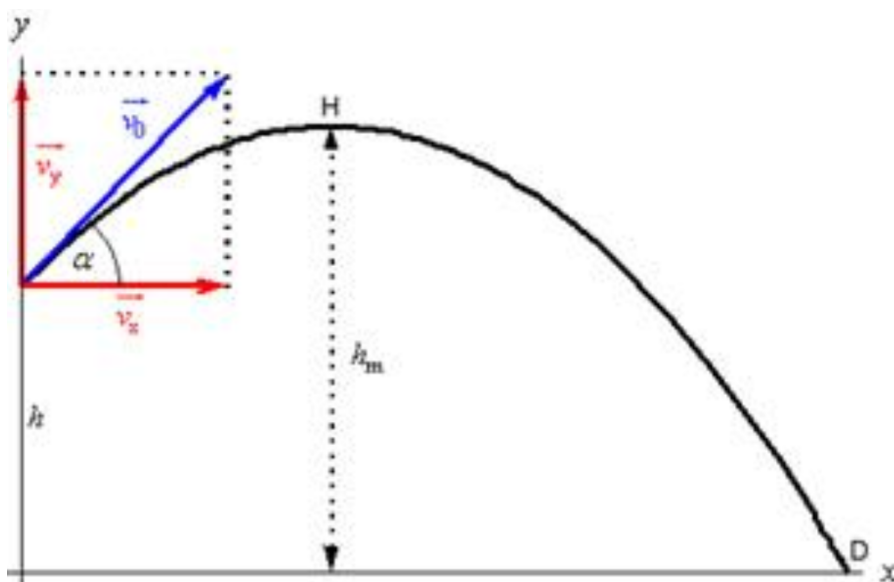
Nasledujúcim príklade je znázornená ďalšia oblasť matematiky – parabola. Možnosť aplikovania matematických poznatkov žiakom ukážeme pomocou šikmého vrhu.

Príklad 3

Šikmý vrh z nenulovej výšky h

Je známe, že ak hodíme kamene rovnakou začiatočnou rýchlosťou, ale pod rovnakým elevačným uhlom, tak najďalej dohodíme kameňom, ktorý sme odhodili pod elevačným uhlom $\alpha = 45^\circ$. Samozrejme v tomto prípade kameň v istom priblížení považujeme za hmotný bod, ktorý sa pohybuje približne po parabolickej dráhe (považujeme ho za dostatočne malý a tak neuvažujeme jeho rotáciu okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom). Vo vákuu v zemskom tiažovom poli by sa pohyboval po skutočnej parabole. (obr. 3)

Ďalej gravitačné pole považujeme za homogénne.



Obr. 3: Rozloženie vektora začiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ vrhnutého hmotného bodu

Vzťahy pre vrh dostaneme z výsledných vzťahov špeciálnou voľbou smeru začiatočnej rýchlosti a výšky nad rovinou, v ktorej sa vrh začína.

Vo vodorovnom smere v rovine zvolíme súradnicu x a jednotkový vektor $\mathbf{i}$, vo zvislom smere zvolíme súradnicu y a jednotkový vektor $\mathbf{j}$. Pohybu častice (kameňa) vo vodorovnom smere nebráni odpor prostredia, ani iná sila, preto si zachováva príslušnú zložku rýchlosti $v_x = v_{x0}$, ktorou bola hodená. Pohyb v smere osi x je teda pohybom s nemeniacou sa rýchlosťou – pohyb rovnomerný. Vo zvislom smere podlieha častica tiažovému zrýchleniu, takže v smere osi y ide o pohyb s konštantným zrýchlením, čiže o pohyb rovnomerne zrýchlený. Pohyb po parabolickej dráhe v tomto prípade opíšeme pomocou dvoch priamočiarych pohybov.

Vektor začiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$ vrhnutého hmotného bodu si rozložíme na dva navzájom kolmé vektory $\vec{v}_x$ a $\vec{v}_y$, ktoré sú rovnobežné s osami karteziánskeho systému, do ktorého celý vrh zakreslíme. Pre veľkosti týchto vektorov môžeme napísať:

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha \\v_y &= v_0 \sin \alpha - gt\end{aligned}$$

Pre súradnice ľubovoľného bodu, ktorý leží na trajektórii vrhu platí:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cos \alpha \\y &= h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2\end{aligned}$$

Čas dopadu:

$$t_d = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

Dĺžka vrhu – vzdialenosť dopadu:

$$d = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

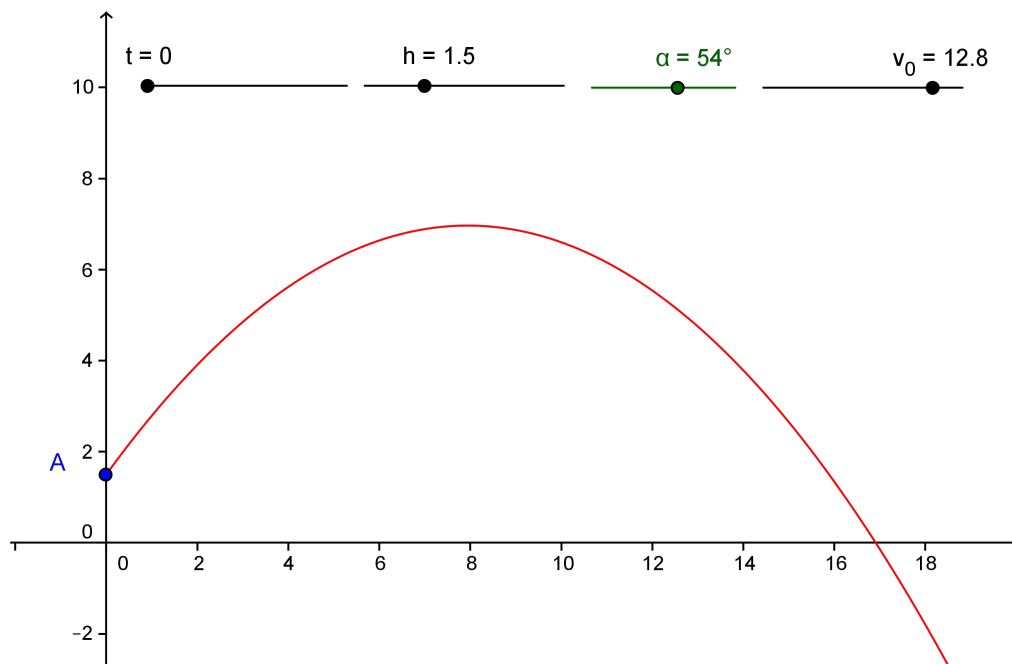
Maximálna výška vrhu:

$$h_m = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Tým sme získali závislosť oboch dvoch súradníc x a y od času. Na vizualizáciu pohybu hmotného bodu potrebujeme v GeoGebre spojiť horeuvedené dve rovnice. (obr. 4)

Pri znázornení pohybu bodu GeoGebra nám ponúka možnosť zmeniť parametre, ktoré ovplyvňujú pohyb bodu A. Posuvníkom sme priradili nasledovné veličiny: začiatočná výška bodu A, elevačný uhol α , začiatočná rýchlosť v_0 .

Tento príklad je náročnejší, lebo k vizualizácii potrebujeme spojiť do jednej rovnice dve meniace sa veličiny, t.j. súradnice x a y .



Obr. 4: Model šikmého vrhu z nenulovej výšky h

Záver

Použitím vizualizácie a modelovania počas vyučovania podporujeme motiváciu a predstavivosť žiakov a zvyšujeme efektivitu vyučovacích metód. Vytváranie virtuálnych dynamických modelov pomocou GeoGebry prináša nové možnosti aj v objavovaní matematických súvislostí. Vhodná vizualizácia podporí porozumenie súvislostí, pomáha pri vyšetrení vlastností pojmov aj vzťahov medzi veličinami. V článku sme chceli poukázať na možnosti vizualizácie matematických poznatkov vo vyučovaní fyziky a tým na dôležitosť medzipredmetových vzťahov. Vytvorené applety môžu prispieť k lepšiemu pochopeniu všeobecných vzťahov a pomáhať aj v riešení úloh.

OTEVŘENÁ HODINA

KLUB PŘÁTEL MATEMATIKY – DĚTI Z RŮZNÝCH TŘÍD
prvního stupně ZŠ Vojtěšská, Praha 1

Tvorba problémů jako motivační faktor i jako nástroj intelektového rozvoje dítěte

MICHAELA KASLOVÁ¹

V praktické ukázce se členy Klubu přátel matematiky (KPM), který existuje již 25. rokem, jsme měli možnost sledovat, co nadprůměrné žáky 1. stupně ZŠ strhne a jak na to reagují, kam až můžeme v nárocích na ně zajít.

Základem aktivizace nadprůměrného žáka je především přenesení zodpovědnosti na něho samotného. Jsou zde tři úskalí:

- 1) Radost z novosti, avšak u většiny z nich je jen, **pokud cítí smysluplnost**. Touto smysluplností chápeme nejen pouhou aplikaci do praxe, ale i odborné zdůvodnění, které leckdy učitel není schopen pohotově dodat (například: je to cvičení, kdy musí spolupracovat obě mozkové hemisféry; uvidíme, jak pracuje tvoje dynamická představivost v makroprostoru; probíráme minulost, abychom pochopili, o co jsme nebo nejsme dál než před x lety;...).
- 2) Potěšení z poznávání funguje u všech, ale u nadpoloviční většiny je současně zapojení podmíněno tím, zda **cítí naději na úspěch**. Jejich dosavadní třídní zkušenost a vyspělá autoevaluace, často podpořená školní zkušeností, že se technologie driluje, že řešení trvá dlouho, než se k něčemu dospěje, nebo zvyk vše relativně snadné ve třídě řešit naráz, převážně vzhledem, vedou k tomu, že rychle vyhodnotí míru námahy. Pak hraje roli nikoli primární motivace – radost ze samotného řešení a vyřešení, ale přebírá hlavní roli kontextová motivace – o čem to je, jaký je námět, zda jsou k tomu zajímavé pomůcky či oblíbené nástroje včetně PC nebo interaktivní tabule.
- 3) Neoblíbené jsou úlohy, kde se musí hodně **psát, nebo je nutné zapamatovat si více fakt** jednotlivě, případně ve struktuře. K tomu je žák veden vlastní vytvořenou tradicí (od mateřské školy udivuje okolí řešením z paměti, rovněž od mateřské školy v důsledku toho je u něho nižší grafomotorická zkušenost, nyní si je vědom tohoto handicapu a obtíže s psaním či jeho úpravou jsou demotivujícím faktorem často i tehdy, bylo-li by to pro něho funkční).

¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Pojetí klubu (KPM) a možnosti aplikace do výuky

Zmínění žáci se učí od 3. ročníku intenzivně cizí jazyk, v matematice pracují nebo pracovali podle učebnic M. Hejného, avšak ani tyto materiály neobsahují dostatek přiměřeně náročných úloh respektujících specifika skupiny vysoce nadprůměrných. V letošním roce má KPM 20 členů.

Filosofie KPM je od počátku (1990/91) založena na dobrovolnosti a na kultivovanosti myšlení a jeho projevů, obsahově se zaměřujeme na objevování matematiky v širokém kontextu (prostor je svět, vesmír, čas od velkého třesku po dnešek), metodou objevování (od náhody k systému) dospíváme k zobecňování a k porovnávání dílčích výsledků z různých oblastí si ukazujeme cestu k abstrakci, k propojenosti okruhů, zjišťujeme, jakými různými způsoby komunikovat jednu a tutéž myšlenku (různé komunikační kódy) a tím objevujeme pojítka mezi aritmetikou, první algebrou a geometrií. Zaměstnání nadprůměrného dítěte má být nejen tvořivé, ale i „déle trvající“ (než úkoly pro průměrné žáky) a mělo by směřovat k obecnějším rovinám nebo k přechodu z jedné úrovně obecnosti do druhé. K tomu slouží i ukázky aktivit s uvedením následných možností.

Ukázková hodina a zasazení aktivit do didaktických řetězců

Aktivity v hodině byly do jisté míry průřezem posledního období. Šlo o aktivity z několika didaktických řetězců v různé fázi rozvinutí. Jde o práci s věkově i intelektově heterogenním kolektivem nadprůměrných žáků, v rámci tématu je zaměřena na diferencovaný přístup.

Ukázka 1:

Hry s fotografiemi (viz Workshop SEMT 11) – promítání fotografií známých i nových prostředí. Žáci mají uvést souvislosti zobrazeného s matematikou. Nejde jen o objevení souvislostí, ale ukazuje se **rozdíl mezi světem reality a světem abstrakce** (Marko: „To byla koule, kdyby nebyla kamenná.“). Tím, že se žáci tentokrát nemohou obrazovky dotknout, jsou nuceni **zpřesnit vyjadřování**. Ukazuje se **funkčnost zvládnutí matematické terminologie** – přesnost a rychlost v komunikaci přináší radost (ukázka: Ctižádostivý Dan: „To je... no to, to. No, jak se tomu říká?“ Ostatní mu v dobré snaze napovídají, což se mu nelíbí a zvyšuje úsilí). Hra na *Co by kdyby* směřuje k **podpoře pojmotvorného procesu** a ukazuje nezávislost nejen pojmů nejen na materiálu, velikosti, barvě, umístění, ale i vzdálenosti, natočení; zabýváme se nedokonalostí modelů ve světě reality poukazováním na to, co jim je společné a čím se reálné objekty liší. Matematika je zde jako nástroj popisu reality



s přesahem do dalších oborů (určení rondokubismu, (ne)souměrnosti fasád v souvislosti s tím umístění vchodu a zařazení do časového období vzniku). Ukázka funguje jako přípravný stimulátor tvorby, ve které mohou užít analogie.

Návaznost na hru v příštích hodinách: Na tuto ukázkou naváže další projekt, kdy žáci sami přinesou své fotografie, které budou zadávat jako hádanky ostatním.

Ukázka 2:

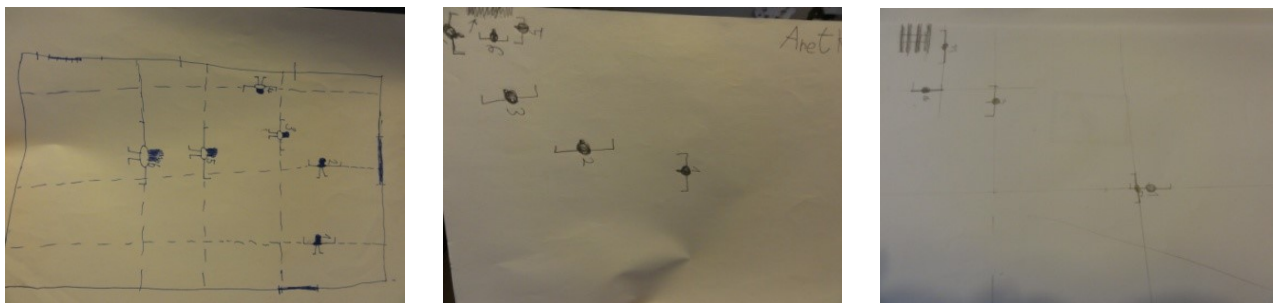
Krájení prostoru (Hra autorská, autor M. KASLOVÁ viz např. Semináře na UK PEDF 1995–2014; semináře Erasmus pro učitele a studenty z Univerzity Parma, Bordeaux; konference CIEAEM 2013, text pro NIDV Stimulace logického myšlení v mateřské a základní škole a další publikace). Jeden žák jde za dveře, ostatní se domluví na jednom objektu, na který se během hry nedívají, ale pouze sledují hadače. Otázka hadače je „formulována“ gesticky: pohybem z upažení do vzpažení a zpět (Je daný objekt prostoru přede mnou?), nebo z upažení do předpažení a zpět (Je objekt pod touto úrovní?); rozhodující roli hraje natočení dlaní – jsou otočeny vzhledem k té části prostoru, na kterou se ptáme. Pozorovatelé jen kývají ANO/NE podle toho, zda jimi zvolený objekt (minimálně velikosti aktovky) je ve vymezené části prostoru. Hra sleduje **čtyři cíle**:

- 1) Rozvíjí **prostorovou orientaci včetně dynamické prostorové paměti** – zde je nutné v každém kroku hry rozkrojit daný prostor na dva, které se od sebe liší přijatelností – je tam hledaný prostor ANO/NE.
- 2) Tato hra je žákům známá, je velmi oblíbená, to prodlužuje dobu hraní a tím v krátkém období zvyšuje pestrost hráčské zkušenosti. Její průběh od počátku po dnešek prošel velmi rychle od náhodného „hádání“ po užití **systematické a ekonomické strategie**. I v ukázce se projevil vliv emocí na schopnost zapamatovat si, na co se již žák ptal. Odkryly se strategie, jak paměť podpořit.
- 3) ANO/NE hrají roli **vyhodnocení pravdivosti výroku**: Je pravda, že hledaný objekt je v části prostoru, na který se ptám? Hra úzce souvisí s logikou.
- 4) Současně při hře dochází k **transformaci komunikačního kódu od gest ke slovům a zpět**. Tato transformace dělá začátečníkům potíže, které se i u nadprůměrných mohou projevit různě – šeptají si; zhorší se paměť pro již vyznačené; v tichosti si neuvědomují tak rychle, že pokud předmět není v prostoru před nimi, že musí být v opačné části a na tu se ptají zbytečně zvlášť.

Návaznost v jedné hodině na opakování hry během šesti dnů: Hra po svém opakování (6 dnů vždy v týdenním odstupu) před 3 měsíci dosáhla již užití

rozvinutých strategií. Tato fáze umožnila žákům zadat tvořivý úkol: *Jak na jeden papír zakreslit optimální strategii?* Takovou práci ještě nedělali. Dotazy byly různé a odpovědi podléhaly všeobecné diskusi. Marko: „Je jedno, kde to (hledaný objekt) bude?“ Dan: „To může být jak uprostřed, tak v rohu?“ Vojta: „To by byly různé strategie.“ Šimon: „Ale to jde! Prostě bez ohledu na to.“ Michal: „To si neumím představit.“ Tereзка: „Tak to udělej, jak myslíš. Já taky, pak se podíváme.“ Aneta: „Já vím. Nemusí to být zrovna půlka třídy, ale půlka zbytku. Když nevíme, čeho půlka, tak jako půlka třídy.“ Šimon: „Tak jsem to myslel.“ Artur: „Já nevím.“ Malik: „Tomu nerozumím.“ Tereзка: „Dělej to jako já ...!“ Učitelka: „Každý to udělá podle svého a pak to porovnáme. Důležité bude, jestli to zakreslené budete umět přečíst.“ Po dokončení práce se „obrázky“ rozložily a hodnotilo se, zda všechny zaznamenaly tutéž strategii, pokud ano, tak který záznam je nejsrozumitelnější.

Záznamy odpovídaly optimální strategii; bylo možné je rozdělit do dvou skupin podle míry obecnosti: a) dítě si zvolilo a vyznačilo polohu objektu, je zaznamenaná optimální strategie; zde jde o konkrétní situaci, kterou lze obměnit; b) objekt nebyl vyznačen, pak dělení na dvě poloviny nebylo na konkrétní dvě poloviny, ale na dvě části toho prostoru, který po předchozím dotazu a hodnocení dotazu přichází v úvahu. Pro kontrast uvádím i záznam mimo Klub (obr. 1).



Ukázka 3:

Úlohy typu Zebra (tentokrát na 3 trojice/čtveřice). Tyto úlohy žáci řešili poprvé na poslední schůzce. Nyní dostali novou a obtížnější úlohu k řešení pomocí trojúhelníkové metody, kdy se seznámili, jak vyslovené informace graficky zaznamenat do „trojúhelníku“. Nový úkol: Přečíst zaznamenané informace. K řešení pak žáci použili usuzování, avšak v průběhu řešení zjistili, že jim k jednoznačnému řešení nějaké informace chybí. Po jejich doplnění žáci řešení dokončili. Na ukázce se nedokázali dost koncentrovat, proto jsme se k práci vrátili bez hostů.

Návaznost v této hodině: vytvoř úlohu typu Zebra (tři trojice). Zde žáci vyžadovali kontext, ukázalo se, že je tvorba takového typu úlohy sama o sobě motivující, avšak vyhledávat kontext je pro tyto žáky „zbytečně“ zatěžující (na rozdíl od běžné třídy) i tím, že jsou si vědomi kulisovosti kontextu a nepřeberného množství volby kontextu. Tím se výrazně liší od ostatních žáků, pro něž je radostí volit

si kontexty, ale obtíží je sestavení úlohy. Na Zebry jsme se zaměřili až po 14 dnech, předpokládala jsem, že vymizí pocit relativního neúspěchu při ukázce a že na situace budou nahlížet nově.

Ukázka 4:

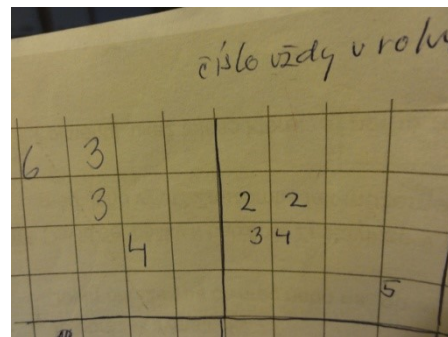
Hra SHIKAKU je založena na orientaci v rovině – ve čtvercové síti. Cílem hry je rozdělit daný obdélník/čtverec na menší, nepřekrývající se pole, ke kterým známe plochy, ale nikoli jejich tvar. V některých jejích čtvercích sítě jsou zapsána čísla, která udávají, jak velké pole máme ohraničit, a naším úkolem je najít hranice zvažováním možností a usuzováním. Správné zadání má mít jen jedno řešení.

Ukázka navazovala na dvě dvacetiminutové aktivity v předchozích setkáních, kde si žáci vyzkoušeli jak řešení, tak hodnocení zadání – má/nemá jediné řešení. Pokud nebylo jediné možné, hledali jsme dodatkové pravidlo tak, aby řešení bylo jediné (například je-li více možností, musíme zvolit čtyřúhelník). V závěru zkoušeli sami takové zadání vytvořit.

Pracovali jsme s poli: 6x6, 5x7, 9x7.

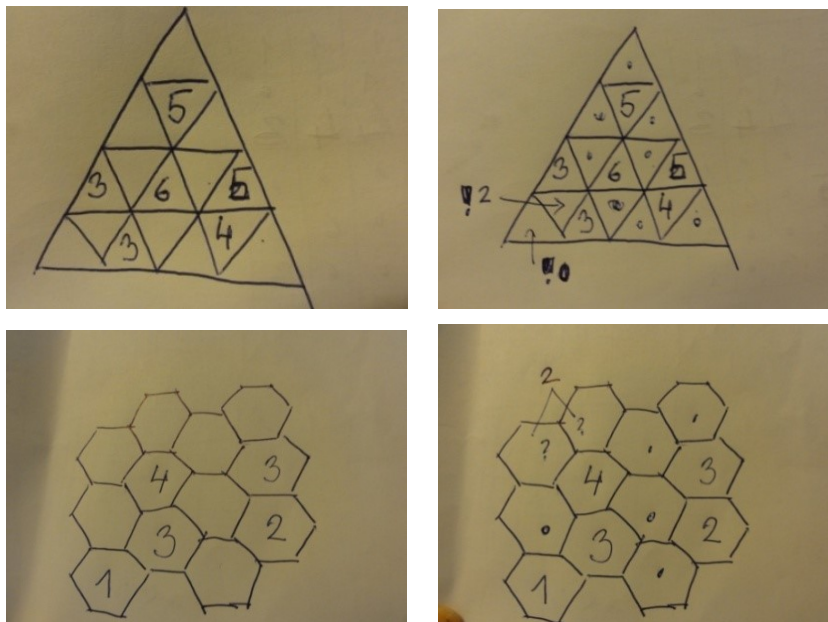
Návaznost v dalších třech hodinách: hra MINY ve čtvercové síti (rozpracoval student Václav Chalupa) nikoli na počítači, ale na pracovních listech. První dvě úlohy se řešily také na tabuli – každý navržený krok musel být doprovázen argumentací, aby řešitel ostatním dokazoval, že jde o jistotu. Například:

a) „...tady musí být mina, protože...“, b) „...tady mina být nemůže, protože...“. Pokud nastal případ b), žákům bylo sděleno číslo, které je na tomto místě. Číslo ve čtverci udává, kolik min se v okolí čtverce nachází, což představuje u vnitřního čtverce 8 možností, u krajového 5 možností a u rohového 3 možnosti. Pokud pole představovalo nejistotu, někteří jako Marko vykřikovali i míru rizika: „...je to jedna ku jedné; ...to je tak třetinová šance, že tam nic nebude; to je nebezpečný – nevidím to ani na padesát procent.“



V této hodině navrhl žák **Ondra Pecka řešit miny v trojúhelníkové síti**. Měl si to připravit na další hodinu, ale protože chyběl, zkoušeli jsme společně, jaká pravidla by v takovém případě „trojúhelníkové“ miny musely mít. Navrhli jsme pro případ a) 3 možnosti, případ b) 12 možností.

Varianta a) žákům připadala moc jednoduchá a také problematická na jednoznačnost obsazenosti polí, tak jsme řešili jednu úlohu v trojúhelníkové síti ve variantě b) viz obrázky. Pro některé byl problém v orientaci, pro závislost polí na počtu sousedů: vnitřní pole má 12 sousedů, krajové pole 7 sousedů a rohové 3 sousedy, respektive obtíž byla v soustředění a plošné paměti, která pole již byla vyhodnocena a která ne.



Navrhla jsem miny v šestiúhelníkové síti, ale v porovnání s trojúhelníkovou sítí se žákům zdál návrh příliš jednoduchý (6 sousedů). Proto jsem jim takovou situaci předložila k řešení až následující hodinu. Tam jim najednou vadily i situace nejednoznačné, o kterých dříve rádi diskutovali; tato síť pro miny nebyla přijata, ale vyzkoušeli jsme ji. Domnívám se, že šlo již o nasycení kontextem.

Shrnutí

Samotné izolované úlohy žáky sice zaujmou, ale efekt může přinést pouze gradované zřetězení takových úloh (v tom smyslu, jak to propagoval Koman na přednáškách UK PedF). Na druhou stranu je nutné podotknout, že nadprůměrné žáky příliš nezaujme „problémový řetězec“, u kterého se pracuje se stejným kontextem. Cesta do hloubky u nich vede často přes obměny a vlastní tvorbu nebo takové změny, že následné situace alespoň na počátku považují za zcela nové, odlišné a odkrytí podobnosti je pro ně novou odměnou, jako tomu bylo například mezi Shikaku a Minami. Z uvedených důvodů je záznam „ukázkových aktivit“ zařazen do řetězce tak, aby bylo vidět, nejen na co žáci navazovali, ale i co dále následuje. Následnost zde není hypotetická. Časový odstup článku od ukázky umožňuje popsat, jak žáci reagovali v následujících hodinách.

Aplikačné úlohy zo stochastiky pre 8. ročník ZŠ

ZUZANA KELLNEROVÁ, JAROSLAVA BRINCKOVÁ¹

Použitie medzipredmetových aplikačných úloh vo vyučovaní je pre žiakov motiváciou pre získavanie matematických poznatkov a tiež upevňovanie poznatkov z iných vyučovacích predmetov. Trojdimenzionálny model kocky, ktorý spája obsah vyučovania matematiky, matematické kompetencie a úrovne náročnosti slúži ako pomôcka pri vytváraní a analýze úloh. V príspevku uvádzame pohľad a požiadavky učiteľov matematiky k tvorbe aplikačných úloh a tiež ukážky úloh s využitím medzipredmetových vzťahov.

Počet pravdepodobnosti je prezentovaný v matematickej literatúre ako hotová deduktívna teória, ktorá má svoje pevné miesto v matematike ako vede. V oblasti vyučovania matematiky používame pojem stochastika ako spojenie elementov počtu pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, ktorý zahŕňa tiež kombinatorické elementy a elementy popisnej štatistiky. (Płocki, 1997) Vo vyučovaní stochastiky ide o osvojovanie si stochastických pojmov a vzťahov medzi nimi, čo slúži žiakom na ich aplikáciu v praktických úlohách a situáciách.

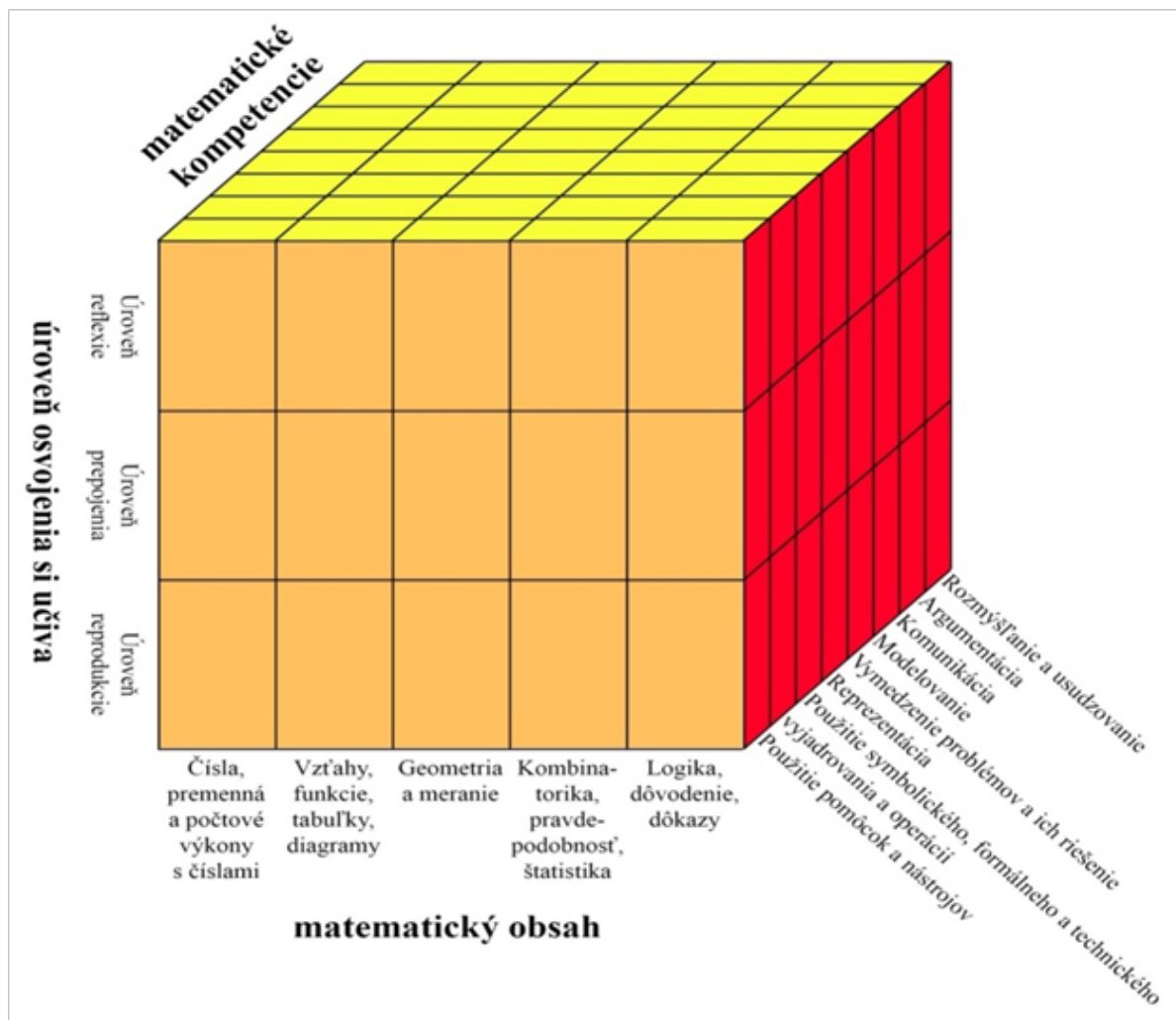
Predmet matematika je podľa Štátneho vzdelávacieho programu zameraný na rozvoj matematickej kompetencie. Medzinárodná štúdia PISA definuje 8 matematických kompetencií, pričom každú charakterizuje na troch úrovniach náročnosti osvojovania si učiva, a to úroveň reprodukcie, prepojenia a úroveň reflexie.

Matematické kompetencie, obsah predmetu matematika a jednotlivé úrovne osvojovania si učiva žiakom tvoria tri dimenzie vyučovania matematiky, na ktoré je potrebné brať ohľad pri príprave úloh, samotného vyučovacieho procesu ako aj počas jeho realizácie a hodnotenia. Na zobrazenie tejto skutočnosti nám môže slúžiť nasledujúci model kocky (obr. 1).

Na modeli môžeme vidieť jednotlivé prieniky daných troch dimenzií, pričom každej zo 120 oblastí priradíme konkrétny obsah, matematickú kompetenciu ako aj úroveň, na ktorej si žiak dané učivo má osvojiť. Uvedomenie si týchto kategórií je tiež výbornou pomôckou pri tvorbe úloh, ako aj ich triedení či použití pri konkrétnej časti vyučovacej hodiny v závislosti na jej celi. Takáto kategorizácia úloh v matematike uľahčuje ich efektívne využitie vo vyučovaní matematiky.

Základom vzdelávania je podľa Štátneho vzdelávacieho programu interdisciplinárny prístup pri osvojovaní znalostí a spôsobilostí žiakova rozvoj ich analytických a kritických schopností. Medzipredmetové vzťahy sú podmienené existenciou jednotlivých vyučovacích predmetov v školskom systéme a odrážajú objektívne existujúce medzivedné vzťahy.

¹UMB Banská Bystrica, zuzanakellnerova@gmail.com, jbrinckova@gmail.com

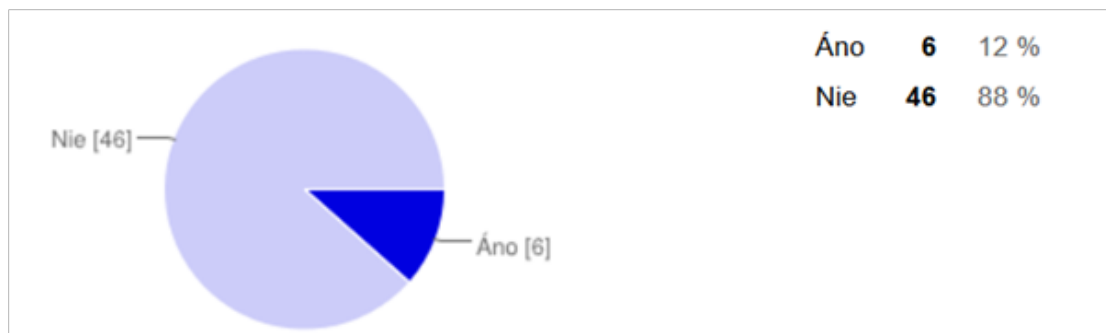


Obr. 1

Vhodným prostriedkom na zvyšovanie úrovne pravdepodobnostného myslenia u žiakov a zaradenie medzipredmetových vzťahov do vyučovania matematiky sú **aplikačné úlohy**. Aplikačná úloha je definovaná ako akt alebo situácia hľadania pravdy, informácie, poznatku o niečom, vyžaduje od žiakov skúmanie faktov alebo princípov, výskum a bádanie. Aplikačné úlohy vedú žiakov k aktívnemu učeniu a zapamätaniu si učiva. Žiaci pri ich riešení majú zodpovednosť za svoje vlastné učenie, a tiež spájajú osvojené vedomosti a zručnosti s reálnym svetom. (Brincková, 2010)

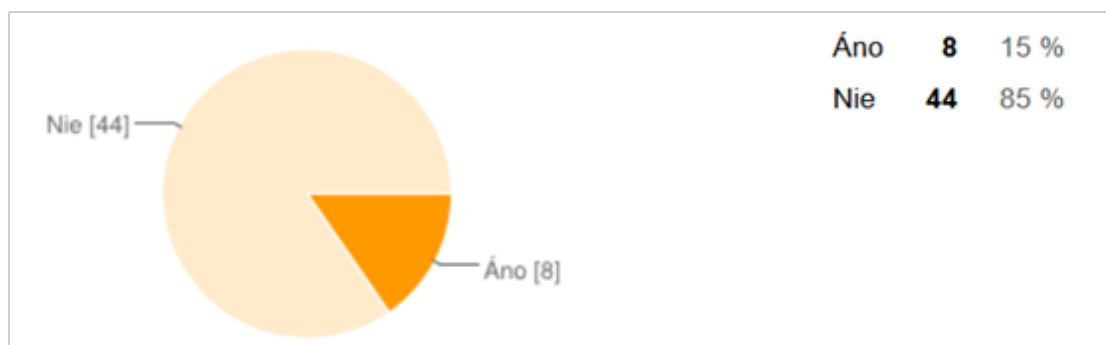
Aplikačné úlohy sme vytvárali na základe požiadaviek učiteľov matematiky, ktoré vyplynuli z výsledkov dotazníkového prieskumu na základných školách. On-line prieskumu sa zúčastnilo 52 učiteľov matematiky na ZŠ.

V prvej otázke sme zisťovali, či učitelia považujú súčasné učebnice matematiky za dostatočné pre vyučovanie pravdepodobnosti a štatistiky. Väčšina učiteľov, až 88 % opýtaných učebnice za dostatočné nepovažuje (viď graf 1).



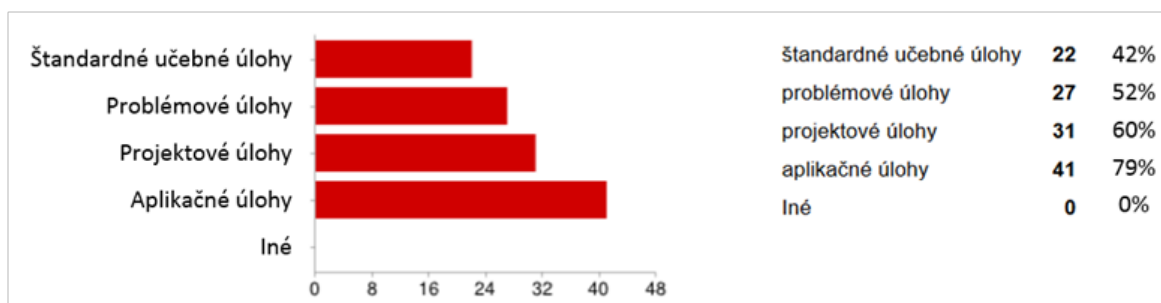
Graf 1

V druhej otázke sa učitelia vyjadrovali k tomu, či majú k dispozícii dostatok úloh, ktoré využívajú medzipredmetové vzťahy. Podobne ako v prvej otázke, aj v tomto prípade väčšina učiteľov (85 %) nemá dostatočné množstvo takýchto materiálov (viď graf 2).



Graf 2

Tretou otázkou sme zisťovali požiadavky učiteľov na typy úloh, ktoré by v zbierke úloh zo stochastiky privítali. Učitelia mali v tejto otázke možnosť označiť viac odpovedí súčasne. Najviac z respondentov označilo možnosť aplikačné úlohy (viď graf 3).



Graf 3

Ukážky aplikačných úloh na výpočet pravdepodobnosti:

1. okruh: Rozdeľte dané udalosti na isté, pravdepodobné a nemožné:

1. Napoleon Bonaparte porazil v „Bitke troch cisárov“ ruského panovníka.
2. Knieža Metternich sa zúčastnil bitky pri Slavkove.
3. Panovníci Ruska a Anglicka sa stretli 9. júna 1915.
4. V bitke pri Solferine bolo prvýkrát počas boja použité motorové lietadlo.
5. Otto von Bismarck bol nepriateľom Habsburskej monarchie.

2. okruh: Máme pred sebou všetky minerály, ktoré sa nachádzajú na stupnici tvrdosti. Z každého typu máme práve jeden kus:

1. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný minerál bude tvrdší ako diamant?
2. Aká je pravdepodobnosť, že minerál bude tvrdší ako apatit?
3. S akou pravdepodobnosťou vyberiem minerál tvrdší ako kremeň?
4. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný minerál bude tvrdší ako topás alebo mäkkší ako fluorit?

V tabuľke č. 1 je uvedená analýza úloh na základe ich zaradenia a náročnosti:

Číslo okruhu	Zaradenie úlohy	Zaradenie úlohy	Úroveň
1	Matematika – Dejepis	Vymedzenie problémov a ich riešenie Argumentácia	Úroveň reprodukcie
2	Matematika – Biológia	Rozmýšľanie a usudzovanie Modelovanie Použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania a operácií	Úroveň prepojenia

Tab. 1

Vybrané úlohy sme použili počas vyučovania matematiky v dvoch paralelných triedach 8. ročníka základnej školy v Banskej Bystrici, kde žiaci individuálne alebo v skupinkách riešili vybrané úlohy a následne sme spolu diskutovali o ich riešení.

Pri riešení prvého okruhu úloh sledovali žiaci jednotlivé zadania cez DATA-projektor, pričom každý z nich mal k dispozícii tri kartičky s nápismi „istá udalosť“, „možná udalosť“ a „nemožná udalosť“. Ku každej udalosti mal zodvihnúť

jednu kartičku podľa toho, čo si myslí, teda o akú udalosť ide. Žiaci 8. A triedy mali najväčší problém s určením udalostí 1 a 5 a väčšina žiakov 8. B triedy určila nesprávne udalosti v častiach 3) a 4). Dôvodom pre sčasti odlišné vedomosti z danej dejepisnej témy v týchto triedach môže byť skutočnosť, že majú rôznych učiteľov dejepisu. Celkovo však môžeme povedať, že väčšiu časť udalostí žiaci určili správne.

Pri riešení druhej úlohy pracovali žiaci v skupinách, pričom mali k dispozícii učebnicu biológie, kde našli aj stupnicu tvrdosti minerálov. Po riešení v skupinách sme so žiakmi diskutovali o správnych riešeniach. V otázkach 1–3 mala viac ako polovica žiakov správne riešenie. Problém však bol s riešením štvrtej úlohy, ktorú správne vyriešilo iba 25 % žiakov.

Na konci vyučovacej hodiny nasledoval rozhovor so žiakmi, v ktorom sme zisťovali, či sú zvolené úlohy pre nich zaujímavé a motivačné. Väčšina žiakov uviedla, že s podobnými úlohami z pravdepodobnosti sa ešte nestretli, považovali ich za zaujímavé a tiež ocenili, že sa počas riešenia takýchto úloh dozvedeli niečo nové aj z ostatných vyučovacích predmetov.

Literatura

- [1] BRINCKOVÁ, J. (2010). *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy* (Tvorivá práca učiteľa matematiky). Vyd. 1. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 200 s. ISBN 978-80-8083-936-9.
- [2] PŁOCKI, A. (2004). *Pravdepodobnosť okolo nás*. Ružomberok: PFKU. ISBN 80-89039-51-0. Dostupné z <http://www.ineko.sk/ostatne/matematicka-gramotnost>

Využitie e-testov pri rozvíjaní schopnosti odhadu v školskej matematike

LILLA KOREŇOVÁ¹

Aktivity v školskej matematike, ktoré vedú k odhadom sú veľmi dôležitou súčasťou matematického vzdelávania. Jednou z úloh školskej matematiky je prepojenie medzi školskou matematikou a reálnym svetom, matematizáciou reálnych situácií a vytváraním matematických modelov. V reálnom živote často nepotrebujeme presný výpočet, stačí nám odhad. Prepojenie reálneho sveta so školskou matematikou je jeden

¹FMFI Univerzita Komenského v Bratislave, korenova@fmph.uniba.sk

z dôvodov zaradenia aktivít na odhad do vyučovania matematiky. Digitálne prostredie, hlavne možnosti e-testov môžu výraznou mierou pomôcť pri rozvíjaní kompetencie odhadu u žiakov. V príspevku poukážeme na možnosti rozvíjania schopnosti odhadu pomocou digitálnych technológií.

V Štátnom vzdelávacom programe pre vzdelávaciu oblasť Matematika a práca s informáciami (ISCED2 a ISCED3) sa nachádza zmienka o odhade na mnohých miestach. Vo vzdelávacom štandarde daného dokumentu sa uvádza, že žiaci by mali vedieť odhadnúť vzdialenosť (na metre), povrch a objem telies, odhadnúť veľkosť uhla, znázorniť časť celku na základe odhadu (aj v kruhovom diagrame), odhadnúť výsledok početových operácií, odhadnúť riešenia na základe grafického znázornenia (tabuľky, diagramy).

„Kritickým myslením, konštruktivistickým prístupom a zároveň získanými skúsenosťami si má žiak postupne budovať odhad danej matematickej situácie.“ (Žilková, 2009)

Prieskumom sme zistili, že učitelia majú na dosiahnutie týchto cieľov málo materiálov, úloh a aktivít a často pre nedostatok času zaraďujú úlohy na odhad v menšej miere do vyučovania. V súčasnosti žiaci žijú v digitálnom svete a digitálne technológie sa aj v školách využívajú stále častejšie. Preto môžu byť e-testy zamerané na rozvoj kompetencie odhadovať efektívnym nástrojom.

V širšom ponímaní je e-test elektronický interaktívny materiál, založený na systéme otázok a hľadání odpovedí vytvorený nielen na meranie vedomostí, ale aj na dosahovanie vyučovacích cieľov (teda môže slúžiť ako nástroj pre inovatívne vyučovacie metódy). E-testy sa dajú využiť nielen v učebniach vybavených počítačmi alebo notebookmi, ale do popredia sa dostáva aj ich využitie pomocou tabletov. Jeden z najznámejších softvérov pre tvorbu e-testov, ktoré sú učiteľom voľne dostupné je HotPotatoes.

Typy úloh na odhad

Úlohy v rámci vyučovania matematiky zamerané na rozvoj žiackej kompetencie odhadovať môžeme triediť podľa niekoľkých hľadísk.

Z hľadiska účelu môžeme deliť úlohy na získanie určitej skúsenosti (odhad miery, počtu) a na úlohy, pri ktorých žiak logickým myslením dospeje k správne odhadu.

Úlohy na odhad podľa Samkovej môžeme deliť na:

- odhady kvantitatívne (*numerosity estimates*), ktoré ešte delíme na
 - 1-dimenzionálne (odhad počtu koráľkov na šnúre)
 - 2-dimenzionálne (odhad počtu ľudí na námestí, počtu áut na parkovisku)
 - 3-dimenzionální (odhad počtu bonbónov v pohári, počtu tehál na palete)

- výpočtové odhady (*computational estimates*)
- odhady miery (*measurement estimates*), ktoré ešte delíme na
 - 1-dimenzionálne (odhad dĺžky, vzdialenosti, výšky, obvodu, času)
 - 2-dimenzionálne (odhad obsahu, povrchu, veľkosti uhla)
 - 3-dimenzionálne (odhad objemu, hmotnosti) (Samková, 2013)

Z hľadiska začlenenia úloh do tematických okruhov rozlišujeme úlohy na odhad v nasledovných okruhoch:

- Čísla, premenná a počtové výkony s číslami.
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy.
- Geometria a meranie.
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika.

V nasledujúcej časti uvádzame niekoľko ukážok e-testov:

- Vizualný odhad:
Žiaci majú za úlohu odhadnúť v určitom čase počet objektov.



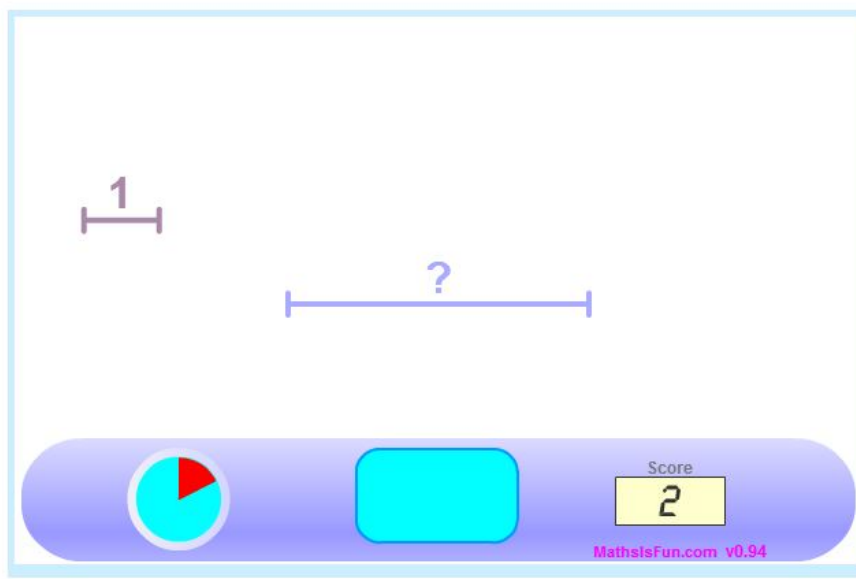
Obr. 1 (<http://www.mathsisfun.com/numbers/estimation-game.php>)

- Odhad miery:
Žiaci majú za úlohu odhadnúť relatívnu dĺžku úsečky a uhol v stupňoch.

Estimation Games

Find the answer **fast** ... you also get points for being **close**!

Try every game, and don't worry if you make mistakes, you will get better with practice



Obr. 2 (<http://www.mathsisfun.com/numbers/estimation-game.php>)



Obr. 3 (<http://www.mathplayground.com/alienangles.html>)

Záver

Nástupom výpočtovej techniky sa čoraz menej kladie dôraz na rýchle a presné mechanické výpočty, dôležité je, aby žiaci pochopili každý krok výpočtu, krok algoritmu riešenia. Preto sa dostávajú do popredia úlohy, kde žiaci sú nútení premýšľať a počítať v hlave, odhadovať. Úlohy na rozvoj kompetencie odhadu sú preto dôležitou súčasťou školskej matematiky. Na rozvoj tejto schopnosti sú vhodné aj e-testy. Žiaci môžu riešiť úlohy individuálne, každý svojim tempom a majú okamžitú spätnú väzbu. Je vhodné, ak pri úlohách, kde žiaci si môžu vytvoriť určitú stratégiu odhadu, dostali spätnú väzbu vo forme návodu na vhodnú stratégiu. Takéto e-testy sa nachádzajú na internete väčšinou v anglickom jazyku. Vhodným softvérom na vytvorenie takýchto e-testov je softvér HotPotatoes.

Príspevok vznikol vďaka podpore projektu KEGA 094UK-4/2013 *E-matik+*, *Kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky*.

Literatura

- [1] FULIER, J. (2005). *Informačné a komunikačné technológie vo vyučovaní matematiky*. Nitra: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre.
- [2] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. & STEHLÍKOVÁ, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.
- [3] KRAJČIOVÁ, J. (2005). *Odhady a nekonečno. Zborník príspevkov Pytagoras 2005*. Bratislava: P-MAT.
- [4] LEVINE, D. R. (1982). *Strategy use and estimation ability of college students*. Journal for Research in Mathematics Education, Zv. 13. č. 5.
- [5] PARTOVÁ, E. (2011). *Vyučovanie matematiky pomocou moderných technológií*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave.
- [6] SAMKOVÁ, L. (2013). *Využití programu GeoGebra při nácviku odhadů. Sborník 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: JČU.
- [7] ŠEDIVÝ, O., et al. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre.
- [8] ŽILKOVÁ, K. (2009). *Školská matematika v prostředí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského Bratislava.

Proces řešení slovních úloh žáky prvního stupně

MICHAELA KRÁLOVÁ¹

Příspěvek se zabývá teoretickými východisky procesu řešení slovních úloh žáky prvního stupně. Jsou zde popsány přístupy vybraných autorů ve snaze vystihnout jejich zásadní myšlenky a poukázat na styčné plochy.

Slovní úlohy jsou obecně vnímány učiteli i žáky jako obtížná partie školské matematiky. Jejich řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech získaných ve vyučování. V RVP pro ZV je přímo zakotvena důležitost slovních úloh a řešení nestandardních problémů, kdy je nutné uplatnit logické myšlení. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování.

Pro porozumění matematickému problému (slovní úloze) a jeho řešení je zapotřebí matematického uvažování, což je jedna ze složek matematických schopností, které vytváří specifickou složku inteligence. Matematické uvažování můžeme tedy chápat jako jistý způsob myšlení, který se projevuje porozuměním podstatě úlohy a jejím vyřešením (Geary, 1996).

Řešení slovních úloh znamená aplikaci matematických znalostí a potvrzení úrovně jejich zobecnění. Způsob, jakým žák úlohu řeší, signalizuje úroveň jeho matematického uvažování. Schopnost pochopit podstatu slovní úlohy znamená jistou nezávislost na číselném zápisu příkladu, tedy na jednoznačné formulaci toho, co má být řešeno. Jedná se o určitou generalizaci. Dosažení této úrovně lze chápat jako jednu z fází vývoje matematických dovedností a uvažování (Vágnerová, 2001).

Jedním z důležitých cílů vyučování matematiky je podle F. Kuřiny (1989) naučit žáky matematiku aplikovat, což je ve školské matematice naplňováno právě řešením úloh. Na úrovni ZŠ jsou důležité slovní úlohy, v nichž je obvykle popsána nějaká reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky. Je velmi vhodné úlohy modelovat. Za nejdůležitější modely lze patrně považovat modely činnostní, ikonické (obrázek, schéma) a symbolické (rovnice apod.). Činnostním modelem mohou být, např. kamínky, počítadlo. Na prvním stupni jsou tyto modely nezastupitelné, jelikož umožňují aritmetické operace činnostmi a tím pomáhají

¹ZŠ a MŠ Praha Vinoř, KMDM PedF UK, michala.kralova@post.cz

žákům hlouběji si osvojit, např. vlastnosti početních úkonů. Ikonický model představuje přepis textu úlohy s minimálním použitím slov a s názorným vyjádřením vztahů, o něž v reálné situaci jde. Symbolický model je popis určité reálné situace v jednoduchém konvenčním jazyce, pomocí symbolů. Důležité je, aby model vyjadřoval pro žáka přesvědčivě reálnou situaci, aby v něm viděl přehlednější informaci o úloze než v původním slovním vyjádření. Pokud žáci řeší úlohu přímo (na základě úvahy, vhledem), nenutíme je modely vytvářet.

Georg Polya (1971), ze kterého vychází řada autorů, tvrdil, že řešení problémů (úloh) je praktická dovednost a jakoukoli praktickou dovednost lze získat imitací a nácvikem. Řešitel tedy může svou dovednost řešit problém rozvíjet jednak pozorováním jiných řešitelů a spoluprací s nimi, jednak opakováním a procvičováním. Proto je pro žáky velmi důležitá vzájemná prezentace řešení a společná diskuse.

Pro úspěšné řešení slovní úlohy je podle M. Hejného a N. Vondrové (1999) zásadní její uchopení. Autoři rozlišují čtyři etapy procesu uchopování slovní úlohy. Řešitel si nejprve vytvoří představu, čeho se úloha týká, a vzpomíná, zda už podobnou úlohu řešil. Poté eviduje vztahy mezi objekty úlohy a zapíše, označí nebo nakreslí, co je dáno a co má zjistit (např. pomocí šipek). Nakonec si řešitel vytvoří představu o úloze jako celku a na základě toho vyvodí strategii, jak bude úlohu řešit. Všechny výše zmíněné etapy se prolínají, řešitel se k jednotlivým fázím vrací. Pokud žák úloze neporozumí, dochází k rezignaci, podvádění, náhodné kalkulaci nebo náhradnímu uchopování. Mnoho žáků se snaží úlohy řešit na základě signálního slova ze zadání, na základě vzpomínky – tzv. protetický uchopovací proces. Žák zvolí strategii řešení na základě protetického poukazu, tedy informace (signálu), která mu asociuje kalkulativní proces, jakým má danou úlohu řešit (Hejný, 1999). Signály používáme běžně v našem každodenním životě, urychlují komunikaci mezi lidmi. Mohou být ovšem také nositeli nedorozumění a omylů a v matematice vést ke zvolení špatné řešitelské strategie. Na základě tohoto je velmi žádoucí a vhodné předkládat žákům úlohy s tzv. antisignálem, tedy signálem, kde danému slovu neodpovídá jeho běžná operace, ale právě operace opačná (Hejný & Kuřina, 2001).

Etapu uchopování zmiňuje jako jednu z fází řešitelského procesu také J. Novotná (2000). Tato etapa zahrnuje uchopování všech objektů, vztahů, identifikaci těch, které se týkají řešené situace, eliminaci těch, které jsou „navíc“, a získání celkového vhledu do struktury problému. Následující etapa transformace zajišťuje přenos odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému. Poslední etapa znamená návrat. Takto popsany řešitelský proces se v praxi nemusí často objevovat, můžeme v něm pozorovat odchylky, řešitel se může k jednotlivým etapám vracet či případně nějakou vynechat. Vhledem rozumí ucelené pochopení vztahů mezi prvky vystupujícími v zadání slovní úlohy a uvědomění si souvislostí. Prvotní odraz zadání slovní úlohy v hlavě řešitele bez ohledu na jeho zveřejnění chápe jako reprezentaci. Mohou nastat situace, kdy si řešitel

nevystačí s reprezentací vytvořenou pouze v hlavě, projeví se potřeba ji sdělit. To může mít příčinu ve složitosti struktury řešené úlohy, kdy řešitel zatím nezískal dostatečný vhled. Při převádění slovně zadaného problému do vhodného systému znaků (referenčního jazyka) dochází ke kódování, které řešiteli přinese úspornější záznam dat, podmínek a řešeného problému. Záznam lze pojmenovat jako legendu (zápis slovní úlohy). Řešitel má k dispozici různé referenční jazyky, tím pádem pro jednu úlohu vznikají různé legendy (stručné zápisy, obrázky, diagramy apod.). Žák, který má obtíže při čtení s porozuměním, se získáním vhledu do struktury vztahů v zadání nebo mu chybí dostatečné matematické zázemí pro vyřešení problému, může úlohu řešit strategií pokus-omyl. Při tomto způsobu řešení mohou nastat tyto případy: A) Řešitel prohlásí za výsledek své řešení z prvního pokusu, neprovede kontrolu, zda toto jeho řešení vyhovuje podmínkám zadání, nehledá další možná řešení. B) Řešitel kontroluje svůj výsledek, zda vyhovuje podmínkám zadání. Řešení označí za správné. Následují dvě možné cesty – řešitel dále nehledá jiná možná řešení, nebo se snaží nalézt ještě další řešení. Tato další řešení může opětovně hledat cestou pokus-omyl, ovšem většinou má již do úlohy vhled a nepracuje dále náhodně. C) Řešitel při kontrole správnosti svého výsledku zjišťuje, že tento výsledek nevyhovuje. Může opět postupovat dvěma způsoby – ukončit řešení nebo hledání dalšího řešení a to buď opět pokusem-omylem, nebo zvolit jinou strategii při hledání řešení na základě předchozí zkušenosti.

Řešením slovních úloh se dlouhodobě zabývá také M. Tichá (1998). Na základě svého výzkumu potvrzuje skutečnost, že vizuální reprezentace (obrázková, ikonická) může žákům pomáhat při uchopování slovních úloh, ale zároveň poukazuje na skutečnost, že nemusí být vhodná pro všechny žáky. Někteří žáci používají obrázky jako ilustraci svého řešení – úlohu nejprve vyřeší (např. úsudkem) a poté, ve snaze toto řešení potvrdit, jej doplní ilustrací. Ovšem nakreslení obrázku ještě neznamena, že žák úlohu a jejím podmínkách porozuměl a uchopil úlohu takovým způsobem, který ho dovede ke správnému řešení. U velkého množství žáků se objevuje metoda řešení experimentální cestou (pokus-omyl). Jsou i takoví žáci, kteří se nesnaží úlohu uchopit, ale za každou cenu „něco vypočítat“ a svou energii věnují provádění výpočtů. Výzkum potvrdil skutečnost, že čím starší žák je, tím více preferuje symbolický zápis proti vizuálním reprezentacím, řešením experimentálním apod. Přitom znakový systém do jisté míry brzdí žakovu tvořivost a schopnost vytvářet modely. Starší žáci nejsou úspěšnější při řešení slovních úloh, jsou pouze zběhlejší v početní technice.

Literatura

- [1] GEARY, D. C. (1996). *Children's mathematical development: research and practical applications*. 1st ed. Washington, DC: American Psychological Association, XV, 327 p. ISBN 15-579-8258-9.

- [2] HEJNÝ, M. & KUŘINA, Fr. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8581-4.
- [3] HEJNÝ, M & VONDROVÁ, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 123 s. ISBN 80-860-3998-6.
- [4] NOVOTNÁ, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 123 s. ISBN 80-729-0011-0.
- [5] PÓLYA, G. (1971). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Expanded Princeton Science Library ed. Princeton [N.J.]: Princeton University Press, XXVII, 253 p. ISBN 06-911-1966-X.
- [6] TICHÁ, M. (1998). Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In: *6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* [online]. [cit. 2014-02-26]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_55.pdf
- [7] VÁGNEROVÁ, M. (2001). *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 304 s. ISBN 80-246-0181-8.

Výuka elementární matematiky pro posluchače s rozdílnými vstupními znalostmi na oboru Arts management na VŠE

ONDŘEJ MACHEK, HANA SCHOLLEOVÁ¹

Obor Arts management vyučovaný na Vysoké škole ekonomické v Praze má za cíl profesní přípravu odborníků se zaměřením na management kulturních organizací. Typickým absolventem zmíněného oboru není ekonomický analytik, ale například filmový producent, ředitel divadla nebo kastelán hradu. Většina studentů daného oboru nemá k matematice kladný vztah, přičemž mezi studenty se nutně najdou extrémní, např. absolvent konzervatoře bez výuky středoškolské matematiky nebo čerstvý maturant z matematiky na gymnáziu. Na VŠE standardně probíhají přijímací zkoušky z matematiky, avšak v případě oboru Arts management přijímací

¹Fakulta podnikohospodářská, Vysoká škola ekonomická v Praze, ondrej.machek@vse.cz, hana.scholleova@vse.cz

zkouška obsahuje pouze několik logických úloh. Studenti však matematiku potřebují v oborově povinných předmětech, zejména v ekonomii, účetnictví, financích nebo v základech statistiky. Z těchto důvodů byl akreditován předmět pokrývající nutné minimum matematiky vhodné pro navazující předměty, který se nazývá Kvantitativní nástroje pro Arts management.

Obsah výuky a hodnocení studentů

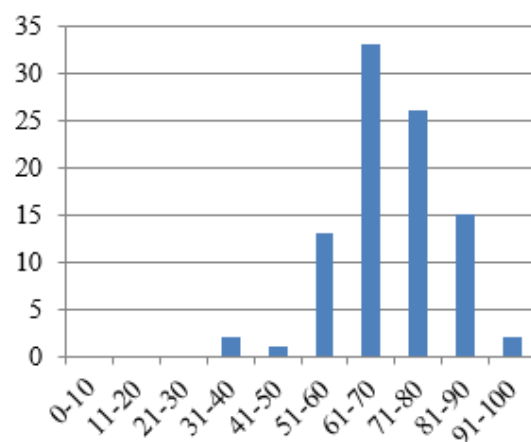
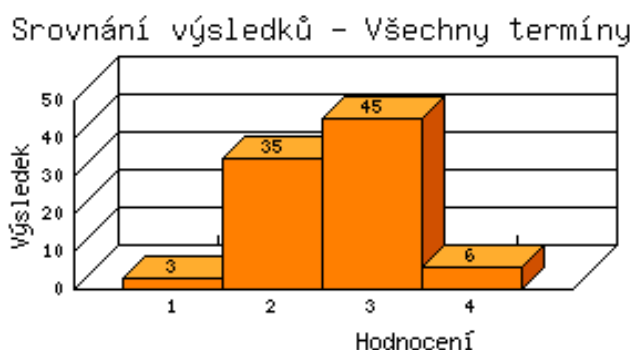
Struktura studentů a jejich znalostí byla předem neznámá. Pomocí interaktivní úvodní hry na tvorbu a řešení příkladu (Vennův diagram a řešení soustavy rovnic) jsme zjistili, že přibližně 30 % posluchačů maturovalo z matematiky a cca 80 % jich mělo na střední škole matematiku. To však znamená, že přibližně 20 % studentů absolvovalo střední umělecké školy. Výchozí znalosti studentů tak byly poměrně heterogenní. Výuku dále komplikoval fakt, že se jednalo o hromadnou přednášku pro více než 50 osob a dotace byla pouze 90 minut týdně. Obsah výuky bylo proto nutné adaptovat průběžně s ohledem na znalosti studentů a jejich schopnost pracovat s nabytými informacemi. Postupně došlo k zařazení následujících témat:

- Binární operace, asociativita, komutativita, distributivita.
- Poměry, procenta, převody jednotek.
- Využití přímé a nepřímé úměrnosti v ekonomických úlohách.
- Rovnice a nerovnice a jejich soustavy.
- Vlastnosti funkcí, transformace grafu funkce.
- Posloupnosti a řady, nekonečná geometrická řada.
- Finanční matematika.
- Základy optimalizace a řešení základních úloh lineárního programování.
- Limity a derivace funkcí, vyšetřování průběhu funkce.

Z důvodu rozdílných znalostí a malého časového prostoru byl při výuce kladen důraz na průběžnou práci v podobě čtyř online domácích úkolů a čtyř průběžných testů. Domácí úkoly byly náhodně generovány z databáze, do které jsme v průběhu přípravy výuky přidali více než 200 příkladů. Docházka byla nepovinná, přičemž absentující studenti měli možnost sledovat postup výuky a využívat průběžně připravované „pracovní listy“ s příklady na procvičení. Studenti také mohli při testech používat ručně psané „taháky“ ve formátu A5. Naproti tomu testy nebyly jednoduché a byly zaměřené na schopnost využití logických postupů a metod v praxi. V průběhu semestru bylo možné získat 50 % bodů, závěrečný test pak tvořil zbývajících 50 %. K úspěšnému absolvování bylo nutno získat minimálně 60 % bodů.

Výsledky

Příprava výuky a práce se studenty v natolik heterogenní a rozsáhlé skupině studentů se ukázala jako velmi náročná. Přesto naprostá většina studentů prospěla. Konečné výsledky jsou uvedeny na obrázku 1. Klasifikace byla následující: 0–59 bodů nedostatečně (známka 4), 60–74 bodů dobře (známka 3), 75–89 bodů velmi dobře (známka 2), 90–100 výborně (známka 1). Fakt, že známek „výborně“ bylo velmi málo, je zřejmě způsoben určitou fragmentací bodování za průběžnou práci, neboť ztratit deset bodů ve čtyřech domácích úkolech a čtyřech průběžných testech je poměrně snadné. Obr. 1 také znázorňuje rozdělení četnosti dosažených bodů.



Obr. 1: Konečné známky studentů a rozdělení četnosti dosažených bodů do skupin

Největší zpětnou vazbu poskytovala anonymní evaluace předmětu studenty (předmětová anketa). Evaluace ukázala, že navzdory tomu, že matematika byla u cílové skupiny studentů poměrně neoblíbená, nebyl předmět vnímán negativně a studenti si odnesli nové poznatky. Pouze 17 % studentů označilo obsah předmětu jako nezajímavý a 19 % studentů uvedlo, že se v kurzu mnoho nenaučili. 60 % studentů hodnotilo obtížnost kurzu jako přiměřenou a 89 % studentů uvedlo, že jsou s kvalitou kurzu spokojeni.

Studenti dále ocenili skutečnost, že měli možnost získat v semestru body za průběžnou práci a používat při kontrolních testech vzorce. Aktivní studenti také ocenili formát cvičení/přednáška s možností při výkladu procvičovat probíranou látku. Kladně byla také hodnocena možnost zopakovat si „praktickou matematiku“ namísto vyšší matematiky, kterou někteří studenti nepovažují za využitelnou. Někteřím studentům se naproti tomu nelíbila vyšší náročnost testů, rychlé tempo a široký záběr předmětu a nebodovaná docházka.

Celkový dojem pedagogů

Mezi největší problémy patřila bezesporu nevyrovnanost studentů ve smyslu vstupních znalostí matematiky. Výuka dále ukázala, že nelze spoléhat ani na základní znalosti (např. vyjádření neznámé v rovnici, nemožnost dělení nulou, pořadí operací), a to ani u gymnazistů. Zůstává tedy otázkou, jakým způsobem je možné v oblasti základní a středoškolské výuky matematiky zlepšit tyto základní znalosti, které studenti potřebují i v běžném životě. Dalším poznatkem je zjištění, že studenti se často snažili vyhnout se grafickým řešením úloh a namísto toho se snažili problém řešit numericky, což v řadě případů vedlo k neúspěšnému řešení příkladu. Studenti měli také problém spojit více známých nástrojů v jednom příkladu a matematizovat slovně zadanou úlohu. Překvapivým pozitivním zjištěním je ale fakt, že nově probíraná témata (lineární programování, pokročilá finanční matematika) nakonec vykazovala slušnou úspěšnost.

Závěr

Pro práci s početnou skupinou studentů s rozdílnými vstupními znalostmi by jistě bylo vhodné studenty oddělit podle vstupní úrovně, což však v tomto případě bohužel nebylo z organizačních důvodů možné. Při výuce byl brán velký ohled na studenty bez absolutoria středoškolské matematiky, kterých však byla menšina. Doporučovali bychom proto v podobných situacích zvýšit důraz na samostudium a následnou kontrolu základních témat, což však vytváří požadavek na studijní materiály, např. ve formě skript. Bylo by také vhodné více se věnovat pokročilým tématům a neztrácet příliš mnoho času na základech, což sníží rychlost u probírání pokročilejších témat, na kterou si někteří studenti stěžovali. Dále je možné konstatovat, že studenti preferují zábavné úlohy s příběhem a také jim vyhovuje přístup „kuchařky“ (naučit se aplikovat postup na konkrétní úlohu). Při tom je však nutné zachovat samostatné myšlení a zdůraznit návaznost na praktické aplikace. Zajímavou otázkou také zůstává, čím je způsobeno, že někteří absolventi středních škol mají potíže s porozuměním a aplikací grafického znázornění matematických úloh (vnímání označení os, identifikace závisle a nezávisle proměnné), když se denně v médiích s nejružnějšími typy grafů všichni setkáváme.

Literatura

- [1] COAD, M., et al. (2011). *Mathematics for the International Student. Mathematical Studies*. Auckland: Haese & Harris Publications.
- [2] ODVÁRKO, O. (2005). *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*. Praha: Prometheus.

Výuka matematiky metodou CLIL – jak sladit jazykové a matematické cíle výuky

HANA MORAOVÁ¹

Předložený příspěvek popisuje a analyzuje výukovou jednotku Prvočísla, která byla vedena v anglickém jazyce v 6. třídě základní školy s rozšířenou výukou jazyků. Žáci, kteří se výuky účastnili, jsou na jazykové úrovni A1/A2. Autorka ukazuje, že vybraná matematická témata jsou vhodná pro výuku v anglickém jazyce i u žáků, jejichž jazykové kompetence nejsou ještě na vysoké úrovni.

CLIL

Schopnost používat cizí jazyk znamená mnohem více než znát jeho slovní zásobu a mluvnici a mluvit v dokonale utvořených větách. Výuka jazyků je obklopena mýty, mnoho z nich zkresluje představy o tom, co nejvíce pomáhá pro dosažení úspěchu. Stále existují učitelé, kteří jsou přesvědčeni, že jazyk je třeba používat co nejpřesněji, předcházet chybám a s produktivními činnostmi vyčkávat, až bude u žáků žák na dostatečně vysoké úrovni. Tím ale popírají základní principy osvojování si jazyka. Stejně tak jako malé dítě může mít rozvinutou schopnost dorozumět se pomocí pouhých několika slov, může každý žák použít s velkým úspěchem různé jazyky, i když je jeho gramatika nedokonalá, znalost slovní zásoby omezená a výslovnost nepřesná. (Marsh & Langé, 2000) Pokud se rozhodneme, že chceme dát žákům více prostoru pro přirozené osvojování si cizího jazyka, výuka metodou CLIL je jedním z vhodných prostředků. Výuka metodou CLIL (obsahově a jazykově integrované vyučování) umožňuje, aby se jazyk stal prostředkem, nikoli cílem komunikační situace. Jak upozorňují Novotná a Hofmannová (2000), obsah a jazyk jsou rozvíjeny ve vzájemném vztahu a výuka je založena na dvou základních cílech – obsahovém a jazykovém.

CLIL přispívá k dobrému pocitu, protože umožňuje zažít úspěch, i když třeba jen skromný. Otevírá cestu k dalšímu zdokonalování. Tajemství je ukryto v tom, že se zúročují pozitivní postoje mladých lidí k cizím jazykům a motivace vede k dosažení co nejlepších výsledků jak v jazyce, tak v odborném předmětu. (Marsh & Langé, 2000) Zkušenosti ukazují, že výuka touto metodou může být motivující pro žáky, kteří nemají příliš kladný vztah k cizímu jazyku, ale mají pozitivní vztah k předmětu vyučovanému v tomto jazyce, což v důsledku může vylepšit vztah žáků k cizímu jazyku. Díky metodě CLIL mohou při komunikaci v cizím jazyce prožívat úspěch a mohou předčít spolužáky, kteří jsou obvykle v hodinách cizího jazyka lepší.

¹Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, moraova@seznam.cz

Výuka metodou CLIL v posledních letech vzbuzuje velký zájem. V současné době roste počet základních škol, které výuku metodou CLIL zavádějí na 2. a někdy i na 1. stupni. Zatímco pro výuku některých předmětů v cizím jazyce je podle výnosu č. 9/2013 MŠMT (MŠMT, 2013) třeba povolení MŠMT a výuku je třeba zajistit učitelem, jehož úroveň v cizím jazyce je na úrovni C1 podle Společného evropského referenčního rámce pro jazyky, pro výuku metodou CLIL stačí její uvedení ve Školním vzdělávacím programu. Přitom metoda CLIL stanovuje, že při výuce musí být cizí jazyk použit alespoň v 30 % vyučovacího času, zatímco v prvním případě je třeba, aby byla veškerá výuka vedena v cizím jazyce.

Postupné rozšiřování používání metody CLIL s sebou nese některé otázky. Jací učitelé mohou metodou CLIL učit, které předměty jsou pro výuku metodou CLIL nejvýhodnější? Na 1. stupni se zdá být nejvhodnější metodu CLIL využívat v předmětech jako výtvarná výchova nebo Svět práce, na 2. stupni se jako velmi vhodný předmět jeví matematika, neboť jde o předmět velmi názorný. Při vhodné volbě témat a obsahů si žáci vystačí s poměrně základní slovní zásobou a znalostí přítomného času a rozkazovacího způsobu. Pokud v dějepisu či výchově k občanství zjednodušíme jazyk, bude to často znamenat výrazné omezení odborného obsahu. V matematice lze ale využívat velmi jednoduché jazykové struktury a výrazy, které jsou žáci schopni zvládnout již na úrovni A1/A2.

Plánování a průběh výuky

Následující text popisuje dvě vyučovací hodiny matematiky, vedené metodou CLIL. Obsah, který byl pro tuto výuku zvolen, byla prvočísla, jazykové cíle byly stanoveny jako procvičení rozkazovacího způsobu a rozšíření slovní zásoby v oblasti čísel a jejich vlastností. Žáci se dosud ve výuce matematiky s definicí pojmu prvočíslo nesetkali, šlo o novou látku. Při plánování vyučovacích hodin autorka dbala na pečlivou analýzu jazyka, který bude v každé části hodiny potřeba. Ve třídě bylo přítomno 22 žáků. Autorka je na začátku hodiny upozornila, že je v jejich zájmu minimalizovat komunikaci v českém jazyce.

Na úvod žáci dostali za úkol pracovat ve dvojicích se čtverečkovaným papírem a rozdělit tři zadaná čísla do všech možných čtverců a obdélníků. Jedno z trojice zadaných čísel bylo vždy prvočíslo, žáci měli objevit, že jedno ze zadaných čísel lze zakreslit pouze jako obdélník „číslo krát jedna“, zatímco ostatní dvě umožňují více možností zakreslení. Jazyk potřebný pro tuto úlohu byl identifikován jako *divide*, *square*, *oblong*. Autorka na tabuli ukázala ilustrativní příklad, aby všichni žáci věděli jak postupovat. Ukázala, že číslo 12 lze rozdělit jako 1x12, 2x6, 3x4, 4x3, 6x2 a 12x1. Poté žáci zahájili samostatnou práci ve dvojicích. Autorka práci ve dvojicích pečlivě monitorovala, vysvětlovala nejasnosti a opravovala chybné postupy (v jedné dvojici například rozdělil 7 na 3,5x2). Po ukončení této aktivity autorka vybrala několik žáků, aby ostatním ukázali své výsledky. Poté přešla k definici prvočísla.

Nová slovní zásoba byla *prime number*, *factor*, *composite number*. Ukázalo se, že žáci nemají jasno v rozdílu mezi lichými čísly a prvočíslly, proto autorka na tabuli připsala slova *odd* a *even*. K *prime numbers* vypsala ta čísla, která žáci objevili v rámci aktivity, k *odd* lichá čísla do 10 a k *even* sudá čísla do 10.

V následující aktivitě každý žák dostal tabulku s čísly od 1 do 100 a úkol *Find all prime numbers*. Následovaly jasné a jednoduché instrukce a postup podle Eratosthénova síta. Jazyk potřebný pro tuto aktivitu byl *Prepare red, blue, yellow and green pencils. Ignore number 1, cross it out. Is number two a prime number? Take a red pencil. Put number 2 in a box. Colour every second number red*. Autorka na tabuli ukázala, co znamená dát číslo do rámečku a co znamená políčko vybarvit. Názornost je při výuce metodou CLIL velmi důležitá, neboť pomáhá jazykově slabším žákům. Práce žáků byla soustavně monitorována a případné omyly individuálně vysvětlovány. Pak následovalo stejné zadání pro číslo 3, 5 a 7 a ostatními barvami. Správnost řešení žáci společně ověřili pomocí interaktivního cvičení na http://www.softschools.com/math/prime_numbers/prime_numbers_up_to_100.

V druhé vyučovací hodině žáci pracovali s *Prime number maze*. Celou řadu různých bludišť lze vygenerovat na <http://www.worksheetworks.com/math/numbers/prime-number-maze.html>. Zadání je, např. *Help the frog get to the pond by following the path of prime numbers*. Jediné problematické spojení může být *following the path*. Pokud žáci měli se zadáním problémy, byly řešeny individuálně ukázáním prvních několika čísel na cestě. U této aktivity se ukázalo, že někteří žáci ještě dobře nerozlišují rozdíl mezi prvočíslem a lichým číslem. Situaci autorka řešila individuálně. Pokud byli žáci při řešení této úlohy výrazně rychlejší než ostatní spolužáci, dostali úkol navíc: tabulku čísel od 1 do 100, s níž ve dvojici hráli hru *Prime Number Hunt*. Zadání bylo opět jazykově nenáročné. *Play a game. If you cross a prime number, you get three point, if you put a circle to a composite number, you get one point. The winner is the person who gets more points*. Zadání bylo na interaktivní tabuli, a pokud bylo třeba, autorka ho jednotlivým párům znovu vysvětlovala. V rámci hry připomněli, která čísla od 1 do 100 jsou prvočísla. K ruce měli své Eratosthénovo síto. Efektivnější by aktivita byla, kdyby dvojice pracovaly na počítači. Pak by pracovali bez Eratosthénova síta a byla by vyšší pravděpodobnost, že udělají chybu. Vítěz by pak nebyl ten, kdo začínal, ale ten, kdo nechyboval.

Ve chvíli, kdy všichni žáci skončili práci na bludišti, byla hra *Prime Number Hunt* ukončena a žákům byla předložena nová aktivita. *Twin primes are prime numbers whose difference is two. How many twin primes are there between 1 and 50?* V tuto chvíli bylo třeba žákům vysvětlit, co znamená termín *difference*. K tomu autorka využila tabuli a několik příkladů s odčítáním. S pomocí Eratosthénova síta pak žáci vypsali všechny vhodné dvojice. Opět bylo několik žáků, kteří vypisovali všechna lichá čísla, jejichž rozdíl je 2. Byli to hlavně suverénní žáci, jejichž angličtina je na vysoké úrovni a kteří nevěnovali zadání úlohy dostatečnou pozornost.

Posledním cvičením bylo vyhledání všech *emirpů* od 1 do 100. Žákům autorka vysvětlila, že *emirp is prime spelled backwards*, ukázala na tabuli přímo na písmenech *EMIRP* a uvedla jeden příklad – 13 a 31. Žáci pak ve svých sítích hledali všechny *emirpy* mezi 1 a 100. Tím byla hodina ukončena.

Komentáře a závěry

Provedený výukový experiment ukázal, že výuku metodou CLIL v matematice lze použít již se žáky 6. tříd, přestože jejich znalost anglického jazyka je ještě na úrovni elementary (A1/A2). Ukázalo se také, že hodina vedená v anglickém jazyce je velmi motivující pro žáky, kteří v hodinách anglického jazyka nevynikají, ale kteří jsou nadprůměrní v matematice. Přes počáteční nedůvěru a nejistotu se právě tito žáci rychle do jednotlivých aktivit začali zapojovat a to se značným entusiasmem. Naopak excelentní angličtináři (např. chlapec z bilingvní rodiny, který není zvyklý v hodinách anglického jazyka dávat pozor, protože látku bezpečně zvládá) zažívali situaci, kdy jim jejich nadprůměrné znalosti anglického jazyka nestačily k tomu, aby jednotlivá cvičení řešili úspěšně. Díky pracovnímu charakteru obou hodin se dařilo žáky udržet pozorné a participující. Vzhledem k názornosti jednotlivých aktivit byli žáci schopni pochopit zadání v anglickém jazyce, nebo jim autorka uměla se zadáním pomoci. Lze tedy říci, že není třeba se výuky matematiky vedené metodou CLIL obávat. Neklade nespílitelné nároky ani na žáky, ani na samotné vyučující. Pokud Pateman a Lim (2013) varují, že matematiku nelze učit bez rozvinuté schopnosti formulovat v cizím jazyce, tento experiment ukazuje, že i nové pojmy lze efektivně vysvětlit při pouze základních znalostech cizího jazyka.

Literatura

- [1] MARSH, D. & LANGÉ, G. (Eds.) (2000). *Using languages to learn and learning to use languages*. Jyväskylä: UniCOM.
- [2] NOVOTNÁ, J. & HOFMANNOVÁ, M. (2011). *The onset of CLIL in the Czech Republic*. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing.
- [3] PATEMAN, N. A. & LIM, C. L. (2013). The Politics of Equity and Access in Teaching and Learning Mathematics. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *The Third International Handbook of Mathematics Education* (243–263). Vol. 27. Springer.
- [4] Výnos MŠMT č. 9/2013 ze dne 18. prosince 2013, Praha, MŠMT

Lineární rovnice (Analýza učebnic ZŠ)¹

ANEŽKA NOVÁKOVÁ²

Cíl a otázky

Cílem je představit zajímavé a překvapivé informace analýzy tématu lineární rovnice v učebnicích pro ZŠ, které vyplynulo z výzkumu provedeného v diplomové práci v rámci projektu GAČR P407/11/1740.

Základními otázkami, které budou probírány, jsou:

- Jaká je forma, srozumitelnost a složitost tématu rovnic v učebnicích?
- Jaké kategorie jsou při analýze učebnic důležité a jaké jsou zajímavé?

Forma, srozumitelnost a složitost

Forma předávání tématu v učebnicích je, dá se říci, přiměřená věku žáků. Co tím myslím? Definice, věty a důkazy jsou žákům podávány formou jednoduchých vět k pochopení (obr. 1). Otázkou je, zda taková forma se dá ještě nazývat definicí. V podstatě všechny učebnice potřebné pojmy vysvětlují dostatečně srozumitelně a při podrobném a pečlivém studiu se zdá, že téma rovnic by nemělo být tak obtížné. Formu, srozumitelnost a složitost nelze hodnotit odděleně. Prolínají se i do analyzovaných kategorií. Díky tomu na tato kritéria ještě narazíme.

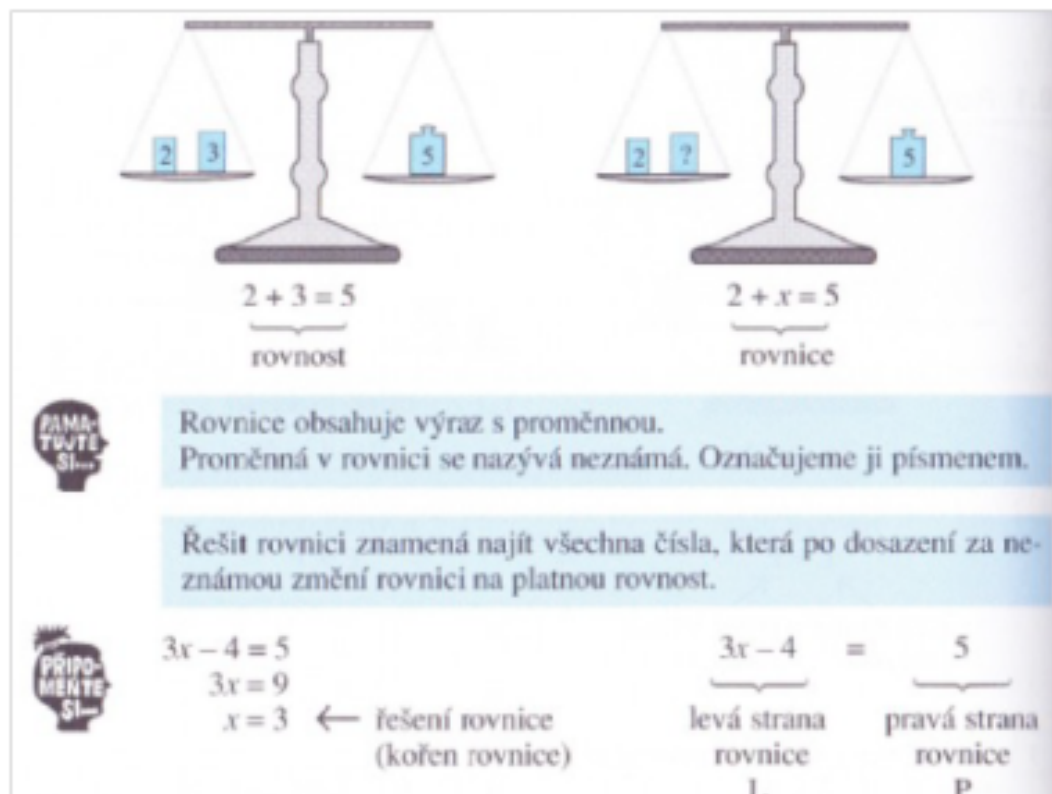
Kategorie analýzy

Motivace

V učebnicích je možné vysledovat snahu o využití, resp. použití žákových dosavadních znalostí a dovedností. Čím a jak je žák v učebnici motivován? Našla jsem několik způsobů motivace, např. motivace v úvodu tématu, kdy autor žáky vybízí „zkuste vyřešit úlohu vlastním způsobem,“ „odhalte kouzlo“ apod. Motivační úlohy bývají nejčastěji prezentovány formou obrázku (bez/s komentářem), problémové úlohy na hledání neznámého čísla, zajímavé úvodní úlohy, překvapivé úlohy v průběhu kapitoly, problémové úlohy, úlohy s kouzlem, úlohy s mezipředmětovými vazbami a různé diskuze nejen nad pojmy.

¹Příspěvek z konference Dva dny s didaktikou matematiky 15. 2. 2013.

²Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, anezka.novakova@seznam.cz



Obr. 1: Definice obrázkem se snadnou formulací (Coufalová et al., 2007)

Prostředí s modely

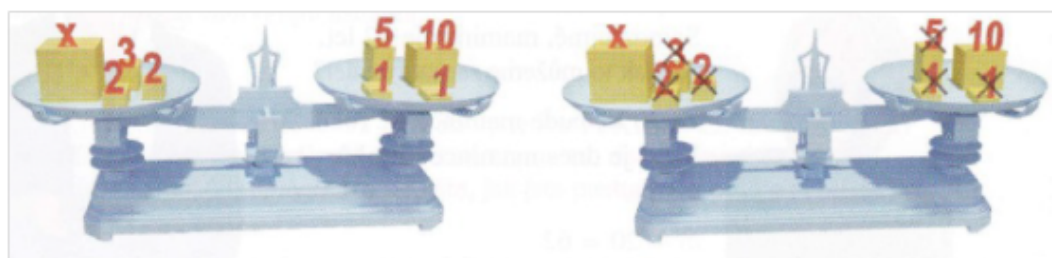
Pro systematizaci prostředí a modelů jsem použila terminologii Hejného.

V učebnicích pro druhý stupeň jsem našla úlohy v následujícím zastoupení prostředí:

- Sémantická aritmetická prostředí
 - Rovnoramenné váhy
 - Autobus
 - Úlohy na věk
- Strukturální aritmetická prostředí
 - „Myslím si číslo“ (úloha s kouzlem)
 - Magické čtverce
 - Součtové pyramidy a trojúhelníky
 - Diagramy
 - Tabulky

- Geometrická prostředí
 - Neznámé rozměry pravoúhelníků

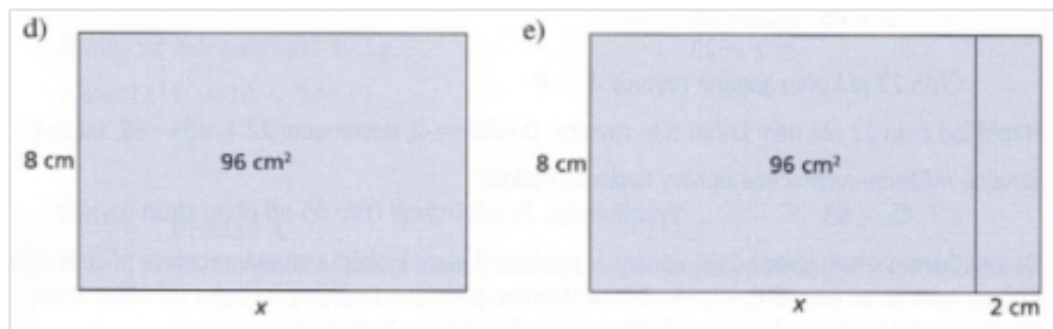
Nejčastějším a efektivně využitelným sémantickým prostředím jsou rovnoramenné váhy, které mohou být použity nejen jako papírový model, ale i jako reálný model. Efektivnost vidím v přiblížení manipulativního procesu s čísly a neznámými z rovnice na reálných předmětech, kdy neznámá představuje konkrétní předměty a čísla, např. konkrétní hmotnost nebo počet (obr. 2). Žák má možnost experimentem odhalit zákonitosti, které fungují na vahách i v rovnicích, a tak ve výuce odpadá možnost mechanického naučení se jistých pravidel. Úlohy na věk jsou obecně v učebnicích považovány za obtížné. Objevují se velmi zřídka a většinou jen v závěrečné opakovací části celku lineárních rovnic. Obtížnost zřejmě spočívá v nesnadnosti matematizace reálné situace.



Obr. 2: Model rovnoramenné váhy (Binterová et al., 2009)

Předpokládala jsem, že se v učebnicích budou ve větší míře vyskytovat úlohy na strukturální aritmetická prostředí, protože zde jde především o abstrakci pojmu číslo a zpravidla chybí kontext reálného příběhu, ale v učebnicích tomu je přesně naopak, tj. objevují se v malé míře. Světlou výjimkou jsou úlohy na „Myslím si číslo“ (resp. úloha s kouzlem), které se vyskytly ve dvou řadách učebnic. Velkou výhodou při řešení tohoto typu úloh s žáky je, že matematika (resp. rovnice) při řešení úlohy ustupuje do pozadí a žák řeší hádanku nebo přichází na kouzlo, často s velkým zaujetím a nasazením. Každé z pěti uvedených strukturálních prostředí jsem našla sice v různých učebnicích, až na jednu již zmíněnou výjimku pouze v jedné variantě ke každému modelu. Zřejmě i v praxi je četnost používání takovýchto úloh velmi nízká, což je vzhledem k jednoduché variabilitě zadání úloh velmi překvapivé.

Třetí a zároveň v učebnicích nejméně zastoupené prostředí je geometrické prostředí. Je zastoupeno pouze jedním typem úlohy hledající neznámé rozměry pravoúhelníků (obr. 3). Výhodou těchto úloh je propojení geometrických konceptů se světem čísel (aritmetiky). Tento typ úloh též není těžký na přípravu a myslím si, že žákům velmi dobře poslouží. Úlohy řeší se zaujetím a předhánějí se, kdo vymyslí lepší, rychlejší nebo snazší způsob řešení.



Obr. 3: Neznámé rozměry pravoúhelníků (Binterová et al., 2009)

Metody řešení rovnic³

Před podrobnějším představením jednotlivých metod řešení rovnic je třeba uvést tři rámcové kroky vysledované ve všech učebnicích pro téma lineární rovnice. Na prvním místě jsou připomínky úprav algebraických výrazů a pojem proměnná. Druhým krokem je připomenutí a vysvětlení pojmů a úkonů spojených s rovností a rovnicí (rovnost, rovnice, neznámá – proměnná, řešení: proces a kořen). Poslední, třetí krok představuje řešení rovnic s pozdějším vysvětlením ekvivalentních úprav s různými způsoby provedení, resp. metod řešení.

Metoda *Pokus-omyl*

Z didaktického hlediska se jedná o velmi důležitou metodu. „Metoda spočívá ve zkoušení předpokládaných řešení. Do zadání řešitel postupně dosazuje čísla a ověřuje, zda získá rovnost, nebo ne. Pokud řešitel postupuje podle systematického klíče, vyvozuje ze získaných výsledků jisté vztahy, které mu pomáhají při pochopení a budování pro něho nových metod řešení.“ (Nováková, 2012: s. 40)

V literatuře je znám jeden přístup, metoda *přepážka* (Pirie & Lyndon, 1997), vycházející z metody *pokus-omyl*. Do čtverečků označujících neznámou žáci pokusem omylem doplňují čísla tak, aby rovnici vyřešili. Neustálým doplňováním takových rovnic během týdne najdou základní možnosti výpočtu s rovnicemi a do 14 dnů prý řeší rovnice typu $ax + b = cx + d$.

Například v učebnici MÚAV (Koman et al., 2002) autoři pro žáky připravili mnoho ne zcela běžných slovních úloh a navíc žáky nabádají, aby úlohy řešili s pomocí různých metod (př. pokusem, tabulkou, úsudkem).

Tabulková metoda

Podstatou této metody je vymyšlení systematického pravidla pro systematizaci výsledků sesbíraných při řešení úlohy s pomocí metody *pokus-omyl*. Vhodné použití tabulkové metody vede k usnadnění výpočtu řešení. Žák své výpočty systematizuje do přehledné formy/tabulky a z vymyšlených výsledků systematicky oddělí

³Řazení jednotlivých metod je použito v souladu s (Hejný, 1989), s výjimkou názvu čtvrté metody.

nesprávná, resp. správná řešení. Je zjevné, že se jedná o kvalitativně vyšší formu metody řešení rovnic, než byla metoda *pokus-omyl*.

Doplňte tabulku, podle které můžete z obsahu rovnostranného trojúhelníku určovat délku jeho stran.	S (cm ²)	5	10	15	20	25	30
	a (cm)				6,8		

Obr. 4: Tabulková metoda (Koman et al., 2002)

Metoda váhy

Jedná se o záměrnou manipulaci, která využívá model rovnoramenných vah a rovnováhu jednotlivých stran rovnosti. Žák si při správné manipulaci sám uvědomí jisté vztahy, které je schopen vyjádřit a dále používat i bez opakovaného použití modelu (viz obr. 5).

Tato metoda klade na žáka větší logické nároky, ale rozhodně se nedá říci, že by se jednalo o abstraktní myšlení. Tato metoda je použita ve všech analyzovaných učebnicích.

Pepovy „váhy“ napozledy
 Řešíme rovnici $3 + 2x = 5x$ s neznámou x . Pozorně nás sleduj a komentuj postup řešení.

①

$3 + 2x = 5x$

②

$3 + 2x - 2x = 5x - 2x$
 $3 = 3x$

③

$3 : 3 = 3x : 3$
 $1 = x$

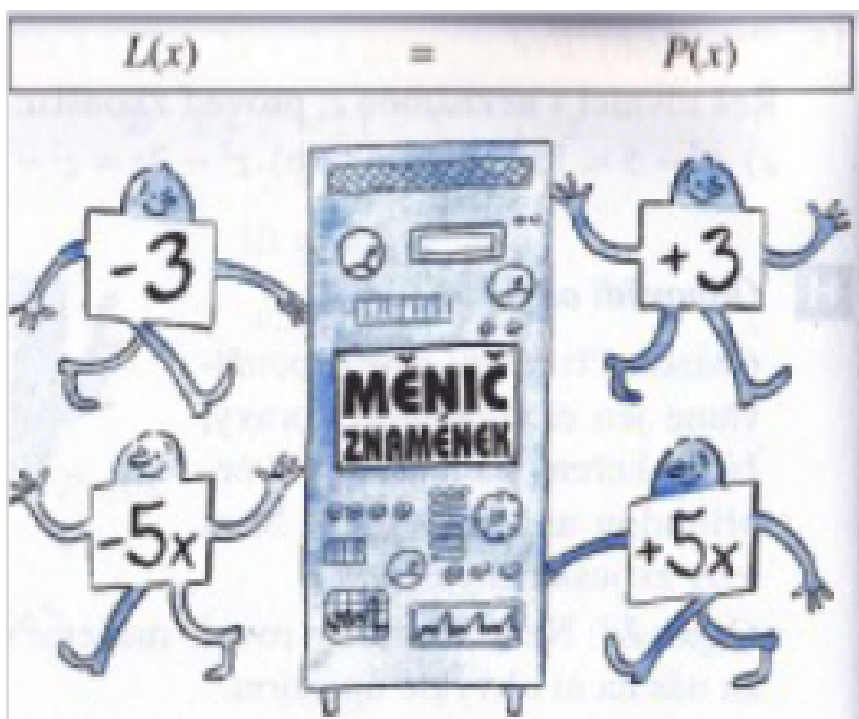
④

$x = 1$

Obr. 5: Metoda rovnoramenné váhy (Odvárko & Kadlecěk, 1999)

Metoda *Měnič*

Tuto metodu používá 5 z 9 studovaných učebnic. Metoda *Měnič* je nazvána podle schematického znázornění z učebnice (Odvárko & Kadleček, 1999, obr. 6).



Obr. 6: Metoda *měnič* (Odvárko & Kadleček, 1999)

Podle mého názoru stojí tato metoda řešení lineárních rovnic na vrcholu všech uvedených metod a liší se mírou abstraktního myšlení/poznání konkrétního žáka. Souhlasím s tvrzením Hejného (1989), který říká, že používání této metody může být zneužito k čistě instruktivnímu řešení rovnic. Pokud žák při výuce rovnic nepoužije některou z předchozích metod, tak tu je reálné a vážné nebezpečí, že způsoby řešení rovnic budou pro žáka jen dalšími poučkami a při jejich používání nebude schopen říci, proč provádí uvedené kroky. Tato hypotéza se při následném experimentu potvrdila. Jsem přesvědčená o tom, že žák je schopen do této fáze abstraktního myšlení dospět díky vhodné kombinaci předchozích metod a neustálému řešení množství úloh na lineární rovnice.

Chyby a práce s chybou

Očekávala jsem, že chyba a práce s chybou je v učebnicích zastoupena ve vysoké míře, ale opak je pravdou. Úlohy na chyby a práci s chybou jsem našla jen ve dvou učebnicích (Koman et al., 2002; Odvárko & Kadleček, 1999). Žák je v uvedených učebnicích směřován k tomu, aby našel a opravil chyby, vysvětlil v diskuzi proč a jak chyba mohla vzniknout.

V takto připravených úlohách vidím velmi pozitivní přínos, protože žák je veden k tomu, aby sám něco rozhodl. Ve škole žáci čekají, že učitel rozhodne, jestli vypočítaný výsledek je správně, ale už nejsou schopni rozhodnout, nebo jen v malé míře, zda výsledek, ke kterému dospěli, má nebo nemá smysl.

Při diskuzi k příspěvku byla otevřena otázka, proč není pro autory lehké zařadit do učebnice úlohy na práci s chybou. Argumentem byla nemožnost odhadnout schopnosti žáků ve třídě. Účastníci se shodli, že velmi záleží na práci učitele, který své žáky zná a úlohy na práci s chybou by měl do výuky zařadit sám podle svého uvážení v závislosti na schopnosti svých žáků.

Závěr

Tento příspěvek představil zajímavé závěry analýzy devíti řad učebnic ZŠ na téma lineární rovnice. Analýza byla provedena v rámci diplomové práce. Příspěvek se věnoval kromě obecnějších kritérií i důležitým kategoriím, které byly při analýze učebnic sledovány. Byly představeny kategorie motivace, prostředí s modely, metody řešení rovnic a chyby a práce s chybou.

Podrobnější informace a další závěry, především analýzu rozhovorů s učiteli o jejich osobních praktikách ve výuce lineárních rovnic, zájemci naleznou ve zmíněné diplomové práci.

Článek byl podpořen projektem SVV 267-402 Kvalita ve vzdělávání a ve výchově.

Literatura

- [1] NOVÁKOVÁ, A. (2012). *Kritická místa matematiky na základní škole (Analýza didaktických praktik učitelů – lineární rovnice)*. Diplomová práce. Pedagogická fakulta, KMDM. Vedoucí: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.; s. 95 (130 s přílohami)

Strana 92–95 obsahuje veškerou použitou i další literaturu nejen k tomuto článku.

Využití aplikačních úloh při zavádění soustav lineárních rovnic

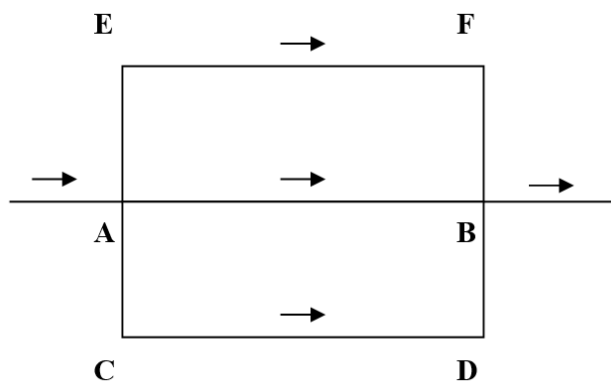
TOMÁŠ NOVOTNÝ¹

Článek je příspěvkem k problematice vhodného využívání mezipředmětových vztahů ve školní výuce. Je zaměřen na to, jakým způsobem je možné při zavádění soustav lineárních rovnic v matematice využít znalosti žáků z jiných předmětů. Vychází z výzkumu, který realizuji v diplomové práci (Novotný, 2014), kde jsem zjišťoval, do jaké míry jsou žáci schopni používat matematické poznatky v jiných předmětech a naopak používat znalosti z jiných předmětů při řešení matematických úloh. Z úloh, které využívají matematických poznatků v jiných předmětech, jsem vybral takové, jejichž řešení žákům dělá nejmenší problémy, a vytvořil návrh jejich použití při zavádění soustav lineárních rovnic. Cílem mého dalšího výzkumu je zjistit, zda žáci tímto způsobem lépe pochopí metody řešení soustav lineárních rovnic vyučovaných na školách a zda jim tento přístup poskytne nástroj pro propojení souvislostí matematiky s jinými obory. Článek je rozdělen na tyto části: Zavedení soustav, Substituční metoda, Komparační metoda, Sčítací metoda, Soustavy více rovnic o více proměnných.

Zavedení soustav

Slovní úlohy o rozdělení celku na nestejně části mohou sloužit jako prostředek pro zavedení soustav lineárních rovnic, neboť žáci jsou schopni některé typy úloh řešit úvahou s použitím jednoduchých rovnic. Jako ukázkou jsem vybral úlohu, která je zaměřena na aplikace Kirchhoffových zákonů do dopravy.

*V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé soustavy a všechny ulice jsou pouze jednosměrné. Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A-E-F-B** a **A-C-D-B**. Úsekem **A-E-F-B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projede úsekem **A-C-D-B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky? (Novotný, 2012)*



¹Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, zdurbanane@email.cz

Tato aplikace je sice v praxi používána, avšak řešené situace bývají mnohem složitější (Louthan, 2010). Pro žáky však takto zjednodušená situace je dostačující, aby si dokázali představit, jakým způsobem je možné použít Kirchhoffovy zákony v dopravě. Úvahou lze tuto úlohu řešit takto: 120 aut se nám rozdělí na 3 stejné skupiny, z nich 2 pojedou úsekem **A-B**. Zbytek aut se rozdělí na 4 skupiny, z nich 3 pojedou úsekem **A-C-D-B** (viz tab. 1).

	/:3	/:4	
120 aut	A-B		80 aut
	A-B		
	A-E-F-B a A-C-D-B	A-E-F-B	10 aut
		A-C-D-B	30 aut
		A-C-D-B	
		A-C-D-B	

Tab. 1

Nyní tuto úlohu budeme řešit za pomoci soustav lineárních rovnic. Označme x , y , resp. z počet aut, která projedou úsekem A-B, A-E-F-B, resp. A-C-D-B. Soustava, kterou vytvoříme na základě podmínek uvedených v zadání, bude tedy vypadat takto:

$$x + y + z = 120, \quad (1)$$

$$2(y + z) = x, \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}z = y. \quad (3)$$

Při řešení této soustavy lze ukázat analogii s řešením úvahou. Jedná se sice o jiný zápis, avšak kroky v obou postupech jsou na sebe vzájemně převoditelné. Tím je možné žákům ukázat, že se jedná pouze o matematický zápis skutečnosti, kterou již řešit umí.

Substituční metoda

Se substituční metodou se žáci setkávají ve fyzice téměř od začátku její výuky. Jedná se o jakékoli dosazení jednoho vzorce do vzorce druhého, když neznáme hodnotu některé veličiny, která se ve vzorci vyskytuje.

Jaká gravitační síla působí na jeden litr rtuti, když víme, že hustota rtuti je $13\,579\text{ kg/m}^3$ a gravitační zrychlení je 10 m/s^2 ?

Velikost gravitační síly vypočítáme dle vzorce $F = m \cdot g$, kde m je hmotnost tělesa a g je gravitační zrychlení. Zatím neznáme hmotnost. Ta se vypočítá pomocí vzorce $m = V \cdot \rho$, kde V je objem tělesa a ρ je jeho hustota. Nyní ještě potřebujeme vyjádřit objem, který je v litrech, v metrech krychlových, abychom počítali se stejnými jednotkami, čímž dostaneme objem rtuti $0,001 \text{ m}^3$. Máme tedy dva vzorce: $F = m \cdot g$, $m = V \cdot \rho$. Dosazením hodnot jednotlivých veličin ze zadání, dostaneme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kde v druhé máme přímo vyjádřenou neznámou m , tudíž ji dosadíme do rovnice první a tu následně vyřešíme. Při výpočtu nebudeme pro zjednodušení zápisu uvádět jednotky. Abychom tak mohli učinit, je zapotřebí zkontrolovat, zda máme všechny veličiny vyjádřené pomocí základních jednotek soustavy SI, čehož jsme docílili vyjádřením objemu rtuti v metrech krychlových.

$$F = m \cdot 10 \quad (1)$$

$$m = 0,001 \cdot 13\,579 \quad (2)$$

↓

$$F = 0,001 \cdot 13\,579 \cdot 10 \quad (1)$$

$$F = 135,79$$

Odpověď tedy je: *Na jeden litr rtuti působí gravitační síla 135,79 N.*

Komparační metoda

Komparační metoda se používá, např. ve fyzice. Jedno z názorných použití je u dějů, kde se zachovává jistá vlastnost. Takovéto použití je, např. u zákona o zachování mechanické energie.

Zde se během děje přeměňuje energie potenciální na kinetickou a naopak, přičemž jejich součet zůstává konstantní.

Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou energii při dopadu? (Bednařík, 2009: str. 113)

Potenciální energie je rovna součinu hmotnosti, gravitačního zrychlení a výšky. Kinetická energie je rovna polovině součinu hmotnosti a druhé mocniny rychlosti. Kinetickou energii nyní nemůžeme vypočítat. Víme však, že při dopadu je potenciální energie nulová a na začátku děje je nulová energie kinetická. Označme si tedy E_{kz} kinetickou energii na začátku děje, E_{pz} potenciální energii na začátku děje a E_{z} mechanickou energii na začátku děje. Analogicky označíme E_{kd} , E_{pd} , E_{d} jako energii kinetickou, potenciální a mechanickou při dopadu.

$$E_{\text{z}} = E_{\text{pz}} + E_{\text{kz}} \quad (1)$$

$$E_{\text{d}} = E_{\text{pd}} + E_{\text{kd}} \quad (2)$$

Jelikož víme, že mechanická energie se během děje nemění, můžeme za E_z a E_d dosadit E . Následně použitím komparační metody sloučíme obě rovnice do jedné a dostaneme jednu rovnici s jednou neznámou, kterou vyřešíme:

$$E = E_{pz} + E_{kz} , \quad (1)$$

$$E = E_{pd} + E_{kd} , \quad (2)$$

↓

$$\begin{aligned} E_{pz} + E_{kz} &= E_{pd} + E_{kd} , \\ m \cdot g \cdot h &= E_{kd} . \end{aligned} \quad (1)$$

Dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek. Odpověď zní: *Kámen má při dopadu kinetickou energii 1 600 J.*

Komparační metoda se vyskytuje také při použití kalorimetrické rovnice. Ta říká, že při předávání tepla Q mezi dvěma látkami nedochází ke ztrátám, tudíž teplo přijaté jednou látkou se musí rovnat teplu předanému látkou druhou.

Závaží o hmotnosti 500 g z neznámého prvku o teplotě $t_p = 100^\circ\text{C}$ vhodíme do 2 kg vody o teplotě $t_v = 20^\circ\text{C}$. Teplota vody a závaží se ustálila na $t = 24^\circ\text{C}$. Urči měrnou tepelnou kapacitu neznámého prvku, když víš, že měrná tepelná kapacita vody je rovna $4180 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$. (ucebnice.krynicky.cz, 2010)

Teplo vypočítáme jako součin hmotnosti, měrné tepelné kapacity a změny teploty. Označíme veličiny popisující stav vody dolním indexem v a veličiny popisující stav neznámého prvku dolním indexem p.

$$Q_v = m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v) \quad (1)$$

$$Q_p = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t) \quad (2)$$

Na základě platnosti kalorimetrické rovnice víme, že tepla Q_v a Q_p se rovnají, proto je můžeme označit obě písmenem Q . Převědeme hmotnost neznámého prvku na kilogramy, následně použijeme komparační metody, a dostaneme rovnici s jednou neznámou veličinou, do které dosadíme a dopočítáme ji.

$$Q = m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v) \quad (1)$$

$$Q = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t) \quad (2)$$

↓

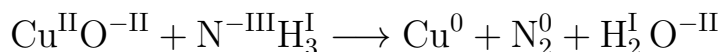
$$m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v) = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t) \quad (1)$$

Dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek. Odpověď zní: *Měrná tepelná kapacita neznámého prvku je $880 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.*

Sčítací metoda

Postup, který se používá při sčítací metodě, se používá v chemii při vyčíslování chemických rovnic se změnou oxidačního čísla, také zvaných oxidačně redukčních rovnic nebo zkráceně RedOx rovnic. Následující příklad ilustruje, jak se tato metoda používá.

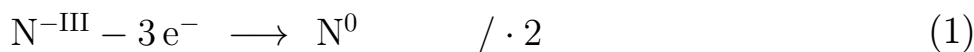
Dopočítejte stechiometrické koeficienty u následující chemické rovnice.



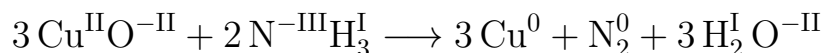
Vypíšeme z rovnice prvky, které mění své oxidační číslo, a počet elektronů, které se při reakci přeskupují.



Jelikož elektrony během reakce nevznikají ani nezanikají, musí se počet odebraných elektronů rovnat počtu elektronů předaných. Obě rovnice tedy vynásobíme tak, aby počet předávaných elektronů v každé rovnici byl stejný. V chemii se převážně používá takzvané křížové pravidlo, za pomoci kterého danou rovnici vynásobíme počtem elektronů v rovnici druhé. Tím však nemusíme dostat řešení s nejmenšími koeficienty. Musíme tedy na konci provést ještě kontrolu, zda neexistuje řešení menší. Při použití metody násobení rovnic tak, aby výsledný počet předávaných elektronů se rovnal nejmenšímu společnému násobku počtů předávaných elektronů v obou původních rovnicích, toto riziko odpadá.



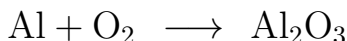
Nyní dosadíme vypočítané koeficienty do původní rovnice a dopočítáme chybějící koeficienty.



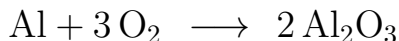
Soustavy n rovnic o m proměnných, kde $n \geq 2$ a $m > 2$

Podíváme se opět do chemie, tentokrát na vyčíslování rovnic beze změny oxidačního čísla. V chemii se tyto rovnice vyčísľují převážně pomocí jistého algoritmického odhadu, který je naznačen v následující úloze. Žáci jsou tímto algoritmem schopni chemické rovnice řešit, i když se ještě se soustavami rovnic nesetkali. Žáci je však mohou řešit i pomocí soustav lineárních rovnic. Pro ilustraci následuje jednoduchý příklad.

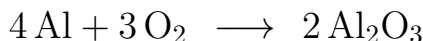
Dopočítejte stechiometrické koeficienty u následující chemické rovnice.



Algoritmické řešení: Kyslík je nalevo dvakrát a napravo třikrát. Musíme docílit toho, aby jich na každé straně bylo stejně, tudíž vezmeme 3 molekuly kyslíku a 2 molekuly oxidu hlinitého, aby bylo na každé straně 6 atomů kyslíku.



Nyní ještě zbývá dopočítat koeficienty u hliníku. Ten je na pravé straně čtyřikrát a na levé jednou. Stačí tedy koeficient u hliníku na levé straně čtyřikrát zvětšit a dostaneme výslednou rovnici.



Soustavou rovnic: Vycházíme opět z toho, že počet atomů každého prvku na levé straně musí být roven počtu atomů daného prvku na straně pravé. Jednotlivé koeficienty označíme $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a \text{Al} + b \text{O}_2 \longrightarrow c \text{Al}_2\text{O}_3}{a = 2c} \quad (1)$$

$$2b = 3c \quad (2)$$

Z druhé rovnice vidíme, že $b = \frac{3}{2}c$, ale má přitom patřit do množiny přirozených čísel. Proto volíme nejmenší $c = 2$, pro které je podmínka $c \in \mathbb{N}$ splněna, a dostáváme zbylé koeficienty $b = 3$ a $a = 4$.

Literatura

- [1] BEDNAŘÍK, M. & ŠIROKÁ, M. (2009). *Fyzika pro gymnázia – mechanika*. Vyd. 4. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-382-0.

- [2] BENEŠ, P., PUMPR, V. & BANÝR, J. (2005). *Základy chemie I*. Vyd. 4. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-720-0.
- [3] LOUTHAN, M. (2010). *Vztah digitálního modelu reliéfu a síťových analýz při řešení dopravních úloh*. Diplomová práce. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
- [4] NOVOTNÝ, T. (2012). *Aplikace algebry v přírodovědných oborech a ekonomii*. Bakalářská práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze.
- [5] NOVOTNÝ, T. (2014). *Využití aplikací algebry v přírodovědných oborech na 2. a 3. stupni školy*. Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze.
- [6] UCEBNICE.KRYNICKY.CZ (2010). *Učebnice fyziky pro gymnázia: 2.2.3 Kalorimetrická rovnice*[online]. [cit. 2014-03-28]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Fyzika/2_Molekulova_fyzika_a_termika/2_Vnitri_energie_prace_teplo/2203_Kalorimetricka_rovnice.pdf

Uchopení matematických výukových prostředí dětmi předškolního věku (5–7 let)

JANA SLEZÁKOVÁ, EVA ŠUBRTOVÁ¹

Inspirovaly jsme se didaktickými prostředími z učebnic matematiky pro 1. st. ZŠ (Hejný et al., 2007–2011) a zvolily některá z nich pro vytvoření experimentálních úloh. Tyto úlohy byly zadávány ve skupině cca 15 dětí v jedné pražské mateřské škole. Cílem bylo v první řadě vytvořit úlohy přiměřené schopnostem předškoláků a potom sledovat, jak předškoláci budou takové úlohy řešit, a zda takové úlohy mohou být nástrojem pedagogické diagnostiky.

Pro svůj hrový potenciál byla zvolena prostředí Krokování, Autobus a Zvířátka dědy Lesoně. V průběhu pěti měsíců školního roku 2012/13 proběhla série experimentů v počtu 4x Krokování, 6x Autobus a 3x Zvířátka dědy Lesoně. Poté ještě proběhly dva experimenty pedagogické diagnostiky podle metodiky Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej pro porovnání zjištěných výsledků. Jednotlivé experimenty byly plánovány průběžně, v návaznosti na předchozí pozorování a zjištění. Děti se experimentů účastnily spontánně, podle svého aktuálního zájmu; podrobně zpracováno v práci (Šubrtová, 2014).

¹Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, e-mail: jana.slezakova@pedf.cuni.cz;
Křesťanská základní škola a mateřská škola Eliáš, Praha 4, eva.subrtova@gmail.com

Experimenty v didaktickém prostředí Krokování

Byly navrženy úlohy ověřující schopnost dítěte synchronizovat vnímaný rytmus s pohybem, úlohy převádějící číslo z jednoho modelu do jiného (počet ok na kostce vyjádřeno číslem a následně počtem kroků realizovaných na krokovacím pásu), úlohy na sčítání (jeden figurant krokuje na dva povely a druhý figurant má oba povely vyjádřit jedním) a úlohy s odhadem vývoje (dva figuranti krokují podle hodů kostkou a snaží se odhadnout, jestli je možné, např. dosáhnout cíle dříve než soupeř apod.).

Nejzajímavější se ukázaly úlohy na synchron vnímaného rytmu a vykonaného pohybu. Zdánlivě snadná úloha, kdy na píseň „Měla babka čtyři jabka“ mají děti tleskat do rytmu a vybraní figuranti rytmus písně vyjadřují krokováním na pásu, se totiž při podrobném rozboru ukázala jako mnohem obtížnější. Bylo zjištěno, že jde vlastně o čtyři složky, které chceme synchronizovat: zpěv písně (akustická složka), tleskání do rytmu (kinesteticko-akustická složka), slyšení vytleskávaného rytmu (akustická složka) a pohyb při krokování (kinestetická složka). Vždy jde o synchron dvojice těchto jevů (zpěv a tleskání, poslech a krokování). Analýzou videozáznamů jsme zjistily, že děti se roztrídily do pěti skupin podle schopnosti synchronizovat tyto jevy:

- Děti v 1. skupině dokáží synchronizovat jak slyšený rytmus s pohybem, tak doprovodit svůj zpěv rytmickým tleskáním.
- Děti ve 2. skupině vnímají slyšený rytmus, synchronizují zpěv a tleskání, ale nedokáží synchronizovat akustické složky s pohybem při krokování.
- Děti ve 3. skupině jsou rušeny zpěvem a soustředí se na tlesknutí – signál k vykonání kroku, krok tedy přichází s malým zpožděním.
- Děti ve 4. skupině vnímají rytmus písně a dokáží jej vyjádřit pohybem těla (tančí na krokovacím pásu), ale vytleskávání do rytmu samy nezvládají.
- Děti z 5. skupiny nesynchronizují žádnou dvojici uvedených složek.

Experimenty v didaktickém prostředí Autobus

Byly zadávány úlohy se čtyřmi, později třemi zastávkami, kdy do autobusu cestující nastupují a také z něj vystupují. Manipulovalo se přitom s plastovými lahvičkami (cestující) a pomalovanou krabicí s otvorem nahoře (autobus). Děti měly určit, kolik cestujících vystoupí na konečné zastávce, ale byly jim také kladeny kontrolní zjišťovací otázky v průběhu samotné jízdy. Úlohy zadané v tomto prostředí se ukázaly jako výrazně diagnostické. Velmi rychle roztrídily děti na ty, pro které byl

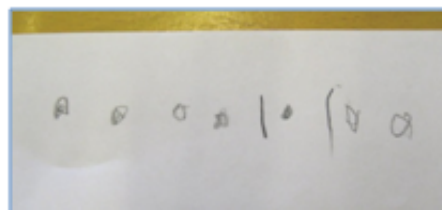
experiment hrou a chtěly manipulovat s autobusem i cestujícími a na ty, pro něž byl experiment úlohou. Tyto děti daleko více zajímala role pozorovatele, který sleduje celou jízdu a pokouší se dospět ke správnému výsledku. Objevily se různé strategie vedoucí k řešení úlohy: počítání z paměti, odhadování, evidence počtu cestujících na prstech, polohlasné opakování sledovaného počtu, pokus zapamatovat si celý řetězec a pak jej zrekonstruovat, a dokonce i písemný zápis, který vznikl zcela spontánně. Poté, co se takový zápis objevil poprvé, přidávaly se k tomuto postupu další děti a vznikly různé typy zápisů, z nichž některé dospěly do zcela funkční podoby. Uvádíme zde na ukázkou některé typově odlišné zápisy. Obrázky 1–5 představují ukázky zápisů nefunkčních, ze zápisů 6–10 byly děti schopny vyčíst správný výsledek:



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



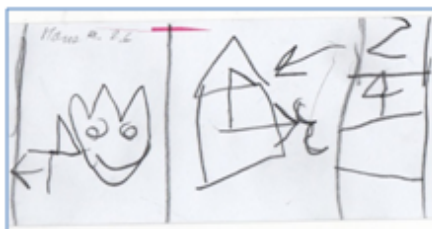
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



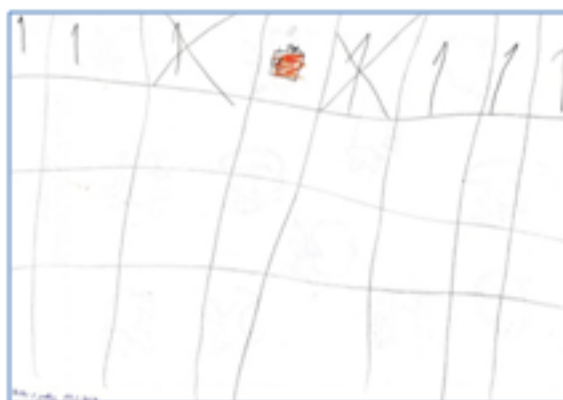
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Experimenty v didaktickém prostředí Zvířátka dědy Lesoně

V navržených úlohách byly děti označeny jmenovkou – ikonkou jednoho ze tří zvířátek (myš, kočka, husa) a měly se seskupovat na dvou koncích přetahovacího lana tak, aby jejich síly byly vyrovnané, odhadovat, které družstvo bude silnější a navrhnout, jakým způsobem síly vyrovnat. Odhadování se s větším či menším úspěchem dařilo, děti však příliš lákala skutečná přetahovaná s poměřováním fyzických sil a bylo takřka nemožné přimět je, aby přijaly roli zvířete (např. nejslabší myši). Zřejmě jsme zde narazily na vývojové hranice jejich myšlení, neboť pro tyto úlohy je potřeba určitého stupně abstrakce.

Výsledky

Na závěr celé série byly uskutečněny dva diagnostické experimenty, z nichž jeden měl odhalit, v jaké vývojové fázi myšlení se dítě aktuálně nachází a druhý, zda

je dítě vybaveno mimořádným „matematickým“ nadáním. Po srovnání výsledků všech experimentů a dlouhodobého pozorování u vybraných tří dětí se ukázalo, že se tyto výsledky shodují.

Z experimentů v prostředí Krokování bylo zřejmé, že synchron akustických a pohybových jevů je do značné míry věcí nácviku, neboť děti se v každém dalším experimentu v tomto synchronu zlepšovaly. Navržené úlohy obohacují představy o čísle v různých reprezentacích a umožňují elementární zkušenosti s aditivní triádou. Experimenty v prostředí Autobus poukázaly na mentální zralost dětí, ukázaly se v tomto smyslu jako výrazně diagnostické, kdy děti vývojově mladší chápou zadání jako hru, zatímco děti vývojově starší jako úlohu. Tyto úlohy trénují nejen krátkodobou paměť, ale posilují představu o čísle jako operátoru změny. Z obou prostředí se podařilo vytěžit metodická doporučení pro jejich použití ve skupině předškolních dětí. Ukázalo se také, že spontánní přístup dětí k úlohám přináší dlouhodobě mnohem lepší výsledky, než kdyby děti byly k aktivitě nuceny.

Závěr

V dalším výzkumu chceme rozvíjet škálu úloh pro děti předškolního věku ve zmíněných i dalších vybraných didaktických prostředích. Domníváme se, že takové úlohy vhodně využívají přirozenou periodu prudkého kognitivního rozvoje směrem k operačnímu myšlení, ke kterému dochází v období kolem nástupu školní docházky, a podporují vznik žádoucích myšlenkových struktur.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., et al. (2007–2011). *Matematika pro 1.–5. ročník ZŠ*. Učebnice a Příručka učitele. Plzeň: Fraus.
- [2] GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKÁ, E. (duben 2014). *Diagnostika dětí předškolního věku v oblasti matematiky*. Kurz. Praha: Pomáháme školám k úspěchu, o. p. s. a Univerzita Karlova.
- [3] ŠUBRTOVÁ, E. (2014). *Uchopení matematických výukových prostředí dětmi předškolního věku (5–7 let)*. Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta.

Kombinované studium matematiky I

– sonda do názoru studentů

DANA SMETANOVÁ, JANA VYSOKÁ¹

Průzkum popisuje výsledky výzkumu, ve kterém byly pomocí dotazníku zjišťovány hodnotící názory studentů na výuku předmětu Matematika I v kombinované formě studia na Vysoké škole technické a ekonomické v Českých Budějovicích. Průzkum byl zaměřen zejména na zjištění těchto faktů: které z probíraných témat bylo pro studenty snadné nebo naopak obtížné, jaká je jejich připravenost ze SŠ pro pochopení probírané látky, způsob prezentace učiva, jejich názor na hodnotící systém zkoušky.

V zimním semestru akademického roku došlo v hodnocení předmětu Matematika I k několika zásadním změnám. Speciálně u studentů kombinované formy bylo nově zavedeno elektronické testování pro získání prémiových bodů ke zkoušce (připočítávají se k bodům získaným ze zkouškového testu). Studenti denní formy studia získávají tyto body jiným způsobem a to z aktivit na semináři.

Pro studenty všech forem studia byla zavedena nová hodnotící škála hodnocení zkoušky. Na zkoušce je možné získat maximální počet bodů 100, z toho až 30 bodů mohou studenti získat jako prémiové body za aktivitu v průběhu semestru (při kombinované formě studia z elektronického testování). Zkouškový test je hodnocen maximálně 70 body. K úspěšnému zvládnutí zkoušky je potřeba získat nejméně 70 bodů z celkového počtu 100 bodů.

Z důvodů těchto změn má pro nás velký význam zpětná vazba a to především jakým způsobem vnímají studenti změny a zda lze něco udělat nejen pro optimalizaci systému hodnocení, ale i pro zefektivnění výuky.

Cíl výzkumu

Cílem výzkumu bylo zjistit názory studentů kombinované formy studia na výuku předmětu Matematika I. Zajímali jsme se zejména o tato fakta: které z probíraných témat bylo pro studenty snadné nebo naopak obtížné, jaká je jejich připravenost ze SŠ pro pochopení probírané látky, způsob prezentace učiva, jejich názor na hodnotící systém zkoušky.

Popis výzkumného vzorku a výzkumné metody

Jako zkoumaný vzorek byli náhodně vybráni studenti ze tří skupin kombinovaného studia Matematiky I. Každou skupinu učí jiný pedagog. Jedná se o studenty

¹Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, smetanova@mail.vstecb.cz, vysoka@mail.vstecb.cz

různých oborů (Ekonomika podniku, Konstrukce staveb, Stavební management, Technologie dopravy a přepravy, Strojírenství). Anketního průzkumu se zúčastnilo celkem 92 respondentů, z toho 50 mužů a 42 žen. Názory mužů a žen nevykazovaly žádné zásadní odchylky, proto je nevyhodnocujeme zvlášť. Tato skupina zahrnovala zhruba polovinu „aktivních“ studentů kombinované formy předmětu Matematika I. Aktivními studenty zde míníme takové studenty, kteří absolvovali zkoušku nebo se ve zkouškovém období přihlásili ke zkušebnímu termínu. Všichni respondenti se zúčastnili alespoň jednoho zkušebního termínu. Anketní průzkum proběhl v rozmezí 18. 1. – 1. 2. 2014. Pro zajištění vypovídající hodnoty byl výzkum prováděn anonymně. Na základě studia odborné literatury (Gavora, 2010; Chráská, 2007; Maňák & Švec, 2004) byl zvolen jako výzkumná metoda anonymní dotazník vlastní konstrukce s devíti otázkami. Prvních sedm bylo určeno ke zjištění potřebných dat o názorech studentů na jednotlivé problémy. Osmá otázka se vztahovala na to, zda dotazník vypisuje muž nebo žena. Poslední devátá položka byla určena pro případné komentáře či poznámky studentů. Kompletní znění dotazníku je k dispozici u autorek článku. Odpovědi studentů jsou vyhodnoceny v následujícím odstavci.

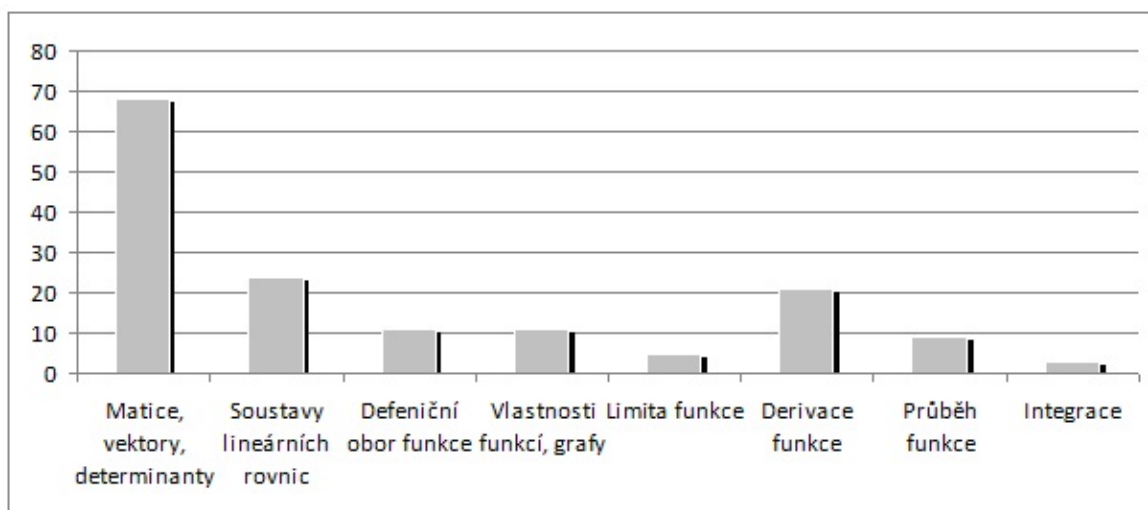
Názory studentů

Postupně uvedeme v grafech jednotlivé souhrnné odpovědi studentů na položky dotazníků. U otázek 1 a 2 měli studenti v dotaznících zakroužkovat 0–2 odpovědi, u otázek 3–8 jednu odpověď a devátou otázku vyplňovali pouze v případě, že nám chtěli sdělit i něco dalšího. Ne všichni studenti dodrželi požadovaný počet zakroužkovaných odpovědí, výjimečně někteří z nich pro jistotu zakroužkovali i více odpovědí nebo neodpověděli vůbec. Otázku číslo 9 vyplnila pouze malá skupina respondentů. První dvě otázky byly zaměřené na probíraná témata, zjišťovali jsme, která z nich se zdají studentům snadná nebo naopak obtížná (viz grafy na obrázcích 1 a 2).

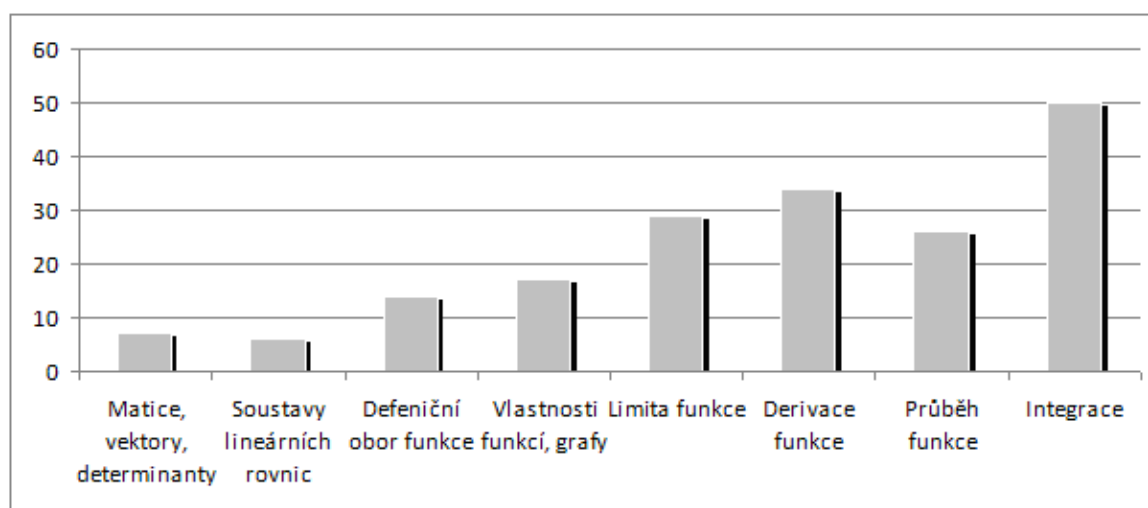
Zcela jednoznačně bylo vyhodnoceno jako snadné téma matice, vektory a determinanty (68 osob). Na druhém místě se jako snadné objevily soustavy lineárních rovnic (24 osob) a překvapivě na třetím místě derivace funkce (21 osob). Například integraci hodnotili jako snadné téma pouze 3 osoby.

Nejvíce osob (50) hodnotilo jako obtížné téma integraci, následovaly derivace funkce (34 osob), limita funkce (29 osob) a průběh funkce (26 osob).

Specifikum kombinované formy studia spočívá v tom, že studenti jsou lidé z praxe, většinou nepokračují ve studiu přímo po ukončení SŠ. Protože po ukončení školy nepoužívají aktivně matematické dovednosti, pak je pro ně značně komplikované navázat na znalosti ze střední školy. Bohužel se také často stává, že i získané středoškolské základy jsou na špatné úrovni, která může být způsobena nekvalitní výukou na SŠ. Z celkového množství si 54 studentů muselo středoškolskou látku



Obr. 1: Které z probíraných témat bylo pro vás snadné?



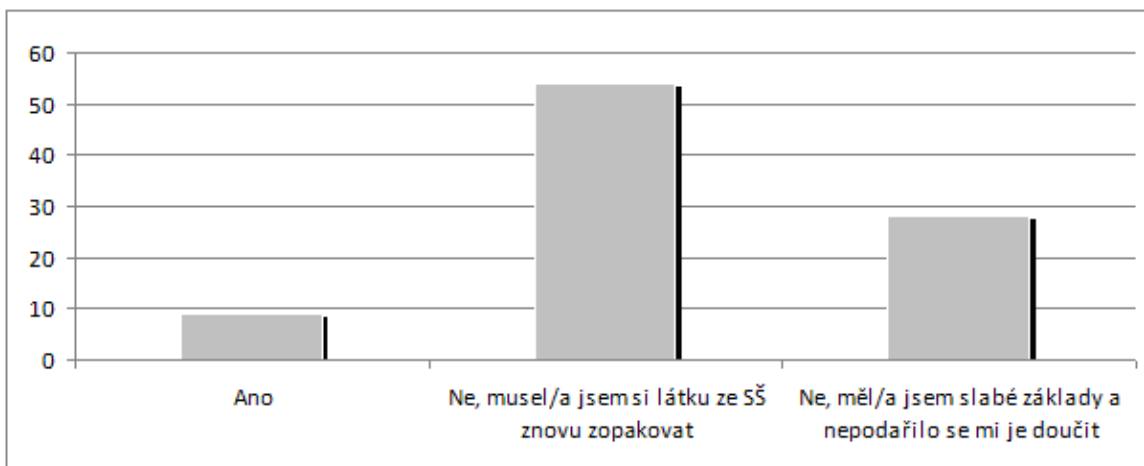
Obr. 2: Které z probíraných témat pro vás bylo obtížné?

znova zopakovat a 28 dokonce přiznalo, že se jim středoškolskou látku nepodařilo vůbec doučit.

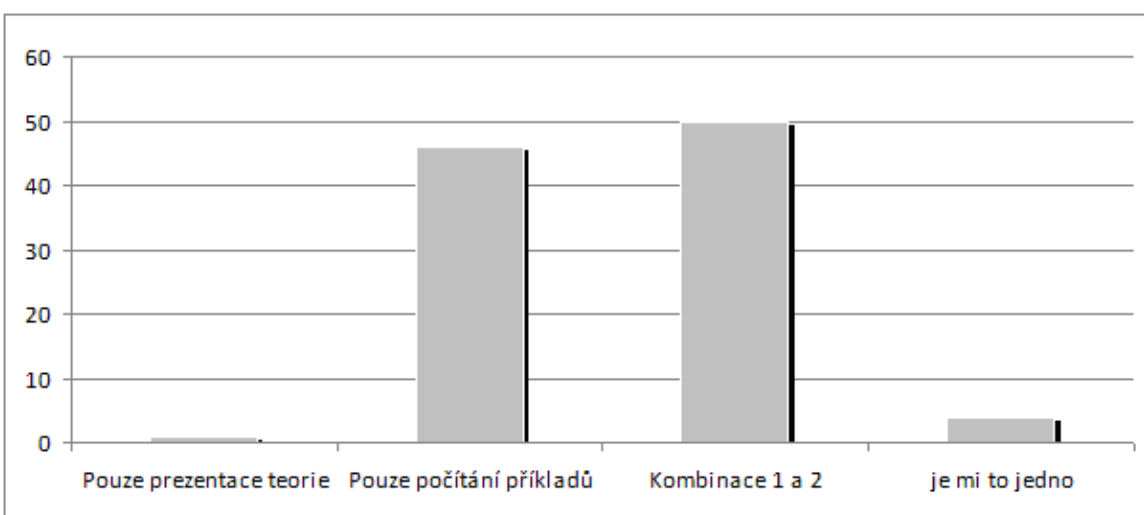
Srovnatelné množství studentů by na hodinách upřednostnilo výklad jako kombinaci teorie a počítání příkladů (50) a pouze počítání příkladů (46). Čtyřem osobám je to jedno a jedinému člověku by vyhovovala pouze teorie.

Otázka č. 5 byla zařazena hlavně z toho důvodu, že bylo poprvé použito elektronické testování pro získání premiových bodů připočítávaných k výsledku závěrečného (zkouškového) testu.

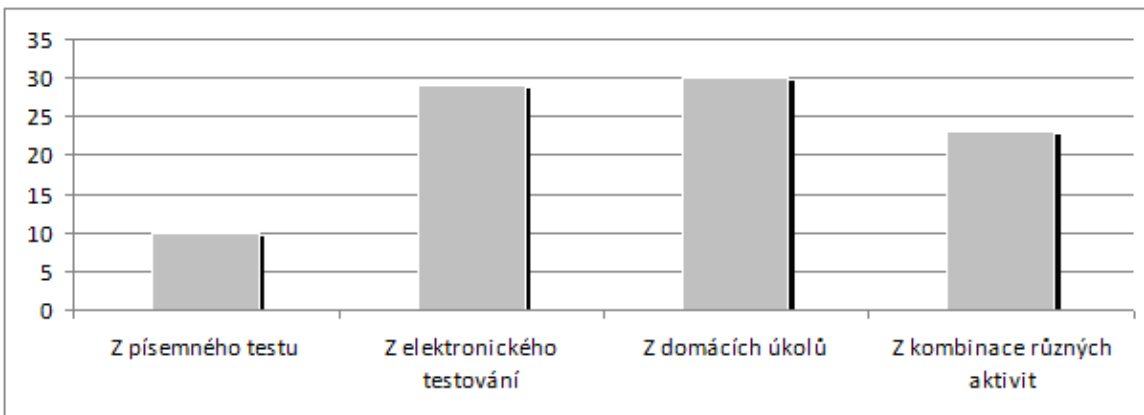
Jak lze z dotazníku vyčíst, elektronické testování nevyšlo jako jednoznačný vítěz. Téměř rovnocenně upřednostňují tyto tři varianty: domácí úkoly (30 osob), elektronické testování (29 osob), kombinaci různých aktivit (23 osob). Zbývajících 10 osob by upřednostnilo písemný test.



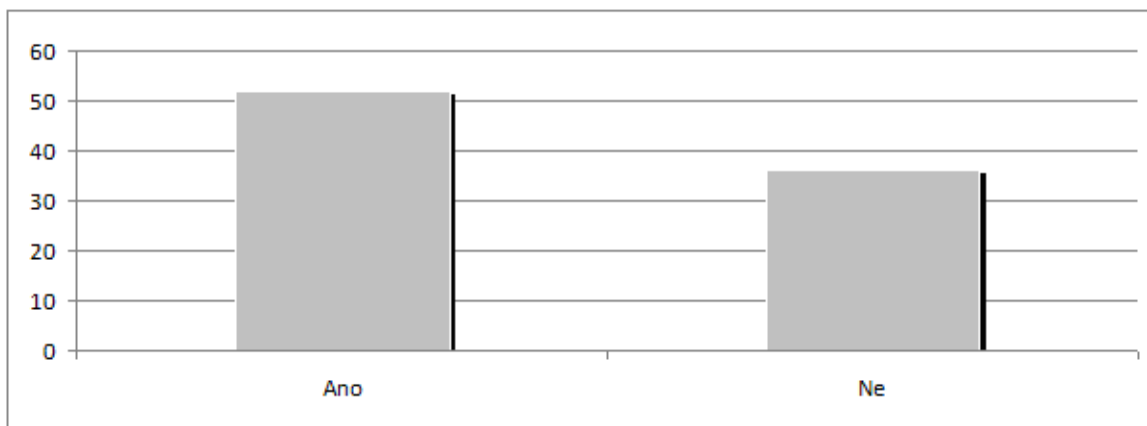
Obr. 3: Byly vaše znalosti ze střední školy pro pochopení látky dostačující?



Obr. 4: Přednáška mi vyhovuje v podobě ...

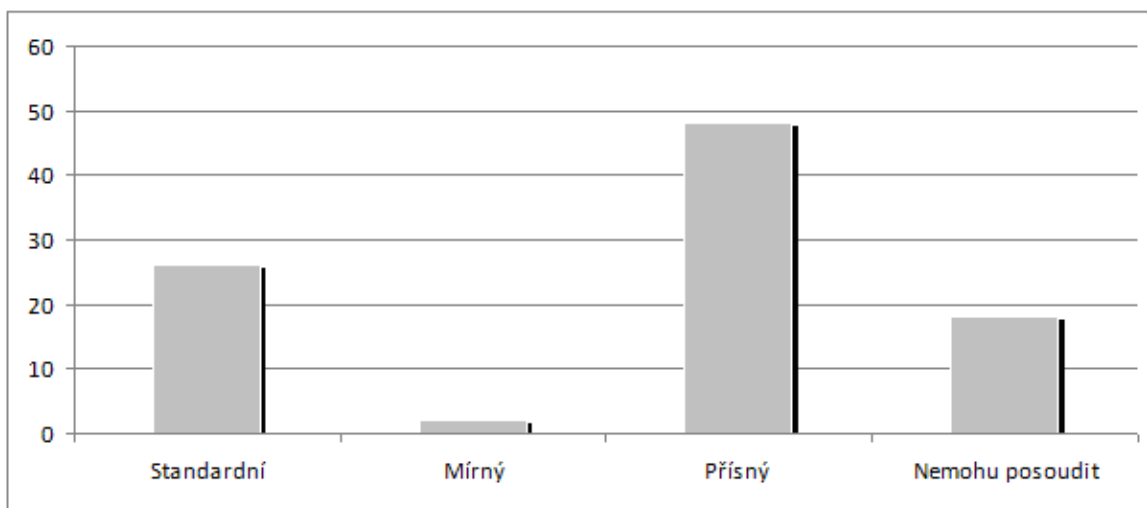


Obr. 5: Měl/a bych zájem o získání prémiových bodů za aktivitu připočtených k výsledku závěrečného testu.



Obr. 6: Jste spokojen/a se současným systémem bodového hodnocení zkoušky?

Mírně převažuje spokojenost se systémem hodnocení (52 osob) nad nespokojeností (36 osob). Přestože mírně převažuje spokojenost s hodnotícím systémem zkoušky, z odpovědí na otázku č. 7 plyne, že 48 studentů (52 %) jej považuje za přísný, za standardní jej považuje 26 studentů (28 %). Dva lidé jej hodnotí jako mírný a zbývající to nedokážou posoudit.



Obr. 7: Podle vašeho názoru je hodnotící systém zkoušky ...

Závěr

Obtížnost probírané látky: Podle našich zkušeností z výuky a z písemných prací studenti nejlépe zvládají témata lineární algebry (matice, vektory, determinanty, soustavy lineárních rovnic). Nejhůře dopadají témata z matematické analýzy (integrace, limita funkce, průběh funkce, derivace funkce). Studenti volili obtížnost probírané látky téměř podle našeho předpokladu. Přesto se vyskytla jedna překvapivá výjimka – 26 % studentů zařadilo derivace mezi snadná témata.

Znalosti ze střední školy: Znalosti z matematiky ze střední školy jsou nevyhovující, studenti se museli látku doučit a některým se to vůbec nezdařilo. Můžeme se pouze dohadovat, zda toto bylo způsobeno spíše tím, že byla nevhodná výuka matematiky již na SŠ nebo tím, že se jedná o studenty kombinované formy, kteří část látky v průběhu let zapomněli.

Hodnocení výuky a systému zkoušky: Jako dvě rovnocenné varianty byly vyhodnoceny výuka jako kombinace teorie a vypočtených příkladů a pouze počítání příkladů. Orientace studentů na počítání příkladů je zřejmě způsobena tím, že zkouškový test je zaměřený pouze na výpočet příkladů. Ovšem je potřeba vysvětlit alespoň částečně i teorii, abychom zjistili jakým vhodným způsobem řešit daný příklad. Z odpovědí na otázky 5, 6 a 7 se dá usoudit, že studenti jsou s hodnocením zkoušky spokojeni pouze částečně (vyhovující bodový systém versus přísná zkouška). Zkouška má specifické hodnocení, k úspěšnému absolvování je potřeba získat 70 bodů ze 100, z toho připadá u kombinované formy 30 bodů z elektronického testování a 70 bodů z písemného testu. Tedy i v případě, že student získá maximální počet prémiových bodů 30, musí napsat test na úspěšnost 57 % (odpovídá to zhruba třem správně vypočteným příkladům z pěti). V případě, že má 0 prémiových bodů, musí napsat test bezchybně.

Připomínky studentů: Studenti komentovali i některé předchozí otázky (např. o studiu SŠ, které proběhlo před více než 30 lety). V bodě 8 měli možnost cokoliv, co chtějí dodat, rozvést, komentovat, glosovat. Připomínky studentů lze rozdělit do několika částí: připomínky, na které lze reagovat nápravou – více vypočtených příkladů ve studijních oporách, ukazovat teorii na příkladech (toto většina pedagogů dělá), větší důraz na počítání. Pak jsou tu připomínky, které nejsme schopni ovlivnit například větší počet hodin, v málo hodinách se probírá mnoho látky, přísné hodnocení zkoušky (hodnocení zkoušky na VŠTE stanovuje pedagogické oddělení, ne jednotliví vyučující).

Literatura

- [1] GAVORA, P. (2010). *Úvod do pedagogického výzkumu*. 2. rozš. české vyd. Brno: Paido, 261 s.
- [2] CHRÁSKA, M. (2007). *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Vyd. 1. Praha: Grada, 265 s. Pedagogika.
- [3] MAŇÁK, J. & ŠVEC, V. (2004). *Cesty pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 78 s. Pedagogický výzkum v teorii a praxi; sv. 1.

Tabuľkový kalkulátor vo vyučovaní algebry na ZŠ

NOÉMI SZÉKELYOVÁ¹

Po školskej reforme v roku 2008/2009 sa na Slovensku stále viac zdôrazňuje postavenie digitálnych technológií vo vyučovaní. Snahou je pripraviť žiakov na to, aby boli schopní úspešne sa vyrovnáť s nárokmi, ktoré na nich kladie informatická spoločnosť 21. storočia a aby vedeli maximálne využívať príležitosti, ktoré im táto spoločnosť ponúka. Tabuľkový kalkulátor MS Excel patrí k najrozšírenejším štandardným aplikačným programom, a aj preto má svoje miesto už vo vyučovaní matematiky na základnej škole.

Tabuľkový kalkulátor

Tabuľkové kalkulátory (tabuľkové procesory, spreadsheet) vo všeobecnosti slúžia na spracúvanie väčšieho množstva údajov, ktoré sú usporiadané do riadkov a stĺpcov (do tabuľky), pričom s týmito údajmi vieme vykonávať rôzne výpočty, analyzovať ich, spracovávať, triediť podľa rôznych kritérií, prípadne graficky znázorňovať. Tiež umožňujú importovať údaje z databázových súborov, prepojenia s inými aplikáciami a pod. Poskytuje tak mnoho príležitostí, ako našu prácu zjednodušiť a urýchliť. Jeho základné možnosti využitia vo vyučovaní matematiky sú:

- riešenie výpočtových úloh,
- grafická interpretácia údajov,
- matematické modelovanie.

Algebra na základnej škole

Vzdelávací obsah predmetu matematika je podľa ISCED 2 na slovenských základných školách rozdelený do piatich tematických okruhov. Algebra sa týka predovšetkým prvých dvoch tematických okruhov, a to: Čísla, premenná a početové výkony s číslami a Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy. Súčasťou toho prvého je dlhodobá propedeutika premennej, rovníc a nerovníc. A v tom druhom žiaci objavujú kvantitatívne a priestorové vzťahy, zoznámia sa s pojmom premennej veličiny a jej prvotnou reprezentáciou vo forme, tabuliek, grafov a diagramov. Skúmanie týchto súvislostí smeruje k zavedeniu pojmu funkcie.

V súvislosti s využívaním digitálnych technológií vo vyučovaní algebry sa hovorí predovšetkým o programoch počítačovej algebry. V poslednej dobe sa však

¹Ústav matematických vied, PF UPJŠ v Košiciach, noemi.szekelyova@student.upjs.sk

aktuálnou stáva aj problematika tvorby interaktívnych pracovných zošitov v rámci riešenia matematických úloh s reálnym kontextom. Našou snahou bolo vytvoriť takýto zošit pre žiakov nižších ročníkov základnej školy, ktorý bol v súlade s hore uvedenými požiadavkami na danú oblasť školskej matematiky. Testovania PISA poukazujú, že veľké nedostatky majú naši žiaci v oblasti analýzy údajov a interpretácie vzťahov medzi nimi. Aj z tohto dôvodu sme venovali zvýšenú pozornosť využívaniu rôznych spôsobov reprezentácie matematického obsahu. Okrem toho sme pre tvorbu stimulujúceho vzdelávacieho prostredia využili možnosť implementovať kontrolu a spätnú väzbu s použitím logickej funkcie IF, či aktívnych tlačidiel a tiež materiál (obrázky), ktorý slúži na upútanie pozornosti žiakov.

Úlohy o sporení v prostredí MS Excel

Úlohy sme riešili so žiakmi siedmeho ročníka, ktorí sa ešte neučili o výrazoch s premennými, ani o rovniciach a ktorí pracovali v Exceli prvýkrát. Žiaci na dvoch vyučovacích hodinách riešili úlohy o nižšie uvedenom sporení štyroch kamarátov. V prvých úlohách sme sa zamerali na to, aby žiaci pochopili jednotlivé modely, ktorými sú sporenia vyjadrené. Ich odpovede boli automaticky vyhodnocované. Pritom sme ich postupne oboznámili s niektorými funkciami programu MS Excel – tvorba tabuľky, vyplnenie vybranej oblasti ťahaním pomocou úchyty, vloženie grafu a niektoré možnosti formátovania. Potom riešili úlohy, kde mali určiť nasporenú sumu v konkrétnom týždni. Pri nich si mohli vybrať, či ich budú riešiť na papieri, alebo v excelovskom zošite, kde im boli zadané. Niekoľko žiakov, ktorí rýchlo pochopili Dášinu reprezentáciu plánu, stále pracovali na papieri s využitím kalkulačky. Ostatní si vytvárali tabuľky a nasporenú sumu hľadali s využitím úchyty, pričom si do buniek zapísali nasporenú sumu v niekoľkých týždňoch, a potom automaticky vyplnili ďalšie bunky. Potom riešili nasledujúcu úlohu.

Kamaráti Adam, Beáta, Cyril a Dáša sa začiatkom roka 2013 rozhodli celý rok sporiť. Deti svoj plán sporenia vyjadrili takto:

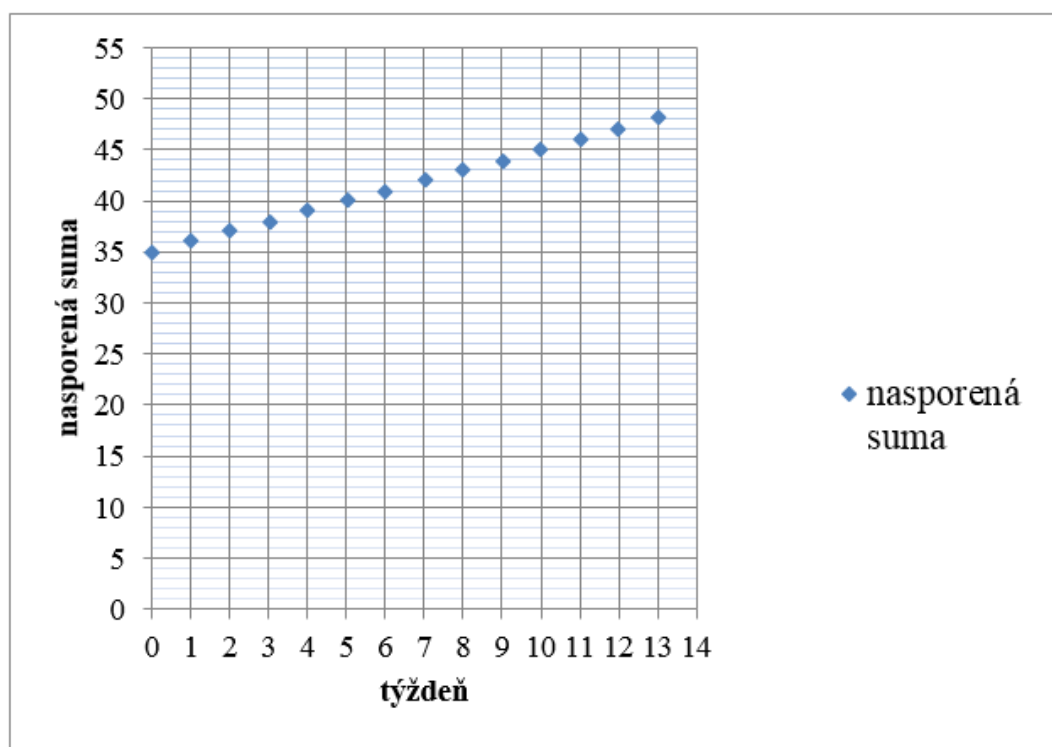
Adam: „V tabuľke 1 je vyjadrené, koľko eur som mal nasporených na konci každého z prvých šiestich týždňov sporenia. Tabuľka pokračuje ďalej rovnakým spôsobom.“

Týždeň	0	1	2	3	4	5	6	...
Nasporená suma	11 €	13 €	15 €	17 €	19 €	21 €	23 €	...

Tab. 1

Beáta: „Ja som si na začiatku roka odložila 22 € a potom som si každý týždeň odložila ďalších 1,5 eur (1 euro a 50 centov).“

Cyrl: „Moje sporenie je vyjadrené nasledujúcim grafom, kde som vyznačil, koľko peňazí som mal nasporených na konci každého z prvých 13 týždňov sporenia. Graf pokračuje ďalej rovnakým spôsobom.“



Graf 1

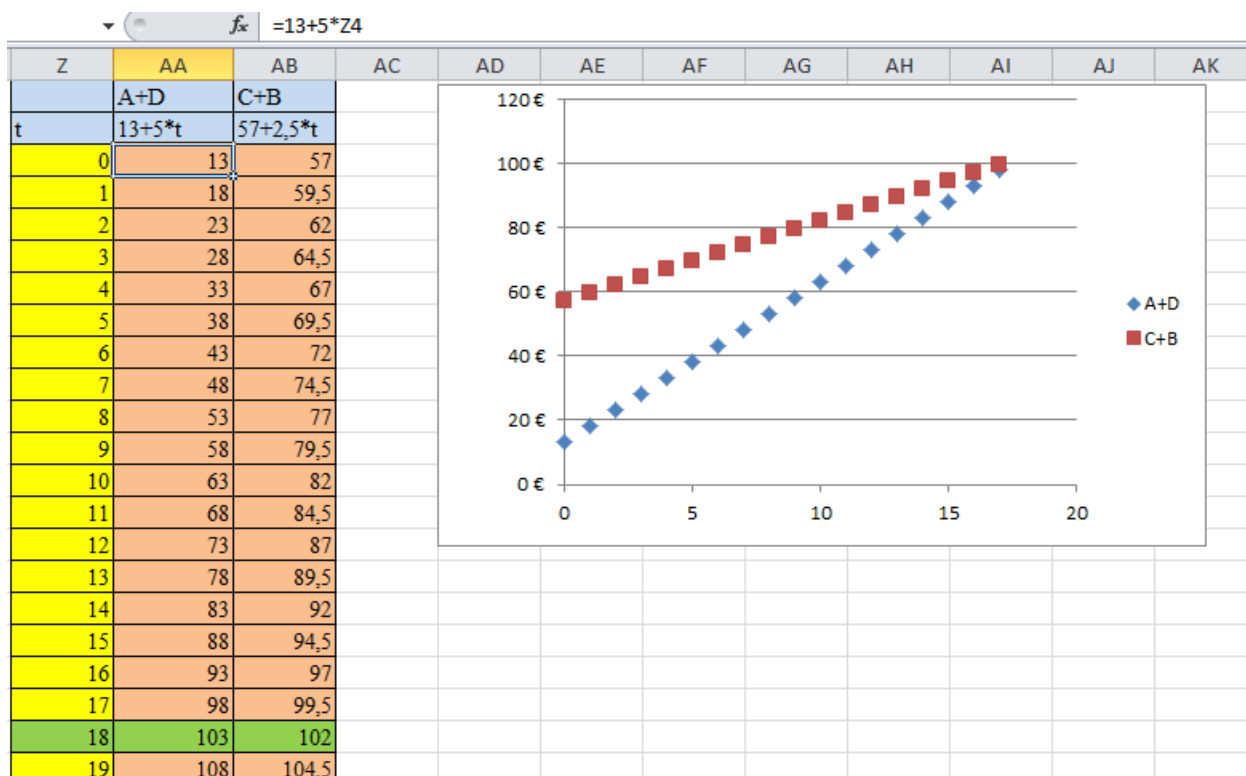
Dáša: „Moje sporenie možno vyjadriť vzťahom $2 + 3t$, kde t je písmenko, ktoré označuje počet týždňov sporenia.“

Úloha: Ktorá dvojica detí Adam a Dáša alebo Beáta a Cyrl skôr nasporila spoločne sumu 100 eur?

Možnosť využiť funkcie programu MS pri riešení úloh ponúkla niektorým žiakom novú stratégiu riešenia problému. Pri riešení úlohy postupom bez počítačového modelovania sa žiaci nezaobídu bez zručnosti v tvorbe a riešení rovníc, čoho zatiaľ neboli schopní. Navyše táto rovnica nemala v prirodzených číslach riešenie. Takto by úlohu mohli riešiť až v 8. alebo 9. ročníku. Žiaci, ktorí situáciu modelovali pomocou tabuľky, nemali s touto úlohou problém. Žiaci, ktorí zo začiatku s konceptuálnym modelom – algebricko-numerickou reprezentáciou však boli najprv neúspešní. Po zmene stratégie a práci s tabuľkou potom objavili vzťah pre spoločné sporenie dvoch detí a tým aj algoritmus sčítavania lineárnych algebrických výrazov. V nasledujúcej tabuľke 2 a obrázku 1 sú ukážky z pracovného listu žiaka, ktorý postupoval opísaným spôsobom, pričom v tabuľke je skrytých niekoľko stĺpcov.

Počet týždňov	0	1	2	3	15	16	17	18
A + D	13 €	18 €	23 €	28 €	88 €	93 €	98 €	103 €
C + B	57 €	59,50 €	62 €	64,50 €	94,50 €	97 €	99,50 €	102 €

Tab. 2: Numerické riešenie pomocou tabuľky



Obr. 1: Algebraické riešenie pomocou tabuľky

Záver

V prostredí tabuľkového kalkulátora má riešenie úloh dynamický charakter. Žiaci mohli paralelne pracovať s viacerými reprezentáciami a v závislosti od toho riešiť jednu úlohu aj viacerými spôsobmi. Riešenie úloh v tomto prostredí hodnotíme pozitívne aj na základe spätnej väzby od žiakov, ktorým sa páčilo ako ľahko (a rýchlo) vedeli s pomocou MS Excelu riešiť aj úlohy, ktoré sa im na prvé prečítanie zdali byť ťažšie. Konštrukcia zahrnutých poznatkov matematiky z algoritmického pohľadu rozvíja nielen algoritmické myslenie žiakov, ale aj zručnosti modelovania lineárnych javov.

Podakovanie

Tento článok vznikol podporou grantu VVGS-PF-2013-118.

Literatura

- [1] http://web.archive.org/web/20100522224337/http://kekule.science.upjs.sk/matematika/uc_matiky/index.html
- [2] ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV. (2009). *Štátny vzdelávací program, Matematika. Príloha ISCED 2*. [online]. Bratislava: ŠPU. Dostupné z: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf
- [3] TABACH, M., FRIEDLANDER, A. (2009). *The money context. Mathematics Teaching in the Middle School 14* (474–479).
- [4] TABACH, M., HERSHKOWITZ, R. & ARCAVI, A. (2008). *Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. The Journal of Mathematical Behavior 27* (48–63).

Koncepce kombinatoriky s důrazem na problem-solving

PAVEL ŠALOM¹

Příspěvek se zabývá koncepcí kombinatoriky pro střední školy, jejíž snahou je vyhnout se formálním přístupům k řešení úloh. Inspirovali jsme se koncepcí učebnic Hejného z 1. stupně ZŠ. Navrhli jsme čtyři prostředí, v rámci nichž chceme kombinatoriku budovat. Jde o tato prostředí: Dopravní linky, Turnaje, Překlady, Hry. Součástí příspěvku jsou ukázky úloh z jednotlivých prostředí.

Kombinatorika je v několika ohledech odlišná od ostatních témat, kterým se středoškolská matematika věnuje. Oproti ostatním tematickým celkům je méně závislá na předchozích matematických zkušenostech a znalostech. Zároveň se v ní snadno najde mnoho myšlenek, které vyžadují důkladné rozmyšlení. Shledali jsme proto kombinatoriku jako ideální tematický celek pro rozvinutí naší koncepce zaměřené na problem-solving.

¹Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, pavel.salom@mff.cuni.cz

Východiskem koncepce se staly konstruktivistické principy. Inspirovali jsme se pracemi a učebnicemi Hejného a jeho kolektivu. Podobně jako on věříme, že skutečné matematické poznání je nepřenosné. Setrvání učitele v roli nositele moudra vnímáme jako jednu z příčin neúspěšných pokusů o předání matematického poznání. Dále se domníváme, že při tradičním způsobu vyučování dochází poměrně často k formálnímu poznání. Za formální poznání považujeme v podstatě jakékoliv poznání, se kterým nejsou spjaty odpovědi na otázky proč, nebo takové poznání, které způsobuje potíže při aplikaci na jiné než standardní problémy.

Zmíněné formální poznání se nebudeme snažit vymezit přesněji, ale ilustrujeme jej na dvou příkladech. Častým projevem je znalost vzorce bez hlubšího porozumění. Tím může být například:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pokud se znalostí takového vzorce není spjato porozumění, jak tento vzorec vznikl, považujeme ji za formální.

Jiným příkladem formální znalosti může být velmi běžné tvrzení: Pro přirozená čísla a, b platí $a \cdot b = b \cdot a$. Domluvme se nejdříve, že zápisem $a \cdot b$ myslíme součet $b + b + \dots + b$, v němž je přesně a sčítanců. Jde tedy o to nalézt důvod, proč $b + b + \dots + b = a + a + \dots + a$ (na levé straně je a sčítanců, na pravé straně je b sčítanců). Může být překvapivé, že mnoho lidí není schopno na tuto otázku odpovědět. Správná odpověď se většinou opírá o počítání dvěma způsoby. Například lze dvěma způsoby spočítat počet čtverečků čokolády – jednou po řádcích a jednou po sloupcích.

Z výše zmíněných důvodů jsme se rozhodli vybrat si kombinatoriku a rozpracovat koncepci zaměřenou na problem-solving. Podobně jako profesor Hejný jsme navrhli čtyři didaktická prostředí, která postupně představíme.

Turnaje

Prvním prostředím jsou Turnaje. Toto prostředí má silný edukativní charakter. Jsou v něm budovány pojmy jako variace, permutace a kombinace. Úlohy navrhujeme tak, aby žáci mohli velkou část kombinatoriky objevit sami. Například následující úloha je jednou z prvních úloh, ve kterých se počítají uspořádané dvojice, tedy variace.

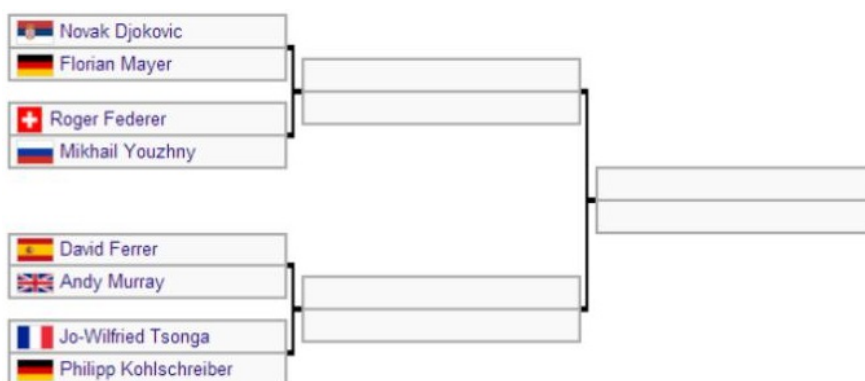
Úloha Turnaje se účastní Brazílie, Česko, Čína, Německo a Švédsko, hraje se systémem každý s každým. Na závěr první dva týmy sehrají finálový zápas.

Kolik je možných finálových dvojic (vítěz, poražený finalista), ve kterých je

- a) vítězem Česko?
- b) vítězem Německo?
- c) vítězem libovolný tým a poraženým finalistou libovolný jiný tým?
- d) Čína poraženým finalistou?

Naší snahou je úlohy formulovat tak, aby jejich řešení mohlo být pro žáky výzvou. Chceme, aby nebyl předem určen prostředek, kterým se má úloha řešit. Žáci tedy neví, zda se mají použít variace nebo kombinace podle toho, v jaké kapitole je úloha zařazena. Příkladem takové úlohy je následující:

Úloha Na obrázku je rozehraný pavouk tenisového turnaje.



Kolik různých dvojic mohlo hrát ve finále?

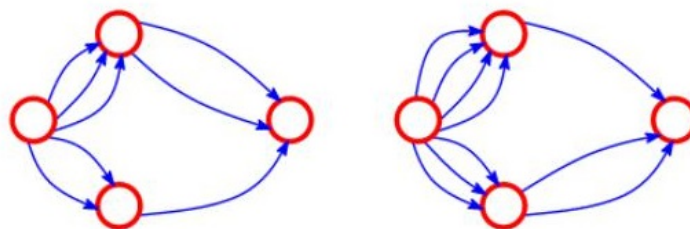
Prostředí Turnajů navíc nabízí možnost věnovat se orientovaným grafům, případně částečně uspořádaným množinám.

Dopravní linky

Druhým prostředím jsou Dopravní linky, které bezprostředně útočí na nejzákladnější principy kombinatoriky, za které považujeme pravidlo součinu a součtu. Následující úloha je toho ilustrací:

Úloha

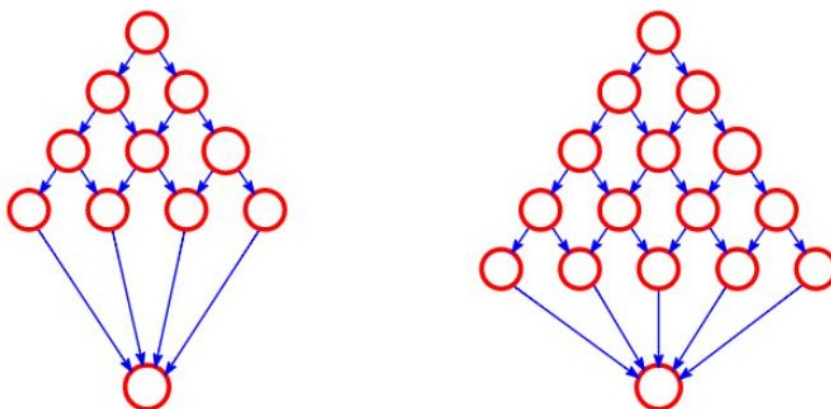
- a) V obou plánech určete počet různých cest ze západního města do východního.
- b) Zrušte v pravém plánu jednu linku tak, aby počty cest ze západu na východ byly stejné.
- c) Přidejte do levého plánu jednu linku tak, aby počty cest ze západu na východ byly stejné. Kolika způsoby to lze udělat?



Kromě nejzákladnějších principů je prostředí vhodné například k představení Pascalova trojúhelníku a objevení vztahů mezi kombinačními čísly.

Úloha

- Pro každé město určete, kolika způsoby se do něj lze dopravit ze severního města.
- Zformulujte domněnku o tom, jaká čísla vycházejí pro jižní město, a pokuste se ji doložit obecným argumentem.



Co se týče případných rozšíření, prostředí Dopravních linek přirozeně vyúsťuje do teorie grafů. Je možné v něm prezentovat poutavá témata jako například slavný problém čtyř barev.

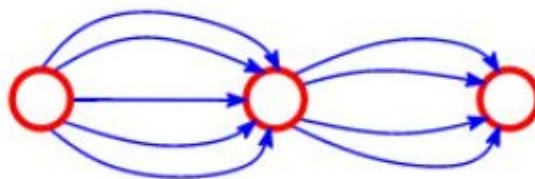
Překlady

Prostředím, které možná nejvíce vybočuje z tradičního přístupu ke kombinatorice, jsou Překlady. Na rozdíl od všech ostatních úloh, v Překladech nejde o to dobrat se konkrétního výsledku, tj. například spočítat počet způsobů, kterým lze něco udělat. V rámci každé úlohy je zadáno několik podúloh a cílem je říct, které z nich vedou ke stejnému výsledku. Cílem tedy je dílčí úlohu přeložit do jiného jazyka. Schopnost překládat úlohy považujeme za naprosto klíčovou, a proto jsme toto prostředí vymysleli. Pochopitelně nemůžeme zabránit tomu, aby žáci dílčí úlohy spočetli a tak

došli ke správnému závěru, ale je to pouze jedna z možných řešitelských strategií (a mnohdy ta méně vhodná).

Úloha

- a) Určete počet různých cest ze západního města do východního.



- b) Na základní škole je v rámci 1. stupně pět ročníků. V každém z nich jsou čtyři třídy označeny písmeny A, B, C, D . Kolik tříd je na 1. stupni?
- c) Na večírku se sešlo 5 lidí. Každý z nich si celkem čtyřikrát s někým přiřukl. Kolik ťuknutí proběhlo?
- d) Kolika způsoby lze ze 4 děvčat a 5 chlapců vybrat taneční pár?
- e) Ve skupině florbalového turnaje se potkalo 5 týmů. Každý sehrál s každým jedno utkání. Kolik zápasů se celkově hrálo?

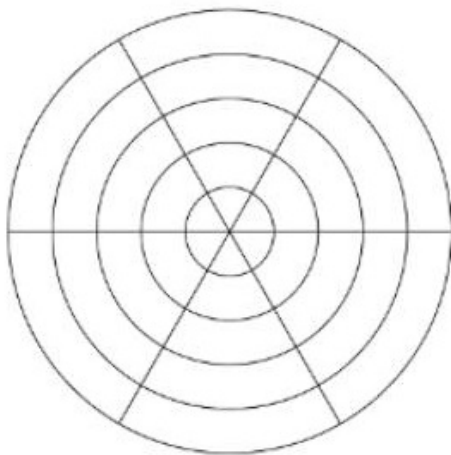
Překlady se tedy soustřeďují na bijekce, pomocí kterých ukážeme například kombinatorický důkaz binomické věty nebo další propojení na matematický jazyk. Je možné implementovat i náročnější bijekce, které povedou například k objevení vztahu:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

Hry

Posledním prostředím jsou Hry. Jejich účel je především motivační. Výhodu Her vidíme v tom, že žáci je nepovažují za součást klasické matematiky a jsou tak schopni přemýšlet, aniž by byli zatíženi formálními znalostmi. Na závěr si představme několik her, které je možno v hodinách použít.

Úloha Hraje se na plánu uvedeném na obrázku. Hráči střídavě vybarvují po jednom políčku. V prvním tahu se vybarví jedno z nejvíce vnějších políček. V každém dalším tahu se musí vybarvit políčko, které sousedí s posledně vybarveným a není dále od středu. Každé políčko lze vybarvit pouze jednou. Kdo nemůže táhnout, prohrál.



Úloha Na stole je hromádka deseti sirek. Hráč, který je na řadě, musí odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

Úloha V pravém horním rohu šachovnice 8×8 stojí věž, která se v každém tahu může pohybovat jen dolů nebo doleva (o libovolný počet polí). Hráč, který nemůže táhnout, prohrál.

Poděkování

Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy v Praze (projekt č. 1250213).

K jednomu způsobu řešení slovních úloh o společné práci

FRANTIŠEK ŠÍMA¹

Slovní úlohy je možné řešit mnoha způsoby. Nejčastěji jsou k řešení používány rovnice nebo jejich soustavy. Často je také používán aritmetický postup, který se podobá předchozímu postupu pomocí rovnic. Zajímavým způsobem řešení slovních úloh je úsudek. Jen výjimečně se při řešení slovních úloh objevuje grafické řešení. Všechny uvedené postupy jsou v různém množství používány žáky a studenty našich škol (Šíma, 2013: s. 173). Chtěl bych připomenout postup, který byl používán již ve starověkých kulturách v Číně a v Egyptě, postup, který jak se zdá již z našich učebnic vymizel. Jedná se o obecné řešení, které vyústí v obecný vztah neboli vzorec. Ukažme si užití těchto vztahů při řešení slovních úloh o společné práci. Odvození vztahů pro nedostatek místa neuvedu. Lze je nalézt ve (Šíma, 2013).

Úlohy o společné práci jsou takové, ve kterých se řeší, za jakou dobu provede určitý úkol nebo jeho část některý ze subjektů či subjekty všechny. Úlohy členíme v první řadě podle toho, kolik subjektů se zapojí do společné práce. Subjekty mohou pracovat po celou dobu práce nebo jen během určité části. Je také možné, že některý ze subjektů se společné práci brání (pracuje proti). Může se také stát, že dochází ke specifickému druhu společné práce. Vzhledem k uvedené charakteristice jsou úlohy rozčleněny do sedmi skupin.

Nejdříve budu jednotlivé skupiny charakterizovat. Potom vyberu nejčastěji uváděné příklady, uvedu jejich modelová řešení a z nich plynoucí vztahy, které budou vzorci pro řešení dané úlohy.

Skupina 1: *Plná práce dvou subjektů*

Jedná se o slovní úlohy o společné práci dvou subjektů, které pracují po celou dobu společné práce. Hledáme dobu společné práce nebo dobu, po kterou pracují jednotlivé subjekty.

Příklad 1.1:

První pracovník by sám vykonal určitou práci za 3 dny, druhý sám za 6 dní. Za jak dlouho by uvedenou práci vykonali oba společně?

¹VŠTE v Českých Budějovicích, simafr2@seznam.cz

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci první pracovník,
 $b \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci druhý pracovník,
 $s \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci oba pracovníci,
potom dostáváme modelový vztah

$$as + bs = ab, \quad (1)$$

ze kterého odvodíme vztah pro s (eventuálně pro a, b):

$$\underline{\underline{s = \frac{ab}{a+b}}}, \quad (1a)$$

$$\left(\underline{\underline{a = \frac{bs}{b-s}}}; \underline{\underline{b = \frac{as}{a-s}}} \right). \quad (1b, c)$$

V našem případě konkrétně platí: $a = 3, b = 6$, potom

$$s = \frac{ab}{a+b} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = \underline{\underline{2}} \text{ [dny]}.$$

Oba dělníci by vykonali uvedenou práci společně za 2 dny.

Příklad 1.2:

První závod splní dodávku o 7 dní dříve než druhý. Při společné práci by oba závody splnily dodávku za 12 dní. Za jakou dobu by splnil dodávku každý závod sám?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci první závod,
 $b \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci druhý závod,
 $r \dots$ doba práce, o kterou splní dodávku dříve první závod,
 $s \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci oba závody,
potom dostáváme modelový vztah

$$a^2 + ar = 2as + rs, \quad (2)$$

ze kterého odvodíme vztah pro a :

$$\underline{\underline{a_{1,2} = \frac{2s - r \pm \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2}}}. \quad (2a)$$

V našem případě konkrétně platí: $r = 7, s = 12$:

$$a_{1,2} = \frac{2s - r \pm \sqrt{r^2 + 4s^2}}{2} = \frac{2 \cdot 12 - 7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 12^2}}{2} = \frac{17 \pm 25}{2} = \begin{cases} a_1 = 21 \\ a_2 = -4 \end{cases}.$$

První závod splní dodávku sám za 21 dní, druhý sám za 28 dní.

Skupina 2: *Neúplná práce dvou subjektů*

Jedná se o slovní úlohy o společné práci dvou subjektů, kdy alespoň jeden ze subjektů nepracuje po celou dobu společné práce. Hledáme dobu společné práce nebo dobu, po kterou pracují jednotlivé subjekty. Můžeme též hledat dobu, za kterou by společnou práci dokončil jeden ze subjektů.

Příklad 2.1:

První dělník by sám vykonal určitou práci za 32 dní, druhý dělník by tutéž práci vykonal sám za 24 dní. Nejprve pracuje první dělník sám 4 dny. Aby dokončil práci dříve, je mu na pomoc přidán druhý dělník. Společně pracují 4 dny, potom první dělník onemocní. Za kolik dní dokončí práci druhý dělník?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci první dělník,
 $b \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci druhý dělník,
 $s \dots$ doba práce, po kterou pracují oba dělníci společně,
 $p \dots$ doba práce, po kterou pracuje první dělník sám,
 $q \dots$ doba práce, po kterou pracuje druhý dělník sám,
 $t \dots$ celková doba práce,

potom dostáváme modelový vztah

$$as + bs = ab - bp - aq, \quad (3)$$

ze kterého odvodíme vztah pro q (eventuálně pro ostatní):

$$\underline{\underline{q = b - s - \frac{b \cdot (p + s)}{a}}}, \quad (3a)$$

$$\left(\underline{\underline{s = \frac{ab - bp - aq}{a + b}}}, \dots, \underline{\underline{t = \frac{ab + ap + bq}{a + b}}} \right). \quad (3b) \dots (3f)$$

V našem případě konkrétně platí: $a = 32, b = 24, p = 4, s = 4$, potom

$$q = b - s - \frac{b \cdot (p + s)}{a} = 24 - 4 - \frac{24 \cdot (4 + 4)}{32} = \underline{\underline{14}} \text{ [dní]}.$$

Druhý dělník ukončí práci za 14 dní.

Příklad 2.2:

Na montáži pracují dvě skupiny dělníků. Obě skupiny pracovaly společně 6 dní. Kdyby první skupina po šesti dnech odešla, dokončila by druhá skupina práci za další 3 dny. Kdyby druhá skupina po šesti dnech odešla, dokončila by první skupina práci za další 2 dny. Určete, za jakou dobu by provedla montáž každá skupina dělníků zvlášť?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci první skupina dělníků,
 $b \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci druhá skupina dělníků,
 $s \dots$ doba práce, po kterou pracují obě skupiny dělníků společně,
 $p \dots$ doba práce, za kterou by zbytek práce dokončila první skupina dělníků,
 $q \dots$ doba práce, za kterou by zbytek práce dokončila druhá skupina dělníků,
 potom dostáváme modelový vztah

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot s + bp &= ab, \\ \underline{(a + b) \cdot s + aq} &= ab, \end{aligned} \tag{4}$$

ze kterého odvodíme vztah pro a, b :

$$\underline{\underline{a = \frac{pq + ps + qs}{q}}}, \quad \underline{\underline{b = \frac{pq + ps + qs}{p}}}. \tag{4a, b}$$

V našem případě konkrétně platí: $s = 6, p = 2, q = 3$, potom

$$a = \frac{pq + ps + qs}{q} = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6}{3} = \underline{\underline{12}} \text{ [dní]},$$

$$b = \frac{pq + ps + qs}{p} = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{18}} \text{ [dní]}.$$

První skupina by sama provedla montáž za 12 dní, druhá sama za 18 dní.

Skupina 3: *Plná práce tří subjektů*

Jedná se o slovní úlohy o společné práci tří subjektů, které pracují po celou dobu společné práce. Hledáme dobu společné práce nebo dobu, po kterou pracují jednotlivé subjekty.

Příklad 3.1:

První dělník by sám vykonal určitou práci za 4 hodiny, druhý sám za 6 hodin, třetí sám za 12 hodin. Za jak dlouho by uvedenou práci vykonali všichni tři společně?

Řešení:

Je-li: a ... doba práce, za kterou udělá celou práci první dělník,
 b ... doba práce, za kterou udělá celou práci druhý dělník,
 c ... doba práce, za kterou udělá celou práci třetí dělník,
 s ... doba práce, za kterou udělají celou práci všichni tři dělníci,
potom dostáváme modelový vztah

$$abs + acs + bcs = abc, \quad (5)$$

ze kterého odvodíme vztah pro s (eventuálně pro a, b, c):

$$s = \frac{abc}{ab + ac + bc}, \quad (5a)$$

$$\left(a = \frac{bcs}{bc - bs - cs}; b = \frac{acs}{ac - as - cs}; c = \frac{abs}{ab - as - bs} \right). \quad (5b-d)$$

V našem případě konkrétně platí: $a = 4, b = 6, c = 12$, potom

$$s = \frac{abc}{ab + ac + bc} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 12}{4 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 12} = \underline{\underline{2}} \text{ [hodiny]}.$$

Všichni tři by společně vykonali práci za 2 hodiny.

Příklad 3.2:

Tři dělníci mají vykonal určitou práci. Pracuje-li A s B , vykonají práci za 24 dní, B s C za 30 dní, C s A za 40 dní. Kolik času potřebuje každý sám k vykonání práce a za jak dlouho by ji vykonali všichni tři společně?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci dělník A ,
 $b \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci dělník B ,
 $c \dots$ doba práce, za kterou udělá celou práci dělník C ,
 $u \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci dělníci A, B ,
 $v \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci dělníci A, C ,
 $w \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci dělníci B, C ,
 $s \dots$ doba práce, za kterou udělají celou práci všichni tři dělníci,
potom dostáváme modelový vztah

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{2}{s}, \quad (6)$$

ze kterého odvodíme vztahy pro s, a, b, c :

$$s = \frac{2uvw}{uv + uw + vw}, \quad a = \frac{2uvw}{uw + vw - uv}, \quad (6a, b)$$

$$b = \frac{2uvw}{uv + vw - uw}, \quad c = \frac{2uvw}{uv + uw - vw}. \quad (6c, d)$$

V našem případě konkrétně platí: $u = 24, v = 40, w = 30$, potom

$$\begin{aligned} s &= \frac{2uvw}{uv + uw + vw} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 30}{24 \cdot 40 + 24 \cdot 30 + 40 \cdot 30} = 20 \text{ [dní]}, \\ a &= \frac{2uvw}{uw + vw - uv} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 30}{24 \cdot 30 + 40 \cdot 30 - 24 \cdot 40} = 60 \text{ [dní]}, \\ b &= \frac{2uvw}{uv + vw - uw} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 30}{24 \cdot 40 + 40 \cdot 30 - 24 \cdot 30} = 40 \text{ [dní]}, \\ c &= \frac{2uvw}{uv + uw - vw} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 30}{24 \cdot 40 + 24 \cdot 30 - 40 \cdot 30} = 120 \text{ [dní]}. \end{aligned}$$

Dělník A by sám vykonal práci za 60 dní, dělník B sám za 40 dní, dělník C sám za 120 dní, všichni tři by práci vykonali společně za 20 dní.

Příklad 3.3:

Nádržku lze naplnit třemi kohoutky. Druhým kohoutkem by se naplnila za dobu o polovici delší než prvním, třetím za dobu o čtyři pětiny delší než prvním. Všemi současně se nádržka naplní za 9 hodin. Za jakou dobu by se nádržka naplnila každým kohoutkem zvlášť?

Řešení:

Je-li: $a = x \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka prvním kohoutkem,

$b = kx \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka druhým kohoutkem,

$c = rx \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka třetím kohoutkem,

$s \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka všemi třemi kohoutky současně,
potom dostáváme modelový vztah

$$x = \frac{kr + k + r}{kr} \cdot s, \quad (7)$$

ze kterého postupně vyjádříme a, b, c :

$$\underline{\underline{a = \frac{kr + k + r}{kr} \cdot s}}, \quad \underline{\underline{b = \frac{kr + k + r}{r} \cdot s}}, \quad \underline{\underline{c = \frac{kr + k + r}{k} \cdot s}}. \quad (7a-c)$$

V našem případě konkrétně platí: $s = 9, k = 1,5, r = 1,8$, potom

$$a = \frac{kr + k + r}{kr} \cdot s = \frac{1,5 \cdot 1,8 + 1,5 + 1,8}{1,5 \cdot 1,8} \cdot 9 = 20 \text{ [hodin]},$$

$$b = \frac{kr + k + r}{r} \cdot s = \frac{1,5 \cdot 1,8 + 1,5 + 1,8}{1,8} \cdot 9 = 30 \text{ [hodin]},$$

$$c = \frac{kr + k + r}{k} \cdot s = \frac{1,5 \cdot 1,8 + 1,5 + 1,8}{1,5} \cdot 9 = 36 \text{ [hodin]}.$$

Samozřejmě, že b, c můžeme vypočítat pomocí a :

$$b = 20 \cdot 1,5 = 30, \quad c = 20 \cdot 1,8 = 36.$$

Nádržka by se naplnila jen prvním kohoutkem za 20 hodin, jen druhým za 30 hodin, jen třetím za 36 hodin.

Poznámka:

Pokud by doba, po kterou je otevřen třetí kohoutek, byla určena pomocí rozdílu ($c = x + r$), potom bychom x počítali z kvadratické rovnice a dostáváme

$$x_{1,2} = \frac{2ks + s - kr \pm \sqrt{(2ks + s)^2 + k^2r^2 + 2krs}}{2k}.$$

Pokud by i doba, po kterou je otevřen druhý kohoutek, byla určena pomocí rozdílu ($b = x + k$), potom se x počítá pomocí kubické rovnice.

Skupina 4: *Neúplná práce tří subjektů*

Jedná se o slovní úlohy o společné práci tří subjektů, kdy alespoň jeden ze subjektů nepracuje po celou dobu společné práce. Hledáme dobu společné práce nebo dobu, po kterou pracují jednotlivé subjekty. Můžeme též hledat dobu, za kterou by společnou práci dokončil jeden ze subjektů.

Příklad 4.1:

Dělník A by sám vykonal určitou práci za 15 hodin, dělník B sám za 20 hodin a dělník C sám za 12 hodin. Nejprve pracují všichni tři společně 4 hodiny, potom jsou dělníci B a C odvoláni na jinou práci. Za jak dlouho dokončí dělník A zbylou práci?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba, za kterou udělá celou práci sám první dělník,
 $b \dots$ doba, za kterou udělá celou práci sám druhý dělník,
 $c \dots$ doba, za kterou udělá celou práci sám třetí dělník,
 $p \dots$ doba, kdy část práce udělá jen první dělník,
 $q \dots$ doba, kdy část práce udělá jen druhý dělník,
 $r \dots$ doba, kdy část práce udělá jen třetí dělník,
 $u \dots$ doba, kdy budou společně pracovat jen první a druhý dělník,
 $v \dots$ doba, kdy budou společně pracovat jen první a třetí dělník,
 $w \dots$ doba, kdy budou společně pracovat jen druhý a třetí dělník,
 $s \dots$ doba, kdy pracují všichni tři dělníci současně,
 $t \dots$ celková doba, za kterou je celá práce hotova,

potom dostáváme modelový vztah

$$(ab + ac + bc) \cdot s + (ac + bc) \cdot u + (ab + bc) \cdot v + (ab + ac) \cdot w + bcp + acq + abr = abc, \quad (8)$$

ze kterého můžeme vyjádřit jednotlivé veličiny, např.:

$$s = \frac{abc - bcp - acq - abr - (ac + bc) \cdot u - (ab + bc) \cdot v - (ab + ac) \cdot w}{ab + ac + bc}; \quad (8a)$$

$$d = \frac{abc + (ab + ac) \cdot p + (ab + bc) \cdot q + (ac + bc) \cdot r + abu + acv + bcw}{ab + ac + bc}; \quad (8b)$$

$$p = a - s - u - v - \frac{a}{c} \cdot (s + r + v + w) - \frac{a}{b} \cdot (s + q + u + w); \quad \text{atd.} \quad (8c)$$

A) Protože $q = r = u = v = w = 0, a = 15, b = 20, c = 12, s = 4$ dostáváme ze vztahu (8c)

$$p = a - s - \left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} \right) \cdot s = 15 - 4 - \left(\frac{15}{12} + \frac{15}{20} \right) \cdot 4 = \underline{\underline{3}} \text{ [hodiny]}.$$

B) Protože $q = r = u = v = w = 0$, dostáváme ze vztahu (8a)

$$s = \frac{abc - bcp}{ab + ac + bc}.$$

Protože $a = 15, b = 20, c = 12, s = 4$ dostáváme

$$4 = \frac{15 \cdot 20 \cdot 12 - 20 \cdot 12 \cdot p}{15 \cdot 20 + 15 \cdot 12 + 20 \cdot 12} \rightarrow 4 = \frac{45 - 3p}{9} \rightarrow \underline{\underline{p = 3}} \text{ [hodiny]}.$$

Dělník A dokončí práci za 3 hodiny.

Příklad 4.2:

V tepelné elektrárně je vytvořena určitá zásoba uhlí. Bude-li v činnosti pouze 1. elektrárnský blok, vystačí zásoba uhlí na 10 dní. Bude-li v činnosti jen 2. blok, vystačí zásoba na 16 dní, bude-li v činnosti jen 3. blok, vystačí zásoba na $26\frac{2}{3}$ dne. Určete, na kolik dní vystačí zásoba uhlí, budou-li v činnosti současně všechny tři elektrárnské bloky, víme-li, že 1. blok je v činnosti pouze polovinu dne, 2. blok pouze pětinu dne a 3. blok celý den.

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu (5a):

$$s = \frac{abc}{ab + ac + bc},$$

kde a je doba práce jen 1. bloku, b je doba práce jen 2. bloku a c doba práce jen 3. bloku. Protože 1. blok nepracuje celý den, ale jen poměrnou část dne, označíme si tento poměr j , poměrnou denní část práce 2. bloku označíme k a poměrnou část práce 3. bloku označíme l . Celkovou dobu práce označíme místo s písmenem t (všechny tři bloky nebudou pracovat po celou dobu společně) a dostáváme modelovou situaci

$$t = \frac{\frac{a}{j} \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{l}}{\frac{a}{j} \cdot \frac{b}{k} + \frac{a}{j} \cdot \frac{c}{l} + \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{l}}. \quad (9)$$

Upravíme-li zlomek, dostáváme pro celkovou dobu práce t vztah

$$t = \frac{abc}{abl + ack + bcj}. \quad (9a)$$

Je-li $a = 10, b = 16, c = 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}, j = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{5}, l = 1$, potom

$$t = \frac{abc}{abl + ack + bcj} = \frac{10 \cdot 16 \cdot \frac{80}{3}}{10 \cdot 16 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \underline{\underline{10}} \text{ dní.}$$

Za předpokládaného chodu elektrárenských bloků vystačí zásoba uhlí na 10 dní.

Skupina 5: *Práce čtyř a více subjektů*

Jedná se o slovní úlohy o společné práci čtyř a více subjektů, které pracují po celou dobu společné práce nebo mohou pracovat jen část doby společné práce. Hledáme dobu společné práce nebo dobu, po kterou pracují jednotlivé subjekty nebo část této doby.

Vzhledem k tomu, že úlohy, které je možné zařadit do skupiny 5, se vyskytují velmi málo, budu se zabývat pouze případem, kdy všechny čtyři subjekty budou pracovat po celou dobu společné práce.

Příklad 5.1:

Do nádržky přitéká voda čtyřmi trubkami. Jen první trubkou se nádržka naplní za 2 hodiny, jen druhou za 4 hodiny, jen třetí za 6 hodin a jen čtvrtou za 8 hodin. Za jak dlouho se naplní nádržka, budou-li otevřeny všechny roury současně? {obdobnou úlohu uměl řešit již řecký měřič Heron v II. stol. př. n. l.}

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka jen první rourou,

$b \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka jen druhou rourou,

$c \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka jen třetí rourou,

$d \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka jen čtvrtou rourou,

$s \dots$ doba, za kterou se naplní nádržka všemi čtyřmi rourami současně,

potom dostáváme modelový vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{s}, \quad (10)$$

ze kterého vyjádříme hledané s :

$$s = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd}. \quad (10a)$$

V našem případě konkrétně platí: $a = 2, b = 4, c = 6, d = 8$, potom

$$s = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8} = 0,96 \text{ [hodiny]}.$$

Nádržka se naplní všemi čtyřmi přítoky za 0,96 hodiny, tj. za 57 minut 36 sekund.

Skupina 6: *Různé druhy práce*

Jedná se opět o úlohy se zadáním o společné práci subjektů. Tentokrát alespoň jeden ze subjektů „pracuje opačně“, tj. pracuje tak, že společné práce nepřibývá, ale ubývá. Hledáme dobu společné práce nebo dobu práce některého ze subjektů. Do této skupiny patří také Newtonova úloha.

Příklad 6.1:

Do vodojemu vedou tři roury A, B, C . Rourami A, B voda přitéká, rourou C voda vytéká. Jen rourou A by se vodojem naplnil za 10 hodin, jen rourou B by se naplnil

za 15 hodin. Bude-li otevřena roura C , vodojem se vyprázdní za 18 hodin. Za kolik hodin se vodojem naplní, budou-li otevřeny všechny tři roury současně?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem jen první rourou,

$b \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem jen druhou rourou,

$c \dots$ doba, za kterou se vyprázdní vodojem třetí rourou,

$s \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem, budou-li otevřeny všechny tři roury současně,

potom dostáváme modelový vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{s}, \quad (11)$$

ze kterého vyjádříme hledané s :

$$s = \frac{abc}{ac + bc - ab}. \quad (11a)$$

V našem případě konkrétně platí: $a = 10, b = 15, c = 18$, potom

$$s = \frac{abc}{ac + bc - ab} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 18}{10 \cdot 18 + 15 \cdot 18 - 10 \cdot 15} = 9 \text{ [hodin]}.$$

Budou-li otevřeny všechny tři roury současně, naplní se vodojem za 9 hodin.

Poznámka:

Pro výpočet s můžeme použít též vztah (5a), hodnotu c musíme dosadit jako zápornou:

$$s = \frac{abc}{ab + ac + bc} = \frac{10 \cdot 15 \cdot (-18)}{10 \cdot 15 + 10 \cdot (-18) + 15 \cdot (-18)} = \frac{-2700}{-300} = 9 \text{ [hodin]}.$$

Příklad 6.2:

Do vodojemu vedou tři roury A, B, C . Rourami A, B voda přitéká, rourou C voda vytéká. Jsou-li otevřeny roury A a B naplní se vodojem za 12 hodin, jsou-li otevřeny roury A a C , naplní se vodojem za 15 hodin. Budou-li otevřeny roury B a C , naplní se vodojem za 20 hodin. Za kolik hodin se vodojem naplní, budou-li otevřeny všechny tři roury současně?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem jen rourou A ,
 $b \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem jen rourou B ,
 $c \dots$ doba, za kterou se vyprázdní vodojem rourou C ,
 $u \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem, jsou-li otevřeny roury A, B ,
 $v \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem, jsou-li otevřeny roury A, C ,
 $w \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem, jsou-li otevřeny roury B, C ,
 $s \dots$ doba, za kterou se naplní vodojem, jsou-li otevřeny současně všechny tři roury,

potom dostáváme modelové vztahy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{u} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{c} &= \frac{1}{v}, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{2}{s} \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{c} &= \frac{1}{w} \end{aligned} \tag{12}$$

ze kterého odvodíme vztahy pro s, a, b, c :

$$s = \frac{2uvw}{uv + uw + vw}, \quad a = \frac{2uvw}{uw + vw - uv}, \tag{12a, b}$$

$$b = \frac{2uvw}{uv + vw - uw}, \quad c = \frac{2uvw}{vw - uv - uw}. \tag{12c, d}$$

V našem případě pro (12a) konkrétně $u = 12, v = 15, w = 20$, potom

$$s = \frac{2uvw}{uv + uw + vw} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 20}{12 \cdot 15 + 12 \cdot 20 + 15 \cdot 20} = 10 \text{ [hodin]}.$$

Budou-li otevřeny všechny tři roury současně, naplní se vodojem za 10 hodin.

Příklad 6.3: Newtonova úloha

Tři krávy spasou za 4 dny trávu na louce mající 150 m^2 , a to nejen trávu, která tam již je, ale i tu, která za tyto 4 dny nově vyrostla; podobně spase 5 krav za 6 dní 300 m^2 louky. Za kolik dní spase 7 krav trávu na stejné louce výměry 500 m^2 ?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu:

$$\frac{m_i \cdot (1 + t_i \cdot y)}{t_i \cdot x_i} = \frac{m_k \cdot (1 + t_k \cdot y)}{t_k \cdot x_k}, \text{ kde} \quad (13)$$

m_i, m_k je spásaná plocha v jednotlivých případech,

t_i, t_k je doba spásání v jednotlivých případech,

x_i, x_k je počet krav v jednotlivých případech,

y je množství trávy, která naroste za jednotku času na jednotce plochy.

Z obecného vzorce (13) nejdříve vytvoříme vzorec:

$$\frac{m_1 (1 + t_1 \cdot y)}{t_1 \cdot x_1} = \frac{m_2 (1 + t_2 \cdot y)}{t_2 \cdot x_2},$$

do kterého dosadíme $m_1 = 150, m_2 = 300, t_1 = 4, t_2 = 6, x_1 = 3, x_2 = 5$ a dostáváme

$$\frac{150 \cdot (1 + 4y)}{4 \cdot 3} = \frac{300 \cdot (1 + 6y)}{6 \cdot 5}, \text{ odkud } y = \frac{1}{4}.$$

Znovu použijeme obecný vzorec (13) a vytvoříme vzorec:

$$\frac{m_3 (1 + t_3 \cdot y)}{t_3 \cdot x_3} = \frac{m_2 (1 + t_2 \cdot y)}{t_2 \cdot x_2},$$

do kterého dosadíme $m_2 = 300, m_3 = 500, t_2 = 6, x_2 = 5, x_3 = 7, y = \frac{1}{4}$ a dostáváme

$$\frac{500 \cdot (1 + x \cdot \frac{1}{4})}{t_3 \cdot 7} = \frac{300 \cdot (1 + 6 \cdot \frac{1}{4})}{6 \cdot 5}, \text{ odkud } t_3 = \underline{\underline{10}} \text{ [dní]}.$$

Třetí louku o ploše 500 m^2 spase 7 krav za 10 dní.

Skupina 7: *Specifické druhy práce*

Jedná se opět o úlohy se zadáním o společné práci subjektů. V úlohách se mohou vyskytovat větší skupiny subjektů. Většinou se jedná o specifické druhy práce, které nelze zařadit do předchozích skupin. Nejčastěji hledáme počet subjektů, které musíme přidat, či ubrat a vliv této úpravy na celkovou dobu společné práce.

Příklad 7.1:

Nechť 21 robotů udělá předepsanou práci za 37 hodin. Za 15 hodin však bylo přidáno několik dalších robotů, takže práce byla udělána o 8 hodin dříve. Kolik robotů bylo přidáno?

Řešení:

Je-li: $a \dots$ počet robotů na počátku práce,

$r \dots$ počet robotů, které jsou v průběhu práce přidány,

$t \dots$ celková doba, za kterou je celá práce hotova,

$t_0 \dots$ doba práce původního počtu robotů,

$t_1 \dots$ doba, o kterou se zkrátí celková práce přidáním r robotů,

potom dostáváme modelový vztah

$$a \cdot t = (a + r) \cdot (t - t_0 - t_1) + a \cdot t_0, \quad (15)$$

ze kterého vyjádříme hledanou veličinu r :

$$\underline{\underline{r = \frac{at_1}{t - t_0 - t_1}}}. \quad (15a)$$

V našem případě konkrétně $a = 21, t = 37, t_0 = 15, t_1 = 8$, potom

$$r = \frac{at_1}{t - t_0 - t_1} = \frac{21 \cdot 8}{37 - 15 - 8} = \underline{\underline{12}} \text{ [robotů]}.$$

Bylo přidáno 12 robotů.

Příklad 7.2:

Podnikatel je vázán smlouvou dokončit práci do 60 dnů; vypočítá si, že k tomu potřebuje 48 dělníků. Po 32 pracovních dnech vypukne stávka, jež trvá 20 dní. Kolik dělníků přibral podnikatel po stávce, jestliže práci dokončil do smluvené lhůty?

Řešení:

Použijeme opět vzorec (15a), kde $a = 48, t = 60, t_0 = 32, t_1 = 20$. Potom

$$r = \frac{at_1}{t - t_0 - t_1} = \frac{48 \cdot 20}{60 - 32 - 20} = \underline{\underline{120}} \text{ [dělníků]}.$$

Aby podnikatel dokončil práci ve stanovené lhůtě, musí přibrat 120 dělníků.

Závěr

Postup řešení slovních úloh pomocí odvozených vztahů (tj. vzorců) je jeden z možných postupů, které je možné aplikovat na základních či středních školách. Je možné se na tento postup dívat jako na základní či jako doplňující při řešení slovních úloh o společné práci. Může také sloužit vyučujícím k tvorbě dalších variant těchto úloh. Řešíme-li slovní úlohy více způsoby, může další způsob sloužit jako zkouška.

Literatura

- [1] CZUDEK, P., et al. (1998). *Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ*. Praha: Sdružení podnikatelů HAV.
- [2] KRAEMER, E., HRADECKÝ, F. & JOZÍFEK, V. (1956). *Sbírka řešených slovních úloh z matematiky* (6. až 8. postupový ročník). Vyd. 1. Praha: SPN.
- [3] ŠÍMA, F. (2013). *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*. Disertační práce. UP Olomouc.

Sebehodnocení žáků (nejen) v hodinách matematiky

VLADIMÍR ŠKUTA¹

Příspěvek je věnován praktické aplikaci sebehodnocení žáků ve vyučovacích hodinách matematiky i jiných předmětů na druhém stupni základní školy. Autor prezentuje systémový nástroj, který byl vytvořen a následně se osvědčil na Základní škole J. Matiegky v Mělníku. Zde jej už pátým rokem využívá nejen autor, ale i většina vyučujících teoretických předmětů druhého stupně a někteří vyučující vyšších ročníků prvního stupně.

Proč sebehodnocení žáků? (legislativa)

- Školský zákon §30:
... školní řád obsahuje také pravidla pro hodnocení výsledků vzdělávání žáků...

¹Základní škola Jindřicha Matiegky Mělník, p. o., skuta@zsjm-me.cz

- Vyhláška o ZŠ §14:
...pravidla pro hodnocení žáků jsou součástí školního řádu a obsahují zejména: ...zásady a způsob hodnocení a sebehodnocení výsledků vzdělávání žáků...
- RVP ZŠ, klíčové kompetence, kompetence k učení:
...kriticky zhodnotí výsledky svého učení...
- RVP ZŠ: *požadavek na sebehodnocení se objevuje jako cíl i v některých konkrétních vzdělávacích oblastech (např. Člověk a společnost)*

Proč sebehodnocení žáků? (zkvalitňování výuky)

- Poskytuje zpětnou vazbu žákovi i rodičům, čímž posiluje formativnost systému hodnocení ve škole (vede žáka k zlepšování)
- Posiluje zájem žáka o výuku
- Rozvíjí sebeúctu žáka
- Posiluje zdravý partnerský vztah mezi žákem a učitelem
- Vede ke sjednocení optiky hodnocení učitelem, žákem, rodiči (předcházíme překvapení žáků a rodičů)

Cíl výcviku žáků v sebehodnocení

Naučit žáky samostatně vyhodnocovat svou práci a vyvozovat ze zpětného pohledu závěry pro budoucnost (Košťálová, 2008).

Jak dělat sebehodnocení?

- Jednorázově při výuce, na konci hodiny, když zbude čas...
- Systémově (má to nějaká pravidla)

Pravidla systémového sebehodnocení žáků:

- ▷ pravidelnost
- ▷ žák si předem nastaví sám „laťku“ (plánuje svůj výkon)
- ▷ vychází se z kritérií (viz ŠŘ)
- ▷ pozitivní motivace k předmětu
- ▷ je to subsystém systému hodnocení

Jak to děláme u nás

Sebehodnocení a hodnocení žáka v matematice

Jméno: Simča F. [] ová



Motto: "Stále více ovládám matematiku, proto ji mám rád."

2012/2013	Simča plánuje			Simča sama sebe hodnotí			Pan učitel hodnotí Simču			podpis rodičů
	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	
IX. B										
září	1	B	++	2-3	B	++	1-2	B-C	++	75%
říjen	1	B	++	2-	B	++	2-	B	++	49%
listopad	2	B	++	2-	B	++	2	B-C	++	45%
prosinec										
leden	1	B	++	2-	B-C	++	2	A-B	++	70%
únor	2	B	++	2	B-C	++	2	B	++	60%
březen	2	A-B	++	3	B-C	++	3+	B-C	++	55%
duben										
květen	2	B	++	3	B-C	++	2-3	C	++	55%
červen	2	A-B	++							
1. pololetí										
2. pololetí										

Aktivita:

A=velmi aktivní

B=aktivní

C=méně aktivní

D=neaktivní

Chování:

++ = chování vzorné, neporušuje školní řád

+ = chování solidní, jen výjimečně se dostane na hranu porušení školního řádu

- = někdy poruší školní řád méně závažně

-- = porušuje školní řád často nebo závažně

Obr. 1

Zásady využívání „našeho“ systému

- Vyhodnocujeme pravidelně 1x za měsíc (na konci či začátkem nového měsíce), výjimečně lze dva měsíce spojit
- V předmětech s nižší hodinovou dotací lze vyplňovat čtvrtletně
- Každý žák vyplňuje dva shodné archy:
 - jeden nalepený na zadních deskách sešitu
 - druhý má učitel u sebe (poskytne žákovi, když svůj ztratí)

Proč?

- ✓ Žák musí mít stále list u sebe (při výuce je občas vybízím, aby se podívali na svůj plán, info pro rodiče)
- ✓ Já, učitel, musím mít možnost kdykoli žákovi poskytnout jeho záznamy a hlavně do nich kdykoli nahlížet a přemýšlet o žácích

Sebehodnocení a hodnocení žáka v matematice

Jméno: Pepa H[redacted]atý



Motto: "Stále více ovládám matematiku, proto ji mám rád."

2012/2013	Pepa plánuje			Pepa sám sebe hodnotí			Pan učitel hodnotí Pepu			podpis rodičů
	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	
září	2	C	+	3	C	+	3-4	C	++	
říjen	2	B	++	2-3	C	+	2-	B	++	
listopad	2	B	++	3	C	+	3-	B	++	
prosinec	2									
leden	2	B	++	2-3	B	+	2	B-C	++	
únor	1-2	B	++	2-3	B-C	+	2-	C	++	
březen	2	B	++	3	C	+	3-4	C	++	
duben	3									
květen	2	B	++				3	D	++	
červen										
1. pololetí										
2. pololetí										

Aktivita:	A=velmi aktivní
	B=aktivní
	C=méně aktivní
	D=neaktivní

Chování:	++ = chování vzorné, neporušuje školní řád
	+ = chování solidní, jen výjimečně se dostane na hranu porušení školního řádu
	- = někdy poruší školní řád méně závažně
	-- = porušuje školní řád často nebo závažně

Obr. 2

Sebehodnocení a hodnocení žáka v matematice

Jméno: Kristýna S[redacted]ková



Motto: "Stále více ovládám matematiku, proto ji mám rád."

2013/2014	Kristýna plánuje			Kristýna sama sebe hodnotí			Pan učitel hodnotí Kristýnu			podpis rodičů
	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	
září	1	A	++	3-	B-C	+	3+	D	++	
říjen	1	A	++	4	C-D	++	2	D	++	
listopad	2	C	++	3-	D	++	3	B-C	+	
prosinec	2	D	++	3-	C	++	2	D	++	
leden	3	B	++	3	B-C	++	2	B-C	++	
únor	2	B	++							
březen										
duben										
květen										
červen										
1. pololetí										
2. pololetí										

Aktivita:	A=velmi aktivní
	B=aktivní
	C=méně aktivní
	D=neaktivní

Chování:	++ = chování vzorné, neporušuje školní řád
	+ = chování solidní, jen výjimečně se dostane na hranu porušení školního řádu
	- = někdy poruší školní řád méně závažně
	-- = porušuje školní řád často nebo závažně

Obr. 3

Sebehodnocení a hodnocení žáka v matematice

Jméno: Bohuš Š



Motto: "Stále více ovládám matematiku, proto ji mám rád."

2013/2014	Bohuš plánuje			Bohuš sám sebe hodnotí			Pan učitel hodnotí Bohuše			podpis rodičů
	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	
VI. B										
září	1	A	++	2-3	A	++	3	B	++	
říjen	2	A	++	2	B	++	3	C	++	
listopad	2	B	+	3	B	+	3	A-B	++	
prosinec	2	C	+	3	C	+	3	B-C	++	
leden	3	B-C	+	3	B	+	2	A-B	++	
únor	3	B	+							
březen										
duben										
květen										
červen										
1. pololetí										
2. pololetí										

100 %
100 %
100 %
100 %
100 %

Aktivita: A=velmi aktivní
B=aktivní
C=méně aktivní
D=neaktivní

Chování: ++ = chování vzorné, neporušuje školní řád
+ = chování solidní, jen výjimečně se dostane na hranu porušení školního řádu
- = někdy poruší školní řád méně závažně
-- = porušuje školní řád často nebo závažně

Obr. 4

Sebehodnocení a hodnocení žáka v matematice

Jméno: Verča Klová



Motto: "Stále více ovládám matematiku, proto ji mám rád."

2013/2014	Verča plánuje plánuje			Verča sama sebe hodnotí			Pan učitel hodnotí Verču			podpis rodičů
	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	známka	aktivita	chování	
VI. B										
září	1	A	++	1	A-B	+	2	A-B	++	
říjen	1	A	++	2-3	A-B	++	2	A-B	++	
listopad	1	A	++	3	A-B	++	2	A-B	+	
prosinec	1	A	++	2+	A-B	++	2+	A	++	
leden	1	A	++	2	B	+	3	B	++	
únor	1-2	A	++							
březen										
duben										
květen										
červen										
1. pololetí										
2. pololetí										

100 %
95 %
95 %
95 %
100 %

Aktivita: A=velmi aktivní
B=aktivní
C=méně aktivní
D=neaktivní

Chování: ++ = chování vzorné, neporušuje školní řád
+ = chování solidní, jen výjimečně se dostane na hranu porušení školního řádu
- = někdy poruší školní řád méně závažně
-- = porušuje školní řád často nebo závažně

Obr. 5

Závěr

Vhodným systémem sebehodnocení žáky učíme, že není třeba skrývat, co jim nešlo. Stejně tak je však učme, ocenit a posilovat na vlastní práci vše, co za to stojí!

Literatura

- [1] KOŠTÁLOVÁ, H., MIKOVÁ Š. & STANG J. (2008). *Školní hodnocení žáků a studentů: se zaměřením na slovní hodnocení*. Vyd. 1. Praha: Portál, 151 s. ISBN 978-807-3673-147.
- [2] www.zsjm-me.cz

Studentské reflexe výuky elementární matematiky metodou budování schémat

RENÁTA ZEMANOVÁ¹

Prezentujeme analýzu studentských reflexí průběžné profesní praxe v matematice 1. st. ZŠ vyučované metodou budování schémat. Reflexe vyhodnocujeme v parametrech: klima hodiny, komunikace v hodině, architektura hodiny a důležité epizody. Porovnáváme praxi náslechovou, kdy studenti sledovali zkušeného učitele, a výstupovou, kdy studenti sledovali své spolužáky. Odpovědi studentů zaznamenáváme kvalitativně i kvantitativně.

Formulace problému

Od roku 2012 se rozvíjí spolupráce Katedry matematiky s didaktikou Pedagogické fakulty Ostravské univerzity s Katedrou matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. V roce 2012/13 jsme připravili významné obsahové změny předmětů didaktiky matematiky oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ, která tak namísto dosavadního tradičního vyučování matematice rozvíjí konstruktivistickou metodu budování schémat. K zásadní změně došlo i v koncepci průběžné profesní praxe. Studenti tuto praxi nově realizují výhradně v hodinách matematiky vyučovaných výše uvedenou metodou, tedy podle učebnic matematiky Hejného. Detailní analýzu změn matematických disciplín v přípravě budoucích učitelů – elementaristů na PdF OU prezentoval R. Krpec (Krpec, 2013).

¹Katedra matematiky s didaktikou, Pedagogická fakulta, Ostravská univerzita, renata.zemanova@osu.cz

Teoretická východiska

Problematikou reflexí výukové hodiny se zabývá řada autorů. Vycházíme z principů účinného vyučování v matematice formulovaných Naďou Stehlíkovou v publikaci *Cesty ke zdokonalování kultury vyučování matematice* (Hošpesová, Stehlíková & Tichá, 2007). Ze stejné publikace využíváme pojednání o kvalifikované pedagogické reflexi autorek Aleny Hošpesové a Marie Tiché, přičemž studenty vedeme i k reflexi předem zadaných aspektů hodiny.

Zařazení studentské praxe v oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ na PdF OU

Studenti oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ absolvují v průběhu studia několik profesních praxí v matematice 1. st. ZŠ, a to praxi hospitační (sledování výuky, seznámení s provozem školy, její dokumentací, práci třídního učitele, výchovnou práci školy a práci s rodiči), praxi průběžnou (sledování, příprava, realizace a reflexe výuky), praxi souvislou (komplexní).

Reflexe výuky matematiky na 1. st. ZŠ

Zpracovali jsme studentské reflexe průběžné praxe v zimním semestru akademického roku 2013/14, tedy z období září – prosinec 2013. Náslechy absolvovali studenti 3. ročníku u Pavlíny Placzkové na ZŠ Kontešinec v Českém Těšíně (2. ročník ZŠ), výstupy absolvovali studenti 4. ročníku u Zemanové a Krpce na ZŠ Matiční v Ostravě (3. ročník ZŠ). Náslechové praxe se zúčastnilo celkem 35 studentů, výstupové praxe celkem 22 studentů.

Studenti byli předem vyzváni, aby sledovali a vyjádřili se i těmito aspekty: 1) klima hodiny, 2) komunikace v hodině, 3) architektura hodiny a 4) důležité epizody. Studenti psali text volně, tedy neměli předepsanou strukturu jevů, které aspektu náleží.

V tabulkách 1–8 u každého studenty pojmenovaného jevu uvádíme četnost odpovědí.

KLIMA – ZŠ Kotešinec	
Sledovaný jev	Počet
Vzájemná pomoc	27
Aktivita	26
Nepřítomnost frustrace nebo nudy	18
Dobré vztahy mezi žáky	17
Radost	10
Klidné klima v hodině i o přestávce	7
Seberealizace žáků	6
Zapojování do činností v průběhu celé hodiny	5
Nezažívání pocitu neúspěchu	5
Sehraný kolektiv	4
Neaktivní jedinci	3

Tab. 1:
Sledované jevy třídního klimatu

KLIMA – ZŠ Matiční	
Sledovaný jev	Počet
Přátelské klima (přejícnost, kamarádství, podpora)	17
Aktivita	15
Vzájemná pomoc	11
Vzájemná spolupráce	7
Radost a nadšení žáků	6
Soutěživost	5
Klidné klima ve třídě	4
Neaktivní jedinci (nuda)	3
Nepřítomnost nudy nebo frustrace	3
Nezažívání pocitu neúspěchu	3

Tab. 2:
Sledované jevy třídního klimatu

KOMUNIKACE – ZŠ Kotešinec	
Sledovaný jev	Počet
Mód učitel – žák	23
Mód učitel – třída	21
Mód žák – žák	18
Mód skupina žáků – skupina žáků	15
Podnětné otázky	15
Vzájemná pomoc při opravě chyb	10
Mód žák – učitel	9
Využití barevných kartiček	5
Obhajoba vlastních řešení	4
Mód žák – třída	3
Práce s hlasem	2
Zábavné otázky (humor)	1
Využívání nonverbální komunikace	1

Tab. 3:
Sledované jevy komunikace

KOMUNIKACE – ZŠ Matiční	
Sledovaný jev	Počet
Mód učitel – žák	21
Mód učitel – třída	11
Mód žák – žák	9
Mód žák – učitel	7
Nepřesné zadání úkolu od učitele	5
Mód skupina žáků – skupina žáků	4
Mód učitel – učitel	4
Podnětné otázky	3
Dostatek prostoru pro dotazy žáků	2
Mód žák – třída	2
Práce s hlasem – srozumitelné a hlasité vyjadřování vyučujícího	2

Tab. 4:
Sledované jevy komunikace

ARCHITEKTURA – ZŠ Kontešinec	
Sledovaný jev	Počet
Dobrá připravenost učitele	22
Zaujetí všech žáků	20
Spád hodiny – střídání činností	16
Narušení scénáře žáky	14
Potřeba pokračování i o přestávce	10
Možnost výběru pro žáky	9
Přizpůsobivost učitele	6
Dostatek pohybové aktivity	6
Soustředěnost žáků	5
Rozložení času	4
Společné zhodnocení hodiny	4

Tab. 5:
Sledované jevy architektury hodiny

ARCHITEKTURA – ZŠ Matiční	
Sledovaný jev	Počet
Dobrá připravenost učitele	14
Plynulost hodiny bez narušení scénáře	8
Zaujetí všech žáků	6
Potřeba pokračování i o přestávce	6
Narušení scénáře žáky	5
Nedostatek úkolů pro rychlejší/šikovnější žáky	5
Nedostatek pohybové aktivity	5
Dostatek zajímavých aktivit	4
Spád hodiny – střídání činností	2
Přizpůsobivost učitele	1

Tab. 6:
Sledované jevy architektury hodiny

DŮLEŽITÉ EPIZODY – ZŠ Kontešinec	
Práce s chybou	22
Pomoc spolužákovi	13
Spolupráce na řešení úlohy	9
Zapálenost pro matematiku a vysoké sebevědomí žáků	6
Využití barevných kartiček – žák, který úlohu rozumí, zvedne zelenou, nerozumí červenou, dotaz oranžovou	6
Kontrola výsledků pomocí krokování	5
Pomoc učitele žákovi	4
Nepochopení žákova postupu učitelem	3
Přijetí pojmu navrženého žákem	2
Využití velkých názorných pomůcek při řešení příkladu	2
„...holčička se silným ADHD poprvé vyřešila příklad při počítání trojúhelníků s barevnými poli, dostala jedničku.“	2

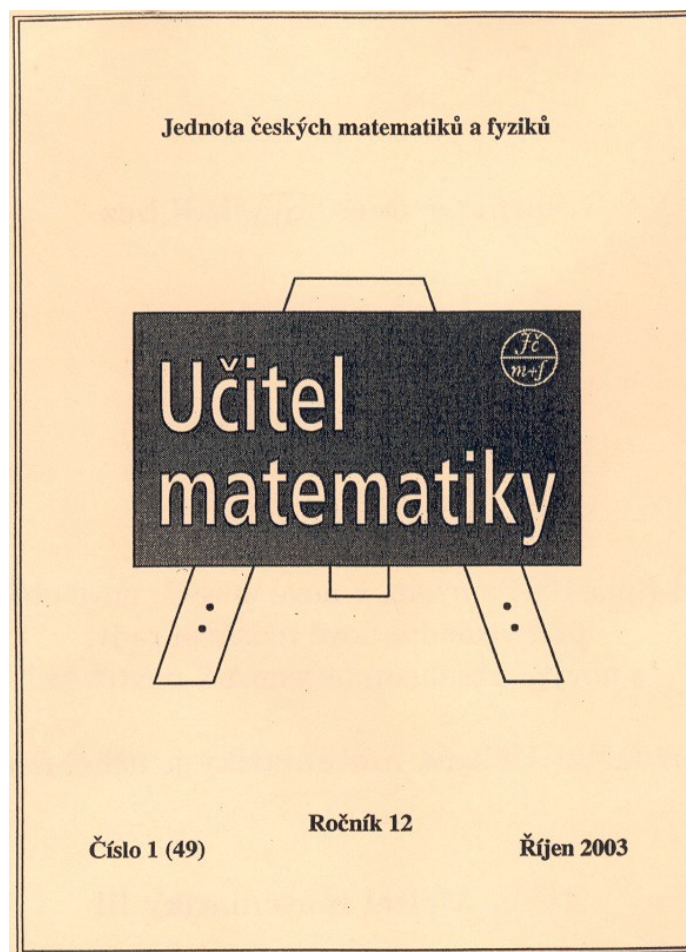
Tab. 7:
Sledované důležité epizody

DŮLEŽITÉ EPIZODY – ZŠ Matiční	
Nepochopení zadání žákem (nepřesné zadání ze strany učitele)	9
Vzájemná pomoc s řešením	7
Nadšení žáků nad novým poznáním („aha efekt“)	6
Zapojení žáka s dyskalkulií	5
Uvolněné klima třídy, viditelná radost	4
Práce s chybou, nepochopení úlohy	3
Svobodná volba řešení příkladů	3
Zapálenost pro matematiku a vysoké sebevědomí žáků	3
„Učitelky si málo všimaly, že se hlásí.“	2
Pomoc učitele žákovi	1
Dobrá spolupráce učitelky s žáky	1
Problémové úlohy	1
Rychlé pochopení nového učiva	1

Tab. 8:
Sledované důležité epizody

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., et al. (2007–2011). *Matematika pro 1.–5. ročník ZŠ*, učebnice, pracovní sešity a příručky učitele, Plzeň: Fraus.
- [2] HEJNÝ, M. (2007). *Budování matematických schémat*. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (81–122). České Budějovice: JU.
- [3] JIROTKOVÁ, D. & KRPEC, R. (2013). Vyučování orientované na budování schémat v přípravě učitelů. In: *Matematika v primárnej škole* (101–106). Prešov: Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta.
- [4] STEHLÍKOVÁ, N. (2007). *Charakteristika kultury vyučování matematice*. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (16–47). České Budějovice: JU.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 23. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na www.suma.jcmf.cz/ucitel.

Administrace časopisu:

Miluše Hrubá

Gymnázium, A. K. Vítáka 452, 569 43 Jevíčko

e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý

Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2014. Sborník příspěvků.

Editor: Naďa Vondrová
Sazba: Zuzana Kocourková a Jan Kozubek, systémem L^AT_EX
Počet stran: 169
Vydala: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2014
Místo vydání: Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7290-801-1