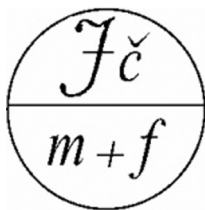


Dva dny s didaktikou matematiky 2013

Sborník příspěvků celostátní konference

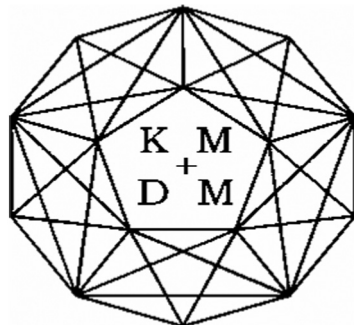
Vydavatelský servis, Plzeň 2013





DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2013

Sborník příspěvků



Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Nada Vondrová
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editorka:

Nada Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2013

ISBN 978-80-86843-44-5

Obsah

Zvané přednášky	7
František Kuřina Elementární matematika a kultura	9
Isabella Pavelková Postoje k matematice v percepci žáků a učitelů (motivační problémy v matematice) ..	12
Jednání v sekcích	21
Alice Bílá Komár, moucha a vosa aneb jedna testová úloha typu zebra jako úvod k zamyšlení o testování vůbec	23
Zoltán Fehér Online domácí úlohy v praxi	27
Štefan Gubo GPS přijímače vo vyučování matematiky na ZŠ	31
Daniela Guffová Učebné materiály pre CLIL motivované austrálskymi učebnicami matematiky	34
Roman Hašek GeoGebra jako nástroj objevování a dokazování	37
Veronika Havelková GeoGebra NEJEN ve výuce funkcí	41
Jana Chudá Analýza žiackych riešení dvoch slovných úloh o pohybe	46
Martina Ivanecká Štatistická gramotnosť absolventov stredných škôl	50
David Janda, Derek Pilous Funkční myšlení žáků středních škol	55
Ladislav Jaruska Riešenie slovných úloh pomocou GeoGebry	60
Kararína Kocová Mičkaninová Postavenie digitálnych technológií vo vyučovaní pravdepodobnosti	64
Michaela Králová Vliv učitele na strategie žákovských řešení	67
Daša Palenčárová Výučba kombinatoriky na základnej škole	70

Sylva Peclínová	
Setkání s nulou	73
Derek Pilous	
Chyby, jejich příčiny a hodnocení	76
Anna Polomčáková	
Prepojenie matematických kompetencií s úlohami z kombinatorickej geometrie	82
Ivana Procházková	
Jak využít nástěnku na 1. stupni ZŠ k výuce matematiky?	86
František Šíma	
Porovnání zátěže studentů VŠTE v Českých Budějovicích v předmětu Deskriptivní geometrie	90
Noémi Székelyová	
Vybrané úlohy z prostredia sčítacích pyramíd	100
Peter Vankúš	
Didaktické hry v matematike	103
Lukáš Vízek	
Výuka sinové a kosinové věty v souvislosti se shodností trojúhelníků	106
Renáta Zemanová	
Vyučování metodou budování schémat – ostravská zkušenost v učitelské přípravě a praxi	110
Pracovní dílny	115
Šárka Gergelitsová	
GeoGebra NEJEN v geometrii	117
Pavla Hanzalová, Bohumila Raisová	
Praktické ukázky využití didaktických her zaměřených na výuku funkcí jedné proměnné	122
Jarmila Novotná	
Charakteristika a ukázky „dobrého vyučování“ v matematice	126
Eva Patáková	
Tvorba úloh „převrácením“	131
Časopis Učitel matematiky	135

Milí přátelé, kolegové a kolegyně,

opět jsme se sešli nad tím, co nás baví, co nás trápí, co jsme objevili, co nás potěšilo i co nás zarmoutilo. Sborník ke Dvěma dnům s matematikou je něčím výjimečný: je záznamem dlouhodobého partnerství napříč naším školstvím, ukazuje nejen naši lásku k žákům/studentům a k matematice jako oboru, ale i odráží naše obrovské společné úsilí, které vynakládáme na různých pozicích proto, aby matematika bavila naše žáky, aby se pozvedla úroveň „žákovské/studentské matematiky“, aby se prohloubilo naše profesní poznání v tom, co jde/nejde a proč a za jakých podmínek, a v neposlední řadě i proto, aby se kultivovaly učitelské postupy. Sám se s tolika úkoly člověk utkat nemůže, naše setkání jsou i o tom, že se vzájemně podpoříme a dodáme síly na to, abychom ve svém usilování mohli pokračovat. To, že jde o nelehký úkol, ukazuje i fakt, že se scházíme opakovaně, letos již po sedmnácté, a že kromě již popsanych problémů či úspěchů se rok co rok objevují stále nové.

Přejeme podnětné počtení a v roce 2014 opět na shledanou.

Za programový a organizační výbor
Michaela Kaslová

ZVANÉ PŘEDNÁŠKY

ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKA A KULTURA

František KuřinaPřírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové
Frantisek.Kurina@uhk.cz

Počítání a měření, elementární aritmetika a geometrie jsou součástí rozvíjející se lidské kultury od samého začátku dějin. Obchod, aktuální technické úkoly, cestování, ... potřebovaly řešit kvantitativní a prostorové problémy ve všech společnostech. Matematika se utvářela v souvislosti s potřebami přírodních a technických věd a jejich rozvoj mnohdy podmiňovala. Postupně se ovšem stala samostatnou disciplínou se svými vnitřními problémy a tento stav trvá i v současné době. „Náš svět spočívá na matematických základech a matematika je nevyhnutelně vnořena do naší globální kultury. ... Kdyby matematika, včetně toho, co na ní spočívá, musela z našeho světa zmizet, lidská společnost by se okamžitě zhroutila. A kdyby se matematika měla zmrazit, takže by nepostoupila ani o krok kupředu, naše civilizace by začala couvat“, to napsal britský matematik *I. Stewart*.

Z podnětů reálného světa vznikla nejen matematika, ale např. i umění. Mnohé matematické pojmy jsou abstrakcemi jevů přírody (číslo, funkce, přímka, rovina, ...), umění vznikalo z potřeb zobrazování jevů světa člověka a často využívalo vědeckých, zejména geometrických poznatků. Abstraktní umění již ovšem nezobrazuje přírodní skutečnosti, ale konstruuje skutečnosti nové. Obraz může být kombinací forem a barev bez věcného významu, tvorba spočívá v jejich rozvíjení, snad s ohledem na jejich vnitřní dokonalost. Čistá matematika je, analogicky k abstraktnímu umění, konstrukcí, a to konstrukcí logickou, která není vázána na přírodní skutečnosti. Školská matematika není ovšem vědou v tomto smyslu. Je ve své podstatě řemeslem a slušelo by jí patrně spíše označení „počty“ a „měřičství“. Nejde však o termíny.

Pozoruhodnou charakteristiku práce matematika vyjádřil jiný anglický matematik, *G. H. Hardy*: „Matematik, podobně jako malíř nebo básník, je tvůrcem vzorců. Jestliže jsou jeho vzorce trvanlivější než ty jejich, je to proto, že jsou vytvořeny z idejí (myšlenek). Malíř vytváří vzorce z tvarů a barev, básník ze slov. ... Matematikovy vzorce, stejně jako vzorce malíře nebo básníka, musí být krásné, ideje, jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem: ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa.“ Harmonie není jenom předpokladem krásy matematické, ale krásy vůbec.

Součástí kultury jsou přirozeně i technika, průmysl, zemědělství. ... Tyto oblasti se nemohou rozvíjet bez vědy, bez fyziky, chemie, biologie, ... tedy bez disciplín, které se významně opírají o matematiku, mnohdy i elementární.

Všimněte si např. těchto příkladů:

1. Řešení binomické rovnice
2. Moivreova věta
3. Konstrukce pravidelného n -úhelníku v Gaussově rovině
4. Obrázky fraktální geometrie
5. Abstraktní Kupkovy obrazy
6. Dům u Černé matky Boží v Celetné ulici v Praze
7. Výplně gotických oken chrámů

8. Různé ornamenty
9. Tvary listů a květů rostlin
10. Symetrie těl živočichů a technických výtvorů (vážka a letadlo, ...)

Naše škola zpravidla nepředstavuje matematiku v souvislostech s ostatními složkami kultury. Učíme často matematiku jako jakousi podivnou konstrukci, která je uložena v učebnicích, není příliš srozumitelná a není ani užitečná.

To je ovšem chybný přístup.

Matematika nejenže z kontaktu s přírodou a společností vznikla, ale svými aplikacemi se k přírodě i společnosti vrací. To bychom se měli snažit na všech úrovních matematického vzdělávání ukazovat.

Všimněme si ještě další stránky kontaktu matematiky s člověkem.

Velice důležité je to, že studiem matematiky dítě kultivuje sebe samo, studium matematiky přispívá k rozvíjení myšlení dítěte, k pěstování představivosti a kritičnosti, rozvíjí umění vidět souvislosti a řešit problémy.

Souvislost školské matematiky se světem dítěte by se podle mého názoru měla odrazit v přirozeném přístupu k matematice, který spočívá v těchto zásadách.

Aritmetika

Základem aritmetiky jsou čísla a počítání s nimi.

1. Přirozená čísla můžeme vytvářet postupným přičítáním čísla 1 (začínáme od čísla 0). Počítání po deseti, stech, tisících, ... umožňuje zapsat libovolné přirozené číslo pomocí deseti číslic. Libovolná dvě přirozená čísla můžeme s jediným výsledkem sečíst nebo znásobit. Další číselné operace (odečítání a dělení) vedou k rozšíření číselných oborů na čísla záporná a na čísla racionální.
2. Při výpočtech vhodně využíváme kalkulačku a jinou výpočetní techniku.
3. Vztahy mezi čísly, závislosti, funkce.
4. Vyjádření vztahů mezi čísly algebraicky. Rovnice.

Geometrie

Základem geometrie je prostor a jeho vlastnosti.

1. Prostor lze dělit na části.
2. Části prostoru lze vyplňovat.
3. V prostoru se můžeme pohybovat.
4. V prostoru existují útvary trojdimenzionální, dvojdimenzionální a jednodimenzionální.

Souvislost aritmetiky s geometrií

1. Měření.
2. Určování délek, obsahů a objemů.
3. Grafy funkcí.
4. Zobrazování prostorových útvarů.

Témata, jak jsem je zde naznačil, se přirozeně navzájem prolínají. Přirozený přístup k matematice umožňuje rozvíjet matematickou kulturu od útlého věku dítěte, ukazuje souvislost matematiky se světem, v němž dítě žije. Mnohé matematické pojmy a přístupy lze tak zavést přirozeným způsobem a přispívat tak ke kultivaci myšlení žáků.

Omezuji informaci o své přednášce na Dvou dnech na tyto stručné poznámky.

Zájemce o problematiku odkazuji na publikace, které jsem v poslední době o těchto souvislostech napsal:

KUŘINA, F. *Elementární matematika a kultura*. Nakladatelství Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, kde si lze knihu, která vyšla v roce 2012, objednat.

Tři články v Učiteli matematiky:

KUŘINA, F. Laťkový plot jako inspirace. *UM* (82) 2012, s. 89–96.

KUŘINA, F. Číslo pět jako inspirace. *UM* (83) 2012, s. 135–148.

KUŘINA, F. Matematika a realita. *UM* (84) 2012, s. 201–216.

POSTOJE K MATEMATICE V PERCEPCI ŽÁKŮ A UČITELŮ (MOTIVAČNÍ PROBLÉMY V MATEMATICE)

Isabella Pavelková

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
isabella.pavelkova@pedf.cuni.cz

Abstrakt

V předkládané studii jsou mapovány žákovské postoje k předmětu matematika, pozornost je věnována i učitelské percepci žákovských postojů. Sledovány jsou proměnné obliba, obtížnost, význam, odhad svého nadání pro matematiku, motivace, píle a nuda v matematice. Z motivačních problémů, které bývají s matematikou spojovány, vybíráme k podrobnější analýze problematiku vnímané osobní zdatnosti pro matematiku a fenomén nudy ve škole. Výsledky jsou vybrány z výzkumu, který byl realizován na druhém stupni základních škol v České republice. Vzorek tvořilo 3 108 žáků a 170 jejich učitelů.

Klíčová slova: matematika, pedagogická psychologie, postoje ke školním předmětům, obliba, obtížnost, význam, nadání, motivace, nuda, známka, výkon, vnímaná osobní zdatnost (self-efficacy).

Stať přináší informace o postavení matematiky mezi ostatními předměty na 2. stupni základní školy. Zaměřujeme se na otázky postojové, motivační, vnímání vlastní kompetence, a to jak z pohledu žáků, tak z pohledu učitelské percepcce žákovských postojů.

Teoretickým východiskem výzkumů postojů k předmětům je koncepce **sociální reprezentace a subjektivní reprezentace** předmětu. Sociální reprezentací je míněna obecná představa o předmětu (předmět má určitou „pověst“ ve společnosti). Subjektivní reprezentací předmětu je individuální subjektivní obraz (koncept) žáka, který je dán individuálním subjektivním prožitkem v tomto předmětu. Mezi sociální a subjektivní reprezentací dochází k plynulému ovlivňování. (Podrobně viz Hrabal, Pavelková, 2010 nebo Moscovici, 1981.) Každý předmět, tedy i matematika, vytváří pro žáky jedinečnou situaci. Postojové charakteristiky vázící se k jednotlivým školním předmětům bývají dosti jednoznačné a hlavně stabilní, zůstaly nezměněné i po různých školských reformách. Stabilita představ o jednotlivých předmětech vyplývá i ze srovnání současných výsledků s výsledky výzkumů prováděných v osmdesátých letech dvacátého století (Hrabal st., Hrabal ml., 2002). Zároveň je nutné si uvědomit, že pro každého žáka, v závislosti na jeho schopnostech, zájmech, rodinné socializaci, jsou vnímání předmětu (subjektivní reprezentace předmětu) a postoje k němu jiné. Svou roli zde může hrát také trend třídy v chápání předmětu. Přes určitou danost (stabilitu) má učitel značný prostor, jak na žákovské a třídní postoje působit (srov. Hrabal, Pavelková, 2010).

Cílem prezentovaného výzkumu je poskytnout pedagogické praxi informace o stavu vyučovacích předmětů na II. stupni základní školy z hlediska žákovských postojů, motivace a prožitku vlastní kompetence žáků. Z výzkumu vybíráme především ty výsledky, které se týkají matematiky.

Výzkumný vzorek tvořilo 3 108 žáků 2. stupně základních škol a 179 jejich učitelů. Jádrem **výzkumných metod** tvořil dotazník postojů k předmětům (Hrabal, Pavelková, 2010). Jednotlivé charakteristiky byly vždy zjišťovány na pětistupňové škále. Učitelé posuzovali své žáky ve stejných charakteristikách – snažili se tedy odhadnout, jaké mají jejich žáci postoje k předmětu. Navíc ještě posuzovali výkon žáků. Sledované kategorie:

- Obliba předmětu – emocionální prožitek z a v předmětu: 1 velmi oblíbený ... 5 velmi neoblíbený.
- Vnímaná obtížnost předmětu – vztahuje se k celé řadě motivačních procesů (pocitu výkonnosti, sebeobrazu, prožitku úspěchu nebo neúspěchu): 1 velmi obtížný ... 5 velmi snadný.
- Význam předmětu – připisovaný subjektivní smysl zaobírat se předmětem. Motivační zdroj, ve kterém se odráží sociální reprezentace předmětu z hlediska jeho uplatnění ve společnosti: 1 velmi významný ... 5 nevýznamný.
- Nadání pro předmět – kompetenční složka motivace učební činnosti (vnímaná osobní zdatnost pro předmět): 1 velmi nadaný ... 5 nenadaný.
- Motivace – souhrn motivačních pobídek: 1 velmi motivovaný ... 5 nemotivovaný.
- Píle – realizovaná motivace ve vyučování a v domácí přípravě: 1 velmi pilný ... 5 nepracující, líný.
- Nuda: 1 nikdy nezažívám ... 5 zažívám skoro pořád.
- Výkon: 1 žák podává velmi dobré výkony ... 5 podává velmi slabé výkony.

Vybrané výsledky výzkumu

Výzkum potvrdil, že k jednotlivým předmětům se váží typické postoje. Předměty se odlišují ve všech sledovaných ukazatelích. Postavení předmětu matematika mezi ostatními předměty na II. stupni základní školy z pohledu žáků i učitelů můžeme vyčíst z tabulek 1, 2, 3.

Tab. 1: Obliba předmětů z pohledu žáků a učitelů (upraveno podle Hrabal, Pavelková 2010)

učitelé	žáci
informatika	informatika
tělesná výchova	tělesná výchova
výtvarná výchova	výtvarná výchova
pracovní výchova	rodinná výchova
rodinná výchova	pracovní výchova
občanská výchova	hudební výchova
zeměpis	dějepis
hudební výchova	angličtina
angličtina	občanská výchova
přírodověda	zeměpis
dějepis	přírodověda
fyzika	chemie
němčina	český jazyk
chemie	matematika
matematika	němčina
český jazyk	fyzika

Tab. 2: Obtížnost předmětů z pohledu žáků a učitelů (upraveno podle Hrabal, Pavelková 2010)

učitelé	žáci
matematika	matematika
chemie	český jazyk
němčina	fyzika
angličtina	chemie
český jazyk	němčina
fyzika	angličtina
přírodověda	přírodověda
dějepis	dějepis
zeměpis	zeměpis
informatika	občanská výchova
občanská výchova	informatika
pracovní výchova	tělesná výchova
tělesná výchova	pracovní výchova
výtvarná výchova	výtvarná výchova
hudební výchova	hudební výchova
rodinná výchova	rodinná výchova

Tab. 3: Význam předmětů z pohledu žáků i učitelů (upraveno podle Hrabal, Pavelková 2010)

učitelé	žáci
angličtina	angličtina
informatika	český jazyk
matematika	matematika
český jazyk	informatika
tělesná výchova	němčina
občanská výchova	dějepis
němčina	zeměpis
pracovní výchova	fyzika
přírodověda	přírodověda
výtvarná výchova	tělesná výchova
zeměpis	chemie
dějepis	občanská výchova
fyzika	rodinná výchova
chemie	pracovní výchova
rodinná výchova	výtvarná výchova
hudební výchova	hudební výchova

U žáků patří matematika mezi méně oblíbené předměty (průměr 2,47 – ani oblíbený ani neoblíbený, učitelé průměr 2,54), menší oblibu již má jen němčina a fyzika. Matematiku považují za nejobtížnější předmět (průměr 2,87 – což odpovídá střední obtížnosti, učitelé průměr 2,8), ale s vysokým významem (průměr 1,5, učitelé 2,12), jako významnější žáci vnímají již jen angličtinu a český jazyk. Srovnáme-li žákovský a učitelský pohled (zatím nejde o míru shody v percepci učitelů a jednotlivých žáků), tak vidíme shodu mezi odhadem učitelů a žáků v proměnné obliba a obtížnost. U proměnné význam, i když se význam matematiky z pohledu žáků i učitelů umístil

na stejném místě, je shoda daleko menší. Učitelé pravděpodobně podceňují žáky připisovaný význam matematice.

Obliba, obtížnost a význam předmětu patří mezi významné komponenty, jejichž ovlivněním lze docílit zvýšení efektivity vyučování. Zároveň jsou významným ukazatelem charakterizujícím vyučovací předmět a zpětnou vazbou pro učitele, umožňující jeho sebereflexi. Pro jejich hlubší porozumění je ale také třeba znát jejich vzájemné vztahy. Popis vazeb mezi jednotlivými postojovými komponentami čtenář nalezne Hrabal, Pavelková, 2010; Pavelková, Hrabal, 2012.

Posuny v postojích k matematice během II. stupně základní školy

U popisu posunů postojů k matematice na II. stupni využijeme vedle základních charakteristik (oblíba, obtížnost, význam) i dalších proměnných (odhad nadání pro matematiku, odhad motivace a píle). Výsledky přináší tab. 4. Oblíba matematiky je v osmém ročníku nejnižší, učitelé na rozdíl od žáků umisťují pokles oblíby již do sedmého ročníku. Obtížnost matematiky podle žáků i učitelů ve vyšších ročnících mírně stoupá. Význam podle žáků mírně stoupá, podle učitelů klesá, nejnižší připisovaný význam připisují žákům v sedmém ročníku. Nejlepší známky mají žáci šestých a devátých tříd. Podle učitelů výkon žáků ve vyšších třídách dosti výrazně klesá. V proměnné odhad nadání se učitelé a žáci shodují s výjimkou šestého ročníku. Motivace zůstává na druhém stupni v podstatě stejná, ale učitelé si myslí, že po šesté třídě výrazně klesá, obdobně u píle.

Tab. 4: Žákovské postoje a učitelova percepce žakovských postojů k matematice (průměrné hodnoty) – vývojové posuny během II. stupně základní školy)

	Žáci (6. až 9. roč.)	Učitelé (6. až 9. roč.)
Oblíba	2,4; 2,4; 2,6; 2,5	2,3; 2,7; 2,7; 2,5
Obtížnost	3,0; 2,9; 2,8; 2,8	3,0; 2,8; 2,6; 2,7
Význam	1,6; 1,5; 1,5; 1,4	1,9; 2,3; 2,1; 2,2
Známka	2,1; 2,2; 2,3; 2,1	2,1; 2,7; 2,8; 2,6 – výkon
Nadání	2,6; 2,7; 2,7; 2,7	2,2; 2,7; 2,7; 2,7
Motivace	2,3; 2,2; 2,3; 2,2	2,1; 2,7; 2,6; 2,6
Píle	2,5; 2,6; 2,6; 2,6	2,2; 2,9; 2,7; 2,7

Rozdíly mezi chlapci a dívkami ve vztahu k matematice

Výsledky přináší tabulka 5. Protože jsme pracovali s relativně rozsáhlým vzorkem, ukázala se statistická významnost již u malých rozdílů. Rozdíl průměrů mezi chlapci a dívkami většinou nepřekročil $\pm 0,20$, tedy čtvrtinu stupně na měrných škálách. Rozdíly mezi chlapci a dívkami v postoji k matematice tedy nejsou velké. Největší rozdíl je ve vnímaném nadání pro matematiku, chlapci se cítí nadanější než děvčata (rozdíl 0,27) a v motivaci v matematice – opět chlapci se cítí motivovanější pro matematiku (rozdíl 0,23). Je zajímavé, že v pili již významný rozdíl nebyl potvrzen (píle jako realizovaná motivace). Další rozdíly: chlapci mají matematiku oblíbenější (rozdíl průměrů 0,13), považují ji za snadnější (rozdíl 0,18) a mají lepší známky (rozdíl 0,19). Rozdíly v postojích chlapců a dívek k ostatním předmětům je možné najít ve stati Pavelkové (2005).

Tab. 5: Rozdíly v postoji k matematice u chlapců a dívek (Pavelková, Hrabal, 2012)

		<i>N</i>	Průměr	Rozdíl průměrů	Významnost
oblíba	chlapci	1 658	2,84	−0,13	**
	dívky	1 448	2,97		
obtížnost	chlapci	1 659	2,73	0,18	**
	dívky	1 446	2,55		
význam	chlapci	1 658	1,75	−0,08	*
	dívky	1 447	1,83		
známka	chlapci	1 646	2,55	0,19	**
	dívky	1 441	2,36		
nadání	chlapci	852	2,71	−0,27	**
	dívky	760	2,98		
motivace	chlapci	851	2,47	−0,23	**
	dívky	762	2,7		
píle	chlapci	850	2,71	0,09	
	dívky	759	2,62		

* = $p < 0,05$, ** = $p < 0,01$

Shoda a různost v názorech na matematiku

Pro práci učitelů v jednotlivých předmětech se ukazuje jako velmi důležitý ukazatel míra shody názorů žáků. Jiná situace nastává v předmětech, kde je míra shody u jednotlivých postojových charakteristik nízká, žáci si tedy v podstatě myslí to samé, a jiná práce čeká na učitele v situaci, kdy se názory žáků polarizují, například pro část žáků je předmět velmi oblíbený a pro část velmi neoblíbený.

Ukazatele homogenity (jak se žáci v názorech shodují) jsme sledovali jak z hlediska jednotlivých postojových charakteristik, tak z hlediska jednotlivých předmětů. Je však nutné si uvědomit, že míra homogenity může naznačovat skutečnou shodu názorů, ale může být také způsobena i složitostí percepčních a sebepercepčních zadání pro respondenty a být důsledkem jejich nerozhodnosti a tendencí více volit středové hodnoty. Pro posouzení míry homogenity jsme využili směrodatné odchylky. Komentovat budeme jen ty ukazatele, které se týkají matematiky. Vysokou míru homogenity nacházíme v názoru na vysoký význam matematiky (obdobně jako u angličtiny a českého jazyka). Nízká míra homogenity se ukázala v proměnné zájem o matematiku a všech ostatních motivačních proměnných (motivace, píle).

Problémy s žákovskou motivací v matematice

Systematické probrání všech problémů s motivací ve škole přesahuje možnosti této stati, čtenáře odkazujeme na publikace (Pavelková 2002, Hrabal, Pavelková 2010). Nyní vybereme jen dvě oblasti, které s motivačními problémy souvisí. První problematikou je tzv. vnímaná osobní zdatnost pro matematiku, druhou oblastí, pravděpodobně přeceňovanou, je nuda v hodinách matematiky.

Vnímaná osobní zdatnost (self efficacy) a matematika

Problematika vnímané osobní zdatnosti se ukazuje jako zvláště důležitá u předmětu matematika. Výsledky žáků v matematice jsou ovlivněny mnohými osobnostními charakteristikami –

schopnostmi žáka, jeho motivací, jeho sebepojetím atd. Hodnocení (posouzení sebe sama) svých schopností pro matematiku může žákovi pomoci, ale také snížit jeho výkon. Problematiku vnímané osobní zdatnosti¹ (self-efficacy) do psychologie vnesl Bandura 1997. Velmi blízko má tato problematika k příbuzným pojmům, jako je sebepojetí, sebeúcta, lokalizace rozhodujícího vlivu (locus of kontrol) atd. Mareš (in Wiegerová a kol., 2023, s. 20) pracovníě definuje vnímanou osobní zdatnost následovně: „Jde o žákovo přesvědčení o své zdatnosti učit se, plnit zadané úkoly na určité úrovni obtížnosti, a to v měnících se situacích učení a vyučování. Toto přesvědčení se zakládá na žákově subjektivním hodnocení vlastních schopností a dovedností, na jeho dosavadních znalostech a zkušenostech, na hodnocení svých osobních vlastností a výkonových možností, které převzal od druhých lidí, na pozorování a srovnávání, jak si v úkolových situacích vedou ostatní lidé, zejména jeho vrstevníci...“

Jak nadaní se tedy cítí žáci II. stupně základních škol pro matematiku? Výsledky přináší tabulka 4. Z průměrných hodnot vidíme, že se žáci v průměru cítí středně nadaní, nejvyšší důvěru mají ve své nadání pro matematiku žáci 6. ročníků. Zároveň jde o názor, na kterém se žáci poměrně shodují (SD 1,07).

Učitelé matematiky si také myslí, že žáci jsou pro matematiku v průměru středně nadaní, ale mají mírně pozitivnější názor než žáci samotní. Také si myslí, že v 6. ročníku je nadání žáků pro matematiku nejvyšší.

Rozpracovaný výzkum Pavelkové, Kmínkové – „zaujetí úkolem v matematice“ – sice naznačuje, že při zadávání konkrétních matematických úloh je vnímaná osobní zdatnost vyšší, přesto se domníváme, že učitelé matematiky by se na tuto problematiku měli více soustředit. Pro lepší orientaci uvádíme několik obecných poznámek o problematice self-efficacy.

Vnímanou osobní zdatnost žáků pro řešení matematických úloh můžeme vnímat jako motivační potenciál žáka, na němž mimo jiné záleží, kolik energie je schopný a ochotný matematickým úkolům věnovat. Předpokládá se, že čím je vyšší důvěra ve vlastní zdatnost („mistrovství“), tím více úsilí, vytrvalosti a houževnatosti žák vyvine. Učitelé často mohou pozorovat rozdílné chování žáků v situaci, když se vyskytne nějaká překážka (například se nedaří vypočítat úkol). Někteří žáci se snaží překážku překonat, mají tendenci se s ní „poprat“, překážku berou jako výzvu. Jiní žáci při sebemenším problému (překážce) práci vzdávají a od práce odcházejí či sníží zaujetí a můžeme u nich pozorovat určitou nechuť pokračovat. I toto chování mívá spojitost s vnímanou osobní zdatností.

Shrneme-li dosavadní výzkumná zjištění (Wiegerová a kol., 2012), tak vnímaná osobní zdatnost ovlivňuje u člověka rozhodování, o tom co a jak bude dělat, zvyšuje využití schopností člověka – využití jeho potencialit, a – jak jsme již naznačili – vytrvalost, volbu postupů, vyrovnávání se s překážkami, zvyšuje zaujetí (nasazení) při práci. Je však nutné zdůraznit, že vnímaná osobní zdatnost je přesvědčení jedince a ne jeho skutečná zdatnost, nejde ani o jeho náhled na momentální zdatnost pracovat na úkolu. Jde spíše o dlouhodobější přesvědčení (víru) ve své schopnosti a svou „sílu“. Vnímaná osobní zdatnost funguje většinou na ne zcela uvědomované úrovni, žák si jí nemusí uvědomovat, jde o poměrně pevnou a stálou charakteristiku.

Samozřejmě by bylo chybou, kdybychom posilovali jen sebevědomí žáků bez opory v rozvoji žakovských dovedností. Vytvoření „sebevědomých hlupáků“ opravdu není cestou. Zvýšení realistického vědomí osobní zdatnosti pravděpodobně dosáhneme na základě adekvátní interpretace úspěchů a neúspěchů žáka (atribuční strategie s důrazem na vnitřní ovlivnitelné příčiny), diferencované práce s úkoly přiměřené obtížnosti, adekvátní práce se vztahovými normami (využití všech tří vztahových norem – kriteriální, sociální a individuální vztahová norma), pracovní atmosféry při hodinách a předcházením vyhýbavým žakovským strategiím.

¹Termín self-efficacy se nepřikládá do češtiny jednoduše. V textu užíváme termín „vnímaná osobní zdatnost“ (srov. diskusi v knize: Wiegerová a kol.: Self-efficacy v edukačních souvislostech).

Nuda v matematice

V současné době je prožitek nudy bez hlubší analýzy se školou poměrně často spojován. Pokusme se fenomén nudy tedy alespoň stručně přiblížit, podrobnější rozpravu najde čtenář například ve statí Nuda ve škole (Pavelková 2010). Položme si nejdříve otázku: Co nuda vlastně je? Nuda je chápána jako negativní jev snižující žákovskou motivaci a výkonnost. Jde o psychofyzický stav a má tyto komponenty: **afektivní**: prožíváme prázdnotu – schází afektivní pohnutka (nemáme z čeho mít radost, nemáme se čeho bát); **kognitivní**: denní snění, „myšlenky nám ulítávají“; **fyzilogická**: únava, ospalost, neklid; **expersivní**: zívání, nehnutý „prázdný výraz“; **motivační**: hledání aktivity, opuštění situace. Rozlišujeme dvě formy nudy (Lohrmann 2008):

- **Situační nuda** – má konkrétní příčinu – člověk se nachází v nepodnětné situaci (čekání na vlak, schůze).
- **Existenciální nuda** – nemusí mít konkrétní důvod – problém není v situaci, ale v člověku (fenomenologové hovoří o „duševní prázdnotě“).

Jak často se žáci ve škole nudí. A nudí se žáci v matematice více či méně než v ostatních předmětech? Z žákovských odpovědí vyplývá (Pavelková 2010), že nudu ve škole žáci někdy zažívají, ale zdaleka to není u většiny předmětů častý jev. U osmi předmětů průměrná hodnota výskytu nudy nepřekračuje hodnotu 2,5, což by naznačovalo, že nudu žáci spíše nezažívají. Nudí se žáci v matematice? Nudí se děvčata v matematice více než chlapci? I v matematice se žáci spíše nenudí (průměr 2,29; SD 1,09) – páté místo s nejmenší nudou, lépe jsou na tom již jen informatika, přírodověda, rodinná výchova a tělesná výchova. Výsledky o četnosti výskytu nudy v matematice přináší tabulka 6. Chlapci, obdobně jako u většiny předmětů, se v matematice nudí častěji.

Tab. 6: Četnost výskytu nudy v matematice na II. stupni základní školy (upraveno podle Pavelková 2010)

	chlapci		dívky	
	průměr	směrodatná odchylka	průměr	směrodatná odchylka
matematika	2,46	1,10	2,16	1,06

$N = 215$

Legenda – posuzovací škála: nudu v předmětu: 1 nikdy nezažívám; 2 spíše nezažívám; 3 někdy zažívám; 4 často zažívám; 5 zažívám skoro pořád.

Kdo se ve škole nudí? Ta samá hodina (situace) může být pro někoho podnětná, pro jiné nezájímavá (frustrující). Do nudy mohou upadat dobří žáci, kteří látku již znají, ale častěji se nudí slabší žáci. S jistou opatrností můžeme říci, že neexistuje u žáků shoda názorů v tom, co je nudné a co ne. Na pestrost výskytu nudy v matematice ukazuje i tabulka 7.

Tab. 7: Frekvenční tabulka zážitků nudy v matematice – 6. ročník (upraveno podle Pavelková 2010)

Nudu	nikdy nezažívám	spíše nezažívám	někdy zažívám	často zažívám	zažívám skoro pořád
matematika	13	19	12	14	4

$N62$

Můžeme si položit také otázku: Kdo za nudu může? Odpověď není jednoduchá, protože vznik nudy závisí **na situaci i na člověku**. Pro školu to znamená, že za nudu pravděpodobně může jak učitel, tak žák. Rozlišujeme dva zdroje nudy ve škole:

- Prožívaná monotónnost (jednotvárnost) vyuč. hodin (zodpovědnost spíše učitele).
- Neschopnost najít subjektivní smysl v prováděné činnosti (zodpovědnost spíše žáka).

Problémem nudy ve škole velmi pravděpodobně není frekvence jejího výskytu – ta není velká, nýbrž posun u dnešní mládeže v názoru, kdo za nudu může. Z rozhovorů s lidmi různého věku vyplynulo, že lidé starší generace (především lidé starší šedesáti let) se sice také někdy ve škole nudili, ale to, že se nudili, dávali za vinu sobě, na rozdíl od dnešních žáků a studentů, kteří mají daleko silnější tendenci zdroj nudy lokalizovat vně své osoby. Za nudu ve škole podle nich může především učitel, často se vyskytoval názor, že jeho „povinností“ je žáky zaujmout a především bavit. Tento posun se promítá i do reakcí na nudu. Rozlišujeme tyto reakce na nudu:

- „**Stažení se do sebe**“ – žák „generuje“ vlastní vnitřní stimulaci (sní, fantazijní aktivita).
- **Agresivní chování** – vůči učiteli, spolužákům, předmětům.
- **Rozptýlená aktivita** – hraní si, povídání se sousedem.

Agresivní reakce studentů bývá obrácena právě vůči učiteli jako údajnému zdroji nudy. Nemusí jít o zjevné projevy nekázně, rušení a rozbíjení hodiny. Rozkladný dopad mají i zastřené strategie žáků, které v prvním plánu vypadají pozitivně: stále (i když rozumím) říkám, že nerozumím látce (přece chceme, aby žáci řekli, když nerozumí); stále kladu nějaké otázky (opět přeci chceme, aby se žáci ptali); dělám, že se nudím (i když se nenudím). Všechny tři zmíněné strategie mohou výrazně narušit práci v hodině. Za zvláště rafinované je nutno považovat předstírání nudy, zvláště když platí, že nuda žáků je jedním z nejsilnějších zdrojů frustrace učitele.

Závěr

Ve statí jsme představili některé vybrané charakteristiky matematiky jako předmětu. Zajímají-li učitele matematiky možnosti a nástroje sebereflexe, kterými by se učitel sám zorientoval v oblasti svého pojetí výuky, svého pojetí úspěšného žáka, či zjistil, jak dobrý je diagnostik motivačních zdrojů svých žáků, doporučujeme prostudování knihy Jaký jsem učitel (Hrabal, Pavelková 2010). Objektivní, autodiagnosticky fundovaná sebereflexe dává učiteli matematiky větší sebejistotu v jeho výchovně-vzdělávací práci se žáky a pozitivně ovlivňuje jeho vnímanou osobní zdatnost (self-efficacy).

Poděkování

Článek byl vypracován v rámci projektu GA ČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

Literatura

- [1] BANDURA, A. *Self-self-efficacy, The Exercise of Control*. New York : W. H. Freeman and Comp., 1997.
- [2] HRABAL, V. (st.), HRABAL, V. (ml.). *Diagnostika*. Praha : Karolinum, 2002.

- [3] HRABAL, V., PAVELKOVÁ, I. *Jaký jsem učitel*. Praha : Portál, 2010.
- [4] LOHRMANN, K. Langeweile im Unterricht. *Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie*, Münster : Waxmann, 2008.
- [5] MOSCOVICI, S. On social representations. In Forgas, J. P. (ed.). *Social cognition: Perspectives on everyday understanding*. London : Academic Press, 1981.
- [6] PAVELKOVÁ, I. *Motivace žáků k učení. Perspektivní motivace žáků a časový faktor v žákovské motivaci*. Praha : PedF UK, 2002.
- [7] PAVELKOVÁ, I. Nuda ve škole. In Krykorková, H., Váňová, R. *Učitel v současné škole*. Praha : Karolinum, 2010, s. 219–233.
- [8] PAVELKOVÁ, I., ŠKALOUDOVÁ, A., HRABAL, V. Analýza vyučovacích předmětů na základě výpovědí žáků. *Pedagogika*, 2010, roč. LX, č. 1, s. 38–61.

JEDNÁNÍ V SEKČÍCH

KOMÁR, MOUCHA A VOSA ANEB JEDNA TESTOVÁ ÚLOHA TYPU ZEBRA JAKO ÚVOD K ZAMYŠLENÍ O TESTOVÁNÍ VŮBEC

Alice Bílá

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
alicebila@seznam.cz

Úvod

Úloha, kterou dále prezentujeme, byla vytvořena firmou Scio a zadána při přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia v r. 2010. Byla též použita při srovnávacích zkouškách v zimě 2011, tedy v testech, které mohou mít zásadní důležitost pro budoucí orientaci dítěte. V tomto typu testů dítě vybírá právě jednu z několika nabízených odpovědí a za nesprávnou odpověď jistou část bodů ztrácí. Úloha byla zařazena v testech obecně studijních předpokladů (OSP) pro 5. třídu do oddílu analytické myšlení. Protože jde o úlohu – zebra, která tradičně patří do oblasti (rekreační) matematiky, věnujeme jí pozornost zde.

Znění úlohy

Komár, moucha a vosa soutěžili o titul *Obtížný hmyz*. Utkali se ve třech disciplínách:

- o co nejrychlejší let okolo ložnice,
- o co nejhlasitější bzučení,
- o co nejbolestivější štípanec.

Každý soutěžící se umístil jednou první, jednou druhý a jednou třetí.

Víme, že:

- moucha obletěla ložnici rychleji než vosa,
- vosa bzučela hlasitěji než komár,
- štípanec mouchy byl bolestivější než štípanec komára.

Jak už to u takovýchto úloh v testech Scio bývá, k jednomu úvodnímu textu je přivěšeno více úloh. Následovaly tedy takovéto úlohy:

1. **V jakém pořadí se umístili soutěžící v soutěži o nejbolestivější štípanec (od prvního místa ke třetímu)?**
 - a) moucha, komár, vosa
 - b) moucha, vosa, komár
 - c) vosa, komár, moucha

- d) komár, vosa, moucha
- e) komár, moucha, vosa

2. Na kterém místě se mohl umístit v letu okolo ložnice komár?

- a) jen na prvním
- b) jen na druhém
- c) jen na třetím
- d) jen na kterémkoliv z dvojice druhé, třetí
- e) na kterémkoli z trojice první, druhé, třetí

3. Kdo mohl být poslední v letu okolo ložnice?

- a) jen komár
- b) jen vosa
- c) jen moucha
- d) kdokoli z dvojice komár, vosa
- e) kdokoli z dvojice vosa, moucha

4. Na kterém místě se mohla umístit v bzučení moucha?

- a) jen na prvním
- b) jen na druhém
- c) jen na třetím
- d) na kterémkoli z dvojice druhé, třetí
- e) na kterémkoli z dvojice první, druhé

5. Na kterém místě se mohla umístit vosa v soutěži o nejbolestivější štípanec?

- a) jen na druhém
- b) jen na třetím
- c) jen na kterémkoli z dvojice druhé, třetí
- d) jen na kterémkoli z dvojice první, druhé
- e) na kterémkoli z trojice první, druhé, třetí

(Scio, přijímací zkoušky 2010 (OSP, 5. třída) a srovnávací zkoušky zima 2011 (OSP, 5. třída))

První komentář k úloze

Úloha vypadá hezky, je to netradiční zebra. V běžných sbírkách zeber a učebnicích bychom obdobnou těžko hledali. Má hezký matematicko-analytický charakter, což poznáme, když ji budeme řešit. Umožňuje vícero způsobů řešení.

Výsledek a řešení úlohy

Pro řešení úlohy nepotřebujeme nabídku odpovědí. Můžeme řešit např. postupným vpisováním informací z textu do následujícího schématu:

.	M	.	V	.	let
.	V	.	K	.	bzukot
.	M	.	K	.	bolest

Protože komár není na prvním místě v bzukotu ani bolesti, musí být na prvním místě v letu. Pak už doplňujeme tabulku postupným škrtnutím teček (x) a dopisováním údajů (K,M,V).

Vychází tedy následující pořadí v jednotlivých disciplínách:

K	M	x	V	X	let
x	V	x	K	M	bzukot
x	M	V	K	X	bolest

Jiné způsoby řešení budou diskutovány při prezentaci.

Druhý komentář k úloze

Úloha se zdá milá tím, že v ní vystupují netradiční hrdinové. Po vyřešení však v mé hlavě vzniká rozpor: z údajů v úloze vychází, že moucha bodá více než vosy. V reálném životě je to naopak, moucha (myslíme běžnou mouchu, např. mouchu domácí) nebodá vůbec a vosy je z pochopitelných důvodů řazena mezi jedovaté živočichy. I kdyby byla myšlena např. muchnička či ovád, těžko mi uznat byt v pohádce výsledné pořadí. Kdybych naopak řešila úlohu s dětmi ve třídě, vedla bych děti k uvědomění si rozporu mezi skutečností a pohádkovou situací úlohy. Může výsledek úlohy demotivovat např. přírodovědně orientované či přemýšlivé děti? Je úloha navíc obtížná pouze pro některé děti v tom, že vyžaduje „přepínat“ mezi modelem pohádky a modelem reality? Bude-li dítě o otázce přemýšlet a uvědomí si, že v reálném světě je to jinak, bude při řešení testu znevýhodněno?

Ve školní matematice často děti vedeme k tomu, že matematický model neodpovídá skutečnosti. Vyjde-li dětem např. že do kina půjde 7,3 žáka, chceme, aby usoudily, že takto zadaná úloha nemá řešení, přeformulovaly znění úlohy, zamyslely se nad tím, proč vzniká takovýto nesmyslný výsledek apod. Zde je naopak žádáno přijmout netypický pohádkový výsledek.

Pochopitelně, kdyby úloha byla sestavena podle skutečnosti, je příliš napovídající. Tento rozpor v úloze by šel snadno řešit tím, že by v úloze vystupovali tři hrdinové různých jmen apod.

Další problematikou stránku vidím v pokynu k úloze „každou úlohu řešte nezávisle na ostatních“. Co když to ale dítě neudělá? Např. z úlohy „V jakém... o nejbolestivější štípanec“ lze jednoduše z nabídky odpovědí usoudit, že moucha bude první v bolesti. Ale co když mu tato informace pomůže v řešení dalších úloh? Dítě, které nedodrží pokyn, může být zvýhodněno (otázkou je, zda jedná nemorálně). Každopádně autor testu nemá šanci ověřit dodržení pokynu.

Jaké chceme testování

Výše jsme ukázali několik málo úskalí, která se mohou v testech vyskytnout. Dalším bude věnován prostor v diskusi při vystoupení. Otázkou ale je, jak nezáměrná úskalí testových úloh zasahují do osobního života např. nadprůměrně nadaného jednotlivce vybočujícího z běžného rámce respondentů, vyskytují-li se obdobná úskalí v testech mají velkou důležitost pro jednotlivce (přijímací zkoušky, maturita atd.) či jen často při používání testů v běžné výuce. Máme (případně jak) připravovat nejen nestandardní dítě na setkání s testy?

V našich zemích je dosud testování spojeno se značnou nedůvěrou (viz např. maturitní zkouška) jež pramení nejen z omezených možností testování jako takového. Případná další témata související s nově probíhajícím plošným testováním nechávám k diskusi.

Literatura a další zdroje

- [1] Scio – test, přijímací zkoušky 2010 (test OSP, 5.třída)
- [2] <http://vimeo.com/18058920>
- [3] <http://www.ceskaskola.cz/2012/01/vystup-z-lednoveho-kulateho-stolu-skav.html>

ONLINE DOMÁCE ÚLOHY V PRAXI

Zoltán Fehér

Ekonomická Fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne
feherz@ujss.sk

Úvod

Domáce úlohy sú tradične dôležitou súčasťou vyučovania matematiky. Využívame ich na precvičenie učiva, motivujeme žiakov pre samostatnú prácu, pre nadaných žiakov náročnejšie úlohy dávajú možnosť na rozšírenie ich vedomostí. Z hľadiska učiteľa je práca s domácimi úlohami často časovo náročná, vyžaduje prípravu úloh, ich vyhodnotenie aj ďalšiu administráciu. Na druhej strane, žiaci by chceli hneď vedieť či úlohy riešili správne, či dobre porozumeli príklad, preto im nevyhovuje čakanie na vyhodnotenie. Väčšinou vyhodnotenie úloh prebieha na vyučovacej hodine, keď učiteľ z časových dôvodov často ani nemá možnosť overiť správnosť riešenia každého žiaka.

Rozvojom IKT sledujeme aj rôzne možnosti ich využitia vo vyučovacom procese. IKT dnes sa už uplatní v rôznych fázach pedagogickej práce, každý pedagóg sa snaží využiť jeho výhody. Realizácia domácich úloh v elektronickej forme je ďalší spôsob využitia moderných technológií, ktoré prinášajú nové možnosti práce so žiakmi. Online domáce úlohy ponúkajú také možnosti, ktoré majú svoje výhody v porovnaní s tradičnými domácimi úlohami a prispievajú k zvýšeniu efektívnosti vyučovania.

Online Homework Systems (OHS)

Pre prácu s domácimi úlohami v elektronickej forme dnes už existuje viac produktov, ktoré vyhovujú požiadavkám učiteľov aj študentov. Tieto softvéry pre realizáciu online domácich úloh spĺňajú nasledovné všeobecné vlastnosti:

- Online dostupnosť – učiteľ aj študent môže pracovať so systémom na počítači (prípadne smartfón, tablet) s internetovým prístupom bez časového obmedzenia.
- Vyhodnotenie – online vyhodnotenie správnosti výsledku úlohy dáva možnosť okamžitej spätnej väzby (feedback) pre študenta. Systém vyhodnotí úlohy jednotlivo aj celkovo, na základe vyhodnotenia môže učiteľ udeliť bodové hodnotenie.
- Individualizácia – systém vygeneruje každému študentovi vlastnú verziu úlohy pomocou parametrizácie úloh.
- Viac pokusov – v prípade nesprávneho výsledku študent má ďalšie pokusy na opravu svojej odpovede.

Všetky uvedené základné vlastnosti môžeme považovať za výhody OHS v porovnaní s tradičnými domácimi úlohami. Samozrejme aj OHS majú svoje nevýhody, ktoré v ďalšej časti článku opíšeme. Tieto systémy sú už v Spojených štátoch veľmi rozšírené, používajú ich tisíceky

stredných aj vysokých škôl. Na vyšetrenie súvislostí používania OHS vo vyučovaní matematiky a zlepšenia výsledkov žiakov aj zvýšenia efektivity vyučovania vznikajú rôzne články a štúdie (pozri napr. [1]), ktoré sa snažia poukázať na prospešné aj neprospešné vlastnosti OHS. Naše skúsenosti s používaním OHS WeBWorK sme predstavili v článku [2].

Pri výbere vhodného softvéru pre uskutočnenie domácich úloh z matematiky podľa našich požiadaviek môžeme zohľadniť ďalšie charakteristiky týchto produktov, ktoré sú hlavne veľkosť a kvalita ich databázy, jednoduchosť ovládania a práce so systémom, technické požiadavky a v nekonečnom rade aj ich cena. Niektoré najpoužívanejšie a najrozšírenejšie OHS (hlavne v USA) sú MyMathLab, WebAssign, WeBWorK, Maple T. A., MathXL alebo ALEKS. Z nich jediný bezplatný systém je WeBWorK, ostatné vyžadujú poplatok. Poznamenajme, že OHS nie je e-learningový systém, slúži len na precvičenie učiva formou domácich úloh a väčšinou učebný materiál nie je jeho súčasťou.

Práca s WeBWorK-om na EF UJS

WeBWorK je interaktívny systém na sprístupnenie individualizovaných domácich úloh z matematiky prostredníctvom internetu. Systém WeBWorK vytvorili a vyvíjali od roku 1995 profesori Arnold Pizer a Michael Gage z katedry matematiky University of Rochester. Podrobné informácie sú dostupné na hlavnej stránke <http://webwork.maa.org>.

WeBWorK je rozšírený hlavne na vysokých školách a univerzitách, ale aj na niektorých typoch stredných škôl, celosvetovo na viac ako 550 inštitúciách. Medzi nimi patrí aj naša Univerzita J. Selyeho v Komárne, kde sme používanie systému zaviedli na katedre matematiky a informatiky v školskom roku 2008/2009. Hlavné didaktické ciele zavedenia online domácich úloh do vyučovania matematických predmetov boli podnecovať aktívny prístup k štúdiu, ponúkať študentom úlohy na precvičenie učiva zo seminárov a podporiť ich pravidelnú samostatnú prácu. V školskom roku 2012/2013 už študenti EF majú možnosť vypracovať domáce úlohy prostredníctvom WeBWorK-u z piatich matematických predmetov v 1. a 2. ročníku bakalárskeho štúdia. V systéme pracuje pravidelne cca. 300 používateľov.

WeBWorK je založený na databáze úloh, zoradených podľa tematických celkov. Databáza sa stále rozširuje, súčasne obsahuje viac ako 25 000 úloh. Úlohy sú vhodné pre rôzne matematické kurzy ako algebra, matematická analýza ale najnovšie aj kurzy z pravdepodobnosti, štatistiky. Úlohy môžeme ľubovoľne editovať, preložiť a prispôbiť našim požiadavkám. Ak sme vytvorili a zaviedli online domáce úlohy do vyučovania nášho predmetu, potom v nasledujúcich rokoch môžeme pracovať so systémom s minimálnou časovou náročnosťou potrebnou na prípravu úloh. Práca učiteľa pozostáva väčšinou z administrácie zoznamu študentov a s vyhodnotením ich výsledkov. Tieto činnosti sú jednoducho zrealizovateľné príkazmi v hlavnom menu. WeBWorK umožní vytvoriť rôzne typy úloh ako jednoduché úlohy na výpočet (algebraické, aritmetické), úlohy s výberom odpovede, úlohy doplnené tabuľkou, grafom, obrázkom. Okrem domácich úloh je možné využitie systému aj pre testovanie študentov, pre prijímacie skúšky alebo využiť ako online zbierku úloh.

WeBWorK: výhody/nevýhody

Hlavné výhody WeBWorK-u vyplývajú z toho, že používanie systému a celková realizácia prebieha elektronicky a online. To prináša veľa nových možností prípravy úloh pre študentov. Ale na druhej strane tie isté vlastnosti môžu byť z didaktického hľadiska aj neprospešné.

Hlavné výhody sú:

- okamžitá spätná väzba,
- individualizácia úloh,
- prehľad žiaka o svojom postupe,
- práca s väčším počtom žiakov,
- používanie obrázkov,
- podpora samostatnej práce,
- učenie sa pomocou technológií.

Najdôležitejšia vlastnosť je okamžitá spätná väzba, ktorá umožňuje študentovi presvedčiť sa o správnosti výsledku, a keď výsledok nie je správny má ďalšie možnosti na jeho opravu. Týmto podporujeme aj samostatný aktívny prístup študenta k riešeniu problémov, lebo v týchto prípadoch musí nájsť a odstrániť chybu vo svojom riešení. K tomu často potrebuje nielen prepočítať úlohu, ale najprv preštudovať teóriu a vzorové príklady. Systém potvrdzuje len správnosť konečného výsledku a v prípade nesprávnej odpovede študent ani jeho učiteľ nemá informácie o tom, kde urobil chybu. Z didaktického hľadiska je to nevýhoda týchto systémov, chýba spätná väzba pre učiteľa. To je zrejme hlavný dôvod, prečo tieto systémy sa využívajú najmä na VŠ, kde očakávame od študentov väčšiu mieru samostatnosti v práci. Ďalší moderný prvok online domácich úloh je práca s multimediálnym obsahom, WeBWorK umožňuje vygenerovať obrázky k úlohám alebo vložiť pripravené obrázky. Týmto spôsobom môžeme doplniť úlohy grafom funkcie, diagramom, množinami, geometrickými prvkami, ale aj ľubovoľným obrázkom. Pritom aj tieto obrázky je možné individualizovať v súlade so zadaním úlohy.

Hlavné nevýhody sú:

- hodnotenie len konečného výsledku,
- možnosť tipovania výsledku,
- riešenie metódou pokus-omyl,
- možnosť zneužitia prihlásenia,
- nedá sa kontrolovať samostatnosť,
- technické problémy.

Okrem chýbajúcej spätnej väzby o postupe riešenia, ďalšie nevýhody súvisia s tým, že študent má viac pokusov na zadanie výsledku. Preto u niektorých typoch úloh (napr. úlohy s výberom odpovede) nemá motiváciu riešiť zadanie. Online prístup zasa umožní zneužitie prihlásenia.

Záver

Zavedenie systému WeBWorK do vyučovania matematiky splnilo naše očakávania a ciele. Každý rok sa do riešenia úloh zapojí väčšina študentov, keďže táto forma práce je pre nich výhodná aj motivujúca. Skúsenosti ukazujú, že v pravidelnosti práce a v úspešnosti riešenia už sú značné rozdiely medzi študentmi. Nakoniec zdôrazňujeme, že úspešná implementácia IKT do vyučovania vždy závisí od daných podmienok, teda ako vieme využiť možnosti, ktoré nám poskytujú, pritom treba zohľadniť z didaktického hľadiska výhodné aj nevýhodné vlastnosti.

Poděkování

Príspevok vznikol v rámci projektu MŠVVaŠ SR KEGA 001UJS-4/2011.

Literatúra

- [1] MALEVICH, K. *The Accuracy and Validity of Online Homework Systems* [online]. Dostupné z http://www.d.umn.edu/math/Technical%20Reports/Technical%20Reports%202007-/TR%202011/TR_2011_2.pdf [cit. 2013-01-13]
- [2] FEHÉR, Z. Nové možnosti motivácie – skúsenosti s používaním systému WeBWorK. In *Acta Mathematica 14*. UKF Nitra (2011), s. 83–89. ISBN 978-80-8094-958-7.
- [3] <http://webwork.maa.org>

GPS PRIJÍMAČE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA ZŠ

Štefan Gubo

Ekonomická fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne
guboi@ujv.sk

1 Úvod

Aby mohli GPS prijímače poskytovať údaje o zemepisnej pozícii používateľa, potrebujú priamu viditeľnosť na oblohu (Hegarty, Kaplan, Kaplan, 2006). Práve preto ich možno vo vyučovacom procese používať len v rámci terénnych aktivít. V tomto príspevku uvádzame výsledky jednej aktivity, cieľom ktorej bolo zistiť, s akou úspešnosťou riešia žiaci ZŠ meracie úlohy pomocou GPS prijímača.

2 Popis aktivity

Aktivitu sme uskutočnili na dvoch základných školách v Maďarskej republike. Do nej sa zapojili žiaci 7. ročníka Základnej školy Józsefa Eötvösa v Baji (11 žiakov) a Kresťanskej materskej školy, základnej školy a gymnázia Mustármag v Budapešti (9 žiakov).

Mesto Baja leží v južnej časti Maďarskej republiky pri rieke Dunaj. Základná škola Józsefa Eötvösa sa nachádza neďaleko železničnej stanice pri rozsiahlom parku (obr. 1), teda podmienky pre našu aktivitu boli veľmi priaznivé. Kresťanská materská škola, základná škola a gymnázium Mustármag sa nachádza v severnej časti Budapešti. V tomto prípade sme aktivitu uskutočnili na nádvorí školy (obr. 2).



Obr. 1: Okolie ZŠ J. Eötvösa v Baji (Google Satellite Map)



Obr. 2: Okolie MŠ, ZŠ a Gym. Mustármag v Budapešti (Google Satellite Map)

Aktivita pozostávala z teoretickej a praktickej časti. Teoretická časť sa uskutočnila v triede a trvala 45 minút (1 vyučovacia hodina). V rámci tejto časti sme najprv zopakovali niektoré základné poznatky (*mierka mapy, zemepisná šírka a dĺžka*), potom sme vysvetlili základný princíp

systemu GPS a ukázali základné funkcie GPS prijímača Garmin Oregon (*satelitná stránka, mapová stránka, stránka kompas, stránka výškomera, vytváranie, editovanie a vymazanie trasového bodu, navigácia do cieľa*).

Praktická časť sa uskutočnila v teréne. Žiakov sme rozdelili do 3–4 členných skupín, kde každá skupina dostala jeden GPS prijímač. Žiaci najprv robili jednoduchšie úlohy – určili svetové strany pomocou elektronického kompasu, nadmorskú výšku pomocou barometrického výškomeru a zemepisné súradnice vopred daného miesta. Potom dostali za úlohu odmerať vzdialenosť medzi dvoma danými miestami, vypočítať obvod a plošný obsah lokality (parku resp. nádvoria školy). V závere aktivity mali možnosť hrať hru geocaching – t.j. hľadať skryté krabice rôznej veľkosti.

3 Výsledky

Žiaci výpočty vykonávali na pracovnom hárku, ktorý sme zostavili práve pre túto aktivitu. V nasledujúcej časti príspevku uvádzame výsledky jednotlivých skupín pri vypočítaní obvodu a plošného obsahu danej lokality.

Úloha (ZŠ J. Eötvösa v Baji): *Pomocou GPS prijímača odmerajte rozmery parku a vypočítajte jeho obvod a plošný obsah!*

Riešenie: dĺžka parku na mape je 179 m, šírka parku na mape je 81 m, obvod 520 m, plošný obsah 14 499 m²

Tab. 1: Výsledky žiakov ZŠ J. Eötvösa v Baji

	dĺžka (m)	šírka (m)	obvod (m)	obsah (m ²)
1. skupina	178	78	512	13 884
2. skupina	181	80	522	14 480
3. skupina	178	71	498	12 638
4. skupina	175	83	516	14 525

Z tab. 1 vidno, že žiaci 1., 2. a 4. skupiny úspešne vykonali meráciu úlohu. Odmerané vzdialenosti možno pokladať za presné, nakoľko presnosť GPS prijímača v 95 % prípadoch pohybuje medzi 3–8,5 m (El-Rabbany, 2002). Žiaci 3. skupiny odmerali šírku parku s nižšou presnosťou.

Úloha (MŠ, ZŠ a Gym. Mustármag v Budapešti): *Pomocou GPS prijímača odmerajte rozmery nádvoria školy a vypočítajte jeho obvod a plošný obsah!*

Riešenie: dĺžka nádvoria na mape je 42 m, šírka nádvoria na mape je 22 m, obvod 128 m, plošný obsah 924 m²

Tab. 2: Výsledky žiakov MŠ, ZŠ a Gym. Mustármag v Budapešti

	dĺžka (m)	šírka (m)	obvod (m)	obsah (m ²)
1. skupina	43	16	124*	688
2. skupina	45	22	522	990
3. skupina	48	23	498	1 104

Z tab. 2 vyplýva, že každá skupina úspešne vykonala meráciu úlohu. Najvyššiu presnosť dosiahli žiaci 2. skupiny. Žiaci 1. skupiny urobili chybu v počítaní obvodu nádvoria (*).

V závere aktivity sme poprosili žiakov, aby na pracovnom hárku uviedli, čo bolo pre nich najviac a najmenej zaujímavé. Percentuálne rozdelenie žiackych odpovedí sme zhrnuli v tab. 3 a 4.

Tab. 3: Percentuálne rozdelenie žiackych odpovedí na otázku *Čo bolo dnes pre vás najviac zaujímavé?*

Škola	hra geocaching	nájdenie veľkej krabice	všetko
ZŠ J. Eötvösa, Baja	70 %	20 %	10 %
MŠ, ZŠ a Gym. Mustármag, Budapešť	100 %	0 %	0 %

Tab. 4: Percentuálne rozdelenie žiackych odpovedí na otázku *Čo bolo dnes pre vás najmenej zaujímavé?*

Škola	bolo treba veľa písať a počítať	bolo treba veľa chodiť	nebolo také
ZŠ J. Eötvösa, Baja	10 %	10 %	80 %
MŠ, ZŠ a Gym. Mustármag, Budapešť	45 %	0 %	55 %

Z tabuliek vyplýva, že žiakom sa najviac páčila hra geocaching, ktorá predstavuje určitý druh navigačnej hry, kde princíp spočíva v hľadaní ukrytých krabičiek (angl. cache). Kešku zvyčajne tvorí vodotesná nádoba a v nej ceruzka, zápisník a rôzne predmety, ktoré si hľadači môžu vymieňať. Po nájdení kešky zaznačí hľadač do zápisníka dátum aj čas a krabičku uloží do pôvodného stavu.

4 Záver – vyhodnotenie aktivít

Na základe získaných výsledkov môžeme konštatovať, že všetky úlohy vytýčené v rámci aktivít boli splnené. Žiaci boli počas celej aktivity veľmi motivovaní, rýchlo sa naučili ovládať GPS prijímač a šikovne vykonali meracie úlohy.

Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou KEGA Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR pre projekt č. 004UJS-4/2011, a grantu Domus Hungarica Maďarskej akadémie vied.

Použitá literatúra

- [1] EL-RABBANY, A. *Introduction the GPS — The Global Positioning System*. Boston, MA : Artech House, Inc., 2002. ISBN 1-58053-183-0.
- [2] HEGARTY, CH., KAPLAN, C. J., KAPLAN, E. D. *Understanding GPS: principles and applications*. Boston, MA : Artech House, Inc., 2006. ISBN 1-58053-894-0.
- [3] *Garmin – séria OregonTM*. Uživatelská príručka. Olathe, KS : Garmin International, Inc., 2008.

UČEBNÉ MATERIÁLY PRE CLIL MOTIVOVANÉ AUSTRÁLSKYMÍ UČEBNICAMI MATEMATIKY

Daniela Guffová

Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici
daniela.guffova@umb.sk

1 Úvod

Jednou z prekážok uplatňovania metódy CLIL (Content and Language Integrated Learning) v rámci vyučovacieho procesu je nedostatok vhodného didaktického materiálu. Naším cieľom bolo preto vytvoriť podporné učebné materiály, ktoré by uľahčili zavedenie metódy CLIL v rámci vyučovania matematiky v šiestom ročníku na 2. stupni základných škôl a v prvom ročníku gymnázií s osemročným štúdiom. Pri tvorbe učebných a výučbových materiálov sme sa inšpirovali austrálskymi učebnicami matematiky, ktoré sme prispôbili slovenským podmienkam.

2 Inšpirácia z Austrálie

V roku 2004 bolo v Austrálii založené *Medzinárodné centrum excelencie pre vzdelávanie v matematike* (ICE-EM) [4]. O štyri roky neskôr bola vydaná *Deklarácia vzdelávacích cieľov pre mladých Austrálčanov* (Melbourne Declaration on Educational Goals for Young Australians [3]), na základe ktorej sa začala tvorba nového austrálskeho kurikula. V prvej fáze (2008–2010) bolo vytvorené nové kurikulum pre anglický jazyk, matematiku, históriu a prírodné vedy pre primárne a nižšie sekundárne vzdelávanie (Foundation – Year 10).

ICE-EM zareagovalo na tento trend a v rozmedzí rokov 2009–2011 realizovalo projekt *Zlepšenie výučby matematiky v školách* (The Improving Mathematics Education in Schools – TIMES). Projekt TIMES pozostával zo štyroch hlavných častí:

1. východiskový program;
2. moduly pre učiteľov;
3. kariérne materiály;
4. spolupráca s CSIRO (The Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation).

Na základe zmeny austrálskeho kurikula a projektu TIMES boli zatiaľ vytvorené učebnice matematiky pre piaty až desiaty ročník. Na ich tvorbe sa podieľal tím matematikov v spolupráci s učiteľmi v školách. Pre každý ročník vznikla sada dvoch učebníc. Učebnice pre jednotlivé ročníky sú vytvorené tak, aby učivo bolo zrozumiteľné a primerane náročné a podnecovalo žiakov k hlbšiemu štúdiu matematiky.

3 Učebné a výučbové materiály

Motivovaní austrálskym prístupom k vyučovaniu matematiky sme podľa austrálskych učebníc matematiky vytvorili učebné a výučbové materiály korešpondujúce so Štátnym vzdelávacím programom na Slovensku. Vytvorené materiály pozostávajú z učebnice (*Textbook*), pracovného zošita (*Workbook*) a príručky pre učiteľov (*Teacher's guide*). Všetky časti sú napísané v anglickom jazyku, každá časť pozostáva zo šiestich kapitol.

Učebnica pokrýva základné učivo šiesteho ročníka základnej školy pre matematiku. Prvá kapitola, *Introduction*, je zameraná na podporu používania anglického jazyka v rámci hodín matematiky. Táto kapitola podporuje predovšetkým učenie sa anglického jazyka, keďže žiaci šiesteho ročníka by už mali byť oboznámení s väčšinou prezentovaného obsahu (rád číslie, sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie prirodzených čísel). Žiaci tak majú príležitosť naučiť sa anglické ekvivalenty slovenských pojmov a základné frázy vyjadrujúce ich myšlienky a postupy, ktoré sa používajú počas hodín matematiky v šiestom ročníku. Po naučení sa týchto ekvivalentov a fráz by žiaci mali byť pripravení na pravidelné používanie anglického jazyka v rámci hodín matematiky.

Ostatné kapitoly obsahujú nové učivo podľa Štátneho vzdelávacieho programu. Druhá kapitola je zameraná na prirodzené čísla, predovšetkým na mentálne stratégie násobenia, na algoritmy násobenia a delenia prirodzených čísel a na pochopenie násobenia a delenia ako navzájom inverzných operácií. V tretej kapitole sú zavedené desatinné čísla. Rozširuje sa pojem rádu číslie na desatinné čísla, žiaci sa učia porovnávať a zaokrúhľovať desatinné čísla a tiež sa zaoberajú základnými aritmetickými operáciami s desatinnými číslami. Štvrtá kapitola sa zameriava na obsah niektorých geometrických útvarov. Žiaci sa oboznamujú s určovaním obsahu obdĺžnika a štvorca pomocou jednotkových štvorcov a vzorcov, pričom používajú jednotky obsahu a učia sa ich premieňať. Okrem toho sa táto kapitola zaoberá zloženými útvarmi a určovaním ich obsahu. Geometrická téma je obsiahnutá i v piatej kapitole, kde sú prezentované rôzne typy uhlov a ich vlastnosti a určovanie veľkosti uhlov a rysovanie uhlov pomocou uhlomera. Šiesta kapitola obsahuje kombinatorické a štatistické úlohy, uvádza žiakov do základov robenia výskumu, zberu dát a ich grafickej reprezentácie. V tejto kapitole prezentujeme úlohy, s ktorých riešením majú žiaci zvyčajne najväčšie problémy. Preto je dobré zahŕňať ich priebežne v rôznych častiach školského roka.

Jednotlivé kapitoly sú rozdelené do niekoľkých podkapitol s jednotnou štruktúrou. Každá podkapitola začína motiváciou a opakovaním (*Show what you know!*), pokračuje zavedením a prezentáciou nového učiva (*Let's get started!*) a končí úlohami (*Practice*). Na konci každej kapitoly je tzv. Výzva (*Challenge*), ktorá rozširuje učivo. Navyše, v prvej kapitole je *Challenge* na konci každej podkapitoly. *Challenge* obsahuje zaujímavé úlohy pre žiakov, ktorí zvládli učivo a chcú sa naučiť viac. Časť *Challenge* môže byť použitá na individuálnu prácu alebo na prácu v skupinách, aby žiaci mohli používať anglický jazyk prirodzene na vyjadrovanie ich myšlienok, stratégií a riešení, a tak sa zlepšiť vo všetkých jazykových schopnostiach (čítanie, písanie, počúvanie, rozprávanie).

Pracovný zošit (*Workbook*) rozširuje a dopĺňa učebnicu. Všetky témy obsiahnuté v učebnici sú zahrnuté i v pracovnom zošite. Pracovný zošit je určený predovšetkým na individuálnu prácu, žiaci by mali byť schopní riešiť úlohy prezentované v pracovnom zošite samostatne. Žiaci môžu vpisovať odpovede priamo do pracovného zošita, a tým sa zlepšovať v čítaní a písaní v anglickom jazyku a tiež v matematike. Pracovný zošit okrem toho dáva učiteľovi možnosť pracovať so žiakmi individuálne, a tak zisťovať, ktorí žiaci potrebujú dodatočnú pomoc pre zvládnutie obsahu alebo jazyka.

V príručke pre učiteľov (*Teacher's guide*) postupujeme podľa učebnice a pracovného zošita. Na začiatku každej kapitoly je napísaný obsah príslušnej kapitoly z učebnice. Potom uvád-

Challenge: Egyptian numbers

The ancient Egyptians did not have an alphabet like ours. They wrote by creating pictures – called **hieroglyphs** – with each picture representing a word or syllable.

We use the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9 to write numbers from 0 into the millions and beyond. They are called **Hindu-Arabic numbers**.

The ancient Egyptians had a base-10 mathematics system, but with some important differences from the system we use today.

The ancient Egyptians used these seven symbols to write numbers.

ancient - belonging to the very distant past and no longer in existence

alphabet A, B, C, ...

syllable there are two syllables in *water*

hieroglyph



1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Obr. 1: Ukážka Výzvy

zame *jazyk učenia sa* (language of learning), *jazyk pre učenie sa* (language for learning) a *jazyk cez učenie sa* (language through learning). V príručke pre učiteľov sme sa zamerali na poskytnutie modelu výučby metódou CLIL s využitím vytvorených učebných materiálov. Uvádzame v nej predovšetkým mnoho odporúčaní na využívanie *scaffoldingu* počas hodín matematiky vyučovaných metódou CLIL na podporu súčasného učenia sa matematiky a anglického jazyka.

Literatúra

- [1] COYLE, D., HOOD, P., MARSH, D. *CLIL (Content and Language Integrated Learning)*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010, 173 pp.
- [2] *ICE-EM Mathematics Australian Curriculum Edition*. Cambridge : Cambridge University Press, 2012.
- [3] *Melbourne Declaration on Educational Goals for Young Australians*. Ministerial Council on Education, Employment, Training and Youth Affairs, 2008.
- [4] Australian Mathematical Sciences Institute. <http://www.amsi.org.au/>

GEOGEBRA JAKO NÁSTROJ OBJEVOVÁNÍ A DOKAZOVÁNÍ

Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
hasek@pf.jcu.cz

Cílem příspěvku je ukázat prostřednictvím tří příkladů využití programu GeoGebra [2] jako nástroje aktivního odhalování matematické či geometrické podstaty problémů na úrovni učiva základní a střední školy. Díky svým dynamickým schopnostem a integrovaným nástrojům představuje GeoGebra vhodné prostředí pro vytváření matematických a geometrických modelů, formulování hypotéz o jejich fungování, ověřování těchto hypotéz a v některých případech i jejich dokazování.

Volně šiřitelný open-source program GeoGebra, vyvíjený pro podporu studia a výuky matematiky, zde nebudeme zvláště představovat. Všechny potřebné informace, spolu s instalačním souborem, najde zájemce na webové stránce [2]. Pro potřeby článku pouze zdůrazníme, že GeoGebra v sobě mimo jiné integruje prostředí pro dynamické geometrické konstrukce (označené jako Nákresna), symbolické a numerické výpočty (CAS) a tabulkový procesor (Tabulka), která, díky vzájemnému sdílení dat, můžeme účelně kombinovat. GeoGebra tak může podstatně napomoci učitelům při výkladu a žákům či studentům při pochopení matematické podstaty zkoumaných jevů. Hovoříme-li v tomto článku o užití GeoGebry k dokazování, máme na mysli použití programu pro vytváření geometrických či analytických důkazů zkoumaných vlastností. Nejedná se tak o využití programu k dokazování či odvozování vět pomocí nástrojů symbolické algebry a matematické logiky, na jejichž implementaci do programu se v současnosti také pracuje [3].

Vzhledem k rozsahu článku nejsou uvedena úplná řešení příkladů, ale pouze hlavní myšlenky využití GeoGebry. Zevrubný popis postupu řešení spolu s popisem konkrétní situace, reakcí žáků a jejich řešení, by pro každý z příkladů vydal na samostatný článek.

První příklad ilustruje použití Nákresny spolu s CAS k propojení geometrického dynamického modelu zkoumaného jevu, v tomto případě množiny bodů dané vlastností, s jeho analytickým vyjádřením.

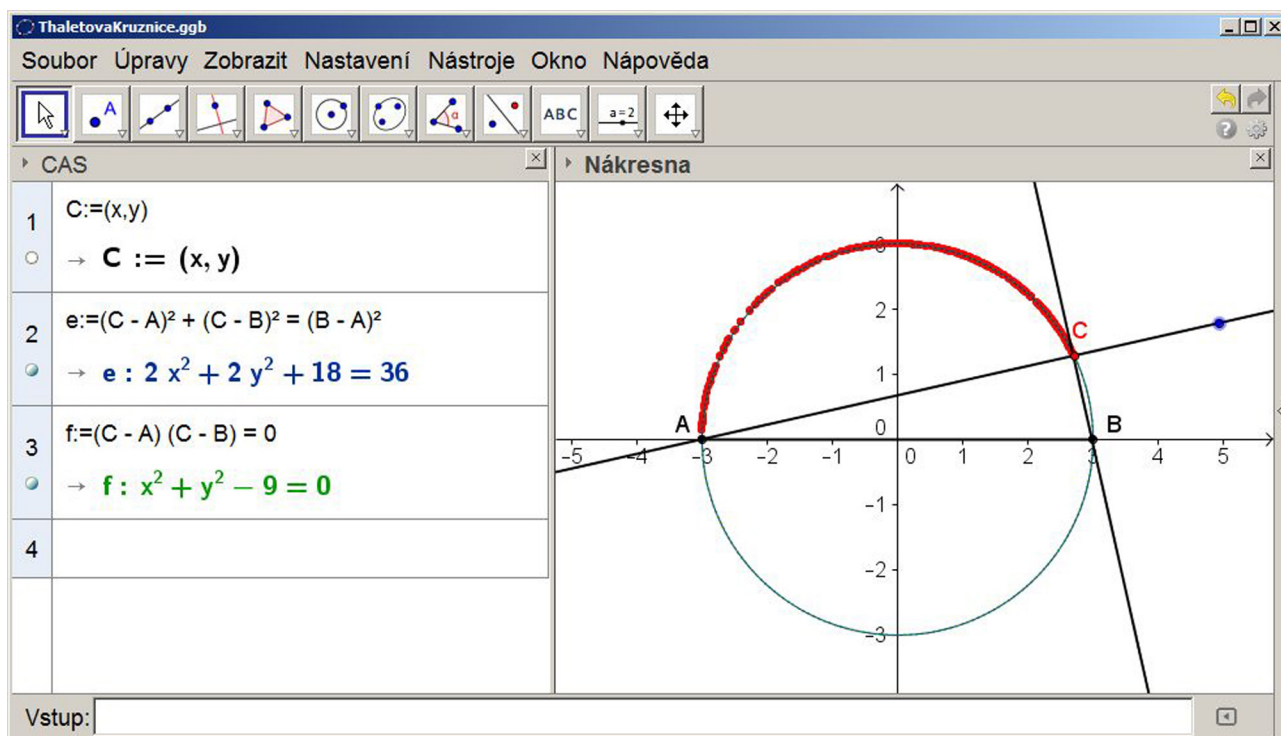
Příklad 1 (Thaletova kružnice): Určete množinu všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body A , B .

Řešení vidíme na obr. 1. Danou množinu bodů nejprve zobrazíme pomocí dynamické geometrické konstrukce bodu C dané vlastností s využitím nástroje „Stopa objektu“. Poté v okně CAS provedeme analytické vyjádření. Můžeme přemýšlet o jeho různých variantách. V materiálu na obr. 1 jsou uvedena vyjádření pomocí Pythagorovy věty (e) a skalárního součinu (f).

Druhý příklad ilustruje využití tabulkového procesoru GeoGebry (Tabulka) spolu s grafickými a algebraickými nástroji programu k objasnění fungování jednoduchého a složeného úrokování i dalších jevů jež souvisejí se zadaným problémem.

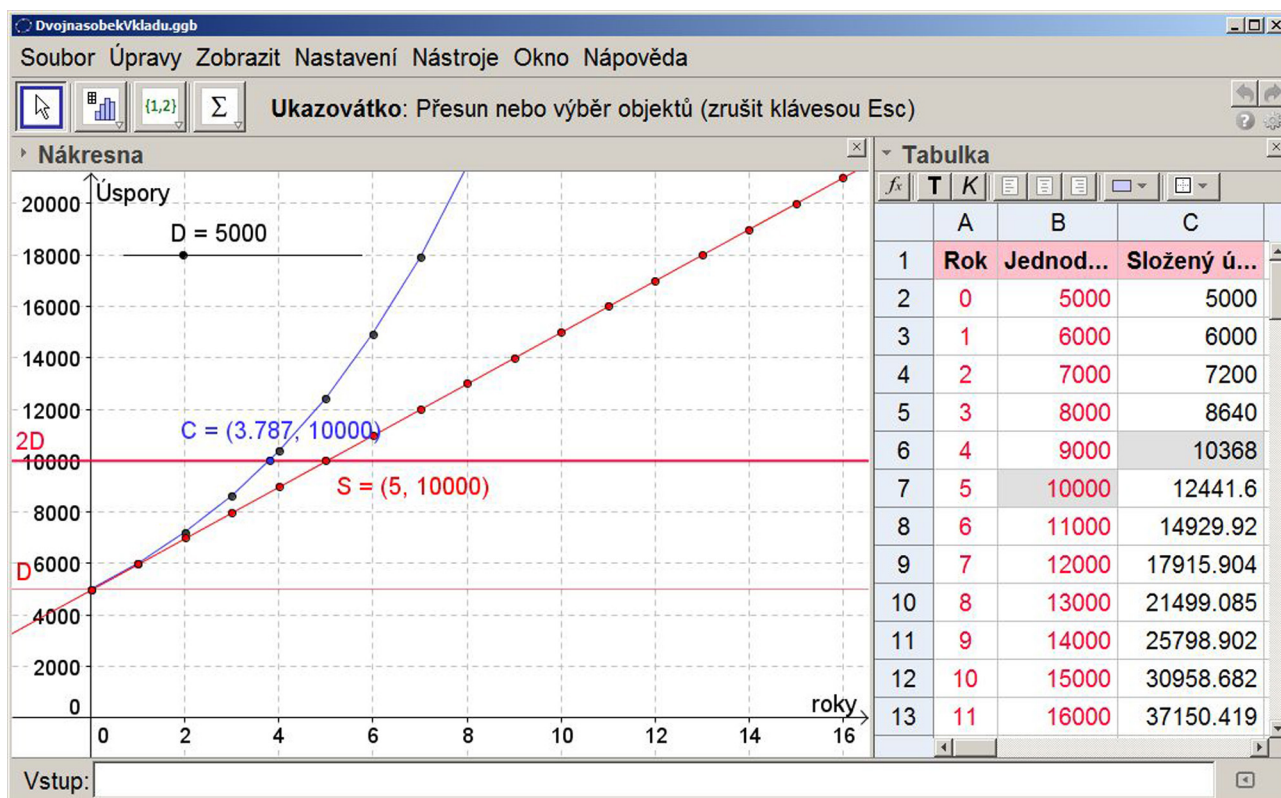
Příklad 2 (Úročení): Na hliněné tabulce z Mezopotámie, která je datována do období kolem roku 1700 př. n. l. a v současnosti uložena v Louvru, je zadán následující problém: „Za jak dlouho se zdvojnásobí peněžní částka vložená na účet s roční úrokovou sazbou 20 %?“ [6].

Tato jednoduchá úloha v sobě skrývá překvapivé množství témat, která můžeme s žáky při jejím vhodně směřovaném řešení postupně odkrývat. Od hledání odpovědí na otázky, jak řešit



Obr. 1: Thaletova kružnice. Řešeno v programu GeoGebra

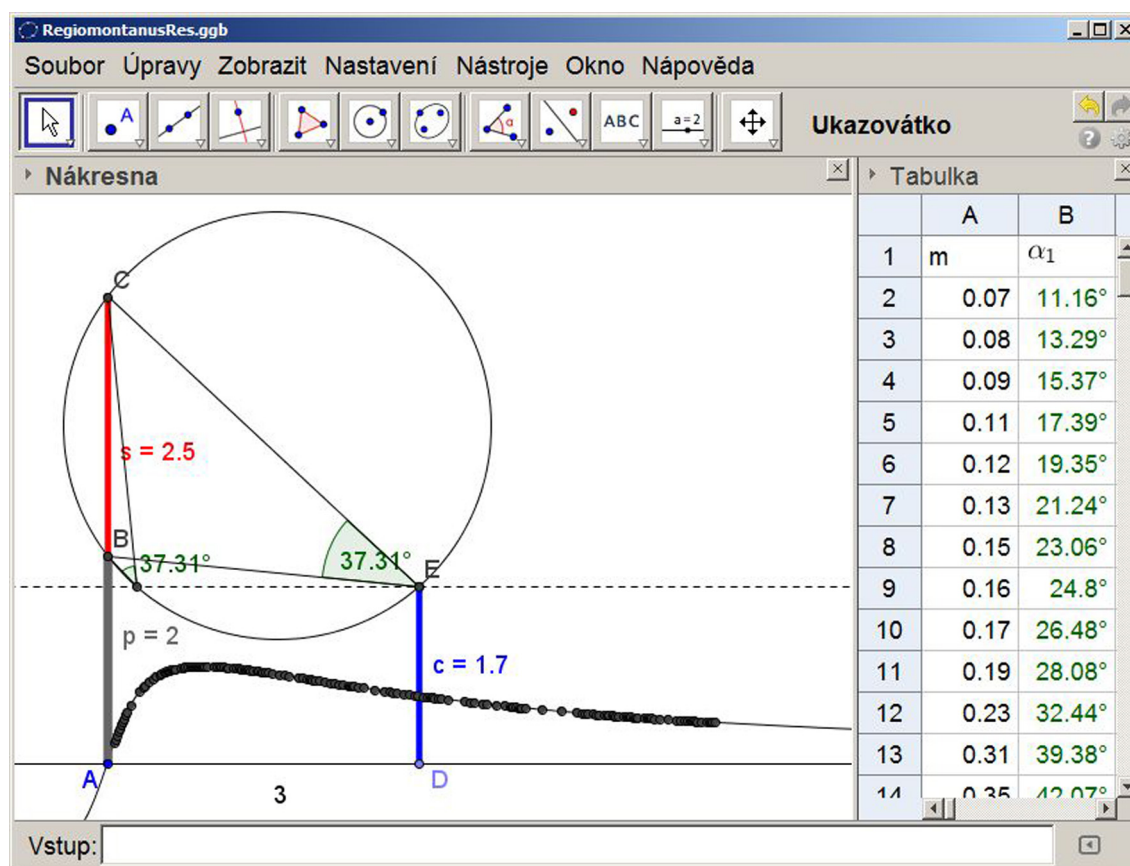
úlohu, když není udána výše vkladu, nebo zda volit jednoduché či složené úrokování, se snadno dostaneme až k exponenciálním a logaritmickým funkcím a rovnicím nebo k metodě lineární aproximace. Detailní popis řešení této úlohy ve vyučovací hodině je uveden v [5].



Obr. 2: Zdvojnásobení vkladu. Řešeno v programu GeoGebra

Poslední příklad je věnován jedné z variant problému, který v roce 1471 formuloval německý matematik Johannes Müller, zvaný Regiomontanus [1]. Ilustruje možnosti, které nám poskytuje integrace všech tří výše zmiňovaných prostředí GeoGebry: Nákresny, Tabulky a CAS.

Příklad 3 (Viditelnost sochy): Pozorujeme-li sochu umístěnou na podstavci, závisí zorný úhel, pod kterým sochu vidíme, na naší vzdálenosti od paty podstavce (viz obr. 3). Určete, z jaké vzdálenosti od paty podstavce vidí pozorovatel sochu pod největším zorným úhlem, znáte-li výšku sochy a jejího podstavce a také výšku pozorovatelových očí nad vodorovnou rovinou, která prochází patou podstavce.



Obr. 3: Viditelnost sochy. Řešeno v programu GeoGebra

GeoGebra nám poskytuje prostředí pro úplné řešení dané úlohy, analytické i geometrické, pro konkrétní hodnoty, i obecně. Začneme vytvořením dynamického geometrického modelu. Z toho náčrtku pak, při vhodné volbě soustavy souřadnic a při zachování hodnot parametrů úlohy (výška pozorovatelových očí, podstavce a sochy), načteme do Tabulky a následně zobrazíme v Nákresně hodnoty okamžité vzdálenosti pozorovatele a odpovídajícího zorného úhlu. Jak vidíme na obr. 3, grafické znázornění těchto hodnot dobře vypovídá o průběhu závislosti zorného úhlu na vzdálenosti. Pěknou úlohou je potom nalezení předpisu funkce popisující tuto závislost. Je-li třeba, okno CAS nám poskytuje příkazy pro vyřešení příkladu jako úlohy na extrém této funkce. Dynamický geometrický model využijeme i pro geometrické řešení úlohy. Snadno odhalíme geometrickou podstatu problému (viz obr. 3) a získáme tak geometrický důkaz obecného řešení úlohy. Dynamičnost modelu nám dovoluje zkoumat různé geometrické konfigurace problému a dovozovat, jaký počet řešení připouští.

Závěr

Věřím, že se mi i přes značnou stručnost textu podařilo ukázat GeoGebru jako program, jehož využitím ve výuce matematiky má cenu se zabývat. Čtenáři, v němž probudil můj článek zájem o tento program, doporučuji navštívit kromě již uvedené stránky [2] také portál [4] pro sdílení materiálů v GeoGebře vytvořených.

Literatura

- [1] DÖRRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York : Dover Publications, Inc., 1965.
- [2] *GeoGebra*, software, [cit. 2013–03–30]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org>
- [3] *GeoGebra. Theorem Proving*, [cit. 2013–03–30].
Dostupné z: <https://dev.geogebra.org/trac/wiki/TheoremProving>
- [4] *GeoGebraTube*, [cit. 2013–03–30]. Dostupné z: <http://www.geogebraTube.org>
- [5] HAŠEK, R., PETRÁŠKOVÁ, V. GeoGebra in financial education. *North American GeoGebra Journal* [online] Vol. 2, No. 1, 2013, Miami University, USA, [cit. 2013–03–31], s. 31–36. ISSN 2162-3856. Dostupné z: <http://www.ggbmidwest.com/ojs-2.3.4/index.php/ggbj/article/view/40>
- [6] MAOR, E. *e: The story of a number*. 1st ed. USA : Princeton University Press, 1998. ISBN 978-0691058542.

GEOGEBRA NEJEN VE VÝUCE FUNKCÍ

Veronika Havelková

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
veronika.havelkova@pedf.cuni.cz

Úvod

Program *GeoGebra*¹ dnes již není nutné příliš dlouze představovat. V České republice pomalu, ale jistě nahrazuje program *Cabri*. Zatímco program *Cabri* byl považován zejména za „geometrický náčrtník“, *GeoGebra* nabízí mnohem rozsáhlejší škálu programových možností. Ačkoliv v *Cabri* bylo možné vkládat i funkce, doménou programu ve vzdělávací oblasti matematiky na základních a středních školách byla oblast geometrie. Možná i z tohoto důvodu se na svých seminářích setkávám s učiteli, kteří (když už program *GeoGebra* používají) ho používají nejčastěji pro oblast geometrie.

Cílem příspěvku bude ukázat, jak lze program použít i mimo oblast geometrie, zejména pak v oblasti výuky funkcí, a to i bez bohatých znalostí programu. Na několika příkladech ze základních a středních škol bude ukázáno, že jednoduché applety² lze vyrobit rychle i značně intuitivně³ a že program *GeoGebra* se může stát velmi užitečným pomocníkem nejen v hodinách geometrie, ale ve výuce funkcí, rovnic či statistiky...

Příklad 1

Zakreslete grafy funkcí $f: y = 3x - 1$, $g: y = 3x^2 - x + 1$, $h: y = 5^x$, $i: y = \frac{2}{x}$, $j: y = \sqrt{x - 1}$. Grafy barevně odlište a předpisy těchto funkcí vložte do nákresny.

Řešení v programu (obr. 1 Vkládání funkcí). Funkce se do programu vkládají pomocí vstupního panelu umístěného ve spodní části programu. Do vstupu můžeme funkci zadat třemi způsoby, které je vždy potřeba potvrdit tlačítkem Enter: a) $y = 3x - 1$, b) $3x - 1$, c) $f(x) = 3x - 1$. Pouze poslední variantou si zajistíme jednoznačný název funkce, v ostatních případech program volí písmena v abecedním pořadí, počínaje f (pokud tak již není pojmenován jiný objekt). Barevné odlišení zajistíme pomocí nastavení, které se nám nabídne po kliknutí na objekt pravým tlačítkem myši v nákresně či algebraickém okně⁴. Jednotlivé symboly lze do vstupu zadávat stejně jako v jiných programech. Namísto $*$ při násobení můžeme použít mezeru, mocninu 5^x zapíšeme jako 5^x (k vložení symbolu $^$ bývá potřeba změnit klávesnici na anglickou). Pokud neznáme přesný příkaz, využijte tlačítko nápovědy (trojúhelníček v pravém dolním rohu). V nápovědě lze kromě odmocniny také nalézt i řadu příkazů – například k nalezení derivace a integrálu může pomoci nápověda Funkce & Počet.

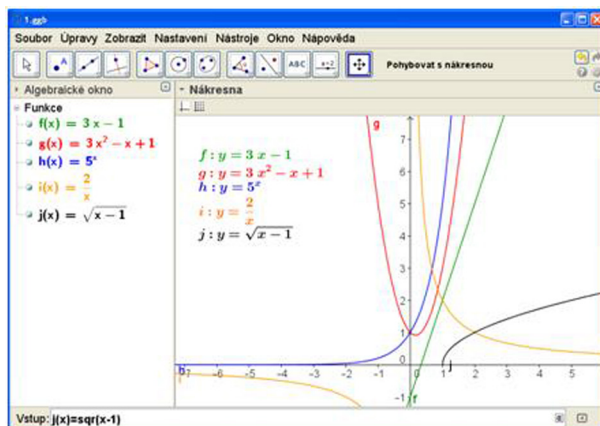
Samotný předpis funkce jako text můžeme vložit pomocí horního panelu s ikonami „Vložit text“ (zde je však nutno odlišovat statický a dynamický text). (Při ponechání kurzoru na dané ikoně se vždy zároveň objeví i návod, jak nástroj použít.) Ještě jednodušším způsobem je kliknutím uchopit předpis v algebraickém okně, a ten přetáhnout do nákresny.

¹Program je zdarma ke stažení na <http://www.geogebra.org>.

²Pojmem applet myslíme množinu objektu zobrazovaných na nákresne. Applet umožňuje dynamické zobrazení Geometrických situací.

³Mnoho následujících úloh by šlo v GeoGebře řešit vícero způsoby. V příspěvku nejsou všechny tyto způsoby vyjmenovány s ohledem na účel příspěvku.

⁴Algebraické okno lze zobrazit/skrýt prostřednictvím horního tlačítka programu „Zobrazit“.



Obr. 1: Vkládání funkcí

Příklad 2

Zkoumejte vliv hodnot parametrů a , b , m na průběh grafu funkce $f(x) = (x - a)^m + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$. Postupujte takto:

- sestrojte graf funkce tak, aby hodnoty parametrů a , b , m byly ovládány posuvníky;
- do nákresny vložte předpis funkce s parametry a s konkrétními hodnotami;
- vytvořte tabulku souřadnic vybraných bodů grafu.

Řešení v programu. Postup je velmi obdobný jako v příkladu 1. Než však vložíme samotnou funkci, je nutné nadefinovat parametry, aby s nimi program mohl dále pracovat. Toho docílíme např. tak, že do vstupu zadáme, že parametr je roven libovolné konkrétní hodnotě (např. $a = 1$). Tento parametr se následně objeví v algebraickém okně. Po kliknutí do kolečka, které u něj je, se zobrazí v nákresně posuvník. Jeho vlastnosti lze opět měnit pomocí nastavení, které se objeví po kliknutí pravým tlačítkem myši.

Pro celkovou přehlednost appletu je dobré kromě předpisu s konkrétními hodnotami parametru vložit i obecný předpis (postup ad příklad 1).

Pro vytvoření tabulky je nejdříve nutné si zobrazit samotnou tabulku. Ta se zobrazuje, stejně jako algebraické okno, přes tlačítko zobrazit. Následně je třeba přímo na funkci vložit nějaký bod, který je v horním panelu s ikonami, a pak použít tlačítko „Zaznamenat do tabulky“, které je v horním panelu s ikonami. Poté již stačí jen daný bod uchopit a manipulovat s ním.

Příklad 3

Zadání. Do tabulky zaznamenejte hodnoty funkce $y = 2,3x + 1,2$ pro $x = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5\}$. Z těchto zaznamenaných hodnot vytvořte seznam bodů na nákresně.

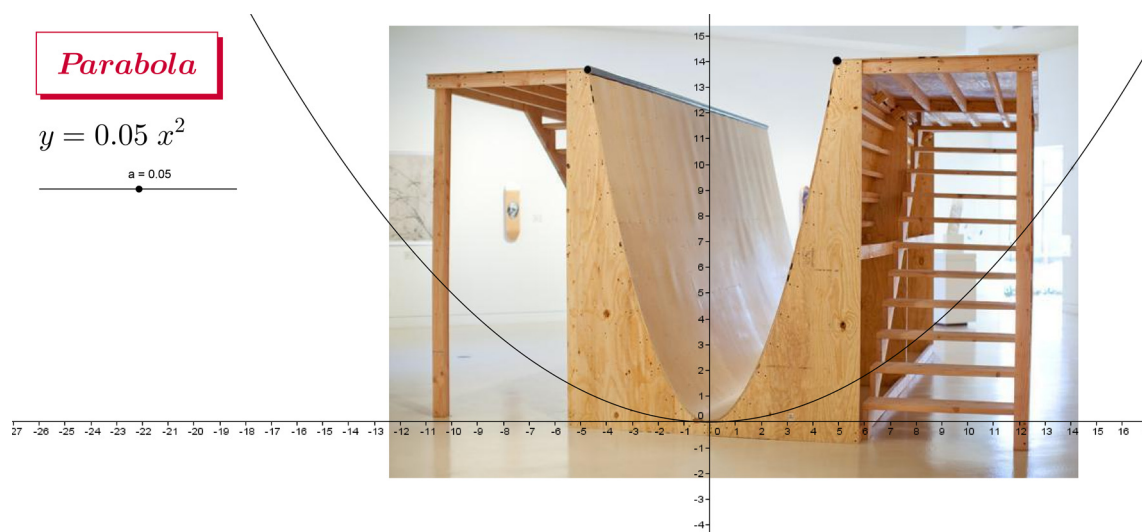
Řešení v programu. Tabulka v programu *GeoGebra* pracuje velmi obdobně, jako je tomu u programu *Excel*. Do prvního sloupce si tak zadáme hodnoty pro x (stejně jako v *Excelu* můžeme po zadání dvou hodnot tyto hodnoty přetáhnout kurzorem myši a následně roztáhnout do dalších řádků, kde si program další hodnoty již sám dopočítá). Do prvního řádku druhého sloupce zadáme „2.3 A1+1.2“ (místo desetinné čárky je v programu nutné užívat desetinnou tečku. Namísto vypisování buňky A1 je možné na danou buňku i kliknout. Tento text pak již stejně jako u předchozího sloupce „natáhneme“ i do dalších řádků. Seznam získaných bodů do nákresny získáme tak, že získané souřadnice přetáhneme kurzorem a následně si prostřednictvím pravého tlačítka myši rozvineme nabídku a zvolíme „Vytvořit > Seznam bodů“. Zadání v tabulce můžeme následně měnit, a souřadnice bodů se v závislosti na zadání budou rovněž měnit.

Této funkce lze dobře využít jak při zavádění funkcí na ZŠ (při dopočítávání funkčních hodnot), tak v oblasti finanční matematiky (např. výpočty úroků).

Příklad 4

Vložte do nákresny obrázek ve tvaru paraboly a vytvořte applet, jehož pomocí by žák změnou parametru hledal předpis funkce.

Řešení v programu (obr. 2 Parabola). Vkládání funkce s parametrem je totožné jako u příkladu 2. Pro oživení výuky můžeme však do pozadí vložit nějaký obrázek z přírody apod., který by výuku oživil a jehož předpis by žáci hledali (např. voda stříkající z fontány). Obrázek se vloží prostřednictvím horního panelu s ikonami „Vložit obrázek“. Po kliknutí na místo určení již pouze vybereme ze souboru hledaný obrázek. V základním nastavení obrázku lze pak zvolit „Obrázek na pozadí“, což je pro daný účel nejvhodnější.



Obr. 2: Parabola

Příklad 5

K funkci $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

- zobrazte extrémy funkce a inflexní body,
- vykreslete derivaci funkce,
- spočítejte $\int_1^3 (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) dx$,
- vytvořte tečnu grafu funkce v jejím libovolném bodě.

Řešení v programu. Samotné vkládání funkce je totožné jako u příkladu 1. Pokud neznáme příkazy, které by nám umožnily splnit body a), b) a c), je vhodné si zobrazit nápovědu. V té již dohledáme, že jednotlivé příkazy jsou následující: `Extrem[]`, `InflexniBod[]`, `Integral[]`. (V rámci nápovědy se zároveň v podokně zobrazuje, co přesně a kam napsat.) Do závorek následně doplníte název dané funkce a v případě určitého integrálu ještě přidáte čárkami oddělené meze.

Nejsnazší způsob, jak vložit k funkci tečnu, je nejdříve si na funkci vložit libovolný bod a následně prostřednictvím horního panelu s ikonami použít nástroj „Tečna z bodu“.⁵

⁵S kombinací nástroje „Spád“ lze poměrně snadno vytvořit efektivní applet na vysvětlení geometrické interpretace pojmu derivace.

Příklad 6

Vytvořte bod, jehož stopa bude vykreslovat kosinusoidu v intervalu $\langle 1; 5 \rangle$.

Řešení v programu. Ačkoliv se zadání může jevit poměrně složité, řešení se skládá ze čtyř kroků. Prvním je zadání parametru, jako tomu bylo v příkladu 2 (např. $a = 1$). Následně již prostřednictvím vstupu zadáme konkrétní bod (např. A). Bod A je závislý na parametru a a má se pohybovat po kosinusoidě. Stačí tedy zadat „ $A = (a, \cos(a))$ “, kde a zastupuje hodnoty na ose x a $\cos(a)$ zastupuje hodnoty na ose y . Samotné meze nastavíme prostřednictvím nastavení posuvníku. Vykreslování pak vytvoříme tak, že v nastavení bodu zatrhneme položku „Stopa zapnuta“. Pohyb samotný zajistíme tak, že budeme buď sami pohybovat bodem na posuvníku, či v nastavení posuvníku zatrhneme položku „animace“ a bod se bude pohybovat sám.

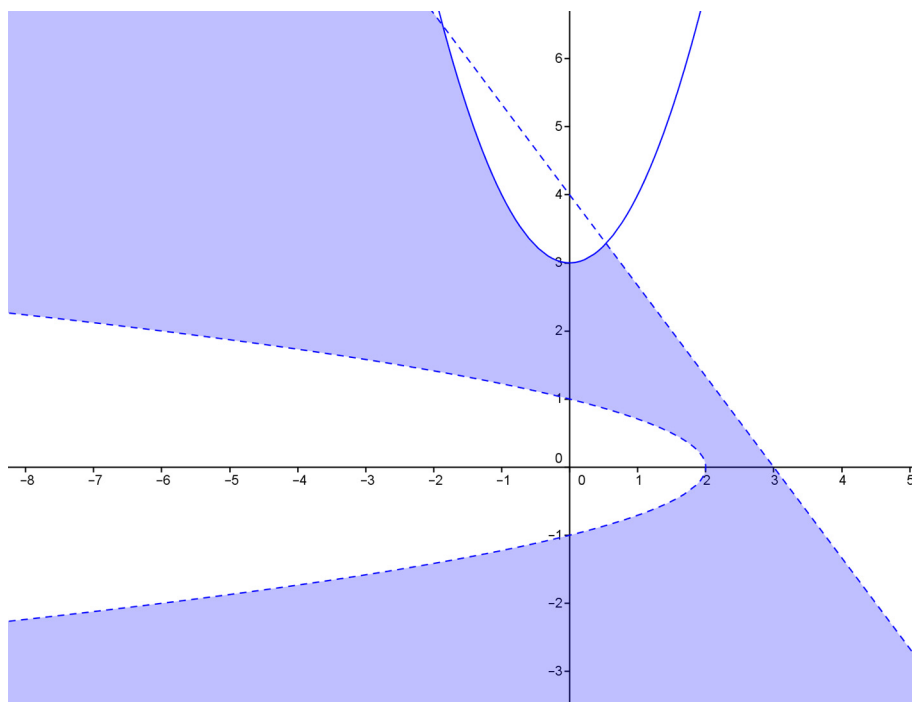
Příklad 7

V množině reálných čísel graficky řešte soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} -x^2 + y &\leq 3, \\ 4x + 3y &< 12, \\ -x - 2y^2 &< -2. \end{aligned}$$

Vybrané konstanty nahraďte parametry, jejichž hodnoty budou ovládány posuvníky.

Řešení v programu (obr. 3 Soustava nerovnic). Zobrazení dané soustavy je možné vložení „ $(-x^2 + y \leq 3) \wedge (4x + 3y < 12) \wedge (-x - 2y^2 < -2)$ “ do vstupního panelu. Vloženy jsou tak jednotlivé nerovnice spojené konjunkcí. Potřebné symboly lze najít po kliknutí na symbol alfa (ten se zobrazí ve vstupním panelu pouze pokud s ním pracujeme). Pokud chceme řešit soustavu nerovnic s parametrem, stejně jako v předchozích příkladech je nutné si nejdříve nadefinovat parametry. Další postup je pak totožný.



Obr. 3: Soustava nerovnic

Příklad 8

Sestrojte graf funkce $f(x)$, která je dána předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < -2, \\ 4; & -2 \leq x < 1, \\ 5 - x; & x \geq 1. \end{cases}$$

Řešení v programu. Tento příklad je stejně jako předchozí možno udělat pouze jedním příkazem ve vstupním panelu. Pro uživatele *Excelu* a podobných programů nebude ničím novým tzv. podmínkování prostřednictvím funkce „If“ (Kdyz). Této funkce lze stejně použít i v programu *GeoGebra*. Řešení je pak následující: „Kdyz[$x < -2, x^2$, Kdyz[$x < 1, 4, 5 - x$]]“. První položka je podmínkou, druhá tím, co nastane, když je podmínka splněna, třetí tím, co nastane, když podmínka není splněna. V tomto případě je navíc nutné ještě podmínky do sebe navzájem „vnořit“.

Závěr

Použití appletů ve výuce může být přínosem v mnoha ohledech. Může přinést motivaci, usnadnit pochopení žákům, kteří jsou spíše vizuálně zaměřeni. Je však nesmírně důležité neopomínat i rizika, které může výuka s pomocí počítačů rovněž přinášet [1]. Samotný applet totiž ve výuce není přínosem, pokud není vhodně využit.

Sama tvorba appletů se pak pro jedince může stát obohacující zkušeností, zvláště v případech, kdy je nutné si promyslet, jak samotný applet vůbec vytvořit (jako tomu bylo v příkladech 6 a 8). Doufám, že výše uvedené příklady motivovaly čtenáře k vlastním pokusům o tvorbu appletů a přiblížily principy fungování programu. Pro inspiraci je možné se podívat na hotové materiály na GeoGebraTube (<http://www.geogebraTube.org>). Některé hotové materiály autorky jsou pak na <http://www.geogebraTube.org/user/profile/id/716>. Applety na těchto webových stránkách je možno nejen prohlížet, ale i stáhnout a používat ke své vlastní potřebě.

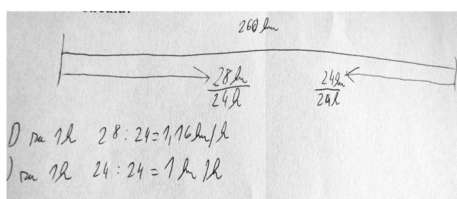
Literatura

- [1] VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. 1. vyd. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009, 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

Najčastejšia chyba, ktorá spôsobovala nesprávne riešenie, bolo nesprávne určenie smeru pohybujuúcich sa objektov, hľadanie najmenšieho spoločného násobku (obrázok 3). Ďalšie nesprávne riešenia vznikli použitím chybného vzorca (obrázok 4), prípadne žiaci neuviedli žiadne riešenie, iba premenili jednotky (obrázok 5).

stretnúť?
 $M(24, 28) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168 \text{ km}$
 $168 : 28 = 6 \text{ dní}$
 $168 : 24 = 7 \text{ dní}$
 Toto musí byť 7 dní
 Preto 6 dní svojej cesty
 aby sa stretli.

Obr. 3

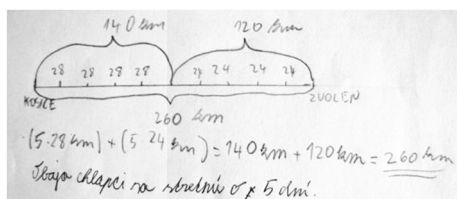


Obr. 5

Dáno
 $v = 28 \text{ km/h}$
 $s = 260 \text{ km}$
 $t = ?$
 $s = \frac{v}{t}$
 $t = \frac{s}{v}$
 $t = 260 : 28$
 $t = 9.28$
 $t = 260 : 24$
 $t = 10.83$
 $t = 7.280$
 Stretnúť sa o 5 dní.

Obr. 4

Aj medzi ôsmakmi sa našli úspešní riešitelia tejto úlohy, pričom väčšina z nich úlohu riešila postupným odčítaním prejdenej dráhy od celkovej dráhy za jednotlivé dni. Tieto riešenia boli často doplnené obrázkom alebo tabuľkou (obrázok 6, 7).



Obr. 6

DANO	rýchlosť	JOZO	Dni
28	52	24	1
56	704	48	2
84	1156	72	3
112	1568	96	4
140	2000	120	5

Stretnúť sa o 5 dní (5 dní)

Obr. 7

Dáno KOŠICE - ZVOLEN - 28 km/h/den
 JOZO ZVOLEN - KOŠICE - 24 km/h/den
 Otázka x
 $28 - 24 = 4$ Stretnúť sa o 4 dni

Obr. 8

260 : 24 = 10.83
 Stretnúť sa o 5 dní

Obr. 9

Medzi nesprávnymi riešeniami sa opäť objavilo nesprávne určenie smeru pohybu, náhodná manipulácia s číslami zo zadania (obrázok 8), žiadne riešenie. Zaujalo nás aj riešenie, ktoré bolo ovplyvnené skúsenosťou zo života, ktoré žiakovi bránilo úspešne vyriešiť úlohu (obrázok 9, preškrtnutý text v zátvorkách).

Druhá úloha

Z Trenčína do Košíc vyrazil o 7.00 motocykel rýchlosťou 72 km/h. O pol hodiny neskôr za ním vyrazil automobil rýchlosťou 90 km/h. Po hodine cesty dostal automobil defekt. Výmena kolesa trvala 15 minút. O koľkej sa vozidlá stretnú?

Diagram showing distance s vs time t . The motorcycle starts at $t=0$ with speed $v_1 = 72 \text{ km/h}$. The car starts at $t=0.5$ with speed $v_2 = 90 \text{ km/h}$. The meeting point is at $t = x$.

$$s_1 = s_2$$

$$v_1 \cdot x = v_2 \cdot (x - 0.75)$$

$$72x = 90(x - 0.75)$$

$$72x = 90x - 67.5$$

$$-18x = -67.5$$

$$x = 3.75$$

Stretnú sa o 10:45.

Obr. 10

Diagram showing distance s vs time t . The motorcycle starts at $t=0$ with speed $v_1 = 72 \text{ km/h}$. The car starts at $t=0.5$ with speed $v_2 = 90 \text{ km/h}$. The meeting point is at $t = x$.

$$s_1 = s_2$$

$$v_1 \cdot (x + 0.75) = v_2 \cdot x$$

$$72(x + 0.75) = 90x$$

$$72x + 54 = 90x$$

$$54 = 18x$$

$$x = 3$$

Stretnú sa o 10:45

Obr. 11

Deviatci, ktorí úlohu vyriešili správne, si väčšinou načrtli obrázok a použili vzťah $s = v \cdot t$, pričom niektorí si za neznámu zvolili čas t_1 (obrázok 10), ale boli aj takí, ktorí si za neznámu zvolili čas t_2 (obrázok 11).

Nesprávne riešenia boli spôsobené použitím chybného vzorca, domyslením si nejakej informácie do zadania, neuvažovanie alebo zabudnutie na defekt, numerickými chybami (obrázok 12).

Diagram showing distance s vs time t . The motorcycle starts at $t=0$ with speed $v_1 = 72 \text{ km/h}$. The car starts at $t=0.5$ with speed $v_2 = 90 \text{ km/h}$. The meeting point is at $t = x$.

$$s_1 = s_2$$

$$v_1 \cdot x = v_2 \cdot (x - 0.75)$$

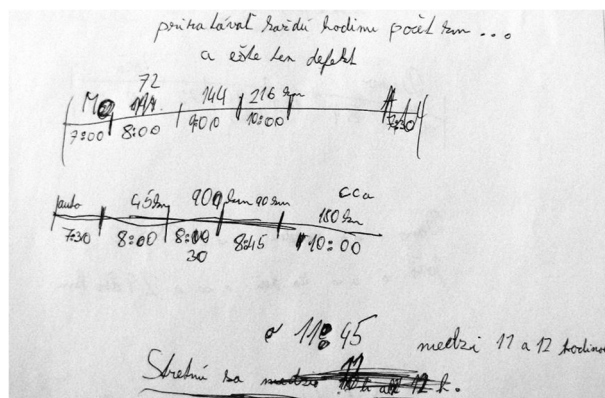
$$72x = 90(x - 0.75)$$

$$72x = 90x - 67.5$$

$$-18x = -67.5$$

$$x = 3.75$$

Obr. 12



Obr. 13

Žiaden z ôsmakov túto úlohu nevyriešili správne. Väčšina z nich vôbec nepochopila zadanie úlohy, prípadne nesprávne určili smer pohybu. V jednom riešení sa objavila správna myšlienka, avšak nebola dotiahnutá do konca (obrázok 13).

Záver

Cieľom článku bolo popísať žiacke riešenia, ktoré sa objavili v našom experimente. Očakávali sme, že žiaci ôsmeho ročníka budú viac tvorivejší ako deviataci. V prvej úlohe im po jednoduchom výpočte vyšiel pekný výsledok, avšak v druhej úlohe sa väčšinou vzdali. Zrejme si situáciu zo zadania nevedeli správne predstaviť. V ďalšej práci chceme skúmať, ktoré fázy riešenia slovných úloh robia žiakom najväčšie problémy.

ŠTATISTICKÁ GRAMOTNOSŤ ABSOLVENTOV STREDNÝCH ŠKÔL

Martina Ivanecká

Ústav matematických vied PF UPJŠ, Košice
martinaivanecka@gmail.com

Úvod

Bežnou požiadavkou mnohých dnešných profesií ale aj bežného života je samostatné, tvorivé, kritické myslenie a určitá úroveň štatistických vedomostí. Cieľom súčasného vyučovania štatistiky by malo byť úsilie priviesť študentov k skutočnému porozumeniu základných štatistických pojmov a myšlienok. Preto výučba spojená s memorovaním a numerickými cvičeniami by mala stáť v jej úzadí. Naopak, do popredia by sa mala dostávať výučba zameraná na rozvoj troch kľúčových kompetencií, a to štatistickej gramotnosti, štatistickej argumentácie a štatistického myslenia.

Štatistická gramotnosť

Štatistická gramotnosť predstavuje minimálne schopnosti a znalosti potrebné pre človeka žijúceho v dnešnej informačnej spoločnosti. Snell [3] pod pojmom štatistická gramotnosť rozumie znalosť základných štatistických pojmov a postupov a schopnosť štatisticky uvažovať na najzákladnejšej úrovni.

Neoddeliteľnou zložkou štatistickej gramotnosti je aj grafická gramotnosť. Štatistické grafy majú totiž významnú úlohu v našej spoločnosti, keďže sú prítomné v mnohých oblastiach nášho života. Medzi základné kompetencie grafickej gramotnosti v štatistike patrí čítanie, vytváranie a interpretácia štatistických grafov. Definícia grafickej gramotnosti v sebe zahŕňa:

- schopnosť získať údaje z rôznych typov grafov a interpretovať ich význam vyslovením hypotéz o graficky prezentovanom jave,
- spôsobilosť vybrať a vytvoriť graf pre danú situáciu, s alebo bez pomoci softvéru,
- schopnosť kriticky zhodnotiť grafy, rozlíšiť ich silné stránky a obmedzenia, rozpoznať či prezentujú pôvodné dáta.

Produkovať do istej miery štatisticky gramotných ľudí by malo byť úlohou už stredných škôl. Dnešná spoločnosť si čoraz viac uvedomuje narastajúci význam štatistickej gramotnosti pre každodenný život človeka, ktorý je preplnený informáciami. Preto sa štatistika stáva súčasťou učebných osnov stredných, ale už aj základných škôl.

Prieskum štatistickej gramotnosti

V školskom roku 2011/2012 sme realizovali prieskum štatistickej gramotnosti na vzorke 167 študentov 1. a 2. ročníka PF UPJŠ a EkF TUKE v Košiciach, ktorí sú tesne po ukončení strednej školy. Zamerali sme sa na zistenie hĺbky pochopenia základných pojmov popisnej štatistiky a schopnosť grafického sprehľadňovania dát a interpretácie takto prezentovaných dát u absolventov stredných škôl. V tejto časti sa budeme venovať len úlohám sledujúcim schopnosť pracovať s grafiky prezentovanými dátami.

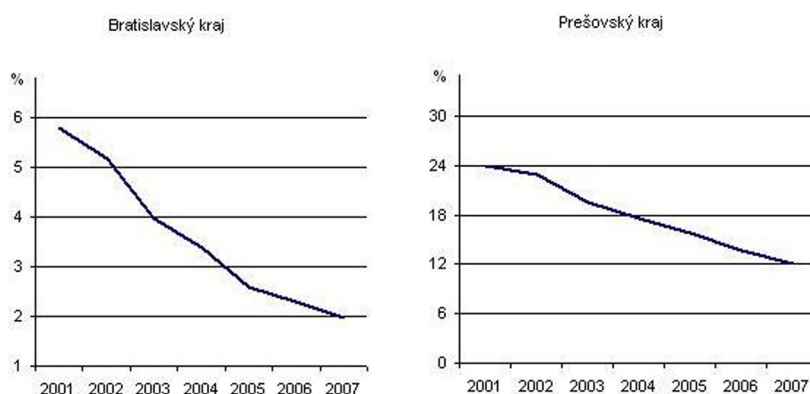
Formulácia úloh

Vychádzajúc z rozhovorov s učiteľmi stredných škôl, štúdia vzdelávacích štandardov, domácich výskumov v tejto oblasti [1] a inšpirovaním sa úlohami štúdie PISA [2] realizovanej na Slovensku v roku 2003, v ktorej práve oblasť náhodnosť dosiahla najhoršie výsledky, sme sa pri našom prieskume rozhodli pre použitie nasledujúcich úloh.

Úloha 1: *Včera skontrolovali revízori cestovne lístky cestujúcich dvadsiatich autobusov v Košiciach, pričom v jednotlivých autobusoch natrafili postupne na 1, 3, 2, 4, 2, 5, 3, 3, 4, 0, 3, 2, 7, 1, 4, 5, 2, 6, 3 a 4 čiernych pasažierov. Pokúste sa zozbierané údaje zobraziť pomocou vhodného diagramu.*

Riešenie úlohy si vyžaduje zistenie frekvencie sledovanej premennej respektíve zostavenie frekvenčnej tabuľky a následnú voľbu a konštrukciu vhodného diagramu. V tejto úlohe nás zaujímal typ diagramu, ktorý budú študenti pri grafickom zobrazovaní preferovať.

Úloha 2: *Študent si pripravil poster na tému vývoj nezamestnanosti od roku 2001 do roku 2007 v Bratislavskom a Prešovskom kraji, na ktorom sa nachádzali dva grafy (obr. 1).*



Obr. 1: Vývoj nezamestnanosti

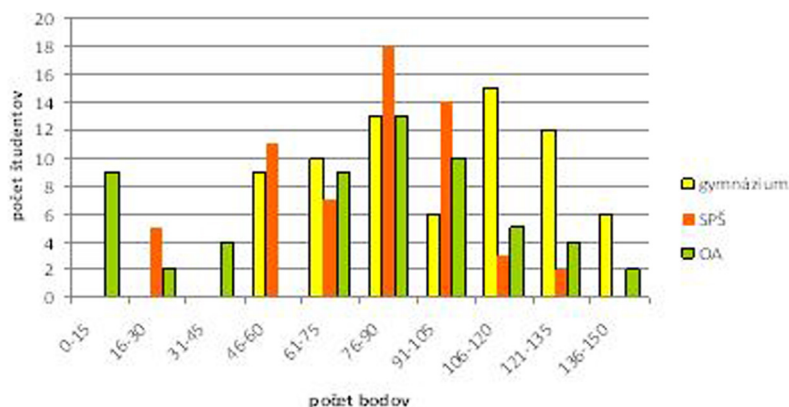
Pri jeho prezentovaní pred triedou povedal: „Ako môžeme z grafov vidieť, pokles nezamestnanosti od roku 2001 do roku 2007 bol väčší v Bratislavskom kraji.“ Vyberte jednu z odpovedí a odôvodnite svoj výber.

a) Súhlasím s týmto tvrdením, lebo...

b) Nesúhlasím s týmto tvrdením, lebo...

Výber tejto úlohy bol motivovaný každodennou realitou. S grafickým zobrazovaním sa totiž študenti stretávajú na každom kroku. V mnohých prípadoch sú tieto grafy vhodne upravované s cieľom prezentovať údaje žiadaným spôsobom. Zaujímalo nás, ako si s takto upraveným grafom dokážu poradiť študenti a do akej miery sa ním nechajú oklamať.

Úloha 3: *Prijímacích pohovorov na istú vysokú školu sa zúčastnili absolventi troch typov stredných škôl (gymnázium, stredná priemyselná škola, obchodná akadémia). Výsledky týchto prijímacích pohovorov sú vyhodnotené grafom na obr. 2. Na vysokú školu boli prijatí študenti, ktorí na prijímacom pohovore získali minimálne 76 bodov.*

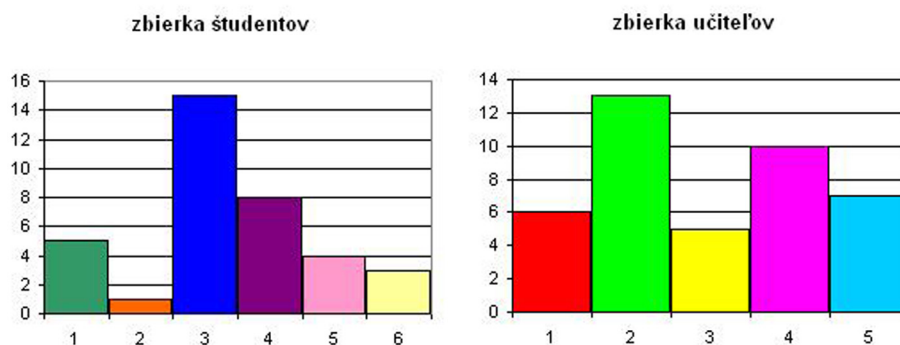


Obr. 2: Výsledky prijímacieho pohovoru

Absolventi ktorej strednej školy boli na prijímacích pohovoroch najúspešnejší a ktorej najmenej úspešní? Svoje rozhodnutie matematicky zdôvodnite.

Táto úloha je inšpirovaná jednou z úloh testovania PISA [2]. Sledovali sme ňou schopnosť študentov vyčítať údaje z grafov, ako ich dokážu použiť pri formulovaní relevantných záverov a na základe akých kritérií sa budú rozhodovať.

Úloha 4: *Spoločnosť detskej onkológie Košice oslovila riaditeľa istého gymnázia s prosbou o finančnú pomoc. Riaditeľ teda na škole vyhlásil zbierku (v eurách) pre deti na detskej onkológii, do ktorej sa mohli zapojiť študenti a učitelia. Po jej skončení riaditeľ na školskú nástenku vyvesil diagram s výsledkami tejto zbierky.*



Obr. 3: Výsledky zbierky

Kto bol podľa Vás pri tejto zbierke úspešnejší, študenti alebo učitelia? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Túto úlohu sme zaradili v snahe zistiť aká je schopnosť študentov čítať údaje prezentované graficky. Bola prevzatá z prieskumu realizovaného Pócsovou [1]. Úloha je okrem čítania z diagramu zameraná aj na správnu argumentáciu. Riešenie si vyžaduje popis osí a výber kritéria úspešnosti založeného na priemernej alebo celkovej vyzbieranej sume, aby bolo možné z diagramov určiť, ktorá z dvoch zúčastnených skupín bola v zbierke úspešnejšia.

Vyhodnotenie

Pri analýze riešení jednotlivých úloh sme sa pokúsili o vyhodnotenie z kvantitatívneho, ale aj kvalitatívneho hľadiska.

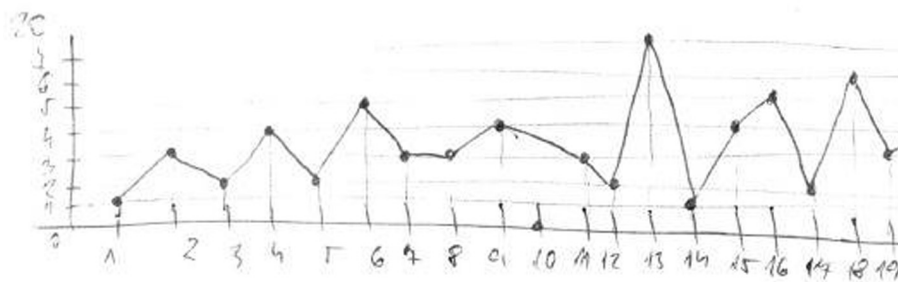
Kvantitatívne vyhodnotenie jednotlivých úloh uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 1: Kvantitatívne vyhodnotenie

	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4
Správne	13,8 %	58,5 %	61,0 %	45,1 %
Nesprávne	44,3 %	36,6 %	31,7 %	40,3 %
Neriešené	41,9 %	4,9 %	7,3 %	14,6 %

Pri bližšom kvalitatívnom pohľade na riešenia jednotlivých úloh sme pozorovali:

Úloha 1 – prekvapivo nízka úspešnosť je zrejme dôsledok nedostatku skúsenosti s tvorbou diagramov alebo nevedomovanie si podstaty grafického zobrazovania dát, ktorou je sprehľadnenie súboru dát. Pravdepodobne aj malá veľkosť súboru nevedie študentov k potrebe zostavenia tabuľky rozdelenia početností tohto súboru, ktorá by im pomohla pri jeho grafickom zobrazení a taktiež aj pri samotnej voľbe vhodného typu diagramu pre daný súbor. V prípade nesprávnych riešení sa študenti pokúsili len o akýsi grafický prepis údajov (obr. 4). Ďalšou často pozorovanou chybou bola nekompletnosť grafov v dôsledku chýbajúceho popisu osí.



Obr. 4: Ukážka riešenia úlohy 1

Úloha 2 – takmer 60% úspešnosť naznačuje, že väčšine študentov nerobí problém čítať základné údaje zobrazované graficky a nenechajú sa oklamať ani vhodným upravením uvedených grafov. Medzi nesprávnymi závermi sa vyskytovali argumenty týkajúce sa strmosti kriviek prípadne nematematické argumenty vychádzajúce zo životných skúsenosti.

Úloha 3 – úloha bola študentmi pomerne dobre zvládnutá. Medzi najčastejšie kritéria, podľa ktorých sa študenti rozhodovali, patrili počet prijatých študentov a jeho percentuálne vyjadrenie vzhľadom k počtu hlásiacich sa.

Úloha 4 – údaje v diagramoch boli zámerne volené tak, aby suma vyzbieraná študentmi a učiteľmi bola rovnaká, pričom jedna z osí predstavuje sumu v eurách a druhá zase počet účastníkov, ktorí danou sumou prispeli. Aj napriek tomu len 12,2 % študentov sa zamyslelo nad

priemernou vyzbieranou sumou na jedného účastníka a následne rozhodlo o víťazovi. V nesprávnych riešeniach prevládal prístup založený na odčítaní výšok stĺpcov v grafoch, čím sa prejavila neschopnosť týchto študentov vyčítať potrebné údaje prezentované graficky.

Výsledky tohto prieskumu nás priviedli k prekvapivému zisteniu, že študenti nemajú problém získať potrebné údaje z graficky prezentovaných dát, ale naopak prezentovať tieto dáta graficky. Pri vyučovaní štatistiky by teda učitelia mali venovať pozornosť budovaniu aj tejto zručnosti, ktorá je súčasťou štatistickej gramotnosti. Schopnosť graficky sprehľadňovať dáta tak tiež prispieva k lepšiemu porozumeniu takto prezentovaných informácií.

PodĎakovanie

Tento článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

Literatúra

- [1] PÓCSOVÁ, J. *Rozvíjanie tvorivosti vo vyučovaní matematiky*. Dizertačná práca. Košice : PF UPJŠ, 2009. 187 s.
- [2] KORŠŇÁKOVÁ, P. PISA – matematika úlohy 2003. [online]. 1. vyd. Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2004. s. 37. ISBN 80-85756-89-7. [cit. 2012-05-16]. Dostupné z: <http://www.nucem.sk>
- [3] SNELL, L. *Using Chance media to Promote Statistical Literacy. The 1999 Joint Statistical Meeting*. Dallas : 1999.

FUNKČNÍ MYŠLENÍ ŽÁKŮ STŘEDNÍCH ŠKOL

David Janda, Derek Pilous

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
DJanda@seznam.cz, derek.pilous@pedf.cuni.cz

Úvod

V lednu 2013 proběhl na SOŠ pro administrativu EU původní výzkum zaměřený na funkční myšlení žáků 2., 3. a 4. ročníku. Cílem tohoto výzkumu bylo zjistit, které poznatky teorie funkcí žáci použijí v různých matematických kontextech (viz diplomová práce Janda, 2013). S touto myšlenkou jsme formulovali několik úloh zaměřených na právě probíranou látku v daném ročníku, tedy funkce, pravděpodobnost a analytickou geometrii. Základní otázky, které jsme si v rámci přípravy výzkumu stanovili, byly:

1. Do jaké míry dokáží žáci používat poznatky, které získali při výuce funkcí, v jiných kontextech?
2. Do jaké míry žáci ovládají různé reprezentace funkcí a závislostí a které z nich jsou pro ně nej přijatelnější?
3. Jaké mají žáci prototypické příklady funkcí?

Výzkumu se zúčastnilo celkem 250 žáků uvedených ročníků, kteří vyplnili celkem 323 testů. Ty z testů, které se neukázaly jako informačně nosné, byly posléze z výzkumu vyřazeny.

Pro každý ročník byla vytvořena vždy dvě zadání testů, z prostorových důvodů uvádíme pouze jednu variantu.

Funkce (2. ročník)

Zadání úkolů zaměřených na 2. ročník bylo formulováno dvěma způsoby. Jednou jsme použili značení x , resp. $f(x)$, podruhé B , resp. A . Důvodem byla snaha pozorovat rozdíly v práci žáků při různém značení.

1. *Jak se mění $f(x)$, dosazujeme-li za x různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.*
 - $f(x) = -x$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x} - x$
 - $f(x) = \frac{1}{1-x}$
2. *Mají předchozí závislosti něco společného?*
3. *Které z uvedených závislostí reprezentují přímou resp. nepřímou úměrnost?*
4. *Jakých maximálních a minimálních hodnot mohou tyto závislosti pro daná x nabývat?*

Pravděpodobnost (3. ročník)

Tramvaj jezdí jednou za 10 minut.

1. *Jaká je pravděpodobnost, že do jedné minuty od mého příchodu na zastávku přijede tramvaj? Zdůvodněte.*
2. *Jak se zvyšuje pravděpodobnost, že přijede tramvaj, když čekám na zastávce? Zkuste tuto změnu pravděpodobnosti nějak znázornit a popište ji co nejpřesněji vlastními slovy.*
3. *Jakých hodnot může pravděpodobnost z předchozího příkladu nabývat?*
4. *Jaká je pravděpodobnost, že přijede tramvaj do 30 sekund od mého příchodu? Zamyslete se, jakými způsoby můžeme tuto pravděpodobnost odvodit nebo spočítat.*
5. *Pro jaké časy můžeme určovat pravděpodobnost příjezdu tramvaje?*

Analytická geometrie (4. ročník)

1. *Trojúhelník je zadán body $A[0; 0]$, $B[2; 0]$ a $C[x; f(x)]$, kde x je přirozené číslo a $f(x)$ je zadána následujícími předpisy. Určete x , pro které bude obsah trojúhelníku ABC co nejmenší.*
 - $f(x) = 3$
 - $f(x) = 2x + 2$
 - $f(x) = -x^2$
 - $f(x) = \arctg(\pi x)$
2. *V jakých případech se obsah trojúhelníku pro rostoucí x zvětšuje (zmenšuje)? Zdůvodněte.*
3. *Jak se bude v jednotlivých případech měnit obsah trojúhelníků pro celá x jdoucí do nekonečna?*

Podrobnou kvantitativní i kvalitativní analýzu žákovských řešení je možno nalézt v (Janda, 2013, s. 24–54). V rámci příspěvku byla věnována pozornost pouze několika pozorovaným jevům, které se v pracích žáků vyskytovaly a které považujeme za zajímavé.

Značení funkcí

Nejčastěji pozorovaným problémem, se kterým se žáci pracující se značením B a A potýkali, byla záměna závislé a nezávislé proměnné (obr. 1). Žáci pracující se standardním značením zpravidla tuto identifikaci prováděli bez problémů, vyskytovaly se zde však i další problémy, např. zmatené a nejednoznačné rozlišování mezi dosazenou a funkční hodnotou nebo chybná práce se znaménky.

1. Jak se mění hodnoty B, dosazujeme-li za A různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.

$B = -A$ dosadím 1 $\Rightarrow B = -1$
 $B = \frac{1}{A}$ dosadím 2 $\Rightarrow B = \frac{1}{2}$
 $B = \frac{1}{A} - A$ dosadím 2 $\Rightarrow B = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$
 $B = \frac{1}{1-A}$ dosadím 2 $\Rightarrow B = \frac{1}{1-2} = -1$

2. Mají předchozí závislosti něco společného?

JO - mají, všude B vyjde jako A $\Rightarrow B = 0,5$

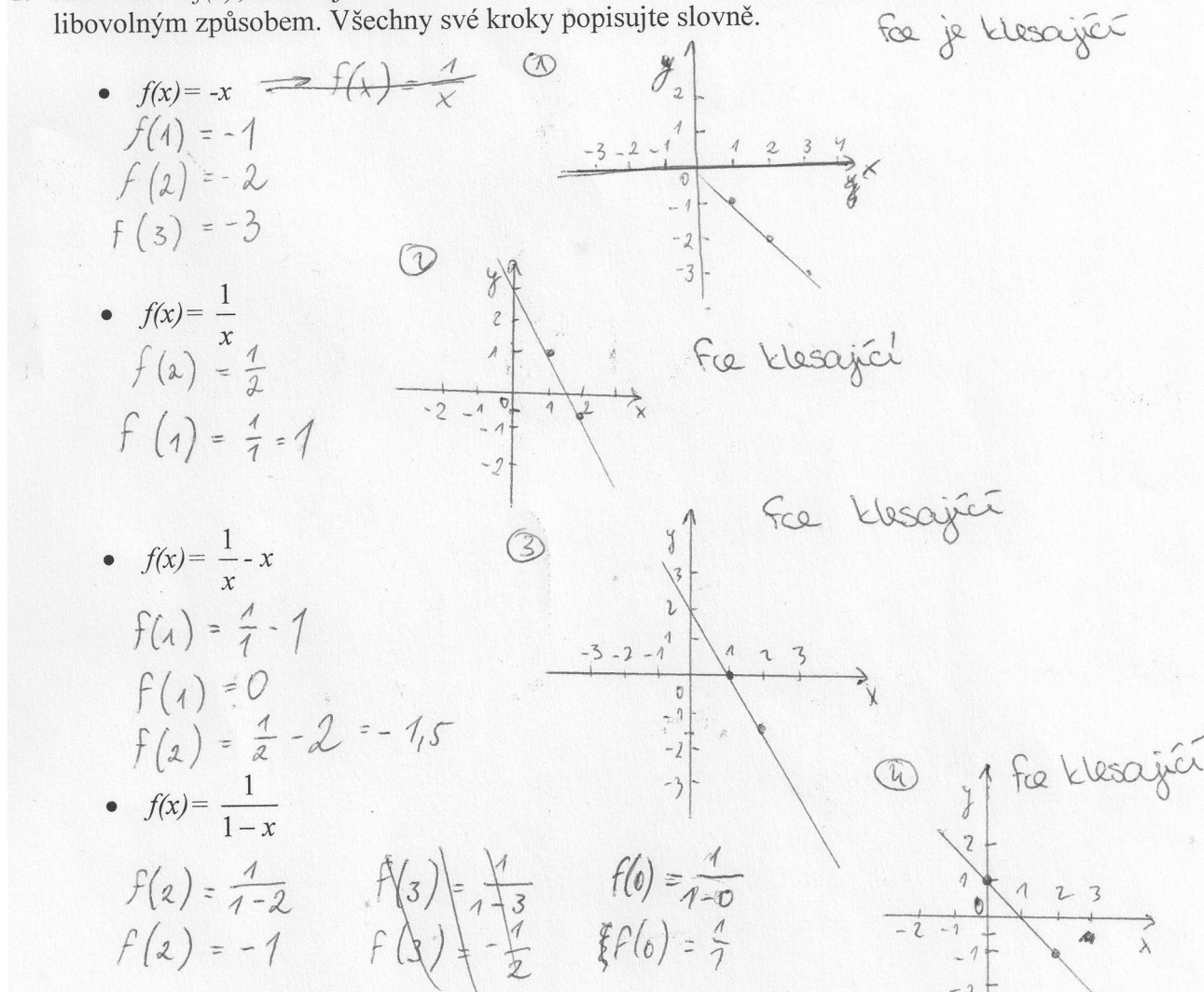
Obr. 1: Dosazování

Grafické znázornění

Zajímavým pozorovaným jevem byl pro nás příklad tzv. linearizace, při které žáci neznámý graf zkonstruovali na základě představy pro ně typické funkce, v tomto případě nejčastěji funkce lineární. Na obr. 2 můžeme dokonce pozorovat, že žákyně své představě důvěřuje více než svým výpočtům, když jeden z výpočtů škrtně proto, aby body mohla propojit přímkou.

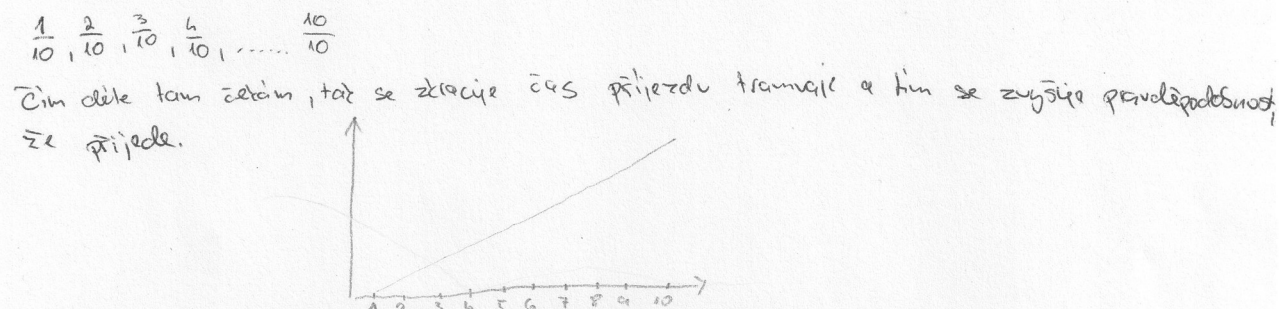
Podobný jev bylo možné pozorovat i v řešeních dalších testů. Na obr. 3 a 4 je možno porovnat dvě řešení úkolu s tramvají. V prvním žák správně nakreslil graf lineární funkce, ovšem z dalšího popisu vyplývá, že spíše náhodou. Zajímavější je ale z pohledu grafických reprezentací druhý obrázek, kde žák ke znázornění použil graf, který spíše připomíná známé sloupcové grafy z programu MS Excel.

1. Jak se mění $f(x)$, dosazujeme-li za x různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.



Obr. 2: Grafické znázornění

2. Jak se zvyšuje pravděpodobnost, že přijede tramvaj, když čekám na zastávce? Zkuste tuto změnu pravděpodobnosti znázornit graficky a popište ji co nejpřesněji vlastními slovy.

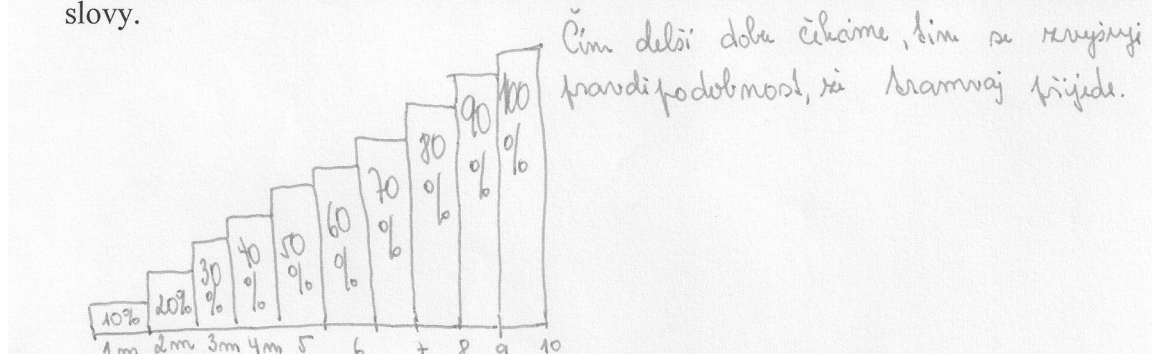


3. Jakých hodnot může pravděpodobnost z předchozího příkladu nabývat?

10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%

Obr. 3: Pravděpodobnost vyjádřená spojitým grafem

2. Jak se zvyšuje pravděpodobnost, že přijede tramvaj, když čekám na zastávce? Zkuste tuto změnu pravděpodobnosti znázornit graficky a popište ji co nejpresněji vlastními slovy.



Obr. 4: Grafické znázornění diskrétní pravděpodobnosti

Spojitosť a diskrétnost

Obrázky 3 a 4 nám však přinesly ještě další důležité informace. U prvního z nich můžeme pozorovat žákovu intuitivní představu „spojitosti daného kontextu“, zatímco při symbolickém vyjadřování žák tuto spojitost popírá. Na druhém obrázku žák dává přednost „diskrétnímu grafickému vyjádření“, ale již si neuvědomuje, že jeho slovní popis odpovídá spíše spojitě funkci.

Dosazování

Problematika dosazování prochází napříč všemi výše zmiňovanými případy, a to hlavně ve dvou modifikacích.

- Žáci dosazují do vztahů nízký počet hodnot. Dvě či tři hodnoty jim stačí ke konstrukci grafu funkce či odhadování jejích vlastností (obr. 2 a 3).
- Žáci zpravidla dosazují do vztahů celá, ještě častěji potom přirozená čísla. V pracích se téměř nevyskytovala jakákoli „taktika“ při dosazování do vztahů, žáci vybírali hodnoty bez rozmyšlení. V žádném řešení úkolů s tramvají se také neobjevily menší jednotky než sekundy.

Závěr

V příspěvku jsme uvedli pouze vybrané pozorované jevy a pouze některé z jejich možných interpretací. V tomto směru se jako velmi přínosné ukázalo formulování zadání v kontextu probírané látky, neboť řešení žáků byla často velmi bohatá.

Cennou zkušeností při realizaci výzkumu bylo také zjištění, že i v matematice průměrní žáci byli schopni se potýkat s matematickými problémy, jejichž řešení mnohdy překročila rámec probírané látky.

Literatura

- [1] JANDA, D. *Funkční myšlení žáků středních škol*. Magisterská práce. Praha : Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2013.

RIEŠENIE SLOVNÝCH ÚLOH POMOCOU GEOGEBRY

Ladislav Jaruska

Univerzita J. Selyeho, Komárno

jaruskal@selyeuni.sk

V pedagogickej praxi sa často stretávame s úlohami, ktoré nepatria do tematických celkov zaoberajúcich sa geometriou. Počas riešenia dobré grafické znázornenie uľahčí žiakom cestu k pochopeniu a rozšíreniu si matematickej predstavivosti.

V takýchto prípadoch nám môže pomôcť GeoGebra, ako pomoc pri predstavovaní si zmyslu učiva aj problému s jeho aplikáciou a praktickým využitím v bežnom živote.

Špeciálnu oblasť úloh tvoria úlohy s fyzikálnou tematikou. Problém pri riešení spomínaných úloh môže znamenať, že k riešeniu potrebujeme poznatky z fyziky.

Tieto úlohy pochádzajú z rôznych oblastí fyziky. GeoGebra nám ponúka možnosť grafického riešenia niektorých úloh, alebo grafickým znázornením priebehu javov, závislostí veličín podporuje predstavenie si konkrétnych situácií a problémov. Najjednoduchšie sú napr. slovné úlohy na pohyb (priamočiary rovnomerný pohyb – grafické riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, alebo rovnomerný zrýchlený pohyb, voľný pád – kvadratická rovnica, funkcia).

Ďalšie spracované tematické okruhy môžu byť, napr. vrhy (zobrazenie grafu), trenie, pohyb po naklonenej rovine, optika – zobrazovanie, moderná fyzika – grafické znázornenie závislosti veličín, kmity, vlny, termodynamické javy, elektrina.

Možnosti aplikovania GeoGebry vo vyučovaní fyziky:

- a) pomocou interaktívnych prezentácií podporovanie lepšieho pochopenia na tematiku nadväzujúcich fyzikálnych pojmov (polohový vektor, pohybový vektor, dvojrozmerný pohyb, pohyb, vektor rýchlosti a jeho komponenty, potenciálna, pohybová, mechanická energia, začiatočné parametre pohybu, rýchlosť pohybu, dĺžka vrhu, odpor prostredia, balistická krivka, vztlaková sila, atď.)
- b) pochopenie niektorých fyzikálnych javov cez virtuálne experimenty (voľný pád, vodorovný a šikmý vrh atď.)
- c) lepšie pochopenie fyzikálnych zákonov (zákon zachovania energie, premena energie)
- d) prispievanie k pochopeniu a osvojovaniu závislostí medzi rôznymi veličinami pomocou virtuálnych experimentov (závislosť dĺžky vrhu od začiatočnej rýchlosti a elevačného uhla, závislosť doby kmitu matematického kyvadla od dĺžky kyvadla, závislosť rýchlosti od pôsobiacej sily)
- e) skúmanie a pochopenie závislosti jednotlivých fyzikálnych veličín od času a polohy, lepšie pochopenie pojmu funkcia (rýchlosť)

Dosiahnutie spomínaných cieľov a možností pomáha v GeoGebre simulácia pohybu, nastavenie rôznych parametrov pomocou posuvníkov, vyberanie zobrazovaných veličín (vektor polohy, rýchlosti, sily), rovníc, operácií a potrebných posuvníkov, zobrazovanie funkcií.

Slovné úlohy na pohyb

Najjednoduchšie úlohy prebrané z fyziky sa zaoberajú s priamočiarym rovnomerným pohybom. Riešenie úloh vyžaduje znalosť základných fyzikálnych pojmov, veličín, súvislostí a rovníc.

Takým typickými príkladmi sú, keď dve telesá (osoby, auta, ...) sa pohybujú v jednom smere (za sebou), alebo oproti. Cieľom úlohy je zistiť, kedy a kde sa stretávajú.

K riešeniu potrebujeme vedieť predstaviť si situácie, a že ktoré údaje sú známe, a ktoré musíme vypočítať. Tu sa stretáva matematika a fyzika. Potrebne veličiny sú dráha (s), čas (t), rýchlosť (v).

Súvislosť medzi veličinami: $v = s/t$

Úlohy môžeme riešiť numericky – sústavou lineárnych rovníc, alebo graficky. Pri grafickom riešení lineárne rovnice chápeme ako lineárne funkcie, ktorých priesečník je riešením. Z praxe vieme, že z praktických dôvodov (konštrukčné zručnosti, nestrúhaná ceruzka, výsledok s desatinným číslom, ...) presné grafické riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc ceruzkou a pravítkom sa málokedy podarí.

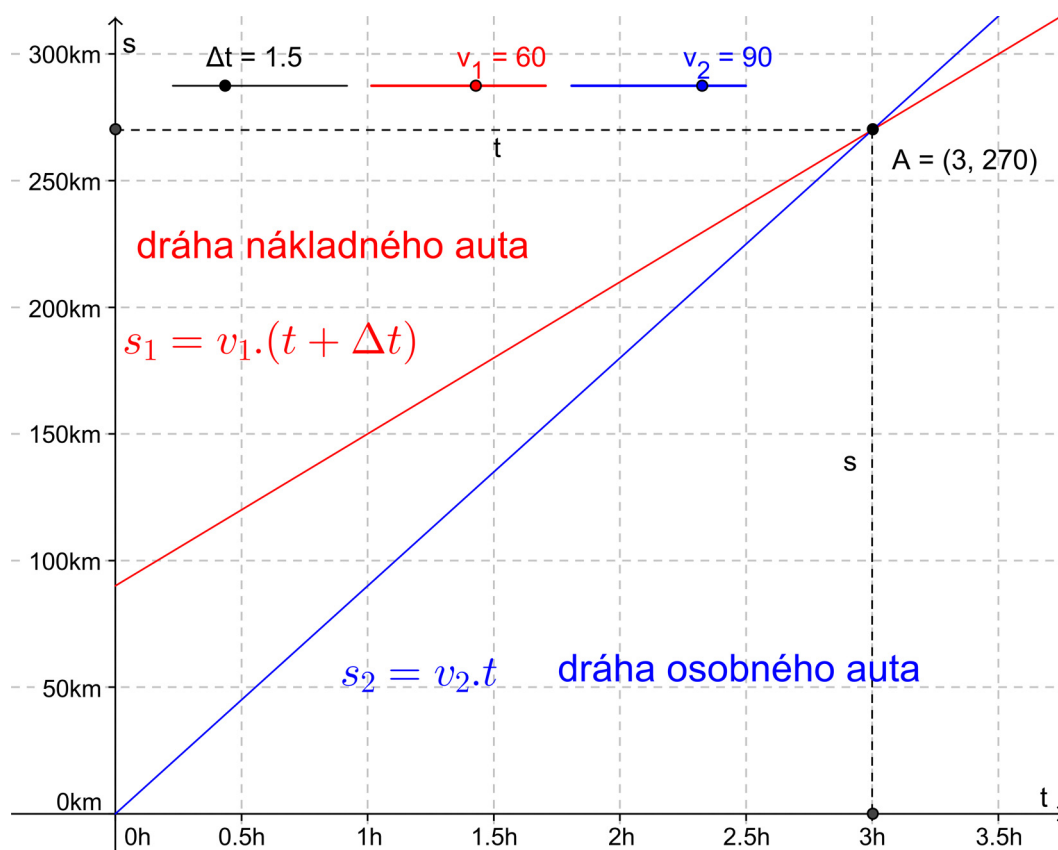
V takých prípadoch nám môže pomôcť GeoGebra, k riešeniu je potrebné len zadať rovnice-funkcie, a získavame presný výsledok. Ďalšie možnosti nám program ponúka tým, že ak používame posuvníky, tak hodnoty a parametre môžeme ľubovoľne meniť aj počas riešenia.

Úloha 1: Nákladné auto vyšlo z mesta A rýchlosťou 60 km/h. O 1,5 hodiny vyšlo za ním osobné auto tým istým smerom rýchlosťou 90 km/h. Kedy a v akej vzdialenosti dostihne osobné auto nákladné auto?

Na obrázku 1 vidíme grafické riešenie tejto úlohy v programe GeoGebra, kde

$v_1 = 60$ km/h – rýchlosť nákladného auta

$v_2 = 90$ km/h – rýchlosť osobného auta



Obr. 1

$s_1 = v_1 \Delta t + v_1 t$ – dráha, ktorú prejde nákladné auto, kde

$v_1 \Delta t$ – časť dráhy, ktorú prejde nákladné auto od svojho štartu za 1,5 h, kým vyštartuje za ním osobné auto

$v_1 t$ – časť dráhy, ktorú prejde nákladné auto po 1,5 h dovtedy, kým ho nedobehne osobné auto (za ten čas, keď sa obi dve autá pohybujú)

$s_2 = v_2 t$ – dráha, ktorú prejde osobné auto od času svojho štartu dovtedy, kým nedobehne nákladné auto.

GeoGebra nám ponúka grafické riešenie úlohy, kde zobrazíme grafy (s, t) lineárnych funkcií. Priesečník grafov je vlastne riešením úlohy, kde prvá súradnica znamená čas, a druhá súradnica dráhu, t.j. $A = (3, 270)$.

Počas riešenia použitím posuvníkov máme možnosť zmeniť hodnoty v zadaní, ktoré sú rýchlosť nákladného auta, osobného auta a oneskorenie osobného auta.

Úloha 2: Z dvoch rôznych miest A a B vzdialených 500 km vyrazili súčasne proti sebe osobné auto a cyklista. Osobné auto vyšiel z miesta A priemernou rýchlosťou 60 km/h, cyklista vyšiel z miesta B priemernou rýchlosťou 20 km/h. Kedy a v akej vzdialenosti od miesta A sa stretnú?

Na obrázku 2 vidíme grafické riešenie tejto úlohy v programe GeoGebra, kde

$v_1 = 60$ km/h – rýchlosť osobného auta

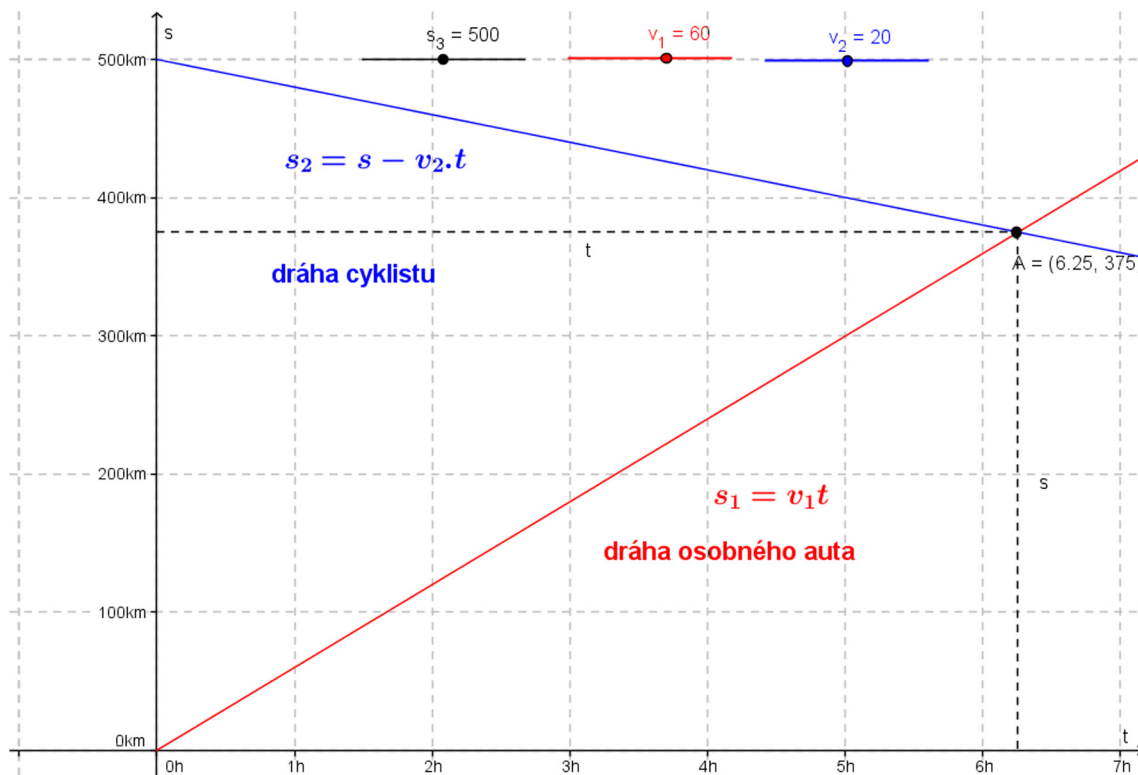
$v_2 = 20$ km/h – rýchlosť cyklistu

$s_1 = v_1 t$ – dráha, ktorú prejde osobné auto, kým sa nestretne s cyklistom

$s_2 = v_2 t$ – dráha, ktorú prejde cyklista, kým sa nestretne s osobným autom

t – čas od štartu osobného auta a cyklistu dovtedy, kým sa nestretnú

s – vzdialenosť miest A a B



Obr. 2

GeoGebra nám ponúka grafické riešenie úlohy, kde zobrazíme grafy (s, t) lineárnych funkcií. Pohyb osobného auta znázorníme rastúcou lineárnou funkciou, a pohyb cyklistu klesajúcou line-

árnou funkciou (keď sa približuje k mestu A, tak jeho vzdialenosť sa vždy znižuje, v závislosti od času).

Priesečník grafov je vlastne riešením úlohy, kde prvá súradnica znamená čas, a druhá súradnica dráhu, t.j. $A = (6,25, 375)$.

Počas riešenia použitím posuvníkov máme možnosť zmeniť hodnoty v zadaní, ktoré sú rýchlosť nákladného auta, osobného auta a oneskorenie osobného auta.

Spomínané úlohy sú najjednoduchšie príklady grafického riešenia pohybových úloh pomocou GeoGebry. Na strednej škole tvoria súčasť učiva matematiky, ale na základnej škole sú iba rozširujúcim učivom. Ich grafické riešenie pomocou GeoGebry vyžaduje základné poznatky o funkciách a pohyboch z učiva fyziky. Samozrejme využitie softvéru Geogebra vo výchovno-vzdelávacom procese ponúka ďalšie možnosti v prípade úloh v danej tematike (napr. rôzne prípady rovnomerného pohybu, zrýchlený pohyb – kvadratické funkcie, voľný pád, vrhy – funkcie).

Použitím GeoGebry máme možnosť aktívne zapojiť študentov do procesu vzdelávania zaujímavou formou, lepšiemu porozumeniu učiva a pozitívnejšiemu prístupu k učeniu.

POSTAVENIE DIGITÁLNYCH TECHNOLOGIÍ VO VYUČOVANÍ PRAVDEPODOBNOSTI

Katarína Kocová Mičkaninová

PF UPJŠ, Ústav matematických vied, Košice
katarina.kocova.mickaninova@student.upjs.sk

Úvod

Digitálne technológie (DT) majú vo vyučovacom procese špecifické postavenie. Z mnohých pohľadov sa stávajú predmetom rôznych výskumov či diskusií. Po zatiaľ poslednej reforme v školskom roku 2008/2009 na Slovensku čoraz viac akcentuje úloha DT vo vyučovaní. Stojíme pred výzvou vychovávať všestranne kompetentných a digitálne spôsobilých mladých ľudí.

DT vo vyučovaní pravdepodobnosti

V snahe zistiť ako sa ciele a zámery školskej reformy zavádzajú v školskej praxi sme koncom roka 2012 uskutočnili dotazníkový prieskum venovaný vyučovaniu kombinatoriky a pravdepodobnosti na základných a stredných školách. Prieskum bol adresovaný učiteľom a pozostával zo štyroch častí, kde jedna časť bola venovaná možnostiam a spôsobom využívania DT vo vyučovaní pravdepodobnosti.

Inšpirovaní výskumom týkajúcim sa vyučovania pravdepodobnosti z roku 2008 [1], čiže z obdobia pred „poslednou“ školskou reformou, nás zaujímalo, či vo vyučovaní pravdepodobnosti nastal nejaký posun či dokonca zlepšenie v dôsledku využívania DT vo vyučovaní. Nami zistené výsledky poukazujú na výrazný posun vo využívaní DT pri vyučovaní pravdepodobnosti. Kým v roku 2008 využívalo DT vo vyučovaní pravdepodobnosti na ZŠ 17 % dotazovaných učiteľov, na gymnáziách 13 % a na SOŠ 0 %, terajšie výsledky ukazujú, že DT využíva *na väčšine vyučovacích hodín* alebo *na vybraných typoch vyučovacích hodín* 47 % učiteľov základných škôl, 36 % učiteľov gymnázií a 43 % učiteľov stredných odborných škôl.

Učitelia kladne hodnotia zvýšenie podpory aktívneho učenia sa a motivácie pri výučbe s podporou DT, a podľa učiteľov žiaci považujú takéto vyučovanie pravdepodobnosti za zaujímavejšie ako vyučovanie bez podpory DT. Pri hodnotení dostupných učebných materiálov z hľadiska využiteľnosti a didaktického spracovania zisťujeme, že až 43 % dotazovaných učiteľov považuje pre nich dostupné učebné materiály za slabé, dokonca až nedostatočné.

Pri otázke *Odkiaľ čerpáte učebné a metodické materiály na vyučovanie s podporou DT?* sa väčšina opýtaných učiteľov vyjadrila, že ak chcú učiť s podporou DT, musia si pripravovať vlastné učebné materiály. Motiváciu hľadajú na rôznych didaktických internetových stránkach (zborovna.sk, planetavedomosti.sk, matik.sk, ...).

Vzhľadom k zisteným skutočnostiam sa vynára potreba návrhu a spracovania rôznorodých didaktických materiálov k výučbe tohto tematického celku. Ako jednu z možností uvádzame motivačnú úlohu zo života. Je to hazardná hra, pri riešení ktorej možno vhodne využiť tabuľkový kalkulátor.

Hazardný problém Chevaliera de Mére

Tento problém má korene v 17. storočí vo Francúzsku, kedy hazardného hráča Chevaliera de Mére trápili pravdepodobnosti výhier v dvoch hazardných hrách, vo francúzskych kasínach v tej dobe veľmi populárnych. Pravidlá hier boli nasledujúce:

V 1. hre hráč 4-krát po sebe hádže hracou kockou a vyhráva, ak aspoň raz hodí eso (číslo 1).
V 2. hre sa 24-krát hádže 2 hracími kockami a hráč vyhráva, keď aspoň raz padlo dvojité eso (číslo 1 padlo na oboch kockách). Chevalier de Mére sa domnieval, že obe pravdepodobnosti sú rovnaké. Našou úlohou je zistiť či uvažoval správne.

S týmto problémom sa Chevalier de Mére obrátil na matematika Blaise Pascala, a tak nevedomky prispel k založeniu modernej teórie pravdepodobnosti [2].

Navrhovanú úlohu môžeme zaradiť do výučby pravdepodobnosti pri výpočte pravdepodobnosti zjednotenia nezávislých javov. Riešenie úlohy rozdelíme do dvoch etáp. Prvá etapa predstavuje motivačnú časť, kedy sa žiaci „zahrajú“ na hazardných hrách a prostredníctvom zaznamenávania výsledkov v skupinách vyhodnotia hru a stanovia hypotézy o pravdepodobnostiach výhry jednotlivých hier. V druhej etape riešenia si prostredníctvom tabuľkového kalkulátora simulujeme mnohopočetné pokusy jednotlivých hier a na základe relatívnej početnosti sledovaných javov odhadneme pravdepodobnosti výhier zadaných hier. Následne si so žiakmi vypočítame pravdepodobnosti sledovaných javov.

1.etapa: Po rozdelení žiakov do skupín ich oboznámime s modifikovanými úlohami, ktoré budú v jednotlivých skupinách hrať a výsledky hier zapisovať do pripravených tabuliek. Úlohy modifikujeme z časového dôvodu. Keďže riešenie úlohy je koncipované na myšlienke výpočtu približnej hodnoty teoretickej pravdepodobnosti pomocou relatívnej početnosti, kde potrebujeme mnohonásobné opakovanie pokusu, žiaci potrebujú vykonať čo najviac pokusov a pri pravidlách druhej hry je to časovo veľmi náročné. Pravidlá modifikovaných úloh sú nasledovné:

1. hra: Hráč 1krát hádže hracou kockou a vyhráva, ak hodí eso (Hráč 2krát po sebe hádže hracou kockou a vyhráva, ak aspoň raz hodí eso).

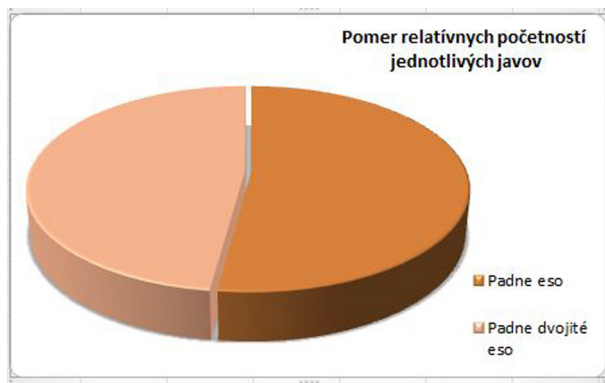
2. hra: Hráč 6krát po sebe hádže 2 hracími kockami a vyhráva, keď aspoň raz padlo dvojité eso (Hráč 12krát po sebe hádže 2 hracími kockami a vyhráva, keď aspoň raz padlo dvojité eso).

2.etapa: V prostredí tabuľkového kalkulátora si pripravíme simulácie jednotlivých hier (3 000 hodov hracou kockou, 3 000 2-hodov hracou kockou, ..., 3 000 24-hodov hracou kockou) a prostredníctvom relatívnej početnosti odhadneme teoretickú hodnotu pravdepodobnosti. Pomocou kruhového grafu a opakovanej simulácie náhodných javov dosiahnutých opakovaným stláčaním klávesu F9 pozorujeme, že pravdepodobnosti jednotlivých hier nie sú rovnaké a že výhra je pravdepodobnejšia v 1. hre. Na obr. 1 uvádzame ukážku pracovného hárku pre hry – 1 hod hracou kockou a 6 hodov dvoma hracími kockami.

Pokus	1. kocka			Rel. početnosť	Pokus	1.kocka	2.kocka
1.	6	Padne eso	491	0,164	1.	6	6
2.	2	Nepadne eso	2509			1	5
3.	2		3000			1	5
4.	2					4	2
5.	1					5	6
6.	3					5	1
:				Rel. početnosť	:		
2995.	1	Padne dvojité	478	0,159	3000.	2	3
2996.	6	Nepadne dvo	2522			6	2
2997.	5		3000			1	6
2998.	1					2	2
2999.	3					1	6
3000.	3					5	2

Obr. 1: Simulácia hodov jednej a dvoma kockami a výpočet relatívnej početnosti sledovaných javov

Jednotlivé pracovné hárky sú pripravené analogicky, preto uvádzame popis len jedného. S využitím matematickej funkcie RAND, ktorá vráti náhodné číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a INT, ktorá vráti celú časť čísla $(1 + \text{INT}(6 * \text{RAND}()))$ vygenerujeme náhodné čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, čo predstavuje možné výsledky pri hode hracou kockou. Prostredníctvom podmienkovej funkcie IF zistíme priaznivé výsledky pokusu sledovaných javov, ktoré spočítame funkciou COUNTIF. Pri pokusoch s možnosťou viacnásobného hodu kockou využijeme pre jednoduchšiu aplikáciu funkcie IF funkciu OFFSET, ktorá vykonáva posun odkazu o zadaný počet riadkov a stĺpcov. Na obr. 2 uvádzame grafické znázornenie relatívnych početností javov – padlo eso/padlo dvojité eso pri hrách – Hráč 1krát hádže hracou kockou a vyhráva, ak hodí eso/ Hráč 6krát po sebe hádže 2 hracími kockami a vyhráva, keď aspoň raz padlo dvojité eso.



Obr. 2: Grafické znázornenie relatívnych početností sledovaných javov

Po nadobudnutí vhladu do úlohy a vybudovaní si predstavy o jej riešení si so žiakmi výpočtom skontrolujeme, že výhry v týchto hrách nie sú rovnako pravdepodobné, a teda Chevalier de Mére sa mýlil.

Správne riešenie:

1. hra: $P(\text{„padne aspoň jedno eso v 4 hodoch hracou kockou“}) = 1 - P(\text{„nepadne žiadne eso v 4 hodoch hracou kockou“}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177$.

2. hra: $P(\text{„padne aspoň jedno dvojité eso v 24 hodoch dvoma hracími kockami“}) = 1 - P(\text{„nepadne žiadne dvojité eso v 24 hodoch dvoma hracími kockami“}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$. Vidíme teda že pravdepodobnosť výhry v prvej hre je o málo väčšia a teda, pri mnohých hrách sa v nej vyhrávalo častejšie.

Záver

Využívanie takto koncipovaných úloh z reálneho života pri vyučovaní pravdepodobnosti môže žiakom pomôcť aktívne sa zapojiť do procesu odhaľovania riešenia zadanej úlohy prostredníctvom motivačnej fázy a následne s využitím počítačových simulácií si vytvárať správnu predstavu a porozumieť jej riešeniu.

Literatúra

- [1] VRÁBELOVÁ, M., KNEJPOVÁ, E. Prieskum vyučovania pravdepodobnosti na ZŠ, SOŠ a gymnáziách. In *Acta mathematica 12*. Zborník zo VII. nitrianskej matematickej konferencie. Nitra : UKF v Nitre, 2009, s. 299–304. ISBN 978-80-8094-614-2.
- [2] ACZEL, A. D. *Náhoda: príručka pro hazardní hráče, zamilované, obchodníky s cennými papíry a pro všechny ostatní*. Praha : Nakladatelství Dokořán, 2004, s. 165. ISBN 978-80-7363-191-8.

VLIV UČITELE NA STRATEGIE ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

Michaela Králová

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
michala.kralova@post.cz

Úvod

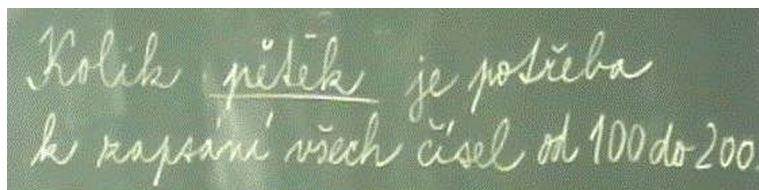
Osobnost učitele významně ovlivňuje práci žáků ve vyučovací hodině a samozřejmě také strategie, jimiž žáci řeší úlohy. Ve svém příspěvku jsem se zabývala analýzou videoukázky vyučovací hodiny matematiky na prvním stupni ZŠ, a to jednak z pohledu edukačního stylu učitelky, jednak z matematického hlediska. Zveřejnění videa (vyvěšení na internet či jiné šíření) není bohužel možné, jelikož rodiče žáků si toto nepřáli, rovněž tak i paní učitelka¹.

Analýza videozáznamu aneb Nedorozumění třída – učitel

Natáčená hodina matematiky proběhla se souhlasem rodičů žáků ve 3. třídě běžné základní školy, kde se v tomto předmětu pracuje podle učebnic řady SPN. Paní učitelka vede tuto třídu 3 roky.

Hodina byla zahájena představením tématu, kterému se žáci budou v úvodních aktivitách věnovat. Jednalo se o násobku 5 a 6 a související dělitelnost. Úvodní činností byla známá hra „Bum“. Žáci stáli v kruhu společně s paní učitelkou, odříkávali vzestupnou číselnou řadu od nuly a místo každého násobku 6 museli říct „bum“. Kdo se spletl, byl paní učitelkou opraven.

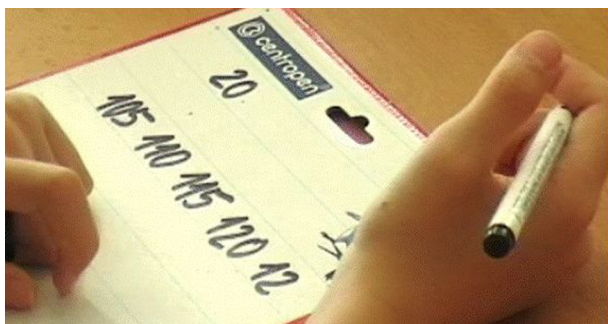
Poté přišla na řadu úloha, kterou jsem si vybrala jako stěžejní činnost pro svou analýzu. Žáci byli učitelkou instruktivně rozděleni do skupin po čtyřech a na stíratelné tabulky měli řešit úlohu, která byla předepsána na tabuli. Zadání úlohy (viz obr. 1) vypadalo takto:



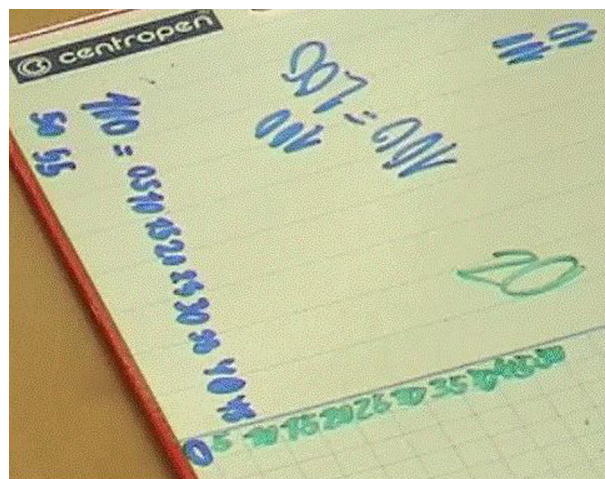
Obr. 1

Paní učitelka tuto úlohu uvedla žákům jako „něco na přemýšlení“ a v rozhovoru po ukončení hodiny mi sdělila, že nikdy podobnou problematiku se svými žáky neřešila. Žáci začali ve skupinách na úloze pracovat. Každé skupině byl přidělen dostatek fixů, ovšem s výjimkou jediné skupiny (viz obr. 3) se zapisování a zároveň řešení úlohy ujal vždy pouze jeden žák. Již po velmi krátké chvíli se hlásila první skupina (podle paní učitelky nejlepší žáci ze třídy) se svým řešením 20. Na tabulce měli napsáno pouze toto číslo, paní učitelka je proto vyzvala: „Já bych si to vyzkoušela na tu tabulku, já bych si to vypsala...“ Žákyně z této skupiny tedy začala zapisovat (viz obr. 2), zbytek skupiny se díval.

¹Zájemci o hlubší prozkoumání videoukázky mě mohou kontaktovat na adrese michala.kralova@post.cz.



Obr. 2



Obr. 3

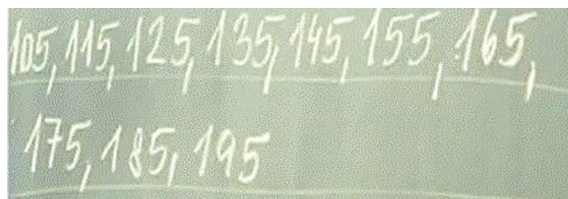
U další skupiny se objevil seznam 100, 105, 110, 115, 120 atd. Paní učitelka reagovala slovy: „Co máte brát za čísla, na která čísla se ptáme? Na pětku. A kolik pětek je v čísle 100 a 120?“ (Pozn.: Žákům nebyl poskytnut prostor pro odpověď, paní učitelka si ihned odpověděla sama.) Až poté jedna dívka ze skupiny (zapisovatelka) promluvila: „Jo pravda...“ a tabulku smazala.

Jiná skupina dospěla k tomuto řešení (obr. 3).

Opětovně se vyskytlo řešení 20. (Pozn.: V této skupině řešili úlohu současně tři žáci, aniž by při tom o svých zápisech navzájem hovořili. Pak se na tabulce náhle objevilo číslo 20, bez bližšího vysvětlení. Můžeme zde vidět nekorektní matematický zápis – chybné používání rovnítka, což žáci ve většině případů za chybu vůbec nepovažují. Po hodině jsem s touto skupinou provedla krátký rozhovor ohledně strategie řešení úlohy – v průběhu hodiny nezaznělo. Postup vedoucí je k výsledku 20 byl dle jejich slov následující: „Napsali jsme násobilku 5, to je teda 10 čísel. Takže ve stovce jich je 10 a musíme přidat ještě tu druhou stovku, takže 20.“ Je zde patrné, že žáci jsou stále v zajetí úvodní hry Bum a pracují s násobky pěti, nikoli s číslicí 5. Vše je navíc umocněno také oznámeným tématem pro úvodní činnosti.)

Čtvrtá skupina objevila řešení 10. (Pozn.: Na tabulku zapsali čísla 105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 175, 185, 195. V čísle 155 počítali pouze jednu číslici 5, proto se dostali ke svému výsledku 10.)

Paní učitelka zapsala na tabuli, jaká řešení se ve třídě vyskytla, tedy třikrát se objevil výsledek 20 a jedenkrát výsledek 10. Neptala se na řešitelské strategie vedoucí žáky k těmto výsledkům, rovnou je vyzvala, aby diktovali a sama prováděla evidenci čísel na tabuli. Diktování se ujala čtvrtá skupina (s výsledkem 10). Během zápisu se někteří žáci divili, proč se nezapisuje také číslo 110 – opětovné potvrzení toho, že žáci interpretují úlohu jinak, a to ve smyslu: „Kolik čísel dělitelných 5 je mezi 100–200.“ Evidence na tabuli vypadala následovně (obr. 4).



Obr. 4

Paní učitelka se poté obrátila na třídu, zda je tento seznam kompletní. (Pozn.: Ve své přípravě měla poznamenaný výsledek 12, výpočet nebyl uveden.) Třída trvala na tom, že takto je to

v pořádku. Na výzvu paní učitelky spočítali „pětky“. Dostali se k číslu 11. Paní učitelka na to reagovala slovy: „Ale mně tady jedno číslo chybí.“ (Pozn.: Sama byla upnutá na své řešení a najednou vznikla nejistota, jelikož výsledek na tabuli neodpovídal tomu z její přípravy.) Po chvíli se váhavě ozvala jedna dívka, která přišla na to, že v zápisu chybělo číslo 150. Paní učitelka znovu přepočítala všechny „pětky“ a dostala se ke svému výsledku, tedy 12. Tím byla činnost uzavřena, žáci nepoložili žádné dotazy a tento závěr přijali.

Závěr

Vzhledem ke skutečnosti, že se jednalo o čistě strukturální úlohu, nebylo možné ji dramatizovat. Zbývala tedy pouze cesta zapisování seznamu, což také paní učitelka učinila. V hodině se evidentně prokázalo, jak snadno se může učitel dostat do spárů vlastní chyby, tou celkově ovlivnit třídu a zavést ji špatným směrem. Paní učitelka si neprověřila výsledek, na který se zafixovala, zároveň nebyla připravena diskutovat s žáky jiné interpretace zadání. V hodině se u jednotlivých skupin objevily tyto:

A. Urči počet číslic 5 v seznamu 101 čísel 100, 101, 102, ..., 199, 200.

B. Urči počet čísel dělitelných číslem 5 v seznamu 100, 101, 102, ..., 199, 200.

C. Urči počet číslic 5 v seznamu čísel 105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 175, 185, 195.

Výsledky: u interpretace A je 20; u interpretace B je 21; u interpretace C je 11.

Jestliže ale u interpretace B z čísel 100 a 200 počítáme pouze jedno, výsledek je zde též 20.

Když nepočítáme ani jedno, výsledek je 19.

Žáci byli ovlivněni vstupní činností s násobky a nedokázali se od násobilky oprostit. Proto si úlohu interpretovali také způsobem B, C. Skupina, která úlohu vyřešila jako první (viz obr. 2), interpretovala zadání způsobem B, přičemž nepracovala s číslem 100, ale s číslem 200 ano. Proto se tito žáci dostali k výsledku 20. Interpretaci B použila i další skupina (viz obr. 3), která ji navíc podpořila výpočtem. Interpretace C se objevila u čtvrté skupiny (výsledek 10, po opravě 11).

V interakci s žáky postupovala paní učitelka autoritativně, ale nebyla nátlaková. Neshazovala žákovská řešení, na druhou stranu je bohužel ani neprozkoumala. V kognitivním směru se projevila velmi autoritativně, nepřipustila jiné řešení. Třída je zvyklá pracovat způsobem „paní učitelka má vždy pravdu“, nediskutuje. Nedorozumění, která v hodině vznikala, měla být zveřejněna a vysvětlena, např. v okamžiku, kdy žáci při vypisování seznamu diktovali 110, kde není žádná číslice 5, získali izolovaný model. Informace, že číslo 110 do seznamu nepatřilo je vedlo k vyvození generického modelu, tedy vypustili všechny následující násobky 10 (čísla 120, 130 atd.) a nechávali pouze čísla zakončená číslicí 5. Tím se také stalo to, že ze seznamu zcela bez povšimnutí vypadla čísla 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159.

Hodina byla dle mého názoru jasným důkazem skutečnosti, že učitel, který jde transmisí, je edukačně neúspěšný a zároveň i zranitelný v tom, kde on sám má strach z chyby. Pokud by paní učitelka postupovala konstruktivisticky a žáci přišli s myšlenkou, která neodpovídala jejím představám, ihned by žádala vysvětlení. Tím by se vyslovily různé interpretace zadané úlohy, žáci by o nich debatovali a srovnávali své řešitelské strategie. Řešení není úkolem učitele, nýbrž by mělo být ve vlastní režii žáků a vyplynout z jejich vzájemné diskuze.

Poděkování

Článek byl podpořen projektem SVV 267-402 Kvalita ve vzdělávání a ve výchově.

VÝUČBA KOMBINATORIKY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

Daša Palenčárová

Ústav matematický vied PF UPJŠ, Košice
palencarova.dasa@gmail.com

Vzdelávací obsah predmetu matematika je podľa ISCED 2 na slovenských základných školách rozdelený do piatich tematických okruhov [1]:

- Čísla, premenná a počtové výkony s číslami,
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy,
- Geometria a meranie,
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika,
- Logika, dôvodenie, dôkazy.

V tematickom okruhu Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika sa žiaci naučia systematicky vypisovať možnosti a zisťovať ich počet, čítať a tvoriť grafy, diagramy a tabuľky dát, rozumieť bežným pravdepodobnostným a štatistickým vyjadreniam.

Kombinatorika sa na základných školách vyučuje v 6. a 7. ročníku. Kombinatorika je ten tematický celok, ktorý si od žiakov nevyžaduje takmer žiadne vstupné matematické vedomosti. Na riešenie kombinatorických úloh im často stačí ovládať pojmy súčet, súčin a schopnosť riešiť matematické úlohy úvahou. No aj napriek tomu je medzi žiakmi často neoblíbená.

Úlohou učiteľa na hodinách kombinatoriky je pripravovať žiakov na pochopenie systematickosti pri riešení kombinatorických úloh, viesť ich k objavovaniu indukčného modelu, k rozvoju predstavivosti a odhadovaniu výsledkov počtových výkonov. Na hodinách im je potrebné ukázať, že matematika je efektívny prostriedok na riešenie problémov z praxe. Učiteľ by mal úlohy riešiť viacerými metódami (stratégiami), aby si následne žiak pri samostatnom riešení vybral tú, ktorá mu je najbližšia. Najčastejšími stratégiami, ktorými učitelia na hodinách kombinatoriky riešia so žiakmi úlohy sú: výpis všetkých možností, stromový graf (resp. obrázok), tabuľka, neskôr aj pravidlo súčtu, resp. súčinu.

Posledné výskumy ukazujú, že na obtiažnosť riešenia kombinatorických úloh vplýva aj formulácia (zadanie) slovnej úlohy, a to

- z pohľadu implicitných kombinatorických modelov (ICM),
- z procesuálneho a konceptuálneho hľadiska.

Implicitný kombinatorický model

Podľa Duboisa [2] jednoduché kombinatorické úlohy môžu byť klasifikované v troch implicitných kombinatorických modeloch:

model selection – znenie úlohy požaduje výber n objektov z m (vziať, vybrať, ťahať, zbierať, zvoliť),

model distribution – je propedeutikou zobrazenia, znenie úlohy požaduje rozdelenie n objektov do m buniek (umiestniť, rozdeliť, vložiť, priradiť, rozložiť),

model partition – je propedeutikou rozdelenia množín na podmnožiny, znenie úlohy požaduje oddeliť n objektov do m skupín (separovať, oddeliť, rozdeliť).

Experiment

V experimente, ktorý sme uskutočnili, sme sa zamerali na určenie vplyvu zadania kombinatorickej úlohy (z pohľadu ICM, konceptuálneho a procesuálneho) na správnosť riešenia u žiakov základnej školy. Experiment sme uskutočnili v dvoch častiach. V prvej časti, v mesiaci december sme žiakom dali riešiť tri kombinatorické úlohy, ktoré boli procesuálne zadane. O tri mesiace neskôr sme tým istým žiakom dali riešiť obsahovo tie isté úlohy, ale zadane konceptuálne. Experimentu sa zúčastnilo 59 žiakov 5. až 9. ročníka základnej školy. Žiaci v školskom roku, kedy sme úlohy zadávali, ešte výučbu kombinatoriky neabsolvovali.

Úlohy do experimentu

Do experimentu sme navrhli tri kombinatorické úlohy, každú na iný ICM, ale všetky sa dali riešiť rovnakou kombinatorickou operáciou. Pri druhej úlohe žiaci mali obrázok olympijských kruhov. V nasledujúcej časti uvádzame úlohy použité pre 1. časť experimentu (procesuálne zadane).

1. Danká prišla do predajne O_2 vziať si paušál O_2 fér, ktorý si môže sama vyskladať z extra balíčkov. Extra balíčkov je šesť – 50 min., 100 min., 300 min., 50 sms, 100 sms, 150 sms. Rozhodla sa vybrať si jeden balíček. Keď prišla do predajne, predavač jej ponúkol akciu, že má možnosť si vybrať dva rôzne balíčky v cene jedného. A tak sa rozhodovala, ktoré dva rôzne balíčky si vybrať. Koľkými spôsobmi si takto mohla vybrať paušál?
2. Symbolom olympiády sú olympijské kruhy, ktoré sú vzájomne prepojené. Janka sa pri pohľade na ne rozhodla farby kruhov zmeniť. Jej obľúbenou farbou je fialová, a touto farbou nie je ofarbený žiaden kruh. A tak vzala farbičku a jednému kruhu zmenila farbu na fialovú. Ako tak urobila, zdalo sa jej, že je tam málo fialovej farby a ofarbila fialovou farbou ešte druhý aj tretí kruh. Ak trom kruhom zmenila farbu na fialovú, tak si povedala, že už sa jej tie kruhy páčia. Koľko rôzne ofarbených symbolov s tromi fialovými kruhmi by takto mohla vytvoriť?
3. Majku príde dnes navštíviť kamarátka Katka a zajtra Peťka. Rozhodla sa, že dnes upečie jednu pizzu pre Katku a zajtra ďalšiu pre Peťku. V chladničke má 6 príloh na pizzu – šunku, salámu, šampiňóny, kukuricu, brokolicu a vajíčko (z každého jednu dávku). A tak si Majka položila všetky prílohy na stôl a rozhodovala sa, čo dá Katke na pizzu. Oddelila prílohy na pizzu pre Katku a ostatné dala pre Peťku do chladničky. Koľko rôznych možností má na rozdelenie príloh?

Vyhodnotenie experimentu

V tabuľke 1 uvádzame vyhodnotenie jednotlivých úloh v oboch častiach experimentu.

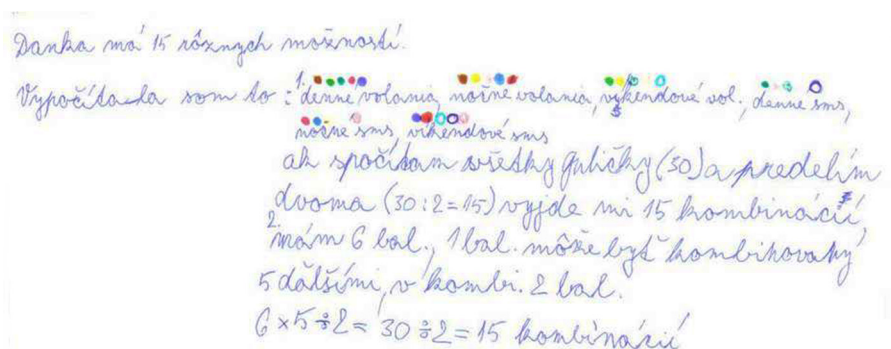
Tab. 1: Vyhodnotenie experimentu

	Procesuálne zadane úlohy						Konceptuálne zadane úlohy					
	Úloha 1 (selection)		Úloha 2 (distribution)		Úloha 3 (partition)		Úloha 1 (selection)		Úloha 2 (distribution)		Úloha 3 (partition)	
Správne	37	63 %	27	46 %	17	29 %	22	37 %	15	25 %	8	14 %
Nesprávne	21	35 %	30	51 %	38	64 %	31	53 %	39	66 %	42	71 %
Neriešili	1	2 %	2	3 %	4	7 %	6	10 %	5	9 %	9	15 %

Žiaci v oboch častiach experimentu najčastejšie riešili úlohy výpisom možností. V nižších ročníkoch sa častejšie objavili obrázky a tabuľka.

Ako môžeme vidieť z tabuľky, v procesuálne zadaných úlohách je viac správnych riešení ako v konceptuálne zadaných, a to aj napriek tomu, že boli zadávané ako prvé. Pri porovnaní úspešnosti úloh z pohľadu ICM v oboch častiach experimentu vidieť, že úlohy modelu selection sú pre žiakov ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu distribution. Najmenej správnych riešení nachádzame pri úlohách modelu partition. Pri procesuálne zadaných úlohách sú tieto rozdiely v úspešnostiach jednotlivých úloh ešte výraznejšie.

Výsledky experimentu ukazujú, že spôsob zadania úlohy má vplyv na obtiažnosť riešenia úloh, a to aj z pohľadu konceptuálneho a procesuálneho zadania, aj z pohľadu ICM. Na záver uvádzame riešenie 1. úlohy žiačky 7. ročníka, ktorá k riešeniu napísala aj príslušný komentár. Zaujímavé na jej riešení bolo, že v komentári využíva slovo kombinácia a v žiadnych iných riešeniach jej spolužiakov sa toto slovo v komentároch nenachádza.



Obr. 1: Žiacke riešenie úlohy 1

Použitá literatúra

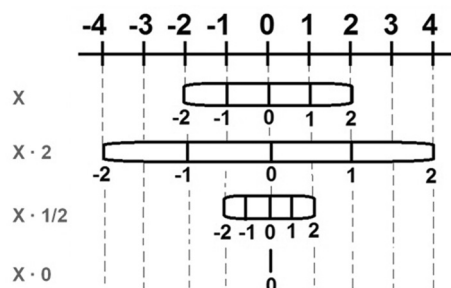
- [1] Štátny pedagogický ústav. *Štátny vzdelávací program, Matematika*. Príloha ISCED 2. [online]. Bratislava : ŠPÚ, 2009. [cit. 2013-03-28]. Dostupné z: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf
- [2] BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, V., GODINO, J. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*. 1997, vol. 32, no. 2, pp. 181–199.

SETKÁNÍ S NULOU

Sylva Peclinovská

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
sylva.chaloupkova@centrum.cz

Nula je zvláštní číslo. Když řekneme, že máme 5 lízátek, je to jasné. Řekneme-li, že jich máme 0, nemáme vlastně žádné. Sečteme-li nekonečně mnoho nul, dostaneme zase nulu. Když přičteme nebo odečteme od daného čísla nulu, je to jako kdybychom vůbec nic neudělali. Ještě horší je to u násobení. Charles Seife (2005) násobení přirovnává k napínání nebo naopak povolování pásku (obr. 1).



Obr. 1

Vynásobíme-li něco dvakrát, pásek se nám dvakrát prodlouží. Vynásobíme-li jednou polovinou, pásek se uvolní a jeho délka se dvakrát zmenší. Násobíme-li ale nulou, napínaný pásek přestane fungovat. Smrští se do jediného bodu, protože cokoli násobíme nulou, je zase jen nula. No a co teprve dělení? Pokud se nám v prvním případě při násobení dvěma délka pásku dvakrát prodloužila, při zpětném dělení dvěma se dostáváme k původní délce pásku. Mělo by tedy i platit, že pásek smrštěný do bodu nula by se měl po dělení nulou znovu roztáhnout do původní délky. Zde je již ale vidět, že se nula zcela vymyká pravidlům ostatních čísel a že dělit nulou nemá vůbec smysl. A tak „zatímco násobení nulou boří číselnou osu, dělení nulou ničí celý rámec matematiky.“ (Seife, 2005, s. 32)

Díky těmto vlastnostem nula způsobovala nemalé obtíže i v historii matematiky a vlastně díky nim trvalo západním kulturám tisíce let, než nulu přijaly mezi ostatní čísla. Dokonce i ve starověkém Řecku, působišti vynikajících matematiků a myslitelů jako byli například Pythagoras, Aristoteles nebo Ptolemaios, patřily úvahy o nule k těm zásadně odmítaným či dokonce trestaným. Řecká filosofie byla postavena na řádu a harmonii, která prostupuje přírodu i celý vesmír. A tak odmítali cokoli, co by se tomuto řádu vymykalo. Odmítali tedy vše související s nekonečnem či prázdnotou. Navíc tvrdili, že všechno je číslo. Vše kolem nás se dá vyjádřit pomocí číselných poměrů. Každé číslo zároveň představovalo určitý tvar. Geometrické chápání čísel tak již dopředu znemožňovalo úvahy o nule jako o čísle. Nula pro ně postrádala jakýkoli geometrický smysl.

A tak první, kdo začal s nulou zacházet, byli Babyloňané. Ti používali šedesátkovou soustavu. Pro účely astronomie Řekové tuto početní soustavu přijali, a tak dnes hodinu rozdělujeme na šedesát minut a minutu na šedesát sekund. Oproti egyptskému a řeckému systému však Babyloňané nepoužívali jeden symbol pro označení pouze jednoho čísla. Tak například jednoduchý klín mohl znamenat 1, 60 ale i 3600, a to podle toho, na jaké pozici stál na počítací pomůcce abaku,



Obr. 2

který silně připomíná současná dětská počítadla. V zápisu čísel však tato pozice nebyla zřejmá, proto byl vytvořen nový znak, dva šikmé klíny, jenž zastupoval prázdné místo ve sloupci abaku (obr. 2).

Nula zde tedy nepředstavovala žádnou numerickou hodnotu, její funkce byla spíše pro upřesnění pozice symbolů. Vzpomeňme si ale, že takto někdy používáme nulu i dnes. Stačí se podívat na telefon nebo klávesnici počítače, kde nula je nelogicky řazena až za devítku.

Nula se do Řecka dostala díky astronomii, kterou Řekové milovali a Babyloňané v ní byli mistři. Absence nuly Řekům komplikovala výpočty, přesto ji však nikdy nepřijali. Používali ji jen v nejnútnejších případech. I přesto pak po provedení výpočtů v babylonském systému údaje složitě převáděli zpět do řecké číselné soustavy, ve které nula nebyla obsažena.

O řecké učení, především o konečnosti vesmíru se Zemí ve svém středu, se silně opírala církev. Každý pokus o narušení této představy tedy znamenal postavení se proti církvi a tudíž i proti bohu. Ale ač církev velmi dlouho vzdorovala, nakonec tato představa byla překonána. Pro nulu se tak konečně otevřel prostor zapojit se do vývoje matematiky. V této době však východní kultury, především indická, již sbíraly s nulou první zkušenosti.

Příklady z Řecka a Babylonu jsou jen malým zrnkem na cestě seznamování se s nulou v historii matematiky. Domnívám se však, že i jen okrajové znalosti o tom, jak se postupně vyvíjely matematické představy lidí, mohou napomoci snaze porozumět utváření představ našich žáků. Občas se totiž potýkají se stejnými problémy, jako naši předci.

V současné době se s nulou žáci setkávají od počátku školní docházky. Poznávají její symbolický zápis, její funkci v zápisu s ostatními číslicemi, utvářejí si představu o její hodnotě a postavení mezi ostatními čísly. Fragment z utváření těchto představ se mi podařilo zachytit loni u žáků 4. ročníku 1. stupně ZŠ. S těmito žáky řešíme nejrůznější matematické problémy již od 2. ročníku a vždy se jim snažím nechávat dostatek prostoru k diskuzím nad daným problémem. Mnohokrát jsem si již totiž ověřila, že z těchto hodin si odnášejí hlubší matematické poznání než z těch, kdy se jim snažím něco vysvětlit. Zřejmě i mimo jiné zapojení emocí, které vždy do argumentací vkládají, hraje zásadní roli při uložení vzpomínek na tyto diskuze. Ty se pak vynoří často v pro mě nečekaný okamžik a propojí se s nově sbíranými zkušenostmi. Žáci mě tak nejednou již překvapili objevením souvislostí, které jsem si ani neuvědomovala. Takovým případem jsou i dva příběhy, představené a analyzované v rámci prezentace ve formě videozáznamu. Samotná analýza videa je pak dále blíže představena v rámci příspěvku konference SEMT 2013.

Dnes je již nula považována za samozřejmou součást našeho života. Přesto je ale stále opřena jistou magičností. Vždyť proč prožíváme 10., 20., 30., tzv. kulaté-narozeniny, více než ty ostatní. Proč autoři vědecko-fantastické literatury volili právě rok 2000 jako dobu, do které umístili létající auta, fantazijní vynálezy a lidi připomínající spíše stroje. A vzpomeneme-li na rok 2000, tak právě obava z nuly, nazvaná jako Chyba roku 2000, nám připomene, že nula dokáže potrápiti i současný svět.

Poděkování

Článek byl podpořen projektem SVV 267-402 Kvalita ve vzdělávání a ve výchově.

Literatura

- [1] SEIFE, Ch. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha : Argo, 2005, 263 s. ISBN 80-736-3048-6.
- [2] CHÓRÉZMÍ, Muhammad ibn Músa a Muhammad ibn Músa CHÓRÉZMÍ. *Aritmetický a algebraický traktát*. 2., opr. a dopl. vyd. Překlad Petr Bogan. Nymburk : OPS, 2009, 212 s. Prameny evropské vzdělanosti. ISBN 978-80-87269-07-7.

CHYBY, JEJICH PŘÍČINY A HODNOCENÍ

Derek Pilous

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
derek.pilous@pedf.cuni.cz

V příspěvku na loňských Dvou dnech jsem se věnoval žákovským chybám ve výuce matematiky z praktického hlediska, především kategorizaci, ukázkám zajímavých chyb a jejich analýze. Současný příspěvek je věnovám teorii chyb a jejich roli ve vyučování. Ač obsahuje i shrnutí relevantních poznatků o chybě z literatury, jeho cílem je spíše upozornit na důležité aspekty chyby, které by si měl učitel matematiky uvědomovat a které pro něho mohou být podkladem k sebe-reflexi zpracování žákovských chyb ve vlastní výuce. Článek byl zpracován na základě literatury uvedené v závěru.

1 Žákovská chyba ve výuce matematiky vs. matematická chyba

Žákovská chyba ve výuce matematiky (dále jen *žákovská chyba*) se do značné míry kryje s *chybou matematickou* (a matematická chyba je také tzv. *prototypem* žákovské chyby, neboli, zjednodušeně řečeno, tím, co se učitelé pod pojmem žákovská chyba vybaví), není s ní však totožná. Při posuzování, zda je určitý krok správný matematicky, hodnotíme pouze jeho logickou správnost (typicky, zda vyplývá z kroků předchozích, resp. zda je s nimi konzistentní). Cílem výuky však nejsou matematické výsledky, ale jedinec schopný tyto výsledky produkovat. Hodnotíme tedy především schopnost dosáhnout záměru, a chybou může být i krok, který je matematicky správný, ale dosažení cíle znemožňuje. Příkladem je řešení rovnice

$$(x^2 - x - 2)^2 = 1,$$

kterou lze (odmocněním a řešením dvou kvadratických rovnic) lehce řešit i na středoškolské úrovni. Umocnění levé strany a převedení jedničky na levou stranu – což je matematicky správná úprava – však vede na úlohu nalezení iracionálních kořenů polynomu čtvrtého stupně, která je i pro studenty matematických vysokoškolských oborů prakticky neřešitelná. V jiných případech nemusí podobný krok vyřešení znemožnit, ale zásadně zkomplikovat (lze říci, že takové případy jsou ještě horší, protože nelze-li v řešení pokračovat, je to pro žáka signál k návratu k předchozím krokům a pokusu o novou strategii řešení, zatímco pokud pokračovat lze, byť s vysokými náklady, má žák obecně tendenci u zvoleného postupu setrvat). To ukazuje na podstatné kritérium hodnocení správnosti žákovského postupu – *efektivitu*, která v hodnocení matematické chyby nehraje roli.

Žákovská chyba se však od matematické liší i v opačném smyslu. Lze totiž považovat za správné i postupy, které nejsou matematicky smysluplné či správné (jejich zápis není formálně matematicky interpretovatelný či korektní), je-li z nich zřejmá správnost algoritmu řešení. Příkladem běžně užívaných, ale matematicky jednoznačně neinterpretovatelných objektů jsou např. různé náčrtky a grafy. Častou chybou v zápise je vynechání podstatných částí – například studenti seznamující se s algoritmy výpočtu limit velice často v průběhu výpočtu vynechávají symbol limity. Myšlenkově je pak jejich postup správný, ale formálně se dopouštějí chyby, protože kladou rovnost mezi číslem (limitu) a funkcí.

Zcela jasným rozdílem mezi žákovskou a matematickou chybou je pak koncept *závažnosti chyby*. Ten z matematického hlediska nemá smysl (krok je buď správný nebo chybný, a mezi chybnými matematika nijak nerozlišuje), ale každý učitel mu intuitivně rozumí, umí závažnost hodnotit a zpravidla toto kritérium také uplatňuje při klasifikaci.

Jmenované vlastnosti způsobují, že žákovská chyba a její hodnocení je na rozdíl od chyby matematické do určité míry subjektivní, a skutečně se také učitelé v hodnocení chybnosti či závažnosti chyby liší. Autor provedl dotazníkové šetření, v němž učitelé různých typů škol¹ hodnotili závažnost konkrétních chyb a také vyjadřovali subjektivní názor na následující otázky:

1. Je chybný celý postup řešení počínaje první odchylkou od správného postupu, nebo je třeba chybnost posuzovat vzhledem k předchozímu kroku?
2. Je chybou nepoužití konkrétního postupu či zápisu?
3. Jsou chybou součásti postupu, které nejsou matematicky smysluplné, jednoznačné či korektní?
4. Jsou chybou součásti postupu, které nejsou relevantní?
5. Hraje u irelevantních součástí roli správnost?
6. Je chybou krok, který je matematicky správný, ale znemožňuje další postup?
7. Jak byste ohodnotili situaci, kdy žák k jednomu zadání odevzdá dvě řešení, správné a chybné?

Otázky vycházejí ze skutečných rozdílů v hodnocení chyby různými učiteli, které jsem ve své praxi nasbíral. Dotazníky potvrdily, že nešlo o rozdíly náhodné, ale že se učitelé v odpovědích na tyto otázky skutečně významně liší. Čtenářům doporučuji na otázky samostatně odpovědět a provést reflexi, zvláště uvážit, proč jiní učitelé odpovídají jinak. Důležitým faktorem je to, že otázky byly formulovány záměrně obecně, takže konkrétní interpretace může zásadně ovlivnit odpověď.

Většina otázek je zaměřena na výše popsané vlastnosti žákovské chyby. Výjimky jsou dvě. První otázka v důsledku míří k málo diskutované otázce *ekonomie výuky* – hodnocení chyby vzhledem k předchozímu kroku je zjevně spravedlivější (jinak např. numerická chyba v úvodu úlohy znamená neuznání jinak správného postupu), znamená však, že učitel při např. při opravě testů musí přepočítat řešení vzhledem ke každé provedené chybě. Je přirozené ptát se, zda je takové vynaložení učitelova času vzhledem k výsledku efektivní. Druhou výjimkou je poslední otázka, která na rozdíl od ostatních zkoumá konkrétní jev. Odpověď na ni však zásadně vypovídá o postoji učitele k matematice a její výuce.

2 Přístupy k chybě

Přístup učitelů v praxi i odborníků k chybě při učení je rozpolcený. Jedna skupina učitelů i psychologických teorií učení chybu zásadně odmítá. Východiska těchto teorií jsou různá, dominantní je behaviorismus. Společným tvrzením je, že bude-li se žák učit jen správné, nemůže se prakticky dopustit chybného, a naopak chyba se může zafixovat a působit problémy při dalším učení. Proto má být výuka rozdělena na tak malé kroky, že každý žák každý krok zvládne správně. Chyba žáka je pak chybou učitele, který špatně navrhl či realizoval učební plán. V učební praxi ovšem chyby nevyhnutelně nastávají, proto se odmítání chyby projevuje spíše tím, že je vysoce

¹Šlo bohužel o poměrně malý a nikoli náhodný vzorek.

penalizována i mimo testování (ve fázi osvojování látky), a není nijak didakticky zpracovávána. Chyba je považována za narušení ideální výuky a záměrem učitele je potlačit její výskyt. To může ovlivnit jeho koncepci výuky (neboť výskyt chyb lze snížit např. pojetím výuky jako drilu vybraných technik či typových příkladů), i jeho hodnocení chyb ve třídě – sociální penalizací u žáků buduje úzkost z chyby.

Druhá skupina praktiků a teorií učení považuje naopak chybu za nevyhnutelný jev, který je nutno do koncepce výuky zahrnout a využít. Východiska jsou opět různá, ale převážně konstruktivistická. Základní myšlenkou je, že chyba je nevyhnutelná při tvorbě komplexního poznatku (ať už různé teorie rozumějí pod pojmem poznatek cokoli), a učení s chybami je efektivnější než bez nich. Většina teoretiků rozděluje chyby podle toho, zda jsou didakticky využitelné; pro kladný případ je rozšířen termín *kognitivní chyba*. Praktici tohoto směru na základě zkušeností rozumějí příčinám většiny chyb, se kterými se u svých žáků setkávají, a didakticky je využívají – např. společnou analýzou chyb ve třídě. Někteří učitelé záměrně vytvářejí situace, které testují hranice žakovských poznatků, což produkuje množství chyb. Zde se nejlépe projevuje často uváděná role chyby jako diagnostického nástroje. Celkový postoj k chybě je takový, že při testování osvojení látky by žáci měli být schopni produkovat bezchybné výsledky, ale k dosažení tohoto stavu – tedy pro osvojení látky – je chyba důležitým nástrojem, a je tedy do určité míry žádoucí.

Jak se ukazuje, zdánlivě jasně protichůdné teorie se dobře doplňují, protože nejlépe fungují v odlišných kontextech. Učení bez chyb se uplatňuje u paměťového, asociativního učení. Je proto dosti populární např. při výuce cizích jazyků. Důležitost chyby vzrůstá s tím, nakolik jsou výstupy v daném předmětu konstruktivního charakteru (tedy jak složitě se vytváří ze vstupu – např. zadání úlohy – výstup). Matematika je v tomto kritériu na opačném pólu než jazyky, a plnohodnotné učení se bez chyb v ní není možné. Vzniká jím jen to, co prof. Hejný nazývá *protetickým poznatkem* (např. situace, kdy žák ovládá řešení určitého typu úlohy pouze algoritmicky a podstatě věci nerozumí, což prokáže neschopnost řešit úlohu se zadáním přeformulovaným tak, aby neobsahovalo signály, k nimž má žák algoritmus řešení přiřazen). Proto jsou teorie výuky bez chyb rozšířené v psychologii, ale v didaktice matematiky prakticky absentují (to ovšem neznamená, že by role chyby ve výuce byla hodnocena všemi didaktiky matematiky stejně).

Důležitost chyby pro utváření poznatku spočívá v tom, že poznatek vymezuje „zvenku“, tedy, omezuje jeho obor platnosti. Získaný poznatek není v myšlenkové struktuře obecně omezen oborem skutečné platnosti, bez ohledu na to, nakolik je tento obor zdůrazněn. Ve skutečnosti je místo něj nejprve používán obor aplikovatelnosti, nekoliduje-li s jiným, již fixovaným poznatkem. Když se například žáci učí sčítat zlomky, často je „sčítají“ nejjednodušším možným způsobem, tedy čítec s čítec, jmenovatel s jmenovatelem, přestože jim byl správný algoritmus sčítání vyložen. Je tomu tak proto, že jde o nejjednodušší rozšíření předchozím úspěšným používáním fixovaného algoritmu sčítání celých čísel (tedy sčítání zlomků je v oboru aplikovatelnosti tohoto poznatku). Teprve jeho (většinou až opakovaný) neúspěch (chyba) způsobí, že jsou zlomky vyňaty z oboru platnosti poznatku o prostém sčítání čísel a tomuto kontextu je přiřazen nový algoritmus. Takový žák je pak proti tomuto typu chyby odolnější než ten, který v okamžiku osvojování aplikoval pouze správný algoritmus. Jiným příkladem je pravidlo násobení nulou, tedy „cokoli krát nula je nula“. To je také fixováno úspěšným používáním natolik, že v prostředí, kde neplatí (rozšířená reálná osa, tedy s nekonečny; typicky v limitním počtu), je zpravidla zapotřebí několika chyb, aby žák začal testovat jeho použitelnost. Účinnost chyby na změnu poznatku je závislá na více faktorech, především na překvapení (čím vyšší je žakovo očekávání, že výsledek je správný, tím je chyba pravděpodobněji účinnější) a na subjektivním posouzení důležitosti situace (studenti se nejrychleji učí na zkoušce).

Každý žák v průběhu svého matematického vzdělávání a při jakémkoli dalším použití matematiky se dopouští chyb. Tato skutečnost dnes zpravidla není ve výuce prakticky reflektována –

žáci nejsou vedeni k metodám detekce chyb, jejich analýzy a odstraňování (ani v tomto směru není vypracována ucelená metodika). Efektivita zavedení práce s chybou je ovšem samozřejmě závislá na tom, jaké cíle výuky stanovíme. Je-li jimi pouze příprava žáků na typizované testování (od malých písemek po přijímací zkoušky), jak je dnes dosti obvyklé, pak je používání chyby jako typicky konstruktivistického nástroje zbytečné. Pokud však chceme u žáků vybudovat robustní matematické poznatky (z nichž je potom jako jednoduchá aplikace odvoditelné i řešení typových úloh), je naopak prakticky nevyhnutelné.

3 Současné paradigma chyby

Na závěr shrnuji poznatky o chybách, na nichž je v didaktické literatuře podstatná shoda.

3.1 Zákonitost chyby

Chyba není náhodná (všechny chybné výsledky nejsou stejně pravděpodobné). Je to produkt (prakticky) omezeného počtu poznatelných psychických mechanismů. Tento fakt je základním předpokladem pro to, aby mělo zkoumání chyby smysl a bylo prakticky využitelné. Zároveň je však třeba si uvědomovat, že analýza příčin každé konkrétní chyby je bez dodatečných informací od chybujícího žáka vždy do jisté míry spekulativní a náchylná k tomu, aby byla náhodné informaci přiřazena systematická hodnota. Proto ji nelze považovat za exaktní vědu. Význam pozorovaných jevů vzrůstá s množstvím dat, obecně tedy nemůžeme s určitostí o žákovi nic říci z jedné chyby, ale z mnoha chyb již ano, a také můžeme z chyb různých žáků při jedné příležitosti (např. testu) usuzovat na stav poznání celé skupiny.

3.2 Chyba a výzkum poznávacího procesu

Analýza chyb může být podkladem pro stanovení a rozhodování o hypotézách procesu poznání u jedince. Prakticky každý autor teorie vzniku matematického poznatku ilustruje svá tvrzení vybranými příklady chyb. Toto sekundární užití chyb je celkově podstatně rozšířenější než zkoumání chyb jako takových.

3.3 Přenositelnost výsledků

Vzhledem k tomu, jaký vliv má na chyby žáků konkrétní kontext (věk, látka, cíle a způsob jejího výkladu, předchozí znalosti žáků, dokonce i národní specifika matematické kultury), je přenositelnost výsledků výzkumu kontextově specifických chyb (např. těch, kterých se dopouštějí žáci amerických základních škol při výuce řešení lineárních rovnic) značně omezená. Obecně stoupá s mírou abstrakce výsledků, která však snižuje jejich bezprostřední použitelnost pro reedukaci.

3.4 Kategorizace

Tendence ke klasifikaci chyb do kategorií je v literatuře mimořádně silná. Kategorizace je obecně považována za mocný nástroj, má však podstatná omezení. Autoři se shodují především na nemožnosti vytvoření úplné a jednoznačné kategorizace (tedy takové, ve které by každou chybu bylo možno zařadit právě do jedné kategorie) nezávislé na kontextu, a dále, jak bylo zmíněno výše, na spekulativnosti určování příčin chyb. Výzkum kategorizací se proto přesouvá na metaúroveň; místo toho, jak rozčleňovat chyby do předem pevně stanovených kategorií, se autoři zabývají otázkou, jak pro daný kontext a cíle vytvořit vhodné kategorie chyb.

3.5 Kognitivní modely

Nejobektivnější popis chyb umožňují nástroje kognitivní vědy. Chyby jsou pomocí nich popsány jako nesprávné zpracování informací. Obecným problémem teorií poznání je metoda introspekce (tedy pozorování sama sebe), která je principiálně subjektivní. Chápeme-li ovšem proces myšlení jako převod vstupní informace na informaci výstupní, musejí být při něm nutně provedeny určité úkony a má také jistou neredukovatelnou složitost (ať už je provádí člověk nebo jiný kognitivní systém). Tento fakt zkoumání procesu lidského poznání do značné míry objektivizuje. Mnoho vlastností poznávacího procesu (jako například existence operační a dlouhodobé paměti, reprezentace konceptů tzv. prototypy nebo stochastická volba algoritmu řešení úlohy) lze také vysvětlit jako nejefektivnější řešení problému zpracování informací.

Pro úvahy o vzniku matematických poznatků je také podstatný evoluční původ lidského kognitivního systému. Pro člověka v původních podmínkách nebylo poznání cílem, nýbrž nástrojem přežití. Pro tento účel stačí „přibližné“ uvažování s řadou „zkratk“ (protože při typické situaci nedokonalých vstupních dat je jejich přesné zpracování zbytečně náročné). Exaktní myšlení tedy pro člověka není přirozené a je nutno se mu dosti pracně učit.

3.6 Kvalitativní zkoumání

Čistě kvantitativní výzkum nám může dát pouze informaci o frekvenci výskytu určité chyby. Pro didaktické využití je však nezbytné poznat její příčinu (a také to, zda je jen jedna), což nutně vyžaduje kvalitativní přístup. Také stanovení smysluplných a relevantních kategorií je závislé na kvalitativní analýze chyb.

3.7 (Ne)odstranitelnost chyb

Chyby nejsou zcela odstranitelné, už proto, že původ části z nich není pedagogicky ovlivnitelný. Jedná se především o chyby z nepozornosti (často tzv. numerické chyby), kdy žák (ale i učitel) udělá chybu, přestože plně ovládá správný postup. Jde opět o důsledek evoluční adaptace – pozornost je velmi náročná a vyčerpávající, proto je přidělována pouze výběrově. Je-li jedinec schopen provádět určitý úkon dostatečně přesně (což ani v matematice neznamená zcela přesně) i při snížené pozornosti (to nastává při částečné či úplné automatizaci úkonu), pozornost při jeho vykonávání automaticky klesá. Penalizace takto vzniklých chyb je pedagogicky problematická – zjevně neplní svoji normální funkci, tedy zpětnou vazbu, na jejímž základě by měl žák restrukturalizovat poznatek směrem k ideálnímu stavu, a stresuje žáka, neboť se jí není schopen vyhnout. Pokud však shledáme zkoumání příčin chyb učitelem neefektivní (jak bylo jako možnost naznačeno na konci první kapitoly), je nevyhnutelná.

Poděkování

Článek byl podpořen projektem SVV 267-402 Kvalita ve vzdělávání a ve výchově.

Literatura

- [1] BORASI, R. *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. ISBN 1-56750-167-2.
- [2] DAVIS, R. B. *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. Ablex Publishing Corporation, 1984.

- [3] HALL, R. An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal (PoME)* [online]. No. 15. březen 2002 [cit. 2012–01–25]. Dostupný z WWW: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf
- [4] HEJNÝ, M. Chyba jako pedagogický fenomén. In *Dítě, škola, učitel*. Sborník k životnímu jubileu prof. PhDr. Zdeňka Heluse, DrSc. Eds: Z. Hadj Moussová, S. Štech, Praha : Univerzita Karlova, 2001.
- [5] KULIČ, V. *Chyba a učení*. 1. vydání. Praha : SPN, 1971.
- [6] Michalcová, A. Ako my učitelia vnímame chybu vlastnú i chybu žiaka. *Sborník konference Dva dny s didaktikou matematiky*, 2002.
- [7] NOVÁKOVÁ, A., PILOUS, D. Rovnice a nerovnice a chyby při jejich řešení. *Sborník konference Dva dny s didaktikou matematiky*, 2012.
- [8] RADATZ, H. Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 10, No. 3, May, 1979
- [9] RADATZ, H. Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, No. 1, Jul., 1980

PREPOJENIE MATEMATICKÝCH KOMPETENCIÍ S ÚLOHAMI Z KOMBINATORICKEJ GEOMETRIE

Anna Polomčáková

Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach
a.polomcakova@gmail.com

V súčasnej dobe je v rámci kurikula snaha o prepojenie matematických kompetencií s matematickým obsahom. Kompetencií je veľa (popis konkrétnych matematických kompetencií pozri napríklad v štúdiu OECD PISA [1], alebo Sekerák [2]) a nedajú sa rozvíjať naraz všetky kompetencie a ani celý obsah matematiky, preto sa bližšie zameriame na oblasť kombinatorickej geometrie.

Kombinatorická geometria by sa dala popísať ako prelínanie princípov z oblasti kombinatoriky a geometrie. Zaoberá sa kombinatorickými vlastnosťami (kombináciou a usporiadaním) jednotlivých geometrických objektov. Otázky sa týkajú konečného počtu geometrických objektov ako sú body, priamky, roviny, kružnice, gule, polygóny atď. a zameriavajú sa na kombinatorické vlastnosti týchto objektov, napríklad ako sa navzájom pretínajú, alebo ako môžu byť usporiadané.

Model úloh z kombinatorickej geometrie

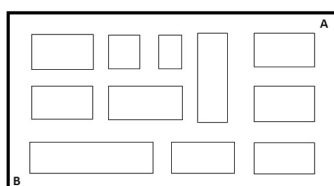
Po preštudovaní dostupných materiálov, na základe uskutočnenej analýzy rôznych učebníc matematiky pre základné a stredné školy a následnej analýzy úloh, ktoré by sa dali zaradiť do oblasti kombinatorickej geometrie, keďže tematický celok s takýmto názvom sa v Slovenskom štátnom vzdelávacom programe nevyskytuje, sme zistili, že dané úlohy sa dajú klasifikovať podľa rôznych kritérií. Na základe tohto zistenia sme vytvorili model, ktorý každej úlohe z kombinatorickej geometrie priradzuje niekoľko atribútov. Konkrétne sú to: typ úlohy, geometrický objekt, kombinatorický jav, matematická kompetencia a úroveň úlohy. V nasledujúcej časti bližšie popíšeme tieto atribúty.

Typ úlohy

Úlohy z kombinatorickej geometrie sme rozdelili do šiestich skupín podľa toho, čo sa deje s daným objektom v úlohe (napr. farbenie, pokrývanie, ...). Pri každom type uvádzame konkrétny príklad úlohy, ktorá by sa dala zaradiť k danému typu.

1. *Bludiská*

Na obr. 1 je výsek plánu mesta, v ktorom býva Mišo. Chce sa dostať z domu (A) do obchodného centra (B), aby sa stretol s kamarátmi. Koľkými spôsobmi to vie urobiť, ak smie ísť len smerom doľava a nadol?



Obr. 1

2. *Farbenie útvarov*

Koľkými spôsobmi možno kváder s dvoma štvorcovými stenami zafarbiť dvoma farbami? Každá stena musí byť zafarbená celá, a to jednou farbou.

3. *Bodové systémy*

Vyznačte 6 rôznych bodov v rovine, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.

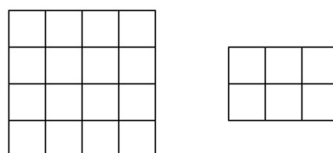
- Koľko priamok je určených týmito bodmi?
- Koľko rôznych trojuholníkov má svoje vrcholy v týchto bodoch?

4. *Skladanie útvarov*

Koľko rôznych komínov môžeš postaviť z troch rovnako veľkých kociek rôznej farby?

5. *Delenie na časti*

Rozdeľ na rovnaké časti tieto kúsky čokolád. Nájdi čo najviac možností.

6. *Pokrývanie*

Majme chodbu v tvare obdĺžnika s rozmermi 6×2 . Koľkými spôsobmi ju môžeme vydláždiť pomocou dlaždíc o rozmere 2×1 ? Dlaždice nemôžeme orezávať.

Geometrický objekt

Úlohy z kombinatorickej geometrie sa vždy týkajú geometrických objektov. Možu to byť: body, úsečky, priamky, roviny, kružnice, n -uholníky, mnohosteny, gule.

Kombinatorické javy

Skúmanie matematických schopností a zručností, ktoré sa viažu k obsahu kombinatoriky (nakolko sa kombinatorická geometria zaoberá kombinatorickými vlastnosťami geometrických objektov) uskutočnené prostredníctvom analýzy učebníc základných a stredných škôl viedlo k vytvoreniu zoznamu činností, ktoré nazývame *kombinatorické javy*. Tento zoznam je otvorený a závislý od analyzovaných úloh. Na ilustráciu uvádzame niekoľko príkladov zo zoznamu 49 popísaných kombinatorických javov.

- Urobiť výber z objektov.
- Zistiť, koľkými spôsobmi možno výber urobiť.
- Vypisovať všetky možnosti.
- Systematizovať výpis možností (mať systém vo vypisovaní možností).
- Sprehľadňovať výpis možností.

Matematické kompetencie

J. Sekerák [2] vo svojej dizertačnej práci popísal 12 kategórii matematických kompetencií, z ktorých každá zahŕňa niekoľko kompetencií. M. Kolková [3] vo svojej dizertačnej práci uvádza, že tieto kategórie majú rôznu úroveň. Kategórie *Matematické myslenie a usudzovanie*; *Matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy*; *Znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia*; *Matematické modelovanie* označuje ako „základné“.

Každému kombinatorickému javu sme priradili zo zoznamu „základných“ matematických kompetencií príslušnú kategóriu a matematickú kompetenciu. Konkrétny príklad uvádzame v tabuľke 1.

Tab. 1 Kombinatorické javy a k nim priradené matematické kompetencie

Kombinatorický jav	Matematická kompetencia	Kategória matematických kompetencií
vypisovať všetky možnosti	popisovať a znázorňovať matematické objekty a situácie jasne, stručne, presne, zrozumiteľne	znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia
zvážiť všetky možné usporiadania daného počtu objektov	analyzovať, analyticky a kriticky myslieť	matematické myslenie a usudzovanie
zvážiť, či zmena poradia ovplyvní počet všetkých možností	logicky myslieť a usudzovať	matematické myslenie a usudzovanie

Úroveň úlohy

Použitie matematiky vedie k súčasnému použitiu viacerých kompetencií, preto PISA [1] popisuje aktivity obsahujúce tieto kompetencie pomocou troch úrovní:

1. *reprodukčná úroveň* – riešenie rutinných problémov, reprodukcia naučeného materiálu,
2. *úroveň prepojenia* – úlohy obsahujú známe, alebo pomerne známe prvky, vyžadujú si prepojenie rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými rôznymi reprezentáciami daného problému,
3. *úroveň reflexie* – obsahuje prvok uvažovania o procesoch potrebných k vyriešeniu úlohy (argumentácia, zovšeobecnenie a modelovanie, vniknutie do problému, plánovanie stratégie riešenia).

Konkrétny príklad

Na záver uvedieme konkrétny príklad úlohy a priradíme jej všetky atribúty. Identifikovanie kombinatorických javov je na základe riešenia úlohy, nie jeho zadania, a je poznačené značnou dávkou subjektívnosti.

Zadanie úlohy: Nakresli všetky rôzne útvary zložené zo štyroch rovnako veľkých štvorcov. Susedné štvorce musia mať spoločnú aspoň jednu stranu.

Typ úlohy: skladanie útvarov

Geometrický objekt: n -uholník (štvorec)

Úroveň úlohy: úroveň reprodukcie (keďže úlohy takéhoto typu sa nachádzajú v učebnici)

Kombinatorické javy: vypisovať všetky možnosti; zavádzať vhodné a jednoduché označovanie objektov; uvedomiť si, ktoré možnosti budem považovať za rovnaké

Matematické kompetencie: popisovať a znázorňovať matematické objekty a situácie jasne, stručne, presne, zrozumiteľne; logicky myslieť a usudzovať

Tento model nám pomôže zostaviť pracovné listy obsahujúce úlohy z kombinatorickej geometrie s meniacimi sa atribútmi, ktoré by mali slúžiť na rozvíjanie vybraných kompetencií.

Literatura

- [1] KUBÁČEK, Z. a kol. *PISA SK 2003 – Matematická gramotnosť. Správa*. Bratislava : ŠPÚ 2004, 84 s. ISBN 80-85756-89-9.
- [2] SEKERÁK, J. *Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní*. dizertačná práca. Košice : PF UPJŠ, 2008.
- [3] KOLKOVÁ, M. *Matematické vzdelávanie a rozvoj kľúčových kompetencií na úrovni reflexie*. dizertačná práca. Košice : PF UPJŠ, 2011.

JAK VYUŽÍT NÁSTĚNKU NA 1. STUPNI ZŠ K VÝUCE MATEMATIKY?

Ivana Procházková

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
magicek@email.cz

1 Úvod

Pokud jste učitelem, a zvláště na prvním stupni základní školy, musíte neustále vymýšlet, jakou činnost žákům nabídnete, aby je práce zaujala, byla pro ně zajímavá, přínosná a dosáhli při ní svého maxima. Jako učitelka vím, že připravit takto koncipovanou hodinu, aby všichni žáci dosáhli svého maxima, není lehké. V běžné základní škole pracuje učitel s dětmi na různé úrovni intelektových i rozumových schopností. Učitel si tedy většinou udělá přípravu tak, aby „uspokojil“ průměr třídy. Tedy aby učivo zvládali i průměrní žáci. Co ale žáci nadaní na matematiku? Žáci, pro které je průměr málo a potřebují řešit takové úkoly, které je budou posouvat dál v poznávacím procesu (Hejný, Littler, 2006; Jirotková, 2010). Pokud předkládáme nadaným žákům úlohy na stejné obtížnosti, bude to pro ně jen další izolovaný model, který je nikam neposune. Řešení takového úkolu by pro nadaného žáka mohla být rutinní práce.

Přestože se snažím o konstruktivistický styl výuky (Hejný, Kuřina, 2001), který dává větší prostor pro individualizaci, rozhodla jsem se udělat pro žáky mimovýukovou, dobrovolnou aktivitu, která by mohla podpořit jejich zájem o řešení matematických úloh a diferencovat přístup ke každému z žáků.

V současné době, kdy je článek psán, není výzkum ukončen a stále je v procesu vývoje. Výzkum je prováděn v páté třídě jedné základní školy v Praze. Autorka je v této třídě vyučující a zároveň v roli experimentátora. Výuku pojímá jako akční výzkum (Janík, 2004).

Ve třídě je 21 žáků – 7 dívek a 14 chlapců. Ve třídě se vyučuje podle učebnic autorů Hejný a kol. (Hejný, 2007, 2008, 2009, 2010) již od prvního ročníku. Učebnice jsou v jistém smyslu nové, inovativní, neboť při dobré práci s nimi vyžadují jiný přístup učitele k vedení výuky matematiky, než jak je běžné u klasických učebnic matematiky.

Při práci s učebnicemi dochází k tomu, že v rámci běžné hodiny nelze stihnout vyřešit všechny úkoly, které se v učebnici nacházejí. Učitel musí podle uvážení vybrat ty úlohy, které podle něho jsou nejdůležitější nejen svým obsahem, ale odpovídají i náročností průměru třídy. Úlohy „bonusové“, které jsou náročnější, řeší žáci, kteří již zvládli předcházející úlohy, nebo jsou nad průměrem třídy v porozumění danému tématu. Jejich úlohou ve výuce může být role pomocníka – toho, co poradí a diskutuje s ostatními, obohacuje svým názorem. Někteří žáci se v této úloze cítí jistě a rádi pomáhají ostatním. Jiný typ žáka je ten, který má nutkavou potřebu řešit dál úkoly, a to mu dělá radost.

Úlohy, které jsou nějakým způsobem zajímavé nebo náročnějšího charakteru či úlohy časově náročné, vybírám z této učebnice a snažím se je gradovat. Gradovaná úloha je taková úloha, která se vyznačuje různou obtížností. Úloha je většinou odstupňována podle náročnosti na dvě až tři samostatné úlohy. Tyto úlohy vkládám na nástěnku. Na nástěnce je přibližně vždy šest různých úloh.

Ukázka gradované úlohy z kombinatoriky, která byla vložena na nástěnku. Úlohy jsou seřazeny podle obtížnosti, od nejjednodušší po složitější.

1. *Kolik lze vytvořit z číslic 1,2,3 různých trojmístných čísel tak, aby se číslice v čísle neopakovaly?*
2. *Kolik lze z číslic 1,2,3 vytvořit trojmístných čísel?*
3. *Z číslic 1,2,3, a 4 lze vytvořit 24 různých čtyřmístných čísel.
Když je seřadíš od nejmenšího k největšímu, které z nich bude:*
 - a) *na třetím místě*
 - b) *na jedenáctém místě*
 - c) *na třináctém místě*
 - d) *na jedenadvacátém místě?*

S dětmi jsme si pravidla pro řešení úloh objasnili na začátku tohoto experimentu (říjen 2012). Na nástěnce jsou vyvěšeny matematické úlohy různé úrovně a různého zaměření. Žáci mají možnost si zvolit, jakou úlohu sami chtějí řešit. Úlohy mohou řešit doma nebo v rámci hodin matematiky, když jim zbude volná chvíle. Úlohy zde visí po dobu cca 3 týdnů a každý žák má možnost v průběhu této doby vyřešit libovolný počet úloh. Vyřešené úlohy odevzdá učiteli. Za vyřešené úlohy dostávají žáci určitý počet bodů. Navrhla jsem ke každé úloze bodové ohodnocení podle náročnosti úlohy. Dále jsem se snažila, aby v bodovém hodnocení byly různé pohledy na danou úlohu i na žakovu snahu. Každá úloha je tedy ohodnocena z několika hledisek: body žák může dostat za správné – správná řešení, další body může získat za okomentování svého řešitelského postupu. Tedy jak úlohu řešil, proč ji takto řešil, co mu na úloze přišlo lehké – těžké. V neposlední řadě žáci mohou získat body za prezentaci svého řešení úlohy před třídou. Bodové ohodnocení se liší v závislosti na úloze, počtu řešení. Za určitý počet bodů jsou ohodnoceni známkou jedna nebo pochvala za aktivitu v matematice do žakovské knížky. V první fázi experimentu jsem navrhla bodové ohodnocení na známku jedna za třicet bodů získaných z úloh. Žáci tedy měli možnost získat i několik jedniček, tím byla v tomto případě podpořena vnější motivace.

Jak žáci přijali tento experiment? Zajímavosti z průběžných výsledků tohoto experimentu:

Možnost řešit úlohy navíc žáci přijali s nadšením. Po vyvěšení úloh se o úlohy zajímali a brali si je k řešení. Prvotní pocit z tohoto experimentu byl pro mě optimistický.

V průběhu tří týdnů asi třetina žáků ze třídy donesla vyřešené úlohy, které si vzali z nástěnky. Prvotní nadšení opadlo asi po 5 měsících, kdy postupem času zájem o úlohy vkládané na nástěnku začal opadávat, vnější motivace (dobrá známka, pochvala do ŽK) byla pro žáky slabým motivačním prvkem, přestala být účinná.

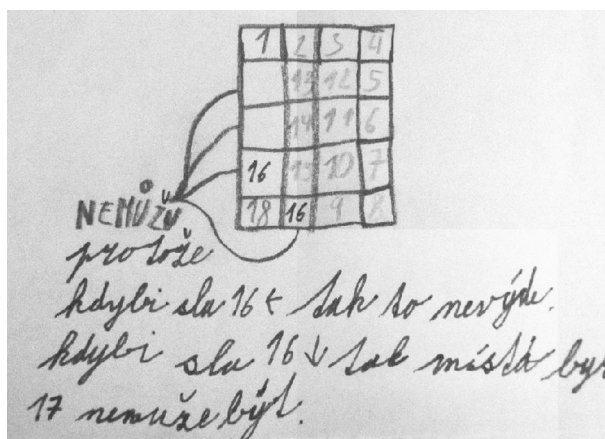
Postupem času – po odevzdání úkolů a analýze odevzdaných řešení, jsem mohla aktivní žáky (stále řešící) rozdělit do několika nejvýraznějších kategorií:

- **Samotář** – Tento typ žáka se v hodinách matematiky většinou neprojevuje. Jeho tempo je pomalejší, úkolům většinou rozumí, ale nemá potřebu je sdílet s ostatními.

Žák řeší většinu úloh, které se na nástěnce objeví.

Díky možnosti výběru úloh se velmi aktivně zapojil do řešení úloh i chlapec Vojta. Vojta má problémy se slovním vyjadřováním, je dysgrafik, jeho tempo je pomalejší. Ve svých úlohách se většinou zaměřuje na detail věci. Při komplexnější uvažování potřebuje často povzbudit nebo poradit od kamaráda.

Vojtovi se možnost řešení dobrovolných úloh velmi líbila. Byl jeden z neaktivnějších žáků, kteří mi nosili vyřešené úlohy. V hodinách dál zůstával pozorovatelem dění kolem sebe. Jeho úlohy většinou obsahovaly strohý výpočet či krátký komentář (obr. 1).



Obr. 1

- **Hvězda** – V matematice zdatný žák, často se spolužáky diskutuje nad možnostmi různých řešení a pomáhá při vyjasňování nejasností, které vznikají při diskusi.

Žák tohoto typu si úlohy vybírá s pečlivostí. Vezme si pouze úlohu, která ho skutečně zaujme a je pro něj výzvou. Ostatní úlohy neřeší.

Tento typ žáka je například Matěj, snaživý hoch, který nemá s matematikou problémy, má velmi dobré logické myšlení. Rád pracuje s velkými čísly, náročné úlohy bere jako výzvy k řešení.

- **Herec** – Žák, který je rád středem pozornosti ve třídě. Úroveň matematických schopností může být u každého z tohoto typu žáků různá. U takového žáka funguje pravidlo: „Chci být středem pozornosti při prezentaci.“

Klára musí okomentovat při třídní matematické diskusi každého spolužáka. Vždy musí mít poslední slovo a ráda navrhuje, co by spolužáci mohli udělat jinak. Ráda hodnotí projevy svých spolužáků, ne vždy je její komentář věcný a k tématu. Klára viděla možnost zviditelnit se při prezentaci vyřešených úkolů. Proto si i ona vybrala svoje úkoly z nástěnky.

Závěrem

Z hlediska dlouhodobé podpory zájmu žáků o řešení matematických úloh je vkládání úloh na nástěnku ne příliš efektivní. Vnější motivace (známka) je pro žáky z dlouhodobého hlediska velmi slabým faktorem.

Poděkování

Príspevek vznikl za podpory grantu SVV 267-402 Kvalita ve vzdělání a výchově.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M. *Creative teaching in mathematics*. Praha : PedF UK, 2006, s. 11–24. ISBN 80-7290-280-6.
- [2] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha : Portál, 2009.

- [3] JANÍK, T. Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe. In MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Cesty pedagogického výzkumu*. Brno : Paido, 2004, s. 51–68.
- [4] JIROTKOVÁ, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha : PedF UK, 2010, s. 18–22. ISBN 978-80-7290-399-3.

POROVNÁNÍ ZÁTĚŽE STUDENTŮ VŠTE V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH V PŘEDMĚTU DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

František Šíma

VŠTE v Českých Budějovicích

Úvod

V článku je vyhodnocen průzkum, který mapoval poměr mezi předpokládanou a skutečnou zátěží v předmětu Deskriptivní geometrie a zjišťoval, kolik hodin studenti věnují danému předmětu a vztah mezi tímto časem, věnovaným danému předmětu před příchodem na naši školu, a časem potřebným k přípravě na tento předmět při studiu na vysoké škole. Článek je doplněn rozbořem, ve kterém se zabývám vlivem rozdělení intervalů na celkový výsledek hodnocení. Zvolený předmět Deskriptivní geometrie je vyučován na VŠTE ve studijním oboru Stavebnictví.

Na závěr úvodu bych chtěl ještě poděkovat svým kolegům z VŠTE v Českých Budějovicích RNDr. Milanu Vackovi a RNDr. Janě Vysoké za spolupráci při zadávání průzkumu.

Vlastní průzkum

Popis průzkumu

Průzkumu, který byl proveden v listopadu 2012, se zúčastnili studenti převážně I. ročníku studijního oboru Stavebnictví. Studenti v dotazníku odpovídali na tyto otázky:

Absolvování předmětu DEG před VŠTE:

Dokončená SŠ
Počet týdenních hodin DEG na SŠ
Jiná studovaná škola (VOŠ, VŠ aj.)
Počet týdenních hodin DEG jinde (VOŠ, VŠ aj.)

Příprava na předmět DEG na VŠTE:

Příprava na vyučování (průměrný počet hodin za týden)
Příprava – rýsování rysů (průměrný počet hodin za týden)
Příprava na průběžný test (celkový počet hodin)
Jiná příprava na DEG (počet hodin + konkrétně na co)

Získané (naměřené) hodnoty

Průzkumu se zúčastnilo celkem 86 studentů. Byl vyhodnocen vztah mezi jednotlivými hodnotami: celkový počet hodin Deskriptivní geometrie, které absolvovali studenti před nástupem na VŠTE (dále jen „DEG před VŠTE“), a celkový počet hodin, které potřebují studenti k přípravě a úspěšnému dokončení Deskriptivní geometrie na VŠTE (dále jen „DEG na VŠTE“). Naměřené veličiny jsou v tabulce 1. V tabulce 2 jsou tyto hodnoty podle testovaných skupin.

Pro zápis výsledků do tabulek byly ponechány skupiny tak, jak byl průzkum prováděn. Vyhodnocení bylo provedeno celkově, nikoliv podle skupin (rozdělení do skupin 1–6 je pouze orientační).

Tab. 1: Jednotlivé hodnoty „DEG před VŠTE“ a „DEG na VŠTE“

Číslo	x_i	y_i	Číslo	x_i	y_i	Číslo	x_i	y_i	Číslo	x_i	y_i
1.	120	83	23.	30	86	45.	120	82	66.	120	93
2.	90	116	24.	30	86	46.	120	79	67.	120	97
3.	90	95	25.	60	168	47.	120	65	68.	120	116
4.	120	86	26.	90	107	48.	60	136	69.	52	95
5.	90	108	27.	90	95	49.	90	82	70.	120	121
6.	90	93	28.	120	112	50.	90	101	71.	165	95
7.	82	67	29.	120	127	51.	232	69	72.	75	99
8.	82	69	30.	30	183	52.	88	106	73.	112	86
9.	198	82	31.	120	88	53.	120	95	74.	112	80
10.	120	80	32.	90	123	54.	266	66	75.	90	82
11.	90	88	33.	30	121	55.	237	73	76.	90	95
12.	120	84	34.	150	67	56.	150	79	77.	120	84
13.	120	86	35.	120	139	57.	120	98	78.	120	95
14.	120	112	36.	120	86	58.	180	106	79.	60	82
15.	120	72	37.	120	93	59.	120	97	80.	120	101
16.	90	75	38.	75	121	60.	120	82	81.	120	82
17.	120	67	39.	90	99	61.	150	80	82.	0	160
18.	0	116	40.	0	74	62.	120	98	83.	172	85
19.	120	133	41.	52	79	63.	150	94	84.	90	90
20.	198	108	42.	90	106	64.	120	120	85.	90	99
21.	60	142	43.	60	101	65.	120	121	86.	90	82
22.	90	125	44.	120	95						

Tab. 2: Průměrný počet hodin věnovaných studiu Deskriptivní geometrie

Skup.	Předch.	Vyučov.	Rysy	Testy	Ostatní	Příprava	Celkem	Suma
1	103,44	8,39	21,67	5,67	0,00	35,72	87,72	191,17
2	93,15	23,25	30,70	9,35	0,20	63,50	115,50	208,65
3	84,33	9,25	24,42	5,08	0,83	39,58	91,58	175,92
4	162,09	11,18	19,00	4,27	0,00	34,45	86,45	248,55
5	116,55	15,36	29,64	6,55	0,91	52,45	104,45	221,00
6	99,00	11,21	20,93	8,43	0,50	41,07	93,07	192,07
Celkem	106,84	13,67	24,71	6,83	0,36	45,57	97,57	204,41

Legenda:

Ve sloupci „Skup.“ jsou uvedena označení jednotlivých skupin; ve sloupci „Předch.“ je uveden průměrný počet hodin „DEG před VŠTE“; ve sloupci „Vyučov.“ je uveden průměrný počet hodin přípravy na vyučování; ve sloupci „Rysy“ je uveden průměrný počet hodin potřebný ke zhotovení rysů; ve sloupci „Testy“ je uveden průměrný počet hodin věnovaných přípravě na dva testy stanovené hodnocením předmětu; ve sloupci „Ostatní“ jsou uvedeny další hodiny (průměrný počet na jednoho studenta), které studenti věnovali Deskriptivní geometrii (např. na doučování spolužáků); ve sloupci „Příprava“ je uveden průměrný počet hodin „DEG na VŠTE“ (je to součet sloupců Vyučov., Rysy, Testy a Ostatní); ve sloupci „Celkem“ je průměrný počet hodin, které studenti v celém semestru věnovali přípravě na předmět Deskriptivní geometrie (je to součet sloupce Příprava s počtem hodin výuky předmětu v jednom semestru). V posledním sloupci „Suma“ je ještě uveden celkový počet hodin, které studenti potřebovali k absolvování předmětu Deskriptivní geometrie v případě, že uspějí hned napoprvé a předmět nemusí opakovat (je to součet sloupců Předch. a Celkem). V posledním řádku jsou průměrné hodnoty pro celý soubor.

Zobrazení naměřených hodnot

Jako první zobrazím hodnoty „DEG před VŠTE“, které jsou v tabulce 1 označeny x_i . Nejvyšší hodnotnější hloubku (šířku) intervalu určím pomocí empirického vzorce

$$\frac{R}{24} < h < \frac{R}{12}, \quad (1)$$

kde h je hloubka intervalu a R je variační šíře (rozdíl mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou). Při stanovení intervalů je třeba dbát na to, aby krajní intervaly (první a poslední) nebyly prázdné, a na to, aby všechny intervaly měly stejnou hloubku. Uvádí se, že počet intervalů by neměl být větší než 20 a menší než 6. Doporučená hloubka je na horní hranici určené pomocí empirického vzorce ($h \approx 0,08 \cdot R$). [1, s. 41]

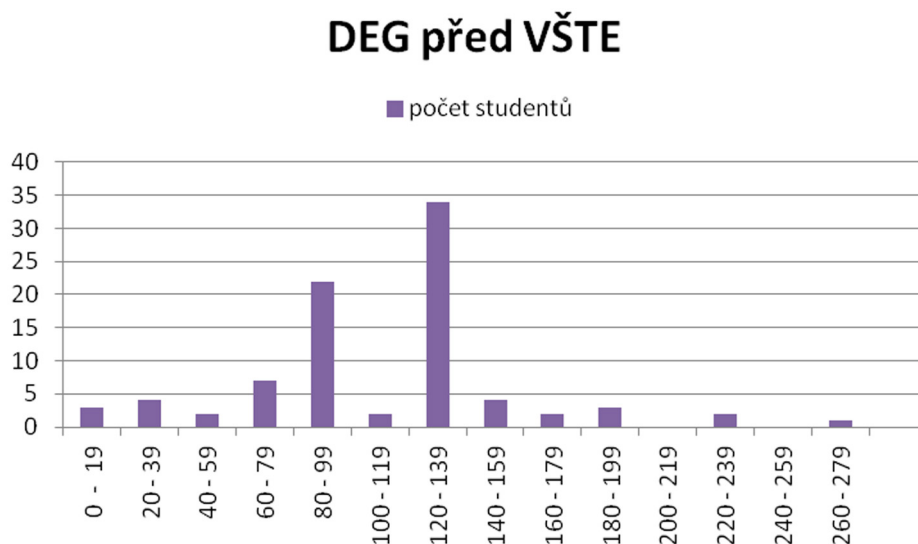
Na základě vztahu (1) vychází:

$R = 266 - 0 = 266$, potom $h \in (11,08; 22,17)$. Zvolil jsem hloubku intervalu 20 a hodnoty jsem zapsal do tabulky 3. V prvním řádku jsou jednotlivé intervaly, které představují počet hodin „DEG před VŠTE“ (v grafu 1 jsou naneseny na vodorovnou osu), v druhém řádku jsou počty studentů v těchto intervalech (v grafu 1 jsou naneseny na svislou osu).

Tab. 3: Počet hodin DEG před VŠTE

0-19	20-39	40-59	60-79	80-99	100-119	120-139	140-159	160-179	180-199	200-219	220-239	240-259	260-279
3	4	2	7	22	2	34	4	2	3	0	2	0	1

Zobrazíme-li tyto hodnoty, dostáváme graf 1. Podíváme-li se na rozdělení hodnot, zjistíme, že se podobá normálnímu rozdělení, normálním rozdělením však není (křivka, která tato rozdělení interpretuje není Gaussova křivka, její vrchol je posunut vlevo).



Graf 1: Počet hodin DEG před VŠTE

Dále zobrazím hodnoty „DEG na VŠTE“, které jsou v tabulce 1 označeny y_i . Na základě vztahu (1) vychází:

$$R = 183 - 65 = 118,$$

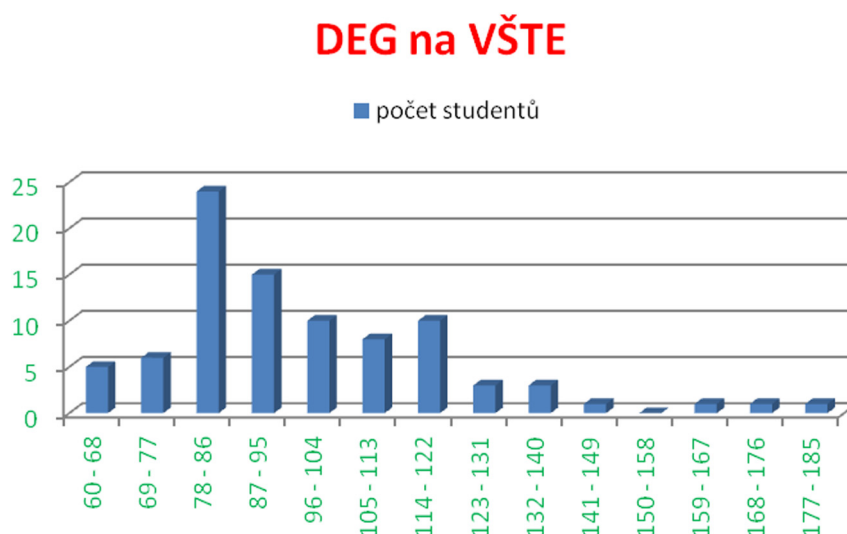
potom $h \in (4,92; 9,83)$. Zvolil jsem hloubku intervalu 9 a hodnoty jsem zapsal do tabulky 4. V prvním řádku jsou jednotlivé intervaly, které představují počet hodin „DEG na VŠTE“

Tab. 4: Počet hodin DEG na VŠTE

60-68	69-77	78-86	87-95	96-104	105-113	114-122	123-131	132-140	141-149	150-158	159-167	168-176	177-185
5	6	24	15	10	8	10	3	3	1	0	1	1	1

(v grafu 2 jsou naneseny na vodorovnou osu), v druhém řádku jsou počty studentů v těchto intervalech (v grafu 2 jsou naneseny na svislou osu).

I toto rozdělení připomíná normální rozdělení, normální rozdělení to však také není (křivka, která toto rozdělení interpretuje není Gaussova křivka, vrchol křivky je opět posunut vlevo – viz graf 2).



Graf 2: Počet hodin DEG na VŠTE

Vyhodnocení průzkumu

Vztah mezi předpokládanou a skutečnou zátěží

Vycházím z předpokládané studijní zátěže v předmětu Deskriptivní geometrie, která je uvedena v části „Stanovení studijní zátěže studentů“. Jsou zde uvedeny následující hodnoty [3]:

Aktivita	Počet hodin za semestr	
	Prezenční forma	Kombinovaná forma
Příprava na průběžný test	13	13
Příprava na seminář, cvičení, tutoriál	26	62
Příprava na závěrečný test	13	13
Účast na semináři/cvičeních/tutoriálu/exkurzi	52	16
Celkem:	104	104

Pracuji s údaji pro prezenční formu studia, protože všichni dotázaní studenti byli z této formy.

Z průzkumu vyplývá, že student věnuje přípravě na vyučování (včetně hodin ostatních) průměrně 14,03 hodin, což je méně, než je předpoklad 26 hodin. Počet hodin, které věnuje průměrně jeden student na testy a další hodnocené aktivity (rysy), je celkem 31,34 hodiny, což je naopak

více, než je předpoklad 26 hodin. Celkem jeden student věnuje přípravě průměrně 45,57 hod, což je asi o 6,5 hodiny méně než předpoklad 52 hodin.

Předpokládaný počet hodin věnovaných studiu Deskriptivní geometrie během jednoho semestru je celkem 104. Skutečný počet hodin věnovaných studenty přípravě na výuku a hodnocení předmětu (podle průzkumu) je průměrně 97,57, což je asi o 6,5 hodiny méně, než předpokládaný počet. Tato odchylka činí asi 6 %, což je statisticky málo významná odchylka.

Vyjdu-li z předpokladu, že počet hodin potřebných ke studiu předmětu Deskriptivní geometrie je 104, mohu na základě výsledku průzkumu konstatovat, že předpokládaný počet hodin je stanoven optimálně. Vyjdu-li ze skutečného počtu hodin, které studenti věnují přípravě na výuku a hodnocení předmětu Deskriptivní geometrie (asi 97,5 hodiny), mohu usuzovat, že studenti věnují tomuto předmětu počet hodin, který je potřebný ke zvládnutí učiva.

Vztah mezi časem věnovaným Deskriptivní geometrii studenty před příchodem na VŠTE a při studiu na VŠTE

Byl vyhodnocen vztah mezi dvěma naměřenými hodnotami – počet hodin „DEG před VŠTE“ a počet hodin „DEG na VŠTE“. Hodnoty jsou jednotlivě uvedeny v tabulce 1, x_i jsou hodnoty před VŠTE, y_i jsou hodnoty na VŠTE. Další hodnoty potřebné pro výpočet jsou uvedeny v tabulce 5 (tabulka je krácena).

K vyhodnocení vztahu jsem použil *Pearsonův koeficient korelace*, který vyjadřuje variabilitu hodnot v dvojrozměrném statistickém souboru (tj. v případě, že u každého objektu máme dvě naměřené hodnoty). Pearsonův koeficient korelace r_p se vypočte podle vztahu

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (2)$$

kde r_p je Pearsonův koeficient korelace, x_i , y_i jsou naměřené hodnoty, $\bar{x}$, $\bar{y}$ aritmetické průměry těchto hodnot a $x_i - \bar{x}$, $y_i - \bar{y}$, $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$, $(x_i - \bar{x})^2$, $(y_i - \bar{y})^2$ veličiny potřebné k výpočtu koeficientu korelace [1, s. 114].

Tab. 5: Počet hodin „DEG před VŠTE“ a „DEG na VŠTE“ a výpočty pro určení r_p

Číslo	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1.	120	83	13,2	-14,6	-192,72	174,24	213,16
2.	90	116	-16,8	18,4	-309,12	282,24	338,56
3.	90	95	-16,8	-2,6	43,68	282,24	6,76
4.	120	86	13,2	-11,6	-153,12	174,24	134,56
5.	90	108	-16,8	10,4	-174,72	282,24	108,16
6.	90	93	-16,8	-4,6	77,28	282,24	21,16
7.	82	67	-24,8	-30,6	758,88	615,04	936,36
...	...	...	...	...	...	...	...
84.	90	90	-16,8	-7,6	127,68	282,24	57,76
85.	90	99	-16,8	1,4	-23,52	282,24	1,96
86.	90	82	-16,8	-15,6	-262,08	282,24	243,36
Σ					- 34 694,08	184 783,84	43 988,96

Na základě naměřených hodnot vychází Pearsonův koeficient korelace:

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-34\,694,08}{\sqrt{184\,783,84 \cdot 43\,988,96}} \doteq -0,3848.$$

Pro vyhodnocení vypočteného koeficientu budu používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je uvedena v tabulce 6 [1, s. 105]:

Tab. 6: Přibližná interpretace hodnot korelačního koeficientu

Koeficient korelace	Interpretace
$r = 1$	naprostá (funkční) závislost
$1,00 > r \geq 0,90$	velmi vysoká závislost
$0,90 > r \geq 0,70$	vysoká závislost
$0,70 > r \geq 0,40$	střední (značná) závislost
$0,40 > r \geq 0,20$	nízká závislost
$0,20 > r > 0,00$	velmi slabá závislost
$r = 0$	naprostá nezávislost

Z tabulky 6 vyplývá, že mezi naměřenými hodnotami existuje nízká „záporná“ závislost, která se již blíží k hranici střední (značné) závislosti.

Po interpretaci Pearsonova koeficientu korelace je zřejmé, že existuje vztah mezi oběma veličinami, závislost je však „nepřímo úměrná“, tj. čím více hodin Deskriptivní geometrie absolvovali studenti před nástupem na VŠTE, tím méně hodin jim stačilo na přípravu na tento předmět na VŠTE. K uvedené hypotéze ještě musím dodat, že existují některé výjimky, které se této hypotéze vymykají (viz některé hodnoty v tabulce 1).

Pro ověření hypotézy jsem ještě použil Spearmanův koeficient pořadové korelace, který se používá pro hodnoty získané pomocí ordinálního měření (hodnotám musí být přiřazeno pořadí) [1, s. 103]. Koeficient pořadové korelace se vypočte pomocí vzorce

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)}, \quad (3)$$

kde r_s je Spearmanův koeficient pořadové korelace, d je rozdíl (diference) pořadí pro jednu dvojici hodnot, d^2 je druhá mocnina tohoto rozdílu a n je počet srovnávaných dvojic hodnot. Zjištěné a vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 7 (je opět krácena).

Dosazením za $d^2 = 130\,944,5$, $n = 86$ dostávám

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 130\,944,5}{86 \cdot (86^2 - 1)} \doteq 1 - 0,03947 = -0,2354.$$

Z výsledku plyne, že existuje nízká záporná závislost mezi počtem hodin věnovaných Deskriptivní geometrii před příchodem na VŠTE a při studiu tohoto předmětu na VŠTE. Z toho lze soudit, že studenti s dobrou průpravou před nástupem na VŠTE v předmětu Deskriptivní geometrie tento předmět lépe zvládají při studiu na VŠTE.

Po interpretaci Pearsonova koeficientu korelace je zřejmé, že existuje vztah mezi oběma veličinami, závislost je však „nepřímo úměrná“, tj. čím více hodin „DEG před VŠTE“, tím méně hodin „DEG na VŠTE“. K této hypotéze ještě musím dodat, že existují některé výjimky,

Tab. 7: Počet hodin „DEG před VŠTE“ a „DEG na VŠTE“ a výpočty pro určení r_s

Číslo	x_i	y_i	Poř. x_i	Poř. y_i	d	d^2
1.	120	83	57,5	26	31,5	992,25
2.	90	116	29	70	-41	1 681
3.	90	95	29	46,5	-17,5	306,25
4.	120	86	57,5	32,5	25	625
5.	90	108	29	65,5	-36,5	1 332,25
6.	90	93	29	40	-11	121
7.	82	67	17,5	4	13,5	182,25
...	...	...	...	...	...	...
84.	90	90	29	38	-9	81
85.	90	99	29	56	-27	729
86.	90	82	29	21,5	7,5	56,25
Σ			3 741	3 741	0	130 944,5

které se této hypotéze zcela vymykají. Je předpoklad, že jako jednotlivé případy více ovlivňují celkové hodnocení, než by ovlivnily jako součást skupiny. Předpokládám, že jako součást skupiny se projeví méně výrazně.

Pro ověření hypotézy jsem rozdělil počet hodin „DEG před VŠTE“ do čtyř skupin. Vedla mne k tomu skutečnost, že nejčastěji se objevoval počet hodin 90 a 120, další počty byly již mnohem menší. Určil jsem skupiny tak, aby „prostřední“ skupiny tyto veličiny obsahovaly (každá skupina jednu veličinu). Velikost skupiny počet hodin „DEG na VŠTE“ jsem odvodil od normy, kterou je 104 hodin. Tuto normu jsem zvolil jako základ a poloměr intervalu jsem určil jako 5 % ze základu. Velikost intervalu vycházela mezi 10 a 11, zvolil jsem 11. Protože „krajní“ intervaly jsem volil (z praktických důvodů) „větší“, vyšlo mi celkem sedm intervalů. Hodnoty (tj. počty studentů) jsou uvedeny v tabulce 8.

Tab. 8: Srovnání hodin „DEG před VŠTE“ a „DEG na VŠTE“

Před\Po	0–76	77–87	88–98	99–109	110–120	121–131	132+	Celkem
do 84	3	4	1	2	1	2	5	18
85–105	1	3	6	7	1	2	0	20
106–125	3	13	10	1	4	3	2	36
126+	4	4	2	2	0	0	0	12
Celkem	11	24	19	12	6	7	7	86

Legenda:

V řádku jsou uvedeny hodnoty pro daný počet hodin „DEG před VŠTE“; ve sloupci jsou uvedeny hodnoty pro uvedený počet hodin „DEG na VŠTE“.

Pro určení těsnosti mezi zjištěnými jevy jsem použil *Spearmanův koeficient pořadové korelace*. Pozorované vlastnosti (poměrová data) seřadím podle míry těchto vlastností, a protože chci změnit vztah na „přímo úměrný“, označím pořadí hodin DEG absolvovaných před nástupem na VŠTE od největší po nejmenší (tedy v obráceném pořadí), pořadí hodin přípravy na Deskriptivní geometrii při studiu na VŠTE označím od nejmenší po největší. Abych dostal v obou vlastnostech stejné rozpětí pořadí (1–7), označím pořadí hodin Deskriptivní geometrie absolvovaných před nástupem na VŠTE 7–5–3–1. Vypočítám rozdíly mezi jednotlivými pořadími a zapíši je do

tabulky 9. Rozdíl mezi oběma pořadími pro jednotlivé dvojice ještě musím vynásobit počtem těchto dvojic, abych dostal hodnotu d . Vypočtenou hodnotu zapíšu do tabulky 10. Dále vypočtu hodnotu d^2 a zapíšu ji do tabulky 11.

Tab. 9: Rozdíly mezi jednotlivými pořadími

Rozdíly	1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	-1	-2
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Tab. 10: Celkové rozdíly mezi pořadími (hodnota d)

d	1	2	3	4	5	6	7
7	18	20	4	6	2	2	0
5	4	9	12	7	0	-2	0
3	6	26	0	-1	-8	-9	-8
1	0	-4	-4	-6	0	0	0

Tab. 11: Hodnota d^2

d^2	1	2	3	4	5	6	7
7	324	400	16	36	4	4	0
5	16	81	144	49	0	4	0
3	36	676	0	1	64	81	64
1	0	16	16	36	0	0	0

Nyní mám všechny hodnoty pro výpočet Spearmanova koeficientu pořadové korelace. Dosazením za $d^2 = 2\,068$, $n = 68$ dostáváme

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 2\,068}{86 \cdot (86^2 - 1)} \doteq 1 - 0,0195 = 0,9805.$$

K interpretaci vypočteného koeficientu budu opět používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je již uvedena v tabulce 6. Z tabulky vyplývá, že vztah mezi „naměřenými“ hodnotami je poměrně těsný, existuje mezi nimi velmi vysoká závislost, protože $r = 0,98$. Protože ve skupině 1 jsem přehodil pořadí, závislost je „nepřímá úměrnost“. Je možné konstatovat, že počet hodin, které studenti věnují přípravě na Deskriptivní geometrii při studiu na VŠTE, je nepřímo úměrný počtu hodin, které absolvovali při výuce před příchodem na VŠTE. Tím je potvrzena předpokládaná hypotéza.

Některé naměřené hodnoty se odchyľují „neúměrně vysoko“ (jak již bylo uvedeno) a tím ovlivňují výsledek (viz první vyhodnocení Pearsonova koeficientu korelace). Proto jsem provedl ještě jedno, méně razantní oslabení tohoto vlivu. Zvolil jsem dvě metody (podle dvou získaných intervalů při „měření hodnot“). V prvním případě jsem rozdělil vzestupně uspořádaný první interval (hodnoty x_i) po čtyřech (dva prostřední intervaly obsahovaly jen tři hodnoty), určil průměr těchto čtyř hodnot a přiřadil jsem k němu průměr čtyř odpovídajících hodnot y_i . Dostal

jsem tak 22 dvojic. Totéž jsem udělal v druhém případě, pouze jsem vycházel ze vzestupně uspořádaného druhého intervalu (hodnoty y_i) a přiřadil hodnoty x_i . Opět jsem dostal 22 hodnot. V obou těchto případech jsem spočítal Pearsonovy koeficienty korelace.

Na základě naměřených hodnot vychází v prvním případě Pearsonův koeficient korelace:

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-7\,935,065}{\sqrt{45\,084,745 \cdot 2\,888,53}} \doteq -0,695\,3.$$

Pro vyhodnocení vypočteného koeficientu budu opět používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je uvedena v tabulce 6. Nyní vychází značná závislost, která se blíží hranici závislosti vysoké.

Na základě naměřených hodnot vychází v druhém případě Pearsonův koeficient korelace:

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-8\,541,962\,5}{\sqrt{13\,904,620\,9 \cdot 10\,772,5}} \doteq -0,697\,9.$$

Pro vyhodnocení vypočteného koeficientu budu opět používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je uvedena v tabulce 6. Nyní opět vychází značná záporná závislost, která se blíží hranici závislosti vysoké.

Pearsonovy koeficienty korelace vychází v obou případech téměř shodně (líší se o necelé 3 desetiny procenta). Z toho zřejmě plyne, že užitý postup eliminuje „škodlivé“ vlivy extrémních hodnot a také potvrzuje vytvořenou hypotézu.

Ze stejně získaných hodnot výpočtu Spearmanův koeficient pořadové korelace. V prvním případě dosazením za $d^2 = 2\,727$, $n = 22$ dostávám

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 2\,727}{22 \cdot (22^2 - 1)} \doteq 1 - 1,539\,8 = -0,539\,8.$$

Pro vyhodnocení vypočteného koeficientu budu opět používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je uvedena v tabulce 6. Nyní opět vychází značná záporná závislost.

V druhém případě dosazením za $d^2 = 2\,715,5$, $n = 22$ dostávám

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 2\,715,5}{22 \cdot (22^2 - 1)} \doteq 1 - 1,533\,3 = -0,533\,3.$$

Pro vyhodnocení vypočteného koeficientu budu opět používat „Přibližnou interpretaci hodnot korelačního koeficientu“, která je uvedena v tabulce 6. Opět vychází značná záporná závislost.

Spearmanovy koeficienty pořadové korelace vychází v obou případech opět téměř shodně (líší se o necelých 7 desetin procenta). Z toho zřejmě plyne, že užitý postup opět eliminuje „škodlivé“ vlivy extrémních hodnot a také potvrzuje vytvořenou hypotézu.

Porovnám-li hodnoty obou koeficientů, vychází stejná závislost (závislost ve stejné „skupině“, vždy ve středu této „skupiny“ nebo v její „horní“ polovině. Ze všech užitých postupů se tento jeví jako „nejspolehlivější“.

Závěr

Průzkum jasně potvrdil, že existuje závislost mezi počtem hodin Deskriptivní geometrie, které studenti absolvují před příchodem na VŠTE, a počtem hodin, které tomuto předmětu věnují, aby úspěšně vykonali zápočet. Tento vztah je nepřímá úměrnost – čím více hodin Deskriptivní geometrie mají před příchodem na VŠTE, tím méně jim stačí k úspěšnému vykonání zápočtu z tohoto předmětu na VŠTE. Ukázalo se také, že sdružením jednotlivých hodnot do skupin (intervalů) se omezí vliv hodnot, které negativně ovlivňují výsledek. Dále průzkum zátěže studentů potvrdil oprávněnost nastavených norem.

Literatura

- [1] CHRÁSKA, M. *Metodika pedagogického výzkumu*. 1. vyd. Praha : Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.
- [2] ŠÍMA, F. *Deskriptivní geometrie (Studijní opora pro kombinované studium, bakalářský studijní program)*. 1. vyd. České Budějovice : VŠTE, 2010. ISBN 978-80-87278-49-9.
- [3] VŠTE > IS VŠTE > Osobní administrativa > Katalog předmětů > Úplný výpis informací o předmětu a potvrzování správnosti > *Deskriptivní geometrie*, 2012.

VYBRANÉ ÚLOHY Z PROSTREDIA SČÍTACÍCH PYRAMÍD

Noémi Székelyová

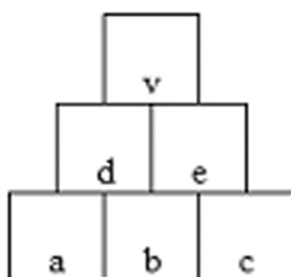
PF UPJŠ, Ústav matematických vied, Košice
noemi.szekelyova@student.upjs.sk

Úvod

Prostredie sčítacích pyramíd je prostredím vhodným na riešenie nielen algoritmicky (procedurálne), ale aj procesuálne a konceptuálne orientovaných úloh. V príspevku sa budeme venovať úlohám, ktoré sme so žiakmi riešili počas experimentálnej výučby realizovanej v školskom roku 2011/2012 na Základnej škole Belehradská v Košiciach v 5. ročníku. Žiaci 5. A triedy pred touto výučbou už prirodzene riešili algoritmické úlohy z tohto prostredia.

Vybrané úlohy z experimentu

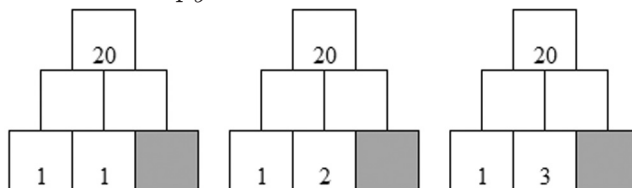
Sčítacou pyramídou dimenzie tri¹ (na obrázku) budeme podľa [1] rozumieť tabuľku šiestich čísel a, b, c, d, e, v , pre ktoré platí: $a + b = d$, $b + c = e$, $d + e = v$. Keď sú z týchto čísel dané tri, sú tým určené všetky čísla pyramídy.



V nasledujúcich úlohách sme využili metódu postupného uvoľňovania parametra, pričom parameter a bol vždy fixovaný, parameter v bol (v jednom súbore úloh) fixovaný tiež a parameter b sa menil. Postupne sme uvoľňovali parameter v (v ďalšom súbore úloh). Cieľom úloh bolo nájsť („čo najrýchlejšie“) číslo c . Úlohy sme riešili počas štyroch vyučovacích hodín. Nevyužili sme ich celé, len 15 až 20 minút z každej vyučovacej hodiny, pričom aktivity na seba vždy plynulo nadväzovali. Teraz uvedieme niektoré z nich aj s našimi postrehmi k ich riešeniu žiakmi.

Úloha 1a)

Doplňte chýbajúce čísla do sčítacích pyramíd.

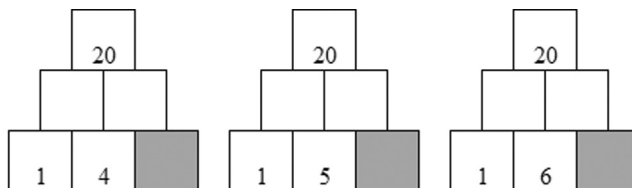


Táto úloha je algoritmického charakteru. Pri jej riešení však niektorým žiakom robila problém nedostatočná znalosť triády. Títo nedoplnili postupne čísla d, e, c , ale metódou pokus – omyl – oprava hľadali číslo c .

¹Uvedená definícia je modifikáciou definície súčtového trojuholníka dimenzie 4 z [1].

Úloha 1b)

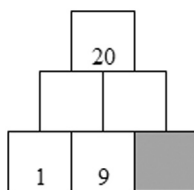
Doplňte chýbajúce čísla do sivých štvorčekov sčítacích pyramíd.



Keď sme túto úlohu riešili so žiakmi prvýkrát, očakávali sme, že si iba všimnú, že číslo v sivom štvorčeku je vždy o dva menšie ako číslo v sivom štvorčeku v predchádzajúcej sčítacej pyramíde. Prvé žiacke vysvetlenie však už naznačilo procesualný vzťah: „Tie dve čísla, čo tam mám, a to druhé číslo sa vždycky o jedno stupní, tak odčítam dve čísla od toho posledného. Že keď mám 1 a 3 a 1 a 4, tak keďže tam je 13, odčítam 2 a je to 11“. V priebehu ďalších dvoch vyučovacích hodín sa kryštalizovalo nasledujúce pravidlo – generický model [2] procesualný: Ak sa číslo v prostrednom štvorčeku zväčší (zmenší) o jedno, tak sa číslo v sivom štvorčeku zmenší (zväčší) o dva. Pritom sme riešili aj ďalšie analogické úlohy a úlohy, kde sme číslo b prostrednom štvorčeku zmenšovali a tiež sme postupne uvoľňovali parameter v .

Úloha 1c)

Doplňte chýbajúce číslo do sivého štvorčeka sčítacej pyramídy. Vysvetlite prečo si myslíte, že uhádnuté číslo je správne.



Počas výučby táto úloha bola riešená spoločne s predchádzajúcou. V závere experimentálnej výučby však v rámci kontrolných úloh žiaci riešili aj takúto úlohu.

Chýbajúce čísla do sivých štvorčekov doplnili všetci žiaci správne, pričom:

- 8 žiakov doplnilo všetky chýbajúce čísla do sčítacej pyramídy,
- 15 žiakov doplnilo chýbajúce číslo iba do sivého štvorčeka.

Pri vysvetlení:

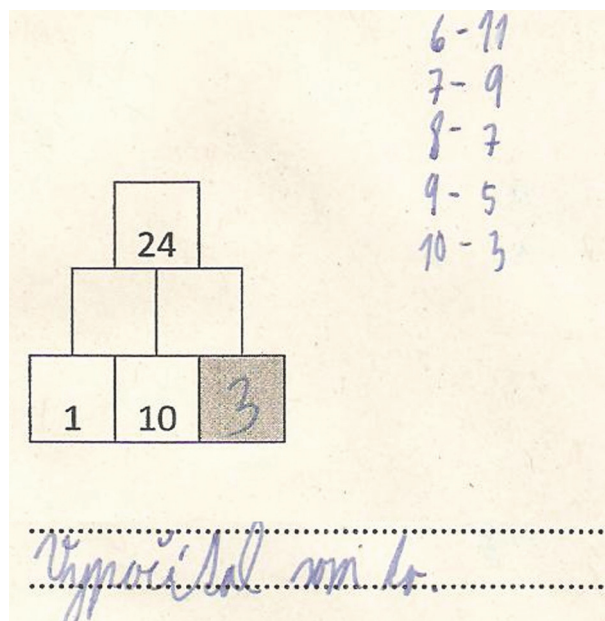
- jeden žiak neuviedol žiadne,
- 9 žiakov sa odvolávalo na štandardnú výpočtovú stratégiu, pričom 1 z nich popísal algoritmus vyriešenia (doplnenia všetkých chýbajúcich čísel) sčítacej pyramídy a 8 uviedli, že chýbajúce čísla do sivých štvorčekov našli vypočítaním alebo „normálne“,

vypočítala som to

- 13 žiakov popísalo stratégiu založenú na generickom modeli procesualnom.

Vždy, keď sa v strednom štvorčeku zvýši o jedno číslo tak v sivom štvorčeku bude o 2 menšie číslo ako v minulom sivom štvorčeku.

Predpokladali sme teda, že 15 žiakov využilo stratégiu založenú na procesuálnom generickom modeli, ale popísalo ju iba 13 žiakov. Zo zvyšných dvoch sa jeden k svojmu riešeniu vôbec nevyjadril a druhý uviedol, že chýbajúce čísla vypočítal. Jeho riešenie však poukazuje na to, že využil procesuálny generický model.



Pri samotnej výučbe a aj pri analýze kontrolných úloh sme u niektorých žiakov postrehli, že dávajú prednosť známemu algoritmu, návodu pred aplikáciou nového poznatku, ktorý už vyžaduje istý vhľad do štruktúry sčítacej pyramídy.

Záver

V tomto príspevku sme sa zamerali iba na procesuálne orientované riešenia úloh, nakoľko žiaci z nášho experimentu boli skôr schopní vnímať procesuálne vzťahy ako konceptuálne. Samozrejme počas výučby sme očakávali, že sa objaví aj možnosť konceptuálneho riešenia. Pracovali sme preto aj so zmeneným zadaním úloh: „Nájdite pravidlo, ako rýchlo nájsť číslo v sivom štvorčeku sčítacej pyramídy.“ V tomto ohľade sa naše očakávania naplnili iba čiastočne. Na príklade konkrétnych sčítacích pyramíd (pri danom v, b) žiaci objavili vzťah $c = v - 1 - 2b$. Keď sme však prostredný štvorček v spodnom riadku nechali prázdny (alebo ho zafarbili napr. na modro), už ho nevedeli aplikovať a trieda sa zhodla v tom, že tam nejaké číslo musí byť. Príčiny môžeme hľadať v tom, že takéto úlohy (alebo ich riešenie) boli pre žiakov nové a v učebniciach sa takmer vôbec nenachádzajú.

Podakovanie

Tento článok vznikol s podporou grantu VEGA 1/1331/12.

Literatúra

- [1] HEJNÝ, M. Štrukturovanie matematických vedomostí. In *Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2001*. Bratislava : EXAM, 2001. s. 13–24. ISBN 80-968815-1-5.
- [2] HEJNÝ, M. Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. *25 kapitol z didaktiky matematiky*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004, s. 23–42. ISBN 80-7290-189-3.

DIDAKTICKÉ HRY V MATEMATIKE

Peter Vankúš

FMFI UK, Bratislava
peter.vankus@gmail.com

Úvod

Hra je aktivita, ktorá je príťažlivá pre väčšinu žiakov a aj pre veľkú časť dospeléj populácie. Pútaivosť hry a jej motivačný potenciál sa pedagógovia snažia využiť aj vo vyučovaní vo forme didaktickej hry. V našom príspevku priblížime knihu s názvom „Didaktické hry v matematike“ (Vankúš, 2012), ktorá sa zaoberá práve problematikou didaktických hier a ich využitia v matematickej edukácii. Kniha je prístupná aj elektronicky na adrese <http://www.comae.sk/didaktickehry.pdf>, preto je dostupná širokej učiteľskej verejnosti.

Publikácia obsahuje teoretickú časť týkajúcu sa didaktických hier. Konkrétne je to úvod do problematiky didaktických hier, história používania hier v edukácii a prehľad používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky na Slovensku a v Česku. Ako argument pre používanie didaktických hier vo vyučovaní matematiky sú v tejto časti knihy tiež uvedené výsledky výskumov ohľadne používania tejto edukačnej metódy. Tieto výsledky sa pri výbere správnych hier a správnej metodológii ich používania javia ako pozitívne hlavne v oblasti motivácie žiakov a zlepšovania ich postojov k matematike. V ďalších kapitolách knihy je uvedená metodológia používania tu uvedených hier v rámci bežných vyučovacích hodín matematiky. Nosnú časť knihy potom tvorí zbierka 30 didaktických hier určených pre rozmanité tematické celky matematiky druhého stupňa základnej školy.

Práve ukážka jednej hry z tejto zbierky je obsahom nášho príspevku. Budeme sa tiež venovať jej stratégii, ktorá v knihe nie je uvedená.

Hra Počet deliteľov

<http://www.comae.sk/didaktickehry.pdf>, str. 129

Tematické zaradenie hry: Hra je vhodná pre tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel.

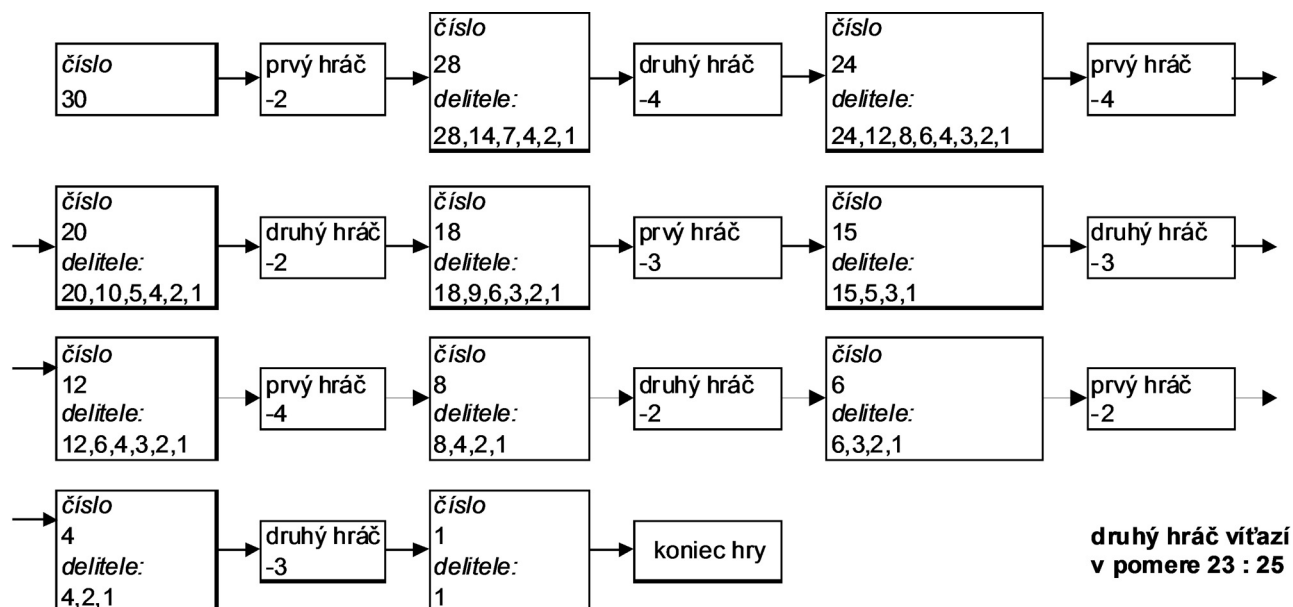
Edukačné ciele hry: Precvičovanie určovania deliteľnosti prirodzených čísel. Spätná väzba pre žiakov o zvládnutí učiva. Hra rozvíja kombinačné a strategické myslenie žiakov.

Prostredie hry: Žiaci a učiteľ: Hrajú dvojice v laviciach. Učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu.

Materiálne prostredie: Prázdny hárok papiera pre každú dvojicu.

Čas trvania hry: 5–10 min.

Postup hry: Počas hry žiaci v svojom ťahu odpočítavajú od počiatočného prirodzeného čísla n (napr. $n = 30$) ľubovoľné prirodzené číslo od 1 po 5. Po odpočítaní hráč zistí, koľko deliteľov má vzniknuté číslo; počet deliteľov určuje počet bodov, ktorý tento hráč za svoj ťah získa. Vzniknuté číslo, ako aj počet deliteľov, zapisuje hráč kvôli prehľadnosti na hárok papiera. Hráči sa striedajú v ťahu, až kým nedostanú číslo 1. To je najmenšie dovolené číslo, ku ktorému sa hráč smie svojim ťahom dostať, jeho dosiahnutím hra končí. Hráč, ktorý v priebehu hry získa



Obr. 1: Ilustračný priebeh hry Počet deliteľov

viac bodov, vyhráva. V ďalšej hre si žiaci vymenia poradie, v akom začínali. Priebeh jednej hry pozri na obrázku 1.

Záverečné vyhodnotenie: Hráči hrajú viac hier. Najmenší počet sú dve, aby sme zaistili, že každý hráč začínal rovnaký počet hier. Dvojica v lavici si zapisuje vzájomné skóre, tento zápis odovzdajú vyučujúcemu. Za každú hru víťaz aj porazený získajú istý počet bodov za aktivitu (napr. tri body pre víťaza, jeden bod pre porazeného).

Prednosti hry: Aktívna práca celej triedy, vnútorná motivácia žiakov súťaživosťou. Vzájomná kontrola žiakov odbreňuje učiteľa.

Tolko ukážka hry uvedenej v publikácii. Teraz sa skúsime zamyslieť nad stratégiou danej hry. Tú budeme hľadať analýzou jednotlivých pozícií, čo je úloha jednak na určovanie počtu deliteľov, ale najmä rozvíjajúca schopnosť strategického myslenia a zručnosť v analýze údajov. Možno ju zaradiť v rámci hodín matematiky, resp. ako aktivitu na matematických krúžkoch.

Pri hľadaní stratégie si ako prvé určíme počet deliteľov pre jednotlivé prirodzené čísla od 1 po 29 – tieto čísla sú všetky možné pozície v rámci hry. Určovanie tohto počtu je výbornou úlohou na precvičenie učiva o deliteľnosti, resp. jeho rozšírenie ohľadne vzťahu medzi počtom deliteľov a rozkladom čísla na prvočísla.

Jednotlivé počty deliteľov určujú, koľko bodov získa hráč po tom, ako sa v svojom ťahu dostane na príslušné číslo. Tieto počty sú preto „hodnotami“ jednotlivých pozícií v hre. V pravidlách hry je stanovené, že vo svojom ťahu môže hráč odpočítať od aktuálneho čísla prirodzené číslo od 1 po 5. To znamená, že hráč sa v ťahu dokáže posunúť o jednu až päť pozícií. Zostavme si tabuľku rozmeru 6×5 s jednotlivými prirodzenými číslami od 29 po 1 a s uvedením ich počtu deliteľov (pozri tabuľku 1).

Prvý hráč sa po svojom ťahu dostane do niektorej z pozícií v prvom riadku tabuľky. Druhý hráč, keďže môže odpočítať maximálne číslo 5, sa dostane najďalej do čísla umiestneného o riadok nižšie v stĺpci pod pozíciou prvého hráča. Táto tabuľka je preto ideálny nástroj na analýzu hry. To môže byť aktivitou žiakov. V rámci tabuľky 1 potom ilustrujeme nájdenú výhernú stratégiu pre druhého hráča, ktorý sa presúva vo svojich ťahoch na vyznačené pozície, bez ohľadu na ťahy prvého hráča. Uvedená stratégia mu zaručuje výhru. Bližšie štúdium danej stratégie pre krátkosť príspevku ponecháme na čitateľa.

Tab. 1: Ilustrácia výhernej stratégie v hre Počet deliteľov (pozície druhého hráča predstavujú vyšrafované políčka)

29 2	28 6	27 4	26 4	25 3
24 8	23 2	22 4	21 4	20 6
19 2	18 6	17 2	16 5	15 4
14 4	13 2	12 6	11 2	10 4
9 3	8 4	7 2	6 4	5 2
4 3	3 2	2 2	1 1	koniec hry

Záver

V príspevku sme sa venovali problematike didaktických hier v matematike. Konkrétne sme predstavili hru *Počet deliteľov* a urobili sme analýzu jej výhernej stratégie. Pre záujemcov o ďalšiu literatúru je tematika didaktických hier a analýzy ich stratégie dostupná tiež v dielach (Burjan, Burjanová, 1991; Jančařík, 2007). Veríme, že sa hra uvedená v príspevku bude páčiť a nájde svojich používateľov.

Poděkování

Príspevok vznikol s podporou grantu MŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011.

Literatúra

- [1] BURJAN, V., BURJANOVÁ, Ľ. *Matematické hry*. Bratislava : Pytagoras, 1991, 125 s. ISBN 80-85409-00-3.
- [2] JANČAŘÍK, A. *Hry v matematice*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007, 103 s. ISBN 978-80-7290-339-9.
- [3] VANKÚŠ, P. *Didaktické hry v matematike*. Bratislava : KEC FMFI UK Bratislava, 2012, 144 s. ISBN 978-80-8147-002-8.

VÝUKA SINOVÉ A KOSINOVÉ VĚTY V SOUVISLOSTI SE SHODNOSTÍ TROJÚHELNÍKŮ

Lukáš Vízek

Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta
vizek@karlin.mff.cuni.cz

Úvod

Autor v tomto článku prezentuje určitý způsob výuky řešení trojúhelníku pomocí sinové a kosinové věty. Vychází z vlastních zkušeností výuky na gymnáziu, konkrétně v Novém Bydžově¹, a ze studia středoškolských učebnic matematiky. Nejprve připomene běžné zařazení trigonometrie do vzdělávacích plánů, dále vyzdvihne některé cíle výuky, představí možnosti výuky trigonometrických vět s využitím shodnosti trojúhelníků a provede stručnou analýzu výkladu látky v současných i starších učebních textech.

Trigonometrie v učivu střední školy

Mezi předpoklady studia trigonometrie patří ovládnutí příslušných partií rovinné geometrie, Pythagorovy věty, goniometrických funkcí a rovnic. Z toho důvodu bývá výuka sinové a kosinové věty řazena do druhého ročníku střední školy, resp. odpovídajícího stupně víceletého gymnázia. Na odborných školách se její umístění ve vzdělávacím plánu může pochopitelně lišit podle konkrétního zaměření studia.

K cílům výuky řešení obecného trojúhelníku patří rozumět zadání trojúhelníku, uplatnit vhodné trigonometrické tvrzení a v neposlední řadě umět kriticky zhodnotit obdržené výsledky. Z širšího hlediska potom rozumět návaznosti trigonometrie na předchozí probíranou látku a vnímat její souvislosti s ostatními oblastmi matematiky.

Autor je přesvědčen, že navázáním trigonometrie na dříve probranou shodnost trojúhelníků lze efektivně jmenované cíle naplnit. Při takovém přístupu upozorníme na vztahy mezi těmito kapitolami a rovněž docílíme ve výkladu sinové a kosinové věty patřičného řádu. Předvedme, jakým způsobem můžeme ve výuce prakticky postupovat.

Trigonometrie ve vztahu k shodnosti trojúhelníků

V prvních hodinách trigonometrie představíme samotné znění sinové a kosinové věty. Předvedeme jejich důkazy, zakládáme je na užití goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníku a Pythagorovy věty, provádíme ve třech částech pro ostroúhlý, pravoúhlý a tupouhlý trojúhelník a zakončujeme tzv. cyklickou záměnu pro příslušné přeznačení trojúhelníku. Význam důkazů je mimo jiné v předvedení postupu, jakým by mohli studenti řešit obecný trojúhelník s dosavadními znalostmi ze základní školy.

Následně při řešení obecného trojúhelníku postupujeme podle planimetrických vět o shodnosti.

¹Na Gymnáziu Nový Bydžov působil autor v letech 2010 až 2013.

Věta *usu*

Podle věty *usu* jsou shodné takové trojúhelníky, jenž mají stejné velikosti jedné strany a úhlů k ní přilehlých. V důsledku tvrzení platí, že jsou-li v trojúhelníku dány strana a k ní přilehlé úhly, potom zbývající strany a úhel jsou jednoznačně určeny. K jejich výpočtu se užije sinová věta, je-li např. v trojúhelníku ABC ² dáno c, α, β , potom $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ a pro a platí:

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha.$$

Hodnoty $\sin \alpha$ a $\sin \gamma$ jsou jednoznačné, jedná se o funkce. Strana a (analogicky strana b) je tedy v souladu s důsledkem věty *usu* jednoznačně určena.

Věta *Ssu*

Z věty o shodnosti trojúhelníků *Ssu* plyne: jestliže jsou známy velikosti dvou stran a úhlu proti větší z nich, potom zbývající strana a úhly jsou určeny jednoznačně. Sinová věta se zde uplatní nejprve při výpočtu úhlu proti menší zadané straně. Je-li např. v trojúhelníku ABC dáno a, c, α , potom pro γ platí:

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot c.$$

Hodnotě $\sin \gamma$ obecně odpovídají $\gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ a $\gamma_2 \in (90^\circ, 180^\circ)$, avšak z příslušných planimetrických tvrzení plyne, že γ je ostrý úhel. Úhel β se dopočítá do 180° a velikost strany b se vyčíslí pomocí sinové věty podle předchozí situace.

Věta *sss*

V důsledku věty *sss* jsou jednoznačně určeny trojúhelníky se zadanými velikostmi všech stran. Při jejich řešení se nejprve užije kosinová věta. Např. pro úhel α v trojúhelníku ABC platí:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Jelikož je kosinus v intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$ prostou funkcí, je úhel α určen jednoznačně. K výpočtu druhého úhlu se buďto znovu užije kosinová věta, nebo se uplatní sinová věta. V druhém případě je však účelné počítat nejprve úhel proti menší straně, který je určitě ostrý.

Věta *sus*

Je-li trojúhelník zadán dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, jsou velikosti zbývající strany a úhlů určeny jednoznačně v důsledku věty *sus*. Je-li např. v trojúhelníku ABC dáno a, b, γ , potom podle kosinové věty je jednoznačně:

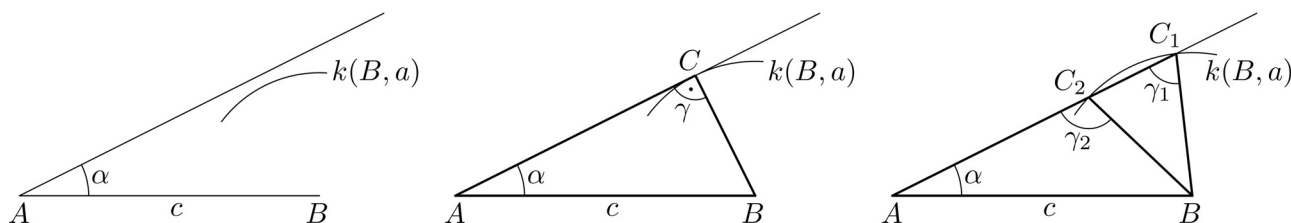
$$c = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma}.$$

Dále se postupuje obdobně jako v předchozím případě.

²V celém článku je uvažováno obvyklé značení vrcholů, stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

Úhel proti menší straně

Mnohdy se v rámci trigonometrie věnuje pozornost i trojúhelníkům se zadanými dvěma stranami a úhlem proti menší z nich. Zde se postupuje obdobně jako při určení podle věty *Ssu*. Je-li opět v trojúhelníku ABC dáno a, c, α ($a < c$), pak podle sinové věty může nastat: $\sin \gamma > 1$, $\sin \gamma = 1$ nebo $0 < \sin \gamma < 1$. V prvním případě trojúhelník ABC nelze sestavit, v druhém je pravoúhlý a v posledním vede konstrukce ke dvěma řešením, přičemž $\gamma_1 \in (0^\circ, 90^\circ)$ a $\gamma_2 \in (90^\circ, 180^\circ)$. Jednotlivé případy ilustruje obr. 1.



Obr. 1

V učebnici *Goniometrie* [3] dnes běžně používané řady *Matematika pro gymnázia* se podle vět o shodnosti postupuje pouze u kosinové věty. U sinové věty je uvedeno, že se toto tvrzení užívá při řešení trojúhelníku zadaného stranou a dvěma úhly nebo dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich. O počtu řešení se rozhodne podle věty o součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku.³ Obdobným příslupem je téma zpracováno v elektronické učebnici [2] Martina Krynického na serveru <http://www.realisticky.cz>. Věty o shodnosti však nejsou zmíněny vůbec.⁴

Výše prezentované pojetí výuky bylo inspirováno přístupy ve starších středoškolských učebnicích. Uveďme některé z nich. V učebnici pro střední odborné školy [4] je téma vyloženo podle všech čtyř vět o shodnosti trojúhelníků, řešení zadání dvěma stranami a úhlu proti menší z nich zde předvedeno není.⁵ Problém nejednoznačného určení trojúhelníku je vysvětlen např. v útlé prvorepublikové učebnici [1]:

Jest řešiti trojúhelník ze dvou stran a úhlu, jenž leží proti straně větší: $a > b$.

Řešení: Z úměry $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ vypočítejme

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

a pak stanovme β . Dodatek: Úloha jest jednoznačná pro $a \geq b$, dvojnásobná pro $a < b$ a $\sin \beta < 1$, jednoznačná pro $\sin \beta = 1$ a nemožná pro $\sin \beta > 1$.⁶

Propojení planimetrických tvrzení a trigonometrie je vyzdvíženo ve staré učebnici geometrie [5]. Zde je v poznámce k řešení trojúhelníku zadaného podle *Ssu* uvedeno:⁷

a) Je-li $a > b$, musí být podle vět z plochoměrství známých také $A > B$; následovně musí být v tomto případě B vždycky úhlem ostrým, a tím jest již hodnota úhlu B určena.⁸

³Viz [3], str. 104–115.

⁴Viz [2], kapitola *Trigonometrie*, dostupné z <http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=49>. [cit. 2013–03–20].

⁵Viz [4], str. 130–142.

⁶Viz [1], str. 36–37.

⁷ A, B značí v úloze úhly α, β .

⁸Viz [5], str. 193.

Závěr

Jakým způsobem přistupovat k výuce trigonometrie je jistě otázkou názoru. Smyslem tohoto příspěvku bylo poukázat na určité pojetí, jenž může přinést vhodné vodítko při řešení trojúhelníku a dobře ilustrovat vzájemnou propojenost matematických disciplín. Závěrem si autor dovoluje poukázat na dobré osobní zkušenosti s prezentovaným konceptem, pro které nachází opodstatnění v některých středoškolských učebnicích matematiky staršího data.

Literatura

- [1] ADÁMEK, A. *Trigonometrie pro školy mistrovské*. Praha : JČMF, 1927.
- [2] KRYNICKÝ, M. *Matematika SŠ*. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/ucebnice.php?id=2>. [cit. 2013–03–20].
- [3] ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia. Goniometrie*. 3. vyd., Praha : Prometheus, 2003.
- [4] ODVÁRKO, O., ŘEPOVÁ, J. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Část 3*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1985.
- [5] ŠANDA, F. *Měřictví pro vyšší třídy středních škol. Díl I*. Praha : L. Kober, 1870.

VYUČOVÁNÍ METODOU BUDOVÁNÍ SCHÉMAT – OSTRAVSKÁ ZKUŠENOST V UČITELSKÉ PŘÍPRAVĚ A PRAXI

Renáta Zemanová

Katedra matematiky s didaktikou, Pedagogická fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
renata.zemanova@osu.cz

Úvod

Článek představí novou zkušenost členů katedry matematiky s didaktikou (KMD) Pedagogické fakulty Ostravské univerzity v Ostravě (PdF OU), a to zkušenost ve vyučování matematiky orientovaného na budování schémat (VOBS). S aspektem na metodu VOBS popíše aktuální stav a cíle KMD PdF OU v oblastech přípravy materiálů k reakreditaci studijního oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ, rozšiřování teoretických a praktických poznatků jejich členů, aktuální stav a výhled sjednocení a podpory učitelů z praxe v regionu, záměr výzkumu a financování všech aktivit.

Zahájení aktivit PdF OU

PdF OU bude v roce 2013 připravovat žádost o reakreditaci oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ. V závislosti na tom jsme již od roku 2012 řešili s kolegy na KMD problém nutnosti zásadní změny koncepce matematické přípravy budoucích učitelů – elementaristů. R. Krpec v článku (Jirotková, Krpec, 2013) shrnuje důvody našeho přesvědčení, že dosavadní způsob této přípravy odpovídající tradičnímu pojetí výuky matematiky, který od 80. let minulého století nedostal významnějších změn, již nevyhovuje potřebám praxe ani aktuálním výzkumným zjištěním.

V procesu hledání nových možností jsme zjistili, že na všech pedagogických fakultách v České republice se učitelé připravují víceméně stejně jako u nás, s výjimkou Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy (PedF UK). Jako alternativu tradičního pojetí výuky matematiky zde výzkumný tým (Hejný, Jirotková, Slezáková, Kloboučková) předkládá jinou koncepci výuky, a to výuku metodou budování schémat (VOBS – Hejný, Zemanová, 2013).

Od poloviny roku 2012, kdy proběhlo naše první setkání s prof. Milanem Hejným, rozvíjíme s PedF UK stále intenzivnější spolupráci: od získávání informací o implementaci metody do výuky budoucích učitelů, přes účast na otevřených hodinách elementaristů spolupracujících s PedF UK, zprostředkování přednášek a seminářů týmu PedF UK na PdF OU, objevování teoretických možností a praktických aplikací ve výuce na 1. st. ZŠ až po vznikající náměty na společný výzkum, resp. naše navázání na dosavadní výzkum PedF UK. A současně se zvyšující se intenzitou spolupráce nejen že potvrzujeme naše přesvědčení o správnosti této cesty, ale objevujeme netušené možnosti využití metody VOBS v přípravě budoucích učitelů i podpoře učitelů z praxe.

Aktuální cíle KMD PdF

Naším cílem je nyní 1) připravit materiály k reakreditaci studijního oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ v matematice, v nichž bude a) teorie mnohem více propojena s praxí, resp. didaktikou, než tomu bylo doposud, b) didaktika významně doplněna metodou VOBS a orientací na učebnice

nakladatelství Fraus, jejichž autory je výzkumný tým PedF UK, c) praxe orientována na vyučování metodou VOBS (na školách, které podle učebnic nakladatelství Fraus učí), 2) získávat další teoretické znalosti a praktické zkušenosti s výukou metodou VOBS, 3) sjednotit a podporovat učitele z praxe v rámci regionu, kteří metodou učí či učit chtějí (informace učitelům, sdílení zkušeností, rozvoj komunity, ...), 4) vést výzkum navazující na dosavadní výzkum PedF UK. K jednotlivým výše uvedeným bodům nyní popíšeme aktuální stav, 5) pro podporu výše uvedených činností získat finanční prostředky mimo financování vysokých škol.

Obsahové změny v přípravě budoucích učitelů

Co se týče obsahových změn ve studijních plánech oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ, je situace na PdF OU pro náš cíl velmi příznivá. KMD PdF OU má významnou podporu katedry pedagogiky primárního a alternativního vzdělávání PdF OU, zejména vedoucí katedry prof. Hany Lukášové, která obor garantuje. Metoda VOBS, resp. aktivity prof. Hejného a jeho týmu, jsou na této katedře známy a velmi kladně přijímány.

Snížíme podíl teoretického obsahu vybraných témat ve prospěch didaktiky a didaktiku navážeme přímo na teorii tak, aby studenti viděli její aplikaci. V rámci didaktiky posílíme praktické činnosti studentů a změníme formu závěrečného hodnocení (praktické úkoly čerpající náměty v reálné škole: příprava gradovaných úloh, analýza žákovských řešení a jejich hodnocení, analýza části konkrétní vyučovací hodiny z různých aspektů, ...), vše jak s odkazem na tradiční vyučování (učebnicová řada SPN), tak metodu VOBS (učebnicová řada Fraus). Budeme usilovat o změnu koncepce průběžné praxe (1 – náslechy, 2 – výstupy ve dvojici, 3 – výstupy samostatně) tak, aby všichni studenti tuto praxi v matematice absolvovali, což se dnes neděje. Budeme ji realizovat především na školách s tradiční výukou, ale i s výukou metodou VOBS tak, aby každý student navštívil alespoň jednu vyučovací hodinu z obou uvedených. Praktikující studenty budeme více aktivovat konkrétním směrem (různé aspekty analýzy vyučovacích hodin, predikce žákovských řešení, vlastní náměty, ...). Dále se v součinnosti s katedrou pedagogiky primárního a alternativního vzdělávání pokusíme sladit aktivity studentů v předmětech této katedry, které se věnují projektům, kdy aktuálně student mnohem dříve, než absolvuje didaktiku matematiky na KMD PdF, připravuje a realizuje projekt ve vybraném předmětu 1. st. ZŠ, často právě v matematice.

Zkušenosti členů katedry s praktickou výukou v ZŠ

Od září 2013 budeme vyučovat matematiku podle učebnicové řady nakladatelství Fraus ve 3. tř. Matiční; dohodli jsme zde výuku na období jednoho roku s výhledem na další dva roky. 3. třídu jsme zvolili záměrně jako nejvhodnější, a to jednak proto, že učebnice svým obsahem začít metodou VOBS ve 3. třídě umožňují, a dále je třetí třída rozmanitostí prostředí a úrovně žáků pro náš záměr vhodnější než třída první. Dohoda s vedením školy proběhla velmi rychle k oboustranné spokojenosti, a to přesto, že se zde učebnice nakladatelství Fraus doposud nepoužívaly. Svou roli sehrála medializace metody a osoby prof. Hejného, a dále deklarovaná podpora města Ostravy (primátor Ostravy ing. Kajnar metodu v hrubých rysech zná a podporuje její implementaci do škol). Jediným problémem, který vedení školy řešilo, byly finance na nákup dražších učebnic, než které škola standardně využívá. Zde jsme mohli nabídnout finanční podporu města Ostravy, kterou jsme získali na rok 2013.

Kromě této průběžné aktivity jednorázově navštěvujeme vybrané vyučovací hodiny u učitelů, kteří touto metodou učí. Zatím jsme realizovali návštěvy v Praze (J. Michnová, E. Bomeroová), ale zamýšlíme pokračovat návštěvami v Ostravě a okolí (P. Placzková, X. Obšilová, ...).

Sjednocení a podpora učitelů z regionu

Díky podpoře města Ostravy jsme měli v září 2012 možnost na výročním setkání všech ředitelů ostravských základních škol prezentovat základní aspekty metody VOBS ve výuce matematiky na 1. st. ZŠ, přičemž jsme požádali o zprostředkování informací učitelům 1. st. jejich škol. Vyzvali jsme je, aby nám jednak sdělili, zda metodou pracují či o práci s ní uvažují, a nabídli jim možnost další spolupráce. Ozvala se nám řada učitelů. Jen málo z nich metodou pracuje, většina o jejím použití uvažuje.

Seznam učitelů, kteří učí podle učebnic nakladatelství Fraus, jsme rozšířili o další kontakty, které nám laskavě poskytlo přímo nakladatelství, nicméně víme, že není úplný. Postupně tedy seznam doplňujeme s cílem dalších aktivit: rádi bychom nabídli setkávání těchto učitelů (stěžují si na izolaci a nedostatek informací), vzájemné návštěvy otevřených hodin a následnou diskuzi problémů, předávání informací a zkušeností (materiály, termíny akcí, ...).

Podporujeme rovněž učitele, kteří o zavedení metody uvažují, a to zejména umožněním účasti na otevřených hodinách probíhajících metodou VOBS, předáváním informací, materiály, termíny akcí, a pozváním na semináře k teorii a praxi metody realizované kolegy z Prahy (tým prof. Hejného). První takový seminář proběhl již na podzim 2012, zájem byl obrovský (pro nedostatek kapacity jsme museli zájemce odmítat), ohlasy byly velmi kladné.

Výzkum

Současně s intenzivním získáváním poznatků a zkušeností s metodou VOBS jsme s kolegy z Prahy konzultovali, jak bychom mohli jejich výzkum obohatit vlastními tématy a vlastní výzkumnou prací. Dohodli jsme se na dvou tématech: 1) propedeutika kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky (R. Krpec), 2) rozvoj didaktické empatie budoucích učitelů elementaristů v matematice (R. Zemanová), obě témata samozřejmě s aspektem na metodu VOBS.

Tato témata aktuálně rozpracováváme. K rozvoji didaktické empatie učitelů byla prozatím připravena predikce řešitele výzkumu řešení gradované úlohy pro děti u zápisu do 1. tř. ZŠ. Experiment byl proveden pro 30 dětí, predikce byla vyhodnocena (dále budou zpracovány predikce budoucích učitelů). Následně řešitel zamýšlí vytvořit několik gradovaných úloh pro 1. tř. ZŠ, vlastní predikci žákovských řešení, predikce budoucích učitelů, experiment ve výuce a predikce analyzovat. První výsledky očekáváme v červenci 2013, jejich prezentaci zamýšlíme připravit na konferenci SEMT 2013 (International Symposium Elementary Mathematics Teaching, PdF UK).

Finanční podpora

Pro realizaci výše uvedených aktivit jsme potřebovali najít finanční zdroje. První poskytl PdF OU na vybavení KMD PdF OU kompletní řadou učebnic nakladatelství Fraus (pro každého studenta, do studovny PdF OU a knihovny OU), metodickými příručkami (pro každého vyučujícího, do studovny PdF OU a knihovny OU), elektronickými učebnicemi s multilicencí a dalšími pomůckami pro výuku (geodesky, soubory krychlí, pracovní karty, krokovací pásy aj.).

Dalším zdrojem financí byl projekt Evropské unie, který má OU na podporu spolupráce pedagogů OU s významnými odborníky. Zde čerpáme prostředky především na úhradu cestovních nákladů na pracovní cesty členů KMD PdF OU, realizované za účelem získávání nových informací k metodě VOBS, dále na přípravu studijních materiálů a studijního kurzu k metodě VOBS pro budoucí učitele.

Další finance jsme získali od města Ostravy. Používáme je na pokrytí nákladů spojených s realizací seminářů k metodě pro učitele z praxe, na nákup záznamové techniky (kamera, fotoaparát), pokrytí dalších cestovních výloh a spotřebního kancelářského materiálu.

Závěr

PdF OU se po PedF UK stala druhou fakultou v republice, kde jsou budoucí učitelé 1. st. ZŠ v rámci povinných předmětů připravováni na výuku metodou VOBS. Představili jsme důvody, které nás vedly k tomuto rozhodnutí, a popsali konkrétní problematiku, kterou jsme v souvislosti s tím museli, resp. budeme muset řešit, a to jak v rámci katedry a fakulty, tak ve vztahu k praxi. Nicméně všechnu naši snahu, významně podporovanou kolegy z katedry matematiky a didaktiky matematiky PedF UK, zejména prof. Milanem Hejným a doc. Darinou Jirotkovou, považujeme za velmi smysluplnou, a to jak pro naše budoucí absolventy, jejich žáky, rodiče, tak pro nás samotné. I pokud by se nestalo nic jiného, než že by se zvýšil počet dětí (a studentů oboru Učitelství pro 1. st. ZŠ) v této zemi, které bude matematika bavit, budeme to považovat za úspěch.

Poděkování

Financováno z rozpočtu Statutárního města Ostravy, číslo smlouvy 2734/2012/KP.

OSTRAVA!!!

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., ZEMANOVÁ, R. *Vyučování orientované na budování schémat v praxi* (v tisku).
- [2] JIROTKOVÁ, D., KRPEC, R. *Vyučování orientované na budování schémat v přípravě učitelů* (v tisku).

PRACOVNÍ DÍLNY

GEOGEBRA NEJEN V GEOMETRII

Šárka Gergelitsová

Gymnázium Benešov
sarka@gbn.cz

Úvod

Jedním z mnoha důvodů, proč při výuce využívat interaktivní parametrické systémy, ke kterým patří také GeoGebra, je možnost řešit s jejich pomocí úlohy zadané parametricky a sledovat vliv změn vstupních parametrů na výsledek konstrukce či výpočtu, nebo využít možnost rychle a snadno generovat sady analogických zadání úloh. To vše navíc v atraktivní grafické podobě. Jako příklad jsme připravili dva ukázkové modely, druhý z nich ve dvou variantách.

Příklad první – Geometrie – konstrukční úloha

Interaktivní pracovní list pro samostatné řešení konstrukční úlohy (zvoleným postupem)

Postup v tomto příkladu popíšeme podrobněji, pokud však čtenář hledá ještě detailnější informace k jednotlivým funkcím a nástrojům GeoGebry, doporučujeme interaktivní seznam příkazů, který je k dispozici na webu GeoGebry [1], pro inspiraci k tvorbě modelů pak publikaci [3], která je pojata jako sbírka jednotlivých kompletních příkladů s detailním výkladem použitých postupů.

Zadání konstrukční úlohy

Sestrojte všechny trojúhelníky s danou stranou AB , daným úhlem α při vrcholu A a s danou délkou protilehlé strany a .

V prostředí GeoGebry nebudeme využívat jiné části prostředí než *Nákresnu* (bez zobrazených souřadnicových os) a *Panel nástrojů*. Zobrazení *Algebraického okna* může být během práce výhodou, nakonec ho ale skryjeme, aby nerušilo pohled na konstrukci.

Postup konstrukce trojúhelníku v GeoGebře (pro začátečníky v práci s programem)

1. Do *Nákresny* vložíme úsečku AB (nástroj *Úsečka dvěma body*). Chceme-li její délku a polohu krajních bodů fixovat (například pro pozdější diskusi), vyvoláme dialogové okno *Vlastnosti* (například z kontextového menu, které otevřeme kliknutím pravého tlačítka myši nad bodem nebo klávesovou zkratkou **Ctrl+E**), a v něm pro oba body na kartě *Základní* aktivujeme volbu *Upevnit objekt*.
2. Do *Nákresny* vložíme postupně dva objekty *Posuvník* – pro úhel α a délku strany a .

Tyto vstupní parametry bychom sice mohli přímo s počátečními hodnotami vložit do *Vstupního řádku* (např. zápisem $a = 4$) a následně upravit vlastnosti, ale *Posuvník* nám dovolí všechny jejich vlastnosti ihned zvolit.

Pro úhel zvolíme typ *Úhel*, název se nejspíš změní na α (kdyby ne, vybereme písmeno α z tabulky, kterou rozevřeme kliknutím na ikonku v pravé části vstupního pole), a stanovíme rozsah hodnot. Pro délku a také určíme rozsah (kladných) hodnot. U obou posuvníků určíme krok, o který se bude hodnota měnit při modifikaci zadání.

3. Sestrojíme rameno úhlu α , na němž bude ležet hledaný vrchol C trojúhelníku. To lze udělat buď pomocí nástroje *Otočení* (sestrojíme nejprve polopřímku AB a otočíme ji o úhel daný posuvníkem – proměnnou α) nebo pomocí nástroje *Úhel dané velikosti*, který sestrojí bod B' jenž je obrazem bodu B v otočení kolem bodu A o úhel α , a sestrojíme polopřímku AB' .
4. Nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* sestrojíme kružnici, na níž bude ležet hledaný bod C .
5. Sestrojíme průsečíky (nástroj *Průsečíky dvou objektů*) ramena úhlu a kružnice. Vhodně je pojmenujeme. Můžeme také sestrojít výsledný trojúhelník (oba, pokud existují) nástrojem *Mnohoúhelník*.

Poznámka 1: všechny objekty můžeme přejmenovávat ihned po jejich vytvoření, stačí začít psát na klávesnici.

Poznámka 2: V okně *Vlastnosti* nebo na liště okna *Nákresna* najdeme volby pro vzhled sestrojených objektů.

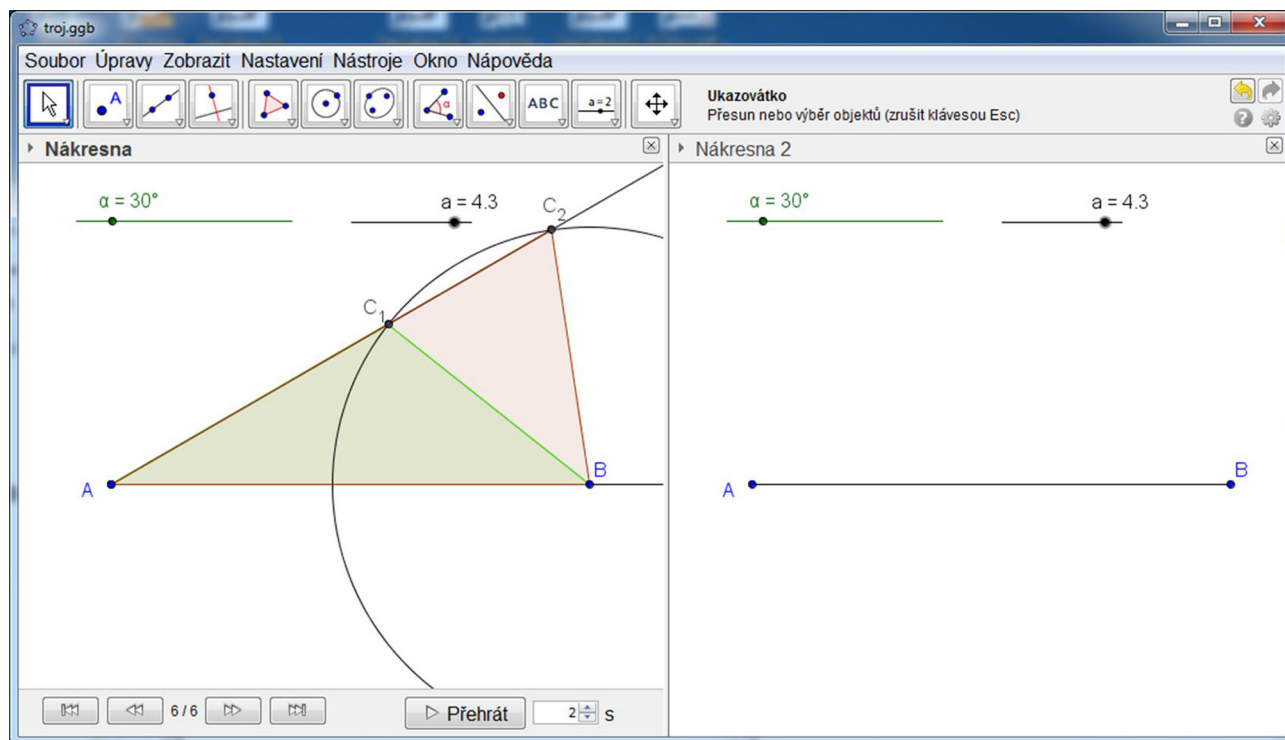
Další kroky konstrukce a využití interaktivního modelu

Model je připravený například pro ilustraci diskuse počtu řešení a jako takový už bychom ho mohli použít. Nám však šlo o to, jak vytvořit prostředí, v němž by žáci (obeznámení se zásadami konstruování v GeoGebre) výše uvedenou konstrukci mohli provést („narýsovat“). Pro jejich práci připravíme *Nákresnu 2*, v níž budou připraveny vstupní parametry zadání.

6. Zobrazíme okno *Nákresna 2* (z menu *Zobrazit*).
7. Označíme všechny objekty, které jsou součástí zadání (body A, B , úsečka AB , oba posuvníky), a na kartě *Pro pokročilé* okna *Vlastnosti* zvolíme v části *Umístění* zobrazení v obou nákresech.
8. V *Nákresně* (prvé) zobrazíme panel nástrojů pro krokování konstrukce a nastavíme počátek do té fáze konstrukce, kde jsme již sestrojili zadání, ale ještě jsme nezačali řešit úlohu (kroky 1., 2. ve výše uvedeném postupu). Zobrazení krokování se zapíná v různých verzích programu různě. Ve starších verzích bývalo v menu *Zobrazení*, ve verzi 4.2 je tato volba ve *Vlastnostech Nákresny*...

Poznámka 3: V okně *Zápis konstrukce* (zobrazí se z menu *Zobrazení*) můžeme – kromě mnoha jiných akcí – nastavit tzv. *Body zastavení*, kterými vymežíme v konstrukci místa, kde se má při krokování konstrukce zastavovat. Můžeme tak „zvětšit“ kroky trasování na větší logické celky.

Model (viz obrázek 1) je připraven pro samostatnou práci žáků. V okně *Nákresny 2* (vpravo) žák postupně provádí konstrukce a neví-li si rady, může v levém okně, kde je konstrukce provedena, postupně odhalovat její jednotlivé kroky.



Obr. 1

Příklad druhý: Dělitelnost

„Trenažer“ pro procvičování postupu hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele

Postup, jímž sestavíme pracovní list, v tomto příkladu využívá ne-geometrických funkcí programu. *Nákresnu* využijeme ne pro „rýsování“, ale jako interaktivní prostředí.

Požadavky na model

Model zobrazí dvojici přirozených čísel, k nimž by měl žák najít největší společný dělitel a nejmenší společný násobek. Volitelně pomáhá při řešení a může zobrazit nejprve prvočíselný rozklad obou čísel a nakonec i správné řešení.

Zdokonalená varianta: Interaktivní pracovní list obsahuje vstupní pole, kam může žák zadat odpověď a model určí, zda odpověď je správná.

Využijeme funkce programu, budeme je vkládat do tzv. *Vstupního pole* (řádku), který bývá (nemusí být – viz volby *Rozvržení*) zobrazen u dolního okraje okna programu. Pro přehled o objektech a pro usnadnění některých akcí zobrazíme *Algebraické okno*.

Postup sestavení modelu

1. Do *Vstupního pole* (řádku) zapíšeme příkazy, které vygenerují náhodná čísla (zvolili jsme rozsah od 2 do 100):

$$n = \text{NahodneMezi}[2, 100], k = \text{NahodneMezi}[2, 100]$$

Poznámka: stejného výsledku bychom dosáhli v *Nákresně* vložením *Posuvníku* pro volby *Celé číslo*, *Náhodný*, *min:* 2, *max:* 100. Poté bychom *posuvníky* (tj. proměnné) skryli.

2. Do *Vstupního pole* (řádku) zapíšeme (vložíme) další funkce, které vrátí pro tato dvě čísla jejich prvočíselné rozklady, dělitele a násobky:

PrvociselnýRozklad[n] – výsledkem je tzv. *Seznam* (seznam prvočinitelů čísla n)

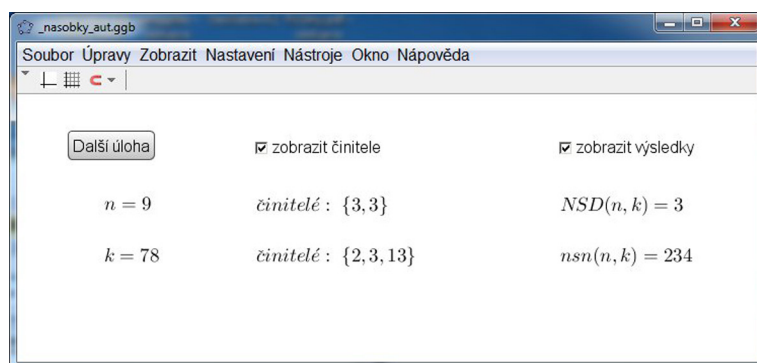
NSD[n,k] – vrátí největšího společného dělitele čísel n , k (nazveme ho například a)

NSN[k,n] – vrátí nejmenší společný násobek čísel n , k (nazveme ho například b)

Výsledky se jako nové proměnné zobrazí v *Algebraickém okně*.

3. Zobrazíme potřebné texty v *Nákresně*: nejjednodušší postup je uchopit myší zvolenou proměnnou v *Algebraickém okně* a přetáhnout ji na požadované místo *Nákresny*. Zobrazí se tam jeho hodnota jako text.
4. Novou úlohu získáme přepočtením všech objektů – příkaz *Přepočítat všechny objekty* z menu *Zobrazit*, klávesová zkratka **Ctrl+R**. Čísla n , k jsou výsledkem generování náhodného čísla, a proto přepočtení všech objektů vyvolá jejich nový výpočet.

Základní jednoduchý model je hotov. Ale práce s ním není příliš atraktivní, vyvolání nového zadání klávesovou zkratkou není obvyklé ani intuitivní a zobrazení údajů (vzhled textů) nemusí esteticky vyhovovat. Upravíme proto model na vzhled podobný obrázku 2.



Obr. 2

5. Pro aktualizaci výpočtu (vyvolání nového zadání) přidáme do *Nákresny* objekt *Tlačítko* a do jeho pole *GeoGebra Skript* zapíšeme příkaz `AktualizaceKonstrukce[]`.
6. Pro skrývání objektů vložíme do *nákresny* objekty *Zaškrťovací políčko...*, nastavíme jim vhodný popis a u každého zadáme ovládané objekty do jeho vstupního pole *Vybrat objekty...* (vybereme je ze seznamu, nebo na ně můžeme klikat v *Nákresně*).
7. Požadujeme-li estetičtější vzhled textů v *Nákresně*, nepřetáhneme položku rovnou z *Algebraického okna*, ale vložíme do *Nákresny* objekt *Text*, zvolíme (zaškrtneme volbu) *LaTeX Vzorec* a do pole, kam bychom měli zapsat text, jen klikneme a vzápětí vybíráme (pomocí myši) objekty (opět třeba z *Algebraického okna*).

Automatické ověření správnosti

Vstupní textové pole je objekt, který umožní interaktivně změnit hodnotu jiného zvoleného objektu. Následujícím postupem vytvoříme celočíselné proměnné nazvané například *delitel* a *násobek* a jejich hodnoty propojíme s nově vloženými *Vstupními textovými poli*:

8. Vytvoříme proměnné *delitel* a *nasobek*: do *Vstupního pole* (řádku) zapíšeme například příkazy $\text{delitel} = 1$ a $\text{nasobek} = 1$.
9. Do *Nákresny* vložíme nový objekt *Textové pole* (nástroj *Vložit textové pole*), zvolíme vhodný popis (například „NSD=“) a do pole *Propojený objekt* vybereme z rozbalovacího seznamu proměnnou *delitel*. Pokaždé, když uživatel do pole zapíše hodnotu, přiřadí se tato nová hodnota proměnné *delitel*.
10. Přidáme pochvalu: Vložíme do *Nákresny Text* (*Vložit text*) „Výborně“ a jeho zobrazení podmíníme podmínkou ve tvaru $a = \text{delitel}$ (do proměnné *a* jsme v kroku 2 vložili hodnotu největšího společného dělitele). Podmínku vložíme do pole *Podmínky zobrazení objektu* na kartě *Pro pokročilé okna Vlastnosti* zmíněného textu „Výborně“.
11. Skryjeme *Algebraické okno*.

Závěr

Dvě vybrané ukázky samozřejmě ilustrují jen malou část nástrojů, funkcí a možností, které program GeoGebra poskytuje. Představují pouze dva příklady, jak program využít pro tvorbu interaktivních „pracovních listů“ pro žáky.

Velkou inspirací a zdrojem hotových modelů mohou být například materiály sdílené kolegy z mnoha zemí na webu GeoGebraTube (viz [2]).

Literatura a zdroje

- [1] GeoGebra [online]. [cit. 2013–03–21]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/>
- [2] GeoGebraTube [online]. [cit. 2013–03–21]. Dostupné z: <http://www.geogebraTube.org/>
- [3] GERGELITSOVÁ, Š. *Počítač ve výuce nejen geometrie – průvodce GeoGebrou*. Praha : Generation Europe, 2011.

PRAKTICKÉ UKÁZKY VYUŽITÍ DIDAKTICKÝCH HER ZAMĚŘENÝCH NA VÝUKU FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pavla Hanzalová, Bohumila Raisová

Univerzita Hradec Králové
pavla.hanzalova@uhk.cz, bohumila.raisova@uhk.cz

Úvod

Hra doprovází člověka celý život, je to jedna ze základních forem činnosti. Obecně bychom ji mohli charakterizovat jako člověkem vybranou aktivitu bez nějakého specifického účelu, která však má cíl a hodnotu sama v sobě. Základními znaky jsou svobodná volba, uplatnění zájmů, spontánnost a uvolnění. Nabývá různých projevů, ve kterých se mohou odrážet vlivy prostředí, vlivy sociální či schopnosti dané osoby. Didaktickou hru potom Maňák a Švec [1, s. 127] definují jako seberealizační aktivitu jedinců či skupin, která hru přizpůsobuje pedagogickým cílům.

Cílem tohoto článku je předložit několik námětů na didaktické hry určené i pro střední školy, s ukázkami zaměřenými na výuku funkcí jedné proměnné.

Domino

Tato hra nese jméno známé dětské hry s různými kameny, které se kladou k sobě tak, aby vždy sousedící části dvou různých kamenů měly stejný počet puntíků. Výsledek hry tedy může vypadat pokaždé jinak. To je hlavní rozdíl oproti matematickému dominu, kdy je výsledek zpravidla pouze jeden správný. Hra se tedy nedá hrát přesně podle pravidel klasického domina. Zde skládá každý hráč sám (nebo více hráčů ve skupině) celé domino a soutěží hráči (skupiny) mezi sebou. Hra je vhodná spíše pro zopakování látky a dá se zaměřit téměř na cokoli, co tvoří nějaké logické dvojice. Na obr. 1 můžeme vidět část domina, které se zaměřuje na matematický zápis vlastností funkcí.

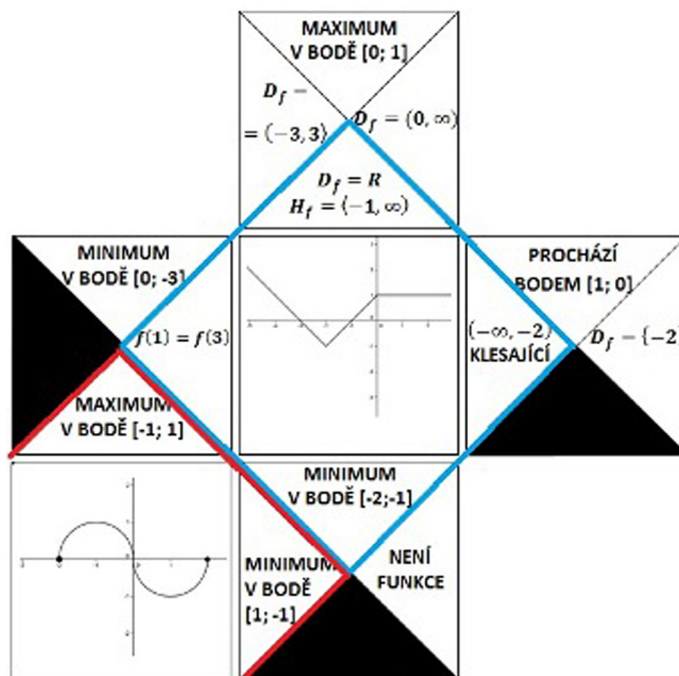
Vlastnosti funkcí a jejich matematický zápis	SUDÁ	$\forall x \in D_f$ $\exists (-x) \in D_f$: $f(x) = f(-x)$	MAXIMUM	$\forall x \in D_f$ $\exists a \in D_f$: $f(x) \leq f(a)$	ROSTOUCÍ	$\forall x_1, x_2 \in D_f$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$	atd.
---	------	---	---------	--	----------	--	------

Obr. 1: Domino – matematický zápis vlastností funkcí

Čtverce

Tento rébus má podobně jako Domino pouze jeden možný výsledek. Ke hře je potřeba sada připravených karet – čtverců. Můžeme se setkat se dvěma variantami: v první jsou všechny čtverce rozdělené úhlopříčkami na čtyři části, ve druhé jsou některé čtverce nedělené. Cílem hry je ze všech karet sestavit obdélník (případně čtverec). A to tak, že části různých čtverců, které k sobě přikládáme, musí tvořit nějakou ucelenou dvojici (např. klíčová slova patřící k sobě, příklad a výsledek). U druhé varianty skládáme čtverce vždy tak, aby kolem neděleného čtverce

byly vždy dělené, a opět části, které s neděleným sousedí, s ním musí mít něco společného (např. na obr. 2 grafu funkce v neděleném čtverci odpovídají jeho vlastnosti v přilehlých částech dělených čtverců; na obrázku je znázorněno pět správně přiložených karet). Některé části čtverců mohou být bez dvojice (okraje), jiné části mohou mít černou výplň (případně jsou prázdné). To však neznamená, že musí ležet na okraji.



Obr. 2: Druhá varianta hry Čtverce

Kvarteto

Pro výuku funkcí se také velmi hodí klasická karetní hra Kvarteto. Zde je vhodné vytvořit si vlastní karty, které budou tvořit čtveřice: název elementární funkce, základní předpis (bez posunů po osách a jiných číselných koeficientů), vykreslený graf a vlastnosti této funkce. Žáci potom hrají podle klasických pravidel; pouze když požadují od spoluhráče kartu, musí ji přesně popsat. Tato hra je časově náročnější.

Bludiště

Hra Bludiště spočívá v tom, že panáček, který zastupuje hráče, musí projít hracím plánem od políčka „Start“ k políčku „Cíl“. První hráč nejprve hází šestistěnnou hrací kostkou, následně se posune o kostkou určený počet polí. Zkontroluje, zda na tomto poli není úkol (resp. příklad, otázka). Pokud ano, musí úkol splnit (resp. správně příklad vypočítat, správně odpovědět). Pokud odpoví správně, hraje druhý hráč. Pokud odpoví špatně nebo vůbec ne, posouvá svoji figurku zpět na první políčko „Start“ nebo na označená záchytná pole. Hráči se postupně střídají, dokud první nedojde na (případně za) poslední políčko „Cíl“.

Hrací plán můžeme mít univerzální, pouze označený čísly. K němu pak lze vytvořit více legend s příklady či otázkami. Hrací plán však mohou vytvořit i sami žáci – učitel rozdává nastříhané čtverce (vhodné velikosti cca 4×4 cm), na které žáci ve skupinách napíší příklady. Čtverce se

potom nalepí za sebe tak, aby bylo poznat, kudy má hráč jít. Hrací plán si potom skupiny mezi sebou vymění a zahrají.

Vykreslování obrázků

Tato aktivita spadá mezi motivační činnosti. Inspirací pro její vznik byl tzv. tangram, kdy se pomocí předem zadaných rovinných útvarů tvoří obrázky nebo jiné rovinné útvary [2, s. 64]. Zde žákům nejprve představíme pojem funkce. Následně zadáme úkol, kterým je nakreslení libovolných obrázků pomocí funkcí. Aktivitu můžeme upravovat i podle právě probíraných funkcí – tj. obrázek pouze z lineárních funkcí.

Zajímavější variantou je nacházet grafy funkcí v různých daných obrázcích. Například na obr. 3 je nakreslený panáček (hlavička samozřejmě není funkcí, také je barevně odlišená). Můžeme zde však rozpoznat více různých funkcí: $\operatorname{tg}(x)$ a $-\operatorname{tg}(x)$; x^2 a $-x^2$ nebo x^3 a $-x^3$ (vybráno z elementárních funkcí bez posunů po osách). Dalším návrhem na aktivitu právě s tímto obrázkem je diskuze s žáky, jak v obrázku umístit soustavu souřadnic, a následně jaké předpisy funkcí by obrázku odpovídaly.



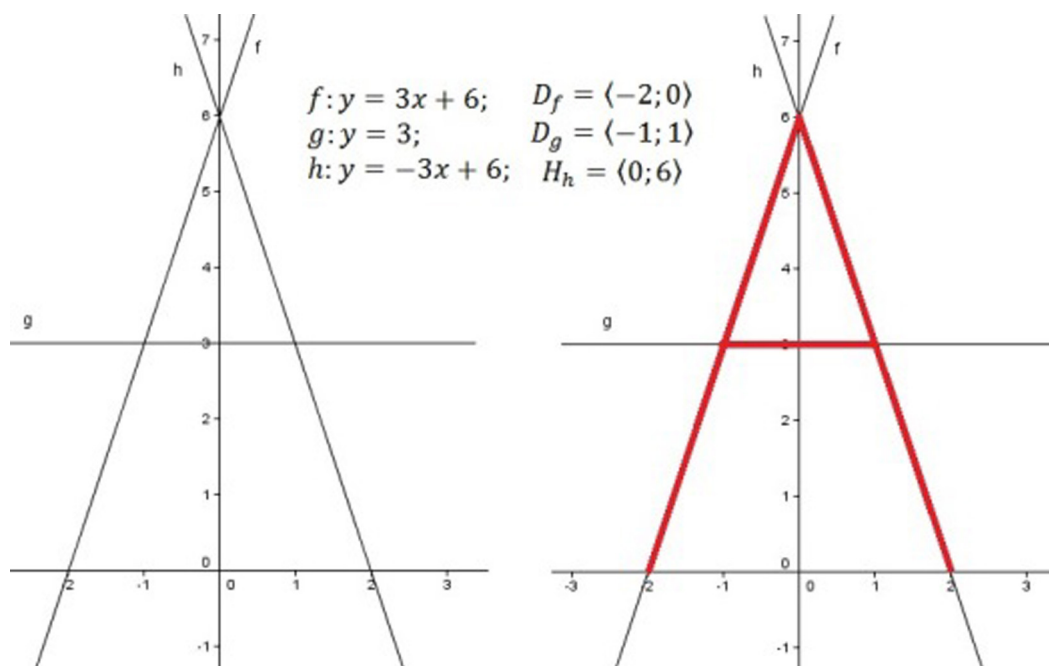
Obr. 3: Panáček složený z funkcí

Abeceda

V této aktivitě předpokládáme již znalosti vykreslování grafů. Tuto činnost je možné použít již pro lineární funkce na ZŠ, ale stejně tak i pro všechny ostatní. Žáci obdrží lístky s různými předpisy grafů. Jejich úkolem je grafy z jednoho lístku načrtnout do jedné soustavy souřadné. Kromě samotných funkcí je zadán i jejich definiční obor nebo obor hodnot, podle kterých zvýrazní části zadaných funkcí. Po zvýraznění by žáci měli poznat nějaké písmeno. Dále mohou z jednotlivých písmen ve třídě (nebo ve skupině) poskládat určité slovo – tajenku. Na obr. 4 je vidět zadání funkcí, vykreslené samotné funkce a následně potom i zvýrazněné ve svých definičních oborech a oboru hodnot.

Závěr

Tento článek obsahuje několik námětů na didaktické hry v matematice. Podle nich je možné vytvořit si vlastní návrhy na různá témata, a to nejen v předmětu matematika. Další náměty můžete najít v různých klasických dětských hrách nebo v odborné literatuře. Ta je většinou orientovaná na první stupně základních škol, ale dobře poslouží jako inspirace. Většina z těchto her



Obr. 4: Písmeno skryté pomocí lineárních funkcí

byla odzkoušena i v praxi (ve druhém ročníku vyššího gymnázia). Žáky tento způsob upevňování učiva velmi zaujal. Především byli spokojeni se skupinovou prací, kterou v klasických hodinách matematiky skoro nevyužívali.

Uvedené hry můžeme tedy využít nejen jako zábavnější formu procvičování, případně opakování učiva, ale můžeme jimi žáky pro učivo namotivovat.

Literatura

- [1] MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno : Paido, 2003, 219 s. ISBN 80-7315-039-5.
- [2] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice*. Hradec Králové : Gaudeamus, 1994, 109 s. ISBN 80-7041-960-1.

CHARAKTERISTIKA A UKÁZKY „DOBRÉHO VYUČOVÁNÍ“ V MATEMATICE

Jarmila Novotná

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

1 Úvod

Konstruktivistický přístup k vyučování vychází z přesvědčení, že učení je dynamický proces, ve kterém musí žáci být aktivními účastníky. Myšlenka konstrukce vlastního poznání, jeho „vynorování se“ z poznání existujícího a z nových podnětů, je stará více než 2 000 let. Zásadní je zde motivace, bez ní nelze od žáka očekávat aktivitu. Motivačně by měly působit jak otázky a úlohy, které jsou žákům nabídnuty, tak i ty, které navrhnou sami.

Deset zásad, které popisují didaktický konstruktivismus (Hejný, Kuřina, 2001, kráceno):

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede často k formálnímu poznání.

2 Charakteristiky „dobrého vyučování“

V našem přístupu se snažíme podporovat spolupráci mezi učitelem a žáky, jejímž cílem je rozvíjení osobnosti žáka. To usnadňuje nejen rozvoj znalostí a dovedností žáků, ale ovlivňuje také jejich přístupy k učení se matematice. Naší snahou je učinit ze školy instituci, která podněcuje iniciativu a nezávislost žáků (Novotná, Hanušová, 1999).

Snažíme se koncipovat vyučování tak, aby žáci měli možnost poznat matematiku z jiného pohledu, především jako vhodnou metodu pro řešení problémů z různých oborů i z běžného života. Vyučování organizujeme tak, aby žáci poznávali nové pojmy v činnostech jako např.

v experimentování, názorném modelování, shromažďování a vyhodnocování informací a dat. Žáky vedeme k tomu, aby problém řešili s využitím předchozích zkušeností, různými metodami a aby hledali „optimální“ řešení a „optimální“ cestu k němu. (Proč je optimální v uvozovkách? Protože kritéria pro „optimálnost“ nejsou přesně stanovena, mohou se týkat jak délky řešení, tak např. použitého matematického aparátu, možnosti adaptace pro řešení jiných problémů, použitého symbolického jazyka apod. Co je optimální pro učitele nebo nadaného žáka, nemusí být vždy optimální pro jiné žáky.) Volíme takové metody a formy práce, které podle zkušeností z praxe vzbuzují zájem žáka o nové poznatky, navozují dialog učitele a žáka a diskusi mezi žáky, podněcují týmovou práci žáků.

Snažíme se všemožně podporovat aktivitu žáků. Metod k aktivizaci žáků je celá řada, od samotného řešení problémů, případně s odstupňovanou pomocí, přes tvorbu úloh pro spolužáky, uspořádání třídní soutěže, využívání matematických her atd.

Klíčovou roli ve vyučování má učitel. I když má ústřední místo vlastní činnost jedince, nemůže být ponechán zcela sám sobě. Učitel rozhoduje, jakým způsobem bude úloha či problém žákům předložena, jaké reprezentace budou použity, nakolik bude žákům otevřen prostor pro diskusi o problému, které strategie řešení bude u žáků podporovat atd.; stručně řečeno, zda a jak komplexní, pružné a intelektuálně podnětné, tedy *obohacené prostředí* (Wittmann, 1995), které umožňuje navodit přiměřenou úroveň duševní aktivity žáků, připraví.

3 Ukázka „dobrého vyučování“ v matematice

Následující ukázka jedné z aktivit, které byly v pracovní dílně zařazeny jako ukázky „dobrého vyučování“, je zaměřena na úpravu standardních matematických úloh do formy, kterou je možno využít jako obohacené prostředí.

V roce 2004 byla v *Mathematical Rally Transalpine* zařazena také tato úloha nazvaná *Podivné obarvení*:

Maxime vybarvuje čtvercovou síť. V každém řádku je jiné pravidlo pro vybarvení:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Už správně vybarvil prvních 15 sloupců. Zjistil, že sloupce 1, 9 a 13 jsou vybarveny celé. Pokračuje ve vybarvování až ke sloupci 16.

Bude sloupec 83 vybarven celý? A sloupec 265?

Vysvětlete, jak jste našli řešení.

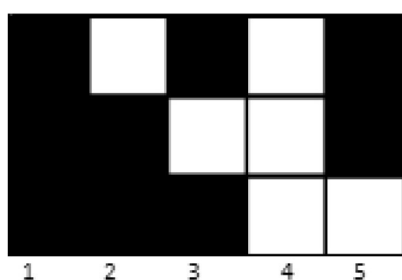
Je to úloha, která umožňuje žákům experimentovat, vyslovovat hypotézy, zobecňovat apod. Existuje pro ni víc řešitelských strategií, o nichž mohou žáci diskutovat; různé řešitelské strategie vyžadují různé předchozí matematické znalosti. Úloha tedy má potenciál splnit řadu z požadavků, které jsme v předchozím textu uvedli. Její kontext je však situace umělá, bez nějaké výrazné vazby na situace v běžném životě. Tím se pro řadu žáků stává málo motivující.

V kurzu Content and Language Integrated Learning byla situace úlohy studenty přetvořena do podoby časopisu *Svět módy* (Hofmannová, Novotná, 2006, 2007). Uvádíme vybrané části časopisu s komentáři k řešení úloh, které jsou žákům v časopisu předloženy.

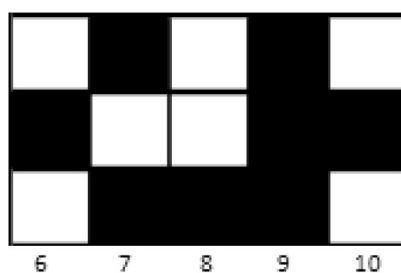
Na obr. 1 jsou vybrány některé části z vybarvení v původní úloze, a podle pravidel, která žáci snadno odhalí, je vytvořeno prvních pět vzorů. Prvním úkolem žáků je navrhnout vlastní

Následující vzory jsou prvními ze sady vzorů, které navrhli naši přední designéři speciálně pro vás.

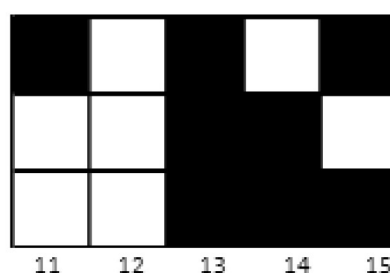
VZOR č. 1



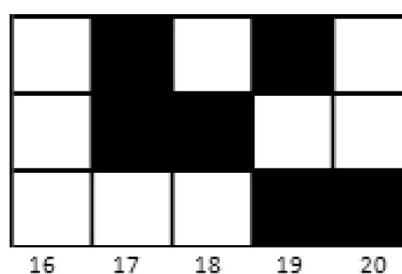
VZOR č. 2



VZOR č. 3



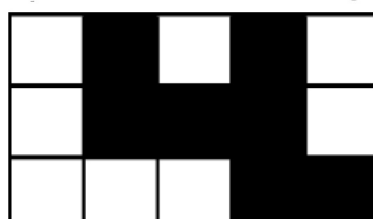
VZOR č. 4



Vzory byly navrženy ve čtvercové síti, 100 sloupců dlouhé, kterou rozstřihli na pruhy po pěti sloupcích.

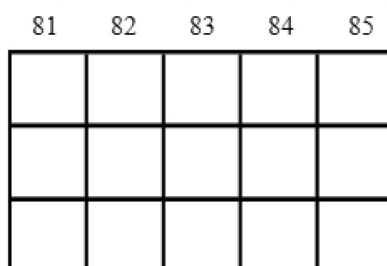
Obr. 1

Patří tento vzor do naší sady?



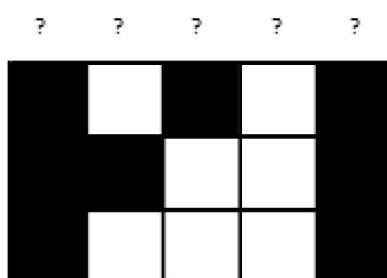
Obr. 2

Kdybychom měli vydat katalog se všemi dalšími vzory, jak by vypadal vzor č. 16?
(Začerněte patřičná políčka!)



Obr. 3

Jaké číslo má následující vzor? (Pokud je více možností, napište VŠECHNY!)



Obr. 4

vzor tak, aby patřil do nabízené sady vzorů. Na ten pak navazují další úkoly (obr. 2–4 nebo úkol v následujícím odstavci), které umožňují žákům seznámit se podrobněji se situací, najít v ní matematická pravidla a zobecnit svá pozorování. Aktivita obsahuje různé přístupy k základní situaci, které jsou nejen obohacením pro žáky, ale umožňují také učitelům zjistit, do jaké míry žáci matematickému pozadí situace rozumí a do jaké míry pouze opakují již známý algoritmus bez hlubšího porozumění.

Jiným úkolem může být např.: Zvolte vzor ze sady, který není v základní sestavě na obr. 1, a označte ho příslušným číslem.

Uvedené úkoly jsou jen ukázkami možných úkolů vycházejících ze základní situace. Je možné např. některé obměnit tak, aby nová úloha neměla řešení, je možné vyjít z jiné základní sestavy vzorů apod.

4 Závěrečná poznámka

Upravená aktivita *Podivné obarvení* je ukázkou jednoho typu vhodných aktivit. Je třeba mít stále na paměti, že cílem podobných aktivit, úloh a výzev není to, aby žák uspokojivě odpovídal na položené otázky ale aby konfrontoval své znalosti a představy se svými vlastními novými objevy i s myšlenkami, a výsledky dalších řešitelů. Nelehkým úkolem učitele (mimo jiného) je, aby odhaloval principy získávání poznatků a na jejich základě připravoval takové didaktické situace, kterými by převzetí zodpovědnosti za vlastní vzdělávání svým žákům umožnil.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen projektem GAČR P407/12/1939.

Literatura

- [1] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001.
- [2] HOFMANNOVÁ, M., NOVOTNÁ, J. “Real world” problems, Second piloting. In Favilli, F. *Lower Secondary School Teacher Training in Mathematics. Comparison and Best Practices*. Pisa : Edizioni Plus – Pisa University Press, 2006, p. 200–204.
- [3] HOFMANNOVÁ, M., NOVOTNÁ, J. Developing strategies and materials. Impact on teacher education. In *CERME 5, Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Eds. Pitta-Pantazi, D., Philippou, G. Cyprus : University of Cyprus, 2007, p. 1 896–1 905.
- [4] NOVOTNÁ, J., HANUŠOVÁ, J. Mathematics for all. In *Cultural Diversity in Mathematics (Education): CIEAEM 51*, Chichester 1999, Eds. Afzal, A., Kraemer, J. M., Williams, H. Chichester : Horwood Publishing Limited, 2000, p. 355–360.
- [5] WITTMANN, E. Ch. Mathematics education as a “Design Science”, *Educational Studies in Mathematics* 29(4), 1995, 355–374.

TVORBA ÚLOH „PŘEVŘÁCENÍM“

Eva Patáková

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
eva.patakova@email.cz

Jeden ze způsobů, jak vytvořit novou úlohu na základě úlohy, kterou máme, je její převrácení. Tento způsob jako pozorovanou strategii přetváření úloh vyčleňuje např. D. S. Fielker (1993). (Další strategie podle D. S. Fielkera jsou např. zúžení otázky, zkoumání jevu do hloubky apod.)

„Převrácení“ jako metoda inovace má podklad i v teorii kreativity – setkáme se s ním např. v metodě SCAMPER autora M. Michalka¹. Podstatou této metody je rozbor problému pomocí pokynů: Nahraď. Kombinuj. Adaptuj. Změň. Použij jinak. Odeber. **Obrať**. (Název metody vychází z toho, že SCAMPER jsou prvními písmeny uvedených pokynů v angličtině.)

Převrácení úlohy

Uvedenou techniku lze zajímavě využít při tvorbě úloh. Samozřejmě není možné převrátit jakoukoli úlohu – obvykle platí, že stručnější úlohy se převracejí lépe. Převrácením mnohdy získáme velmi neotřelou úlohu často o dost více/méně náročnou, než je úloha původní. (Vzpomeňte např. na myšlenkový posun od úlohy „Kolik je $2+3$?“ k úloze „Kolik musíme přičíst k číslu 2, abychom dostali číslo 5?“)

Tvoříme-li úlohu převrácením úlohy existující, začneme tím, že si uvědomíme výchozí a cílový stav. např. v úloze „Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 - 3x + 2 = 0$.“ je výchozím stavem zmíněná rovnice. Cílovým stavem jsou její řešení – tedy čísla 1 a 2. Prostředníkem, jehož pomocí jsme se dostali od výchozího stavu k cílovému, je proces řešení kvadratické rovnice.

Prohodíme-li výchozí a cílový stav, jsou nyní výchozí informací čísla 1 a 2, cílový stav bude kvadratická rovnice, od které bychom se pomocí prostředníka – řešení kvadratické rovnice – k číslům 1 a 2 dostali.

Převrácená úloha tedy zní: „Napište kvadratickou rovnici, jejímž řešením jsou čísla 1 a 2.“ (Řešení: Podle Vietových vztahů obsahuje rovnice součin $(x-1) \cdot (x-2)$, neboli $x^2 - 3x + 2 = 0$. Řešením úlohy je rovněž jakýkoli nenulový násobek této rovnice, tedy $k \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0$, neboli $kx^2 - 3kx + 2k = 0$, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

Příklady úloh

Úloha 1

A: Najděte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel 24 a 40.

Řešení: $24 = 2^3 \cdot 3$; $40 = 2^3 \cdot 5$; $\text{NSD}(24; 40) = 2^3 = 8$; $\text{nsn}(24; 40) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

B: Najděte dvě čísla, jejichž největší společný dělitel je 8 a nejmenší společný násobek 120.

Řešení: $8 = 2^3$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Hledaná čísla obě obsahují v prvočíselném rozkladu člen 2^3 , čísla 3 a 5 se vyskytují v prvočíselném rozkladu právě jednoho z nich. Existují dvě možnosti, jak tato čísla rozdělit – buď každé k jinému číslu, nebo jedno z čísel nechat jako 2^3 a čísla 3 a 5 přidat obě do rozkladu druhého čísla. Úloha má tedy dvě řešení, a to dvojice čísel 24 a 40; nebo 8 a 120.

¹Podle Žák 2004.

Úloha 2

A: Zjistěte součet velikostí úhlů v pětiúhelníku.

Řešení: Rozdělením pětiúhelníku na trojúhelníky – např. pomocí úhlopříček vycházejících z jednoho vrcholu – odvodíme, že součet jeho vnitřních úhlů je $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

B: Načrtněte libovolný n -úhelník, jehož součet vnitřních úhlů je 540° .

Řešení: Hledaný n -úhelník musí být úhlopříčkami vycházejícími z jednoho vrcholu rozdělitelný na tři trojúhelníky, musí být tedy pětiúhelníkem.

Poznámka: Zajímavější úlohu, více nutící žáka do obecných úvah, získáme, nahradíme-li hodnotu 540° hodnotou, pro kterou neexistuje řešení, např. 300° .

Úloha 3

A: Zkraťte zlomek, určete podmínky: $\frac{x \cdot (x-3) \cdot (x+22)}{3 \cdot (x+22) \cdot (x-3)}$.

Řešení: $\frac{x}{3}$, $x \neq 3$, $x \neq -22$.

B: Rozšiřte zlomek $\frac{x}{3}$ tak, aby jeho definičním oborem byla všechna reálná čísla kromě 3 a -22 .

Řešení: Jedním z řešení je zlomek $\frac{x \cdot (x-3) \cdot (x+22)}{3 \cdot (x-3) \cdot (x+22)}$. Jiná řešení dané úlohy jsou ve tvaru $\frac{x \cdot (x-3)^k \cdot (x+22)^l}{3 \cdot (x-3)^k \cdot (x+22)^l}$, $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Existují i další řešení, většinou však přesahující úroveň žáka 6. třídy.

Úloha 4

A: V přirozených číslech najděte všechny netriviální dělitele čísla 72.

Řešení: 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36.

B: Najděte takové číslo, aby jeho netriviálními děliteli byla pouze čísla 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36.

Řešení: Stačí si uvědomit, že v každém rozkladu čísla na součin čím větší je jeden z dělitelů, tím menší je dělitel druhý. Výsledné číslo proto snadno získáme jako součin nejmenšího a největšího z uvedených dělitelů, tedy $2 \cdot 36 = 72$. Na místě by bylo ještě provést zkoušku ostatních podmínek kvůli ujištění se, že hledané číslo opravdu existuje.

Úloha 5

A: Sestrojte trojúhelník o délkách stran 5; 6 a 7 cm a vepište mu kružnici.

Řešení: Pomocí základních konstrukcí.

B: Je dána kružnice, o níž víme, že je kružnicí vepsanou trojúhelníku o rozměrech 5; 6 a 7 cm. Narýsujte tento trojúhelník.

Řešení: Aby měla úloha řešení, je nutné zadat kružnici odpovídajících rozměrů. Řešit můžeme např. tak, že narýsujeme pomocný trojúhelník o délkách stran 5, 6 a 7 cm, vepíšeme mu kružnici a situaci přeneseme ke kružnici zadané.

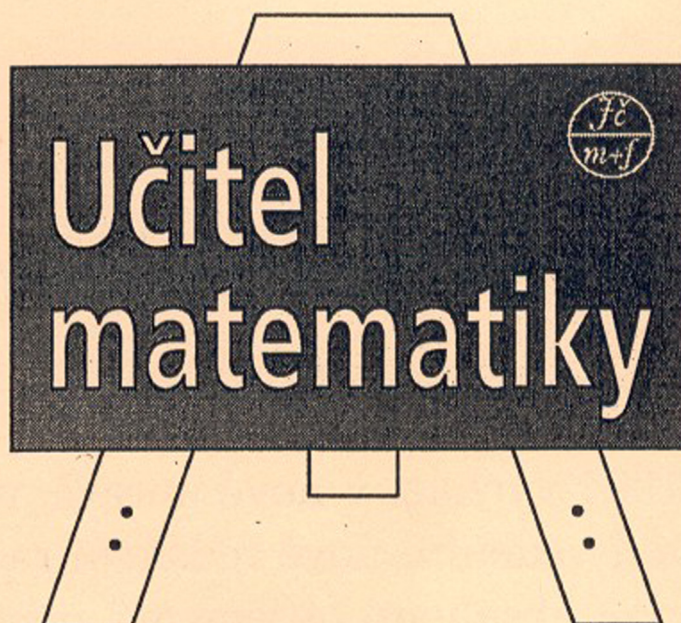
Poděkování

Príspevek byl podpořen grantem GAUK 303511.

Literatura

- [1] FIELKER, D. S. Removing the Shackles of Euclid: 8 Strategies. In Brown, S., Walter, M. (Eds.) *Problem posing: Reflections and applications*. New Jersey : Hillsdale, 1993, s. 39–51.
- [2] ŽÁK, P. *Kreativita a její rozvoj*. Brno : Computer Press, 2004.

Jednota českých matematiků a fyziků



Číslo 1 (49)

Ročník 12

Říjen 2003

Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 21. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran.

Administrace časopisu: Miluše Hrubá

Gymnázium, A. K. Vítáka 452, 569 43 Jevíčko

e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý

Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2013. Sborník příspěvků.

Editorka: Nada Vondrová
Sazba: Miloš Brejcha, systémem $\text{\LaTeX}$
Počet stran: 136
Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň v roce 2013
Místo vydání: Plzeň
Vydání: 1.

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-86843-44-5