DVA DNY
S
DIDAKTIKOU MATEMATIKY
2012

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 16.–17. 2. 2012

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Vondrová (Stehlíková)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2012 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Vondrová a Hana Šustková

ISBN 978-80-7290-604-8 (CD ROM verze)

Obsah

Vážené kolegyně, vážení kolegové, milí čtenáři,

sešel se rok s rokem a opět vám prostřednictvím sborníku příspěvků připomínáme atmosféru konference Dva dny s didaktikou matematiky 2012. Již úctyhodný šestnáctý ročník pořádá pro učitele z celé republiky i ze zahraničí jako vždy katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze s podporou Společnosti učitelů matematiky JČMF. O tom, že atmosféru konference vnímáme nejen my jako velice přínosnou a povzbuzující, svědčí skutečně vysoká účast v posledních letech. S mnohými z vás se vídáme opakovaně a velice nás těší, že se tato akce stala tradičním místem pravidelného setkávání komunity učitelů různých stupňů, vědeckých pracovníků z různých univerzit, ale i mnohých studentů, kteří se na obtížné povolání učitele teprve připravují. Účastníci konference zde během dvou dnů sdílejí své zkušenosti a nápady, podporují se navzájem ve svém snažení a snad se i něco nového dozvědí. Začínající učitelé a studenti si z konference odnáší přinejmenším cenné kontakty a naopak do naší komunity přináší svěží vítr, nadšení a neotřelé nápady.

Ve dnech 16.–17. 2. 2012 přivítala PedF UK v Praze ke 200 učitelů i dalších zájemců. Jako každý rok jsme obdržené příspěvky sestavili do sborníku, kterým vám chceme připomenout tvůrčí a sdílnou atmosféru celé konference, a doufáme, že se mnohé příspěvky stanou inspirací pro vaši další práci.

Za celý programový a organizační výbor děkujeme všem, kteří ke zdaru konference v roce 2012 přispěli svými prezentacemi, nápady, kuráží nabídnout otevřenou hodinu, diskusemi, podněty a nakonec i články do sborníku. Poděkování také patří všem, kteří se na tomto sborníku jakkoliv podíleli.

Těšíme se na naše další setkání s vámi na stejném místě a po roce ve stejnou dobu 14.–15. 2. 2013.

Váš programový výbor

Zvaná přednáška

Integrace ICT do výuky matematiky: Přínosy a rizika

Jarmila Robová[1]

Úvod

V důsledku rychlého rozvoje vědy a techniky dochází v posledních desetiletích ke změnám ve způsobu života a práce jednotlivých členů společnosti, změny se projevují také v oblasti vzdělávání. Konkrétně se jedná o proměny kurikula, důraz na celoživotní vzdělávání a na rovný přístup ke vzdělávání včetně decentralizace školství. Jedním z nejvýraznějších trendů je integrace moderních technologií na všech úrovních školského systému.

K hlavním faktorům, které ovlivňují využívání moderních technologií ve vzdělávání, patří státní informační politika, začlenění technologií do kurikula, postoje škol a učitelů k technologiím, vybavenost škol a zejména počítačová, resp. informační, gramotnost samotných učitelů.

Informační a komunikační technologie – příklady

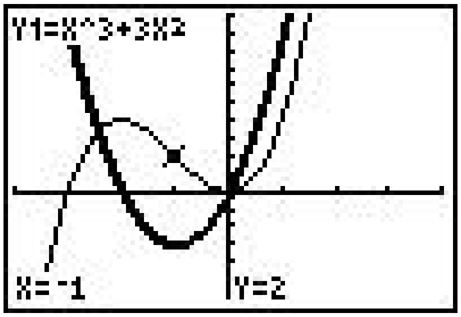
K nejpoužívanějším prostředkům informačních a komunikačních technologií (ICT) ve výuce matematiky patří kapesní kalkulátory, počítače s vhodnými programy, interaktivní tabule a internet.

Kapesní kalkulátory se na školách používají od sedmdesátých let 20. století. Současné typy lze rozdělit na klasické výpočetní typy, dále grafické kalkulátory umožňující zobrazení grafů funkcí (obr. 1) a také grafické kalkulátory typu CAS (*Computer Algebra System*), které kromě grafického výstupu a numerických výpočtů nabízejí práci s matematickými symboly (obr. 2).

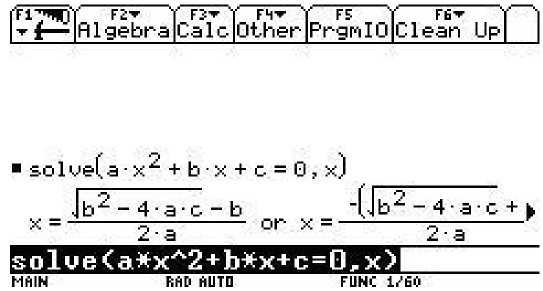
Zatímco v řadě evropských zemí i v USA má používání **grafických kalkulátorů** ve školské matematice tradici, české školy s nimi mají poměrně málo zkušeností. To je dáno jednak vyšší cenou grafických kalkulátorů, jednak tím, že není jasně vymezena role této

[1]MFF UK v Praze, robova@karlin.mff.cuni.cz

pomůcky ve vzdělávacích dokumentech, a to včetně jejího používání v závěrečných či přijímacích testech z matematiky.



Obr. 1



Obr. 2

I když technické vybavení grafických kalkulátorů je jednodušší, než je tomu v případě počítačů, pro řadu úloh školské matematiky je dostačující. Hlavní výhodou této pomůcky oproti počítačům je jednoduchost ovládání a její mobilita, neboť není třeba přesouvat výuku do počítačové laboratoře. Příklady využití grafických kalkulátorů v různých tématech školské matematiky lze nalézt v publikacích Demana, Waits, Clemens (1994), Robová (1999a, 1999b).

V posledních letech se ve školách prosazují **počítače s matematickými programy**, které lze rozdělit do dvou základních skupin. Do první skupiny patří programy typu CAS, jako je například *Mathematica* a *Derive*, do druhé náleží programy dynamické geometrie, ke kterým patří *Cabri II Plus* či *GeoGebra*. Zatímco programy typu CAS mají uplatnění na střední a zejména vysoké škole, programy dynamické geometrie se používají již na základní škole, neboť jsou vhodné pro výuku syntetické geometrie. Na českých školách patří k nejpoužívanějším programům tohoto typu *Cabri II Plus* , resp. třídimenzionální verze *Cabri 3D*. Lze však pozorovat rostoucí používání programu *GeoGebra*, neboť tento program je volně dostupný a k jeho hlavním přednostem patří propojení algebraického a geometrického přístupu k matematickým objektům. Otázkami integrace dynamické geometrie se zabývají různé současné publikace (např. Vaníček 2009, Gergelitsová, 2011), zájemci zde naleznou vhodné příklady i metodická doporučení.

Kromě kalkulátorů a počítačových programů patří k používaným technologiím na základních i středních školách také **interaktivní tabule**. K základním způsobům, kterým jsou tabule používány, patří jejich užití jako obrovského dotykového displeje, přičemž nejčastěji jsou aplikovány nástroje kreslení, tažení, případně záznam dění na tabuli či animace dostupné z galerie hotových materiálů.

Interaktivní tabule jsou v některých regionech západní Evropy nedílnou součástí vybavení základních i středních škol, k nejlépe vybaveným zemím patří Velká Británie, kde tuto pomůcku vlastní 95 % základních a 99 % středních škol. Tabule jsou přitom nejčastěji využívány v matematice a předmětu *Science* (Binterová, Fuchs, 2007). České základní školy v průměru vlastní po jedné tabuli, přičemž školy ve velkých městech jsou na tom lépe než školy v malých obcích (ČŠI, 2009). Na podporu práce českých učitelů s interaktivní tabulí byl zřízen webový portál *Ve škole.cz* (http://veskole.cz), který obsahuje výukové materiály pro různé vyučovací předměty včetně matematiky.

Další pomůckou ICT, která je využívána ve výuce, je **internet**. Rostoucí využívání internetu žáky i učiteli souvisí jednak s velmi dobrou vybaveností domácností i škol počítači s internetovým připojením, jednak se zvyšující se počítačovou gramotností učitelů a žáků. Na internetu lze dnes nalézt velké množství výukových materiálů, avšak právě s tímto množstvím souvisejí nesnáze spojené s jejich vyhledáváním, tříděním a vyhodnocováním. Z tohoto důvodu vznikají v posledních letech webové portály, které jsou zaměřené na vyučování matematice a na kterých učitel nalezne kvalitní materiály. K takovým cizojazyčným portálům například patří webové stránky *Illuminations* (http://illuminations.nctm.org/), které vycházejí ze schválených standardů matematiky v USA (obr. 3). Zájemci zde naleznou dynamické demonstrace matematických pojmů a vztahů, tzv. aplety, včetně příprav na vyučovací hodiny doplněné vzdělávacími cíly i pracovními listy pro žáky. Kvalitní soubor apletů obsahují také stránky *National Library of Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/), jednotlivé aplety jsou tříděny podle matematického tématu a věku žáků.

Obr. 3

Výzkumy vlivu ICT na výuku matematiky

Vzhledem k rostoucímu využívání moderních technologií byly postupně realizovány řady výzkumů věnované vlivu ICT na vyučování matematice. Dále se zaměříme na výzkumy týkající se využití grafických kalkulátorů a internetu.

Přibližně v posledních dvaceti pěti letech byly uskutečněny stovky výzkumů, jejichž předmětem bylo **zjišťování vlivu grafických kalkulátorů**. K hlavním okruhům patřilo sledování:

- výkonu žáků ve standardizovaných testech,
- porozumění matematickým pojmům,

- postojů žáků k matematice,
- způsobů využití kalkulátorů v hodinách matematiky.

V případě prvních dvou okruhů byly nejčastěji používány kvantitativní metody zkoumání založené na porovnání výsledků pre-testů a post-testů žáků experimentálních a kontrolních skupin, přičemž experimentální skupiny pracovaly s grafickými kalkulátory, kontrolní nikoliv. Z hlediska postojů žáků a způsobů užití kalkulátorů v hodinách byly také zařazeny kvalitativní metody, které vycházely z pozorování žáků během vyučovacích hodin a dotazníkových šetření. Výsledky těchto výzkumů vesměs poukázaly na pozitivní vliv grafického kalkulátoru na porozumění matematickým pojmům (zejména pojmu funkce a vlastnosti funkce) a řešení aplikačních úloh. Postoje žáků k této pomůcce byly převážně kladné, kalkulátory byly především používány k zobrazování grafů funkcí. Po roce 2000 byly některé, dosud uskutečněné, výzkumy podrobeny detailní analýze z hlediska vztahu použitých metod a dosažených výsledků. Uvádíme výsledky meta-analýzy, která zkoumala 54 studií zaměřených na osvojování pojmů a rozvíjení dovedností v matematice (Ellington, 2003). Porovnávané výzkumy byly rozděleny do dvou skupin podle toho, zda žáci směli používat v testech kalkulátor či ne. Bylo zjištěno, že pokud žáci nepoužívali tuto pomůcku v testech, byly jejich výsledky výrazně lepší pouze v úkolech zaměřených na dovednosti spojené s aplikací pravidel a algoritmů. Dále byly zkoumány výsledky výzkumů v závislosti na tom, zda testy byly standardizované či vytvořené výzkumníky v rámci daného šetření. Zde se ukázalo, že výrazně lepších výsledků dosahovali žáci experimentálních skupin v testech vytvářených výzkumníky, a to i v oblasti porozumění pojmům. Uvedená zjištění naznačují, že některé zaznamenané pozitivní jevy souvisejí s povolením kalkulátorů v testech a se shodou úkolů řešených během výuky a v testech.

První výzkumy věnované **vlivu využití internetu ve vzdělávání** byly realizovány koncem devadesátých let 20. století a byly zaměřeny na vysokoškolské studenty. Vzhledem k tehdejším technickým možnostem se z hlediska integrace internetu jednalo o využití emailu, videokonferencí i používání elektronických vzdělávacích materiálů. Během následujících let byly v souvislosti s užitím internetu zkoumány tyto okruhy:

- úroveň osvojení vědomostí a dovedností studentů a žáků,
- postoje studentů a žáků k internetu, jejich motivace,
- vliv online hodnocení na proces učení,
- formy vyhledávání pomoci při učení.

Studie realizované v tomto období používaly většinou kvantitativní metody zkoumání a dospěly ke zjištění, že studenti, kteří studovali za podpory internetu, dosahovali v závěrečných testech stejných nebo lepších výsledků v porovnání s kontrolní skupinou (Hill et al., 2004).

Výsledky dosud realizovaných šetření nejsou z hlediska vlivu internetu na vědomosti a dovednosti jednoznačné, je však patrné, že používání internetu studenty a žáky motivuje a má pozitivní vliv na jejich postoje k vyučování. To však může být způsobeno jistou novostí a atraktivitou této technologie. Jedním z důležitých přínosů internetu je online hodnocení výkonu žáka při řešení úkolů. Ukazuje se, že bezprostřední zpětná vazba, kterou mohou online výukové materiály poskytovat, je důležitým prvkem úspěšného osvojení vědomostí.

Různá šetření z posledních let poukazují na rostoucí trend využívání internetu žáky základních i středních škol, a to i k přípravě na vyučování (např. Kavecký, Tóblová, 2007). Na internetu lze dnes nalézt webové stránky určené pro doučování i poskytování pomoci s řešením úkolů z matematiky. Vyhledávají-li žáci na internetu pomoc s řešením konkrétního problému, obracejí se na specializovaná fóra, kde jim většinou radí dobrovolníci z řad učitelů či vysokoškolských studentů (u nás například http://forum.matweb.cz/). Kvalitativní rozbor žádostí žáků o pomoc i jejich reakcí na pomoc poskytnutou v rámci francouzského matematického fóra poukázal na problém asynchronnosti komunikace v tomto prostředí. Zejména mladší žáci nedokáží srozumitelně formulovat svou žádost, což zpětně ovlivní úroveň nabízené pomoci (Puustinen, 2009).

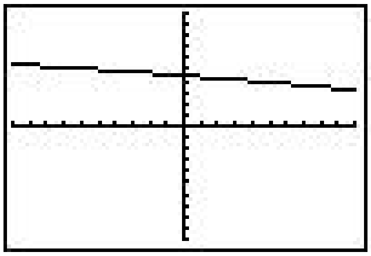
Přínosy a rizika užití technologií

S integrací moderních technologií jsou spojeny jak pozitivní, tak negativní jevy. Přínosy a rizika užití technologií ve vyučování matematice do značné míry také souvisejí s osobností učitele, s jeho postoji k těmto technologiím i s jeho informovaností ohledně možných výhod i nevýhod této integrace.

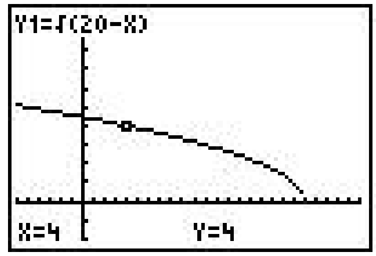
Zaměříme-li se opět na grafické kalkulátory, patří k hlavním přínosům jejich integrace

- vizualizace matematických objektů na obrazovce kalkulátoru,
- zvýšení názornosti výuky,
- experimentování a modelování,
- vícenásobná reprezentace problému (numerická, grafická, resp. algoritmická).

K hlavním rizikům, se kterými by měl učitel při používání kalkulátorů počítat, patří „slepá“ důvěra slabších žáků ve výsledek získaný na grafickém kalkulátoru, a to i v případě grafických výstupů. Vedle chyb, které souvisejí s nesprávně vloženým údajem z klávesnice kalkulačky (číslem, operátorem, předpisem funkce aj.), patří k nejčastějším problémům nesprávná interpretace grafického výstupu, jak ilustrují následující dva obrázky. Na obr. 4 je zobrazen graf funkce $y = f(x)$ v rozsahu souřadnic $x, y \in < 10, 10 >$. Na základě grafu se žák může domnívat, že jde o lineární funkci, jejímž grafem je přímka. Jedná se však o graf druhé odmocniny s předpisem $y = \sqrt{20 - x}$, který byl zobrazen v nevhodném rozsahu souřadnic. Pro $x \in < 6, 25 >, y \in < 2, 10 >$ získáme odpovídající graf (obr. 5).



Obr. 4



Obr. 5

K základním výhodám začlenění **internetu** do vyučování matematice náleží

- přístup k velkému množství výukových materiálů,
- zvýšení názornosti výuky (díky dynamickým a grafickým prvkům webových stránek),
- možnost prověřování vědomostí,
- možnost bezprostřední zpětné vazby při učení.

Dostupnost obrovského množství výukových materiálů na internetu je nejen výhodou, ale pro méně zkušeného uživatele i nevýhodou, neboť v záplavě materiálů je obtížné se orientovat a vyhledání vhodného a přitom kvalitního materiálu je časově náročnou záležitostí. K negativům spojeným s integrací internetu patří především matematické a didaktické nedostatky, které se vyskytují ve volně dostupných webových materiálech. Jedná se zejména o stránky, které obsahují maturitní opakování i seminární práce vytvářené žáky či studenty. Takové stránky mohou obsahovat matematické chyby, zejména nesprávná řešení příkladů, nepravdivá tvrzení aj. Z hlediska didaktických nedostatků se jedná především o didaktický formalismus (záměna vysvětlení matematické podstaty řešení za formální popis postupu, obr. 6), deformace matematického poznatku s cílem ho zjednodušit, omezení se na speciální případy aj.

Jako další ilustraci výše uvedených nedostatků uvádíme obr. 7, na kterém je vysvětleno zaokrouhlování čísel z webové stránky určené žákům základních škol. Uvedené vysvětlení obsahuje zjednodušení matematického problému, neboť je omezeno na speciální případ (zaokrouhlování přirozených čísel, a to pouze na desítky), čímž u žáků vytváří nesprávné představy (viz tvrzení „zaokrouhlování dolů znamená číslo zmenšit“, což například neplatí pro záporná čísla).

Vyřešte rovnici $e^{x^2+6} = e^{5x}$.

Tato rovnice je daleko lehčí, než by se na první pohled mohlo zdát. Jelikož má pravá i levá strana stejný základ, tak my můžeme tento základ jednoduše škrtnout a poté již se jedná o lehkou kvadratickou rovnici.

Obr. 6

Zaokrouhlování je způsob zjednodušování nehezkých čísel na hezké. Například číslo 98 můžete zaokrouhlit na supr trupr číslo 100 :-).

ZAOKROU-HLOVÁNÍ NAHORU A DOLŮ

Zaokrouhlovat můžeme v zásadě dvěma způsoby. Prvním z nich je *zaokrouhlování dolů*, tedy že původní číslo *zmenšíme*. Dolů zaokrouhlujeme v případě, že je hraniční číslo v rozmezí od nuly do čtyřky. Například číslo 22 zaokrouhlíme na 20. Číslo 54 na 50. Číslo 80 na 80. Pozor, určitě nezaokrouhlujeme dolů na 70, pokud tam máme nulu, číslo zůstává na tom samém řádu.

Druhý způsob zaokrouhlení je *nahoru*, původní číslo se tak *zvětší*. Nahoru zaokrouhlujeme v případě, kdy je hraniční číslo v rozmezí pět až devět. Takže 19 zaokrouhlíme na 20, 56 na 60, 88 na 90.

Obr. 7

Hledá-li učitel vhodný materiál pro svou výuku, může se obrátit na stránky specializované na školní vzdělávání. K takovým stránkám u nás například patří webové stránky *Metodického portálu* (http://rvp.cz/), *Společnosti učitelů matematiky Jednoty českých matematiků a fyziků* (http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/) či připravované stránky *Portálu středoškolské matematiky* (http://www.karlin.mff.cuni.cz/ portal/), které vznikají při katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze.

Závěr

Na základě řady výzkumných šetření i našich zkušeností z výuky budoucích učitelů se domníváme, že integrace ICT přispívá ke zvýšení kvality výuky matematiky, avšak pouhé mechanické zařazení moderních technologií do výuky tento účinek nemá. Různé prostředky ICT přinášejí do výuky v podstatě stejné základní pozitivní jevy, avšak i rizika. Konkrétně se jedná o pozitiva spojená s vyšší názorností vyučování, aktivizací žáků a s metodami experimentování a modelování, z hlediska rizik jde pak především o nekritické spoléhání na technologie ze strany žáků.

Lze říci, že více než na konkrétním prostředku ICT či na matematickém učivu záleží na postoji učitele k technologiím, na jeho zkušenostech a pojetí výukového procesu. Informovanému učiteli mohou ICT poskytnout možnosti, jak žáky zaujmout a motivovat, jak zvýšit názornost výuky a jak zařazovat do výuky aktivizující formy práce.

Literatura

[1] Binterová, H., Fuchs, E. Interaktivní tabule: ano či ne? In: Hašek, R. (ed.). *Sborník 3. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: JČU, 2007. s. 9–14.

[2] *ČŠI: Výroční zpráva České školní inspekce za školní rok 2008/2009* [online]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/cz/85106-vyrocni-zprava-csi-za-skolni-rok-20082009.

[3] Demana, F., Waits, B. K., Clemens, S. R. *Precalculus Mathematics: a Graphing Approach*. 3rd edition. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[4] Ellington, A. J. A Meta-analysis of the Effects of Calculators on Students' Achievement and Attitude Levels in Precollege Mathematics Classes. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2003, vol. 34, no. 5, p. 433–463.

[5] Gergelitsová, Š. *Počítač ve výuce nejen geometrie: Průvodce GeoGebrou*. Praha: Generation Europe, 2011.

[6] Hill, J. R. et al. Exploring Research on Internet-based Learning: From Infrastructure to Interactions. In Jonassen, D. H. (ed.) *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*, p. 433-,460. Lawrence Erlbaum Associates: USA, New Jersey, 2004.

[7] Kavecký, K., Tóblová, E. Rozvoj informačných kompetencií In: Dostál, J. (ed.). *Infotech: moderní informační a komunikační technologie ve vzdělávání ?CD ROM?*. Olomouc: UP – PedF, 2007. s. 78–81.

[8] Puustinen, M. et al. An Analysis of Students⁄ Spontaneous Computer-mediated Help Seeking: A Step toward the Design of Ecologically Valid Supporting Tools. *Computers and Education*. 2009, vol. 53, no. 4, p. 1040–1047.

[9] Robová, J. Řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav s využitím grafického kalkulátoru. *Matematika-fyzika-informatika*. 1999a, roč. 9, č. 3, s. 165–171.

[10] Robová, J. Vyšetřování vlastností elementárních funkcí s využitím grafického kalkulátoru: 1. a 2. část. *Matematika-fyzika-informatika*. 1999b, roč. 9, č. 4 a č. 5, s. 233–237 a 303–306.

[11] Vaníček, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: PedF UK, 2009.

Pracovní dílny

PROGRAM *GeoGebra* JAKO PODPORA VÝUKY MATEMATIKY

VERONIKA HAVELKOVÁ[1]

Úvod

Za více než deset let existence programu *GeoGebra*[2] se postupně tento volně šiřitelný matematický software stal z původně studentské práce jedním z nejvýraznějších programů pro podporu výuky matematiky. Přestože samotné užití programu ve škole nemůže – a domnívám se, že by ani nemělo – nahradit běžnou výuku, v mnohém ji může obohatit a podpořit.

Postupně obliba programu *GeoGebra* v České republice vzrůstá, často se s ním setkáváme především jako s programem podporujícím výuku planimetrie na základních a středních školách, kde nahrazuje jiné programy DGE[3]. Potenciál *GeoGebry* je však výrazně větší, a to nejen díky možnosti využití na všech úrovních edukačního procesu, ale i možným využitím na široké škále oblastí výuky matematiky. Díky svým širokým programovým možnostem a jednoduchému uživatelskému prostředí se *GeoGebra* stává velmi mocným nástrojem, s jehož využitím můžeme žákům i studentům pomoci přemostit znalosti z geometrie, algebry a matematické analýzy a učinit z nich funkční celek. Nástrojem propojování dílčích znalostí z matematiky do jednoho uceleného celku se mohou stávat geometrické interpretace jednoduchých i složitějších algebraických operací a jiné [1].

Cílem tohoto článku bude ukázat na některé ze základních možností využití programu ve výuce matematiky, které čtenáře mohou motivovat k dalšímu hlubšímu poznávání programu a inspirovat k využití během vlastní výuky.

Využití programu ve výuce

Možností způsobu použití programu v rámci výuky matematiky se nabízí více:

[1]FZŠ Táborská, `veronika.havelkova@pedf.cuni.cz`

[2]Program je zdarma ke stažení na `www.geogebra.org`.

[3]Pro programy dynamické (někdy také interaktivní) geometrie se uplatňuje často také zkratka DGE z anglického dynamic geometry environment.

- učitel ukazuje předpřipravený applet[4],
- učitel v hodině vytvoří applet dle aktuální potřeby,
- žáci pracují s předpřipraveným appletem,
- žáci vytváří vlastní applet,
- applet sloužící jako dynamická podpora e-learningového kurzu.

První dvě z možností nejsou tak náročné na technické zajištění učebny. Je zapotřebí, aby byl v učebně počítač či notebook a dataprojektor. Použití předem připraveného appletu je vhodné v těch případech, kdy víme, jakou látku chceme s žáky probrat, a tímto appletem chceme doprovodit „výklad teorie“ či vybranou úlohu. Vhodné je toto užití zvláště v případech, kdy víme, že tvorba appletu nám zabere delší čas.

Učitel může také žáka požádat, aby s předpřipraveným appletem manipuloval on či aby applet sám vytvořil. Vhodnější však je, aby tuto možnost měli všichni žáci. Škol, kde by každý žák měl svůj netbook či tablet, je prozatím velmi málo. Proto předpokládejme, že na takové hodiny je třeba si předem domluvit počítačovou učebnu a výuku přeložit do ní. Výhodou je, že každý žák má možnost si situaci „osahat“. Nevýhodou je, že je nutné připravit aktivity na celou vyučovací hodinu, přestože by bylo leckdy vhodnější aktivity zařazovat průběžně a nikoliv nárazově. Vždy je zapotřebí si předem uvědomit, jaký cíl má použití daného appletu mít. Pokud chceme, aby žák pozoroval vybrané vlastnosti, invarianty a předchozí konstrukce je příliš dlouhá, je na místě zvážit, zda žákům neposkytnout předpřipravený applet, u něhož by se mohli důkladně soustředit pouze na jeden konkrétní problém. Dlouhá předchozí konstrukce by žáka mohla v takovém případě spíše rozptylovat a znemožňovala by to, aby se soustředil na to, co je pro nás nejdůležitější. V jiných případech zase považujeme za důležité, aby si žák upevnil jednotlivé kroky konstrukce, a tak budeme chtít, aby celý applet vytvořil sám. Tento přístup ale vyžaduje, aby byl žák s prostředím programu již zběžně seznámen. Dle mé zkušenosti a zkušenosti mnohých dalších učitelů si však žáci zvykají na prostředí programu velmi rychle, a tak to není příliš velký problém [2].

S poslední jmenovanou variantou, tedy s appletem sloužícím jako dynamická podpora e-learningového kurzu, se dnes můžeme setkat zejména v prostředí vysokých škol různého zaměření. Uživatel, který vytváří takovýto kurz, především může ocenit jednoduchost exportu appletu jako dynamického pracovního listu. K tvorbě webové stránky, která bude obsahovat dynamický applet, totiž nejsou zapotřebí žádné znalosti html apod.

[4]Pojmem applet rozumíme množinu objektů zobrazovaných na nákresně. Applet umožňuje dynamické zobrazení (nejen) geometrických situací.

Výhody, nevýhody a rizika využití programu ve výuce

Před samotným nasazením programu je důležité si uvědomit, co nám program může přinést. Jmenujme tedy některé z možných výhod nasazení programu, které jsou závislé na konkrétní podobě využití programu:

- motivace žáka,
- soukromí a individuální tempo pro každého žáka,
- podpora přirozeného dětského myšlení a porozumění,
- rozšíření hranice aktivit a řešení problémů,
- bezprostřední zpětná vazba,
- nutnost přesnosti konstrukcí,
- velké množství situací (modelů) v rámci jednoho appletu,
- usnadnění žákovy koncentrace,
- nový typ modelu již známé situace.

Užití programu však nemusí být vždy ve všech ohledech jednoznačně výhodné. Znát pouze výhody využití programu je přímou cestou k tomu, abychom aplikovali program nevhodně a „využili“ spíše mnohých nevýhod a rizik, které se s nasazením takového programu do výuky pojí. Proto považuji za nezbytné si tyto nevýhody stále připomínat tak, abychom byli schopni se jim v co největší míře vyhnout. Možnými nevýhodami jsou:

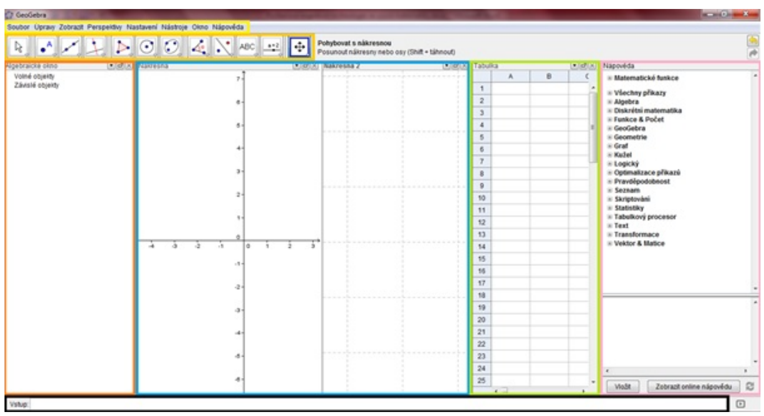
- potřebné technické zázemí,
- technické problémy,
- zvolení úloh, ve kterých nemá dynamická matematika přínos (např. konstrukce funkce bez parametru, konstrukční úloha s pevně danými délkami stran a velikostmi úhlů),
- zahlcení velkým množstvím látky,
- zaměření na uživatelské zpracování místo na samotnou konstrukci appletu,
- obava učitele z přesunu pozornosti žáka z učitele na program,
- příklon žáka k vnímání modelu jako reality.

Při uvědomělé přípravě lze však využít programu tak, aby výhody převážily nevýhody a aby se tak využití programu stalo co nejvíce efektivní [2, 3].

Prostředí programu

Prostředí programu *GeoGebra* je rozděleno na několik sekcí, které jsou pro lepší přehlednost odlišeny barevnými rámečky (obr. 1). Většinu těchto sekcí lze podle potřeby skrýt či zobrazit. V modrém okně je dvojice nákresen, ve kterých se zobrazují konstruované objekty. Algebraické okno (červená sekce) zobrazuje všechny vytvořené objekty pomocí zápisu. Nákresna (případně nákresny) a algebraické okno jsou na sobě závislé sekce (geometrický objekt je v algebraickém okně znázorněn algebraicky a naopak). Tabulka (zelená sekce) umožňuje zachycovat různé hodnoty, počítat (obdobně jako je tomu u tabulkových editorů) a hodnoty například generovat jako tabulku bodů. S použitím nástrojů (oranžová sekce) lze vytvářet na nárysně nové objekty, zjišťovat jejich vzájemné vztahy apod. Růžová sekce je nápovědou a zobrazuje kompletní seznam nabízených příkazů. Pomocí vstupního panelu společně s příkazovým řádkem (černá sekce) zadáváme algebraicky libovolné objekty (body, funkce, křivky apod.). V horní části programu nalezneme klasický panel nástrojů (žlutá sekce) [2].

Detailní přehled funkcí a manuál programu je dostupný na webových stránkách www.geogebra.org [4].



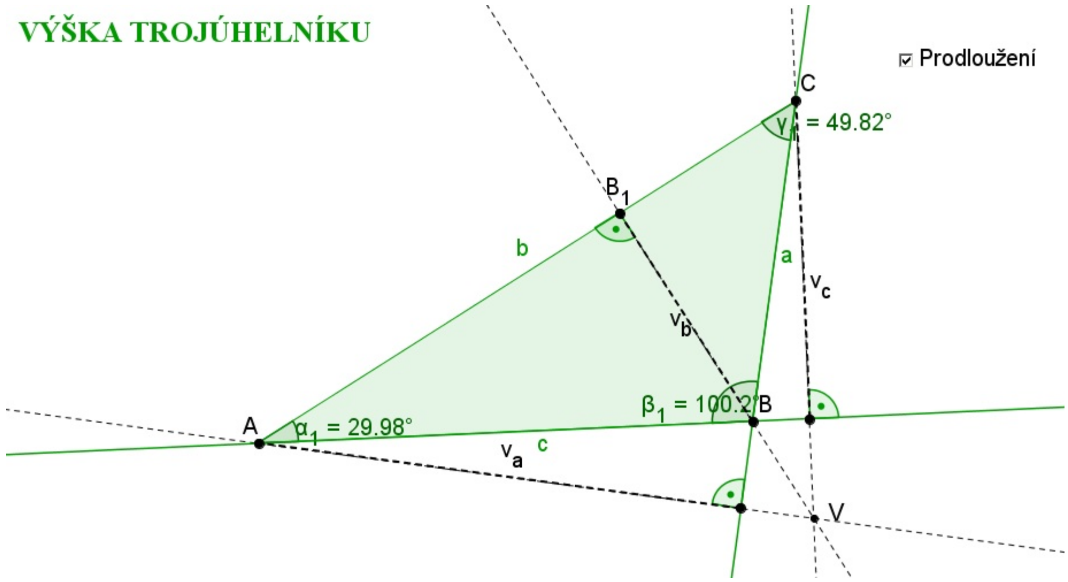
Obr. 1 Prostředí programu

Příklady využití ve výuce

GeoGebra ve výuce geometrie

Využití programu *GeoGebra* ve výuce geometrie je velmi intuitivní a velmi snadno se ho naučí ovládat i žáci prvního stupně základní školy. Při běžné manipulaci, kdy program využívají zejména začátečníci, se používají panely nástrojů a nákresna. Kliknutím na příslušný objekt v panelu nástrojů umístíme objekt následným kliknutím do nákresny. Zvláště v případě pokročilejších nástrojů ocení začínající uživatel nápovědu, která se ke každému nástroji po jeho označení zobrazí hned vedle panelu nástrojů.

Příkladem užití v hodině geometrie může být applet vhodný pro pozorování pozice ortocentra trojúhelníku v závislosti na změně trojúhelníku z ostroúhlého na tupoúhlý (obr. 2). K vytvoření podobného appletu je potřebná pouze manipulace s panelem nástrojů a s vlastnostmi nástrojů, které můžeme změnit kliknutím na pravé tlačítko myši a následným označením kategorie vlastnosti. V nově otevřeném panelu můžeme měnit barvy, typy čar, názvy aj.



Obr. 2: Ortocentrum

GeoGebra ve výuce funkcí

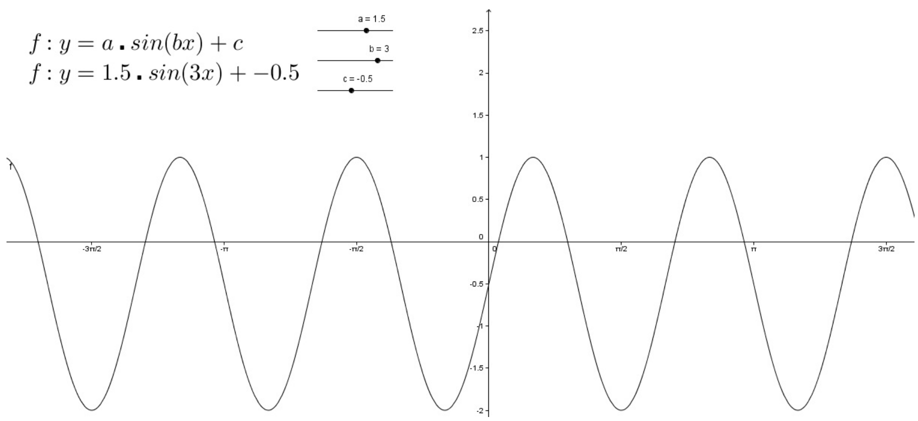
K vykreslení funkcí v programu *GeoGebra* používáme vstupní panel. Při zadávání funkcí je zapotřebí dodržet některá pravidla zadávání matematického textu, která jsou velmi obdobná jako u jiných programů (např. Mathematica) či způsobu zadání příkladu do kalkulátoru. Pokud některý z příkazů neznáme, můžeme si pomoci nápovědou, která se objeví po kliknutí na obrázek šipky umístěný vpravo dole. Uveďme si několik příkladů zadání funkce.

Předpis funkce	Podoba zadání do vstupního panelu
$f: y = 3x - 1$	f(x)=3x-1 nebo f(x)=3x-1
$g: y = 3x^2 - x + 1$	g(x)=3x2̂-x+1 nebo g(x)=3xx-x+1
$h: y = 5^x$	h(x)=5x̂
$i: y = \frac{2}{x}$	i(x)=2/x
$j: y = \sqrt{x-1}$	j(x)=sqrt(x-1)

Zadaný příkaz potvrdíme tlačítkem enter, funkce se následně vykreslí v nákresně.

V případě, že pro nás není důležitý název funkce, můžeme namísto f(x)=3*x-1 napsat pouze 3*x-1.

Pokud chceme využít dynamičnosti programu a vykreslit funkci závislou na změně parametru, postup je velmi obdobný. Než však zadáme samotný předpis funkce, musíme nejdříve nadefinovat jednotlivé parametry. Pokud budeme chtít vykreslit například graf s reálnými parametry (obr. 3), musíme nejdřív zadat přes vstupní panel postupně konkrétní hodnoty jednotlivých parametrů. Tyto parametry se objeví následně v algebraickém okně. Když si je v algebraickém okně označíme (klikneme na kolečko u parametru), zobrazí se nám jako posuvníky v nákresně. V momentě, kdy program již zná hodnoty parametru, můžeme do vstupního panelu zadat konkrétní předpis funkce. Graf v nákresně následně měníme pohybem jednotlivých posuvníků. Konstrukce takového appletu pak zkušenému uživateli nemusí trvat déle než jednu minutu.



Obr. 3: Graf funkce sinus

Závěr

Úkolem článku bylo podnítit čtenáře k vlastním pokusům tvorby appletů v programu *GeoGebra*. Skutečných možností, které program nabízí, je však mnohonásobně více, než naznačuje tento článek. Mnoho materiálů dostupných zdarma pro každého je na webových stránkách http://www.geogebratube.org/. Na těchto webových stránkách jsou již i dostupné sady appletů zaměřené dle tematických celků.[5] Pro nadšené uživatele – začátečníky i pokročilé – jsou pak pořádány semináře DVPP, jejichž aktuální seznam je zveřejňován na http://wiki.geogebra.org/cs/GeoGebra_Institut_Praha.

[5] Applety na těchto webových stránkách je možno použít jako inspiraci a po stažení či při online prohlížení i jako materiál podporující vlastní výuku.

Literatura

[1] HAVELKOVÁ, Veronika. Podpora výuky funkcí s programem GeoGebra. In: STEHLÍKOVÁ, Naďa; TEJKALOVÁ, Lenka (eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2011.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2011, 33,34. ISBN 978-80-86843-32-2.

[2] HAVELKOVÁ, Veronika. *GeoGebra ve vzdělávání matematice*. Praha, 2012. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Jaroslav Zhouf. Oponent práce Antonín Jančařík.

[3] VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* Vyd. 1. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009, 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

[4] GeoGebra [online]. [cit. 2012-02-01]. Dostupné z: http://www.geogebra.org.

PRÁCE S PAPÍREM U DĚTÍ PŘED VSTUPEM DO ŠKOLY A V PRVNÍ TŘÍDĚ

HANA LIŠKOVÁ[1]

Příspěvek nabízí učitelské veřejnosti v mateřských školách a v prvních třídách základních škol řadu gradovaných geometrických námětů, které vycházejí ze zkušeností a respektují RVP pro předškolní vzdělávání. Upozorňuje také na potřebu podnětného prostředí a manipulativních činností pro rozvoj matematických představ v předškolních zařízeních a na počátku školní docházky.

Metody práce v MŠ mají požadovanou efektivitu v případě, že využíváme manipulativních činností, a to v oblastech předčíselných i geometrických představ.

Papír jako materiál, který lze v námětech pro manipulativní činnosti v oblasti rozvoje geometrických představ využívat, má mnoho výhod (ekonomicky dostupný, nabízí velkou variabilitu činností, existuje v mnoha formách, např. barevný, lesklý, vlnitý, dekorativní apod.). Papír lze využít při skládání, překládání, stříhání, trhání, ...

Předkládám několik námětů činností doplněných metodickými poznámkami.

Pohlednicové puzzle

Skládání pohlednic postupně ze 2, 3, 4, ... částí jistě využívá každá MŠ. Je potřebné, aby děti neskládaly obrázky pouze na základě přiřazení tvaru výřezů, proto je vhodné použít

[1] VOŠP a SPgŠ Litomyšl, `liskova@lit.cz`

i rozdělení plochy rovnými řezy, kdy tvar neprozradí, jak k sobě dílky přiřadit. Obrázek na pohlednici je pro děti nápovědou a má i funkci kontrolní. Práci s pohlednicovými skládačkami můžeme gradovat např. používáním více pohlednic současně. Tak můžeme u dětí rozvíjet i dovednosti jako je třídění.

Ukážeme si, že skládání může být variabilnější a může být propedeutikou pro mnoho dalších dovedností.

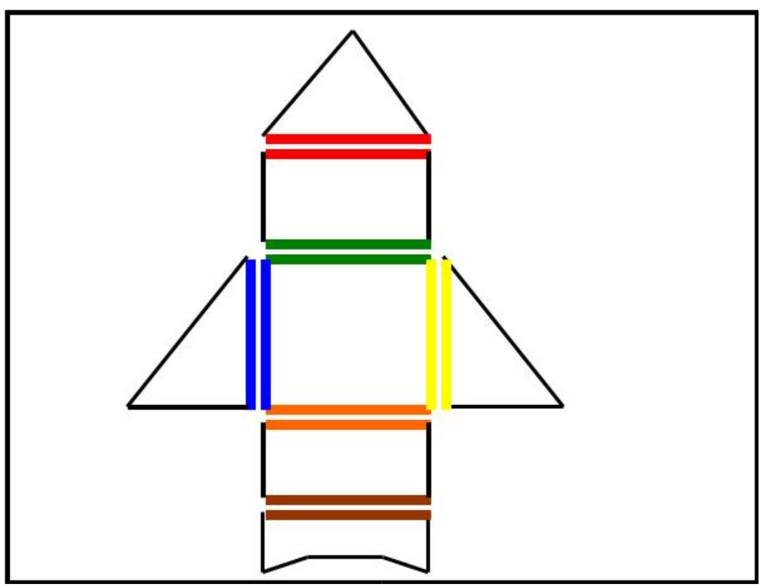
Gradované činnosti – geopuzzle

„Geopuzzle" jsou skládačky (puzzle) ze základních geometrických útvarů jako jsou trojúhelníky, čtyřúhelníky apod., tedy s rovnými stranami u jednotlivých dílků. Nejjednodušší varianta tohoto typu skládaček je založena na přiřazování stran se stejnou barvou (proto označení geopuzzle barevné).

Námět 1 – Geopuzzle barevné (přiřazení stejněbarevných stran) – obr. 1

Metodické poznámky: Děti dostanou sadu dílků a podle pokynu „Přikládej k sobě stejně barevné strany (části)" skládají neznámý obrázek.

Varianta, kdy děti skládají podle předlohy, by postrádala moment napětí, který funguje motivačně. Nedoporučuji proto v tomto případě předlohu používat.

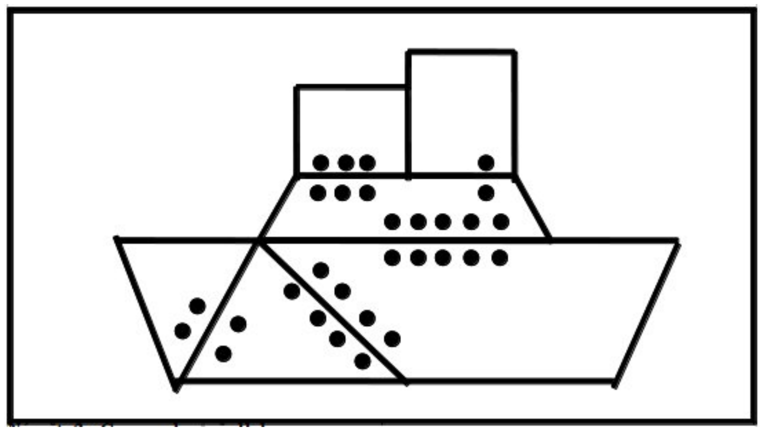


Obr. 1: Raketa – geopuzzle barevné

Námět 2 – Geopuzzle početní (přiřazení stran se stejným počtem puntíků) – obr. 2

Metodické poznámky: Tato činnost je obtížnější, děti využívají univerzální model pro stanovení počtu. Záměrně pracujeme v režimu „Kolik – tolik", tedy hledání stejného počtu vyjádřeného puntíky.

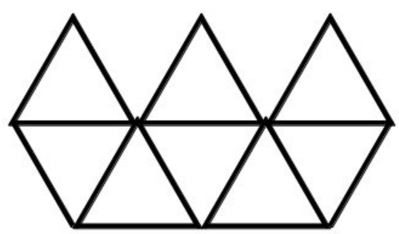
Opět nepoužíváme předlohu, abychom děti neochudili o moment překvapení – zajímá nás, co vzniklo při složení.



Obr. 2: Parník – geopuzzle početní

Námět 3 – Geopuzzle – obr. 3

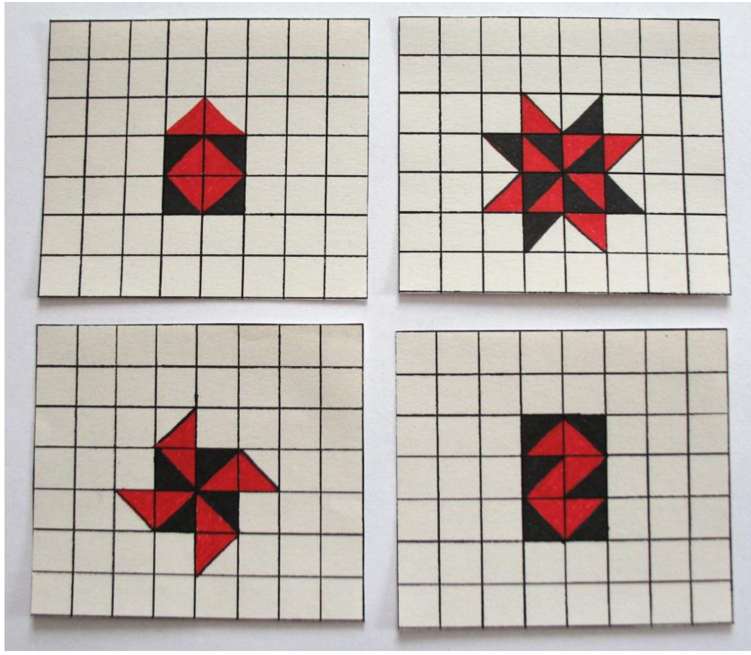
Metodické poznámky: Tato činnost je založena na práci s předlohou. Děti musí prokázat určitou úroveň analytického myšlení, kdy musí z předlohy zjistit, jaký počet dílků a jakého tvaru potřebují na složení obrázku. Zpočátku mohou přikládat jednotlivé dílky na předlohu (pracujeme s předlohou v měřítku 1 : 1), později můžeme využít jejich získaných dovedností a předlohy zmenšit.



Obr. 3: Královská koruna

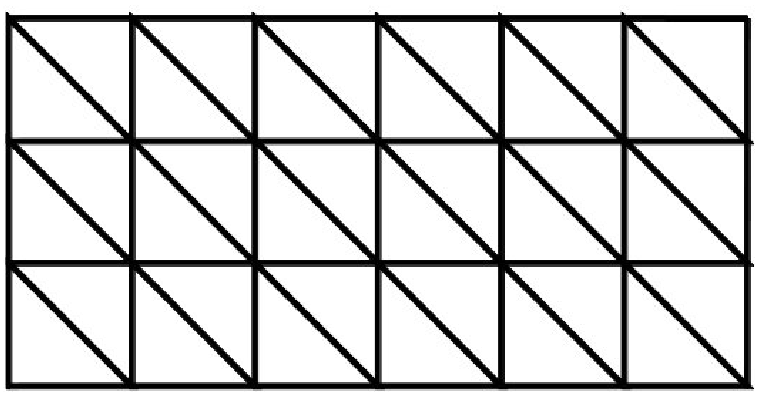
Námět 4 – Mozaiky – obr. 4

Využíváme rastr (obr. 5), který se skládá ze čtverců rozdělených úhlopříčkou na dvě různobarevné části (děti si mohou vybarvit, popř. polepit trojúhelníky z barevného papíru jednu část čtverce). Pak můžeme vytvářet dekorativní vzory podle předlohy nebo bez předlohy, a to skládáním či lepením čtverců.

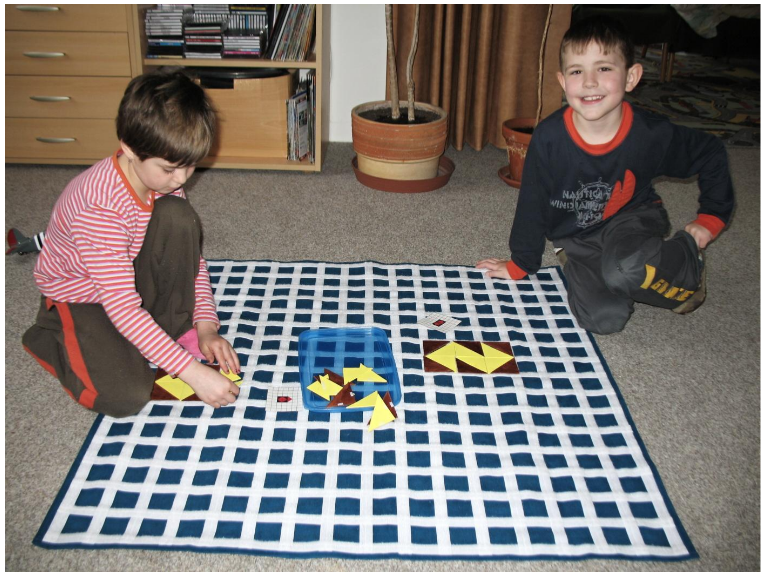


Obr. 4

Metodické poznámky: Děti musí prokázat určitou úroveň analyticko-syntetického myšlení, kdy je nutno z předlohy zjistit, jaké dílky potřebují a kam je umístí, aby vzor byl dekorativní. Zpočátku mohou přikládat jednotlivé dílky na předlohu (pracujeme s předlohou 1 : 1), později můžeme využít jejich získaných dovedností a předlohy zmenšit. Pokud nepoužíváme předlohu, rozvíjíme fantazii dětí. Pokud děti pracují podle předlohy, rozvíjíme jejich zrakové vnímání, rozvíjíme orientaci v rovině a podporujeme jejich analyticko-syntetické myšlení.



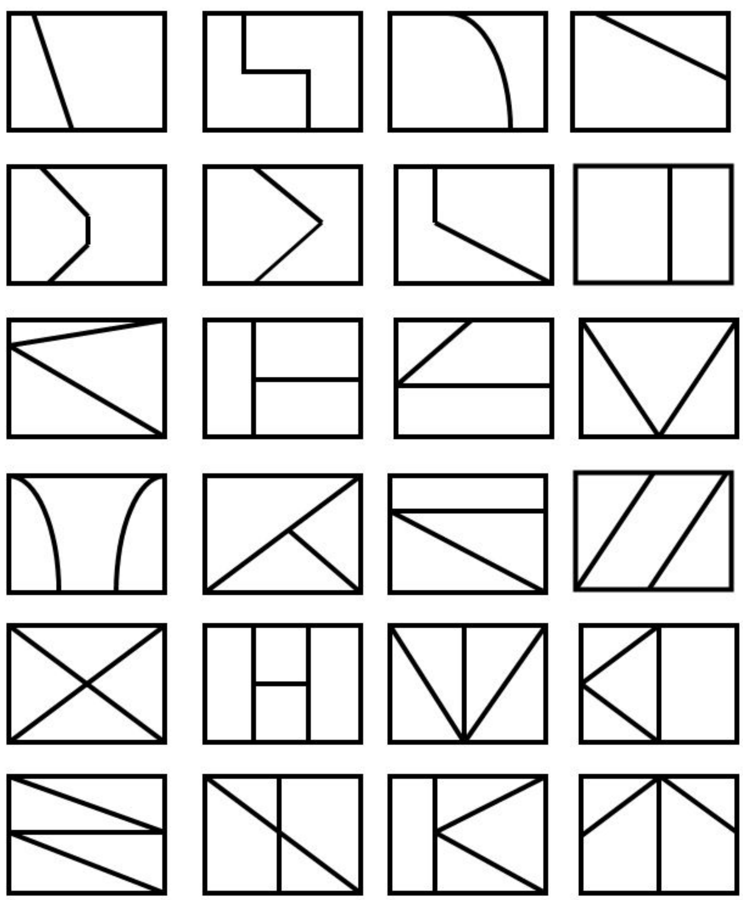
Obr. 5



Obr. 6: Foto – Mozaiky

Námět 5 – Geopuzzle obdélníkové – obr. 7

Obdélníky jsou rozčleněny tak, aby se postupně zvyšovala náročnost skládání.



Obr. 7: Geopuzzle obdélníkové

Metodické poznámky: Dětem nejprve předložíme dílky jednoho obdélníku, později můžeme přidat dílky druhého. Respektujeme úroveň dítěte a individuálně přizpůsobíme náročnost činností.

Literatura

[1] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

[2] Kaslová, M. *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání.* Praha: Raabe, 2010. ISBN 978-80-86307-96-1.

[3] Lišková, H. Matematický trojlístek v MŠ. In Stehlíková, N. (ed.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2011*, PedF UK Praha, 133 s. ISBN 978-80-86843-32-2.

MNOHOSTĚNY A MŘÍŽE Z NICH (NEJEN V MATEMATICE)

IVANA MACHAČÍKOVÁ, JOSEF MOLNÁR[1]

V úvodní geometrické části pracovní dílny (workshopu, modulu, projektu) se žáci seznamují s informacemi souvisejícími s pojmem mnohostěn, případně si je procvičují:

Mnohostěny

- **Mnohostěn** je chápán jako část prostoru ohraničená konečným počtem rovinných mnohoúhelníků.

- Geometrický útvar nazveme **konvexní**, právě když lze libovolné dva jeho body spojit úsečkou, jejíž každý bod náleží danému geometrickému útvaru. Mnohostěn je konvexní, je-li průnikem všech svých opěrných poloprostorů, přičemž hraniční rovinou opěrného poloprostoru se rozumí rovina, v níž leží stěna daného mnohostěnu.

[1] Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť, machacikova@gymzl.cz, KAG PřF UP v Olomouci, josef.molnar@upol.cz

- **Eulerova věta** (Leonhard Euler, 1707 – 1783): V každém konvexním mnohostěnu platí
$$s + v - h = 2,$$
kde s je počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran daného konvexního mnohostěnu. (Cvičení: Nalezněte nekonvexní mnohostěny splňující (nesplňující) uvedený vztah. Dokažte, že v konvexním čtrnáctistěnu s devíti vrcholy vychází aspoň z jednoho vrcholu aspoň 5 hran.)

- **Platónovým tělesem** (pravidelný mnohostěn, PT) (Platón, 427 – 347 př. n. l.) nazveme konvexní mnohostěn ohraničený shodnými pravidelnými konvexními rovinnými mnohoúhelníky (p-úhelníky), přičemž z každého jeho vrcholu vychází týž počet hran (valence vrcholu q). (Cvičení: Dokažte, že existuje právě pět PT. Demonstrujte princip duality PT. Určete počty rovin souměrnosti všech PT. Na kolik částí se PT rozpadnou, provedeme-li všechny tyto řezy současně? Kolik prvků mají grupy zákrytových pohybů PT?)

- **V pythagorejském pojetí světa** (Pythagoras ze Samu, okolo 570 př. n. l.) představují PT symboly pěti živlů: vzduch – oktaedr, země – krychle, oheň – tetraedr, voda – ikosaedr, universum – dodekaedr).

- **Keplerovým kosmickým pohárem** je nazývána kosmologická teorie, v níž Johanes Kepler (1571 – 1630) předpokládal, že se tehdy známé planety pohybují po kružnicích na sférách, mezi něž lze vložit (opsat a vepsat) PT takto: mezi sféru Merkuru a Venuše oktaedr, Venuše a Země ikosaedr, Země a Marsu dodekaedr, Marsu a Jupitera tetraedr a konečně mezi sféry Jupitera a Saturnu krychli.

- **Deltatopy** získáme, vynecháme-li v definici PT požadavek na stejnou valenci vrcholů a za mnohoúhelníky budeme považovat jen trojúhelníky. Existuje právě 8 deltatopů.

- **Archimédova tělesa** (polopravidelné mnohostěny) (Archimédes ze Syrakus, 287 – 212 př. n. l.) lze vytvořit z PT odříznutím vrcholů nebo hran tak, aby vznikly pravidelné shodné konvexní mnohoúhelníky.

- **Hvězdicovité pravidelné mnohostěny** dostaneme, vypustíme-li v definici PT podmínku konvexity.

- **Antiprisma (antihranol)** se nazývá mnohostěn, který má dvě protilehlé stěny (podstavy) tvořené shodnými pravidelnými n-úhelníky a ostatní stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.

V chemii se s mnohostěny setkáváme zejména v souvislosti s tvary krystalů a také při studiu prostorového uspořádání molekul.

	Název deltatopu	v	h	s	$q=3$	$q=4$	$q=5$
1	čtyřstěn	4	6	4	4	0	0
2	dvojitý čtyřstěn	5	9	6	2	3	0
3	osmistěn	6	12	8	0	6	0
4	dvojitý pětiboký jehlan	7	15	10	0	5	2
5	siamský dvanáctistěn	8	18	12	0	4	4
6		9	21	14	0	3	6
7		10	24	16	0	2	8
8	dvacetistěn	12	30	20	0	0	12

Tab. 1: Deltatopy

Krystaly

- **Krystal** je přirozeně vzniklé těleso vyznačující se pravidelným geometrickým tvarem a rovinnými plochami. Plochy krystalů i jimi proložené roviny charakterizujeme pomocí tří os a úseků *a, b, c*, které na nich krystalové roviny vytínají.

Vnitřní stavba (struktura) krystalů je dána uspořádáním nejmenších stavebních částic (tj. atomů, iontů či molekul). Vnější tvar a souměrnost krystalu nerostu jsou odrazem jeho vnitřní stavby. Krystaly mohou být souměrné podle rovin, os a středu souměrnosti.

- **Rovina souměrnosti** rozděluje krystal na dvě zrcadlově stejné části.

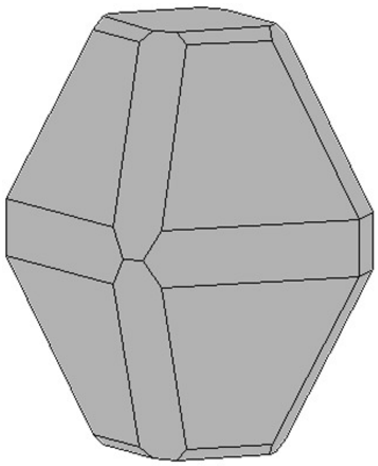
- **Osa souměrnosti** je myšlená přímka vedená středem krystalu. Při otáčení kolem této osy o 360° se krystal opětovně dostává do polohy shodné s výchozí pozicí. Podle toho, kolikrát se při otočení o celý kruh docílí shoda s výchozí polohou, rozeznáváme dvojčetné, trojčetné, čtyřčetné a šestičetné osy souměrnosti.

- Krystal má **střed souměrnosti**, pokud každá jeho plocha má odpovídající protiplochu. (Protiplocha je shodná a rovnoběžná s výchozí plochou a je otočená kolem myšleného středu o 180°.)

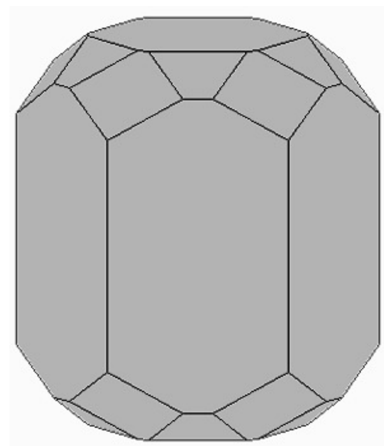
- Uvedené prvky souměrnosti se na krystalech vyskytují v určitých kombinacích, existuje 32 možných kombinací prvků souměrnosti. Každá z těchto kombinací je charakteristická pro jedno **krystalové oddělení**, krystalových oddělení je tedy 32.

Krystalová oddělení se rozdělují do sedmi krystalových soustav. Každá krystalová soustava má tzv. **holoedrické oddělení**, které má maximální možnou symetrii v dané soustavě.

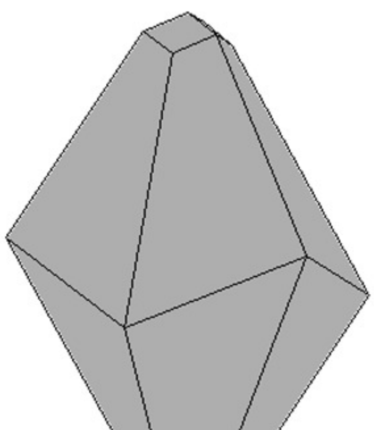
Podle symetrie můžeme krystaly rozdělit do následujících sedmi **krystalových soustav**: **trojklonná** (triklinická), **jednoklonná** (monoklinická), **kosočtverečná** (rombická, obr. 1), **čtverečná** (tetragonální), **šesterečná** (hexagonální, obr. 2), **klencová** (trigonální, obr. 3), **krychlová** (kubická, obr. 4).



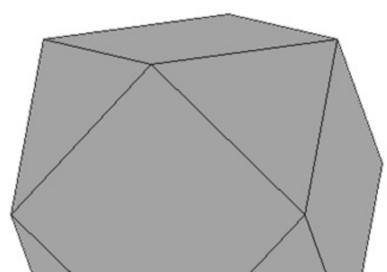
Obr. 1: Síra



Obr. 2: Apatit



Obr. 3: Kalcit



Obr. 4: Halit

Holoedrické oddělení krychlové soustavy má nejvyšší možnou symetrii ze všech 32 krystalových oddělení. Počet prvků souměrnosti v tomto oddělení je 23 – devět rovin souměrnosti, tři čtyřčetné osy, čtyři trojčetné osy, šest dvojčetných os a střed souměrnosti.

Tvary molekul

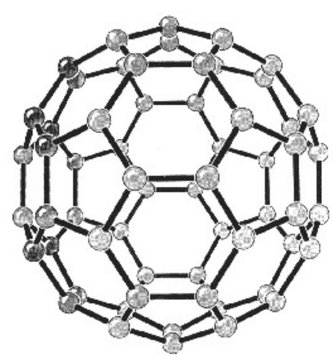
Geometrické uspořádání jednocentrických molekul lze popsat pomocí metody repulze valenčních elektronových párů (metoda VSEPR). Tato metoda předpokládá, že volné i vazebné elektronové páry se okolo centrálního atomu uspořádají tak, aby jejich vzdálenost byla maximální. V každé molekule, jejíž prostorový tvar určujeme, označíme: a – počet σ vazeb, b – počet volných elektronových párů centrálního atomu, z – součet počtu σ vazeb a volných elektronových párů centrálního atomu, tedy $z = a + b$. V důsledku odpuzování elektronových párů je pro $z = 2$ molekula **lineární**, pro $z = 3$ má molekula tvar **trojúhelníku**.

Pro větší hodnoty z mohou mít molekuly tvar mnohostěnu. Příklady těchto tvarů jsou uvedeny v tabulce č. 2.

z	$a+b$	**tvar molekuly**	**příklad**
4	4 + 0	tetraedr	CH_4
4	3+1	trigonální pyramida	NH_3
5	5+0	trigonální bipyramida	PCl_5
5	4+1	nepravidelný tetraedr	SF_4
6	6+0	oktaedr	SF_6
6	5+1	čtvercová pyramida	BrF_5
7	7+0	pentagonální pyramida	IF_7

Tab. 2: Příklady prostorového uspořádání jednocentrických molekul

S PT se setkáváme i u molekul některých prvků, např. molekula bílého fosforu P_4 má tvar pravidelného čtyřstěnu, molekula boru B_12 má tvar pravidelného dvacetistěnu. Tvar mnohostěnů mají i molekuly fullerenů, např. molekula fullerenu C_60 má tvar fotbalového míče (Archimédovo těleso, obr. 5).



Obr. 5: Fulleren C_60

V rámci pracovních dílen vyrábíme se žáky model **„nekonečného nekonvexního mnohostěnu“ – mříže**, jejíž všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky a z každého vrcholu vychází 7 hran. Sestavovaná mříž se skládá z ikosaedrů propojených „tunely“, přičemž tunel tvoří pravidelný oktaedr, tedy trigonální antiprisma.

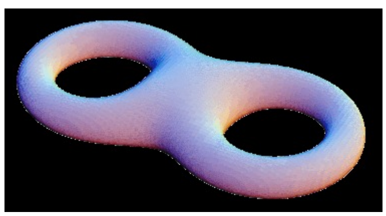
Starší studenty můžeme seznámit i s teoretickým podkladem ve formě zjednodušených poznatků z topologie.

Poincarého zobecnění Eulerovy věty

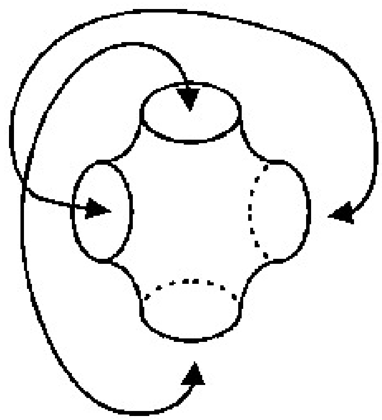
Pro mnohostěny platí

$$s + v - h = 2 - 2r \tag{1}$$

kde r je (topologický) **rod plochy** (Genus of Surface). Zjednodušeně lze říci, že hodnota rodu plochy je rovna počtu v ní existujících „průchodů“, viz obr. 6).



Obr. 6: Plochy rodu 2



Obr. 7: Molekula SF_6

Vzhledem k tomu, že jedna hrana mnohostěnu je spojnicí dvou vrcholů a současně průsečnicí dvou stěn, platí vztah

$$ps = 2h = qv. \tag{2}$$

Užitím substitucí $h = 1/2ps$ a $v = ps/q$ dostáváme z (1) vztahy

$$v = \frac{4p(r-1)}{pq-2p-2q}, \qquad s = \frac{4q(r-1)}{pq-2p-2q}, \qquad h = \frac{2pq(r-1)}{pq-2p-2q} \tag{3}$$

Pro $r = 0$ z (1) vyplývá, že

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{h} > \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Z (3) pro $r = 0$ pomocí jednoduchého tabulkového procesoru ukážeme, že existuje právě pět Platonových těles, a to vyšetřením „všech“ možností pro v, s a h.

Pro $r = 2$ z (1) dostáváme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{h} < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

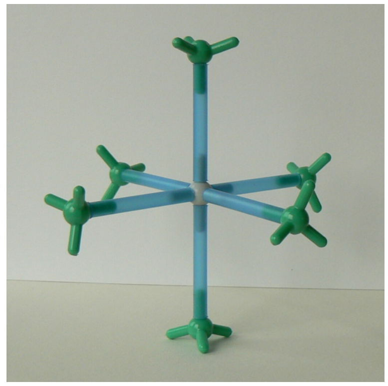
Užitím tabulkového procesoru na (3) získáme pro akceptovatelné hodnoty v, s a h nejvýše 11 možností, které si zasluhují naši pozornost.

druh	p	q	v	s	h	
1	3	7	12	28	42	ikosaedr + 2 otevřené antihranolové tunely
2	3	8	6	16	24	oktaedr + 2 otevřené antihranolové tunely
3	4	5	8	10	20	krychle + 2 otevřené krychlové tunely
4	3	9	4	12	18	tetraedr + 2 otevřené antihranolové tunely
5	4	6	4	6	12	krychle + 1 otevřený krychlový tunel
6	5	5	4	4	10	otevřené pentagonální těleso duální samo k sobě
7	6	4	6	4	12	duální k 5.
8	9	3	12	4	18	duální k 4.
9	5	4	10	8	20	duální k 3.
10	8	3	16	6	24	duální k 2.
11	7	3	28	12	42	duální k 1.

Tab. 3: Příklady prostorového uspořádání jednocentrických molekul

Je však ještě potřeba ukázat, že existují konkrétní příklady pro všechny uvedené možnosti, viz např. Huylebrouck (2010). V rámci našich pracovních dílen žáci postupně tvoří mříž 1. druhu, viz obr. 8.

Poznámka: Příspěvek byl vypracován v souvislosti s řešením projektů ESF OP VK: CZ.1.07/2.3.00/09.0040 „Přírodovědec", CZ.1.07/2.3.00/09.0017 „MATES", CZ.1.07/1.2.12/01.0027 „PMT" a CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Práce s talenty".



Obr. 8: Mříž 1. druhu

Literatura

[1] Březina, F. a kol. *Stereochemie a některé fyzikálně chemické metody studia anorganických látek*. UP, Olomouc 1994.

[2] Hellberg, J. *Vývoj chemie jako vyučovacího předmětu vysoké a střední všeobecně vzdělávací školy.* PdF, Hradec Králové 1979.

[3] Honza, J., Mareček, A. *Chemie pro čtyřletá gymnázia,* 2. díl. Nakladatelství Olomouc, 1998.

[4] Huylebrouck, D. Regular Polyhedral Lattices of Genus 2: 11 Platonic Equivalents? In *Bridges Conference Proceedings*, Pécs 2010.

[5] Molnár, J., Kobza, J. *Extremálne a kombinatorické úlohy z geometrie*. SPN, Bratislava 1991.

[6] Vacík, J. *Obecná chemie*. SPN, Praha 1986.

[7] Vacík, J. a kol. *Přehled středoškolské chemie*. SPN, Praha 1996.

[8] Zimák, J. *Mineralogie a petrografie*. UP, Olomouc 1993.

[9] http://web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/tvary.html

[10] http://www.zschemie.euweb.cz/uhlik/fulleren.gif

[11] http://mathworld.wolfram.com/DoubleTorus.html

„DOBRÉ“ OTÁZKY VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

JARMILA NOVOTNÁ[1]

> Důvod, který žene matematika k tomu, aby pracoval na výzkumu, je jeho intelektuální zvědavost, kouzlo hádanek, potřeba poznat pravdu. (Dieudonné, 1987, s. 17)[2]

Úvod

Komunikace a jazyk používaný ve třídě při vyučování matematice je v poslední době jedno z velmi důležitých témat, která jsou diskutována. Dřív byla většinou hlavní pozornost zaměřena na jazyk, který při výkladu používal učitel. Se změnami v sociální a kulturní situaci ve třídách se pozornost obrací na komunikaci mezi učitelem a žáky a také mezi žáky samotnými. Můžeme také říci, že pozornost se stále více přesunuje od jazyka textů k jazyku rozpravy. Zatímco dříve bylo hlavní otázkou, jak sdělit nějaký pojem studentům, zaměřuje se pozornost stále více na komunikaci mezi žáky a na komunikaci mezi učitelem a žáky.

Diskuse s učitelem i diskuse mezi žáky jsou významné prvky konstruktivisticky vedeného vyučování. Diskuse je zde organizována tak, aby při ní žáci něco nového objevili, zformulovali nějakou hypotézu, diskutovali různá řešení zadané úlohy apod. Dávat žákům dostatek prostoru je pro učitele mnohdy značně náročné, protože takovou komunikaci si nemůže předem detailně připravit a musí reagovat rychle na situaci, která se ve třídě vytvoří.

„Dobré“ otázky ve vyučování matematice

Ve škole je zcela legitimní, že učitel pokládá žákům otázky. Ve Wood (1998) jsou shrnuty základní funkce otázek v běžném životě: V běžném životě je nejčastější funkcí otázek získání informací o tom, co tazatel neví a potřebuje vědět. Otázky také obsahují žádost o pomoc nebo povolení. Otázky pokládané ve škole často tyto funkce nedodržují. Učitelům je povoleno pokládat otázky, pro které správné odpovědi předem znají, s očekáváním, že dostanou přijatelnou odpověď.

---

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

[2]Překlad z francouzského originálu J. Novotná.

Otázky, které nás zajímají v tomto příspěvku, se týkají probírané matematiky. V dílně jsme pracovali s „dobrými“ otázkami tak, jak jsou zpracovány v (Sullivan a Lilburn, 2010).

Charakteristika „dobrých“ otázek

Co vlastně tvoří „dobrou“ otázku? Sullivan a Lilburn (2010) uvádějí tyto tři charakteristiky:

- Vyžaduje víc než jen odvolání se na známá fakta.
  Příklad:
  Otázka, která vyžaduje pouze vzpomenout si na známý algoritmus: Vypočítejte aritmetický průměr z čísel 6, 7, 5, 8 a 4.
  Otázka, která vyžaduje víc než jen vzpomenutí si na nějaký fakt: Aritmetický průměr pěti čísel je 6. Jaká čísla to mohou být? Nebo: Po pěti zápasech má hokejový tým aritmetický průměr 6 vstřelených gólů za zápas. Kolik gólů mohlo družstvo v jednotlivých zápasech dát?

- Žáci se mohou něco dozvědět, když na ni odpovídají, a učitel se dozví něco o žácích z jejich odpovědí.
  Příklad:
  Jan a Marie měří délku hřiště na košíkovou pomocí tyče; oba používají stejně dlouhé tyče. Jan naměřil 20 tyčí, Marie 19,5 tyče. Jak je to možné?

- Existuje víc odpovědí, které lze přijmout.
  Příklad:
  Na části pole si chci oplotit obdélníkovou zahrádku. Mám k dispozici 30 metrů pletiva na plot. Jakou rozlohu může zahrada mít?
  Na tuto otázku lze přijmout řadu odpovědí (14 x 1, 13 x 2, 12 x 3, . . . , 8 x 7). Žáci se však nemusí omezit jen na přirozená čísla (např. 12,5 x 2,5). Můžeme se dále ptát, která ze zahrad bude mít největší rozlohu, která nejmenší. . . .

Metody pro tvorbu „dobrých“ otázek

Při tvorbě „dobrých“ otázek lze úspěšně postupovat dvěma velmi podobnými metodami:

Metoda 1: Začít od konce
Etapy:
a) Definovat téma; b) Vytvořit uzavřenou otázku a najít na ni odpověď; c) Na základě toho formulovat „dobrou“ otázku.

Příklad:

a) Vyučovací hodina se bude týkat aritmetického průměru

b) Uzavřená otázka: Kratinovi mají děti ve věku 3, 8, 9, 10 a 15 let. Kolik je průměrný věk jejich dětí? (Odpověď je 9 let.)

c) Příklad „dobré“ otázky: V rodině je pět dětí. Jejich průměrný věk je 9 let. Kolik let může dětem být?

Metoda 2: Upravit běžně používanou otázku
Etapy: a) Definovat téma; b) Zvolit nějakou běžnou otázku; c) Upravit ji na „dobrou“ otázku.
Příklad:

a) Vyučovací hodina se bude týkat sčítání

b) Běžná otázka: $337+456=$

c) Příklad „dobré“ otázky: *Během jízdy vlakem počítám vzdálenosti. Na papír, na který píšu, se mi vylilo trochu pití a některé číslice zmizely. Můj papír teď vypadá takto:*

$$\begin{array}{r} 3\nabla 7 \\ \nabla\nabla 6 \\ \hline 79\nabla \end{array}$$

Jaké mohou být chybějící číslice?

Použití „dobrých“ otázek při vyučování matematice

Proces použití „dobrých“ otázek ve vyučování matematice lze rozdělit do následujících etap, které na sebe navazují:

Etapa 1: Položení „dobré“ otázky
Sem nepatří jen položení otázky, ale i ověření, že jí všichni rozumějí. To může učitel zjistit např. tak, že požádá několik žáků, aby otázku přeformulovali svými slovy.
Žáci by měli mít možnost ptát se učitele např. na to, co znamená odpovědět na položenou otázku.
Je třeba dát velký pozor na to, aby učitel nevysvětloval ani nijak naznačoval, jak mají odpověď najít. Je úkolem žáků odhalit cestu k nalezení odpovědi.

Etapa 2: Ponechání žáků, aby hledali odpovědi na položenou otázku
Doporučená forma práce žáků je ve skupinách, aby mohli své nápady konzultovat se spolužáky. Tato část je významná při procesu učení se. Pomáhá i slabším žákům, kteří nemusí získávat rady od učitele, ale mohou se poradit se spolužáky.

Pokud příliš mnoho žáků neví, jak začít, je vhodné na chvíli přerušit práci a společně začít diskusi, která by pomohla překonat počáteční obtíže žáků. Pokud si ani nyní žáci nevědí rady, je vhodné položit trochu zjednodušenou otázku tak, aby nad otázkou začali žáci přemýšlet.
V době, kdy žáci pracují samostatně, učitel pozoruje, co dělají, ale do jejich práce nezasahuje. V případě, že některá skupina už je hotova, může jim položit další otázku související s předchozí.
Není třeba čekat, až odpověď najdou všechny skupiny. I když učitel přeruší jejich práci dříve, než najdou odpověď, žáci pracovali a se situací se postupně seznamovali. Je třeba mít čas ještě na diskusi v celé třídě.

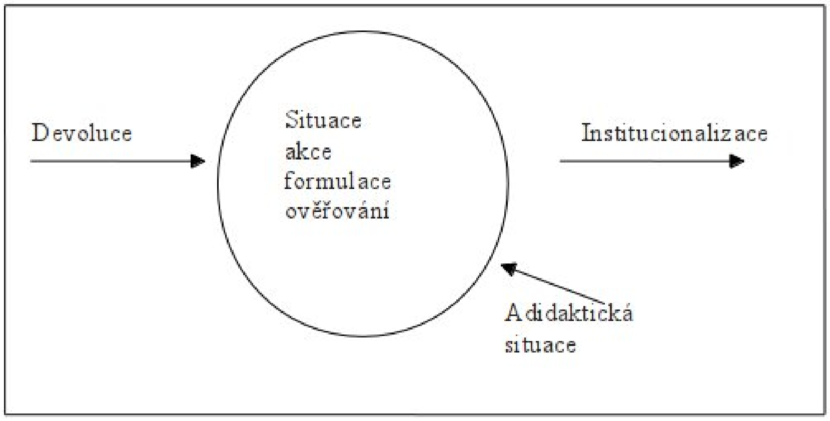
Etapa 3: Diskuse v celé třídě
Skupiny referují o svých řešeních a žáci vysvětlují, proč volili svůj postup.
Doporučený postup je nechat shrnout postup každou skupinu a zapsat na tabuli všechny odpovědi všech skupin. Velmi často si v této fázi žáci ve skupině s chybnou odpovědí nebo postupem uvědomí, kde udělali chybu.
Je vhodné zadat žákům ještě další otázky podobné té původní, aby viděli, že jejich postup je aplikovatelný i obecněji.

Etapa 4: Shrnutí
Pokud vše funguje, měli by aspoň někteří žáci provést shrnutí místo učitele.
Protože to, že skupina nabídne správnou odpověď, ještě neznamená, že všemu rozumí, je vhodné, aby učitel na konci shrnul hlavně důležitá místa a vysvětlil je.
I v této etapě je vhodné zadat žákům ještě další otázky podobné té původní, aby viděli, že jejich postup je aplikovatelný i obecněji.

Závěrečné poznámky

Jak už bylo zmíněno dříve, je tvorba a použití „dobrých“ otázek podstatná při konstruktivisticky vedeném vyučování. Jejich používání je v souladu s Teorií didaktických situací G. Brousseaua (Brousseau, 1997). Adidaktická situace (Brousseau, 1997; Hrabáková, 2005; Složil, 2005; Novotná, 2003; Brousseau-Sarrazy, 2002) je situace, která dovoluje žákovi něco zjistit, vytvořit si model a zkontrolovat ho, vytvořit nový apod. bez přímých vnějších zásahů učitele. Vnější zásahy se mohou vyskytnout, ale pouze např. k udržení pozornosti apod., tedy pedagogicky, žák jedná samostatně. Schéma didaktické situace a jejích částí je uvedeno na obr. 1.

„Dobré“ otázky jsou nezastupitelné hlavně v situaci *devoluce* (kdy učitel předává část své zodpovědnosti za činnost žákům) a *institucionalizace znalostí* (kdy učitel opravuje znalosti, které žáci získali, a pomáhá žákům vytvořit si vědomosti, ne jen oddělené poznatky).



Obrázek 1: Schéma didaktické situace

Text zakončíme citátem, který podtrhuje důležitost problematiky, jíž jsme se v pracovní dílně věnovali:

> „Aby byly vytvořeny nové vědomosti, je třeba zpochybnit vědomosti již získané. Žák musí být veden k tomu, aby si uvědomoval, že poznatky, které má na počátku, nejsou postačující.“ (Poirier, 2001, s. 5)[3]

Poděkování: Příspěvek byl podpořen projektem GAČR P407/12/1939.

Literatura

[1] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Dordrecht,/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. (Francouzská verze: Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage.)

[2] Brousseau, G. - Sarrazy, B. (2002). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* DAEST, Université Bordeaux 2.

[3] Dieudonné, J. (1987). *Pour l´honneur de l´esprit humain.* Paris: Hachette.

[4] Hrabáková, H. (2005). *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy.* [Diplomová práce.] Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[5] Novotná, J. (2003). Ukázky analýzy a priori pro slovní úlohy. In: *Sborník z JŠDS* Vrabcov, jaro 2003. Eds. P. Dvořák, J. Herman. Praha: UK-PedF, OR Didaktika matematiky, s. 31-54.

[6] Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques.* Saint-Laurent, Québec): ERPI.

[3] Překlad z francouzského originálu J. Novotná.

[7] Složil, J. (2005). *Teorie didaktických situací v české škole. Dělitelnost přirozených čísel v 6. ročníku ZŠ.* [Diplomová práce.] Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[8] Wood, D. (1998). *How Children Think and Learn. The Social Contexts of Cognitive Development.* Second Edition. Oxford: Blackwell.

Aktivity pro rozvoj komunikace v matematice

Jarmila Novotná, Lenka Tejkalová[1]

Úvod

Každý učitel je zároveň učitelem jazyka. Žáci si v hodinách matematiky osvojují specifické komunikační vzorce, měli by se učit formulovat hypotézy, odhadovat, argumentovat, zdůvodňovat své výsledky i postupy. . . V dílně představujeme aktivity, které rozvíjejí komunikační dovednosti v rámci vyučování matematice. Aktivity čerpají z metod a strategií výuky cizího jazyka. Vycházejí z našich zkušeností s výukou matematiky prostřednictvím cizího jazyka, kde je prvek komunikace klíčový. (Novotná, Hofmannová, Petrová, 2002)

Aktivity, které se v matematice cíleně soustředí na jazykovou a komunikační složku, jsou přirozeným nástrojem pro realizaci mezipředmětových vztahů (nejen formálně, ale i ve vnímání žáků); navíc nabouráním tradičních schémat hodin matematiky přispívají k vnitřní motivaci žáků. Mohou zároveň sloužit jako diagnostický nástroj chybných představ žáků, lze je využít jako motivaci, k procvičení, opakování, „objevování" i hodnocení. Ze strany žáků jsou často vnímány jako hra. Většinu lze snadno přizpůsobit věku, úrovni a učebním stylům žáků.

Přestože nám jde o žákovskou komunikaci, klíčovou roli ve všech aktivitách pochopitelně hraje učitel. Na rozdíl od tradiční role zde však učitel ustoupí do pozadí a nechá žáky se projevovat. Jeho vstup je klíčový při zahájení aktivity – musí jasně a srozumitelně formulovat instrukce – pravidla hry. V průběhu aktivity už učitel zpravidla nedává pokyny, žáci pracují co nejvíc samostatně. Učitel jejich práci monitoruje, zasahuje pouze v případě, že je vyzván nebo žáci nejsou schopni bez vnějšího zásahu aktivitu zahájit nebo v ní pokračovat. V závěrečných diskusích má být učitel moderátorem a zajistit,

[1] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, `jarmila.novotna@pedf.cuni.cz`, `lenka.tejkalova@gmail.com`

aby debata zůstala ve faktické a objektivní rovině. Právě závěrečná debata je prvek, kde lze komunikaci rozvíjet nejefektivněji. Jsou to sami žáci, kteří schvalují řešení, nebo je vyvracejí. Učitel nerozhoduje o správnosti, ale pomáhá žákům naučit se vysvětlovat, používat a přijímat legitimní argumenty, obhájit řádně svá tvrzení a formulovat i přijímat objektivní kritiku.

Komunikací zpravidla rozumíme komunikaci slovní; nelze však opomíjet ani nonverbální formy vyjadřování a také grafické prvky a symbolický zápis. Právě přechod mezi nimi je jedním z důležitých prvků komunikace v matematice.

Obecně platí, že neexistují aktivity nebo druhy cvičení, které by k rozvoji komunikačních dovedností vedly zcela automaticky. Účinnost aktivit, které představujeme, je závislá na použití vhodných instrukcí, na organizačních formách práce, ale také na tom, jak je aktivita dále využívána a rozvíjena. Hlavním prvkem, který určuje míru přínosu aktivity pro rozvoj komunikace, je učitel.

Na konkrétních aktivitách se pokusíme ilustrovat obecné principy, které lze pro rozvoj komunikace využít.

Ano – ne – nevím

Aktivita vychází z typu cvičení, který se v jazykových učebnicích často využívá pro kontrolu porozumění psanému nebo mluvenému sdělení. Základem je sada tvrzení, kde má žák u každého rozhodnout o jeho pravdivosti. Klíčové je to, že žák svou odpověď musí vždy zdůvodnit – na učiteli je, aby zvolil, zda písemně nebo ústně.

Téma: Obsah trojúhelníku	ANO Vysvětli proč	NE Vysvětli proč nebo uveď protipříklad	NEVÍM Formuluj, čemu nerozumíš, o čem pochybuješ
Pro výpočet obsahu trojúhelníku musím znát délky všech stran.			
Každé dva rovnoramenné trojúhelníky, které mají stejnou základnu, mají stejný obsah.			
Každé dva trojúhelníky, které mají stejný obvod, mají stejný obsah.			
Pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníka stačí znát délky jeho libovolných dvou stran.			

Tuto aktivitu je možné využít mnoha různými způsoby. Může posloužit jako vstupní aktivita, která uvede žáky do nového tématu a donutí je v souladu s principy kritického myšlení zamyslet se nad tím, co už o dané oblasti vědí – sloupec „nevím“ umožní žákům netipovat. Můžeme nechat nejprve žáky pracovat samostatně, potom srovnat závěry se spolužákem a přejít ke společné diskusi o tom, o kterých tvrzeních ještě nedokážou rozhodnout. Na konci tématu je pak možné se ke stejnému pracovnímu listu vrátit, aby se žáci (i učitel) ujistili, že místo původních „nevím“ už v tuto chvíli dokážou o pravdivosti tvrzení rozhodnout.

Je také možné rozhodování o tvrzeních zadat jako skupinovou práci – a nechat skupiny soutěžit v tom, kdo bude mít více správných odpovědí. Žáci také mohou vytvářet zadání pro ostatní. V obou případech je vhodné aktivitu zakončit společnou reflexí, ve které se žáci vrátí k tvrzením, která byla problematická nebo obtížná.

Další možností je využít tuto aktivitu jako průběžný formativní test. Neznámkuje se, ale jeho společné vyhodnocování žákům pomůže ujasnit si, co už vědí – a stejně tak učiteli poskytne komplexní zpětnou vazbu o jejich znalostech. Žáci si často právě při společném zdůvodňování utřídí poznatky. Samozřejmě je možné aktivitu zařadit do známkovaného testu. Osvědčilo se zařadit rozhodování o pravdivosti tvrzení jako „bonusovou“ úlohu, která zaměstná žáky, kteří zvládnou test vypracovat dříve – i v takovém případě by v navazující hodině měla zaznít společná diskuse nad správným řešením.

Na kolik si vzpomeneš?

Jde o objevovací hru. Žáci se snaží vymyslet a zapsat co nejvíce objektů (matematických i nematematických), které vyhovují danému popisu. Po dvou nebo třech minutách společně zapíší své odpovědi na tabuli nebo soutěží, která skupina našla nejvíc položek.

Na kolik si vzpomeneš věcí, které . . .

- mají tvar kosočtverce?
- se dají rozdělit na sedm shodných částí?
- jsou menší než nula?

Aby se skupině bod za objekt započítal, musí ho skupina uspokojivě obhájit – ostatní skupiny se snaží jejich argumentaci napadnout, najít protipříklad atd. Učitel musí vyhodnocování udržet v korektní nekonfrontační rovině, trvat na pravidlech civilizované komunikace. Žáci zároveň během této aktivity velmi rychle pochopí, jak užitečné je si ve skupině rozdělit role, aby neztráceli čas opakováním stejných objektů.

Bingo

Hraje se individuálně nebo ve skupinách. Učitel zapíše 10 až 15 matematických položek (např. čísla, jednoduché rovnice, geometrické útvary. . .). Žák/skupina si vybere pět z nich a zapíše si je. Učitel potom charakterizuje jednotlivé položky jejich vlastnostmi. Jestliže žáci dokážou přiřadit charakteristiku (vlastnost) k některé z položek ve svém seznamu, označí ji. Komu se podaří vyznačit všech pět vybraných položek, ohlásí „Bingo“. Vyhrává žák/skupina, která první ohlásí „Bingo“ a dokáže zpátky přiřadit charakteristiky ke svým položkám tak, aby ostatní souvislost akceptovali. (Například k položce „čtverec“ může patřit charakteristika „rovinný útvar“, „podstava kvádru“, „druhá mocnina“ i „úhlopříčka“ – je jen na žácích, jestli si pojmy spojí a poté obhájí.)

Matematické piškvorky, mlýn či AZ kvíz

Jedná se o hru pro dvě skupiny. Jedna skupina má kolečka, druhá křížky. Vyhrává ta, která první získá plnou řadu svých symbolů (tj. řadu tří koleček nebo křížků). Učitel na tabuli připraví hrací plán, kde každé pole představuje jeden úkol/otázku.

Úkoly/otázky může učitel volit podle procvičovaného tématu nebo naopak cíleně zařadit různá témata. Skupiny se střídají ve vybírání pole. Odpovědí-li správně, zakreslí se do daného pole na tabuli kolečko či křížek.

Kromě „piškvorkového“ hracího plánu můžeme využít pyramidu hexagonů, kde mají žáci za úkol svými symboly propojit všechny tři strany (znáte z televizní hry AZ kvíz) nebo hrací plán pro stolní hru Mlýn.

Opravujeme chyby

Tato aktivita rozvíjí schopnost žáků odhalovat a opravovat vlastní chyby. Na tabuli učitel napíše několik úloh s řešeními, která obsahují chyby. Předem může žákům říci, kolik chyb v řešení je. Žáky požádá, aby pomohli chyby opravit.

Žáci se tak musejí soustředit na detaily, zároveň slovně popisují, kde chybu našli a jak chyba vznikla – učí se verbalizovat vlastní postupy a zároveň upevňují znalosti.

Vnesení prvku náhody

Ve skupinové práci a obecně v aktivitách, kde žáci mají mluvit, často dochází k tomu, že mluví několik nejodvážnějších žáků, případně že celou práci udělá nejlepší žák a pak ji i prezentuje. V aktivitách, které uvádíme, se snažíme tento jev odbourat. Komunikaci vnímáme nejen v rovině učitel-žák, ale i mezi jednotlivými žáky, skupinovou práci pak považujeme za důležitý nástroj rozvoje efektivní komunikace mezi žáky.

Aby byl plně využit potenciál komunikace ve skupině, je třeba žáky přimět nejen společně najít správné řešení, ale vzájemně si sdělit, jak k němu došli a proč je to správné řešení. Ve skupinách si proto žáci sami rozdělí čísla (nebo dané barvy, zvířata, názvy planet. . .) a učitel buď hází kostkou, nebo losuje, kdo – které číslo, která barva atd. – bude odpovídat. Bod přitom skupina získá pouze v případě, že daný žák uspokojivě odpoví bez pomoci ostatních. Skupina se tak musí soustředit na to, aby i nejslabšího člena dobře připravila na závěrečné vyhodnocování. Osvědčilo se použití kostky, čím větší, tím lepší, aby žáci mohli proces losování sledovat – zdůrazňuje se tak hravost aktivity. Kostkou samozřejmě může házet nejen učitel, ale i žák. Pokud učitel pracuje s celou třídou, může samozřejmě postupně vyvolávat různé žáky, nebo vyzvat toho, kdo právě domluvil, aby vybral dalšího řečníka.

Teorie školního dialogu: Iniciace, replika, evaluace

V 70. letech 20. století popsaly nezávisle na sobě dva vědecké týmy typickou strukturu konverzace ve vyučování (Mehan; Sinclair, Coulthard) jako IRE/IRF: iniciace, replika a evaluace (resp. feedback – zpětná vazba). Ilustrovat ji můžeme na jednoduchém příkladu:

„Petře, kolik je 3 krát 7?“ (iniciace: zahájení konverzační výměny, promluvy)
„21.“ (replika: odezva, reakce na iniciaci)
„Správně.“ (evaluace: schválení odezvy, její potvrzení nebo vyvrácení, případně přechod do další iniciace).

Žák ve školní komunikaci typicky promlouvá ve druhé fázi – reaguje na výzvu učitele k mluvení a očekává potvrzení své odpovědi. Jde o vzorec, který školní komunikaci dominuje, pro žáky bývá obtížné ho opustit a v konverzaci zaujímat i jiné postavení. Již jsme výše naznačili, že se v aktivitách, kde rozvíjíme komunikaci, snažíme přesunout těžiště komunikace na žáka, a tedy přimět žáka aktivně se podílet na iniciaci (tím, že na něj přesuneme zodpovědnost za volbu mluvčího, nebo i tím, že úlohu úmyslně formulujeme mnohoznačně tak, abychom žáka nutili se ptát), a také na evaluaci (tím, že v závěrečném vyhodnocení aktivity jsou to sami žáci, kdo rozhoduje o platnosti vysvětlení spolužáků).

Zadání, která žáky vedou k iniciaci promluvy

Jednoduchým trikem, který žáky donutí se ptát, je dát jim neúplné nebo neobvyklé zadání. Slovní úlohu je tak možné například zadat bez otázky, tak aby si žáci sami zjistili, že mají nejprve formulovat otázku, až pak úlohu řešit.

Příklad: Libor vyběhne ze školy ve 13 hodin rychlostí 10 km/h. Z obchodu vyjede ve 14 h proti němu na kole Magda průměrnou rychlostí 20 km/h.

Je možné úlohu zadat ještě abstraktněji, aby žáci museli vyjednávat o významu jednotlivých slov – to je ostatně strategie převzatá z vyučování prostřednictvím cizího jazyka, kde žáci význam slov odvozují z kontextu a zpřesňují v rozhovoru s učitelem.

Příklad: Petr žoužellil lumáky. Třetinu lumáků vyžoužellil bez problémů, ale zbylých 20 se mu nepodařilo vyžoužellit.

Další cestou, jak žáky přimět ve skupinové práci nejen reagovat na pokyn učitele, ale samostatně iniciovat smysluplné konverzace, je místo explicitní otázky použít formulaci „zkoumej“ apod.

Příklad: Na kružnici vyznačte vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Ve směru hodinových ručiček spojte navzájem každý druhý. Výsledný obrazec nazveme obrazec typu [6, 2]. Obecně pro n bodů, jestliže spojujeme každý pátý bod, označíme vzniklý obrazec jako obrazec typu [n, p]. Zkoumejte. (Bastow)

Závěr

Existuje množství aktivit, které lze v hodinách matematiky využít pro rozvíjení komunikace i jako diagnostický nástroj. Náš příspěvek si neklade za cíl uvést jejich vyčerpávající seznam, ani shrnout všechny strategie a metody, které k rozvoji komunikace vedou. V článku je představeno několik aktivit, které se v praxi osvědčily a skutečně vedly k aktivnějšímu zapojení žáků do komunikace v hodině. Příspěvek měl být především inspirací pro hledání dalších.

Literatura

[1] Bastow, B. et al. 1984. 40 *Mathematical Investigations.* The Mathematical Association of Western Australia.

[2] Mehan, H. 1979. *Learning lessons, social organization in the classroom.* Cambridge, Massachussetts and London. Harvard University Press.

[3] Novotná, J., Hofmannová, M., Petrová, J. 2002. Using games in teaching mathematics through a foreign language. In: *CIEAEM 53 : Mathematical Literacy in the Digital Era, Proceedings*. Verbania (Itálie), s. 353–358.

[4] Sinclair, J.; Coulthard R. M. 1975. *Towards an analysis of discourse*. Oxford, Oxford University Press.

FINANČNÍ VZDĚLÁVÁNÍ PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ[1]

Úvod

> „Více než šestnáct tisíc lidí požádalo v minulém roce o osobní bankrot a oddlužení. Meziročně se tak jejich počet zvýšil o dvě třetiny, navíc se objevuje čím dál více návrhů na bankrot i u lidí se středním příjmem.“
>
> iDNES.cz, 4. ledna 2012

V současné době ekonomové stále častěji varují prostřednictvím médií před neuváženými půjčkami, které si lidé berou bez ohledu na to, zda další splátka je pro rodinný rozpočet ještě únosná. V důsledku neschopnosti splácet končí tito lidé v dluhové pasti, která mnohdy vede k exekuci nebo v lepším případě k osobnímu bankrotu. Neuvážené půjčování peněz je zdůvodňováno nízkou úrovní finanční gramotnosti občanů České republiky.

Otázkou zlepšení finanční gramotnosti se zabývala i vláda České republiky již koncem roku 2005 a uložila ministerstvům financí, školství a průmyslu a obchodu připravit opatření pro vzdělávání občanů v této oblasti. Dokument s názvem „Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách“ (MŠMT ČR 2007) byl vypracován a v prosinci 2007 vládou také schválen. Obsahuje konkrétní standardy, které stanovují cílový stav finančního vzdělávání pro základní a střední vzdělávání. Tyto standardy jsou zaměřeny na tři oblasti: peníze, hospodaření domácností a finanční produkty. Standardy finanční gramotnosti pro SŠ obsahují ještě další oblast, a to práva spotřebitele. V průběhu roku 2008 a 2009 byly standardy implementovány do rámcových vzdělávacích programů (dále v textu RVP) pro SŠ (MŠMT ČR 2008). Jejich implementace do RVP pro ZŠ nebyla ještě dokončena.

V důsledku implementace standardů finanční gramotnosti do RVP vznikla i řada učebních textů, které se zabývají problematikou finančního vzdělávání. Jedním z těchto textů je učebnice *Finanční vzdělávání pro střední školy (se sbírkou řešených příkladů na CD)* (Dvořáková a kol. 2011). Cílem článku je seznámit čtenáře s touto učebnicí.

[1]Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, `petrasek@pf.jcu.cz`

Finanční vzdělávání na středních školách

V úvodu zmíněné standardy finanční gramotnosti byly plně implementovány do rámcových vzdělávacích programů pro gymnázia a střední školy prostřednictvím vzdělávacích oblastí *Člověk a svět práce* a *Matematika a její aplikace*. Oblast *Člověk a svět práce* definuje znalosti a dovednosti týkající se nakládání s finančními prostředky, tržní ekonomiky, národního hospodářství a úlohy státu v ekonomice, které studenti gymnázií a středních odborných škol mají získat. Oblast *Matematika a její aplikace* pak uvádí potřebný matematický aparát, který studentům umožní pochopení zákonitosti fungování finančních vztahů a analýzu nabízených produktů. Implementací do RVP se finanční standardy stávají závaznými pro všechny školy odpovídajícího typu a musí být náležitě přeneseny do jejich školních vzdělávacích programů (ŠVP). (Dvořáková a kol. 2011). Ve školních vzdělávacích programech je finanční problematika vyučována v předmětech společensko-vědních a matematice, popř. v nově vytvořených předmětech zaměřených na finance.

Z výše uvedeného je zřejmé, že učitelé musí zvládat jak základy ekonomie, tak základy matematiky. Pokud má učitel aprobaci matematika – společenské vědy, tak zajištění výuky, která je zaměřená na finance, by nemělo dělat potíže. Jestliže učitel s touto aprobací na škole chybí, tak je výuka svěřena učiteli matematiky nebo učiteli společenských věd (toto závisí na ŠVP) a každý z nich si musí doplnit některé znalosti z druhého předmětu.

Učebnice – Finanční vzdělávání pro střední školy

Učebnice *Finanční vzdělávání pro střední školy* obsahuje ucelený text o problematice osobních a rodinných financí. Cílem autorů bylo nejen zprostředkovat znalosti a dovednosti vymezené standardy finanční gramotnosti, ale také vysvětlit danou problematiku v širším ekonomickém a společenském kontextu.

Kniha se skládá ze dvou částí: teoretické a praktické (sbírka příkladů na CD). Teoretická část obsahuje čtyři stěžejní kapitoly. První kapitola se zabývá finančním vzděláváním v souvislosti s projektem *Organizace pro ekonomickou spolupráci a rozvoj* (OECD), který je zaměřen na finanční vzdělávání v rámci zemí OECD (Česká republika je členem OECD od roku 1995). Jsou zde uvedeny národní strategie finančního vzdělávání některých členských zemí OECD, včetně ČR. Druhá kapitola se věnuje faktorům ovlivňujícím finanční vzdělávání: demografický, politický a ekonomický vývoj, změny na společenské úrovni, chudoba. Třetí kapitola čtenáře seznamuje s problematikou peněz a hospodařením domácnosti. Tématy čtvrté kapitoly jsou finanční produkty a ochrana spotřebitele.

Praktická část knihy obsahuje jednak vybrané výukové metody aplikované na některá témata z oblasti finančního vzdělávání, jednak řešené příklady k tématům vymezeným standardy finanční gramotnosti. Součástí sbírky jsou i testy, na kterých si může čtenář ověřit své znalosti z některé následující oblasti: investování volných finančních prostředků, pojistné produkty, finanční závazky. Jejich interaktivní podobu najde na `http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/petrasek.html`.

Příklady uvedené v knize byly zvoleny tak, aby odrážely realitu našeho života. Uveďme některé z nich. Řešení čtenář najde v (Dvořáková a kol. 2011).

Kapitola „Peníze“

Příklad 9: Pan Truhlář doma příležitostně vyrábí dřevěné židle s výrobními náklady 150 Kč na židli. Židle dodává do blízkého obchodu s nábytkem se ziskem 100 Kč na židli. Obchod si k ceně přidá vlastní marži ve výši 24 % a DPH (sazba 20 %). Cenu zaokrouhlí nahoru na číslo končící číslicí 9.

a) Kolik bude židle v obchodě stát?

b) Jak se změní cena židle, jestliže pan Truhlář použije na výrobu dražší dřevo, které zvýší výrobní náklady na 200 Kč na židli?

c) O kolik levnější by pro zákazníka obchodu byla židle koupená přímo od pana Truhláře? (Dvořáková a kol 2011, CD str. 37)

Kapitola „Finanční produkty – využití volných finančních prostředků“

Příklad 1: Pan Kolář má již 2 roky na běžném účtu, který je úročen 0,03 % p.a., částku 265 000 Kč. Pro zjednodušení předpokládejme, že tato částka zůstává na účtu každý měsíc po odeslání všech plateb a zaplacení poplatků. Pan Kolář je příliš líný na to, aby peníze nějakým způsobem investoval.

a) Zjistěte, jakou částku by pan Kolář obdržel, pokud by peníze ve výši 220 000 Kč (45 000 Kč nechá uloženy na běžném účtu pro nenadálé situace) vybral a uložil na dobu 2 let (= doba, kdy peníze ležely na běžném účtu) na termínovaný vklad úročený 1,8 % p.a. Srovnejte s částkou, kterou pan Kolář získá, jestliže peníze zůstanou na běžném účtu. Předpokládejme u běžného účtu i termínovaného vkladu měsíční připisování úroků.

b) Zjistěte, jakou částku by pan Kolář obdržel, pokud by peníze ve výši 220 000 Kč vybral z běžného účtu a uložil na dobu 2 let (= doba, kdy peníze ležely na běžném účtu) na termínovaný vklad úročený 1,8 % p.a. A navíc by si zřídil běžný účet, na který je vázán spořicí účet a využíval službu Inteligentní spoření, tj. automatické nadlimitní a podlimitní převody peněz z běžného účtu na účet spořící a naopak. Nastavení inteligentního spoření by bylo následující: 10 000 Kč běžný účet, 35 000 Kč spořicí účet, tzn. na běžném účtu by částka nemohla klesnout pod

10 000 Kč. Peníze by byly zhodnocovány a zároveň neustále k dispozici. Spořicí účet je úročen 0,6 % p.a. Předpokládejme dále, že pan Kolář celé 2 roky oněch 45 000 Kč nebude potřebovat. Uvažujme u běžného účtu, spořicího účtu a termínovaného vkladu měsíční připisování úroků.
(Dvořáková a kol 2011, CD str. 76)

Kapitola „Finanční produkty – finanční závazky“

Příklad 3: Společenství vlastníků, jehož jsme členem, se usneslo opravit střechu. Náklady rozpočtené na jeden byt činí 150 000 Kč. My touto částkou nedisponujeme, tudíž jsme nuceni si chybějící finance vypůjčit. Rozhodujeme se mezi dvěma nabídkami (obsahy jejich propagačních letáků jsou uvedeny v tabulkách).

1. nabídka Přehled orientačních měsíčních splátek				
Výše úvěru	**Splatnost 24 měsíců**	**Splatnost 48 měsíců**	**Splatnost 72 měsíců**	**Roční úroková míra**
100 000 Kč	4 860 Kč	2 864 Kč	2 242 Kč	od 9,85 %
150 000 Kč	7 290 Kč	4 296 Kč	3 363 Kč	
200 000 Kč	9 720 Kč	5 728 Kč	4 484 Kč	
Ve splátce jsou zahrnuty veškeré poplatky spojené s úvěrem. RPSN od 14,5 %.				

2. nabídka Přehled orientačních měsíčních splátek				
Výše úvěru	**Splatnost 24 měsíců**	**Splatnost 48 měsíců**	**Splatnost 72 měsíců**	**Roční úroková míra**
100 000 Kč	4 720 Kč	2 666 Kč	2 020 Kč	od 10,8 %
150 000 Kč	7 080 Kč	3 999 Kč	3 030 Kč	
200 000 Kč	9 440 Kč	5 332 Kč	4 040 Kč	
Splátka neobsahuje poplatek za poskytnutí úvěru 1% z výše úvěru (min. 500 Kč a maximálně 5 000 Kč, poplatek je splatný s první splátkou) a poplatek za správu úvěrového účtu 100 Kč měsíčně. RPSN od 14,5 %.				

a) Bez jakýchkoliv výpočtů odhadněte, která z nabídek bude pro nás výhodnější.

b) Rozhodli jsme se pro nejnižší splátku, tj. dobu splatnosti 72 měsíců (6 let), protože nechceme příliš zatížit rodinný rozpočet. U obou nabídek vypočtěte náklady na úvěr. Zjistěte, který nabízený produkt bude pro nás výhodnější.

c) Rozhodli jsme se pro dobu splatnosti 24 měsíců (2 roky), protože chceme úvěr co nejdříve splatit. U obou nabídek zjistěte náklady na úvěr a porovnejte s náklady v případě doby splatnosti 72 měsíců.

d) Vzhledem k tomu, že jsme počítali s opravou střechy, stihli jsme na ni uspořit 50 000 Kč. Stačí nám tudíž půjčka ve výši 100 000 Kč. Z našeho rodinného rozpočtu jsme schopni platit splátky až do výše 3 100 Kč. Rozhodněte, zda je pro nás výhodnější si vypůjčit 100 000 Kč na dobu 48 měsíců z 1. nabídky nebo 150 000 Kč na 72 měsíců z 2. nabídky.
(Dvořáková a kol 2011, CD str. 99–100)

Kapitola „Pojištění"

Příklad 1: Paní Opatrné je 38 let a žije sama se svojí 18ti letou dcerou, která pravděpodobně půjde po maturitě studovat vysokou školu. Paní Opatrná má obavy, že v případě její náhlé smrti by dcera nemohla dostudovat. Rozhodne se uzavřít jedno z životních pojištění. Finanční poradce jí nabídne následující produkty:

- **rizikové životní pojištění** na pojistnou částku 756 000 Kč (trojnásobek ročního příjmu paní Opatrné) s měsíčním pojistným 263 Kč a dobou pojištění 10 let,

- **kapitálové životní pojištění** (pro případ smrti a dožití, poměr 1 : 1) s pojistnou částkou 756 000 Kč, s měsíčním pojistným 3 326 Kč a dobou pojištění 20 let.. . .

a) Jaký je rozdíl ve výše uvedených životních pojištěních?

b) Může paní Opatrná uplatnit zaplacené pojistné ve svém daňovém přiznání?
(Dvořáková a kol 2011, CD str. 145)

Závěr

Realita našeho života nás přivádí v praxi k mnoha finančním produktům typu běžný účet, stavební spoření, penzijní připojištění, splátkový prodej, spotřební či hypoteční úvěr, . . . Vzhledem k tomu, že oblast bankovních (finančních) služeb je jedním z nejdynamičtějších odvětví, musí umět každý z nás na tento neustálý vývoj správně reagovat. Toto však vyžaduje určitý stupeň finanční gramotnosti, kterou má občan podle *Národní strategie finančního vzdělávání* (MF ČR 2010) získat v počátečním vzdělávání, popř. v dalším vzdělávání.

Literatura

[1] BROŽ, J. (2012). Počet návrhů na bankrot vzrostl o dvě třetiny. *Mladá fronta Dnes*. 4. ledna 2012.

[2] Dvořáková, Z. a kol. (2011). *Finanční vzdělávání pro střední školy: se sbírkou řešených příkladů na CD.* 1. vyd. Praha: C.H. Beck. ISBN 978-80-7400-008-9.

[3] MF ČR. (2010). *Národní strategie finančního vzdělávání* [online]. Praha: Ministerstvo financí ČR. [cit. 2012-03-17]. Dostupné z `http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/ft\_strategie\_financniho\_vzdelavani.html`

[4] MŠMT ČR. (2007). *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a sportu ČR. [cit. 2012-03-17]. Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/system-budovani-financni-gramotnosti-na-zakladnich-a-strednich-skolach.

[5] MŠMT ČR. (2008). *Rámcové vzdělávací programy oborů středního vzdělání* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a sportu ČR. [cit. 2012-03-17]. Dostupné z http://www.msmt.cz/vzdelavani/ramcove-vzdelavaci-programy-zaslani-do-vnejsiho-pripominkoveho-rizeni.

[6] PETRÁŠKOVÁ, V. (2011). *1. test, 2. test, 3. test* [online]. České Budějovice: Pedagogická fakulta JU [cit. 2012-03-17]. Dostupné z http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/petrasek.html

ANALÝZA VIDEOZÁZNAMU FRAGMENTU HODINY J. MICHNOVÉ

ANNA SUKNIAK[1]

Úvod

Videozáznam, který je předmětem této analýzy, byl pořízen dne 18. ledna 2012 ve třetím ročníku ve třídě Jitky Michnové (Základní škola Plesingera-Božinova v Neratovicích) na třetí vyučovací hodině. Přítomno bylo 22 žáků, z toho 15 děvčat a 7 hochů. Žáky této třídy učí J. Michnová od září 2011. V 1. a 2. ročníku tyto žáky učila jiná vyučující. J. Michnová

[1]PedF UK v Praze, studentka, anna.sukniak@gmail.com

učí podle učebnice Hejný a kol. (2009). Její výuka je důsledně konstruktivistická. Hlavní roli při řešení úloh hrají žáci a jejich vzájemné diskuse.

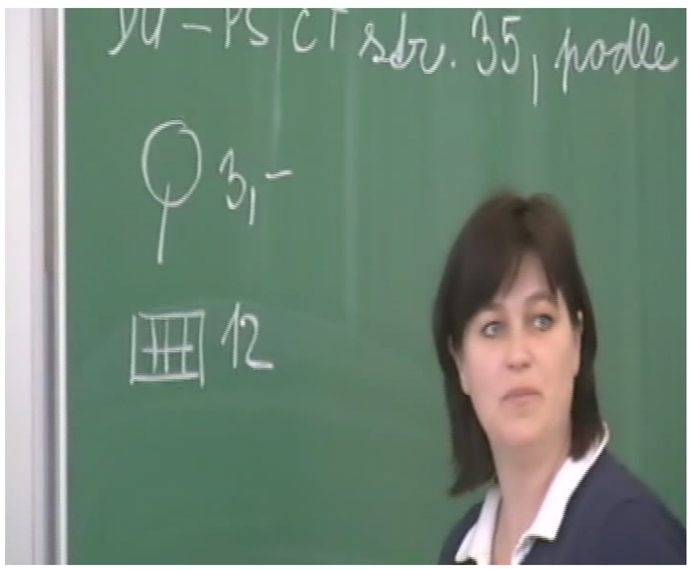
Cílem dílny byla skupinová analýza fragmentu videa účastníky dílny. Když jsem se na dílnu připravovala, analyzovala jsem uvedený fragment s několika zkušenými učiteli a didaktiky, od nichž jsem získala jak poučení o tom, co fragment přináší, tak i rady o tom, jak dílnu vést.

Video v délce 9:17 min. začíná zahřívací úlohou, kterou vypravuje učitelka: „Koupila jsem si 5 lízátek po 3Kč a čokoládu za 12Kč. Kolik jsem platila?“

Průběh řešení této úlohy a zápisu řešení na tabuli přinesl didakticky velice zajímavý jev.

Kostra protokolu videozáznamu

J. M. formuluje úlohu a zakresluje ji na tabuli (viz obr. 1). Úlohu opakuje.



Obr. 1

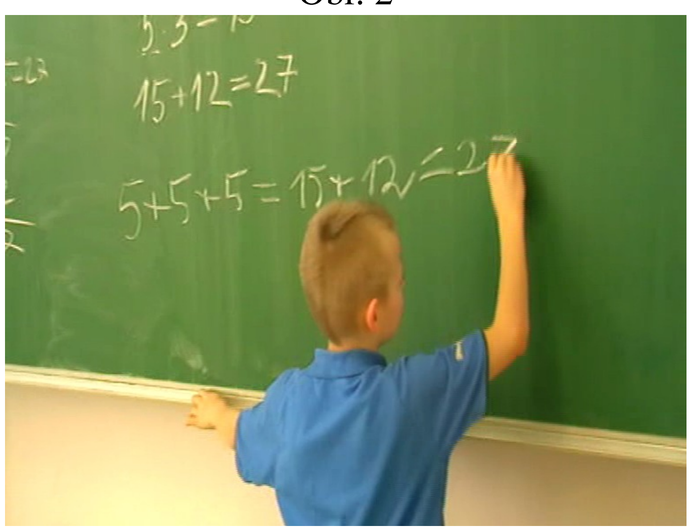
Žáci řeší, pokud jsou hotoví, píší výsledek na stírací tabulku a zvedají tabulku nad hlavu. Jitka bez jakýchkoli reakcí eviduje výsledky žáků. Když již většina žáků ukázala svůj výsledek, učitelka říká:

JM1:„Vidím tady dvacet jedna, dvacet dva, dvacet sedm“ (zapíše na tabuli řešení 21, 22, 27, která se objevila na stíracích tabulkách; většinou jsou výsledky správné).
JM2:„Proč dvacet jedna, proč dvacet dva, proč dvacet sedm?“ Minutu učitelka chodí po třídě, prohlíží výsledky žáků na tabulkách a pokračuje. „ Kdo má dvacet jedna?“ Učitelka oslovuje dívku, která nabízela výsledek 21. „Tak, obhajuj, Lucko.“
Lucka3: „Já jsem dostala dvacet jedna, že jsem spočítala . . . pětkrát tři . . . (otáčí se za sebe k násobilkové tabuli, která visí na zdi) to je patnáct. A . . . (dívá se na svou tabulku,

poté dopředu směrem k tabuli, pak dozadu směrem k násobilkové tabuli, pak jí sousedka řekla asi „no a dvanáct“) no a dvanáct za čokoládu . . . dvacet sedm (teď došla k výsledku 27).“ (29 sek.)
JM4: „Má to správně Lucka?“ Třída souhlasí.
JM5: „Kdo měl dvacet dva? Lukáši, jak ty jsi na to přišel?“
Lukáš6: „Já jsem si spočítal patnáct plus sedm a ne patnáct plus dvanáct.“
JM7: „Aha a jak jsi přišel na tu sedmičku?“
Lukáš8 (krčí rameny): „Asi čínsky.“ (smích ve třídě)
JM9 (správný výsledek 27 již dvakrát zazněl, proto učitelka žáky vyzývá): „Jak to máte zapsáno jako výpočet?“

Na tabuli se postupně objevily tyto zápisy: $15+12=27$; $5\cdot 3=15$, $15+12=27$ (viz obr. 2). Jako poslední píše na tabuli Lukáš (viz obr. 3).

Obr. 2



Obr. 3

JM10: „Má pravdu?“ Více hlasů třídy „ne“. Učitelka postupně vyvolá tři dívky. Každá z nich ukáže v čem je Lukášův zápis chybný a navrhne možnou opravu. Po vystoupení každé z těchto dívek se učitelka ptá Lukáše, zda souhlasí s tím, co bylo řečeno. Lukáš souhlasí s tím, co dívky napsaly, ale odmítá jejich tvrzení, že jeho zápis je chybně. Tvrdí, že i jeho zápis je dobře. Zatím nikdo Lukáše o jeho chybě nepřesvědčil. Jako poslední dostává příležitost Míša.
Míša11 (z lavice vysvětluje, proč Lukáš svoji chybu nechápe): „Vlastně on měl jeden příklad. On to měl v jednom příkladě, jenže když to Lucka dá do dvou příkladů, tak to už není ten jeden příklad a neplatí vlastně, že dvanáct plus patnáct se rovná patnáct.“
Míša12 (u tabule, vedle stojí Lukáš; dívka se soustředila na první rovnost v Lukášově nápisu a čte ji pozpátku): „. . . ale tady dvanáct plus patnáct máš patnáct, že se to rovná, ale to není pravda.“
Lukáš13: „No, není.“
Míša 14: „Tak proč jsi to napsal?“
Lukáš15: „Já nevím, prostě mě to napadlo.“

Konec protokolu.

Dílna

Uvedený videozáznam byl po krátkých segmentech prezentován a účastníci dílny byli upozorněni na některé jevy a vyzváni k posouzení situace, nebo předpovědi dalšího dění, nebo k analýze myšlenkových procesů. V dalším jsou popsány některé komentáře a výzvy směrem k posluchačům, i reakce posluchačů na uvedené výzvy, případně moje komentáře.

1. Výzva po vstupu JM1: *Co vypovídá fragment o edukačním stylu učitelky?* Jitka je moderátorem diskuse, ale do matematické oblasti nezasahuje, výsledky píše na tabuli s monotónním komentářem, nijak nedává najevo, které řešení je to správné.

2. Výzva po vstupu JM2: *Víte, proč měla Lucka řešení 21? Jak se dopracovala k výsledku?* Dost často se stává, že při násobení dvou čísel dítě udělá mocninu jednoho z nich, řekne si 3 krát 5 je jako 5 krát 3. Když pak informace dohledává v násobilkové tabulce, udělá chybu a k číslu 3 dohledá číslo 3.

3. Výzva po vstupu Lucka3: Viděli jsme, jak to Lucce poměrně dlouho trvalo a paní učitelka jí nechala čas. *Považujete to za správné nebo za ztrátu času? Nebylo by efektivnější přepočítat další úlohy?* Ztracený čas by to byl tehdy, pokud by v akci byla pouze Lucka, případně i její sousedka, a ostatní děti by se nudily. Paní učitelka ale systematicky vede žáky k tomu, aby se učili jeden druhého chápat (empatie), a tak přitom, jak mluví Lucka, se ostatní snaží přijít na to, jak asi došla k číslu 21.

Kdyby netrpělivá učitelka na Lucku naléhala, nevnímala by tento tlak jenom ona, ale i zbytek třídy, a to by kazilo příznivou atmosféru práce. Netrpělivostí učitele není postižen pouze jeden žák, ale všichni žáci jsou tlačeni do urychleného počítání.

4. Výzva po vstupu Lukáš8: *Jak si máme vysvětlit, proč došlo k této záměně?* Pravděpodobně vytěsňováním, přičemž bylo číslo 12 vytěsněno číslem 7. Vytěsňování je situace, kdy jedno číslo vytěsní druhé. Většinou k tomu dochází u hyperaktivních dětí. Možností, jak k tomu došlo, je několik, například $15+(5+7)$, číslo 5 mu vypadlo a počítá už jen $15+7$. Další možností je, že v zadání je přítomno číslo 5, přičemž číslo 12 lze rozložit na 5 a 7, a poté je číslo 12 vytěsněno číslem 7.

5. Výzva po vstupu Lukáš8: *Jak u hyperaktivních dětí lze reedukovat jev vytěsňování?* Vytěsňování je zkratový proces, jehož reedukace vyžaduje zpomalení. Učitel může poradit dítěti, aby si svoje myšlenky nejdříve zapsalo. Tím se zpomalí jeho myšlenkový proces a zdůrazní se korekce. Žel ne vždy je dítě schopno tuto radu přijmout. V tom případě je nutné hledat sofistikovanější přístupy k utlumení potřeby překotné artikulace myšlenek.

6. Výzva po vstupu JM9, před zápisem Lukáše: *Jaký význam má uvádění různých způsobů zápisu téhož řešitelského procesu na tabuli?* Jestli se ta samá věc řekne mnoha způsoby, prohlubuje to vědomosti o dané situaci, nastává fáze hlubšího porozumění podstaty. Další význam je v rozvoji schopnosti empatie: u žáků velmi často vidíme situaci, že A něco řekne, učitel se zeptá třídy, zda je to správně, ale žák B místo odpovědi na otázku řekne své řešení. Klíčem úspěšné komunikace je schopnost formulace vlastních myšlenek a interpretace (porozumění) myšlenek spolužáka.

7. Výzva po vstupu JM9, před zápisem Lukáše: *Objeví se ještě jiný zápis? Jestli ano, jaký?* Účastníci dílny navrhli několik dalších zápisů, z nichž například $5+5+5+$ $+12=27$ se též objevil na tabuli. Zajímavé je, že zápis $3+3+3+3+3+12=27$, který navrhovalo více účastníků dílny, se na tabuli neobjevil. Objevil se ale Lukášův zápis, který lze považovat za nejzajímavější část celého videa.

8. Výzva po vstupu JM9: *Jak asi na chybu, které se Lukáš dopustil, bude reagovat paní učitelka? Najde se alespoň jeden žák, který tu chybu vidí?* K očekávané reakci učitelky se účastníci dílny nevyjadřovali, ale řekli, že by měla na danou chybu upozornit, když tak neučiní žádný žák. Účastníci v diskusi tipovali, že pokud vůbec někdo, tak maximálně dvě děti budou Lukášův zápis považovat za chybný. Všichni mají zkušenost, že podobné chyby se vyskytují houfně. Nicméně z videoukázky plyne, že negativní reakci na Lukášův zápis projevila většina třídy.

9. Výzva po vstupu JM9: *Bude někdo z žáků schopen přesně vysvětlit, kde chyba je a jak ji napravit?* I zde účastníci dílny projevili spíše skepsi. Byli pak překvapeni,

když si poslechli velmi přesný výklad dvou dívek o tom, proč je Lukášův zápis chybný. Navzdory pokusů o vysvětlení spolužákyň, Lukáš nadále považuje svůj zápis za správný.

10. Výzva po vstupu JM10: *Domníváte se, že Míša najde cestu, jak Lukáše o jeho chybě přesvědčit? Jestliže ano, jaká to bude cesta?* Vzhledem k tomu, že nikdo z přítomných nechtěl tuto velice složitou situaci nijak řešit, pustila jsem ze záznamů vstup Míša11 a dala výzvu.

11. Výzva po vstupu Míša11: *Rozumíte tomu, co chce dívka říct?* Výrok Míši bylo nutno přepsat a opakovaně číst než jsem pochopila, že Míša jasně vidí komunikační nedorozumění v Lukášově správném myšlenkovém procesu. K pochopení výkladu dívky je asi nutný závěrečný dialog.

12. Výzva po vstupu Lukáš 15: *Jak můžeme vysvětlování Míši popsat v jazyce myšlenkových procesů?* Lukáš svůj zápis vnímá procesuálně, jako jeden výpočtový tah, ale přesný konceptuální pohled to rozkládá do dvou kroků. Lukáš v tom vidí proces, ostatní to přetváří na koncept. Lukáš nechápe, proč má měnit proces, který se mu jeví přirozený, na nepřirozený koncept.

Co Lukáše přesvědčilo o jeho chybě?

Chyba, které se Lukáš dopustil, je velice frekventovaná. To konečně potvrdili i účastníci dílny svým vyjádřením, že podobnou chybu žáci jen zřídka vnímají jako chybu. Jestliže ve třídě J. Michnové na tuto chybu okamžitě reagovalo víc žáků, ukazuje to, že daná chyba je v této třídě dobře známá. To dokladuje i vysokou úroveň matematického myšlení, ke kterému učitelka své žáky dovedla.

Kdyby byl Lukáš místo znaků rovnosti použil šipky, byl by jeho záznam srozumitelný a přijatelný. Jakmile použil rovnítka, byl vztah u prvního rovnítka nepravdivý. Lukáš tuto skutečnost nevnímal jako chybu, neuvědomoval si, že správný řešitelský proces, který má v hlavě, je zapsán nekorektně. Proto nepřijal ani jeden ze tří pokusů svých spolužaček o vysvětlení své chyby. Nakonec Míša s vysvětlením uspěla. Nejprve trochu nesrozumitelně vysvětlila to, že procesuální představa Lukáše byla zapsána konceptem, který on stále vnímá jako proces. Pak, v tomto konceptu použila zpětné čtení: $15 + 12 =$ $= 5 + 5 + 5$, správně neřekla, že se jedná o chybu, ale podotkla, že to přeci není pravda, s čímž Lukáš souhlasil. Až v tomto okamžiku pochopil, proč je v jeho zápisu chyba.

Závěrečná epizoda videozáznamu ukazuje dva skvělé didaktické jevy. První je ten, který se odehrál přímo teď: Míša našla cestu, jak chybnou představu spolužáka založenou na neschopnosti odlišit proces od konceptu lze reedukovat. Druhý je ten, že v dané třídě k takovému jevu vůbec došlo. To je důsledek výjimečné edukační strategie Jitky

Michnové, která plně spoléhá na žáky nejen v oblasti matematických zákonitostí, ale i v oblasti odhalování chyb v myšlenkových procesech spolužáků.

Literatura

[1] Hejný M. a kol.(2009), *Matematika učebnice pro 3. ročník ZŠ,* nakladatelství Fraus, Plzeň.

Jak provádět důkazy v planimetrii?

Jaroslav Švrček[1]

V současné době jsme svědky očividné snahy většiny vyspělých zemí světa směřující k rozšíření a zkvalitnění práce s matematicky nadanými žáky *nižší věkové úrovně*. Dokladem toho je vznik poměrně velkého množství nových matematických soutěží (národních i mezinárodních), které jsou určeny žákům ve věku do 16 let. Patří mezi ně např. USAMO juniorů, Balkánská MO juniorů nebo např. zcela nová soutěž nazvaná Česko-polsko-slovenská matematická soutěž juniorů (CPS juniorů), jejíž první ročník se uskutečnil v květnu 2012 v Polsku. O tom, že důkazy v planimetrii jsou jedním z hlavních tematických celků v práci s matematickými talenty, svědčí mj. také skutečnost, že mezi použitými úlohami v těchto matematických soutěžích se pravidelně objevuje alespoň jedna planimetrická důkazová úloha.

Cílem workshopu bylo seznámit jeho účastníky s některými základními metodami a postupy při provádění *syntetických důkazů* v planimetrii. Dílna byla určena učitelům matematiky na SŠ a vyšších ročníků ZŠ. Mnohé z prezentovaných poznatků lze uplatnit také při různých činnostech s matematicky nadanými žáky, přitom obtížnost prezentovaných úloh a postupů vedoucích k jejich řešení byla zvolena tak, aby uvedené problémy mohly být uplatněny v práci s nadanými žáky nižší věkové kategorie (do 16 let).

Problematiku syntetických důkazů v planimetrii lze rozčlenit (podle stanoveného úkolu) do několika základních celků, jež tvoří důkazy

a) shodnosti dvojice úseček,
b) shodnosti dvojice úhlů,
c) rovnovnoběžnosti dvojice přímek,
d) kolmosti dvojice přímek,
e) kolinearity tří a více bodů v rovině,[2]

[1]Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc, `jaroslav.svrcek@upol.cz`

[2]Body leží na téže přímce.

f) konkurentnosti tří a více přímek v rovině,[3]
g) koncykličnosti čtyř a více bodů v rovině.[4]

V dílně byly prezentovány základní metody a prostředky, pomocí nichž lze řešit planimetrické důkazové úlohy s ohledem na vědomostní úroveň žáka ve věku 14–16 let. K tomuto účelu byly využity především některé aktuální úlohy ze zahraničních zdrojů, které odpovídají znalostem našich žáků této věkové kategorie.

Odpověď na otázku, která je uvedena v názvu článku, je přitom poměrně snadná. Na základě vlastních zkušeností z práce s mladšími žáky vykazujícími zájem a nadání na matematiku je patrné, že předvším použití široké škály těchto úloh (standardních i nedstandardních) spojené s procvičováním základních planimetrických prostředků (vlastnosti Thaletovy kružnice, vlastnosti střední příčky v trojúhelníku, věty o shodnosti trojúhelníků a především shodných zobrazení v rovině) vede u žáků k výrazně lepšímu zvládnutí uvedené problematiky a dále k osvojení si potřebných návyků při provádění důkazů v planimetrii.

Těžištěm workshopu byla prezentace všech zmíněných prostředků – jeho výsledky lze tak přímo uplatnit v práci v běžné výuce, ale také v práci s nadanými žáky. V příspěvku jsou uvedena úplná řešení tří zvolených úloh výše uvedeného typu. Další tři úlohy (4. – 6.), které byly v dílně využity, jsou opatřeny stručným návodem k jejich řešení.

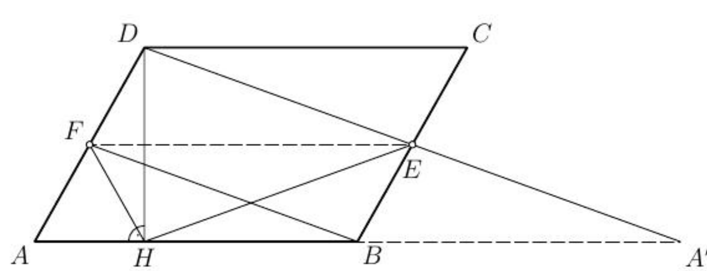
Nejprve uvedeme ukázku dvou odlišných řešení důkazové úlohy typu a).

Příklad 1 (36. Ruská MO, 2010, pro žáky 8. ročníku)

V rovnoběžníku $ABCD$ uvažujme výšku DH ke straně AB. Body E, F jsou středy jeho stran po řadě BC, AD. Dokažte, že platí $|BF| = |EH|$.

Řešení: Nechť H je vnitřním bodem strany AB uvažovaného rovnoběžníku $ABCD$, stejně jako na obr. 1. V pravoúhlém trojúhelníku ADH s přeponou AD platí $|AF| = |DF| = |HF|$. Vzhledem k tomu, že $|AF| = |BE|$, je $EFHB$ rovnoramenný lichoběžník se základnami EF a HB, jehož úhlopříčky BF a EH jsou shodné. Tím je důkaz uzavřen.

Obdobně lze postupovat i v případě, kdy H je vnějším bodem strany AB.



Obr. 1

[3]Přímky procházejí jedním společným bodem.

[4]Body leží na téže kružnici.

Jiné řešení: Nechť A' je bod souměrně sdružený s bodem A podle středu B (obr. 1). Vzhledem k tomu, že bod E leží na ose pásu vymezeného rovnoběžkami AB a CD a úsečka BF je střední příčkou v trojúhelníku $AA'D$, platí

$$|BF| = \tfrac{1}{2}|A'D| = |ED| = |EH|\,,$$

což dokazuje dané tvrzení.

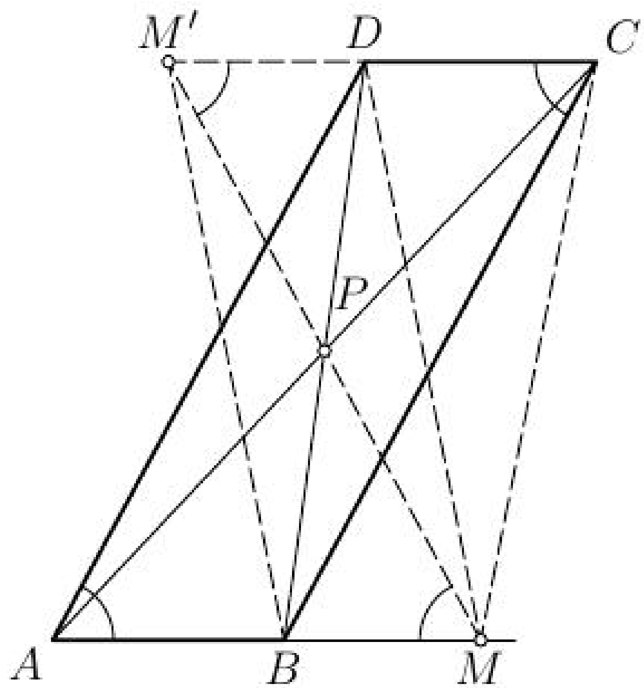
Poznámka. Povšimněme se, že ve druhém řešení sehrála při důkazu významnou roli (ve výuce) mnohdy nedostatečně akcentovaná vlastnost střední příčky v trojúhelníku.

Následující ukázka poslouží jako prezentace důkazové úlohy typu b).

Příklad 2 (37. Ruská MO, 2011, pro žáky 8. ročníku)

Úhlopříčky rovnoběžníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Na prodloužení strany AB za bodem B uvažujme takový bod M, pro který platí $|MC| = |MD|$. Dokažte, že $|\angle AMP| = |\angle MAD|$.

Řešení: Uvažujme bod M' souměrně sdružený s bodem M podle středu P, přičemž M' leží na přímce CD (obr. 2). Vzhledem k tomu, že $BMDM'$ je rovnoběžník, plyne odtud a ze zadání úlohy $|MC| = |MD| = |BM'|$.



Obr. 2

Čtyřúhelník $BMCM'$ je tudíž rovnoramenný lichoběžník. Z vlastností střídavých úhlů, ze shodnosti protilehlých úhlů v daném rovnoběžníku $ABCD$ a ze skutečnosti, že úhlopříčky v rovnoramenném lichoběžníku svírají s každou z jeho základen shodný úhel, plyne

$$|\angle AMP| = |\angle AMM'| = |\angle MM'C| = |\angle M'CB| =$$
$$= |\angle DCB| = |\angle BAD| = |\angle MAD|\,,$$

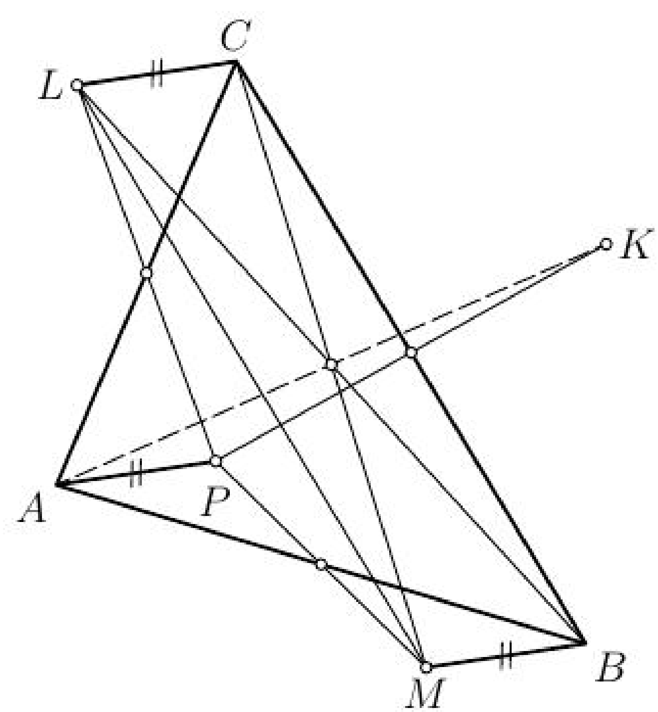
což jsme chtěli dokázat.

Další příklad je ukázkou planimetrického důkazu typu f).

Příklad 3 (Jaroslav Švrček – 1. CPS juniorů, 2012)

Nechť P je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Body K, L, M jsou souměrně sdružené s bodem P po řadě vzhledem ke středům stran BC, CA, AB. Dokažte, že přímky AK, BL, CM se protínají v jednom společném bodě.

Řešení: S ohledem na použité středové souměrnosti platí $|AP| = |BM| = |CL|$ a také $AP \parallel BM \parallel CL$ (obr. 3). Čtyřúhelník $MBCL$ je tedy rovnoběžník, v němž se jeho úhlopříčky CM a BL protínají v bodě, který je jejich středem (navzájem se půlí). Analogicky lze dokázat, že např. $AMKC$ je rovnoběžník, v němž se jeho úhlopříčky AK a CM protínají v bodě, který je jejich společným středem.



Obr. 3

Tím jsem dokázali, že všechny tři přímky AK, BL a CM procházejí jedním společným bodem (středem úseček AK, BL, CM).

Poznámka. K procvičení důkazů typu f) se zde nabízí možnost provedení precizních důkazů tvrzení o třech těžnicích v libovolném trojúhelníku, které se protínají v jednom společném bodě (těžišti), a také o jeho výškách (průsečík výšek – ortocentrum). Důkazy obou tvrzení jsou, jak známo, snadno zvládnutelné prostředky, kterými disponuje žák ve věku do 16 let.

Příklad 4 (36. Ruská MO, 2010, pro žáky 8. ročníku)

V trojúhelníku ABC je zvolen libovolný bod D na jeho těžnici BM, kterým prochází rovnoběžka p s AB. Bodem C veďme rovnoběžku q s BM, která protíná přímku p v bodě E. Dokažte, že $|BE| = |AD|$.

[Návod: Uvažujte průsečík F přímek AB, CE a ukažte, že trojúhelníky ABD a BFE jsou shodné.]

Příklad 5 (Koło Matematyczne Gimnazjalistów, 2010/2011)

Nechť C je vnitřním bodem úsečky AB. Dále nechť k_1, k_2 a k jsou kružnice po řadě o průměrech AC, BC a AB. Přímka p, která prochází bodem C, protíná tyto kružnice v bodech D, E, C, F a G (v tomto pořadí na přímce p). Dokažte, že platí $|DE| = |FG|$.

[Návod: Osa pásu vymezeného rovnoběžkami AE a BF je současně osou úsečky DG a tětivou kružnice k.]

Příklad 6 (36. Ruská MO, 2010, pro žáky 9. ročníku)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC uvažujme výšku CD k přeponě AB. Na jeho delší odvěsně AC existuje bod F a na úsečce AD existuje bod E tak, že platí $|CD| = |DE|$ a $FE \perp AB$. Dokažte, že $|\angle CBF| = 45°$.

[Návod: Uvažujte Thaletovu kružnici s průměrem BF (nutno rozlišit dva případy) a dále využijte vlastnosti obvodových úhlů.]

Poznámka

Příspěvek vznikl za podpory projektu OPVK – CZ.1.07/2.3.12/01.0017 – MATES (Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti matematiky).

ZAVEDENIE ČÍSELNÝCH OBOROV NA 2. STUPNI ZŠ

JÁN ŽABKA[1]

Úvod

Školská reforma, ktorá prebieha v súčasnosti na Slovensku, má mnoho negatívnych, ale aj pozitívnych stránok. Isté však je, že bola potrebná, nakoľko vedomosti žiakov na základných školách, ale aj študentov na stredných a vysokých školách sú menej kvalitné ako pred niekoľkými desaťročiami. Podobne je to aj so znalosťou pojmov, schopnosťou aplikovať naučené atď. Svedčia o tom viaceré medzinárodné prieskumy (napr. PISA), ako aj osobná skúsenosť mnohých pedagógov. Tento stav je o. i. dôsledkom toho, že od revolúcie v roku 1989 sa školstvo nedokázalo prispôsobiť rýchlo sa meniacej spoločnosti.

Na druhej strane majú žiaci a študenti mnohé kompetencie, v ktorých predčia aj rodičov, či niektorých učiteľov – napr. používanie IKT (počítače, dataprojektory, rôzne typy pamäťových médií, ...), vyhľadávanie na internete, schopnosť rýchlo a flexibilne reagovať a prispôsobovať sa aktuálnym podmienkam, atď.

Jednou zo zmien, ktoré môžu byť pozitívne, je aj príchod nových učebníc do škôl. V pracovnej dielni sme sa podrobnejšie pozreli na nové – reformné učebnice matematiky pre 2. stupeň ZŠ. Na ukážke zavedenia dvoch číselných oborov – desatinných čísel a kladných a záporných čísel – sme sa zoznámili s hlavnými myšlienkami týchto reformných učebníc, ktorých som spoluautorom.

Pri koncipovaní učebníc sme dôsledne dodržiavali teóriu poznávacieho procesu:

Poznávací proces by sa mal vždy začať **zmysluplnou motiváciou**. Podčiarkujem slovo zmysluplná, v mnohých učebniciach bola táto motivácia nahradená jedným – dvoma úlohami často bez konkrétneho prepojenia na skúsenosti a poznatkový svet žiakov. Motivácia v našom ponímaní má byť dlhodobá, pre žiakov zaujímavá, má vychádzať z ich skúseností a predstáv.

Po zmysluplnej motivácii (alebo súčasne s ňou) by sa žiaci pri objavovaní nového pojmu či poznatku mali stretnúť s dostatočným množstvom **separovaných modelov**.

Po absolvovaní týchto separovaných modelov prichádza **univerzálny model** – zovšeobecnenie už objavených alebo naučených poznatkov. Až na tomto mieste nasleduje **objav poznatku** – zavedieme presnú terminológiu, nakoľko je v tejto fáze pre žiakov prirodzená, dokonca väčšina z nich ju odvodí sama. Poslednými dvoma fázami sú

[1] 1. súkromné gymnázium a Súkromná základná škola pre žiakov so všeobecným intelektovým nadaním v Bratislave, zabco@1sg.sk

kryštalizácia poznatku a jeho **automatizácia**. V doterajších učebniciach sa teória poznávacieho procesu nie vždy dodržiavala. Najväčší dôraz bol kladený na vysvetlenie učiva (bez predchádzajúcej dostatočne dlhej motivácie a separovaných modelov) a hneď potom nasledovala automatizácia naučeného poznatku. To malo za následok, že žiaci ovládali učivo iba ako akýsi recept, ktorý mali natrénovaný a na konci tematického celku dokázali relatívne dobre napísať záverečný test. Keď sa však mali k učivu vrátiť alebo ho aplikovať, strácali pôdu pod nohami. Ak nemali riešiť nacvičenú úlohu, často neboli schopní vymyslieť žiadny spôsob riešenia, boli bezradní.

Aj na základe vyššie uvedeného učivo v učebnici (aj učivo o desatinných číslach alebo kladných a záporných číslach) vedome rozdeľujeme na viac častí. Sme totiž presvedčení, že žiaci si lepšie osvoja učivo, keď sa s ním stretnú viackrát. Prvým stretnutím býva motivácia, táto sa vyskytuje aj o niekoľko mesiacov alebo rokov skôr, ako má prísť k ovládaniu učiva.

Veľmi často sa tiež v učebnici vyjadrujeme prostredníctvom detí – postáv s rôznymi menami. Prezentujú riešenia a postupy – správne i nesprávne. Tieto riešenia sú ukážkami možných metód alebo upozorňujú na najčastejšie chyby. Za ideálne však považujeme, keď riešenia vymýšľajú samotní žiaci na hodine. V žiadnom prípade nie je potrebné ani žiaduce, aby žiaci ovládali, resp. boli skúšaní, či ovládajú všetky v učebnici uvedené metódy. Žiaci by si mali uvedomiť výhody aj nevýhody tej či onej metódy. Väčšina metód totiž nie je univerzálna a málokedy sa dá jednoznačne povedať, že jedna metóda je vždy lepšia ako druhá. Každý žiak by mal dostať možnosť prejsť ponúknutými spôsobmi a sám si vybrať tie, ktoré mu najviac vyhovujú. Nepovažujeme za vhodné, ak učiteľ žiakovi niektoré metódy neukáže a iné naopak prikáže, hoci v dobrom úmysle. Napriek dobrému úmyslu učiteľa málokedy ním vybraný spôsob vyhovuje všetkým žiakom. Vhodným výberom úloh sa dá výber žiaka do veľkej miery ovplyvniť. Navyše, žiaci by sa v škole mali dozvedieť aj to, že rôznym ľuďom vyhovujú rôzne metódy.

Pri vysvetľovaní učiva používame rôzne metódy. Najčastejšie uprednostňujeme objavovanie žiakmi v spoločnej diskusii. Učebnicu sme koncipovali tak, aby žiaci mohli čo najviac poznatkov objaviť. Snažíme sa vyhnúť postupu „výklad, vysvetlenie učiva a jeho následné precvičovanie“. Objavovanie žiakmi a ich bádanie považujeme za veľmi dôležitý prvok vyučovania. V mnohých kapitolách nastoľujeme témy do diskusie. Vedome sme zaradili aj diskusie, ktoré nemusia mať jednoznačný záver. Častejšia diskusia má motivovať žiakov k ďalšiemu bádaniu a objavovaniu.

Veľmi efektívnym spôsobom objavovania je aj práca v skupinách, preto ju na viacerých miestach odporúčame. Práca žiakov vo dvojiciach a skupinách rozvíja komunikačné spôsobilosti. Navyše, jazyku rovesníkov môžu niektorí žiaci rozumieť lepšie ako jazyku učiteľa. Uvítame, ak učiteľ využije prácu po skupinách alebo dvojiciach aj v iných častiach učebnice. Ideálnym riešením je využívať tímovú prácu najmä vo fáze objavovania poznatku.

Desatinné čísla

Učivo o desatinných číslach bolo v čase písania učebníc predpísané najneskôr do 6. ročníka ZŠ. S motiváciou sme začali už v učebnici pre 5. ročník ZŠ. Ako motiváciu sme volili rôzne bežné životné situácie, s ktorými sa môžu žiaci stretnúť. Napríklad v učebnici pre 5. ročník v kapitole „Počítame v eurách a v centoch" vedome používame aj zápis pomocou desatinného čísla, ale bez zavedenia tohto pojmu. Hlavným dôvodom je tu propedeutika desatinných čísel – na to sú úlohy o eurách a centoch veľmi vhodné. Navyše, uvedený zápis je najčastejšie využívaný zápis cien v obchode. V tejto časti nejde o vysvetlenie učiva o desatinných číslach. V texte sa preto nepoužívajú pojmy desatina, stotina, desatinná čiarka.

Samotné učivo o desatinných číslach v 6. ročníku začíname veľkou prípravnou kapitolou „Trochu iné čísla". V nej pracujeme s tromi modelmi desatinných čísel, s ktorými sa už žiaci stretli a nie sú im teda neznáme – teplota, eurá a centy, dĺžka.

Separovaný model teplota reprezentuje desatinné čísla s jedným desatinným miestom. Začíname žiakom najbližšou telesnou teplotou, horúčkou a pod. Potom plynule pokračujeme teplotou vonku a vnútri. Táto časť aj bez poznania desatinných čísel umožňuje zapisovať, čítať a porovnávať teploty, zvyšovať a znižovať teplotu. Po tomto prvom modeli v učebnici prezrádzame pomenovania „desatinné číslo", „desatinná čiarka", „desatinná časť", ...

Druhým separovaným modelom, ktorý je žiakom veľmi blízky, sú eurá a centy. Ide o model desatinných čísel s dvoma desatinnými miestami. Opäť sa venujeme zapisovaniu desatinných čísel, možným alternatívam čítania cien v obchode aj desatinných čísel s dvoma miestami, s ktorými sa žiaci môžu stretnúť. Pokračujeme sčítaním a odčítaním, na ktoré sme dlhodobo žiakov pripravovali od 5. ročníka ZŠ. Tento model umožňuje žiakom objaviť aj násobenie desiatimi a stomi (balenie výrobkov do balíkov po 10 alebo po 100 kusov).

Tretím separovaným modelom, ktorý nadväzuje aj na piatacké učivo o jednotkách dĺžky, je dĺžka úsečky. V nej sa dá prirodzeným spôsobom (bez toho, aby sme to žiakom prezrádzali) objaviť číselná os obsahujúca desatinné čísla. Na konci tejto kapitoly nasledujú súhrnné cvičenia, ktoré ešte raz pripomínajú objavené vzťahy.

Našou snahou v tejto časti bolo najmä poukázanie na to, že s desatinnými číslami sa stretneme často v bežnom živote a že pracovať s nimi je pomerne intuitívne. Modely slúžia aj na uľahčenie prechodu od desatinných čísel s jednotkami ($37{,}2^\circ$ C, $4{,}23$ EURO, $5{,}803$ m) k desatinným číslam bez jednotiek ($37{,}2$; $4{,}23$; $5{,}803$), ktorý často spôsobuje problémy niektorým žiakom. Dostatok modelov má týmto problémom zabrániť. Žiaci by po absolvovaní tejto časti mali mať skúsenosť, ako zapisovať, porovnávať, sčitovať a odčitovať a čiastočne násobiť desatinné čísla v konkrétnych situáciách. Tým by mali byť pripravení na zovšeobecnenie týchto úvah aj na viacciferné desatinné čísla, ktorým pokračujeme v kapitole „Desatinné čísla".

V tejto časti univerzálneho modelu sa nachádza aj historická vsuvka – zoznámenie sa so zápisom desatinných čísel v minulosti. Jej hlavným cieľom je práca podľa návodu – bez poznania štruktúry zápisu desatinných čísel prezentujeme niekoľko možností zápisu a ponúkame aktivity na zopakovanie tohto návodu. V kapitolách o písomnom sčítaní a odčítaní desatinných čísel za hlavnú myšlienku považujeme správne podpísanie desatinných čísel pod seba (aby boli desatinné čiarky pod sebou). V takom prípade je postup sčítania, resp. odčítania rovnaký ako pre prirodzené čísla.

Osobitnú pozornosť venujeme počítaniu s desatinnými číslami na kalkulačke. Pri práci s kalkulačkou (ale aj v banke a pod.) sa žiaci stretnú so zápisom desatinného čísla pomocou desatinnej bodky. Preto sme zaradili aj niekoľko úloh na precvičenie s takto zapísanými desatinnými číslami.

V kapitolách o násobení a delení desatinných čísel objavujeme učivo postupne, prostredníctvom postavičiek detí. Často sa pri tom odvolávame na modely z 1. časti učebnice. Pripomíname, že nie je našou snahou ani úlohou predmetu matematika, aby všetci žiaci ovládali všetky uvedené metódy výpočtov. Žiak má dostať možnosť vyskúšať si rôzne metódy, aby si mohol vybrať spôsob, ktorý mu najviac vyhovuje. Každý žiak sa teda „stotožní“ s inými postavičkami detí z učebnice.

Počítanie s desatinnými číslami zakončujeme výpočtom a vlastnosťami aritmetického priemeru, prácou s periodickými číslami a obsahom útvarov, pri ktorých je niektorý z ich rozmerov vyjadrený desatinným číslom.

Kladné a záporné čísla

Učivo o kladných a záporných číslach bolo v čase písania učebnice predpísané do učebníc pre 8. ročník ZŠ. Aj s týmto učivom sa žiaci stretávajú skôr – od 5. ročníka ZŠ – ako s dlhodobou propedeutikou. V učebniciach pre nižšie ročníky pracujeme s farebnými číslami. Ide o jeden z možných modelov záporných čísel, v ktorom čierne čísla reprezentujú kladné čísla (hotovosť) a červené čísla reprezentujú záporné čísla (dlh). V učebnici pre 5. ročník zavedieme len sčítanie farebných čísel ako prvý kontakt s týmto modelom. V 6. ročníku pridáme prácu s farebnými desatinnými číslami aj násobenie a delenie farebných čísel.

V učebnici pre 8. ročník ZŠ začíname učivo o kladných a záporných číslach motiváciou a separovanými modelmi. Ako prípravu postupne uvádzame tri modely týchto čísel.

V úvodnej kapitole *Počítame poschodia* používame kladné a záporné čísla ako adresy – označenia poschodí. Pomocou tohto modelu si žiaci pomaly a postupne budujú predstavu záporných čísel a ich usporiadania. Žiaci objavia aj prvé princípy počítania s kladnými a so zápornými celými číslami.

Po tomto úvode pokračujeme kapitolou *Nadmorská výška*, v ktorej sa uvedené objavy rozšíria na počítanie s viacifernými číslami.

Po nich nasledujú *Účtovné knihy* ,- počítanie s dlhmi a hotovosťou ako ďalší model kladných a záporných celých čísel. V tomto modeli nadviažeme aj na dlhodobú propedeutiku z nižších ročníkov.

V druhom stretnutí s kladnými a so zápornými číslami využijeme meranie teploty na zopakovanie doterajších poznatkov. Definujeme kladné a záporné čísla, opačné čísla a absolútnu hodnotu čísla. Povieme si o porovnávaní celých čísel aj o ich znázorňovaní na číselnej osi. Zhrnieme poznatky o sčitovaní a odčitovaní celých čísel. V tejto kapitole druhýkrát prepojíme s kladnými a so zápornými číslami farebné čísla – jeden z modelov celých čísel. V niektorých úlohách na dlh a hotovosť vedome vynechávame znak EURO, aby sme u žiakov budovali štruktúru záporných čísel bez väzby na konkrétny model.

Iné – dynamické – vysvetlenie sčítania a odčítania kladných a záporných čísel nájdu žiaci s hlbším záujmom napríklad na dvojstrane *Hráme sa s robotom Samom*. Tento text ponúkame ako ďalšiu z alternatív zavedenia sčítania a odčítania celých čísel.

Okrem sčítania a odčítania sa v tejto časti učebnice venujeme aj násobeniu celých čísel. Zdôvodnenie, prípadne objavenie, PREČO je súčin dvoch záporných čísel kladné číslo, považujeme za pomerne náročné, preto ho uvádzame ako učivo pre záujemcov.

V kapitole *Racionálne čísla* dokončíme prácu s kladnými a so zápornými číslami. Od násobenia celých čísel sa dostaneme k ich deleniu, ktoré prirodzene súvisí so zápornými zlomkami. Poznatky o číselných operáciách s desatinnými číslami postupne rozšírime na prácu s kladnými a so zápornými zlomkami. Podrobne sa venujeme výpočtom so zápornými číslami na kalkulačke. Vždy, keď je to možné a vhodné, usilujeme sa zaradiť aj úlohy z bežného života. Záver kapitoly o racionálnych číslach tvoria súhrnné cvičenia, v ktorých si žiaci opäť pripomenú najdôležitejšie myšlienkové postupy.

Spoločné princípy

V dvoch uvedených ukážkach je možné vidieť rovnaké základné princípy – snaha o zmysluplnú motiváciu, dostatočné množstvo separovaných modelov, v ktorých žiaci samostatne alebo v skupinách bádajú a objavujú, prirodzený vznik univerzálneho modelu, následná kryštalizácia a automatizácia poznatkov a ich využívanie v ďalších úlohách najlepšie z reálneho života.

Tieto myšlienky sme používali aj pri zavádzaní ďalších číselných oborov, ale nielen pri nich. Na základe našich skúseností práve tento spôsob osvojenia poznatkov je pre žiakov prirodzený a zabezpečuje lepšie a hlbšie pochopenia učiva. O správnosti nášho názoru nás presviedčajú aj reakcie učiteľov, ktorí učebnice používajú, ako napríklad dve po sebe idúce reakcie z blogu od tej istej autorky:

> 16. 3. 2011: „Hoci mi nové učebnice občas dvíhajú adrenalín, páči sa mi, že naozaj neponúkajú žiadne hotové poučky, ale nenásilným a tvorivým spôsobom privádzajú žiakov k novým poznatkom.“

> 11. 10. 2011: „Z nových učebníc už tiež nejakú tú chvíľu učím a čím ďalej tým väčšmi chápem, prečo sú pripravené tak, ako sú pripravené. Žiaci, ktorí sa nimi prelúskali, majú poznatky pevne zakorenené a vžité, úlohy sú primerané a skutočne zo života. Priznávam, že som z nich bola tiež spočiatku sklamaná, ale to len preto, že som sama musela zmeniť zaužívané metódy a formy práce – ale o tom je dnešná doba!“

Veríme, že takýchto pozitívnych odoziev bude pribúdať a naše učebnice prispejú k zmene vyučovania matematiky od egyptskej – receptovej ku gréckej – kauzálnej.

Literatúra

[1] Hejný a kol., *Teória vyučovania matematiky*, SPN, 1990, ISBN: 80-08-01344-3

[2] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 1. časť(učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2009, ISBN: 978-80-7158-977-8

[3] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 2. časť(učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN: 978-80-7158-989-1

[4] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2009, ISBN: 978-80-7158-978-5

[5] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN: 978-80-7158-990-7

[6] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN: 978-80-8120-051-9

[7] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2011, ISBN: 978-80-8120-050-2

[8] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2011, ISBN: 978-80-8120-107-3

[9] Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť (učebnica)*, Orbis Pictus Istropolitana, 2012, ISBN: 978-80-8120-125-7

IKT AKO POMÔCKA PRI RIEŠENÍ ROZBORU KONŠTRUKČNEJ ÚLOHY

EVA BARCÍKOVÁ[1]

Riešenie konštrukčných úloh a pochopenie geometrických vzťahov je obzvlášť náročné na priestorovú predstavivosť a logické myslenie. Statické konštrukcie na tabuli a rigidný prístup k spôsobu vyučovania, ktorého podstata je priame transmisívne podávanie vedomostí žiakom, vyučovanie geometrie neuľahčuje. Pritom práve geometria dáva priestor zavádzaniu nových poznatkov s využitím konštruktivistického prístupu k vyučovaniu.

Najväčší dôraz pri riešení konštrukčných úloh je kladený na rozbor úlohy. Pri rozbore konštrukcie skúmame danú situáciu a hľadáme vzájomné vzťahy. Pre žiakov táto časť úlohy pripomína detektívku, v ktorej odhaľujeme jednotlivé súvislosti. Vidieť v náčrte tieto súvislosti však môže byť pre nich veľmi zložité. Vyžaduje to veľkú dávku priestorovej predstavivosti a samozrejme dobrú úroveň potrebných vedomostí. Zvýšené nároky sa samozrejme kladú aj na logické myslenie a schopnosť abstrakcie. Od žiaka sa vyžaduje aby na základe získaných vedomostí dokázal dedukciou a analýzou nájsť riešenie.

Rozbor úlohy je teda najťažšou časťou riešenia konštrukčnej úlohy. V predloženom príspevku sme sa zamerali na uľahčenie vizualizácie použitím dynamických geometrických softvérov. Výhodu použitia softvéru vidíme hlavne pri objavnom vyučovaní a pri vedení žiakov k samostatnému riešeniu rozboru úlohy. Pritom samotnú konštrukciu môžu žiaci realizovať aj ručne v zošite, čím rozvíjajú ďalšie zručnosti. Využitie IKT pri rozbore konštrukčnej úlohy ukážeme na niekoľkých ukážkach. Zamerali sme sa na konštrukčné úlohy riešené metódou zobrazení a metódou množín bodov danej vlastnosti. Pri používaní IKT netreba zabúdať, že cieľom výučby nie je ukázať nástroj, ale naučiť hľadať riešenia problému a krásu geometrie.

Rozbor úlohy

Pri rozbore konštrukčnej úlohy vychádzame z predpokladu riešiteľnosti úlohy. V načrtnutom útvare si vyznačíme dané a hľadané prvky a systematicky hľadáme vzťahy medzi nimi. Následne rozkladáme úlohu na jednoduchšie, alebo už predtým riešené konštrukcie. V rozbore predpokladáme, že hľadaný útvar máme zostrojený. Pomocou IKT (napríklad GeoGebra) „načrtneme“ danú situáciu pričom postupujeme „od konca“. V tejto fáze so

[1]Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, eva.barcikova@ukf.sk

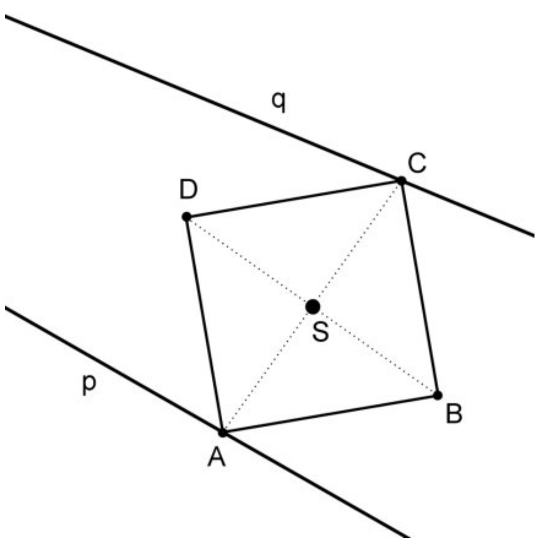
žiakmi hľadáme vzájomné vzťahy medzi jednotlivými prvkami. Žiaci vyslovujú hypotézy a preverujú ich pomocou softvéru. Využívajú nástroje softvéru na meranie dĺžky, veľkosti uhla, nástroj „zhodné zobrazenie“. Dynamickosť softvéru uľahčuje vizualizáciu a napomáha žiakom nájsť riešenie vlastným experimentovaním. Pri úlohách riešených metódou zhodných zobrazení určujú a overujú, ktoré body útvaru (ktorý máme zostrojiť) sú obraz a vzor a v akom zhodnom zobrazení. Na základe zachovania incidencie pri zhodnom zobrazení určujú polohu obrazu vzhľadom na ostatné útvary.

Úloha 1

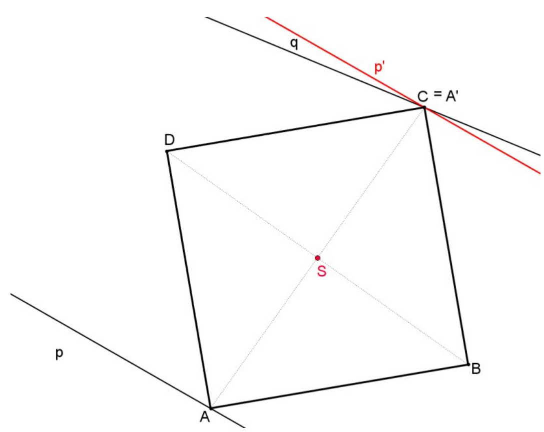
Dané sú dve rôznobežné priamky p, q a bod S, ktorý neleží na priamkach. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby bod A patril priamke p a bod C priamke q.

Riešenie: Aby sme štvorec vedeli zostrojiť, potrebujem nájsť body A a C. Keďže máme celú situáciu pomocou softvéru zostrojenú vyzývame žiakov aby uvažovali, čo platí pre body A, C a daný bod S. Pozastavíme sa pri zistení, že úsečka AC je uhlopriečka štvorca a bod S je stred úsečky AC. Body A a C sú obraz a vzor v stredovej súmernosti so stredom S.

Toto tvrdenie overíme zostrojením obrazu bodu A v stredovej súmernosti so stredom S. Obrazom je bod A totožný s bodom C. V ďalšom kroku uvažujeme nad incidenciou bodov A a C s priamkami p, q. Keďže bod A leží na priamke p, bude jeho obraz ležať na priamke p, ktorá je obrazom priamky p v rovnakom zhodnom zobrazení. Zostrojíme teda obraz p priamky p. Bod C leží na priamke q a keďže je totožný s bodom A, je priesečníkom priamok q a p.



Obr. 1: Zadanie úlohy 1



Obr. 2: Riešenie úlohy 1

Analogickým prístupom riešime Úlohu 2 zameranú na otočenie okolo bodu o daný uhol. V Úlohe 3 sa zameriavame na riešenie metódou množín bodov danej vlastnosti.

Rovnako v tejto úlohe vedieme žiakov kladením otázok k experimentovaniu v prostredí softvéru, aby vlastnou aktivitou dospeli k nájdeniu potrebných množín bodov.

Záver

Cieľom nášho príspevku je priblíženie jedného z možných prístupov riešenia rozboru konštrukčnej úlohy. Zamerali sme sa na zvýšenie aktivity žiakov použitím softvéru GeoGebra ako prostriedku experimentovania a overovania vyslovených hypotéz. Hlavný prínos tohto prístupu k vyučovaniu vidíme vo zvýšení vizualizácie, avšak dynamický geometrický softvér je použitý aj ako aktivizačný a motivačný prostriedok.

Poznámka: Príspevok je publikovaný v rámci projektu KEGA 038UKF-4/2011.

Literatúra

[1] Rumanová, L., Vallo, D.: *Geometria – vybrané kapitoly : zhodné a podobné zobrazenia.* Nitra : UKF, 2009. 108 s. ISBN 978-80-8094-567-1.

[2] Gabriela Pavlovičová, Lucia Rumanová: Geometrický softvér vo vyučovaní matematiky. In: *Nové trendy v matematickom inžinierskom vzdelávaní 2008 : zborník vedeckých prác z medzinárodného vedeckého seminára*. Nitra : SPU, 2008. S. 115–120. ISBN 978-80-552-0038-5.

[3] Vidermanová, K., Melušová, J.: IKT vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách. In: *Užití počítačů ve výuce matematiky: sborník příspěvků 4. konference, konané 5. – 7. listopadu 2009*, České Budějovice. Jihočeská univerzita České Budějovice 2009, s. 134–158. ISBN 978-80-7394-186-4.

Skúsenosti s prostredím Rodina

Jozef Benyak[1]

Už niekoľko rokov sa snažia odborníci v oblasti didaktiky informatiky preklenúť tradičný prístup k vyučovaniu matematiky a nahradiť ho novými, vhodnejšími prístupmi s efektívnejšími metódami a formami vyučovania matematiky. Pre študentov Učiteľstva pre primárne vzdelávanie je prístup k vyučovaniu matematiky, podľa Hejného, prevratný. Na školách totiž stále prevláda v matematike výklad učiva a precvičovanie bez hlbšieho

[1] benyak.jozef@gmail.com

porozumenia a uplatnenia poznatkov a Hejný ponúka matematiku, ktorá je pre žiakov príťažlivá a zábavná, ktorá nie je založená na memorovaní, ale na porozumení a objavnej činnosti žiakov.

Štruktúra sa vo vedomí žiakov predškolského a mladšieho školského veku javí ako organizácia súborov blízkych pojmov (objektov, javov, situácií, procesov). Kostrou tejto štruktúry je pritom množina kauzálnych vzťahov, ktorými sú pojmy (objekty, ...) prepojené. Budovanie týchto štruktúr a poznávacie procesy všeobecne prebiehajú podľa Hejného a Kuřinu (2001) najprv pochopením niekoľkých konkrétnych príkladov, všímaním si ich spoločných čŕt, a tak dochádza k zovšeobecňovaniu a abstraktnejším poznatkom.

Rodina je prvou zložitejšou štruktúrou, s ktorou sa dieťa zoznamuje. Už od dvoch rokov začína poznávať vzťahy v rodine . Prostredie rodina, ako ho autor nazýva, tvorí akýsi nie nevyhnutný predpoklad pre ďalšie budovanie poznatkov a poznatkových štruktúr matematiky, ako aj iných štruktúr. Budovanie štruktúry rodina prebieha v štyroch etapách. Objekty štruktúry sú: *matka, otec, brat, sestra, babička, dedo, teta, ujo, bratranec*, a pod.

1. Etapa: dieťa poznáva objekty štruktúry. Dieťa pomenováva členov rodiny, mama = Mama, s veľkým M. Všeobecným názvom pomenováva dieťa konkrétneho člena rodiny, vlastným podstatným menom.

2. Etapa: dieťa poznáva, že mama je všeobecné pomenovanie. Uvedomí si, že aj iné deti, kamaráti majú svoju mamu.

3. Etapa: dieťa si uvedomí vzťah, mama = matka aspoň jedného dieťaťa. Uvedomí si, že objekty štruktúry tvoria relácie.

4. Etapa: dieťa rozvíja svoje doterajšie poznatky o štruktúre rodiny a poznáva ďalších členov širšej rodiny, ako sú neter, synovec, svokra, svokor, a pod.

Rodokmeň sa bezprostredne týka osobných skúseností žiakov (rozvod rodičov, úmrtie rodiča alebo súrodenca, spory v rodine a pod.), preto by učiteľ mal citlivo zvážiť nakoľko bude s rodokmeňom žiakov pracovať, aby žiaci neboli traumatizovaní. Je lepšie preto pracovať s rodokmeňom vymysleným. Pre žiakov na Slovensku používajúcich učebnice matematiky autorov Hejného a kol. postačuje rodokmeň uvádzaný v 3. diely učebníc matematiky pre 2. ročník, nakoľko sa s priezviskom Klos, alebo Brody málokto stretne.

Ukážky príkladov

Žiaci začínajú pracovať s prostredím rodina v matematike v 2. ročníku. Najprv sa žiaci zoznámia s rodokmeňom rodiny Klosových, s ktorým neskôr budú pracovať. V úlohách v tomto prostredí sa vyskytujú dva druhy otázok. Aritmetické, ktoré sú zamerané hlavne na výpočet veku (v 3. ročníku aj dátumu narodenia) a logické, ktoré sú zamerané na rozvíjanie vzťahov, relácii v štruktúre. Práve význam logických úloh je často podhodnocovaný. Logické úlohy sú pritom veľmi dôležité pre žiakov na rozvoj abstraktného a logického myslenia.

Okrem významu týchto úloh pre logické myslenie, je prostredie rodina vhodné tiež na uplatnenie medzipredmetových vzťahov, ktoré podporujú u žiakov myslenie v súvislostiach. Úlohy o rodine, môžu učitelia využiť aj na spoznávanie sa žiakov v kolektíve, čím môžu rozvíjať pozitívnu klímu v triede.

Prvá úloha v prostredí rodina je zameraná na výpočet veku členov rodiny. Žiaci majú možnosť pracovať s textom[2], ktorý opisuje rodinu Klosových. Text nie je náročný, ale je pomerne rozsiahly, najmä pre žiakov 2. ročníka. Je vhodné ho využiť aj na rozvíjanie porozumenia textu a čitateľskej gramotnosti.

Otázky o veku Anny a Barbory sú pomerne jednoduché.

Odpoveď na otázku o veku Cecílie si vyžaduje logicky odvodiť, ktoré informácie sú pre žiakov potrebné. Úlohou učiteľa pri tejto otázke je priviesť žiakov k tomu, aby sami prišli na to, ktoré informácie a ako použiť pri výpočte. Žiaci majú prísť na to, že vek Cecílie zistia tak, že k údaju o Cecíliinom veku, kedy sa jej narodila dcéra, pripočítajú vek jej dcéry Hanky.

Ďalšia otázka sa týka veku Cyrila, ktorý spolu s vekom Cecílie majú toľko rokov, ako dedo Blažej. Žiaci vedia z textu koľko rokov má dedo Blažej. Vek Cecílie si vypočítali v predošlej otázke a tak vedia žiaci pohotovo zistiť aj vek Cyrila.

Posledná otázka v tejto úlohe stavia žiakov opäť pred otázku, ako využiť informácie, ktoré majú dané. Poznajú vek všetkých detí z rodokmeňa, ale nepoznajú vek detí v čase, keď bude mať Cyril 35 rokov. Vidíme, že úloha rozvíja u žiakov nepriamo aj myšlienku $n+1$.

Ďalšie úlohy v 2. ročníku sú zamerané najmä na rozvíjanie vzťahov a relácii v štruktúre rodiny. Príklady úloh:

Otec Cyrilovej manželky je ____________ .
Dcera syna Anny je ____________ .
Syn Blažejovy dcery je ____________ .

Zaujímavá je úloha, v ktorej majú žiaci za úlohu rozhodnúť o správnosti výroku:

Adamova vnučka je Cyrilova dcera.	Ano / ne
Sestra bratra Ivanova bratra je Hanka.	Ano / ne
Ivan je syn Cecílie.	Ano / ne
Cecíliin syn je Ivan.	Ano / ne

Úloha je tiež prípravou pre pochopenie výrokovej logiky, ktorej sa žiaci venujú až vo vyšších ročníkoch. Pri prvých troch výrokoch nie je ťažké rozhodnúť o pravdivosti výroku.

[2] „Hance je 10 let. Má dva bratry: Ivana (8 let) a Jana [na obrázku Vít] (5 let). Dědovi Adamovi je 67 let a dědovi Blažejovi 65 let. Jejím rodičům je dohromady tolik let jako dědovi Blažejovi. Obě Ivanovy babičky jsou stejně staré a za dva roky oslaví šedesátiny. Cecílie se vdávala jako 20letá. Když jí bylo 21 let, narodila se jí dcerka.“

Zaujímavý je štvrtý výrok, ktorý majú žiaci určiť či ide o pravdivý alebo nepravdivý výrok. „Cecíliin syn je Ivan“, je len čiastočne pravdivý výrok, s čím by sme mohli ako odpoveďou súhlasiť, nakoľko však máme na výber len jednu odpoveď áno alebo nie, správne je zakrúžkovať nie. Ak totiž vychádzame z rodokmeňa v učebnici, tak Cecíliin syn môže byť aj Vít. Žiakom môžeme vysvetliť, že ak by Cecília povedala, že jej syn je Ivan, Vítovi by to určite nebolo príjemné. Vít by mohol mať pocit, že ho za svojho syna nepovažuje. Uvedené vysvetlenie, viac citové ako logické, môže žiakom pomôcť pochopiť prečo je štvrtý výrok nepravdivý.

Uvádzané príklady nám aspoň čiastočne ukazujú, ako úlohy, ktoré vychádzajú z konkrétnych skúseností žiakov a bežného života, rozvíjajú logiku (a mnoho ďalších schopností) žiakov. Prostredie rodina je teda podľa nášho názoru veľmi zaujímavým a dobrým prostriedkom k budovaniu matematických kompetencií.

Literatúra

[1] Hejný, Milan a Kuřina, František. 2001. *Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha : Portál, s.r.o., 2001. ISBN 80-7178-581-4.

[2] Hejný, Milan. 2002. *Izomorfizmus jako strukturotvorný nástroj.* [online] [s.l.] : EXAM, Jednota slovenských matematikov a fyzikov, 2002. Dostupné na: `http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2002/zbornik2002.pdf`. ISBN 80-968815-1-5.

[3] Hejný, Milan, Jirotková, Darina a Slezáková-Kratochvílová, Jana. 2008. *Matematika 2.* Plzeň : Nakladatelství Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-770-0.

[4] Hejný, Milan, Jirotková, Darina a Slezáková-Kratochvílová, Jana. 2008. *Matematika 2 : příručka pro učitele pro 2. ročník základní školy*. Plzeň : Nakladatelství Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-771-7.

TVORBA SLOVNÍCH ÚLOH – ŽÁKOVSKÉ INTERPRETACE OBRÁZKU

JIŘÍ BUREŠ[1]

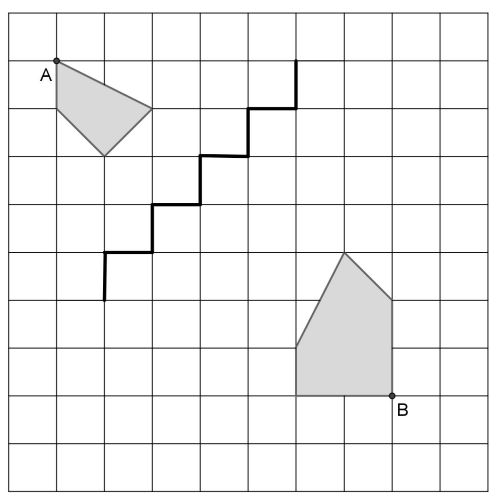
Úvod – popis experimentu

Vlastní tvorba slovních úloh nabízí žákům alternativní pohled na slovní úlohy, umožňuje jim lépe se seznámit s jejich strukturou a získat nové přístupy při řešení slovních úloh. Tato skutečnost je jedním z důvodů, proč se v našem výzkumu zabýváme souvislostí matematické kultury žáků při řešení slovních úloh a jejich způsoby tvorby slovních úloh. V tomto článku se budeme zabývat analýzou experimentu, během něhož vytvářeli žáci úlohy na základě dvou různých didaktických situací - situace zadaná pomocí obrázku a situace zadaná pomocí textu popisujícího reálnou situaci. Konkrétně se zaměříme na situaci zadanou pomocí obrázku a na analýzu vytvořených úloh z hlediska kontextu, matematického modelu a faktorů, které žáci používali pro změnu obtížnosti úloh.

Experiment jsme realizovali ve 2. ročníku Gymnázia Jana Nerudy v Praze (šestileté gymnázium, ročník odpovídá poslednímu ročníku základní školy) a zúčastnilo se jej celkem 60 žáků 3 tříd. Pro analýzu úloh jsme vybrali pouze 50 žáků, jednalo se o žáky, kteří vytvořili všechny požadované úlohy. Situace byla zadána následujícím způsobem:

Na základě daného obrázku vytvořte pro vaše spolužáky:

a) 1 úlohu, kterou považujete za snadnou   b) 1 úlohu, kterou považujete za obtížnou



Obr. 1: Zadání situace

[1]Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, buresjirik@seznam.cz

Kontext vytvořených úloh

Obrázek byl úmyslně vybrán takovým způsobem, aby neměl žádný reálný kontext, s cílem nechat žákům prostor pro případnou vlastní interpretaci obrázku. Většina žáků nedodala vytvořeným úlohám reálný kontext a zůstala u čistě matematické úlohy, jak je vidět z následující tabulky:

Kontext	**Matematický**	**Reálný**	**Jiný**
Třída 1	27	2	1
Třída 2	30	6	2
Třída 3	23	8	1
Celkem	**80**	**16**	**4**

Příklad slovní úlohy bez reálného kontextu: *Vypočítej rozdíl obsahů útvaru B a A, jestliže délka strany čtverce bude mít 1 cm.*

Příklad slovní úlohy s reálným kontextem: *Pan A a pan B mají velké pozemky. Pan A ale rád zahradničí, a proto si nechal pro zahradu hodně místa. Pan B je zase architektem, a proto si postavil velké a honosné sídlo. O kolik větší je zahrada pana A než pana B? O kolik je větší pozemek pana A než dům pana B? Kdyby byl dům pana A dvojnásobný, vyrovnal by se domu pana B?*

Příklad slovní úlohy s jiným kontextem: *Z vrcholu C do vrcholu D vede úsečka, která znázorňuje zrcadlo. Kolik hran čtverečků je zvýrazněných poté, co symetricky přehodíme každý „útvar“ na druhou stranu úsečky, pouze z trojúhelníku CDE do trojúhelníku FDC ponechají i originál* (pozn. body C, D, E, F byly doplněny do zadání autorem úlohy).

Změna obtížnosti úlohy

Analýza změny obtížnosti úlohy spočívala v porovnání snadné a obtížné úlohy z hlediska způsobu, jakým jejich autor změnil úlohu ze snadné na obtížnou. Jak je zřejmé z následující tabulky, ve většině případů měla obtížná úloha jiný matematický model než snadná úloha, pouze v několika případech byl použit stejný matematický model zasazený do jiné situace:

Obtížnost úlohy	Změna matematického modelu	Stejný matematický model
Třída 1	10	5
Třída 2	18	2
Třída 3	16	0
Celkem	**44**	**7**

Příklad dvojice slovních úloh se stejným matematickým modelem:

a) Vypočítejte obsah celého čtverce. Vypočítejte i obvod čtverce. 1 čtvereček má délku strany 1 cm.

b) Vypočítejte obsah obrazců A a B. Vypočítejte obvod obou obrazců a kolik zabírají plošně ve čtverci. 1 čtvereček má délku strany 1 cm.

Příklad dvojice slovních úloh s různým matematickým modelem:

a) Vypočítejte obsah obou útvarů a zakreslete útvar, jehož obsah je roven součtu obsahů těchto dvou útvarů na druhou. (Předpokládejme, že jeden čtvereček má obsah 1 cm^2.)

b) Vypočítejte obvod obou útvarů a zakreslete útvar, jehož obvod je roven 1/2 součtu obvodů těchto dvou útvarů.

Matematický model úlohy

Matematickým modelem úlohy budeme rozumět souhrn matematických operací vedoucích k výsledku očekávanému autorem úlohy. V rámci této situace jsme rozlišili 7 základních matematických modelů: obvod, obsah, objem, délka, počítání s procenty (procentová část i počet procent), úloha o pohybu, jiný matematický model. Rozdělení vytvořených slovních úloh podle matematického modelu ukazuje následující tabulka:

Model	**Obsah**		**Obvod**		**Délka**		**Procenta**		**Pohyb**		**Objem**		**Jiný**	
Úloha	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
Třída 1	8	8	4	4	3	3	0	5	0	2	0	0	3	2
Třída 2	12	8	6	7	5	1	1	3	0	0	0	4	3	5
Třída 3	9	8	5	3	4	1	0	1	0	1	1	1	3	8
Součet	**29**	**24**	**15**	**14**	**12**	**5**	**1**	**8**	**0**	**3**	**1**	**5**	**9**	**15**

V některých úlohách se vyskytovalo víc matematických modelů, proto jsou tyto úlohy v tabulce zařazeny do několika kategorií. Uvedeme příklady pouze z některých kategorií:

Příklad slovní úlohy na obsah útvaru: *Spočítejte obsah čtverce, jestliže strana malého čtverce je 36,9 mm.*

Příklad slovní úlohy na délku/vzdálenost: *Jak dlouhá je nejkratší cesta z bodu A do bodu B, jestliže je potřeba obejít plot a nesmíme chodit soukromými pozemky (obrazec A a B) Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa.*

Příklad slovní úlohy s jiným matematickým modelem: *Kolik je v obrázku čtverců?*

Závěr

V rámci experimentu vytvořili žáci rozmanité slovní úlohy, mezi nimiž převažovaly úlohy s matematickým kontextem bez reálného přesahu. K dodání reálného kontextu je nemotivovalo ani zadání situace, ani obvyklý způsob práce se slovními úlohami, který vede žáky spíš opačným směrem – od reálného kontextu k popisu situace prostřednictvím matematiky. Experiment ukázal mimo jiné vhodnost častějšího zařazení takových aktivit do výuky matematiky, které propojují základní geometrické postupy probírané v hodinách matematiky s reálným světem. Matematický model byl také ve většině úloh ovlivněn způsobem zadání situace – jednalo se převážně o geometrické úlohy. Žáci většinou nevyužili volnost danou zadáním situace, jen několik z nich vytvořilo úlohy s jiným než geometrickým modelem obvyklým na základní škole (obvod, obsah, případně jejich aplikace pro výpočet délky). Oproti našemu očekávání nebyla ve většině případů obtížná úloha variantou snadné úlohy, ale jednalo se o úlohu založenou na jiném matematickém modelu – jako obtížné viděli žáci počítání obvodu nepravidelných útvarů (s využitím Pythagorovy věty) a počítání s procenty. Reálná obtížnost jednotlivých úloh pro žáky daného věku bude předmětem dalšího zkoumání, z vytvořených dvojic je ale patrné, že žáci se zaměřili spíš na tvorbu obtížnější úlohy vzhledem ke snadné úloze než úlohy obtížné pro žáky daného věku.

Poznámka: Tento výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (číslo projektu 310 311) a Grantovou agenturou České republiky (číslo projektu P407/12/1939).

Literatura

[1] BUREŠ, Jiří. Žákovská tvorba úloh na základě reálné situace (analýza variability vytvořených úloh). In LENGYELFALUSY, Tomáš, PITOŇÁKOVÁ, Slávka, HORVÁTH, Peter, (eds.) *Cielom vyučovania matematiky je šťastný človek*. Žilina: Žilinská univerzita, s. 245–250. ISBN 978-80-554-0393-9.

[2] BUREŠ, Jiří, NOVOTNÁ, Jarmila. Žákovská tvorba úloh na základě reálné situace. In VONDROVÁ Naďa (ed.) *Sborník z konference Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let*. Litomyšl (v tisku).

PROJEKT COMPASS INOVATÍVNY PRÍSTUP K VYUČOVANIU MATEMATIKY A PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOV

SOŇA FÁNDLYOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ, JANKA MELUŠOVÁ[1]

Cieľom projektu COMPASS je uviesť do škôl zaujímavejšie vyučovanie matematiky a prírodovedných predmetov. Malo by to byť vyučovanie, ktoré využíva medzipredmetové vzťahy a svojím obsahom sa zaoberá aktuálnou problematikou reálneho života spoločnosti a tiež jednotlivca[1].

Úvod

Projekt Compass bol riešený v rokoch 2009–2011 spolu s ďalšími partnermi projektu zo siedmych európskych univerzít. Materiály, ktoré sa počas tejto doby pripravili, sú voľne prístupné na internetovej stránke projektu: `www.compass-project.eu`

Vytvorené vyučovacie celky využívajú objavné a problémové vyučovanie pomocou úloh, v ktorých sa žiaci oboznámia s dôležitými pojmami prepájajúcimi matematiku a prírodovedné predmety (obr. 1).

Obr. 1: Materiály z internetovej stránky projektu

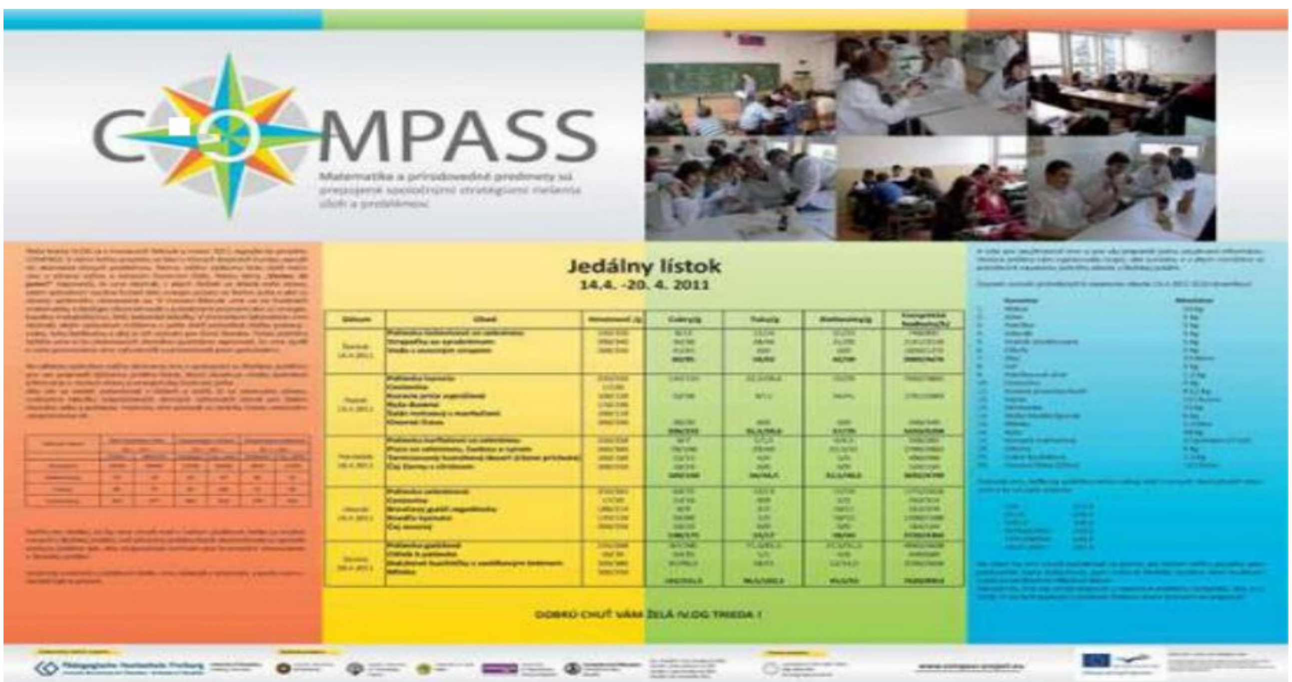
[1]Soňa Fándlyová, SPU, Nitra, sona.fandlyova@uniag.sk, sceretkova@ukf.sk, jmelusova@ukf.sk

Ako ich používať

V úvode každého materiálu je stručne rozpracovaná daná problematika s požadovanými výstupmi pre študentov. Okrem úplného znenia jednotlivých úloh si na stránke môžete stiahnuť aj pracovné listy pre študentov. S každým vyučovacím celkom sa môže na vyučovacích hodinách rôzne pracovať. Vo väčšine z nich je pripravené aj využitie IKT.

Materiál „Jedlo“ – ukážka

V tejto aktivite sa žiaci zaoberajú základnými otázkami týkajúcimi sa jedla, prečo je jedlo dôležitým a prirodzeným zdrojom energie v našom tele. Žiaci analyzujú potraviny, ktoré bežne konzumujú z niekoľkých hľadísk: z biologického, chemického a fyzikálneho. Hlbšie študujú a diskutujú o úlohe vybraných živín v našom každodennom živote. Žiaci sa zaoberajú rôznymi pohybovými aktivitami, pri ktorých sa spotrebúva energia z jedla. Motivujúcim výsledkom je vytvorenie jedálneho lístka pre školskú jedáleň (obr. 2).



Obr. 2: Ukážka vytvoreného jedálneho lístka

Záver

Mnohí mladí ľudia chápu dôležitosť vedomostí z matematiky a prírodovedných predmetov. Cieľom projektu je ukázať im, ako môžu zvládnuť riešenia predložených problémov a úloh a svojimi riešeniami tak ovplyvniť svoj život a svoju budúcnosť.

NĚKTERÁ DIDAKTICKÁ DOPORUČENÍ PŘI ZAVÁDĚNÍ A UCHOPOVÁNÍ POJMU ZLOMEK

DANA FIALOVÁ[1]

V příspěvku jsem se zaměřila na didaktická doporučení, jejichž aplikace ve výuce může pomoci při možných a mnohdy špatně odhalitelných úskalích při zavádění a uchopování pojmu zlomek, která pramení z žákovských představ o tomto pojmu a která se mohou projevit až ve vyšších ročnících. Žákovské představy související s pojmem zlomek jsem zkoumala v průběhu osmiletého longitudiálního výzkumu(1). Nejprve jsem zkoumala žákovské prekoncepce pojmů celek a část a jejich vztahu z hlediska uchopování pojmu zlomek, potom žákovské představy o těchto pojmech po té, co se žáci s pojmem zlomek setkali ve vyučování. I když šlo o výzkum kvalitativní a jeho výsledky nelze zobecňovat, myslím, že mohou být v praxi prospěšné. Proto jsem na základě výsledků tohoto výzkumu, na základě vlastních zkušeností s učivem o zlomcích v učitelské praxi, dalších zkušeností z jiných experimentů a studia této problematiky zformulovala některá didaktická doporučení při zavádění pojmu zlomek na 1. stupni ZŠ, která by podle mého názoru mohla pomoci učitelům v práci s pojmem zlomek a žákům usnadnit uchopení pojmu zlomek.

Relativita celku

A) *Uvědomování si celku, s kterým je pracováno.*
V učivu o zlomcích na 1. stupni ZŠ považuji za velmi důležité v každé fázi ustavičně zdůrazňovat, s jakým celkem pracujeme (co považujeme za celek). A také to, že si celek určujeme (nebo je určen), volíme (nebo je volen).
U žáků jsem se totiž setkala s různými prekoncepcemi celku, např.: 1) Celkem mohl být pouze kontinuální model (např. cihla). 2) Diskrétní model – hromádka bonbónů – celkem není, ale pokud jsou bonbóny v sáčku, celkem jsou (sáček zde je „nositelem celistvosti“, který pomáhá k převedení diskrétního modelu na kontinuální). 3) Hromádka bonbónů byla celkem složeným z dalších celků, které můžeme donekonečna dělit.

B) *Vnímání vztahu celek a část.*
Za další důležitý aspekt při uchopování pojmu zlomek považuji to, aby žák vnímal dialektický vztah pojmů celek a část, a zvláště vnímal neexistenci části bez celku.

[1] anadf@centrum.cz

Opakovaně jsem se setkala s dětskou představou, že část (např. 1/4) je nadřazeným pojmem, do kterého náleží všechny konkrétní čtvrtiny, které jsou si navzájem rovny. Např. 1/4 z koláče je stejná jako 1/4 z archu papíru. Objevovalo se chápání „čtvrtiny“ jako objektu (podobně jako např. míč – při úklidu: míče patří do sítě bez ohledu na velikost).
V určitém smyslu je však tato představa správná, např., když zlomek chápeme jako operátor. S touto představou jsem se setkala na 2. stupni, ojediněle však i na 1. stupni ZŠ. Nabádám proto k velké opatrnosti při úsudcích o tom, kde žák chyboval, resp. která jeho představa byla mylná.

Stejnost částí

A) *Stejně velké části.*
V učivu o zlomcích na 1. stupni ZŠ považuji dále za velmi důležité opakovaně zdůrazňovat, že části, na které celek rozdělujeme, ať už při spravedlivém rozdělování nebo při určování kmenových zlomků, musí být stejné (a to shodné či stejně početné).
Dětská představa o části jako o nějakém kusu, úlomku, dílu z celku byla častá. Někteří žáci však stejnost částí vůbec nevyžadovali ani u spravedlivého rozdělování. U kontinuálních modelů u spravedlivého rozdělování jsem se setkala s tím, že velikost částí nebyla důležitá, důležitý byl jen počet nalámaných částí. (např. Poloviny: rozlomený rohlík na dvě evidentně nestejné části nebo čtvrtiny (spravedlivé rozdělování mezi čtyři děti): koláč – ve tvaru kruhu – rozdělený podélně.)
Stejnost částí byla opakovaně požadována u spravedlivého rozdělování diskrétních modelů.
Pokud ale nebyla splněna podmínka dělitelnosti (např. úkol: Spravedlivě rozděl 9 bonbónů mezi čtyři děti.), setkala jsem se i s řešením, že žák dal přebývající bonbón na jednu z hromádek.

B) *„Stejné části schované“ v nekmenových zlomcích.*
Při modelování zlomku dochází k rozdělování celku na stejné části. Ty nám znázorňují kmenové zlomky (např. 1/4). Nekmenový zlomek je znázorněn jako část z celku, která je „složena z kmenových zlomků“, avšak nekmenový zlomek je část z daného celku, která (pokud nejde o polovinu) není stejná jako „druhá“ část zbývající z daného celku. Např. 3/4 čokoládové tyčinky – je část celku – tyčinky. Tato část tyčinky se skládá ze tří stejných částí (znázorňují kmenové zlomky). Celek (tyčinka) byl rozdělen na čtyři tyto stejné části. Zbývající částí z celku (tyčinky) je 1/4 tyčinky.
V této situaci může nastat „zmatek“ v představě žáků, který může vyústit i v žákovskou miskoncepci. Např. žák měl představu části jako nějakého kusu z celku, tuto

představu potlačil, protože se vyžadovala „stejnost částí“, a nyní vidí ve znázornění nekmenového zlomku znovu „svůj kus“. Doporučuji zdůrazňovat stejné části, na které je celek rozdělen a z kterých je složena ona část (nekmenový zlomek), a také důvod našeho počínání – rozdělování celku na stejné části. Dále doporučuji sémantické rozlišení těchto „dvou druhů částí“ (např. díl x část), neboť synonymita je v tomto případě překážkou. Můžeme tak předejít „zmatku“ v dětských představách (popř. miskoncepcím) a naopak dětské představy propojit. V tomto ohledu také vidím jako vhodné zařazování úloh na určení části z celku odhadem s následným ověřením odhadu (např. Odhadni, jakou část z obdélníku tvoří žlutě vybarvený čtverec. Svůj odhad ověř.) Množství těchto úloh v českých učebnicích shledávám jako nedostatečné.

Propojení kontinuálního modelu s diskrétním

Při uchopování pojmu zlomek považuji za velmi důležitou práci jak s kontinuálním tak diskrétním modelem a doporučuji zařadit řešení některých úloh pomocí obou modelů (i jako propedeutiku práce s více celky).

Někteří žáci modely diskrétního a kontinuálního prostředí chápali odděleně, avšak setkala jsem se se žákem, jehož prekoncepce byla vyspělá (každý prvek diskrétního modelu považoval za nový celek – model kontinuální). Abychom usměrnili a propojili žákovské představy, doporučuji tuto skutečnost s žáky v praktických cvičeních s modely vyzkoušet, samozřejmě s jasným určováním toho, co právě považujeme za celek. Při opakovaném modelování žáci dobře pochopí souvislosti kontinuálního a diskrétního modelu i jejich výhody a nevýhody. Vhodným modelem je např. 8 koláčků ke spravedlivému rozdělování či určování části z celku, kdy za celek volíme různý počet koláčků (8, 1, 2, 3,. . .). Dále se nabízí pokračovat se spravedlivým rozdělováním více celků mezi více osob (bod 4).

Více celků

K tomuto tématu doporučuji přejít až ve chvíli, kdy žáci vnímají předešlé, tedy uvědomují si celek, s kterým pracují a vnímají vztah celek – část, vnímají vhodně stejnost částí a pracují bez problémů s modely diskrétního a kontinuálního prostředí.

Mám na mysli úlohy:

- kombinace celků v úloze (např. Jana snědla 1 pizzy, Honza 1/3 zbytku. Kolik pizzy zůstalo?)

- na spravedlivé rozdělování více (*n*) celků mezi více (*m*) osob (např. Spravedlivě rozděl 3 pizzy mezi 4 osoby.)

- na určování části z více celků (např. 3/4 ze tří koláčů)

Doporučuji nepodcěňovat modelování při řešení těchto úloh. Také považuji za vhodné nechat žákům dostatek prostoru v jejich tvořivosti.

Metody

Velmi doporučuji při uchopování pojmu zlomek hojně používat modelování, zobrazování. Dále, pokud to podmínky dovolí, využívat diskusi. Doporučuji, nechat žáka vysvětlit jeho postup řešení (i nesprávného) ostatním. Je pravděpodobné, že při tom odhalíme žákovu miskoncepci, která bude vlastní i jiným žákům. Vzniklou diskusí o řešení můžeme pomoci k jejímu odstranění.

Představy žáků jsou mnohdy překvapivé. Doporučuji velkou opatrnost a chápavost vůči žákovským řešením. Setkala jsem se s nečekaným vývojem žákovských představ vlivem vyučování, kdy došlo k potlačení i redukcím představ, které byly vhodné k uchopování pojmu zlomek (např. přijímání více interpretací zlomku z hlediska celku).

Literatura

[1] Fialová, D. *Prekoncepce pojmů celek a část a jejich vztahu z hlediska uchopování pojmu zlomek.* Praha, 2006. Disertační práce, neobhajovaná. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

[2] Fialová, D. (2008): Různé interpretace zlomku z hlediska celku. In *Dva dny s didaktikou matematiky*. Praha : PedF UK, 2008, s. 47–49

ANAMORFÓZA AKO PODKLAD PRI TVORBE MATEMATICKEJ ÚLOHY

GABRIELA GALLIKOVÁ[1]

Úvod

Pri tvorbe matematických úloh sa snažíme o vytvorenie netradičných, zaujímavých úloh alebo úloh blízkych žiakom. Inšpiráciu sme čerpali z medzipredmetových vzťahov, kon-

[1]KM FPV UKF, Nitra, gabriela.gallikova@ukf.sk

krétne z predmetu výtvarná výchova. Týmto sme chceli poukázať na prepojenosť predmetov, ktorá nie je na prvý pohľad zjavná. Snažili sme sa o vytvorenie úlohy s možnosťou rôznych variácií a rozvojom fantázie a gramotnosti v oblasti geometrických dynamických softvérov.

Medzipredmetové prepojenie

Z výtvarného umenia sme si pre tvorbu úlohy vybrali oblasť perspektívy. Definície perspektívy sa mierne líšia. V jednej definícií sa pod pojmom perspektíva „rozumie znázornenie priestorovosti na dvojrozmernej ploche, pričom zobrazené priestorové objekty musia opticky pôsobiť ako „pravé“, „zodpovedajúce skutočnosti“, t.j. musí sa postupne od popredia smerom do pozadia redukovať ich veľkosť a skracovať dĺžka, vrátane tomu zodpovedajúcich premien osvetlenia a farebnosti“ [1]. Druhá je špecifická schopnosťou znázorňovania. Podstatné je znázornenie priestorovosti, t.j. trojrozmerného obrazu na dvojrozmernej ploche a vystihnutie hĺbky, ktorá sa dá dosiahnuť za pomoci rôznych perspektívnych prvkov ([2], [3], [5]).

Z pohľadu fyziky

Perspektíva je z pohľadu fyziky založená na spôsobe, akým oko vníma predmet. „Svetlo sa odráža od akejkoľvek plochy a potom sa pohybuje v priamych lúčoch svetla do oka. Okrajové lúče vymedzujú hranice plochy (veľkosť a tvar), vnútorné lúče prenášajú farbu a odtieň a jeden jediný hlavný lúč sa odráža v pravom uhle od bodu, na ktorý je oko zaostrené. Priemetňa (rovina obrazu) je ako sklená tabuľa, ktorá sa týmto lúčom stavia do cesty. Tam, kde lúče prechádzajú touto rovinou, možno zostrojiť zmenšený obraz predmetu.“ [2].

Perspektíva má široké využitie. Nielen v smeroch zameraných umelecky ako: architektúra, scénografia, film, televízia, priemyselné výtvarníctvo, dizajn, ale aj vo vedeckých a technických odboroch. napr. fotogrametrii, strojárstve, lekárstve, vojenskej oblasti, astronómií.

Anamorfóza

Preklad z gréčtiny znamená zmenu formy alebo pretvorenie. K perspektíve ju zaraďujeme na základe dodržaných princípov perspektívy v obraze, ktorý sa pre diváka stáva zrozumiteľným až prostredníctvom šošovky či zrkadla, alebo pri pohľade z určitého uhla. Ako ukážka nám slúži obraz Meinderta Hobbema – VEĽVYSLANCI (obr. 1) a obraz Williaam Scrotsa – PORTRÉT PRINCA EDUARDA VI. (obr. 2).

Obr. 1: Meindert Hobbem – Veľvyslanci

Obr. 2: Williaam Scrotsa – Portrét princa Eduarda VI.

Spôsob využitia anamorfózy v praxi nachádzame v reklamách na futbalových štadiónoch. Reklamný text je jasne čitateľný až pri zábere kamery na reklamnú plochu z určitého uhla.

Úlohy

Úloha 1: Nájdite objekt, ktorého podstavu tvorí kružnica, príp. obsahuje ďalšie prvky. Potom pomocou geometrického dynamického systému narysujte obraz tohto objektu, ktorý bude mať vlastnosti anamorfózy.

Poznámka: Použite zrkadielko, v ktorom sa vám kružnica následne premietne do elipsy.

Riešenie:

1. Analyzovanie odrazu obrazu v zrkadielku.

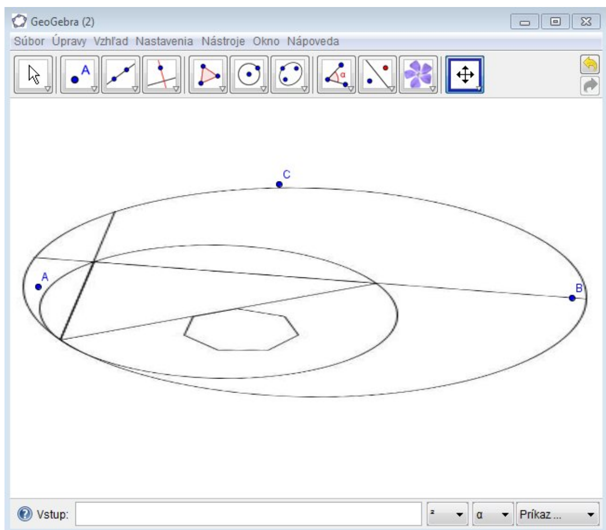
2. Narysovanie obvodu kružnice, ktorá tvorí podstavu, a jej transformácia na tvar elipsy.

3. Narysovanie ďalších prvkov.

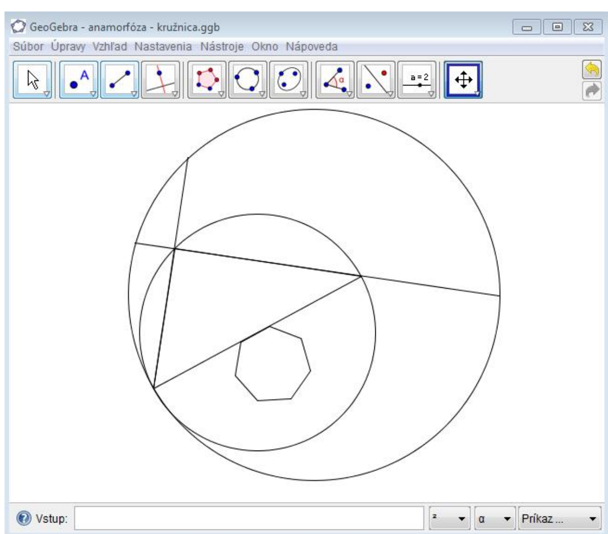
Úloha 2: Narysujte ľubovoľnú elipsu a do nej umiestnite ďalšie ľubovoľné rovinné geometrické útvary. Po vytvorení ju pretransformujte na kružnicu aj s útvarmi, ktoré boli do nej vložené. Úlohu riešte v softvéri GeoGebra.

Riešenie:

1. Narysovanie elipsy s geometrickými útvarmi (obr. 3).
2. Za pomoci zrkadielka alebo šošovky prerysovanie elipsy na kružnicu.
3. Za pomoci zrkadielka alebo šošovky transformácia a vloženie útvarov do kružnice (obr. 4).



Obr. 3: Elipsa narysovaná v GeoGebre



Obr. 4: Kružnica transformovaná z elipsy

Návrh vyučovacej hodiny

Tematický celok: Planimetria II – Zhodné zobrazenia
Téma: Anamorfóza v spojitosti s rovinnými geometrickými útvarmi.
Cieľ: Porovnávanie zhodných zobrazení rovinných geometrických útvarov s anamorfózou.
Zadanie samostatnej práce: Porovnajte rôzne geometrické útvary za pomoci rysovacích pomôcok a zrkadielka, využite dynamický geometrický softvér GeoGebra.
Riešenie:

- oboznámenie sa s pojmom anamorfóza,
- zopakovanie vlastností zhodných zobrazení,
- precvičenie zhodného zobrazenia na štandardných úlohách,
- aplikácia metódy riešením neštandardných úloh,
- prezentácia a hodnotenie,
- diskusia o využití v praxi.

Záver

Úlohami sme sa snažili o nový pohľad na matematiku a o prepojenie vyučovania matematiky a výtvarnej výchovy. Pri prezentácií už existujúcich anamorfóz žiaci nachádzajú aj iné matematické symboly a prvky v umeleckých dielach. To ich nenásilným spôsobom núti všímať si tieto prvky aj v bežnom živote, cestou zo školy, v domácnosti. Hodina je s využitím tejto dynamickej aktivity zaujímavejšia a žiaci sa stávajú kreatívnejší, tvorivejší a budujú si pozitívny vzťah k matematike.

Poznámka: Príspevok je publikovaný v rámci projektu DynaMat COMENIUS; 510028-LLP-1-2010-1-IT-CO

Literatúra

[1] ALTMANN, L. a kolektív, 2004. *Lexikón maliarstva a grafiky*. Bratislava: Ikar, 2006. 606 s. ISBN 80-551-1296-7.

[2] COLEOVÁ, A. 1992. *Umenie z blízka – Perspektíva*. Bratislava: Perfekt, 1995. 64 s. ISBN 80-85261-76-6.

[3] CRHÁK, F. 1986. *Priestor a perspektíva*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1986. 107 s.

[4] GALLIKOVÁ, G. 2010. *Elementy matematiky vo výtvarnom umení a architektúre z aspektu školskej matematiky.* [diplomová práca]. Nitra: FPV, UKF, 2010.

[5] PARRAMÓN, J. M. 1998. *Perspektíva pro výtvarníky*. Druhé vydanie. Praha: Jan Vašut, 1998. 111 s. ISBN 80-7236-041-8.

APLIKÁCIE PRE PODPORU VYUŽITIA NAVIGAČNÝCH PRÍSTROJOV VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

ŠTEFAN GUBO[1]

Úvod

GPS (Global Positioning System) je družicový navigačný systém, ktorý zaznamenáva predovšetkým údaje o zemepisnej pozícií používateľa (navigačného prístroja) a presnom čase (Hegarty, Kaplan, Kaplan, 2006). Pomocou GPS prijímačov možno vykonať v teréne rôzne meracie úlohy (meranie vzdialenosti, rýchlosti, azimutu, času). Do akej formy sa ukladajú zaznamenané dáta? Jedným z takýchto formátov je GPX, ktorý využívajú GPS prijímače zamerané na šport a rekreáciu. V tomto príspevku najprv stručne popisujeme štandardný formát GPX, potom predstavujeme dve aplikácie slúžiace na spracovanie a vizualizáciu GPS dát.

GPX

Súbor GPX (GPS Exchange Format) je špecifický súbor formátu XML (Extensible Markup Language) a bol navrhnutý pre účely výmeny dát medzi aplikáciami a webovými službami. Tento súbor dovoľuje ukladať dáta zo satelitných zariadení GPS. Medzi tieto dáta patria *trasové body* (waypoints), *trasy* (routes) a *stopy* (tracks).

- **Trasový bod** (waypoint) je názvom a zemepisnými súradnicami, prípadne zemepisnou výškou presne vymedzený bod. Trasový bod možno jednoducho vytvoriť

[1]Ekonomická fakulta, Univerzita J, Selyeho v Komárne, `guboi@selyeuni.sk`

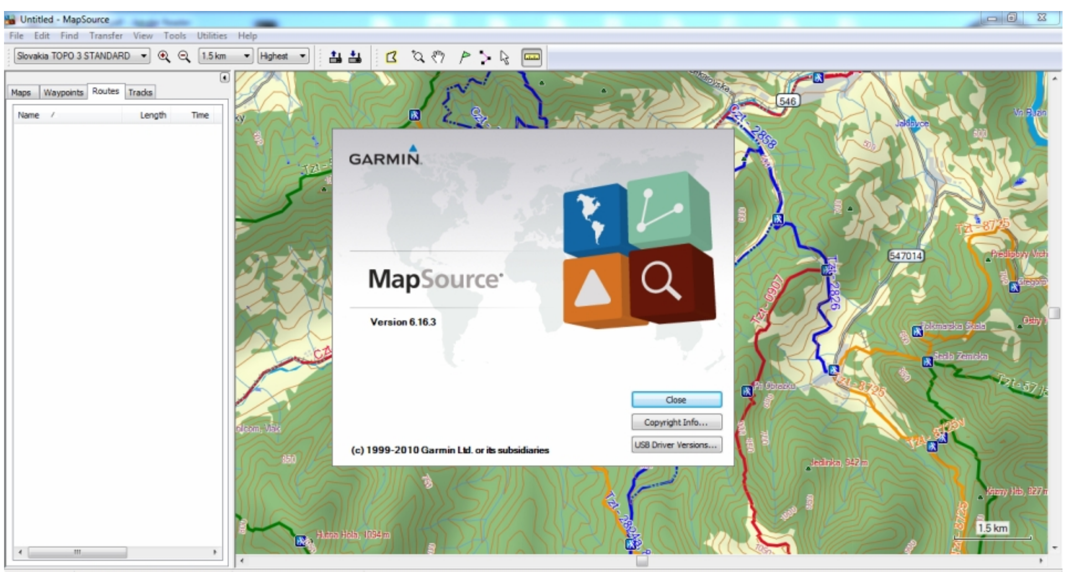
uložením zemepisných súradníc nejakého miesta v teréne do pamäte GPS prijímača alebo v ovládacom programe určenom pre komunikáciu s GPS prijímačmi (napr. MapSource).

- **Trasa** (route) pozostáva z postupnosti trasových bodov. Trasu možno jednoducho vytvoriť v ovládacom programe postupným zadaním trasových bodov, ktoré chceme počas túry navštíviť.

- **Stopa** (track) pozostáva tiež z postupnosti trasových bodov. GPS prijímač ukladá tieto body automaticky s určitou časovou periódou, čím sa vytvára záznam prejdenej trasy.

Mapsource

MapSource (obr. 1) je ovládací program, ktorý je učený pre obojsmernú komunikáciu s GPS prijímačmi Garmin. Umožňuje načítať dáta z GPS prijímača do počítača, zobraziť ich na mape a uložiť do súboru, vytvoriť trasové body a trasy na mape, a nahrať vytvorené dáta z počítača do GPS prijímača. Tento ovládací program je dodávaný na CD so všetkými originálnymi mapami firmy Garmin.



Obr. 1: Úvodná strana programu MapSource

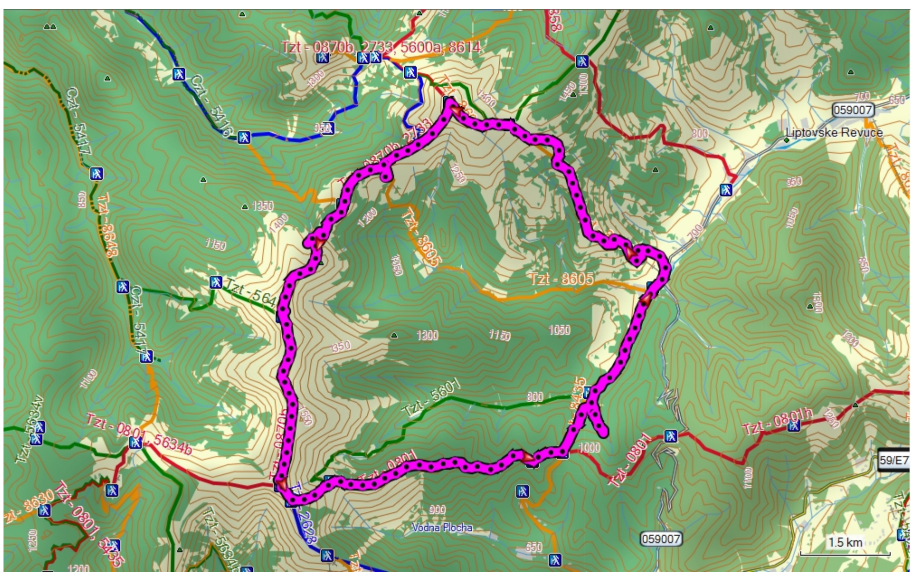
GPS prijímač možno pripojiť k počítači cez USB kábel. V ľavej časti obrazovky sa nachádza okno so zoznamom dát, ktoré chceme do prístroja nahrať – tzv. Tab Lists – okno so záložkami, ktoré člení dáta na mapy (maps), trasové body (waypoints), trasy (routes) a záznamy prejdených trás (Tracks).

Najdôležitejšie nástroje programu MapSource

Nástroj pre tvorbu trasových bodov (angl. Waypoint Tool) – po kliknutí myšou na zvolenú pozíciu trasového bodu sa zobrazí okno s detailnými informáciami o vytvorenom trasovom bode. Tieto informácie možno individuálne zadávať či meniť.

Nástroj pre tvorbu trás (angl. Route Tool) – pomocou myši môžete zadať na mape trasové body, graficky sa tak na mape zobrazuje takto vytvorená trasa a v ľavom okne zoznamu dát sa pod záložkou „Routes" zobrazujú informácie o všetkých trasách. Vyberte nástroj pre tvorbu trasy. Kliknutím myšou do mapy zadáte počiatočný bod trasy. Presuňte sa na miesto v mape, kde má byť umiestnený ďalší bod trasy. Takto pokračujte až do posledného, koncového bodu trasy. V záložke Routes postupne pribudnú záznamy s jednotlivými lomovými bodmi trasy. V programe MapSource možno označiť aj už existujúce objekty či trasové body, a pridať ich do trasy.

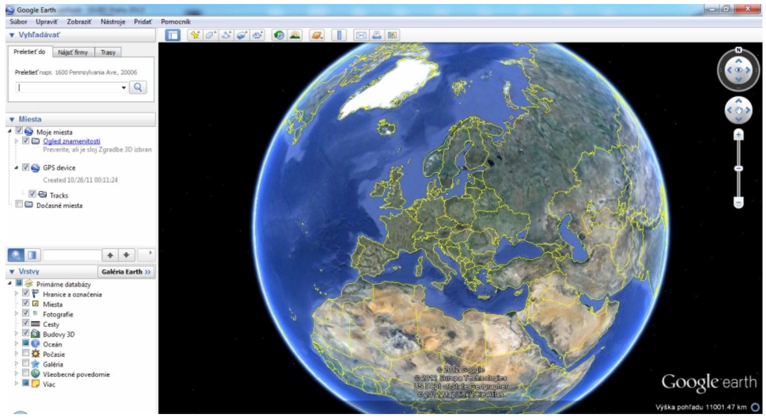
Nástroj pre meranie na mape (angl. Distance/Bearing Tool) – meranie vzdialenosti, počíta vzťah medzi dvoma bodmi, vzdialenosť, smerník. Hodnoty sa zobrazujú v textovom riadku pod mapou.



Obr. 2: Ukážka trasy výletu v programe MapSource

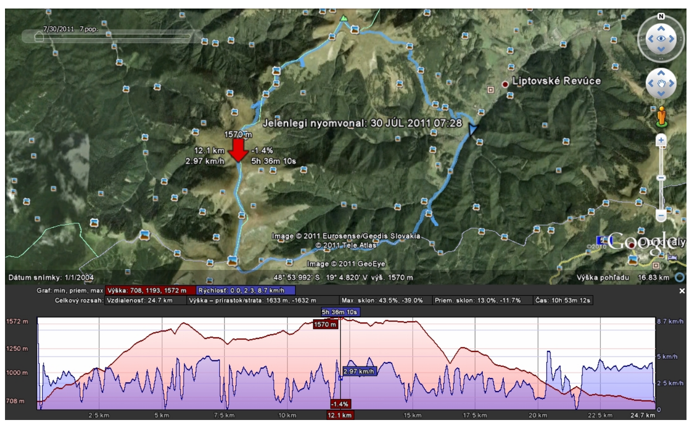
GoogleEarth

Aplikácia Google Earth (obr. 3) umožňuje nám zobraziť letecké a satelitné snímky s vysokým rozlíšením. Umožňuje naklonenie a priblíženie, predovšetkým on-line, kedy si program nahráva ďalšie detaily. Ponúka 3D modely väčších miest. Program má niekoľko variantov, na stiahnutie je k dispozícii bezplatná verzia a platené verzie ponúkajú funkcie navyše, napríklad zobrazenie cesty podľa údajov z GPS.



Obr. 3: Úvodná strana programu GoogleEarth

Štandardný formát dokumentov Google Earth je formát KML (KeyHole Markup Language), ktorý je špecifický súbor formátu XML. Bezplatná verzia aplikácie podporuje a dokáže vizualizovať aj súbory vo formáte GPX. Ak máme otvorený súbor trasy, tak kliknutím pravým tlačidlom myši na trasu môžeme zobraziť aj výškový profil (obr. 4).



Obr. 4: Ukážka trasy výletu s výškovým profilom v programe GoogleEarth

Záver

Okrem uvedených aplikácií existuje ešte niekoľko ďalších aplikácií ponúkajúce užívateľovi prostredie pre prácu s dátami zo satelitných zariadení. Rozšírené sú voľne dostupné tzv. opensource programy, ako napr. GPSBabel, MyTourBook, GPSPrune a pod.

Literatúra

[1] HEGARTY, CH.; KAPLAN, C. J.; KAPLAN, E. D. (2006). *Understanding GPS: principles and applications*. Boston, MA : Artech House, Inc., 2006.

[2] Uživatelská příručka pro ovládání programu MapSource.

PROJEKT VÝUČBY MATEMATIKY V AUSTRÁLII

DANIELA GUFFOVÁ[1]

Úvod

V súčasnosti je na Slovensku aktuálny problém nízkeho záujmu študentov o štúdium odborov s technickým zameraním [4]. Záujem študentov o technické odbory poklesol napriek tomu, že na trhu práce by sa uplatnili skôr technicky kvalifikovaní uchádzači než absolventi humanitných odborov. V Austrálii pred desiatimi rokmi riešili rovnaký problém, v tom čase dokonca zvažovali úplné zrušenie poplatkov za štúdium technických odborov. Medzi opatrenia, ktorými sa snažili nezáujem študentov o technické odbory riešiť, patrila i zmena austrálskeho kurikula v rámci primárneho a sekundárneho vzdelávania a s ňou spojená zmena výučby matematiky.

Projekt TIMES

V roku 2004 austrálske Ministerstvo školstva, vedy a vzdelávania založilo *Medzinárodné centrum excelencie pre vzdelávanie v matematike* (ICE-EM) [3]. O štyri roky neskôr bola vydaná *Deklarácia vzdelávacích cieľov pre mladých Austrálčanov* (Melbourne Declaration on Educational Goals for Young Australians), v ktorej sa spomína, že matematika patrí medzi predmety, ktoré sú v každom ročníku vzdelávania najdôležitejšie [2]. Na základe Melbournskej deklarácie začala tvorba nového austrálskeho kurikula. Cieľom prvej fázy bolo v období rokov 2008 – 2010 vytvoriť nové kurikulum pre anglický jazyk, matematiku, históriu a prírodné vedy pre primárne a nižšie sekundárne vzdelávanie (Foundation – Year 10).

ICE-EM zareagovalo na tento trend a v rozmedzí rokov 2009 – 2011 realizovalo projekt *Zlepšenie výučby matematiky v školách* (The Improving Mathematics Education in Schools , TIMES). Projekt TIMES pozostával zo štyroch hlavných častí:

1. východiskový program;
2. moduly pre učiteľov;
3. kariérne materiály;

[1]Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, `daniela.guffova@umb.sk`

4. spolupráca s CSIRO (The Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation).

Počas východiskového programu projektu TIMES prebiehala úzka spolupráca s učiteľmi pôsobiacimi v šiestich regiónoch (Gippsland, Townsville, Mandurah, Geelong, Sunshine Coast, Illawarra). S každou školou spolupracoval jeden zástupca projektu TIMES, na niektorých školách pôsobili i asistenti učiteľov. Cieľom tejto spolupráce bolo predovšetkým získať informácie o výučbe matematiky v školách, o špecifických matematických potrebách študentov a tiež navrhnúť primerané východiská a postupy vo vyučovaní matematiky.

Na základe získaných informácií boli vytvorené moduly pre učiteľov, ktoré sú usporiadané podľa tematických okruhov austrálskeho kurikula. Súčasťou modulov pre učiteľov je glosár základných matematických pojmov, s ktorými sa učitelia vo svojej praxi môžu stretnúť. Každý z modulov obsahuje predpokladanú úroveň vedomostí žiakov, motiváciu k danému tematickému okruhu, obsah tematického okruhu, námety na zavedenie pojmov a symbolov, modelovanie pojmov, historické poznámky a tiež vzorovo riešené príklady.

Ďalšou časťou projektu TIMES bola tvorba kariérnych materiálov, ktoré zdôrazňujú význam využitia matematiky v rôznych povolaniach a poukazujú na možnosti uplatnenia sa po absolvovaní štúdia matematiky a štatistiky. Súčasťou kariérnych materiálov sú videá, v rámci ktorých konkrétni ľudia vysvetľujú, prečo je dobrá znalosť matematiky dôležitá pri ich každodennej práci (podrobnejšie na `http://www.mathscareers.org.au/`). Tieto materiály poskytujú učiteľom matematiky širokú paletu odpovedí na otázky typu „Prečo sa to učíme? Budem to niekedy v živote potrebovať?“.

Obr. 1: Ukážka kariérnych materiálov pre povolania travel agent, ZOO keeper, nurse

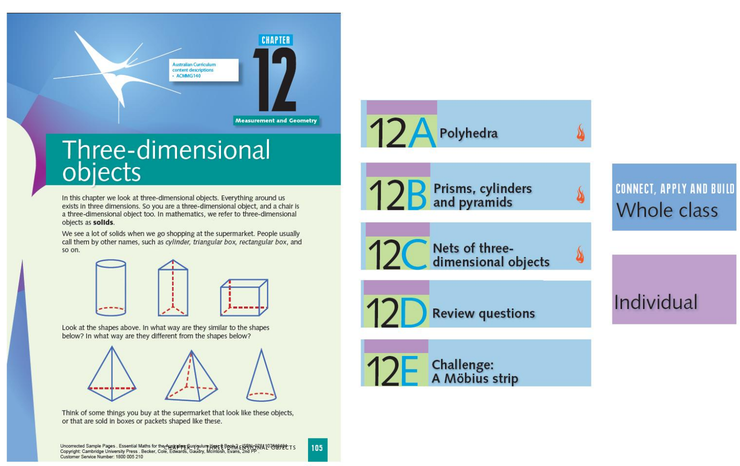
Prostredníctvom spolupráce s CSIRO (The Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation) sa realizovali dve aktivity – Matematici v školách a Matematika a Štatistika cez email. V rámci aktivity Matematici v školách (`http://www.mathematiciansinschools.edu.au/`) sa podporila dlhodobá spolupráca medzi matematikmi a učiteľmi v školách. Matematici prezentovali rôzne poznatky o aplikáciách matematiky, radili študentom pri matematických projektoch, zadávali problémy súvisiace s práve preberaným učivom a tiež dávali učiteľom námety pre ich ďalšiu prácu. Informačný bulletin Matematika a Štatistika cez email (`http://www.csiro.au/mathsbyemail`) je určený predovšetkým študentom a učiteľom primárneho a nižšieho sekundárneho stupňa vzdelávania, obsahuje zaujímavé matematické problémy, aplikácie, hry, odkazy na stránky súvisiace s danou problematikou.

Učebnice matematiky

Na základe zmeny austrálskeho kurikula a projektu TIMES boli zatiaľ vytvorené učebnice matematiky pre piaty až desiaty ročník. Na ich tvorbe sa podieľal tím matematikov v spolupráci s učiteľmi v školách. Pre každý ročník vznikla sada dvoch učebníc.

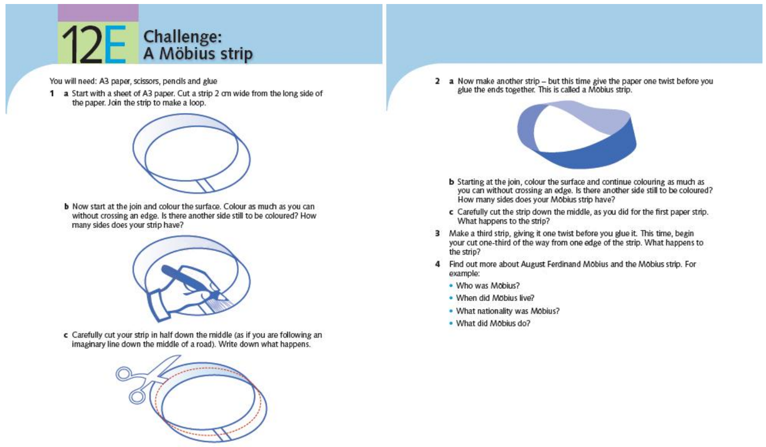
Učebnice pre jednotlivé ročníky sú vytvorené tak, aby učivo bolo zrozumiteľné a primerane náročné. Dôraz je kladený predovšetkým na to, aby bolo zabezpečené dôkladné porozumenie prezentovaným pojmom a myšlienkam. Okrem základného obsahu, vychádzajúceho z austrálskeho kurikula, učebnice zahŕňajú i ďalšie poznatky, obohacujúce tradičnú výučbu matematiky a podnecujúce študentov k hlbšiemu štúdiu matematiky.

Učebnice sú rozdelené na kapitoly, na začiatku každej kapitoly je uvedené, s ktorou témou austrálskeho kurikula pre matematiku súvisí. Jednotlivé kapitoly sú rozdelené do niekoľkých podkapitol, v ktorých je postupne prezentované nové učivo.



Obr. 2: Ukážka štruktury kapitól

Prezentácia nového učiva začína motiváciou a odkazom na skôr preberané učivo, potom nasleduje práca celej triedy a napokon individuálna práca. Náročnosť úloh je vyznačená farebne – úlohy označené žltou farbou by mal študent zvládnuť vyriešiť sám, pri riešení úloh označených modrou farbou môže potrebovať pomoc spolužiaka, prípadne učiteľa, zatiaľ čo k vyriešeniu úloh označených zelenou farbou je zvyčajne potrebná doplnková literatúra, model telesa a pod. V závere každej kapitoly je jedna podkapitola vyhradená pre opakovanie učiva, súčasťou niektorých kapitol je i „Výzva“ (Challenge), v rámci ktorej sú prezentované problémové úlohy a zaujímavosti zo sveta matematiky.



12E Challenge: A Möbius strip

You will need: A3 paper, scissors, pencils and glue

1 a Start with a sheet of A3 paper. Cut a strip 2 cm wide from the long side of the paper. Join the strip to make a loop.

b Now start at the join and colour the surface. Colour as much as you can without crossing an edge. Is there another side still to be coloured? How many sides does your strip have?

c Carefully cut your strip in half down the middle (as if you are following an imaginary line down the middle of a road). Write down what happens.

2 a Now make another strip – but this time give the paper one twist before you glue the ends together. This is called a Möbius strip.

b Starting at the join, colour the surface and continue colouring as much as you can without crossing an edge. Is there another side still to be coloured? How many sides does your Möbius strip have?

c Carefully cut the strip down the middle, as you did for the first paper strip. What happens to the strip?

3 Make a third strip, giving it one twist before you glue it. This time, begin your cut one-third of the way from one edge of the strip. What happens to the strip?

4 Find out more about August Ferdinand Möbius and the Möbius strip. For example:

- Who was Möbius?
- When did Möbius live?
- What nationality was Möbius?
- What did Möbius do?

Obr. 3: Ukážka „Výzvy“

Literatúra

[1] *ICE-EM Mathematics Australian Curriculum Edition*. Cambridge University Press, 2012.

[2] *Melbourne Declaration on Educational Goals for Young Australians*. Ministerial Council on Education, Employment, Training and Youth Affairs, 2008.

[3] `http://www.amsi.org.au/`

[4] `http://www.rozhlas.sk/Nizky-zaujem-studentov-o-technicke-odbory?l=1\&c=0\&i=30407\&p=1`

CLIL METÓDA VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA SLOVENSKEJ NÁRODNOSTNEJ ŠKOLE V MAĎARSKU

JÁN GUNČAGA[1]

Úvod

Na Pedagogickej fakulte Univerzity sv. Štefana v Sarvaši v Maďarsku už vyše 50 rokov prebieha príprava budúcich slovenských národnostných učiteľov pre materské školy

[1]KM PF KU, Ružomberok, SK, Pedagogická fakulta Univerzity sv. Štefana, Szarvas, HU, jan.guncaga@ku.sk

a 1. stupeň základných škôl. V našom príspevku opíšeme niektoré naše skúsenosti so zavádzaním metódy CLIL – Obsahovo a jazykovo integrovaného vyučovania do vyučovacieho procesu na tejto fakulte. Táto metóda je odporúčaná Európskou úniou aj pre výučbu menšinových jazykov. V príspevku ukážeme niektoré jej možnosti v predmete matematika.

Motiváciou pre uplatňovanie metódy CLIL – integrovaného vyučovania menšinových jazykov a nejazykových predmetov sú odporúčania Európskej komisie, najmä Úradu komisára EÚ pre školstvo a kultúru. Európsky komisár Ján Figeľ v roku 2006 uvádza: „Viacjazyčnosť je podstatou európskej identity, pretože jazyky sú základným aspektom kultúrnej identity každého Európana. Z toho dôvodu sa viacjazyčnosť spomína špecificky – prvýkrát – v príhovore komisára. Mám česť byť týmto komisárom.“

CLIL (Content and Language Integrated Learning) predstavuje vzdelávaciu metódu vyučovania nejazykových predmetov prostredníctvom menšinového jazyka. Je to inovatívny prístup, ktorý mení spôsoby, akými sa študenti oboznamujú s učivom, a ktorý urýchľuje získavanie základných komunikačných schopností v menšinovom jazyku.

Slovenské národnostné vyučovanie v Maďarsku

V školskom roku 1947/48 existovalo v Maďarsku 6 slovenských základných škôl (všetky predmety ešte vyučované po slovensky), pričom ich navštevovalo okolo 400 žiakov najmä v regióne Békešskej Čaby. V 57 maďarských základných školách, kde bol pridaný predmet slovenský jazyk, bolo vtedy okolo 6 000 žiakov.

Dodnes je spor o realizácii reformy v školskom roku 1960/1961, keď slovenské školy boli zmenené na „dvojjazyčné“, to ale znamenalo, že matematika a prírodovedné predmety sa začali vyučovať po maďarsky. V súčasnosti sa na týchto školách vyučuje po slovensky 5 predmetov, väčšinou: slovenský jazyk, slovenská vzdelanosť, zemepis, výtvarná výchova, telesná výchova.

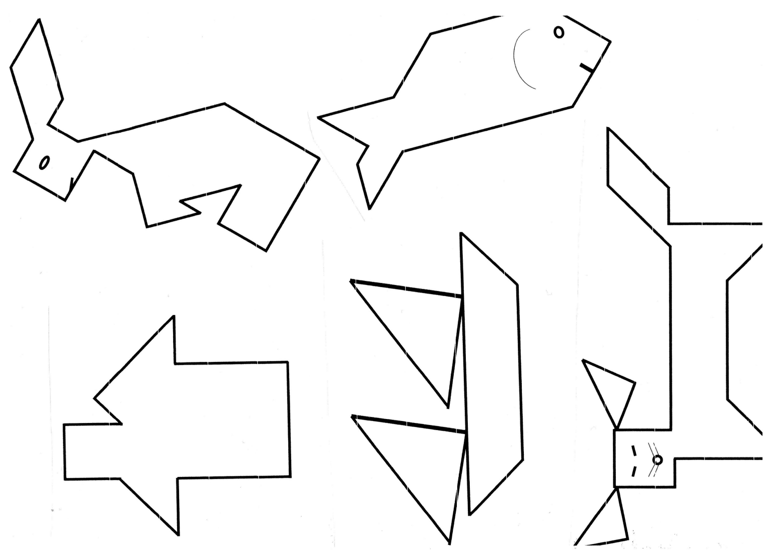
Nové možnosti priniesli do Maďarska bilingválne školy (nemecké, anglické, francúzske,. . .), ktoré metódu CLIL používajú aj vo vyučovaní matematiky. Preto v nasledujúcej časti sa budeme venovať niektorým možnostiam využitia tejto metódy vo vyučovaní matematiky.

CLIL metóda v školskej matematike

Táto metóda je použiteľná aj vo vyučovaní matematiky jednak v príprave budúcich národnostných učiteľov matematiky a jednak na slovenských základných a stredných školách v Maďarsku. Nasledovná ukážka je časť prípravy jednej budúcej slovenskej národnostnej učiteľky z Pedagogickej fakulty v Sarvaši. Vznikla počas vyučovania predmetu Didaktika matematiky na tejto fakulte v slovenskom jazyku. Jej autorkou je jedna denná študentka študijného programu slovenský národnostný učiteľ pre materskú školu. Využíva v nej tangram. Uvedené geometrické tvary na obr. 1 slúžia na tvorbu viet v slovenskom a maďarskom jazyku, pričom žiak analyzuje aj matematické geometrické útvary v oboch jazykoch, z ktorých sa skladajú (pozri tab. 1).

Štvorec	Négyzet
Trojuholník	Háromszög
Rovnobežník	Paralelogramma
Rovnoramenný trojuholník	Egyenlő szárú háromszög
Pravouhlý trojuholník	Derékszögű háromszög
Obdĺžnik	Téglalap
Dom (tangram)	Ház (tangram)
Komín	Kémény
V dome svieti sviečka.	A házban ég a gyertya.
Zajac beží pred domom.	A nyúl fut a ház előtt.
Pes naháňa zajaca.	A kutya kergeti a nyuszit.
Ryby sú v akváriume.	A halak akváriumban vannak.

Tab. 1



Obr. 1: Geometrické tvary na tvorbu viet v slovenskom a maďarskom jazyku.

Posledná veta „Ryby sú v akváriume" je typický prejav slovenského dialektu v oblasti Békešskej Čaby, kde v slovenčine sú používané koncovky z maďarského jazyka (správne má byť „Ryby sú v akváriu", podobne sa často používa „Idem na autove").

Záver

Obsahovo a jazykovo integrované vyučovanie – Content and Language Integrated Learning (CLIL) je možné účinne zaviesť v oblasti menšinového školstva pri výučbe nejazykových predmetov. Jedným z nich môže byť práve matematika, ktorá disponuje univerzálnym jazykom. V budúcnosti by sme chceli využiť aj zahraničné skúsenosti s používaním tejto metódy (pozri Dominguez, 2011) a pripraviť špeciálne aktivity počas vyučovacích hodín matematiky pre študentov Pedagogickej fakulty Univerzity sv. Štefana v Sarvaši, ako aj pre žiakov slovenských národnostných základných škôl (pozri Takáč, 2009, Krech, 2011, Vankúš, 2004).

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou grantov VEGA 1/0534/11 a KEGA 001UJS-4/2011.

Literatúra

[1] *CLIL – Obsahovo a jazykovo integrované vyučovanie (CLIL) v škole v Európe*. (2006). Európska kancelária Eurydice, Brussels. ISBN 92-79-01915-5 In: `http://www.eurydice.org`

[2] Domínguez H. (2011). Using what matters to students in bilingual mathematics problems. *Educational Studies in Mathematics*, Volume 76, Number 3, s. 305–328.

[3] Takáč, Z. (2009). O motivovaní žiakov k odôvodňovaniu matematických tvrdení. *Pokroky matematiky, fyziky a astronómie*, ročník 54, č. 3, s. 243–251. ISSN 1335-7794

[4] Krech I. (2011). Better versus longer series of heads and tails, *Scientific Issues Jan Dlugosz University in Czestochowa, Mathematics XVI*, Czestochowa.

[5] Vankúš P. (2004). Efektívnosť vyučovania matematiky metódou didaktických hier, In: *Zborník 6 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*, Bratislava, Univerzita Komenského. ISBN 80-223-1954-6, s. 101–124.

HODINA MATEMATIKY V PRÍRODE POMOCOU IKT

ŠTEFAN HAVRLENT[1]

Rozhodli sme sa vytvoriť model vyučovacej hodiny matematiky, ktorý spája geografiu a geometriu. Vyučovanie podľa tohto modelu ma dve časti. V prvej časti pracujeme so žiakmi v exteriéri, v prírode, a druhá časť modelu sa venuje práci žiakov v interiéri, v triede. Obe časti modulu sú založené na využívaní IKT, v jednej časti využijeme GPS navigačné zariadenia a v druhej časti využijeme počítače s dynamickým geometrickým matematickým programom Geogebra.

Príprava realizácie modelu

Za učivo vhodné pre tento modul sme si vybrali dva tematické celky, a to

- Sústavy lineárnych rovníc s dvomi neznámymi
- Vzájomná poloha priamok v rovine

Toto učivo je určené pre žiakov druhého a tretieho ročníka gymnázií, preto sme sa rozhodli vybrať žiakov do skúšobnej skupiny žiakov práve z týchto ročníkov. Rozhodli sme sa vybrať 30 žiakov a rozdeliť ich do 4-6 skupín, ku ktorým chceme prideliť dozor 6 učiteľov. Pri pozorovaní tejto skúšobnej skupiny, chceme sledovať správanie žiakov, správanie učiteľov, zistiť či takáto aktivita sa dá uskutočniť v hraniciach potrebnej bezpečnosti a fyzickej zdatnosti žiakov.

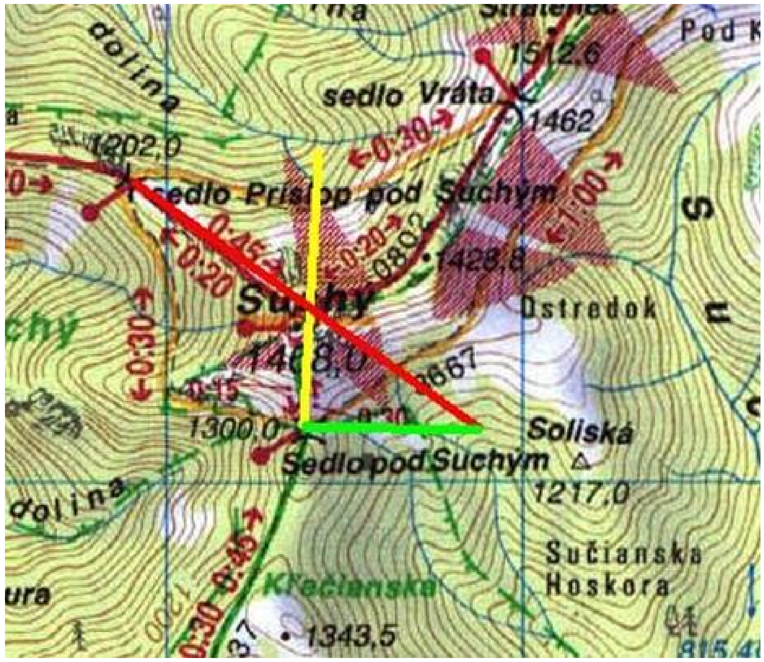
Za prostredie externej časti modulu sme si zvolili pohorie Malá Fatra a konkrétne vrch, Suchý (Slovensko). V rámci fyzickej náročnosti kopca a praktickému značeniu trati sme sa rozhodli zvoliť zimné ročné obdobie. Terén pohoria je v tomto období menej náročný na fyzickú kondíciu žiakov. Pri výbere tohto terénu sme zobrali všetky možné bezpečnostné riziká tohto terénu v danom ročnom období.

Aplikácia modelu

Aplikácia exteriérovej časti modelu prebieha podľa mapy na obrázku, obr. 1, na ktorej sú znázornené možné riešenia úloh žiakmi.

Pripravili sme tieto úlohy pre žiakov:

[1]UKF FPV V Nitre, stefan.havrlent@ukf.sk



Obr. 1: Mapa terénu s vyznačenými trasami

- Zrealizujte výstup na suchý vrch, nasledujte vyznačené body v snehu.
- Pomocou GPS prístrojov si zaznamenávajte súradnice bodov, kde sa nachádzate.
- Prešli ste a zaznamenali ste súradnice dvoch bodov pomocou GPS systému. K akému bodu, by ste mali pokračovať, aby váš pohyb bol po priamke?
- Prešli ste úsek, ktorý znázorňuje priamku. Nájdite, prejdite a pomocou GPS systému zaznamenajte nový úsek, ktorý znázorní k nemu rovnobežnú priamku.

Úlohy pre žiakov v interiérovej časti sú zamerané na záznam nameraných hodnôt do predpripraveného pracovného listu programu Geogebra. Znenie úlohy je nasledovné:

- Namerané údaje znázornite v súbore programu GeoGebra.

Záver

Tento skúšobný model, chceme vyskúšať na malej vzorke žiakov, aby sme zistili, či je v praxi realizovateľný.

V ďalšom výskume sa chceme venovať tomuto modelu a zrealizovať pomocou neho vyučovanie na jednej škole. Predpokladané prínosy sú motivovanie žiakov, spríjemnenie učiva, ozvláštnenie učiva a to prostriedkami IKT ale aj iným prostredím ako je škola.

Poznámka: Príspevok je publikovaný v rámci projektu DynaMat COMENIUS; 510028-LLP-1-2010-1-IT-CO

Korelace logického myšlení a inteligence s vybranými matematickými hrami

Vlastimil Chytrý[1]

Úvod

Při rozhovorech s učiteli na základních a středních školách se často setkáváme s tvrzeními, že právě sami učitelé rozvíjejí matematické[2], popřípadě s tím související logické[3] myšlení žáků. Po přiblížení se do hodin vyučujících záhy zjišťujeme, že tomu tak není. Z toho důvodu jsem se zaměřil na zjišťování logické úrovně žáků základních a středních škol. V rámci výzkumu s cílem zmapovat úroveň logického myšlení jedince byli respondenti na různých typech škol podrobeni testu logického myšlení a testu inteligence. Ukázalo se, že některé logické spojky jsou nedílnou součástí her, a to zejména her matematických[4]. Ve svém výzkumu se opírám o článek, který je uveden v použité literatuře [2].

Stanovení cílů

Ve své práci jsem si stanovil zejména následující dva cíle:

1. Na základě vhodných kritérií vytypovat hry rozvíjející logické myšlení žáků.
2. Popsat faktory ovlivňující úroveň logického myšlení, mezi které patří zejména:
   - IQ jedince,
   - úroveň hraní logických her,
   - hodnocení z matematiky ve škole.

[1]KMA PF UJEP v Ústí nad Labem, vl.chytry@centrum.cz

[2]Is a cognitive approach to a problem that is both logical and mathematically sound [5].

[3]Vyšší forma myšlení, než je myšlení závislé na předmětné činnosti; správné usuzování podle zákonů formální logiky, v níž se jako základní rozlišuje odvození z obecného ke specifickému, čili dedukce, a ze specifického k obecnému, čili indukce [3].

[4]Martin Gardner definoval matematickou hru v Scientific American následovně: A mathematical game is a mulltiplayer game whose rules, strategies, and outcomes can be studied and explained by mathematics [4].

Metodika výzkumu

Soustředím se zejména na dva typy výzkumných šetření. Prvním typem je výběr vhodných matematických her a jejich zapojení do vyučování. Druhým typem je hromadný výzkum pomocí dotazníkové metody u relativně rozsáhlého vzorku žáků, jejímž přínosem je velké množství dat, která jsou dále statisticky zpracována. Na základě tohoto výzkumu je snaha o ověření následující hypotézy:

H01: Významnými faktory ovlivňujícími úroveň logického myšlení jedince jsou zejména inteligence jedince, školní hodnocení z matematiky a úroveň hraní logických her.

Vzhledem k možnému zkreslení získaných dat na základě práce více lidí, jsem všechny školy navštívil osobně.

Splnění vytyčených cílů

Na základě vhodných kritérií vytypovat hry rozvíjející logické myšlení žáků

Pro vybrání vhodných her jsem stanovil kritéria (viz níže), na základě kterých byly hry vybrány.

Kritéria pro volbu hry:

- motivační potenciál,
- existence optimální strategie,
- variabilita obtížnosti hry,
- přítomnost náhodnosti,
- časová dotace,
- počet hráčů

U každé z her také proběhla podrobná specifikace didaktických přínosů a možného zařazení hry do vyučování v matematice. Ze všech množných her byly vybrány následující tři:

- NIM-hry – hry na odebírání předmětů z hromádek podle předem daných pravidel
- Mastermind – hádání čísel na základě nápovědy od soupeře
- Sudoku – doplňování čísel do čtvercových polí na základě daných pravidel

Popsat faktory ovlivňující úroveň logického myšlení

Otázky ve vstupním a výstupním testu logického myšlení je možné svým zaměřením rozdělit do následujících tří oblastí:

- Hledání číselných zákonitostí (dále jen ČZ)
- Hledání geometrických zákonitostí (dále jen GZ)
- Práce s prvky formální logiky (dále jen FL)

Každé z těchto oblastí odpovídalo několik otázek hodnocených 1 – správně, 0 – špatně. Na základě aritmetického průměru hodnocení otázek z každé oblasti jsem získal pro každého respondenta hodnotící vektor o třech souřadnicích, kde každá z nich odpovídá pravděpodobnosti správné odpovědi jedince na otázku z této oblasti. Každá složka tohoto vektoru byla pak porovnávána s inteligencí jedince a jeho schopností hrát matematické hry na základě Mann-Whitney testu, Pearsonova Chí-kvadrát testu, Kruskal-Walis testu a Spearmanova korelačního koeficientu.

U každé hry byl důležitý jiný faktor, podle kterého byla hra hodnocena. Sudoku bylo hodnoceno na základě správného vyplnění všech polí. V případě hry Mastermind rozhodovalo využívání předchozích tahů. Nalezení vyhrávající strategie bylo prioritní u NIM.

Při ověřování druhé hypotézy ji bylo nutné aplikovat na každou složku hodnotícího vektoru logického myšlení. Tabulka č. 1 ukazuje, jaké oblasti hodnotícího vektoru byly ovlivněny jednotlivými typy her (jsou uvedeny i p-hodnoty u Mann-Whitney testu).

Tab. 1: Závislost úrovně logického myšlení na úrovni hraní her

	Složka hodnotícího vektoru	Mastermind	Sudoku	NIM
Úroveň logického myšlení na ZŠ	ČZ	NE $p = 0,14336$	**ANO** $p = 0,001174$	**ANO** $p = 0,031603$
	GZ	NE $p = 0,14336$	**ANO** $p = 0,000113$	NE $p = 0,199247$
	FL	NE p = 0,15755	**ANO** $p = 0,004340$	NE $p = 0,940505$
Úroveň ligckého myšlení na SŠ	ČZ	NE $p = 0,81510$	NE $p = 0,637355$	NE $p = 0,050807$
	GZ	NE $p = 0,94672$	NE $p = 0,238602$	NE $p = 0,533452$
	FL	NE $p = 0,97335$	**ANO** $p = 0,029246$	NE $p = 0,428020$

U hry Mastermind se neprokázal její vliv na úroveň logického myšlení podobně jako u hry NIM, kde se závislost prokázala pouze v jednom případě. Naproti tomu u hry Sudoku je patrný její vliv na úroveň logického myšlení.

Zjištění, že IQ jedince ovlivňuje úroveň logického myšlení není překvapivé. Výzkum poukazuje na zajímavý fakt, že školní hodnocení žáků z matematiky má jiný charakter na základní a střední škole. Zatímco na střední škole je ovlivněno úrovní logického myšlení žáků, na základní škole vůbec neodráží úroveň jejich logického myšlení.

Tab. 2: Závislost úrovně logického myšlení na IQ jedince a školním hodnocení z matematiky

	Složka hodnotícího vektoru	IQ jedince	Školní hodnocení z matematiky
Úroveň logického myšlení na ZŠ	ČZ	**ANO** $p = 0,000002$	NE $p = 0,0991$
	GZ	**ANO** $p = 0,000001$	NE p = 0,2439
	FL	**ANO** $p = 0,000749$	NE $p = 0,3927$
Úroveň logického myšlení na SŠ	ČZ	**ANO** $p = 0,000001$	**ANO** $p = 0,0387$
	GZ	**ANO** $p = 0,000001$	**ANO** $p = 0,0115$
	FL	**ANO** $p = 0,000001$	**ANO** $p = 0,0883$

Závěr

Výzkum prokázal, že existuje korelace mezi úrovní hraní logických her, schopností hrát matematické hry, inteligencí jedince a v případě střední školy i školním hodnocením. Domnívám se, že dlouhodobým hraním logických her lze pozitivně ovlivnit úroveň logického myšlení daného jedince.

Literatura

[1] BENEDIKTOVÁ, Marie, Sudoku a logika. In DOSTÁLOVÁ, Marie, ŠEBELA, Karel (Eds.), *Organon V., aneb, ?Kolik logiky za nás mohou učit počítače?* Praha: Filozofická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

[2] PETERS, Sally, Playing Games and Learning Mathematics: The results of Two Intervention Studies, *International Journal of Early Years Education*, 1998, vol. 6, no. 1, p. 49–58.

[3] HARTL, Pavel, HARTLOVÁ, Helena. *Velký psychologický slovník*. Vyd. 4., Praha : Portál, 2010. 800 s. ISBN 978 80 7367 686 5.

[4] GARDNER, Martin. *Scientific American: Mathematical Games*, 1979, vol. 241, no. 3, p. 22–32.

[5] DUNLAP, John. *Mathematical Thinking* [online]. c2011, poslední revize 31. 5. 2011 [cit 2011 – 06 – 03]. Dostupné z: `http://www.mste.uiuc.edu/courses/ci431sp02/students/jdunlap/WhitePaperII.doc`.

POSTAVENIE VYUČOVANIA MATEMATIKY NA ZŠ

LADISLAV JARUSKA[1]

Prečo učíme matematiku?

Nie je ľahké dávať návod na vyučovanie matematiky, lebo matematika je predmet, ktorý svojou abstraktnosťou vznáša sa nad všetkými ostatnými vedami, a tým je stálym účinkujúcim školskej politiky, učebných plánov . . . Obsahové zmeny matematiky ledva sledovali reformné úsilia verejného školstva, len úroveň požiadaviek sa posunula dole alebo hore, navyše ich uplatňovanie veľmi brzdili zaužívanosti učiteľov.

Dvojitá úloha vyučovania matematiky

- jednak predstaviť matematiku žiakom ako výdobytok ľudského myslenia, jeden z vrcholov vied, ako estetický, vzácny, hodnotný, pekný, večne platný a predsa stále sa rozvíjajúci myšlienkový systém
- druhorade – ukázať evidentnosť praktickej užitočnosti, a učiť ju ako prostriedok

Táto dvojitosť bola prítomná počas vývoja a histórie matematiky. Podmienky vzniku niektorých matematických teórií a kapitol vytvárali praktické ciele (napr. staroveká egyptská geometria), respektíve vývoj urýchlili (teória hier, teória pravdepodobnosti). Inokedy zas vnútorný rozvoj danej vedy viedol k vzniku takého matematického aparátu, čo sa čoskoro stal užitočným pri riešení problémov ostatných vied alebo praktického života (napr. počítač, neeuklidovská geometria).

Predošlé tvrdenia akoby zobrazili dve podstatné ciele v spojitosti s našim predmetom:

- riešenie praktických problémov matematickými prostriedkami
- zaoberanie sa s vnútornými matematickými problémami, aby sme rozširovali naše nástroje potrebné k predchádzajúcemu cieľu

Úspešnosť našej práce rozhodne určuje to, že v tejto dvojitosti sa nám ako podarí nájsť správne pomery.

Najčastejšou príčinou predsudkov žiakov voči matematike, neúspešnosti počas štúdia predmetu a zlyhaní učiteľa môže byť, že – v zaujatosti k nášmu predmetu, a predčasne –

[1]Univerzita J. Selyeho, Komárno, jaruskal@selyeuni.sk

predimenzujeme jej abstraktnosť a algoritmizáciu. Tým pozornosť našich žiakov riadime hneď na ďaleké perspektívy vedy, a tým sa matematika stáva nedosiahnuteľným cieľom.

Matematika vychováva na prísne disciplinované, napriek tomu pružné myslenie a riešenie problémov. Vyžaduje jasnú a čistú logiku, ktorú aj rozvíja. Je spojená (alebo dá sa spojiť) s každým každodenným predmetom, javom, ale v podstate je nezávislou, čistou vedou, ktorá sa nachádza vysoko nad reálnym svetom.

Nemôžeme obísť, ba musíme vyzdvihnúť, vychovávaciu funkciu predmetu. V prípade matematiky je zdôraznenou pravdou, že bež hocijakých, z pedagogického hľadiska vymyslených cieľov už štúdium samého predmetu, respektíve jeho obsahu, a zaoberanie sa ním má v sebe nutnosť vychovávania sa a sebavzdelávania. Veď prijateľný číselný výsledok sa nedá dosiahnuť bez disciplinovaného myslenia, praktického systému údajov, písania, poznámok a zobrazovania, a nepretržitej núdze reálneho rozhodovania. Nedostatok predchádzajúcich požiadaviek môže zapríčiniť neúspešnosť pri spoznávaní problémov, formulovaní úlohy alebo určenie cieľov, či sa jedná o elementárnu praktickú úlohu, alebo o ťažkej teoretickej teórii.

Štandardy matematiky popri konkrétnom poznatkovom systéme samozrejme obsahujú aj požiadavky na výchovu rozmýšľania a základy myšlienkových metód. Na každej úrovni vyučovania matematiky dôležitú úlohu hrá:

- kreativita
- deduktívne a induktívne myslenie
- abstrakcia
- schopnosť používania analógií.

V tom spočíva krása vyučovania a učenia sa matematiky, ale to skrýva v sebe aj jej obťažnosť.

Jej štúdium sťažuje aj zo, že mnohí cítia vzdialené od ich osobnosti, a to sa preukáže aj v ich postoji voči matematike. Práve preto optimálnu cestu k osvojeniu si matematiky môžeme nájsť len tak, že hneď na začiatku vyučovania sa neorientujeme na abstraktnú vedu, ale vychádzajme z matematických súvislostí „živej“ praxe. Pre žiaka – čím v nižších ročníkoch, tak aj čím menšími predchádzajúcimi poznatkami, tým viac vedie cesta k abstrakcii vlastnými každodennými aktivitami a ich jednoduchými riešeniami. Pri tom aj spracovania poznatkového systému iných predmetov tiež vyžaduje používania matematických prostriedkov, aj keď najčastejšie bez uvedomenia si tohto faktu.

Treba akceptovať, že samotný obsah, štruktúra a postavenie matematiky vo vzdelávacom systéme nestratili dôležitú úlohu v súčasnom neustálom, premenlivom svete, ale ciele, výsledky a metódy vyučovania sa zmenili. Ten istý učiteľ, tou istou metódou už ťažko bude úspešným, ako pred desaťročím.

Zmenou spoločnosti zmenili sa aj popudy, motivovanie, postoje, vzťah a stratégia učenia sa žiakov.

V súčasnosti je jednoznačne zdôraznená poskytovateľská povaha školy, kde súťaženie a rivalita o žiakov zásadne ovplyvňujú stratégiu vyučovania.

Odkedy sa matematika vyučuje na školách, skoro stále sa vynoria otázky a nároky reformu vyučovania matematiky.

Ak skúmame dôvody stálych zmien a snáh o obnovenie výučby, tak tri najčastejšie by sme mohli formulovať nasledovne:

- rozvoj a postup matematiky, vytváranie sa nových pojmov, hľadísk

- rozvoj pedagogiky a psychológie – novšie výsledky majú značný vplyv na vyučovanie matematiky

- zmeny našich predstáv o úlohách, cieľoch a postavení školy

Dôsledkom zmien čelí škola, a tak aj vyučovanie matematiky, globálnym otázkam, a dôležitým výzvam, časť ktorých vyplýva zo súčasných podmienok školstva a uplatňovaní sa dôsledkov rozhodnutí školskej politiky. Hoci pri plánovaní vzdelávacieho programu boli zohľadnené také zmeny situácie podľa všeobecných hľadísk, učitelia matematiky ťažko to prijímali z obavy straty istoty vytvárania schopností a zručností v zmenenom počte hodín.

Druhá časť výziev súvisí s odmietnutím, sledovaním alebo akceptovaním zmien prebiehajúcich vo vzdelávaní i vo svete. Táto otázka je všeobecnejšia ako problém jedného predmetu, ale bezprostredne sa týka dôležitých otázok vyučovania matematiky, čo ovplyvňujú aj zmeny spoločenských a ekonomických podmienok.

Čo sú dobré vedomosti? Alebo, ak sa nám podarilo sformulovať čo sú dobré vedomosti, ako sa môže podieľať vyučovanie matematiky na ich vytváraní?

Musíme súhlasiť s názormi, že škola so svojimi možnosťami a prostriedkami musí robiť všetko možné, aby vychovávala mladých ľudí, ktorí sa uplatnia v spoločnosti a disponujú konkurencieschopnými vedomosťami.

Nadobudnuté základné matematické vedomosti umožňujú žiakom získať matematickú gramotnosť novej kvality, ktorá by sa mala prelínať celým základným matematickým vzdelaním.

Snažíme vytvárať predpoklady pre ďalšie úspešné štúdium matematiky a pre celoživotné vzdelávanie.

Na predchádzajúce otázky sa snaží nájsť odpovede a riešenie školská reforma.

Namiesto poznatkov dostáva prednosť rozvíjanie kompetencií, a obsah vzdelávania je spracovaný na kompetenčnom základe. Pri prezentácii nových matematických poznatkov sa vychádza z predchádzajúceho matematického vzdelania žiakov, z ich skúseností s aplikáciou už osvojených poznatkov.

Vyučovanie sa prioritne zameriava na rozvoj žiackych schopností, predovšetkým väčšou aktivizáciou žiakov.

Matematická kompetencia podľa ŠVP

- Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách.

- Matematická kompetencia zahŕňa na rôznych stupňoch schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).

- matematické poznatky a zručnosti, ktoré študenti budú potrebovať vo svojom ďalšom živote (osobnom, občianskom, pracovnom a pod.) a činnosti s matematickými objektmi, rozvíjajúce kompetencie potrebné v ďalšom živote

- rozvoj presného myslenia a formovanie argumentácie v rôznych prostrediach, rozvoj algoritmického myslenia

- súhrn matematického aparátu, ktorý patrí k všeobecnému vzdelaniu kultúrneho človeka

- informácie, dokumentujúce potrebu matematiky pre spoločnosť

Vyzdvihnutou, prvoradou a stálou úlohou počas vyučovania matematiky je rozvíjanie kľúčových kompetencií, a aby žiak vedel

- písomne a slovne sformulovať v presnej, kompaktnej, estetickej forme podstatu riešeného problému

- odhadnúť očakávaný výsledok

- aby vedel načrtnúť hlavné postupy riešenia

- aby mal nárok na kontrolu výsledku

- aby sa snažil o nájdenie najkratšej a najjednoduchšej cesty riešenia

- aby bol schopný uvažovať o správnosti alebo nesprávnosti, od jeho odlišných myšlienkových postupov,

- aby bol schopný vybrať si pre neho riešiteľnú úlohu, a úlohu, ktorá prevyšuje jeho poznatky a vedomosti

V súvislosti s predchádzajúcimi žiak:

- sa musí naučiť aplikovať možnosti matematickej komunikácie vo vzdelávacích a riešiteľských činnostiach
- musí používať jazyk matematiky na adekvátnej úrovni a príslušnou presnosťou
- musí si vytvoriť a zosilňovať vlastnú individuálnu samostatnú vzdelávaciu metódu, metódu učenia sa a rozvíjať na automatickú úroveň
- musí nájsť spojitosť z vlastných praktických skúseností medzi matematikou a realitou

Metodickou, didaktickou a názorovou otázkou je: čo je dôležitejšie vo vyučovaní matematiky – aby sme zabezpečili matematické kompetencia potrebné na riešenie problémov formulovaných v praktickom kontexte, alebo posilnením tradičných hodnôt ponúkali isté predmetové poznatky, a rozvíjali myslenie prvorade v priebehu riešenia vnútorných problémov matematiky?

Medzi teoretickými odborníkmi a praktizujúcimi učiteľmi je úplný súhlas, že cieľom vyučovania matematiky popri pomoci orientácie v každodennom živote ja aj rozvíjanie myslenia žiakov. Treba nájsť takú metódu, ktorá umožňuje postupnú zmenu koncepcie – pri zachovávaní tradičných hodnôt implementuje do učenia aj prípravu na nové požiadavky a dôležité je priblíženie vyučovania matematiky k praktickému životu.

ZLOMKY: PREČO, KEDY A AKO?

BARBORA KAMRLOVÁ[1]

Zlomky predstavujú atraktívnu oblasť v rámci školskej matematiky, avšak nielen z pozitívneho pohľadu, ako základ pre mnohé ďalšie matematické koncepty a postupy, ale najmä ako oblasť náročná pre uchopenie a osvojenie si zo strany žiakov, a teda aj zo strany pedagógov. Práca navrhuje využitie konceptu hudobného rytmu na rané osvojenie pojmu zlomku, ako aj na prácu so zlomkami. Vzhľadom k ranému veku, kedy sa deti učia pracovať s rytmom a metrom na hudobných školách, prípadne na základných školách na hudobnej výchove, pokúsili sme sa využiť prirodzený záujem detí o riešenie hudobných, rytmických problémov tak, aby bolo nevyhnutné využívať práve koncept zlomku, ako časti z rôznych celkov. V súlade s Leshovým translačným modelom využívame všetky reprezentácie zlomku na to, aby dieťa objavilo, ako je možné využiť základné vlastnosti zlomku na tvorenie zaujímavých rytmov s danými podmienkami – hodnoty nôt a takt.

[1]Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Univerzita Komenského Bratislava, kamrlova@fmph.uniba.sk

Deti sa od separovaných modelov (konkrétne hudobné trvanie doby, resp. pizza-model) plynulo presunuli abstrakčným zdvihom do práce so zlomkami ako číslami. Abstraktný rozmer týchto zlomkov nevystupuje do popredia a tým nevytvára stres z izolovanosti od obsahu, keďže zápis taktov cez súčty zlomkov je rýchlejší než kreslenie nôt, a tým prirodzene preferovaný pri hľadaní vhodného zaplnenia zvoleného taktu.

Ako na zlomky bez bolesti

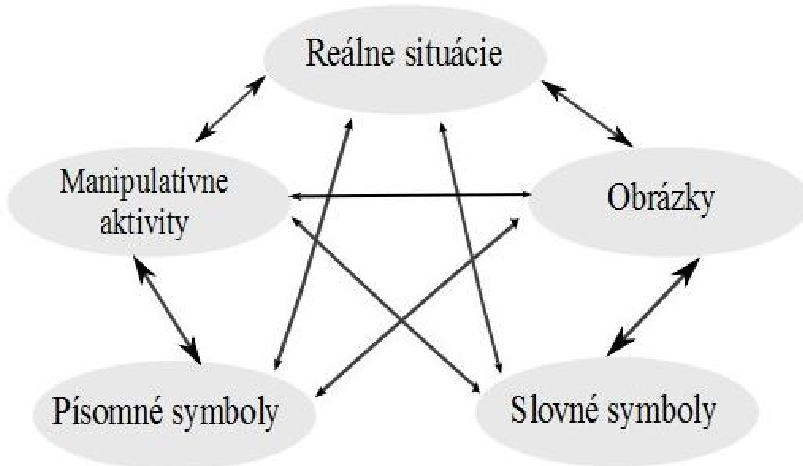
Zlomky sú mimoriadne atraktívnou oblasťou školského matematického kurikula. Atraktívnosť zlomkov má viaceré rozmery. Na jednej strane je ich „užitočnosť": zlomky majú význam nielen v základnej aritmetike, ale aj pre propedeutiku algebry, rozvíjanie funkčného myslenia [1], pochopenie princípov práce so zlomkami a ich vlastnosťami umožní porozumeniu praktickým aplikáciám niektorých zlomkov v praktickom živote (percentá, pomery, pravdepodobnosť). Podrobná analýza uplatnenia zlomkov v ďalších oblastiach školskej matematiky je uvedená aj v metodicko-didaktickom materiáli pre učiteľov základnej školy Tichej a Janáčkovej [1] a v zborníku Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky [2].

Druhú (možno skôr odvrátenú) stránku príťažlivosti zlomkov tvorí ich náročnosť. Zlomky sú náročné na zvládnutie nielen pre dieťa, ale aj pre učiteľa. Na území bývalého Československa sa zlomkom venovala pozornosť od čias renesancie – napr. na území Slovenska u Leonarda Stöckela v 15. storočí [3] alebo u Johanna Amosa Komenského o sto rokov neskôr [4]. V dobe vedeckého skúmania procesu vyučovania matematiky môžeme problémy so zlomkami zachytiť už v XIX. storočí, kedy známy matematik Studnička konštatuje:

> „Až podnes jest počítání pomocí zlomků největší části lidu dosti obtížnou, ba nepřemožitelnou úlohou, ač jsou již dávno ustálena pravidla, podle nichž se zlomky sečítají, odčítají, násobí a dělí." ([5], str. 139)

Z môjho pohľadu je najatraktívnejšou stránkou zlomkov práve otázka, ako pripraviť zavedenie tejto témy tak, aby deti pocítili potrebu porozumieť zlomkom bez negatívnej motivácie (príliš zložité, budúce neporozumenie nadväzujúcim témam, zlá známka z písomky a pod.). Okrem hier na internete, ktoré sa zaoberajú najmä rozpoznávaním zlomkov, precvičovaním základných pravidiel a pod., je možné nájsť aj mnohé práce, ťažiace z historických prístupov k práci so zlomkami. Historické príklady o zlomkoch sú využívané v priebehu doby až do súčasnosti ([5], [2] str. 361–362).

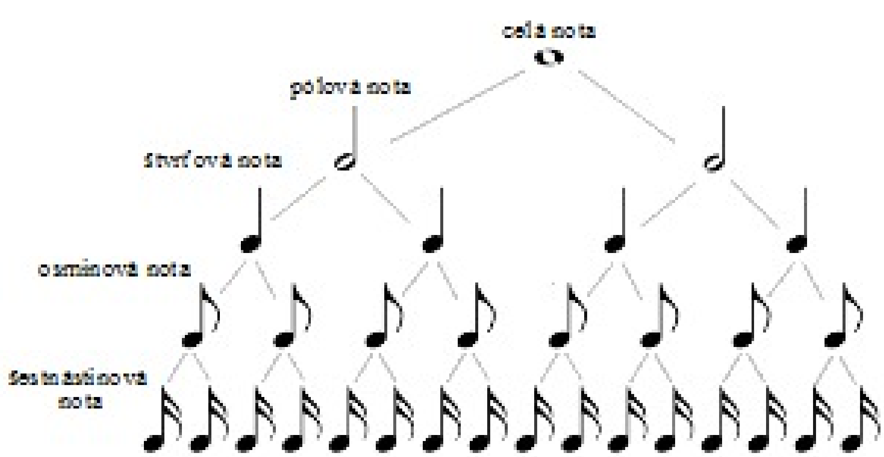
Napriek množstvu pomocných materiálov je situácia s osvojovaním a porozumením zlomkom natoľko vážna, že v Spojených štátoch amerických sa vytvoril celonárodný tím, zameraný na prípravu zmysluplného zavádzania zlomkov na základnej škole – Rational Number Project [6]. Tento tím pracuje od roku 1978 na postupnom vytvorení metodiky využívania manipulatívnych aktivít na rozvoj konceptu, usporiadania a ekvivalencie zlomkov tak, aby učitelia a žiaci mohli dospieť ku zmysluplným operáciám so zlomkami a k ich využívaniu ([6], časť metodiky pre učiteľov, str. 4). Vedúci projektu Richard Lesh vytvoril na ukotvenie práce vlastný model, objasňujúci formy reprezentácie zlomkov.



Obr. 1: Leshov translačný model

V našej práci prepájame dve polia – zlomky a rytmus. Rytmus je považovaný za základný kameň hudby už v antickej hudobnej teórii. Presná, všeobecne platná definícia rytmu dodnes neexistuje. Podľa všeobecných zvyklostí (napr. [7], str. 68) je rytmus popisovaný ako dynamický koncept relatívnych aj absolútnych časových súvislostí, ktorých formalizácia je základom fungovania celého systému. Ide teda o zadelenie času v hudbe, s adekvátnym rozdelením taktov a dôb v danom značení – takte.

Základom hudobného rytmu sú rytmické hodnoty jednotlivých tónov, reprezentovaných notami. Rôzne hodnoty nôt vznikajú v prvom rade binárnym delením vyššej hodnoty. Pri definovaní rytmu a jeho prvkov nie je dôležitá výška tónu, ani tempo, rýchlosť, ktorou celý tvar odznie. Jediným absolútnym parametrom je základná proporcia dĺžok nôt (obr. 2).

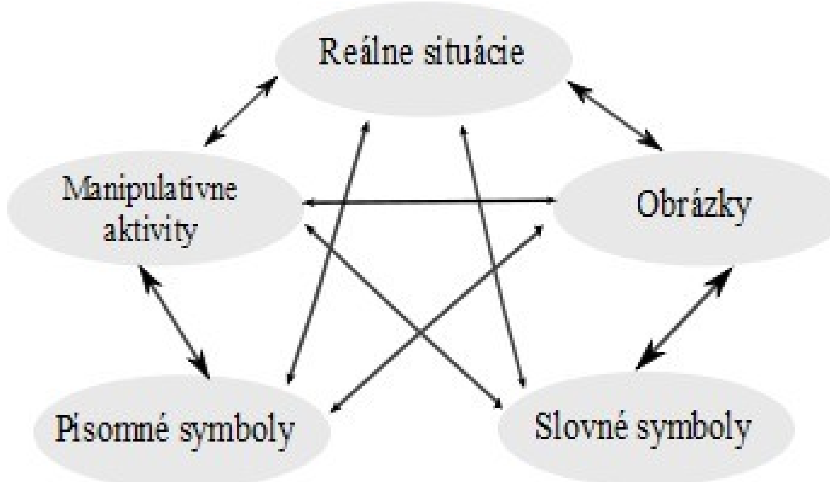


Obr. 2: Binárny strom rytmických hodnôt – relatívnych dĺžok nôt

Napriek tomu, že pre učiteľov matematiky je súvislosť s kmeňovými binárnymi zlomkami zrejmá, využitie rytmov ako separovaných modelov pre zavádzanie zlomkov sme našli okrem našej práce [8] len v dvoch prípadoch ([9], [10]), pričom ani jeden prípad nerozpracúva dôsledne možnosti práce so zlomkami v hudbe.

Pri skúmaní možností, ktoré sa núkajú na využitie rytmov v matematike, je potrebné vedieť, že noty sa radia do menších útvarov, taktov, s rovnakou relatívnou dĺžkou – s rovnakým, vopred daným počtom daných jednotiek. Jednotkou môže byť ľubovoľná nota z binárneho stromu (najčastejšie je to štvrťová nota, menej často osminová, ešte menej často pólová). Počet týchto jednotiek v jednom takte je od dvoch do siedmich (napr. dvojpólový takt, trojosminový, štvorštvrťový alebo sedemosminový). Na naplnenie taktu je možné využiť ľubovoľnú kombináciu hodnôt nôt z binárneho stromu.

Je samozrejme možné vytvárať si ľubovoľné kombinácie jednotiek a ich počtov, ľubovoľné takty, a napĺňať ich podľa vlastnej predstavy žiaka – skladateľa. Okrem zvuku, ktorý predstavuje každá nota, je tu aj jej hudobný zápis, jej absolútna hodnota (dĺžka podľa binárneho delenia) a súčasne jej proporcia v rámci daného taktu. Týchto päť reprezentácií zodpovedá vyššie uvedenému Leshovmu translačnému modelu. Aj pri praktickom využití rytmu pri zavádzaní zlomkov sme využili všetky reprezentácie (obr. 3).



Obr. 3: Leshov model pre rytmy / zlomky

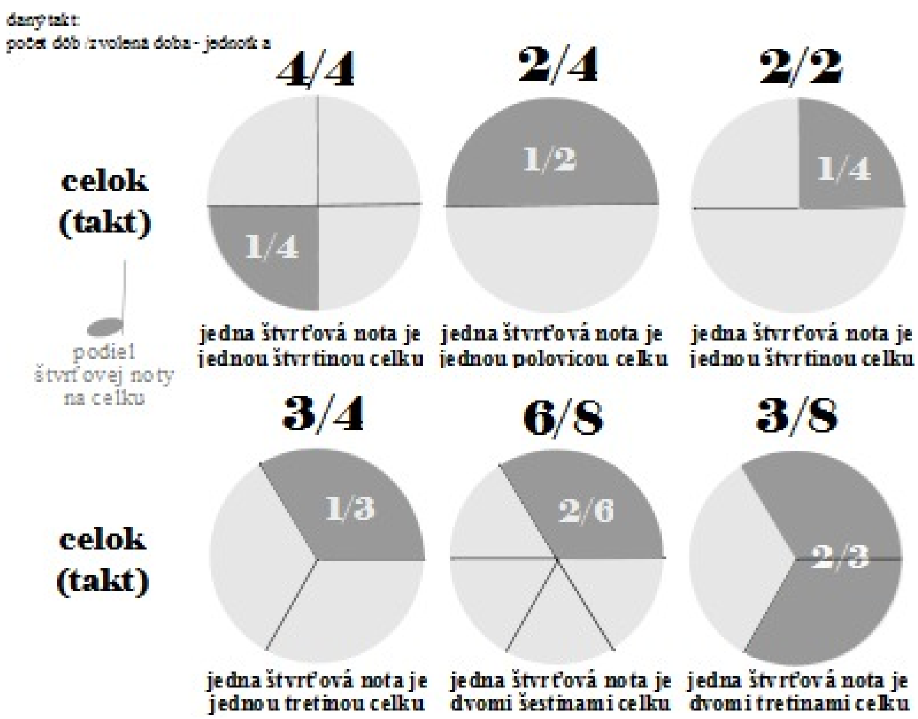
Keďže sme mali možnosť realizovať túto tému v spojení s hudobnou výchovou, napriek tomu, že všetko smerovalo ku práci so zlomkami, deti pracovali mentálne s rytmami – t.j. v ne-matematickom prostredí, s ne-matematickým cieľom, ale prakticky výhradne s mentálnym nastavením na zlomky, s využitím výhradne matematických prostriedkov. Je zaujímavé, že rytmy sú v tomto prípade v Leshovom modeli reprezentovateľné identickými modelmi ako zlomky.

Pri práci s deťmi, ktoré ešte nemali skúsenosť so zlomkami (dve šieste triedy a jedna siedma, spolu 92 žiakov vo veku 11–13 rokov), nebolo potrebné z mojej strany navrhovať takt – deti, ktoré chodia na hudobnú školu, poznali nielen hodnoty, ale aj takty, pričom dokázali vysvetliť, ako to v binárnom strome funguje a ako sa potom noty radia do taktov.

Podobne deti dokázali vysvetliť aj ďalší aspekt rytmu, ktorý umožňuje od seba odlíšiť aj celkom pravidelné, rovnako vyzerajúce rytmy (striedanie rovnakých skupín nôt). *Metrum* totiž prideľuje niektorým notám *prízvuk*, t.j. zvýrazní ich pozíciu v takte. Ide o prvú notu v každom takte (jednotke taktu sa hovorí tiež *doba*), v taktoch, majúcich viac než tri doby, čiže sú príliš dlhé pre udržanie vedomia štruktúry, sa zvýrazní ešte doba tretia, resp. v sedemosminovom takte doba štvrtá.

Pri hľadaní možností vypĺňania taktov sme v niektorých triedach narazili aj na otázku o „všetkých možnostiach pre daný takt“. Exkurzia do kombinatoriky ukázala aj ďalšie možnosti práce s rytmom, v jednej triede bola požiadavka na začlenenie melódie, skúmanie vzniknutej situácie deti doviedlo až k mocninám a k veľmi veľkým číslam. Vo všetkých triedach sme však prišli k otázke, aká je *skutočná rytmická hodnota* jednej noty v tom-ktorom takte.

Najčastejšie používanou a najznámejšou notou bežných detí nielen v detských pesničkách či skladbách, ale aj pri tvorbe vlastných rytmov, je nota štvrťová. V binárnom strome má hodnotu jednej štvrtiny z noty celej. V skutočnej hudbe však predstavuje jednu štvrtinu celku – taktu – len v štvordobých taktoch (štvorštvrťový, celý a dvojpólový takt). V iných taktoch predstavuje štvrťová nota celkom inú časť. Hodnoty pre dané takty sú na obr. 4.

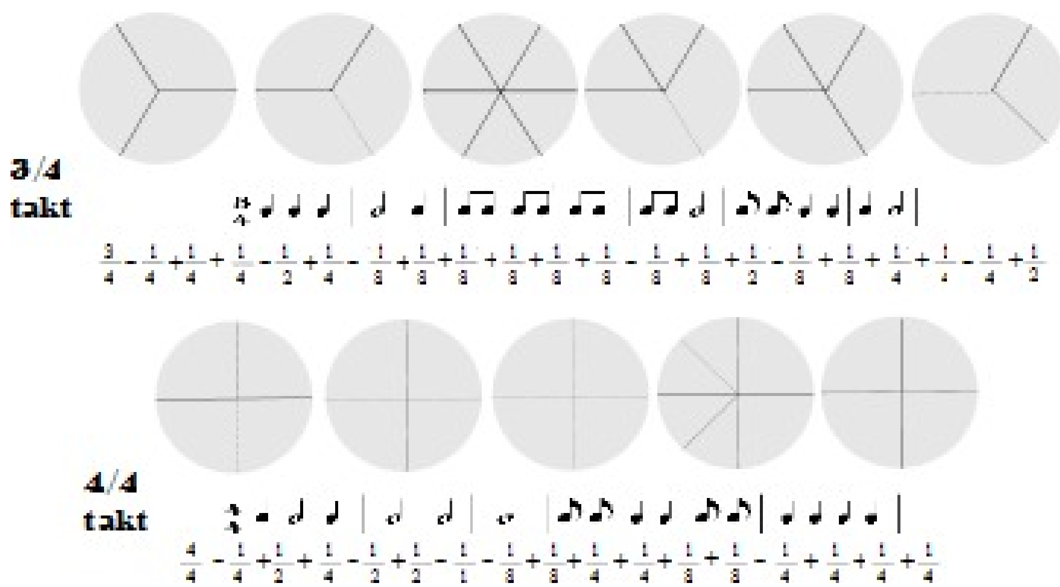


Obr. 4: Proporcie štvrťovej noty v rôznych taktoch

Problém *skutočnej hodnoty* zlomku je analyzovaný aj v štúdii Mitchellovej a Clarka [11] – porozumenie konceptuálnemu významu zlomku (rôzny celok a časť, operátor, procedurálne prístupy k osvojeniu práce so základnými zlomkami), ktorá sa však v skutočnosti nezaoberá hudobnými zlomkami – rytmami – a v práci Smith-Jonesovej [12], ktorá interaktívne vysvetľuje zadelenie nôt do taktov cez binárne zlomky, jej aktivita však vysvetlením a odkazom na zlomky končí. Podobne sa navrhuje využitie prepojenia zlomkov s rytmami aj v návrhu na učebné plány 7. ročníka ZŠ v Ostrave [9], pričom v tomto návrhu ide o základné využitie separovaného modelu trojštvrťového a štvorštvrťového taktu, bez podrobnejšieho rozpisu.

Keď sme analyzovali problém aktuálnej hodnoty danej noty s deťmi, v šiestej a jednej siedmej triede sa ukázal záujem o možné ekvivalencie taktov, ktoré si všimli pri skladaní rytmov (3/4 so 6/8 a 4/4 s C a s 2/2). Tieto takty sa nelíšia počtom umiestniteľných štvrťových nôt, líšia sa len prízvukmi. Diskusia o ekvivalenciách viedla neskôr k objavu ekvivalentných zlomkov a deti zo siedmej triedy si na ňu spomenuli aj pri krátení a násobení zlomkov. Rôzna relatívna hodnota štvrťovej noty a odhalenie možností, ktoré uvažovanie o rôznych typoch celkov poskytuje, vedie k pochopeniu zlomku ako operátora a neskôr ako čísla, označujúceho (ako písomný symbol) práve len absolútnu hodnotu bez ohľadu na jej relatívny význam či aplikáciu v rytme.

Porovnávanie taktov a spôsobov ich napĺňania vyvolalo potrebu rýchlejšieho zapisovania tvorby než sú noty, ktoré sa ťažko píšu. Deti začali zapisovať takty cez zlomky, pričom niektoré si pomáhali dopĺňaním kruhu, rozdeleného na nimi určené doby. Na tabuli aj v zošite tak boli súčasne tri modely zápisu rytmu (obr. 5):



Obr. 5: Tri modely zápisu rytmu / zlomkov

Pri tomto zápise deti s využitím binárneho stromu veľmi rýchlo nahliadli a využili možnosti ekvivalentnej zámeny dvoch štvrtín za jednu polovicu a podobne. Zaujímavé bolo, že deti, ktoré navštevujú hudobnú školu, sa pustili do veľmi komplikovaných zápisov, využívajúcich šestnástinové noty. Okrem týchto detí ešte generovali komplikované rytmy aj dvaja chlapci (jeden šiestak a jeden siedmak), ktorí majú radi matematiku, ale nechodia do hudobnej školy. Ostatné deti využívali noty len po osminové.

Ukázalo sa, že mladšie deti mali väčšie problémy so zapĺňaním taktov, pomáhali si častejšie dopĺňaním kruhu. Staršie deti plynulo opustili kruhy aj noty a zostali pri zlomkoch, ktoré považovali za najefektívnejší prostriedok na tvorenie rytmov („stačilo by to prepísať na počítači priamo do nôt, so zlomkami je to oveľa jednoduchšie než to kresliť“). Bez problémov sčitovali, premieňali a zapisovali zlomky – kontrolovali si, či je to správne – podľa vyhlásení boli zlomky jednoduchšie aj na kontrolu.

Výsledný efekt sa ukázal neskôr pri vysokej motivácii pracovať so zlomkami. V troch triedach, s ktorými som mala možnosť pracovať, sa na hodinách matematiky ukázalo, že deti nemajú strach premýšľať a kombinovať (sčitovať, násobiť) zlomky, že vnímajú (podľa vyjadrenia siedmackej učiteľky matematiky) koncept zlomku ako zaujímavý a hodný preskúmania. Pozitívne naladenie a klíma pri pôvodne formálne orientovanej téme (pravidlá práce so zlomkami) tiež zrejme prispeli k lepším výsledkom týchto tried a k hlbšiemu osvojeniu konceptu zlomku.

Ukázalo sa, že prechod medzi jednotlivými typmi reprezentácie rytmu/zlomku dáva dieťaťu možnosť s ohľadom na jeho individuálne možnosti a preferencie „skúmať myšlienky rôznymi spôsobmi a vytvárať prepojenia medzi ich rozličnými reprezentáciami“ ([6], str. 14). Podľa týchto skúseností vytvárame aj interaktívnu hru [8], ktorá vedie cez vypĺňanie taktov ku zlomkom, pričom deti si môžu vybrať model, cez ktorý budú takty vypĺňať, rovnako ako zvuk, ktorý bude znieť pri prehrávaní rytmu. Perspektívne chceme túto hru dať k dispozícii na internet, aby deti mohli aj mimo vyučovania odhaľovať zákonitosti, platné v hudbe a matematike súčasne.

V našej práci sme mali možnosť dať deťom príležitosť preskúmať a odhaliť niektoré vlastnosti zlomkov, bez toho, aby sa práve na túto tému sústredili. Podľa našej skúsenosti, ne-matematické ciele vedú ku spontánnemu zrodeniu potreby ovládať matematické prostriedky, ktoré umožnia jednoduchšie, presnejšie alebo „krajšie“ dosiahnutie pôvodne daného cieľa. Permanentná spätná väzba, autokorekcie a reflexia vzájomných komentárov detí pomáha upresniť primárny (rytmus) a sekundárny (konceptuálne a procedurálne osvojenie základných zlomkov) cieľ.

Záujem, ktorý deti prejavili o matematickú stránku ich hudobných objavov, môže byť považovaný za potvrdenie efektivity takéhoto zoznamovania sa so zlomkami. Keď sa teda zlomky dostanú k deťom cez dostatočne náročné modely, ktoré vzbudzujú zvedavosť a motivujú tvorivé aktivity v súčinnosti s učiteľom, ktorý má záujem a pochopenie pre takéto presahy, zlomky sa môžu stať skutočne atraktívnym celkom bez koloritu strachu a zložitosti, otvárajúc tak cestu k ďalším lákavým matematickým oblastiam.

Literatúra

[1] Tichá, M., Macháčková, J. [2006]: *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*, JČMF 2006.

[2] Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Ed.) [2004]: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Univerzita Karlova, Praha, 2004.

[3] Kopčáková, S. [2011]: Leonard Stckel a matematika, In: Kónya, P. (Ed.): *Leonard Stckel a reformácia v strednej Európe*, str. 58–94, Vydavateľstvo Prešovskej univerzity, Prešov, 2011.

[4] Komenský, J., A. [1653]: *Výber z potockých spisov a rečí Jana Amosa Komenského*, [1653] Univerzita Komenského Bratislava, 1992

[5] Studnička, F.J. [1875]: Jak počítali Římané zlomky, *Pěstujeme matematiku a fyziku*, 1875, VOl. 4, N°3, str. 139–144

[6] Cramer, K., Behr, M., Post, Th., Lesh, R. [2012]: *The Rational number project, initial fraction ideas*, University of Minnesota College of Education and Human Development, `http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject`

[7] Lewis, R. [1979]: Aristoxenes on Rhythm, *Journal of Music Theory*, Vol. 23.1. Spring, 1979, pp. 63–79

[8] Kamrlová, B., Varhaníková, I. [2011]: Is one quarter-note always one quarter of the whole? In *Proceedings of ICL Conference* 2011, Piešťany 2011, IEEE New York, 2011, str. 584–588

[9] Květoň, P., Ott, M., Vavroš, P.: *Metodika výuky matematiky na 2. stupni základních škol a středních školách z pohledu pedagogické praxe – náměty pro začínající učitele* [2010], Ostravská Univerzita, Ostrava, 2010. (38, 39)

[10] Smith-Jones, C.: *Fractions, Multiples, Beats, and Measures* `http://cnx.org/content/m11807/1.7/`

[11] Mitchell, A., & Clarke, D., M. [2010], When is three quarters not three quarters? In I. Putt, R. Farragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, str. 367–373). Townsville,Queensland: MERGA, 2010.

DIDAKTICKÉ HRY AKO NÁSTROJ ZVYŠOVANIA ÚROVNE PRAVDEPODOBNOSTNÉHO MYSLENIA

ZUZANA KELLNEROVÁ, JAROSLAVA BRINCKOVÁ[1]

Úvod

Riešenie úloh z počtu pravdepodobnosti môže byť široko chápanou matematickou činnosťou, ktorá v sebe zahŕňa výpočet pravdepodobnosti, dedukciu, prevod matematického problému do matematického jazyka, konštrukciu matematického modelu, tvorenie úsudkov, interpretáciu výsledkov výpočtu. V Štátnom vzdelávacom programe ISCED sú špecifikované štandardy kompetencií v oblasti stochastiky, ktoré má žiak získať. Žiak získa skúsenosti s organizáciou konkrétnych súborov predmetov podľa zvoleného ľubovoľného kritéria prostredníctvom hier a manipulatívnych činností, vie z daného počtu prvkov vybrať skupinu s daným počtom prvkov podľa určeného pravidla a vypočítať počet možností výberu, vykonáva zber, zápis, interpretáciu údajov a ich grafické znázornenie, je schopný orientovať sa v množine údajov, vie prisúdiť výrokom z blízkeho okolia správnu pravdivostnú hodnotu a je schopný posudzovať realitu zo štatistického a pravdepodobnostného pohľadu a vie rozlíšiť istý a nemožný jav. (ISCED 2 – nižšie sekundárne vzdelávanie)

Medzinárodná štúdia PISA charakterizuje tri úrovne osvojenia si učiva žiakom. Najnižšou je úroveň reprodukcie, ktorá zahŕňa spoznanie a uvedomenie si matematického objektu a použitie štandardného algoritmu, výpočtu, či technického postupu. Vyššia úroveň je úroveň prepojenia, ktorú chápeme ako prepojenie viacerých matematických oblastí a informácií, pričom je žiak schopný riešiť nie rutinné problémy s nízkym stupňom matematizácie. Najvyššou úrovňou je úroveň reflexie, ktorá zahŕňa analýzu problému, argumentovanie, zovšeobecňovanie, vytváranie vlastných modelov a stratégií, formuláciu problému a jeho riešenie.

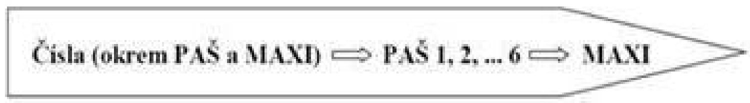
Významným prostriedkom na zvyšovanie úrovne pravdepodobnostného myslenia žiakov je didaktická hra. Didaktická hra je významným aktivizujúcim nástrojom pre žiakov, plní motivačnú funkciu, keďže motivácia vychádza už zo samotnej situácie nastolenej hrou, hra tiež rozvíja aktivitu, samostatnosť a tvorivosť u žiakov. Použitie didaktickej hry je vhodné práve v oblasti vyučovania pravdepodobnosti. Medzi pravdepodobnostné didaktické hry zaraďujeme hod hracími kockami, hod mincou, losovanie guliek z urny, losovanie kariet z balíčka, ruletu, koleso šťastia, Galtonovu dosku a iné.

[1]Fakulta prírodných vied UMB; Banská Bystrica, `zuzanakellnerova@umb.sk`

Didaktická hra „MAXI“

Pravidlá hry

Hádžeme dvoma hracími kockami pomocou nepriesvitného pohára. Väčšie číslo určuje počet desiatok a menšie počet jednotiek hodeného čísla (Ak na kockách padnú čísla 2 a 4, hodené číslo je 42). Dve rovnaké čísla predstavujú „PAŠ“ (Dve päťky znamenajú paš 5). 21 je najmenšie možné číslo s rôznymi ciframi, nazveme ho „MAXI“. Postupnosť jednotlivých hodov je znázornená na obr. 1.



Obr. 1

Hra prebieha v kruhu. Začína hádzať prvý hráč. . .

1. Hodí kockami a nikomu neukáže výsledok, môže si ho pozrieť iba on, ale nemusí.

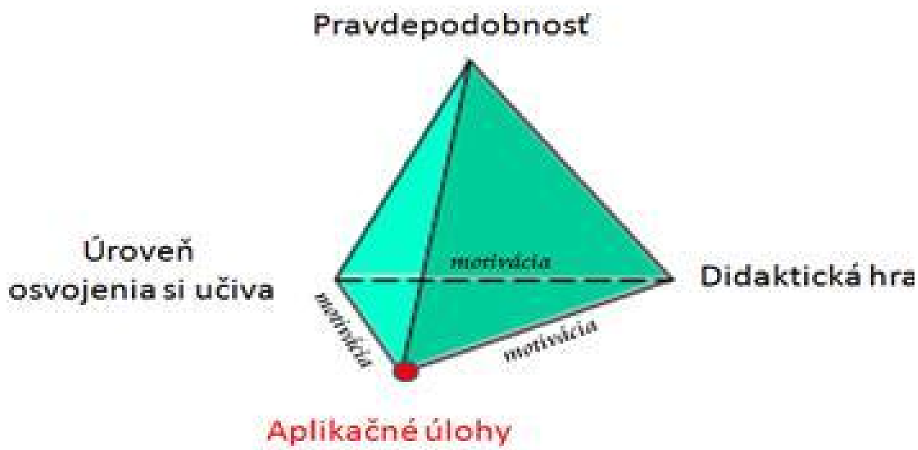
2. Zakryté kocky posunie ďalšiemu tak, aby hodené čísla ostali nezmenené. Pritom oznámi výsledok svojho hodu. Musí byť však vyšší ako číslo, ktoré padlo predtým, preto môže aj klamať.

3. Nasledujúci hráč má dve možnosti: môže veriť alebo neveriť svojmu predchodcovi. Ak mu verí, bez toho aby si kocky pozrel, hádže znova a musí hodiť vyššie číslo, ako bol hod predchádzajúceho hráča. Ak neverí, že padol taký výsledok, ako tvrdí predchádzajúci hráč, pozrie na kocky. Pokiaľ predchodca povedal pravdu, dostane hráč, ktorý neveril mínusový bod. Ak predchodca klamal, dostane mínusový bod on. Ten, kto dostane mínusový bod, začína hru odznova.

4. Keď hráč povie MAXI, čo sa už nedá prekonať, môže mu nasledujúci hráč uveriť a dostáva jeden mínusový bod alebo mu neverí a pozrie si kocky. Ak tam MAXI naozaj bolo, dostáva ten, čo neveril 2 mínusové body. Ak na kockách nebolo MAXI, dostáva 2 mínusové body ten, čo klamal. (`http://www.welt-der-wuerfel.de/maexchen/`)

Didaktickú hru Maxi sme zaradili do vyučovania v rámci matematického krúžku na druhom stupni ZŠ. Hra prebiehala v dvoch fázach. V prvej časti hrali žiaci hru iba na základe predstavených pravidiel bez analyzovania pravdepodobnosti jednotlivých hodov. V druhej fáze žiaci riešili zadané úlohy na pravdepodobnosť vyššieho hodu v jednotlivých prípadoch a následne hrali hru znova, pričom si už uvedomovali pravdepodobnosť jednotlivých hodov. Pri prvej hre žiaci tvrdili, že sa neoplatí nikomu veriť, keď však prehrávali, začali uvažovať. Správne vyriešenie úloh ich viedlo k tomu, aby sa po každom hode zamysleli, či budú klamať a kedy budú svojim spolužiakom veriť. Žiaci si tiež stanovili hranicu, kedy je ešte aspoň 50% šanca, že hodia vyššie číslo (pri čísle 54). Spoznanie pravdepodobnostného pozadia hry a algoritmu viedlo žiakov následne k jeho používaniu v didaktickej hre, čo spôsobilo, že záverečná hra bola napínavá a skóre vyrovnané.

Ďalším vhodným prostriedkom na zvyšovanie úrovne pravdepodobnostného myslenia u žiakov sú **aplikačné úlohy** (obr. 2). Aplikačná úloha je definovaná ako akt alebo situácia hľadania pravdy, informácie, poznatku o niečom, vyžaduje od žiakov skúmanie faktov alebo princípov, výskum a bádanie (Brincková, 2010). Aplikačné úlohy vedú žiakov k aktívnemu učeniu a zapamätaniu si učiva, žiaci majú zodpovednosť za svoje vlastné učenie, a tiež spájajú osvojené vedomosti a zručnosti s reálnym svetom.



Obr. 2

Keďže základom vzdelávania v programe EU je interdisciplinárny (medzipredmetový) prístup pri osvojovaní znalostí a spôsobilostí žiakov a rozvoj ich analytických a kritických schopností, je potrebné aj v rámci vyučovania pravdepodobnosti spájať poznatky z počtu pravdepodobnosti s poznatkami z iných vyučovacích predmetov. Ide o medzipredmetové vzťahy, t.j. väzby medzi vyučovacími predmetmi, ktoré odrážajú objektívne existujúce medzivedné vzťahy. Medzipredmetové vzťahy delíme na medzipredmetové a vnútropredmetové (Brincková, 2010). Vhodným prostredím na zavedenie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní pravdepodobnosti sú aplikačné úlohy.

Ukážky aplikačných úloh

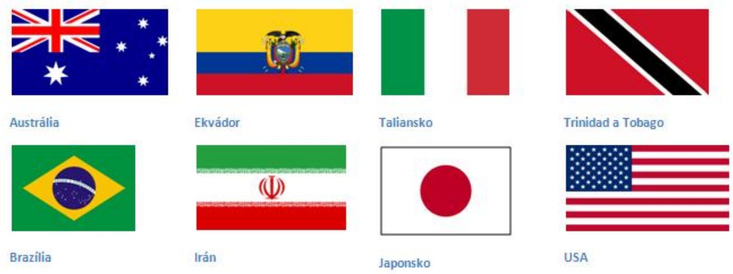
Úloha 1

Boli sme na výstave štátnych vlajok z celého sveta. Organizátori sa chystajú vyhlásiť najkrajšiu vlajku. Do finále sa dostali nasledovné vlajky (obr. 3):

Aká je pravdepodobnosť, že víťazná vlajka bude z Európy?

Je rovnaká pravdepodobnosť výberu vlajku z Európy alebo z Austrálie?

Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá vlajka zo Slovenska?
Aká je pravdepodobnosť, že najkrajšia vlajka bude z Ameriky?
Je väčšia šanca, že víťazná vlajka bude z Ázie ako z Európy?



Obr. 3

Pri riešení tejto úlohy žiaci mali problém najmä s určením, kde niektoré štáty ležia, museli ich nájsť v atlase. S následným výpočtom už žiaden problém nebol.

Úloha 2

Martin a Erika sa dohodli na nasledujúcej hre: Budú stále hádzať jednou hracou kockou. Ak padne dvojka, Erika dá Martinovi 1 EURO. Ak padne iné číslo, zaplatí Martin Erike. Akú sumu by jej mal dať, aby hra bola férová?

Pre vyriešenie tejto úlohy si žiaci najskôr potrebovali vydiskutovať, čo znamená férová hra a či musí Martin zaplatiť Erike viac alebo menej. Po chybnom tvrdení, že jej musí dať 5-krát viac, sme si so žiakmi hru zahrali a oni následne prišli rýchlo na správne riešenie.

Použitie takýchto úloh vo vyučovaní je dobrou motiváciou pre žiakov. Skúste to v škole aj vy!

Literatúra

[1] Brincková, J.: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy*. Banská Bystrica: FPV UMB/ BRATIA SABOVCI spol. s r.o. Zvolen. 2010. s. 160.

[2] `http://www.welt-der-wuerfel.de/maexchen/`

[3] *Štátny vzdelávací program pre 2. stupeň základnej školy v Slovenskej republike : ISCED 2 – nižšie sekundárne vzdelávanie*. Bratislava: ŠPU 2011. [online]. [cit. 2012-03-04]. Dostupné na internete: `http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie\_oblasti/matematika\_isced2.pdf`

[4] `http://www.ineko.sk/ostatne/matematicka-gramotnost\#fn47186561454a09b0d3459`

KVALITATÍVNA ANALÝZA RIEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z POČTU PRAVDEPODOBNOSTI

KATARÍNA KOCOVÁ MIČKANINOVÁ[1]

Úvod

V školskom roku 2010/2011 sme zrealizovali experimentálnu výučbu na Gymnáziu Poštová v Košiciach, kde sme sa venovali základným pojmom z počtu pravdepodobnosti. Priemer triedy z matematiky na konci prvého polroku tohto roku bol 2,63 a úspešnosť 60 %. Na demonštráciu náhodných pokusov sme využívali simulácie pripravené v programe MS Excel a applety dostupné na internete [2].

Na overenie účinnosti realizovanej výučby sme využili kvalitatívnu analýzu riešení kontrolných úloh, ktoré sme žiakom zadávali na konci školského roka, teda nie bezprostredne po ukončení vyučovania počtu pravdepodobnosti, z dôvodu zistenia trvalejších poznatkov.

Kvalitatívna analýza vybraných úloh z počtu pravdepodobnosti

Kontrolné úlohy súviseli s preberaným učivom; každá z úloh bola akýmsi ekvivalentom k riešeným úlohám počas jednotlivých vyučovacích hodín.

Zadania úloh

1. Vo vrecúšku je päť guľôčok:

   [a)] Biela, modrá, zelená a červená.

   [b)] Dve biele, modrá, zelená a červená.

   Aká je pravdepodobnosť, že pri náhodnom výbere dvoch guľôčok bude vybraná modrá a červená guľôčka?

2. V číselnej lotérii LOTO sa vyberá päť rôznych čísel z množiny $1,2,\ldots,35$. Aká je pravdepodobnosť, že pri podaní jedného tiketu uhádneme aspoň štyri čísla?

[1] PF UPJŠ, Ústav matematických vied, Košice, mickanik@gmail.com

3. Dvaja hráči hrajú hru. Majú k dispozícii dva červené žetóny a jeden modrý žetón so stranami A a B. Vyhodia všetky tri žetóny súčasne. Hráč 2 získa bod, ak padne na oboch červených žetónoch strana A, alebo na modrom žetóne strana A, alebo na všetkých troch žetónoch padne strana A. Inak získava bod hráč 1. Majú obaja hráči rovnakú šancu výhry?

4. Štyria hráči hrajú hru. Každý z hráčov má 12 kariet rovnakého označenia (srdce, kára, kríž alebo pika). Hráči, ktorí majú srdcia a káry, tvoria družstvo A, hráči s krížami a pikami tvoria družstvo B. Každý hráč vyloží náhodne vybranú jednu zo svojich kariet. Pokiaľ každá vyložená karta má inú hodnotu, víťazí družstvo A, inak víťazí družstvo B. Čo je pravdepodobnejšie, že vyhrá družstvo A, alebo že vyhrá družstvo B?

Kvalitatívna analýza riešení

Pri kvalitatívnej analýze žiackych riešení sme vychádzali z etapizácie procesu riešenia navrhnutej G. Polyom a pretransformovanej prof. Hejným [1] a elementov riešenia úloh z kombinatoriky modifikovaných a doplnených pre potreby kvalitatívnej analýzy doc. Scholtzovou [3]. Z vyššie uvedených zdrojov sme vybrali a zostavili 8 elementov slúžiacich na analýzu riešení zvolených úloh z počtu pravdepodobnosti:

Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy.
Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia.
Grafické znázornenie.
Zostavenie pravdepodobnostného priestoru verzus Laplaceova schéma.
Ktoré možnosti sú priaznivé?
Kombinatorické aspekty úlohy.
Organizácia a systém.
Interpretácia výsledku.

Časť vymedzených elementov rozanalyzujeme vzhľadom na jednotlivé úlohy, v ktorých väčšiu pozornosť venujeme neúplným, nepresným, či nesprávnym riešeniam. Prehľad čiastkových výsledkov riešení úloh uvádzame v tabuľke č. 1. Percentuálne vyhodnotenie sme vypočítali na základe získaných bodov jednotlivých úloh.

Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy

Porozumenie textu úlohy a chápanie hlavnej myšlienky riešenia u väčšiny žiakov nebolo problémom. Pri niektorých úlohách, ktoré neboli riešené, nevieme presne rozhodnúť, či boli pre žiakov nezrozumiteľné alebo ich neriešili z časových, či iných dôvodov.

Úloha č.	Neriešené	Riešené			%
		Nesprávne	Neúplné	Správne	
1 a)	0	0	3	20	95,7%
b)	0	6	3	14	69,6%
2	0	5	9	9	51,1%
3	0	3	11	9	52,9%
4	6	0	5	12	57,2%

Tab. 1: Zatriedenie riešení preverovacích úloh

1. úloha: Zo správneho riešenia jedného žiaka usudzujeme, že zadanie poňal v duchu: Aká je pravdepodobnosť, že pri ťahaní dvoch gulôčiek vytiahneme modrú a červenú v odpovedajúcom poradí; prvú modrú a druhú červenú. Pri mnohých úlohách z počtu pravdepodobnosti môže dochádzať k ich rôznemu vyloženiu, preto by bolo prospešné pri riešeniach jednotlivých úloh klásť väčší dôraz na ich zadanie; čo sa od nás očakáva, na čo sa nás pýta.

Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia

Pri výbere metódy a stratégie riešenia sa venujeme tej časti žiackeho riešenia, kedy nastáva rozhodovací proces o spôsobe ako danú úlohu riešiť.

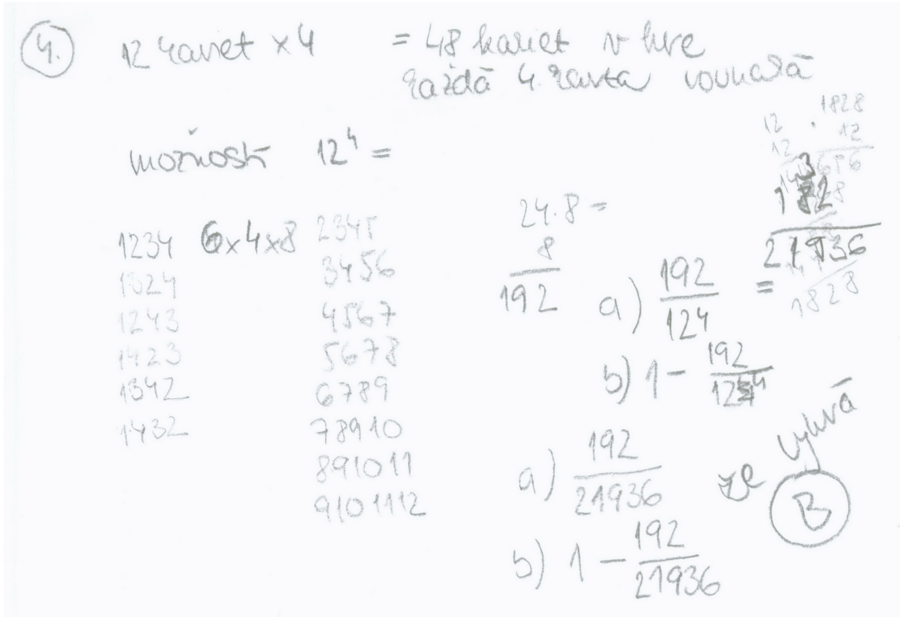
3. úloha: V tejto úlohe si **šiesti** žiaci zvolili výpočet pomocou pravdepodobnosti zjednotenia javov, čo si pri troch javoch vyžaduje už viac výpočtov a samozrejme vzniká aj viac možných chýb. Dvaja žiaci mali úplné riešenie, zvyšní štyria zabudli odrátať potrebné prieniky a dospeli tak k nesprávnemu výsledku. Pri týchto riešeniach je ťažké posúdiť, či išlo o chyby z nepozornosti alebo si žiaci neuvedomili, že pracujú s navzájom nevylučujúcimi sa javmi.

4. úloha Jedna žiačka si zvolila metódu výpisu všetkých priaznivých výsledkov náhodného javu, že každá zo štyroch vyložených kariet bude iná. Zvolila si systém, avšak zabudla na mnoho možností a riešenie nedokončila úspešne. Jej riešenie uvádzame na obr. 1.

Zostavenie pravdepodobnostného priestoru verzus Laplaceova schéma

Pri konštruovaní výberového priestoru v jednotlivých úlohách sme očakávali ťažkosti, ktoré sa v riešeniach vyskytli.

1. úloha: Očakávaný problém sa dostavil pri riešení úlohy b. **Šiesti** žiaci vypísali týchto 7 možností tvoriacich pravdepodobnostný priestor Ω: BB, BM, BZ, BČ, MZ, **MČ**, ZČ; kde priaznivú možnosť predstavuje len vyznačená dvojica MČ, čiže pravdepodobnosť vytiahnutia modrej a červenej guľôčky je $\frac{1}{7}$. Chyba týchto riešení spočíva



Obr. 1: Ukážka riešenia 4. úlohy výpisom všetkých možností

v nerozlišovaní gulôčiek rovnakej farby, čo spôsobuje, že nie všetky výsledky náhodného pokusu sú rovnako pravdepodobné a následné automatické použitie Laplaceovej schémy na výpočet pravdepodobnosti bez uvedomenia si, že jej použitie si vyžaduje splnenie istých predpokladov.

2. úloha: Všetci s výnimkou **piatich** žiakov nemali problém s určením počtu prvkov množiny Ω, teda, koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 rôznych čísel z 35. Pri nesprávnych riešeniach sa u žiakov vyskytol nielen problém s určením množiny všetkých výsledkov ale aj s množinou priaznivých výsledkov. U týchto žiakov už zrejme pri prijímaní a uchopení informácií pri demonštrovaní poznatkov spätých s riešením podobných úloh nedošlo k ich hlbšiemu spracovaniu. To môže vysvetliť zápis jednotlivých výsledkov riešenia ako kombinácia čísel 5 a 35 s rôznymi matematickými operáciami; napr. $\frac{1}{35^5}$, $\frac{4}{35}+\frac{5}{35}$, $\frac{1}{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}$.

3. úloha: **Siedmi** žiaci pri zostavovaní množiny všetkých výsledkov síce správne určili, že sa jedná o usporiadané trojice, avšak nenašli ich všetky. Úlohu potom vzhľadom na ich nájdený počet výsledkov správne vyriešili. Celkovo veľmi málo žiakov si svoje výpočty overuje skúškou správnosti, ktorá by mala byť neodmysliteľnou súčasťou riešenia každej úlohy a jej prostredníctvom by sa možné chyby v riešení jednoducho odhalili.

4. úloha: Všetci riešitelia správne zvolili riešenie využívajúce opačný jav. Pri **piatich** neúplných riešeniach sa v jednom prípade vyskytol problém s určením počtu množiny všetkých výsledkov Ω, kde mohlo dôjsť k nesprávnemu použitiu, či nepochopeniu kombinatorických pravidiel a $|\Omega| = \binom{48}{4}$. Pri jednom riešení bol správne určený pravdepodobnostný priestor, správne vyčlenené priaznivé výsledky, správna odpoveď, ale chýbal komentár, či výsledný výpočet a preto presne nevieme zhodnotiť porozumenie danému výpočtu.

Ktoré možnosti sú priaznivé?

1. úloha: K nesprávnym výsledkom došlo u troch žiakov; dvaja určili, že priaznivých možností je 2, čo je spôsobené nesprávnou predstavou chápania jednej priaznivej možnosti – dvojica modrej a červenej gulôčky ako dve priaznivé možnosti – modrá a červená guľôčka.

2. úloha: Výraznejší problém s určením priaznivých možností nachádzame v tejto úlohe, čo je spôsobené kombinatorickou povahou úlohy. Až **deviati** žiaci nevedeli určiť počet priaznivých možností a v čitateli zlomku vyjadrujúceho pravdepodobnosť tohto náhodného javu najčastejšie napísali 1.

4. úloha: Dvaja riešitelia mali problém s určením priaznivých možností a preto namiesto správneho počtu automaticky napísali 1. Jedno riešenie spočívalo vo vypisovaní priaznivých možností, avšak, keďže to nie je najvhodnejšia stratégia riešenia pre veľký počet týchto možností, žiačka nenašla všetky priaznivé štvorice a teda, riešenie nebolo správne.

Záver

Dosť výrazné skreslenie pri posúdení úspešnosti realizovanej výučby nastalo neprítomnosťou troch výborných žiakov, ktorí sa v čase riešenia kontrolných úloh zúčastnili stretnutia matematického korešpondenčného seminára STROM. Aj napriek faktorom (časový odstup, priemer testovacej skupiny), ktoré ovplyvnili získané výsledky, celková úspešnosť triedy je 60 %, čo považujeme za primerané výsledky a účinnosť experimentálnej výučby hodnotíme kladne. Z výsledkov získaných touto analýzou vidíme značné nedostatky pri úlohách kombinatorickej povahy. Preto pri dopĺňaní a úprave navrhnutých vyučovacích hodín budeme takýmto úlohám venovať väčšiu pozornosť.

Literatúra

[1] Hejný, M. – Michalcová, A. 2009. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. 1. vyd. Bratislava: Metodické centrum, 2001. 188 s. ISBN 80-8052-085-2.

[2] Kocová Mičkaninová, K. *Využitie IKT pri rozvíjaní matematických kľúčových kompetencií: rigorózna práca*. Košice: PF UPJŠ, 2011. 67 s.

[3] Scholtzová, I. 2003. *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ: rozvíjanie kombinatorického myslenia.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum, 2003. 35 s. ISBN 80-8045-322-5.

ZVYŠOVANIE MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI ŽIAKOV ZŠ V OBLASTI NÁHODNOSŤ

MÁRIA KÓŠOVÁ, EVA UHRINOVÁ[1]

Úvod

Nasledujúci príspevok je o projekte KEGA (3/7001/09) *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií - alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA*, ktorý sa zaoberá zvyšovaním matematickej gramotnosti žiakov ZŠ [1]. Konkrétne sa budeme zaoberať tematickou oblasťou Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika. Tento projekt vychádza z cieľov Štátneho vzdelávacieho programu na Slovensku a aj výsledkov medzinárodnej porovnávacej štúdie PISA, kde v roku 2003, kedy bola táto medzinárodná porovnávacia štúdia zameraná na matematickú gramotnosť, dosiahlo Slovensko v matematickej gramotnosti 21. miesto zo 46. zapojených krajín. Najhoršie v tejto štúdii dopadla práve oblasť náhodnosť [2].

Projekt KEGA (3/7001/09)

Tento projekt začal prebiehať v roku 2008. V každom roku riešenia sa zameriava pozornosť na niektorý ročník ZŠ. Cieľom projektu v školskom roku 2011/2012 je príprava učebných materiálov predmetu matematika pre žiakov 7. ročníka ZŠ a overenie efektívnosti vyučovania pomocou týchto materiálov v školskej praxi. Tieto materiály sú zamerané hlavne na zvyšovanie matematických kompetencií pri riešení úloh z bežného života a tým aj na prípravu žiakov na medzinárodné testovanie vedomostí.

[1] Katedra matematiky FPV UKF Nitra, maria.kosova@ukf.sk, eva.uhrinova@ukf.sk

V rámci tohto projektu prebieha experiment, do ktorého je v súčasnosti zapojených okolo 750 žiakov z 30 škôl. Na konci každého školského roka sa prostredníctvom výstupného testu overuje efektívnosť vyučovania pomocou vytvorených materiálov v školskej praxi (vstupný test bol na začiatku experimentu).

V minulom školskom roku (20010/2011) bol tento výskum venovaný príprave učebných materiálov a overeniu efektívnosti ich použitia vo vyučovaní v 6. ročníku ZŠ a rok predtým v 5. ročníku ZŠ. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu v predchádzajúcich rokoch riešenia projektu sú uvedené v článkoch [3] a [4].

Pripravené učebné materiály obsahujú úlohy spolu s metodickými pokynmi, pomocou ktorých chceme vzdelávať učiteľov v školskej praxi - oboznamujeme učiteľov so skúmanou problematikou, vysvetľujeme niektoré dôležité pojmy a odporúčame spôsob výučby pomocou tohto materiálu. Bližšie informácie o projekte aj s úlohami sa nachádzajú na internetovej stránke [1].

Vytvorené materiály

Materiály, ktoré sú poskytované učiteľom obsahujú úlohy s kontextom zo života žiaka. Vytvorené úlohy sú distribuované učiteľom prostredníctvom internetovej stránky, kde si ich môže každý učiteľ po prihlásení stiahnuť. Pre ilustráciu uvádzame ukážky úloh, ktoré boli zaradené do tematického okruhu kombinatorika, pravdepodobnosť a matematická štatistika pre žiakov 6. ročníka.

Weiss na zraze pred Chorvátskom privítal len polovicu hráčov

Prvýkrát po úspešných majstrovstvách sveta v JAR sa v nedeľu na seneckom zraze pred prípravným zápasom s Chorvátskom (streda 11. augusta, Pasienky, 20.30 h) stretla slovenská futbalová reprezentácia.

Tréner osemfinalistu afrického šampionátu Vladimír Weiss privítal na podvečernom zraze v hoteli Dolphin len polovicu z nominovaných hráčov, zvyšok sa k tímu pripojí neskôr. Káder by mal byť kompletný na pondelňajšom večernom tréningu. K tímu sa postupne pridajú kapitán Marek Hamšík, Juraj Kucka, Stanislav Šesták, Róbert Vittek či ďalší, ktorí mali ešte povinnosti v kluboch počas víkendu. Slováci si po splnení povinností s médiami podvečer v seneckom NTC zatrénovali (18.30, tréning zatvorený), v pondelok mali v pláne absolvovať až dve tréningové jednotky (10.00 a 18.30).

Zdroj: *http://www.pluska.sk/sport/futbal/reprezentacie/slovenska-reprezentacia/weiss-zraze-pred-chorvatskom-privital-polovicu-hracov.html*

Úloha 1

V akých rôznych poradiach sa mohli pripojiť Marek Hamšík, Juraj Kucka a Róbert Vittek k mužstvu?

Úloha 2

Počas zápasu má tréner Vladimír Weiss možnosť troch striedaní. Aj napriek niekoľkým sľubným šanciam sa žiadnemu z hráčov nepodarilo do 50-tej minúty streliť gól. Rovnako tak Slovensko dovtedy neinkasovalo gól. Tréner Weiss sa preto domnieval, že chyba určite nie je v obrane. Zdalo sa mu vhodné vystriedať trojicu, ktorú si vyberie spomedzi týchto hráčov Kucka, Karhan, Stoch , Hološko, Šesták. Aké rôzne trojice hráčov mohli byť vystriedané? Nastúpili títo hráči Mucha – Pekarík, Škrtel, Saláta, Hubočan – Weiss, Kucka, Karhan, Stoch – Hološko, Šesták.

Metodické pokyny

Prvá úloha je zameraná na vytváranie trojíc prvkov, pričom nám záleží na poradí a naopak v druhej úlohe ide o vytváranie trojíc prvkov, pričom nám nezáleží na poradí. Žiaci najskôr tvoria trojprvkové permutácie a potom trojprvkové kombinácie. Úloha je zameraná na uvedomenie si rozdielu medzi možnosťami, ak nám záleží na poradí prvkov a možnosťami, ak nám nezáleží na poradí prvkov.

Vyhrajte s Orangeom

Nazbierajte všetky písmená zo slova ORANGE, pošlite ich na našu adresu a vyhrajte nový mobilný telefón LG GV 300. Ako na to? Stačí dobiť kredit sumou 7 EURO alebo 14 EURO. Pri dobití sumou 7 EURO, získate jedno písmeno a pri dobití 14 EURO, dve rôzne písmená.

Úloha 1

Čo je výhodnejšie, dobiť si kredit dvakrát za 7 EURO alebo raz za 14 EURO? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 2

Aká je šanca, že pri dobití kreditu dvakrát za 7 EURO, nedostaneš rovnaké písmená?

Úloha 3

Ak ti chýba len písmeno A, aká je šanca že ho dostaneš, ak si dobiješ kredit za 7 EURO ?

Metodické pokyny

Žiaci si môžu súťaž vyskúšať. Trieda sa rozdelí na dve časti: prvá polovica si bude dobíjať kredit sumou 7 EURO a druhá sumou 14 EURO. Učiteľ pripraví kartičky s písmenami. Do jedného vrecka vloží kartičky so všetkými písmenami (každé práve raz). Z tohto budú ťahať kartičky žiaci, ktorí si dobíjajú kredit sumou 7 EURO. Po vytiahnutí a zapísaní písmenka žiak kartičku do vrecka vráti. Žiaci, ktorí si dobíjajú kredit sumou 14 EURO, si budú vyťahovať dve kartičky zo šiestich vreciek (každú z iného). Každé z týchto šiestich vreciek bude obsahovať kartičky s práve jedným písmenom, čím je zaručená rozdielnosť písmen. Po vytiahnutí písmen, si podobne žiak písmenká zapíše a kartičky vráti do príslušných vreciek. Následne sa vrecká premiešajú tak, aby žiaci nevedeli, ktoré vrecko predstavuje aké písmeno. Každý žiak vytiahne vždy dve kartičky. Súťaž môže trvať, pokým niektorý žiak nezíska celé slovo (s ohľadom na čas). Počas súťaže si žiaci zapisujú, aké písmená dostanú. Na základe týchto údajov šancu v druhej a tretej úlohe najskôr odhadnú, a potom overia výpočtom. Ten spočíva v úlohe 2 v zistení počtu kombinácií druhej triedy zo šiestich prvkov s opakovaním a ich rozdelenia na dvojice s rôznymi prvkami a dvojice s rovnakými prvkami. V úlohe 3 spočíva najskôr v zistení počtu kombinácií prvej triedy zo šiestich prvkov a ďalej v zistení počtu kombinácií druhej triedy zo šiestich prvkov bez opakovania. Aby si žiaci utvárali všeobecnú predstavu o vyjadrení šance bez viazanosti na konkrétne vypísané možnosti, je pri riešení úloh dôležité používať spojenie „pre nás priaznivé (nepriaznivé) možnosti resp. situácie“.

Záver

Výstupný test, ktorý píšu žiaci na konci školského roka, obsahuje niekoľko úloh (v šiestom ročníku to bolo 6 úloh), z ktorých každá pozostáva z niekoľkých podúloh. Všetky otázky v úlohách sú otvorené. Obsahová validita testu je posúdená učiteľmi ZŠ. Test je najskôr odskúšaný na jednej z experimentálnych škôl a na základe toho sú niektoré úlohy mierne upravené.

Podľa výsledkov štatistického spracovania výstupných testov z predchádzajúcich dvoch rokov riešenia projektu usudzujeme, že v oboch ročníkoch dosiahli žiaci experimentálnej skupiny štatisticky významne lepšie výsledky ako žiaci kontrolnej skupiny. Zaujímavé je, že v šiestom ročníku bol tento rozdiel vo vedomostnej úrovni výraznejší. Tento fakt nás vedie k myšlienke, že efektívnosť pripravených materiálov sa v čase prehlbuje. Zistili sme tiež, že nie je signifikantný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na pohlavie, ale tiež vzhľadom na poruchy učenia. Pri podrobnejšej analýze vyšlo najavo, že tento fakt nie je spôsobený pripravenými materiálmi, totiž už v kontrolných skupinách nie je medzi žiakmi s poruchou a bez poruchy učenia významný rozdiel (pravdepodobne ide o poruchy učenia nevplývajúce na matematiku).

Na základe výsledkov výstupného testu možno teda konštatovať, že materiály pripravené pre učiteľov a prostredníctvom nich pre žiakov 6. ročníka ZŠ, efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 6. ročníka ZŠ.

Literatúra

[1] *Projekt KEGA (3/7001/09)*, [2012-02-26]. Dostupné na internete: `http://www.kega.fss.ukf.sk`

[2] *Matematická gramotnosť vo výskume PISA 2003.* [2012-02-26]. Dostupné na internete: `http://www.ineko.sk/ostatne/matematicka-gramotnost`

[3] Kóšová, M. Rybanský, Ľ. 2011. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 6. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: *Zborník príspevkov z IX. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre*, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2011. (zaslaný do tlače)

[4] Rybanský Ľ., Vrábelová M.: Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: *Zborník príspevkov z VIII. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre* (16. – 17. September 2010), Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2010 ISBN 978-80-8094-781-1

MATEMATICKÉ KOMPETENCIE ŽIAKOV NA INFORMATIKE

JANKA MAJHEROVÁ, JANKA KOPÁČOVÁ[1]

V príspevku sa venujeme rozvíjaniu matematických kompetencií žiakov riešením úloh informatickej online súťaže iBobor. Zameriame sa na kategóriu pre žiakov 1. stupňa základných škôl (Bobrík). V rozbore úloh súťaže zisťujeme prítomnosť kompetencií podľa Štátneho vzdelávacieho programu pre primárne vzdelávanie (ISCED 1) v oblasti Matematika a práca s informáciami.

Úvod

V slovenskom Štátnom vzdelávacom programe pre primárne vzdelávanie (ISCED 1) sú predmety Matematika a Informatická výchova súčasťou spoločnej oblasti vzdelávania s názvom Matematika a práca s informáciami.

„Cieľom učebného predmetu Matematika na 1. stupni ZŠ je rozvoj tých schopností žiakov, pomocou ktorých sa pripravia na samostatné získavanie a aplikáciu poznatkov. Na dosiahnutie tohto cieľa majú získať také skúsenosti, ktoré vyústia do poznávacích metód zodpovedajúcich veku žiakov.“ (ŠVP ISCED 1, 2008, s. 13) Vyučovanie matematiky sa v rámci práce s informáciami orientuje na prácu s tabuľkami, grafmi a diagramami, žiaci v rámci svojich možností riešia úlohy a problémy, ktoré budujú vzťah medzi matematiku a realitou, využívajú prostriedky IKT (kalkulátory, počítače) na vyhľadávanie, spracovanie a uloženie informácií.

Cieľom **informatickej výchovy** na 1. stupni ZŠ je zoznámenie sa s počítačom a možnosťami jeho využitia v každodennom živote. Prostredníctvom aplikácií obsahom aj ovládaním primeraných veku žiaci získjú základné zručnosti v používaní počítača. V rámci medzipredmetových vzťahov si žiaci pomocou rôznych aplikácií precvičujú základné učivo z matematiky, slovenského a cudzieho jazyka, získavajú vedomosti za podpory edukačných programov z prírodovedy a vlastivedy a rozvíjajú svoju tvorivosť a estetické cítenie v rôznych grafických editoroch. Dotácia predmetu je jedna hodina týždenne v 2., 3. a 4. ročníku ZŠ.

V tematickom okruhu **Postupy, riešenie problémov, algoritmické myslenie** sa žiaci zoznámia so špecifickými postupmi riešenia problémov prostredníctvom IKT. Najväčším prínosom tohto okruhu je to, že žiaci získajú základy algoritmického myslenia a schopnosť uvažovať nad riešením problémov pomocou IKT. Naučia sa uvažovať nad rôznymi parametrami efektívnosti rôznych riešení problémov, naučia sa rôzne postupy a mechanizmy pri riešení úloh z rôznych oblastí.

[1]Pedagogická fakulta KU v Ružomberku, majherova@ku.sk, jana.kopacova@ku.sk

Podobné kompetencie má žiak získať aj v rámci tematického okruhu Postupnosti, vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy v rámci hodín matematiky. Žiak sa učí vytvárať jednoduché postupnosti z predmetov, z kresieb a čísel, rozoznávať, sám objaviť pravidlo tvorby postupnosti a pokračovať v jej tvorení; usporadúva údaje patriace k sebe v tabuľke, na základe objavenia súvislostí medzi týmito údajmi, interpretovaním, analýzou a modelovaním riešenia úloh a problémov rozvíja svoje schopnosti a kreativitu.

Jednou z možností ako podporiť uvedené kompetencie je zapojenie žiakov do súťaže iBobor.

Súťaž na počítači – Bobrík

Súťaže v informatike majú dôležitú úlohu pre rozvoj zručností žiakov pre používanie IKT a riešenie problémov pomocou počítača. Slovenskí žiaci na základných a stredných školách sa môžu zapojiť do súťaže Informatický bobor, ktorú v spolupráci s medzinárodným tímom organizuje Katedra základov a vyučovania informatiky na FMFI UK v Bratislave. Ročník 2011 bol charakteristický prvým zapojením žiakov 3. a 4. ročníka v kategórii Bobrík.

Súťaž obsahuje štyri skupiny úloh: digitálna gramotnosť, programovanie, riešenie problémov a práca s údajmi (Kalaš, Tomcsányiová, 2009). Typy súťažných úloh v kategórii Bobrík sú prispôsobené žiakom na 1. stupni ZŠ, ktorí sú hraví. Preto je väčšina úloh interaktívna. V súťaži sú úlohy s interaktívnymi pomôckami. V nich si súťažiaci môže vyskúšať niekoľko možností riešenia a experimentovanie s údajmi v úlohe žiakovi nahradí papier a pero a pomôže mu lepšie pochopiť jej zadanie. Pri formulovaní zadaní súťažných úloh autori dbali na to, aby boli samotné zadania krátke – žiaci na 1. stupni ZŠ sa iba učia čítať a dlhé texty nie sú pre nich vhodné. V súťažných úlohách je dôležité aj grafické spracovanie – v úlohách sú farebné obrázky primerané veku žiakov (Tomcsányiová, 2011).

Kategória Bobrík obsahovala dvanásť úloh. Úlohy boli bodované po 3, 6 alebo 9 bodov podľa náročnosti. Pri nesprávnom riešení úlohy sa odpočítal jeden, dva alebo tri body. Žiak mohol získať maximálny počet 96 bodov. Na riešenie žiaci mali 30 minút. V kategórii ľahké úlohy to boli úlohy Cukríky, Hádaj, Ryba, Kocky, stredne ťažké úlohy boli Hračky, Čelenka, Hrádza, Žabka, najťažšie úlohy boli Digitálne hodinky, Náhrdelník, Raňajky a Vyfarbovanie. Plné znenie úloh je možné nahliadnuť v archíve úloh na portáli súťaže ibobor.sk. Českú verziu súťaže nájdeme na stránke ibobr.cz. V roku 2011/2012 ešte súťaž v Českej republike neobsahovala kategóriu pre 1. stupeň ZŠ.

V príspevku analyzujeme riešenia úloh súťaže u 20 detí 3. a 4. ročníka základnej školy. Šesť žiakov 4. ročníka bolo vybratých zámerne zo šikovných žiakov, 14 žiaci z 3. ročníku boli celá skupina triedy.

Jednotlivé úlohy veľmi dobre zisťujú úroveň matematických kompetencií z viacerých oblastí. V tematickom okruhu matematiky **Logika, dôvodenie, dôkazy** majú žiaci riešiť úlohy, v ktorých posudzujú z hľadiska pravdivosti a nepravdivosti primerané výroky z matematiky a zo životných situácií. Výkonový štandard dokonca žiada schopnosť rozlišovať jednoduché a primerané pravdivé a nepravdivé výroky, rozlíšiť istý a nemožný jav (pravdivý, nepravdivý). V úlohe Hračky (obr. 1) mali žiaci rozhodnúť o pravdivosti výroku. Je to druh úlohy, s ktorou sa deti stretávajú už v materskej škole, napriek tomu ju mali správne len 11 z 20. Úlohu Raňajky dokonca nikto nemal správne, pritom išlo o logickú úvahu vychádzajúcu s každodennej situácie.

Obr. 1: Pravdivosť výroku v úlohe Hračky

V tematickom okruhu **Postupnosti, vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy** majú žiaci v realite objavovať kvantitatívne a priestorové vzťahy a určité typy ich systematických zmien, vedieť pracovať (prostredníctvom hier a manipulačných činností) s konkrétnym súborom predmetov podľa ľubovoľného a podľa vopred určeného kritéria. Triediť predmety, veci, prvky v danej skupine podľa jedného znaku (napr. podľa farby, tvaru, veľkosti, materiálu, atď.). Zistiť jednoduché pravidlo vytvárania postupnosti predmetov, vecí, prvkov a čísel, pokračovať vo vytvorenej postupnosti. Triedenie a usporadúvanie podľa jednej a dvoch vlastností sú opäť činnosti, s ktorými sa oboznamujú deti už v materskej škole a v súčasnosti nájdeme viaceré vhodné úlohy aj s využitím IKT (Partová, Žilková, 2010). Krásnym príkladom usporadúvania je úloha Kocky, ktorú vyriešili skoro všetci žiaci správne (19 z 20). Opakovanie vzoru z úlohy Hrádza už nemalo taký jednoznačný výsledok (15 z 20), ale najväčším prekvapením boli len štyri správne riešenia úlohy

Čelenka (obr. 2). Úlohou bolo doplniť perá do indiánskej čelenky, zadanie bolo grafické. Úloha Náhrdelník, zameraná na usporiadanie a vzor, mala inštrukciu zadanú textom, čo sme považovali za zložitejšie. Túto úlohu správne vyriešilo až 13 žiakov.

Obr. 2: Usporiadenie v úlohe Čelenka

V tematickom okruhu **Geometria a meranie** majú žiaci vytvárať priestorové geometrické útvary podľa určitých pravidiel a zoznamovať sa s najznámejšími rovinnými útvarmi ako aj s ich rysovaním. Oboznamujú sa so základnými vlastnosťami geometrických útvarov, učia sa porovnávať, odhadovať a merať dĺžku. S touto oblasťou opäť súviseli viaceré úlohy. Úlohy Ryba, Žabka, Digitálne hodinky a Vyfarbovanie vyžadovali dobrú orientáciu v rovine, znalosť geometrických tvorov a predstavivosť. Úspešnosť týchto úloh bola nízka s výnimkou úlohy Ryba (14 z 20), ktorá ťažila z praktickej skúsenosti žiakov s prácou s grafickými programami. Ostatné úlohy dosiahli úspešnosť len medzi 30 až 45 %.

Záver

Informatická súťaž Bobrík priniesla viaceré zaujímavé úlohy, ktoré by sa mohli stať inšpiráciou pre učiteľov na hodiny matematiky. Ukázala, ktoré kompetencie treba u žiakov rozvíjať intenzívnejšie. Riešenie logických úloh v súťaži iBobor, ktorých obtiažnosť je závislá na miere rozumovej vyspelosti žiakov, posilňuje vedomie žiaka vo vlastnú schopnosť logického uvažovania a môže podchytiť i tých žiakov, ktorí sú menej úspešní (Černochová, 1998).

Zručnosti získané žiakmi v predmete Informatická výchova umožňujú žiakom aplikovať výpočtovú techniku v iných vzdelávacích oblastiach primárneho vzdelávania. Rozvoj digitálnej gramotnosti žiakov môže podporiť ostatné kľúčové kompetencie žiakov (Polčin, 2011). Učiteľka 1. stupňa takto hodnotí účasť žiakov na súťaži: „Podľa môjho názoru, súťaž z informatickej výchovy, ktorej sa deti zúčastnili, bola pre ne prínosom predovšetkým v tom, že si mohli vyskúšať svoje vedomosti nielen z informatiky, ale aj z matematiky.“

Literatúra

[1] ČERNOCHOVÁ, M. a kol. 1998. *Využití počítače při vyučování*. Praha: Portál, 1998.

[2] GUNČAGA, J. 2011. View on some theories of mathematics education. In *MATHEMATICS XVI. Publishing House of Jan Dlugosz University in Czestochowa*, 2011. P. 213-218.

[3] HEJNÝ, M., MICHALCOVÁ, A. 2001. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: MPC, 2001.

[4] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Pedagogická fakulta, UK, 2004. Dostupné na `http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA\_59.pdf`

[5] KALAŠ, I., TOMCSÁNYIOVÁ, M. 2009. Students’ Attitude to Programming in Modern Informatics. In: *Proc. of 9th WCCE IFIP World Conference on Computers in Education*, Bento Goncalves, Brazil, 2009.

[6] PARTOVÁ, E., ŽILKOVÁ, K. 2010. Rozvíjanie pojmu relácia v predškolskom veku prostriedkami IKT. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis Facultas Paedagogica. Mathematica 7*, Olomouc: UP, 2010. s. 225–229.

[7] POLČIN, D., MAJHEROVÁ, J. 2011. Rozvoj digitálnej gramotnosti žiakov v predmetoch fyzika a informatika. In Gunčaga, J., Nižnanský, B. (Eds.): *Odborová didaktika – interdisciplinárny dialóg.* Ružomberok: Verbum 2011. s. 133–136.

[8] TOMCSÁNYIOVÁ, M.: Základy programovania na 1. stupni ZŠ. In: *Didinfo 2011. 17. ročník národnej konferencie.* Banská Bystrica: UMB Banská Bystrica, 2011, s. 232–239.

[9] *Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základných škôl v Slovenskej republike, ISCED 1 – primárne vzdelávanie*. 2008. Dostupné online `http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program-pre-1-stupen-zakladnych-skol-ISCED-1/vzdelavacie-oblasti-a-prierezove-temy/charakteristika-\linebreakvzdelavacich-\linebreakoblasti/matematika.alej`

Soutěž pro žáky ZŠ na KMDM PedF UK a na Gymnáziu Christiana Dopplera (Ma, Fy)

Anežka Nováková, Tereza Kroupová, David Bernhauer, Jan Hadrava[1]

Úvod

Přinášíme Vám stručný náhled do světa matematických soutěží pro základní školy pořádaných na PedF UK a GChD. Rozdíly mezi prezentovanými soutěžemi jsou jednak v cílové skupině soutěžících (1. a 2. stupeň ZŠ), jednak v ročníku pořádání (1. a 12. ročník) a v neposlední řadě ve formě jejich průběhu. Spojovacími prvky soutěží jsou organizace ze strany studentů (VŠ a SŠ), princip výměny vyřešeného příkladu za příklad nový a do třetice úkol motivovat žáky a vzbudit v nich zájem o matematiku.

Slovenské národnostné vyučovanie v Maďarsku

Soutěž vznikla nejen díky nedostatečné nabídce mezi soutěžemi pro žáky prvního stupně, ale také z iniciativy doktorandky Hany Tiché. Jak došlo k realizaci soutěže? Nejprve vznikl volitelný seminář *Matematická soutěž pro žáky prvního stupně*, kam docházeli studenti matematických oborů z PedF s garancí doc. RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D. Soutěž, jak již bylo zmíněno, byla zacílena na matematiku a na žáky 4. a 5. ročníku. Cílem bylo připravit neobyčejnou soutěž. Co to znamená neobyčejnou? Studenti nechtěli připravit klání týmů pouze v matematických úlohách, ale jedním z hlavních požadavků bylo připravit soutěž, kde by žáci byli nuceni jednak spolupracovat ve svém týmu a jednak nechat projevit své strategické myšlení v nematematické hře. Dalo by se říci, že těmito podmínkami se naše soutěž výrazně odlišila od již existujících. Ještě dodejme, že 16. 5. 2011 se konal 1. ročník této soutěže.

Příprava probíhala jednak v seminářích, ale i mimo ně. Studenti připravovali webové stránky s potřebnými informacemi, pozvánky a přihlášky pro žákovské týmy, úlohy, nematematický příběh a veškerou další technickou podporu.

Úlohy byly ze tří oblastí matematiky – algebra, geometrie a kombinatorika. Studenti je vyhledávali v různých sbírkách a starších učebnicích, některé i sami vymýšleli. Velmi těžko se vybírá, pro vaši představu, jeden z 60 připravených příkladů. Uveďme např. následující.

[1] Pedagogická fakulta UK v Praze, `Anezka.Novakova@seznam.cz`, Gymnázium Christiana Dopplera Praha

> Galerie Václava Špály na Národní třídě vznikla před 50 lety. Obraz byl dovezen před pětinou věku galerie, socha je však v galerii o polovinu doby déle než obraz. Jak dlouho jsou obraz a socha v galerii?

Vlastní soutěž probíhala v aule PedF UK. Studenti před zahájením připravili a rozmístili zadání úloh a jiných materiálů k nematematické hře pro každý tým. V zápětí začali přicházet dětské týmy s učitelským doprovodem k registraci, kde se podepisovali a vymýšleli název svého soutěžního družstva. Čas se nachýlil a úvodní scénkou a názorným vysvětlením pravidel se Matematické putování odstartovalo. Vlastní hra trvala 90 minut. U jednotlivých týmů bylo pěkné pozorovat zaujetí, vzrušení a chuť do počítání a hledání nejen tajných schránek. Na webových stránkách (viz odkaz níže) se můžete podívat na fotografie, v tuto chvíli i z druhého ročníku. Po ukončení soutěže studenti celkem rychle ze zápisových archů sečetli body a celkově vyhodnotili úspěšnost jednotlivých týmů. Na předpřipravené diplomy dopsali umístění a už se předávaly ceny a památeční diplomy. Žáci byli spokojení nejen se svými výkony, ale i se sladkými i věcnými dárky.

Připomínky a ohlasy od dětí i učitelů byly příjemné a věcné. Některé náměty máme možnost realizovat v dalším ročníku. Žáci celé klání hodnotili jako krásné, dobrodružné a napínavé. Což nás velmi těší.

Pražská střela a Dopplerova vlna

Cílem Pražské střely a Dopplerovy vlny je uspořádat pro nadané žáky osmých a devátých tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií v Praze netradiční týmovou soutěž v matematice a fyzice. Na matematiku se zaměřuje Pražská střela, zatímco Dopplerova vlna je soutěží fyzikální. Soutěže již tradičně probíhají na Gymnáziu Christiana Dopplera, kde jsou pořádány studenty vyššího stupně.

Příprava mimo jiné zahrnuje rozeslání pozvánek, tvorbu webových stránek, vývoj softwaru pro zpracování výsledků, zajištění cen pro výherce, grafické navrhnutí diplomů a připravení soutěžní místnosti. Příklady jsou tvořeny samotnými organizátory z řad studentů a zaměřují se na různé obory matematiky a fyziky. Pro ilustraci připojme úlohu z letošního ročníku:

> V pravěku, kdy ještě nebyla vynalezena kola, měla auta místo kol čtverce. Tyto čtverce měly stranu $a = 30$ cm. Kolikrát se každý čtverec zcela otočí (o 360), když auto ujede 660 m?

Při registraci jsou pořízeny fotografie týmů, které jsou umístěny na diplomech. Po přivítání soutěžících a vysvětlení pravidel je spuštěna časomíra, která odměřuje 90 minut na řešení úloh. Každý pětičlenný tým obdrží na začátku soutěže šestici úloh. Vyřešení každé z nich vede k získání dalšího příkladu. Rychlost a správnost se hodnotí patřičným množstvím přiřazených bodů, které se s každým chybným pokusem snižuje (6, 4, 2, 1, 0 bodů). Družstvo s nejrychleji a nejpřesněji vyřešenými otevřenými i uzavřenými úlohami vítězí.

Výsledky, které jsou v průběhu soutěže zpracovávány softwarem a promítány řešitelům, jsou na posledních 10 minut soutěže skryty, což vytváří napínavou atmosféru a přiměje účastníky k lepším výkonům. V průběhu přípravy cen a diplomů je soutěžícím promítán film. Samotné vyhodnocení a přepočet bodů trvá přibližně 30 minut.

Řešitelé jsou vedeni k týmové i individuální práci. Úlohy dále rozvíjejí matematické myšlení žáků, kterým je třeba ukázat krásu exaktních věd v kontextu jejich budoucího studia a osobního rozvoje. Nejdůležitějším přínosem je vyhledávání talentů s orientací na matematiku a fyziku, dále podpora zájmu žáků o tyto obory netradičním způsobem (tým, volba úloh). Žáci si posilují své sebevědomí jednak prezentací nabytých znalostí před vrstevníky z jiných škol, jednak upevněním kompetencí a v neposlední řadě jsou i motivováni možností získat zajímavé výhry.

Soutěže mají přínos pro soutěžící i pro pořadatele, kteří jsou také podporováni v týmové práci. Seznámí se s nástrahami organizace a s tím spojenými problémy, kterým se studenti díky čtyřletým pořadatelským zkušenostem naučili čelit.

Pro stálé zlepšování kvality soutěží je důležitá zpětná vazba od soutěžících a jejich učitelů. Jejich podněty jsou často velmi cenné. Organizace soutěží je podporována Magistrátem hlavního města Prahy, zřizovatele školy. Uznáním práce soutěžících i organizátorů byla návštěva proděkana pro rozvoj doc. RNDr. Pavla Svobody, CSc. Dne 29. listopadu 2011 byl o soutěžích vydán článek v akademické příloze Lidových novin.

Závěr

Pro úplnost ještě uveďme několik odkazů na soutěže pro žáky ZŠ. Seznamy konaných soutěží naleznete na stránkách JČMF [1] a SUMA JČMF [2]. Dále stojí za zmínku i aktivity pořádané na MFF UK [3]. Konkrétně jmenujme *soutěž MaSo* pro družstva žáků 7. až 9. ročníků ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií [4] a jednu z korespondenčních soutěží, *PIKOMAT* [5].

Doufáme, že Vás tento příspěvek zaujal. Na závěr připojujeme kontakty, aby případní zájemci měli možnost se o dalších ročnících prezentovaných soutěží informovat.

Matematické putování:

Poštovní adresa: PedF UK v Praze – KMDM, M. D. Rettigové 4, 11639 Praha 1

Web soutěže: `http://kmdm.pedf.cuni.cz/soutez`

Emailová adresa soutěže: `matematicke.putovani@gmail.com`

Garant soutěže: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; `jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz`

Pražská střela a Dopplerova vlna:
Poštovní adresa: Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, 150 00 Praha 5 – Smíchov
Web soutěže: http://www.gchd.cz/souteze
Garant soutěže: RNDr. Zuzana Pecinová-Hradová; pecinova@gchd.cz

Literatura

[1] http://jcmf.cz/?q=cz/node/19

[2] http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=16

[3] http://www.mff.cuni.cz/verejnost/

[4] http://www.mff.cuni.cz/verejnost/konalo-se/2011-12-maso/

[5] http://pikomat.mff.cuni.cz/

ROVNICE A NEROVNICE A CHYBY PŘI JEJICH ŘEŠENÍ

ANEŽKA NOVÁKOVÁ, DEREK PILOUS[1]

Úvod

Náš příspěvek je věnován dvěma stránkám tématu rovnic a nerovnic, které považujeme za didakticky významné. První je obecná teorie rovnic a jejich úprav. Tato jednoduchá teorie, která sjednocuje a zobecňuje roztříštěné středoškolské znalosti o rovnicích a úpravách do logického rámce, má praktické zobecňující důsledky pro rozpoznávání (ne)ekvivalence úprav a řešení nerovnic. Domníváme se, že jako taková je vhodná pro studenty učitelského studia. Druhým aspektem tématu rovnic, kterému se budeme věnovat, jsou žákovské chyby. Nejprve pojednáme o žákovských chybách obecně (význam, využití, kategorizace) a zakončíme ukázkami častých kategorií chyb v řešení rovnic.

[1] PedF UK v Praze; anezka.novakova@seznam.cz, derek.pilous@pedf.cuni.cz

Rovnice, nerovnice a jejich úpravy

V tomto oddíle shrneme základy teorie rovnic a jejich úprav. Protože jde o shrnutí přehledové, nebudeme uvádět celá znění vět a jejich důkazy, ale soustředíme se na význam. Teorii budeme průběžně komentovat didaktickými postřehy z výuky tohoto tématu v předmětu Metody řešení matematických úloh na PedF UK. Upozorňujeme, že tvrzení o znalostech studentů ze středních škol se týkají průměrných znalostí studentů nastupujících na PedF UK, nikoli toho, co je studentům na středních školách vykládáno či co je obsahem středoškolských učebnic.

Základní pojmy

Rovnici v množině Y s neznámou v množině X definujeme jako výrokovou formu ve tvaru $L(x) = R(x)$, kde L a R jsou zobrazeními z X do Y (z X zde znamená, že definiční obor obou je podmnožinou X). Definičním oborem rovnice (též oborem smysluplnosti) nazýváme průnik definičních oborů L a R, množinou řešení obor pravdivosti rovnice. Studenti běžně zaměňují tvrzení „rovnice nemá smysl“ a „rovnice nemá řešení“ (tato záměna, která souvisí s problémem nerozlišování silně a slabě ekvivalentních úprav, je podle našeho názoru důsledkem instrumentálního přístupu k rovnicím, kdy je podstatné jen řešení a při jeho neexistenci už nedochází k jemnějšímu rozlišování). Ač naše definice tato tvrzení jasně odlišuje („nemá smysl“ vyjadřuje prázdnost definičního oboru, „nemá řešení“ prázdnost množiny řešení), je podle našich zkušeností k plnému uvědomění rozdílu užitečné použít přístupu, který se osvědčuje i při úvahách o korektnosti a ekvivalenci úprav, a to představě rovnice jako množiny rovností, které z rovnice vzniknou dosazením všech prvků množiny X. Taková množina bude obecně obsahovat nesmyslné rovnosti (pokud dosazení daného $x \in X$ alespoň do jedné strany nemá smysl) a smysluplné neplatné i platné rovnosti. Pokud taková množina neobsahuje žádnou smysluplnou rovnost, řekneme, že rovnice nemá smysl; pokud neobsahuje žádnou platnou rovnost, řekneme, že rovnice nemá řešení.

Středoškolská výuka rovnic se z pochopitelných důvodů věnuje především rovnicím v reálném oboru. Studenti si však následkem toho neuvědomují, že mezi rovnicemi a nerovnicemi je podstatný rozdíl v obecnosti – zatímco rovnici lze formulovat v libovolné třídě s relací identity, nerovnice vyžaduje velmi silnou relaci uspořádanosti (a nemá tedy smysl například v $\mathbf{C}$). Dalším důsledkem je automatický předpoklad studentů, že v množině Y je definována operace odčítání. Jeho přítomnost lze snadno ověřit otázkou, zda lze rovnici ekvivalentně definovat ve formě $L(x) = 0$ (jak se u rovnic v reálném oboru běžně dělá), což předpokládá převod původního tvaru rovnice na $L(x) - R(x) = 0$. Odpověď bývá podle naší zkušenosti zpravidla kladná, nebo žádná (neboť je studentům ekvivalence tak „zřejmá“, že to považují za trikovou otázku s možnou negativní odpovědí, k níž ovšem neznají zdůvodnění). Tyto představy rozšiřujeme zařazováním příkladů rovnic v množinách, které uvedené vlastnosti nemají, např. $\{\alpha \in \mathbf{R}; x < \alpha < x+1\} = \{\alpha \in \mathbf{R}; \alpha^2 < x^2\}$.

Pojmy rovnice o n neznámých a soustava k rovnic definujeme jednoduše tak, že X považujeme za množinu n-tic, resp. Y za množinu k-tic, ovšem s úmluvou, že je budeme značit tradičním způsobem (resp. v případě soustav chápat jako konjukci rovnic). Rovnice s parametrem pak vůbec není speciálním typem rovnice, tento přídomek jen specifikuje požadovaný tvar výsledku. Řešit rovnici s neznámou x a parametrem p totiž znamená řešit rovnici s neznámými x, p (resp. formálně s neznámou $[x,p]$) a výsledek uspořádat podle druhé z nich, tedy uvést pro každou hodnotu p z dané množiny buď že rovnice nemá smysl, nebo množinu řešení (tedy množinu všech x takových, že $[x,p]$ je řešením).

Úpravy rovnic a nerovnic

Zmiňme se hned na úvod o jisté terminologické nesnázi. Rovnice je definována jako výroková forma, ovšem takzvané úpravy rovnic tomu neodpovídají – už nejjednodušší z nich, záměna stran, nemá na výrokové formě smysl, protože výroková forma pochopitelně strany nemá. Co strany má, je její zápis, a právě tak je bez ohledu na definici pojem rovnice chápán. „Úpravy rovnic“ jsou tak ve skutečnosti složitými pravidly manipulace se symboly.

Ze základní a střední školy student zná pojem ekvivalentní a neekvivalentní úpravy a umí aplikovat konkrétní příklady všech pěti obecných typů úpravy rovnic. Ví o **záměně stran**, ale nepovažuje ji za bazální kategorii úprav, protože zdánlivě ihned plyne ze silnějšího převádění na druhou stranu. To je pravda v reálném oboru, nikoli však obecně (viz příklad výše), záměna stran má univerzální platnost. Stejně tak student za úpravu rovnice nepovažuje **rozdělení na případy**, ačkoli jej zpravidla aplikačně ovládá. To, co pod pojmem úpravy chápe hlavně, je konečná množina speciálních tříd **úpravových funkcí** reálné, nejvýše komplexní proměnné, především lineárních (přičítání, odčítání, násobení a dělení a jejich složení, jako převod na druhou stranu), mocninných (umocnění, odmocnění), logaritmických (logaritmování) a exponenciálních („odlogaritmování“). Dále zná úpravy soustav: dosazovací metodu, což je speciální případ **substituce** (kterou zde rozumíme výhradně zobecněné dosazení, nikoli zavedení nové proměnné, jak se provádí např. při řešení bikvadratických rovnic), sečtení rovnic, které je složením přičítání a substituce, a opět jako úpravu příliš nevnímá vynechání řádku se shodnou levou a pravou stranou, což je případ **přidání nebo odebrání tautologie** (užíváme pro jednoduchost tento název, ač se ve skutečnosti nejedná o tautologii v pravém slova smyslu, ale o libovolnou rovnici platnou alespoň pro všechna řešení rovnice zadané). Přidání tautologie potřebujeme spolu se substitucí například pro algebraické úpravy (stále chápeme rovnici jako její zápis).

Vybudování úplné teorie základních úprav rovnic znamená formalizaci výše jmenovaných úprav a vyslovení vět o nich, vždy ve tvaru ekvivalence původní a upravené rovnice nebo soustavy. U složení s (prostou) úpravovou funkcí jde obecně (bez dodatečných podmínek) o ekvivalenci slabou, tedy rovnost množiny řešení, u ostatních úprav silnou (logickou), která zachováná i definiční obor rovnice. Zvláště pro řešení rovnic s parametrem ovšem potřebujeme silnou ekvivalenci i v případě úpravových funkcí, k čemuž stačí dodatečná podmínka definovanosti takové funkce na sjednocení oboru hodnot levé a pravé strany.

Skládání s úpravovou funkcí si zaslouží větší pozornost. Obecně jde o dosazení obou stran rovnice do úpravové funkce, jejíž druhou proměnnou je hodnota neznámé (to proto, že chceme provádět nejen úpravy konstantní – jako přičtení čísla 3 – ale také závislé na neznámé, jako přičtení samotné neznámé x). Například to, co studenti znají jako úpravu „násobení rovnice číslem a“, je použití úpravové funkce $u(s,x) = a \cdot s$, do které za s dosazujeme obě strany rovnice. Různé úpravy známé ze základní a střední školy se tak stávají speciálními případy obecného principu. Je zřejmé, že taková úprava je ekvivalentní, pokud je úpravová funkce vzhledem k první proměnné prostá na sjednocení oboru hodnot levé a pravé strany. Pokud prostá není a jejím použitím provádíme neekvivalentní úpravu, je z hlediska řešení rovnic podstatné, „jak moc“ je neprostá, tedy kolik různých vzorů má stejný obraz. Například u funkce $u(s,x) = s^2$ jsou to nejvýše dva, takže upravená rovnice bude mít nejvýše dvojnásobek kořenů rovnice původní a falešné kořeny lze vyloučit zkouškou (je-li počet kořenů původní rovnice konečný). Při použití funkcí $u(s,x) = \sin s$ či $u(s,x) = 0$ to však pochopitelně obecně možné není. Velmi důležité jsou vlastnosti úpravových funkcí při řešení nerovnic. Platí totiž, že je-li úpravová funkce vzhledem k první proměnné rostoucí, relace nerovnosti se při jejím použití nezmění, zatímco při použití funkce klesající se obrátí. To zobecňuje středoškolskou znalost o obracení nerovnosti v případě násobení nerovnice záporným číslem (neboť pro záporné a je funkce $u(s,x) = a \cdot s$ vzhledem k s klesající) i na další úpravy, jako (od)logaritmování při základu menším než jedna či použití funkcí arccos a $\operatorname{arccotg}$.

Osvojení vyložených principů testujeme teoretickými úlohami, zvláště analýzou konkrétních nestandardních úprav. Čtenář si může vlastní porozumění ověřit např. na úloze „Je (resp. za jakých podmínek je) násobení rovnic (ve smyslu analogickém sčítání rovnic) ekvivalentní úpravou?“.

Chyby

> „Odborník je člověk, který se v daném oboru dopustil již všech možných chyb.“
> Niels Bohr

Žákovská chyba v matematice (záměrně nepoužíváme termín matematická chyba, neboť tyto pojmy nejsou shodné) je jevem, kterému je podle našeho názoru často ve výuce věnována nepřiměřeně (jejímu významu i využitelnosti) malá pozornost. Tento příspěvek shrnuje některé základní poznatky o těchto chybách a dále ukázky konkrétních chyb, se kterými se autoři setkali při výuce rovnic a nerovnic v bakalářských předmětech Elementární matematika I a Metody řešení matematických úloh na PedF UK. Téma rovnic a nerovnic bylo zvoleno proto, že spektrum chyb, kterých se studenti při jejich řešení dopouštějí, je dostatečně pestré (a to i proto, že první z uvedených předmětů je zařazen hned v prvním semestru studia a tudíž umožňuje zachytit chyby i té většiny studentů, která ve studiu v dalších semestrech nepokračuje), a zároveň jde o látku dostatečně jednoduchou, takže je možné odhalovat příčiny chyb s vysokou jistotou.

Význam a využití chyby

V tradiční výuce matematiky je chyba často považována za nežádoucí a vyučování hodnoceno jako tím úspěšnější, čím menšího počtu chyb (v průběhu osvojování látky, nikoli v závěrečném testování) se žáci dopouštějí. Tento přístup považujeme za fundamentálně chybný. Ve shodě s konstruktivismem se domníváme, že vlastní chyba je při konstrukci poznatku obecně nezbytná, protože jej vymezuje negativně, stejně jako jej výklad a příklady vymezují pozitivně. Negativní vymezení je pro úplnost poznatku většinou nutné, neboť obor platnosti nového poznatku je v oboru jeho aplikovatelnosti omezen pouze oborem platnosti jiných poznatků. Příkladem je sčítání zlomků: žák si osvojí a používáním zafixuje sčítání přirozených čísel a když se pak seznámí s konceptem zlomku (a především s jeho zápisem), často se pokouší sčítat zlomky způsobem „čitatel s čitatelem, jmenovatel s jmenovatelem“, protože předchozí poznatek o sčítání je na problém aplikovatelný (v tom smyslu, že čitatel s čitatelem a jmenovatel s jmenovatelem sečíst lze) a nový poznatek o správném postupu sčítání zlomků (který je s takovou aplikací konfliktní a omezuje tedy obor platnosti původního poznatku) ještě nevznikl, resp. nepostoupil nad reproduktivní úroveň. Vyhnout se takovým chybám lze jen pomocí signálů, tedy tak, že je procvičován stále stejný typ úloh, jejichž znění se stává signálem, ke kterému student asociativně přiřazuje poznatek, resp. algoritmus řešení. Takto vzdělaný student však není schopen řešit nové či nestandardní typy úloh. Bezchybové vyučování tedy nevytváří matematické poznatky v pravém slova smyslu, ale jen jakési kulisy, které se při zběžném pohledu (tedy testování standardními úlohami) jako poznatky jeví.

Z hlediska učitele nese chyba informaci o úrovni žákova osvojení poznatku, v tomto smyslu o ní hovoříme jako o diagnostickém nástroji. V praxi však využití této informace málokdy pokročí za přiřazení hodnocení. To je částečně pochopitelné, protože zkoumání příčin chyby (ve smyslu rozdílu mezi aktuální a ideální podobou poznatku; bohužel běžná odpověď učitelů na otázku po příčině chyby je postojová, např. „žák se neučil / je hloupý“) je na základě kusé informace nesené chybou obecně obtížné. Podle našich zkušeností je však množina statisticky významných příčin chyb v dané látce výrazně omezená, jinými slovy, převážná většina chyb v dané látce je způsobena několika málo stále se opakujícími příčinami, takže jejich analýza a případně návrh metod reedukace mohou být velmi přínosné.

Zde je potřeba upozornit na neefektivitu transmisivních pokusů o apriorní nápravu chyby. Jak jsme poznali z vlastní zkušenosti, zabývá-li se učitel chybami svých žáků, má často tendenci už při výkladu před častými chybami varovat. Ačkoli je to lepší než nevěnovat se chybám vůbec, je tento postup málo účinný, protože bez frustrace vzniklé vlastní chybou není u studenta po takové informaci poptávka a sdělení není integrováno do kognitivní struktury. Teprve emocionální reakce spojená s frustrací z chyby (kterou M. Hejný přiléhavě nazývá „šokem“) umožňuje restrukturalizaci poznatku. V tomto citlivém okamžiku je zásadní úloha učitele, protože bez jeho vedení může být výsledkem restrukturalizace opět chybný poznatek, pokud žák chybně identifikuje příčinu chyby, resp. ji neidentifikuje vůbec a pokusí se vyloučit její opakování ad hoc pravidlem závislým na konkrétních okolnostech jejího vzniku, které jsou z hlediska správnosti postupu irelevantní. Tím se chybný poznatek navíc stane hůře diagnostikovatelným, protože se zúží spektrum situací, ve kterých se projeví.

Kategorizace chyb

Obecně nelze říci, že by chyby přirozeně vytvářely disjunktní kategorie, naopak lze jejich spektrum z pohledu jakéhokoli didakticky významného kritéria považovat za spojité. Často však vytvářejí statisticky významné skupiny – clustery – se společnými vlastnostmi, které jsou přirozeným základem kategorií. Je ale třeba si uvědomovat, že každá kategorizace reálnou situaci zjednodušuje a nelze ji tedy pojímat jako kanonickou, zvláště v tom smyslu, že by každá chyba byla jednoznačně zařaditelná do nějaké kategorie.

V literatuře je možné nalézt vícero kategorizací chyb z různých pohledů (didaktických, pedagogických, psychologických, oborových – matematických [1]). Pro naše zkoumání jsme se však rozhodli pro přístup opačný, tedy stanovit na základě studia dostupného materiálu kategorie vlastní a ty případně identifikovat s kategoriemi popsanými v literatuře.

Postupně nám vykrystalizovaly dvě kategorizace. První z nich klasifikuje chyby podle úrovně osvojení látky žákem a možnosti jejich reedukace. Hrubá škála je uvědomělá neznalost – neuvědomělá neznalost – překlep.

Uvědomělou neznalostí označujeme stav, kdy si student uvědomuje, že nezná správnou odpověď, přesněji, že nemá žádné interní varianty odpovědi nebo mezi nimi není žádná, jejíž pravděpodobnost správnosti by hodnotil jako vyšší než ostatních (nebo odpovědi zcela náhodné). Student pak podle výhodnosti volí odpověď náhodnou (v oboru skutečné či domnělé smysluplnosti pro daný kontext) nebo žádnou. Nejjistěji tento typ chyby identifikuje právě vystoupení z oboru smysluplnosti. Příkladem je zaznamenaná odpověď na matematickou úlohu zakončenou otázkou „Jsou množiny A a B ekvivalentní?“, která zněla „Množina A ano, množina B ne“. Chyby vzniklé z uvědomělé neznalosti nelze pochopitelně reedukovat, nutné je, aby požadovaný poznatek nejprve vznikl.

Neuvědomělou neznalostí nazýváme stav, kdy se student domnívá, že látku ovládá, ale ve skutečnosti obsahuje jeho poznatek chybu, často i ve starší látce. Příkladem je důležitý typ chyb, který nazýváme „rozšíření oboru platnosti“ a který jsme popsali v odstavci Význam a využití chyby na příkladu sčítání zlomků. Příkladem z vyšší matematiky je častá chyba při vyhodnocování limit v součinovém tvaru, kdy student určí, že jeden ze součinitelů má limitu nula, a na základě toho (zpravidla bez vyhodnocení limity druhého součinitele) považuje za nulovou celou limitu. Jde o průsak silně fixovaného poznatku, že „nula krát cokoli je nula“, který je platný v číselných oborech neobsahujících nevlastní body, do oboru, kde platný není. Chyby z neuvědomělé neznalosti jsou pro reedukaci ideální. Poznatek již vznikl a chyba nám dává (různě přesnou) informaci o tom, jakým způsobem jej opravit.

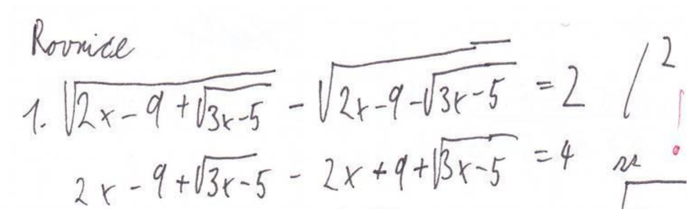
Překlepy nazýváme z nedostatku lepšího termínu chyby, které vznikají, přestože subjekt aplikovanou látku perfektně ovládá. Jak známo, např. tzv. numerických chyb se jedinci dopouštějí nezávisle na úrovni matematického vzdělání či výkonnosti. Roli zde hrají faktory, které nejsou přímo pedagogicky ovlivnitelné, především pozornost. Proto také považujeme penalizaci takových chyb za neefektivní a demotivující.

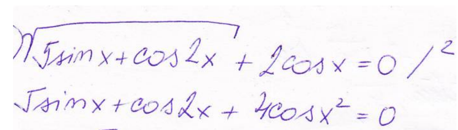
Vhodnost či nevhodnost reedukace poznatku na základě daného typu chyb úzce souvisí s tím, zda je daný typ chyby konstatní či variabilní (viz [4], str. 122–3). Tento vztah lze také použít pro zjištění typu chyby u jednoho žáka, máme-li k dispozici větší vzorek jeho odpovědí, ale ze samotných chyb není jasná jejich příčina (což je běžné zvláště při omezeném prostoru odpovědí, typicky v uzavřených úlohách).

Druhým typem klasifikace, který používáme, je třídění chyb do vysoce specifických popisných kategorií, vzniklých frekvenční analýzou konkrétního souboru testů z výše uvedených kurzů na PedF UK. V tomto smyslu jsou analogické např. kategoriím chyb v řešení lineárních rovnic stanoveným v [1], ačkoli ty jsou formulovány spíše v řeči formálních úpravových pravidel („vynechání“, „redistribuce“, „záměna“), zatímco naše kategorie jsou stanoveny spíše podle didaktických kritérií, zvláště pro potřeby reedukace. Kategorie jsou pro představu v předmětu Elementární matematika I např. „odstraňování odmocnin“, „práce se znaménkem“ s podkategorií „převádění na druhou stranu“, „chybné vzorce“ s podkategorií „úpravy (od)mocnin“, „chybné algoritmy“ nebo „chyby v zápise“, v Metodách řešení matematických úloh např. „výpočet parametru“, „zužování oboru“, „záměna předpokladu se závěrem“, „bodové vs. množinové vlastnosti“, „nekonzistence“ nebo „smysl vs. zápis“. V současné době pracujeme na hlubší analýze chyb ve snaze zkonstruovat kategorie méně popisné a více odpovídající mechanismu vzniku chyby (jako „rozšíření oboru platnosti poznatku“, „nekonzistence teoretické a praktické znalosti“, „concept image vs. concept definition“ nebo „chybné intepretace“). Tyto kategorie jsou podle našeho názoru z didaktického hlediska významnější, protože potenciálně umožňují reedukovat nejen jednotlivé chybné poznatky, ale celé jejich třídy. Podstatným problémem je, že vzhledem k omezené informaci nesené chybou jsou na rozdíl od kategorií popisných v různé míře spekulativní.

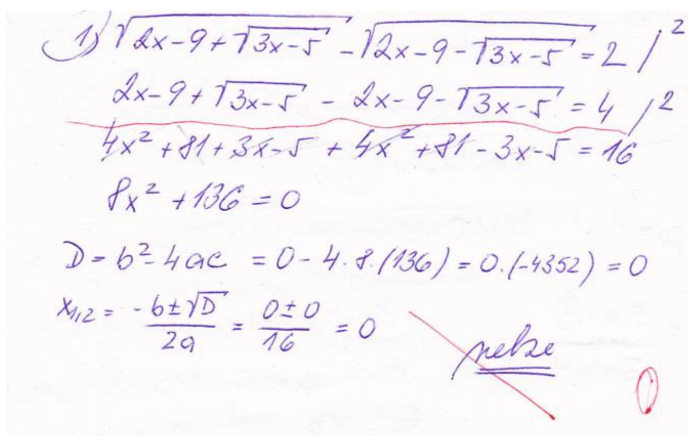
Ukázky chyb

V tomto odstavci demonstrujeme předchozí teorii konkrétními ukázkami chyb s krátkým komentářem.





Velmi častá kategorie chyb, „odstraňování odmocnin“. Chyby jsou způsobeny především dvěma mechanismy: a) Student svoji úpravu nechápe jako umocnění rovnice na druhou, ale jako odstranění odmocnin. S tím souvisí i běžná chyba vyskytující se při převodu odmocnin mezi čitatelem a jmenovatelem, symbolicky vyjádřitelná „rovností“ $(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a-b$. Umocnění dvojčlenu bez odmocnin takový student provádí správně podle vzorce. b) Vzácněji se student opravdu domnívá, že se mnohočleny umocňují člen po členu, jako je tomu v následující ukázce.



Taková podoba poznatku může být primární (v nápadné podobnosti s výše uvedeným příkladem sčítání zlomků), nebo snad může vzniknout i druhotně z poznatku, jak je vyjádřen v a) – tak lze intepretovat i postup v předchozí ukázce.

Následující úprava obsahuje dvě nezávislé chyby: rozšíření platnosti vzorce pro převod odmocnin na necelé mocniny z operací násobení a dělení i na sčítání a odčítání a něco, co je s největší pravděpodobností opomenutím závorek, i když jsou možné i jiné interpretace.

$$\sqrt{2x-9+\sqrt{3x-5}} - \left(\sqrt{2x-9-\sqrt{3x-5}}\right) = 2$$
$$\cancel{2x^{\frac{1}{2}}} - \cancel{9^{\frac{1}{2}}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}} - \cancel{2x^{\frac{1}{2}}} + \cancel{9^{\frac{1}{2}}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}} = 2$$
$$6x^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{1}{4}} = 2$$
$$\sqrt[4]{6x-10} = 2$$
$$\sqrt{\sqrt{6x-10}} = 2 \qquad /^4$$

Velmi častým typem chyb jsou chyby v převodu na druhou stranu rovnice. V tuto chvíli je na základě matematické interpretace řadíme mezi chyby znaménkové, avšak algoritmus, který student při převodu na druhou stranu používá, je zřejmě geneticky příbuzný spíše algoritmům jiných symetrických úprav (rušení a krácení výrazů, násobení „křížem“ jmenovateli) než algoritmům práce se znaménky. Velká část chyb v těchto úpravách je pravděpodobně způsobena ne zcela odstranitelnými faktory, které působí i u chyb numerických. Všimněte si v následující ukázce, že student provádí převedení na druhou stranu jednou špatně, jednou dobře.

$$5\sin x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 4\cos^2 x \qquad /-2\cos^2 x$$
$$5\sin x - 1 = 6\cos^2 x$$
$$5\sin x = 6\cos^2 x + 1 \qquad /^2$$

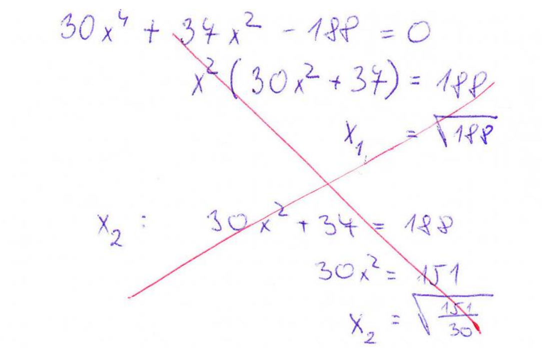
Poměrně zábavným typem chyby bývají záhadné úpravy, založené zjevně na podivných vzorcích, které vznikly spojením různých fragmentárních znalostí. Vzhledem k tomu, že neplatnost většiny takových vzorců je evidentní, souvisí tato kategorie s problémem nedostatečného vhledu do problematiky a nesprávné představy (tzv. misconception, viz [3]) o jednotlivých pojmech, vztazích a algoritmech.

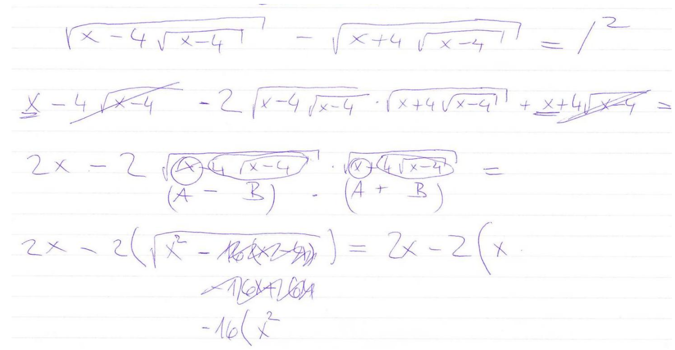
1. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$

$$\log_{(\sqrt{x})}(x-2)\cdot x = 9$$
$$\log_{(\sqrt{x})}(x-2)\, x = \log_{2} \cancel{9}\, 512$$

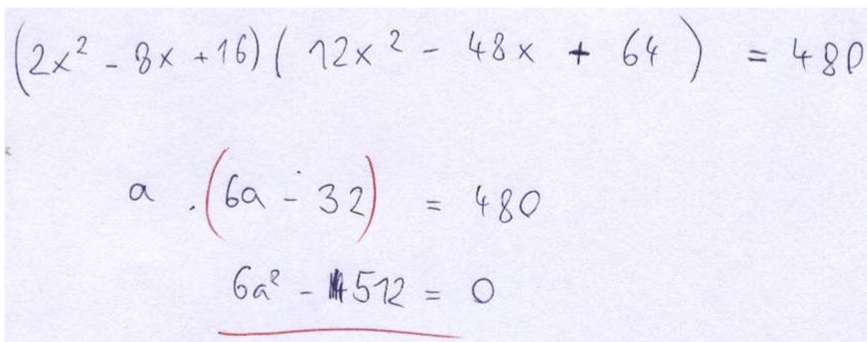
$$5\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x - 4\cos^2 x = 0$$
$$5\sin x - 2\sin x + 2\cos x - 8\cos x = 0$$

Následují dvě ukázky jsou příklady rozšíření oboru platnosti, v prvním případě pravidla, že je-li součin roven nule, pak alespoň jeden ze součinitelů je také roven nule, v druhém metody zbavování se odmocnin v rovnicích jejich umocněním, které je zde použito při úpravě algebraického výrazu.

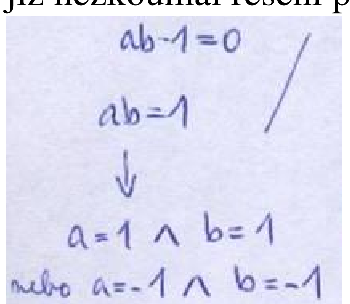


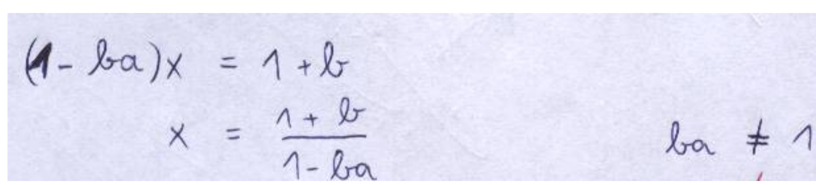


Chyby v zápise se často na výsledku řešení úlohy vůbec neprojeví a pokud ano, pak většinou jen chybným zápisem správně zjištěného výsledku. Nejčastější ze zápisových chyb, které vedou ke špatným výsledkům, je patrně opomenutí závorek.



Na závěr jsme si nechali dvě ukázky, z nichž první demonstruje zužování oboru, které příležitostně nazýváme i neodůvodněným předpokladem (a, b v tomto případě byly reálné parametry). Druhá je pak typickým příkladem zaměňování předpokladu se závěrem. Student provedl operaci, která nebyla platná pro $ab = 1$, pak stanovil definiční obor výsledku a z něj vyvodil závěr, který byl ve skutečnosti předpokladem. Tím pádem již nezkoumal řešení pro $ab = 1$, protože „určil“, že to není možné.





Literatura

[1] HALL, Richard. An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal (PoME)* [online]. No. 15, březen 2002 [cit. 2012-01-25]. Dostupný z WWW: <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf>.

[2] KNUTH, E. J., STEPHENS, A. C. Does understanding the Egual Sign Matter? Evidence from Solving Equation. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 37, No. 4. 2006. p.297-312.

[3] BOOTH, J. L., KOEDINGER, K. R. *Key Misconceptions in Algebraic Problem Solving*. CogSci, 2008.

[4] KULIČ, Václav. *Chyba a učení*. 1. vydání. Praha: SPN, 1971.

VPLYV IMPLICITNÝCH KOMBINATORICKÝCH MODELOV NA SPRÁVNOSŤ RIEŠENIA ÚLOH

DAŠA PALENČÁROVÁ[1]

Úvod

Kombinatorika je významnou časťou diskrétnej matematiky a na Slovensku tvorí súčasť učebných plánov na základných a stredných školách. Pre mnohých žiakov je práve kombinatorika neobľúbenou časťou matematiky, preto je potrebné zlepšiť jej výučbu na školách.

Základnými krokmi pre zlepšenie vyučovania kombinatoriky sú:

a) porozumenie podstaty žiackych chýb, keď riešia kombinatorické úlohy,

b) identifikácia zmien, ktoré môžu mať vplyv na túto ťažkosť (zmeny vo formulácií úloh, zmeny vo výučbe).

Implicitný kombinatorický model

Jednoduchou kombinatorickou úlohou budeme nazývať úlohu, pri riešení ktorej je možné použiť jednu kombinatorickú operáciu (kombinácie, variácie, permutácie s opakovaním alebo bez opakovania).

Podľa Duboisa [1] jednoduché kombinatorické úlohy môžu byť klasifikované v troch implicitných kombinatorických modeloch (ICM):

[1]Ústav matematický vied PF UPJŠ, Košice, palencarova.dasa@gmail.com

- *model selection* – znenie úlohy požaduje výber n objektov z m (vziať, vybrať, ťahať, zbierať, zvoliť),
- *model distribution* – je propedeutikou zobrazenia, znenie úlohy požaduje rozdelenie n objektov do m buniek (umiestniť, rozdeliť, vložiť, priradiť, rozložiť),
- *model partition* – je propedeutikou rozdelenia množín na podmnožiny, znenie úlohy požaduje oddeliť n objektov do m skupín (separovať, oddeliť, rozdeliť).

Experiment

V experimente, ktorý sme uskutočnili, sme sa zamerali na určenie vplyvu ICM na správnosť riešenia úloh u žiakov základnej školy. Experimentu sa zúčastnilo 29 žiakov 5. a 6. ročníka, ktorí výučbu kombinatoriky neabsolvovali, 17 žiakov 7. ročníka, ktorí absolvovali úvod do kombinatoriky a 36 žiakov 8. a 9. ročníka, ktorí už kombinatoriku, ktorá sa vyučuje na základnej škole absolvovali.

Úlohy do experimentu

Do experimentu sme navrhli tri kombinatorické úlohy, každú na iný ICM model, ale všetky sa dali riešiť rovnakou kombinatorickou operáciou. Pri druhej úlohe žiaci mali obrázok olympijských kruhov.

1. Danka sa rozhodla vziať si paušál O_2 fér, ktorý si môže sama vyskladať z extra balíčkov. Extra balíčkov je šesť – denné volania, nočné volania, víkendové volania, denné sms, nočné sms, víkendové sms. Koľko rôznych možností má na vyskladanie svojho paušálu z dvoch extra balíčkov?

2. Blížia sa letné olympijské hry a Janka si prezerá symbol olympiády, ktorý je zložený z piatich rôznofarebných kruhov v takom poradí, ako je to na obrázku. Jej obľúbenou farbou je fialová, a takáto farba sa na logu vôbec nenachádza. Chce si vyrobiť vlastné logo. Fialovou farbou si zafarbí až 3 kruhy, a to tak, že zmení farbu troch kruhov na fialovú a ostatné ponechá. Koľko rôznych ofarbení loga môže takto Janka vytvoriť?

3. Majku príde dnes navštíviť kamarátka Katka a zajtra Peťka. Rozhodla sa, že dnes upečie pizzu pre Katku a zajtra ďalšiu pre Peťku. V chladničke má 6 príloh na pizzu – šunku, salámu, šampiňóny, kukuricu, brokolicu a vajíčko (z každého len na jednu pizzu). Na každú pizzu chce dať rovnaký počet príloh, a to 3. Koľko rôznych možností má na rozdelenie príloh?

Vyhodnotenie experimentu

Žiaci najčastejšie riešili úlohy výpisom všetkých možností, v nižších ročníkoch sa v riešeniach objavili aj obrázky a tabuľka. Pri vyhodnotení experimentu sme rozdelili žiakov do troch skupín, a to podľa toho, koľko kombinatoriky už absolvovali na hodinách matematiky (5.a 6. roč., 7. roč., 8. a 9. roč.).

U žiakov 5. a 6. ročníka nenachádzame veľké rozdiely v úspešnostiach jednotlivých úloh. Vyhodnotenie správnosti úloh žiakov týchto ročníkov uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

	Úloha 1 (selection)		Úloha 2 (distribution)		Úloha 3 (partition)	
Správne	**1**	3,4%	**2**	6,9%	**2**	6,9%
Nesprávne	20	69%	21	72,4%	22	75,9%
Neriešili	8	27,6%	6	20,7%	5	17,2%

Tab. 1: Vyhodnotenie správnosti úloh žiakov 5. a 6. ročníka

U žiakov 7. ročníka nevidíme ešte veľký rozdiel v úspešnostiach jednotlivých úloh. Výsledky uvádzame v tab. 2.

	Úloha 1 (selection)		Úloha 2 (distribution)		Úloha 3 (partition)	
Správne	**3**	17,6%	**2**	11,8%	**1**	5,9%
Nesprávne	9	52,9%	11	72,4%	9	52,9%
Neriešili	5	29,4%	4	23,5%	7	41,2%

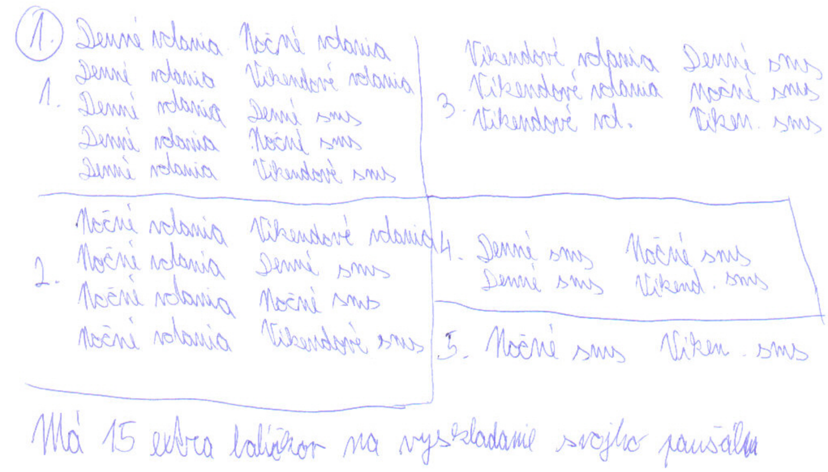
Tab. 2: Vyhodnotenie správnosti úloh žiakov 7. ročníka

V riešeniach žiakov 8. a 9. ročníka vidíme rozdiel v úspešnostiach jednotlivých úloh. Najviac správnych riešení nachádzame v úlohe 1 (model selection), najmenej úspešná je úloha 3 (model partition).

	Úloha 1 (selection)		Úloha 2 (distribution)		Úloha 3 (partition)	
Správne	**22**	61,1%	**13**	36,1%	**6**	16,7%
Nesprávne	10	27,8%	17	47,2%	25	69,4%
Neriešili	4	11,1%	6	16,7%	5	13,9%

Tab. 3: Vyhodnotenie správnosti úloh žiakov 8. a 9. ročníka

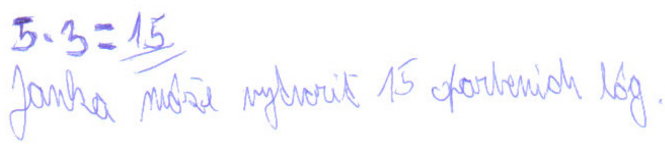
Výsledky experimentu ukazujú, že ICM má vplyv na správnosť riešenia úloh. Pre žiakov, ktorí absolvovali výučbu kombinatoriky sú úlohy modelu selection ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu distribution, a tie sú ľahšie riešiteľné ako úlohy modelu partition. Príčiny môžeme hľadať aj vo výbere úloh v učebniciach, kde prevládajú úlohy modelu selection a úlohy modelu partition sa tam takmer vôbec nenachádzajú.



Obr. 1: Žiacke riešenie úlohy 1

Na záver uvádzame riešenie 1. a 2. úlohy žiakom 8. ročníka ZŠ.

Žiak riešil prvú úlohu výpisom všetkých možností. Žiak má vo výpise systém a možnosti v riešení oddelil na$5+4+3+2+1$.



Obr. 2: Žiacke riešenie úlohy 2

V úlohe 2 žiak nevedel aplikovať postup riešenia z úlohy 1, žiak len vynásobil čísla zo zadania. Svoje riešenie ukončil odpoveďou. Takto riešil aj úlohu 3.

Literatúra

[1] Batanero, C., Navarro – Pelayo, V., Godino, J. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*. 1997, vol. 32, no. 2, pp. 181–199.

TVORBA ÚLOH STUDENTEM – KONKRÉTNÍ AKTIVITA

EVA PATÁKOVÁ[1]

V článku ukážu konkrétní aktivitu, která propojuje prvky aktivit na tvorbu úloh studentem a na komunikaci v rámci matematiky. Velice se mi osvědčila v reálné výuce – příklady některých takto získaných úloh uvedu ve druhé části článku.

Teoretická východiska

Aktivita propojuje dva teoretické koncepty, a to tvorbu úloh studentem a CLIL.

Tvorba úloh studentem

Jednou z doporučovaných aktivit do hodiny matematiky je nechat studenty tvořit vlastní úlohy. Je množství úprav, jak tento úkol zadat (např. úloha k danému výpočtu, obrázku, na dané téma...). Zároveň vhodným zadáním úkolů na tvorbu úloh můžeme sledovat množství didaktických cílů (např. prozkoumání matematického prostředí, motivace, rozvoj kreativity, diagnostika studentova porozumění látce, reedukace chyby studenta, ...).

CLIL

Zkratka CLIL znamená Content and language integrated learning, tedy integraci věcného a jazykového vzdělávání. Jedná se o výuku nejazykových předmětů v cizím jazyce. Cílem je, aby student odborné učivo – v našem případě matematiku – zvládl v plném rozsahu a přitom si navíc procvičoval dovednosti v cizím jazyce.

Pro potřeby tohoto článku jsem se zaměřila na tvorbu úloh v cizím jazyce jako na komunikační aktivitu v rámci matematiky (viz Tejkalová 2011).[2]

Žáci dostanou následující úlohu:

> Anička měla 20 frfloní. Pak 6 frfloní zažbrblila. Kolik frfloní má teď?

S touto úlohou lze pracovat různými způsoby, a to jak jazykově, tak matematicky. Žáci se mohou zabývat postavením slov „frfloň“ a „zažbrblit“ v textu jako lingvistickém celku, diskutovat o jejich možném významu a o jejich významu pro řešení úlohy. (Řešení úlohy

[1]KMDM PedF UK, eva.patakova@email.cz

[2]Zmiňovanou aktivitu jsem převedla do češtiny.

zjevně nebude ovlivněno tím, co znamená „frfloň“, naopak význam slova „zažbrblit“ bude pro řešení úlohy klíčový.)

Žáci pak mohou doplňovat slovům „frfloň“ a „zažbrblit“ různé významy a tvořit si tak vlastní úlohy. Od této aktivity se lze dále odrazit k množství aktivit následných, a to jak matematických, tak lingvistických.

Úloha může dále silně vést k rozvoji flexibility myšlení žáka. Stačí se oprostit od běžných spojů, které např. uvádí jako nejčastější odpovědi citovaný článek. (Tj. „zažbrblit“ = koupit, sníst, zastřelit, dostat, ...) Slovo „zažbrblit“ ale samozřejmě nemusí vést pouze k operacím sčítání nebo odčítání. Pokud by „zažbrblit“ znamenalo třeba umýt, zůstalo by Aničce stále 20 frfloní. Ale „zažbrblení“ může znamenat i cokoli, na co třeba v „obyčejné češtině“ neexistuje jednoslovný výraz. Proč by hledaný význam nemohl být třeba „rozdělit jednu frfloň na 7 frfloní“? Nabízí se tedy další otázky pro žáka: Jaký by musel být význam slova „zažbrblit“, aby počet frfloní, co Aničce zbudou, byl 17? (Nebo podle matematické úrovně žáka třeba -4, nebo $\frac{100}{3}$, nebo třeba π.)

Konkrétní aktivita

Výše uvedenou úlohu je tedy možné uchopit mnoha různými způsoby a najít širokou řadu podstatně rozdílných didaktických cílů, které můžeme sledovat. Snažila jsem se vymyslet obdobně podnětnou úlohu pro starší studenty na vyšším stupni gymnázia. Hledala jsem nějakou obtížnější úlohu, ve které bych zaheslovala několik klíčových slov. Ale vytvořit takové prostředí, které by v sobě neslo podobný potenciál, jako nese zmiňovaná úloha pro mladší žáky, se mi nepodařilo.

Nakonec jsem se rozhodla propojit aktivitu s aktivitami na tvorbu úloh studentem a vybranou úlohu jsem pozměnila tak, že jsem pouze zamlčela klíčovou informaci z otázky v úloze. Úkolem žáků bylo ve skupinkách doplnit vhodnou otázku tak, aby hotová úloha nebyla příliš snadná, úlohu vyřešit a odprezentovat ji zbytku třídy. Při prezentaci jsem studenty podporovala v tom, aby pouze nepředkládali hotová řešení, ale aby komunikovali se zbytkem třídy a konzultovali s nimi postup řešení úlohy.

Aktivita má řadu výhod. Tím, že je zadání úkolu na tvoření úlohy poměrně svázané, studenti jsou schopni poměrně rychle „svoje“ zadání vymyslet. Díky svázanosti zadání se také stále držíme předem stanoveného tématu – v ukázce to budou množiny bodů dané vlastnosti.

Konkrétní realizaci, z níž (z důvodu rozsahu článku pouze některé) výstupy uvedu dále, jsem provedla v maturitním ročníku. Velmi se mi tam osvědčily homogenní skupinky po třech až čtyřech členech. Slabší skupinky si položily adekvátně obtížné úkoly a matematické prostředí na své úrovni prozkoumaly dobře. Naopak silnější skupinky – obzvláště skupinky maturantů – se velmi snažily, aby jejich úloha byla co nejzajímavější a nejoriginálnější. Takže studenti pracovali podle svých možností.

Konkrétní realizace

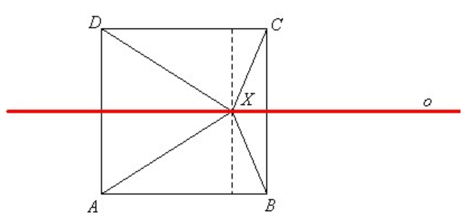
Výchozí úloha[3]

Je dán čtverec $ABCD$ o straně 4 cm. Najděte množinu všech bodů X, pro které trojúhelníky ABX a CDX ~~mají stejné obsahy~~.

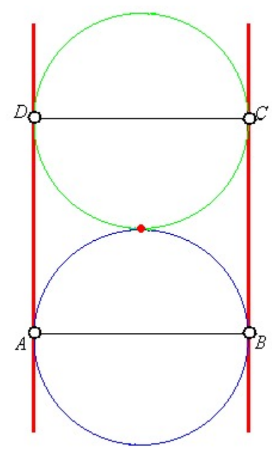
> Žáci tedy dostanou text:
> Je dán čtverec $ABCD$ o straně 4 cm. Najděte množinu všech bodů X, pro které trojúhelníky ABX a CDX . . .

Dále ukážu řešení výchozí úlohy i řešení vybraných úloh vytvořených studenty. V obrázcích (v barevné verzi na CD) budu zachovávat strukturu: Výchozí útvar – černý, množina bodů X takových, že vlastnost ze zadání splňuje trojúhelník ABX – modrá, množina bodů X takových, že vlastnost ze zadání splňuje trojúhelník CDX (popř. BCX) – zelená. Výsledné hledané body (průsečíky zeleného a modrého útvaru) označím červeně.

- . . . měly stejné obsahy – viz obr. 1.
- ...byly pravoúhlé – viz obr. 2.



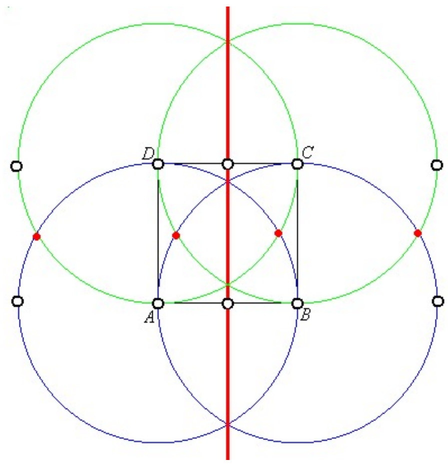
Obr. 1: Stejné obsahy



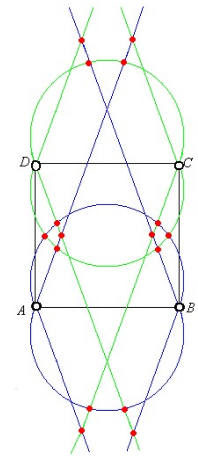
Obr. 2 Pravoúhlé

- ...byly rovnoramenné – viz obr. 3.
- . . . měly součet dvou vnitřních úhlů 110° – viz obr. 4. (Tuto úlohu vytvořila jedna ze dvou skupinek maturantů. Řešení: tvrzení je ekvivalentní s tvrzením, že jeden úhel v trojúhelníku je 70°.)

[3]Úloha převzatá z Herman a kol., 1998, str. 33.



Obr. 3: Rovnoramenné

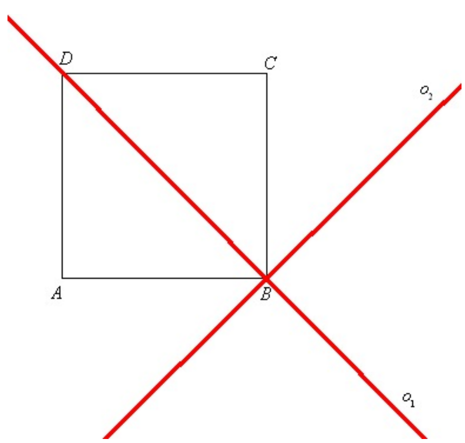


Obr. 4: Součet dvou vnitřních úhlů 110°

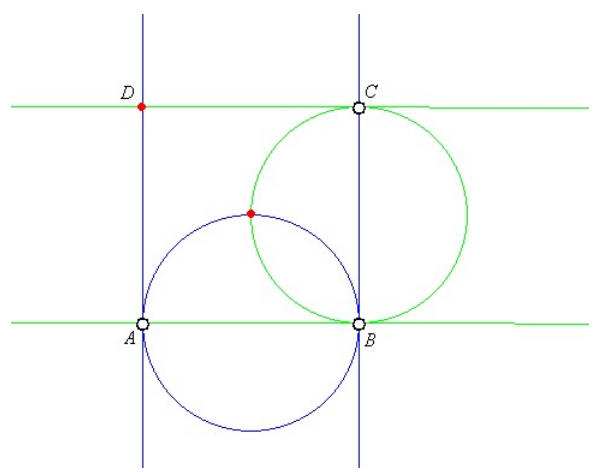
Drobný nápad na závěr

Nakonec stačí říct: „A nyní svoje úlohy vyřešte pro případ, že se jedná o trojúhelníky ABX a BCX. V čem je řešení stejné? V čem odlišné?“ A máme novou sadu úloh. Řešení je někdy snazší, někdy obtížnější, ale vyskytnou se některé pravidelnosti v postupech i ve výsledných obrázcích. U zmíněné úlohy stojí za zmínku např. symetrie řešení původních úloh podle osy úsečky BC a symetrie řešení nových úloh podle osy úhlu ABC. Řešení úloh pak vypadají takto:

- ... měly stejné obsahy – viz obr. 5.
- ... byly pravoúhlé – viz obr. 6.



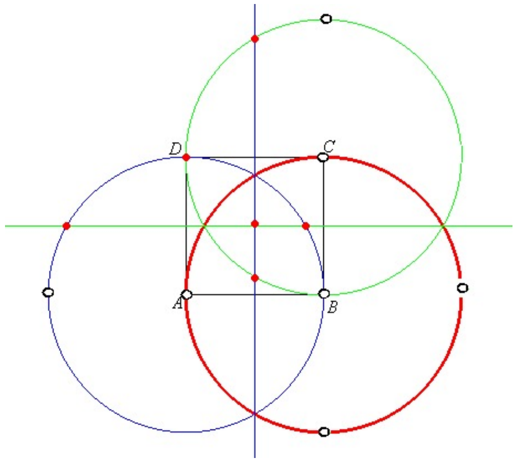
Obr. 5: Stejné obsahy II



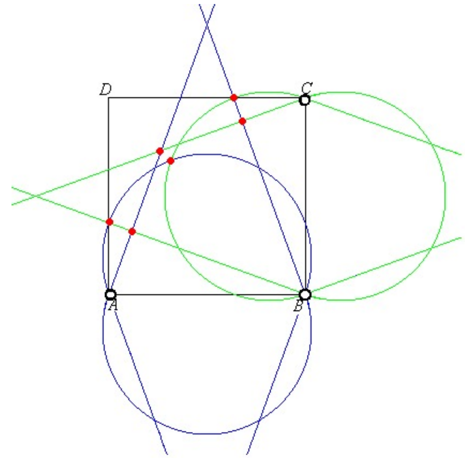
Obr. 6 Pravoúhlé II

- ... byly rovnoramenné – viz obr. 7.
- ... měly součet dvou vnitřních úhlů 110° – viz obr. 8.

Poznámka: Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 303511.



Obr. 7: Rovnoramenné II



Obr. 8: Součet dvou vnitřních úhlů 110° II

Literatura

[1] HERMAN, J., a kol. *Matematika Tercie – Geometrické konstrukce*. Praha: Prométheus, 1998.

[2] TEJKALOVÁ, L. Žákovská tvorba slovních úloh v cizím jazyce. In Stehlíková, N., Tejkalová, L. (eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky – Sborník příspěvků*. Praha : PedF UK, 2011. s. 104–105.

DIAGNOSTIKOVANIE MATEMATICKÝCH KOMPETENCIÍ V ÚLOHE Z KOMBINATORICKEJ GEOMETRIE

ANNA POLOMČÁKOVÁ[1]

Dnešná spoločnosť venuje veľkú pozornosť kompetenciám a aj v rámci kurikula je snaha o prepojenie matematických kompetencií s matematickým obsahom. Podľa Belza a Siegrista [1] sú kompetencie obsahovo neutrálne a je možné ich rozvíjať na ľubovoľnom obsahu. Za matematický obsah, na ktorom chceme vybrané kompetencie rozvíjať, sme zvolili kombinatorickú geometriu. Nakoľko nie je možné rozvíjať všetky kompetencie naraz, z modelu matematických kompetencií popísaných J. Sekerákom [2], sa zameriame len na dve, a to Matematické myslenie a usudzovanie a Znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia.

[1]Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, a.polomcakova@gmail.com

Učebnice

Od školského roka 2008/2009 nadobudla účinnosť nová školská reforma. V učebniciach vydavateľstva Orbis Pictus Istropolitana, ktoré sa po reforme používajú vo vyučovaní matematiky na základných školách, autorom je J. Žabka a kol., sú zaradené tzv. rubriky, ktorých cieľom je jednak propedeutika učiva, ktoré bude nasledovať neskôr, práca s textom a riešenie úloh s reálnym kontextom.

V učebnici pre 5. ročník základných škôl [4] sú na kombinatorickú geometriu zamerané rubriky Hráme sa s kockami a Kreslíme na štvorčekový papier. V učebnici pre 7. ročník [5] je v rámci tematického celku Kocky a kvádre zaradená časť o sieťach kocky.

Experiment

Experiment sme uskutočnili na základnej škole v Kendiciach v 5. až 9. ročníku (kde deviaty ročník je tzv. nereformovaný – žiaci sa učia z iných učebníc, v ktorých sa takto zamerané úlohy nenachádzajú). Experimentu sa zúčastnilo 13 žiakov 5. ročníka, zo 6. ročníka bolo 14. žiakov, 10 žiakov 7. ročníka, 13 žiakov bolo z 8. ročníka a z 9. ročníka 10 žiakov. Cieľom experimentu bolo zistiť:

- či rubriky v učebniciach systematicky budujú predstavivosť,
- či sa objaví rozdiel medzi reformovanými ročníkmi a nereformovaným ročníkom,
- či budú mať potrebu sa vyjadriť k tomu, čo považujú za rovnaké/rôzne,
- aké chyby sa budú vyskytovať v predstavách žiakov.

Úlohy v experimente

Ako prvá bola v experimente zaradená úloha z učebnice pre 5. ročník [4] z rubriky Kreslíme na štvorčekový papier.

Úloha 1 Nakresli všetky rôzne útvary zložené zo štyroch rovnako veľkých štvorcov. Susedné štvorce musia mať spoločnú aspoň jednu stranu.

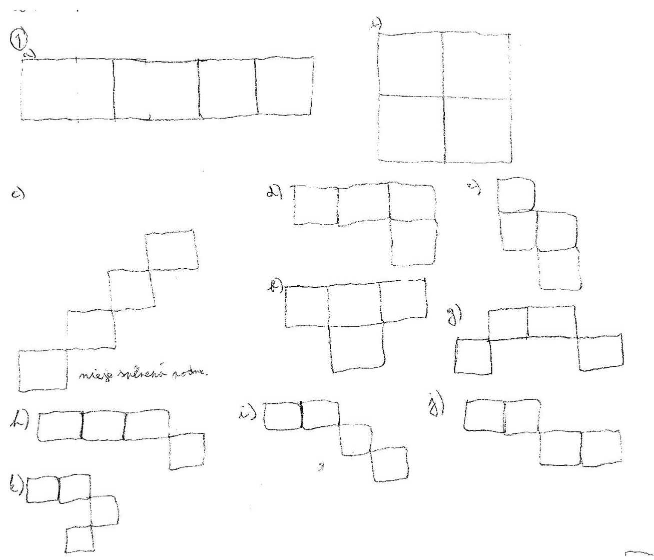
2. úloha je neštandardná, už len kvôli spôsobu zadania (formulácia je prebraná od I. Scholtzovej [3]). Dalo by sa predpokladať, že ak zvládnu prvú, mali by mať čiastočný návod na riešenie druhej.

Úloha 2 Sieť kocky sa skladá zo šiestich zhodných štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).

Žiakov sme poprosili, aby k svojmu riešeniu napísali komentár.

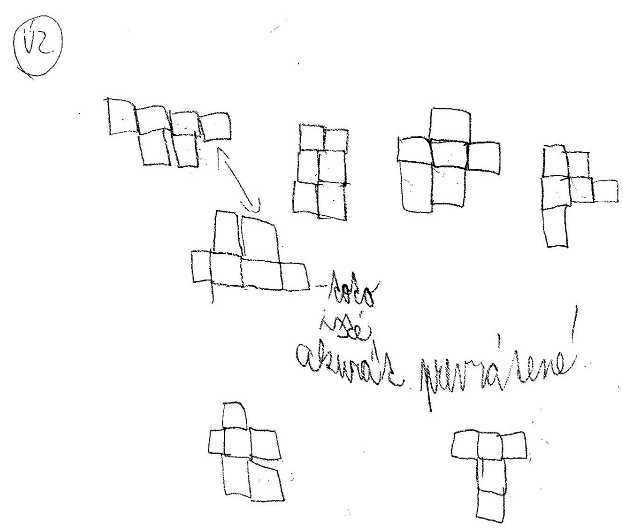
Vyhodnotenie experimentu

Po prezretí riešení sme zistili výrazné rozdiely medzi deviatakmi a ostatnými ročníkmi. Prvú úlohu mala väčšina žiakov od 5. po 8. ročník správne, u deviatakov to však boli len traja žiaci z desiatich. V niekoľkých riešeniach sa vyskytli aj útvary, ktoré nesplĺňali zadanie 1. úlohy. Buď obsahovali viac alebo menej ako štyri štvorce, alebo štvorce neboli spojené hranou. Na obr. 1 je príklad takéhoto riešenia žiaka 9. ročníka. Dá sa teda povedať, že žiak v takomto prípade zle analyzoval text, alebo nenadobudol vhľad do situácie.



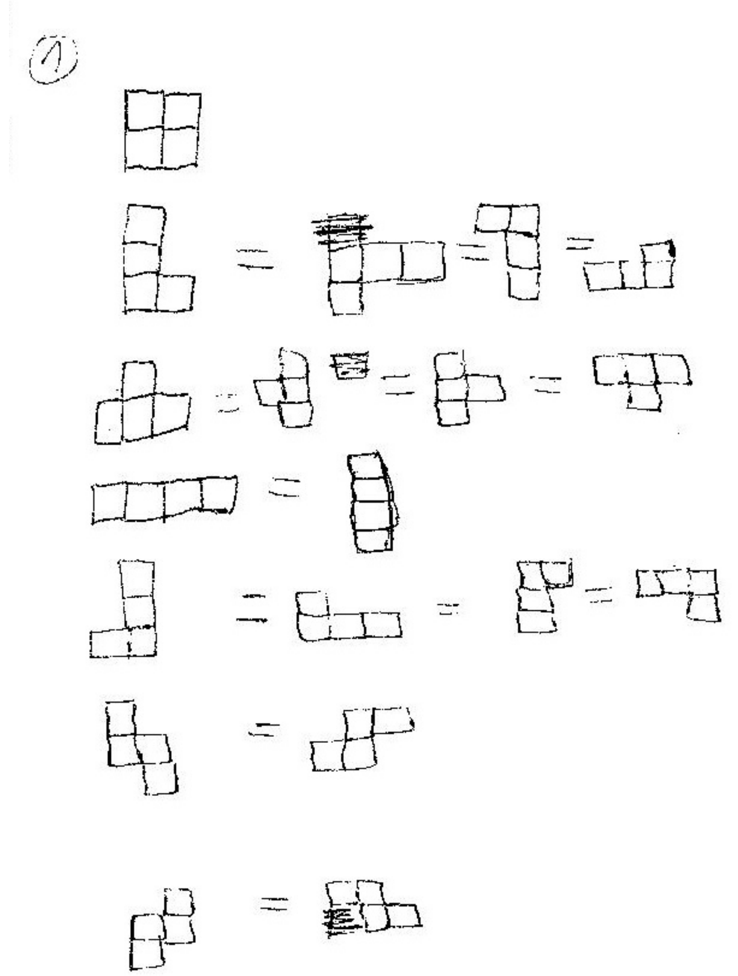
Obr. 1: Riešenie nesplĺňajúce podmienky zadania 1. úlohy

Iba v jedinom riešení, ktoré je na obr. 2, sa zdala byť prvá úloha nápomocná pri riešení druhej úlohy, lebo žiak 6. ročníka začal vypisovať útvary zložené zo šiestich štvorcov, aj keď potom už nezvážil, že to má byť ešte aj sieť kocky.



Obr. 2: Nedokončené riešenie 2. úlohy

Na obr. 3 je riešenie žiaka 7. ročníka, z ktorého je zrejmé, ktoré útvary považuje za rovnaké a ktoré za rôzne. Takto poňala rovnaké (rôzne) útvary vačšina žiakov.



Obr. 3: Čo žiak považuje za rovnaké (rôzne)

Záver

Na záver uvádzame zhrnutie, ktoré sme urobili po prezretí riešení. Žiakom chýba predstavivosť ako rovinná, tak priestorová. Pri svojom riešení žiaci nezvažovali symetrie, aj keď už v 5. ročníku sa v rubrike „Kreslíme na štvorčekový papier“ uvádza dohoda, ktoré útvary sa v matematike považujú za rovnaké. Ďalším pozorovaním je nedostatok trpezlivosti pri vypisovaní možností. A čo sa týka sietí kocky, vo vyučovaní prevládajú siete tvaru písmena T a kríža (štyri štvorce v rade), tak ťažko očakávať, že žiaci nájdu aj iné, ak sa s nimi doteraz nestretli, aj keď v ojedinelých prípadoch (u žiakov do 7. ročníka) sa tak stalo. Náhodné a nesystematické vypisovanie možností je ďalším nedostatkom pri riešení úloh z kombinatoriky. Iba v 2 riešeniach sa vyskytol nejaký záver z riešenia, inak nemali potrebu urobiť zo svojho riešenia záver.

Literatúra

[1] BELZ, H., SIEGRIST, M. *Klíčové kompetence a jejich rozvíjení: východiska, metody, cvičení a hry*. Praha: Portál, 2001. 375 s. ISBN 80-7178-479-6.

[2] SEKERÁK, J. *Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní*: dizertačná práca. Košice: PF UPJŠ, 2008. 180 s.

[3] SCHOLTZOVÁ, I. *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole (Riešené príklady s metodickými poznámkami)*. Prešov: Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, 2004. ISBN 80-8045-340-3.

[4] ŽABKA, J., ČERNEK, P. M*atematika pre 5. ročník ZŠ 1. časť.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2009. 112 s. ISBN 978-80-7158-977-8.

[5] ŽABKA, J., ČERNEK, P. *Matematika pre 7. ročník ZŠ 2. časť.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2011. 136 s. ISBN 978-80-8120-050-2.

ZLOMKY A PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

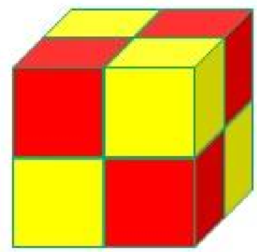
BOHUMILA RAISOVÁ[1]

Prvotní inspiraci k experimentu, o kterém bych vás ráda informovala, jsem získala od Jany Macháčkové. Někteří stálí účastníci Dvou dnů s DM se zúčastnili dílny, která byla na toto téma vedena v roce 2005. Experiment proběhl na jedné venkovské základní škole ve dvou paralelních pátých třídách. Proběhl na konci školního roku, v polovině června. Obě skupiny měly probraný stejný rozsah učiva. Zatímco ve třídě 5.A se učily děti víceméně tradičním způsobem, ve třídě 5.B byla nadstandardně často zařazována skupinová práce. Při samotném experimentu bylo oběma třídám nabídnuto, že se každý žák může samostatně rozhodnout, zda chce pracovat individuálně nebo ve skupině. Asi příliš nepřekvapí, že si děti zvolily metodu, na kterou byly zvyklé z běžných hodin matematiky. V 5.A se nevytvořila ani jedna skupina, dokonce ani žádná dvojice. V 5.B naopak všechny děti vytvořily stejné skupiny, ve kterých jsou zvyklé běžně pracovat.

Děti dostaly žluté a červené kostky a pokyn: „Postavte krychli z osmi kostek“. Tento úkol nedělal žádnému dítěti problémy. Další pokyn: „Změňte stavbu tak, aby polovina kostek byla červená“. Také tento úkol všechny děti zvládly. Děti, které už první stavbu postavily tak, že polovina kostek byla červená, měly potřebu to sdělit a zdálo

[1] PřF UHK, bohumila.raisova@uhk.cz

se, že předpokládaly, že splnily původní úkol lépe než děti, které musely stavbu teprve upravovat. Všechny děti upravily stavbu tak, že buď byly červené kostičky pohromadě anebo byly červené a žluté kostky uspořádány zcela pravidelně (obr. 1).



Obr. 1

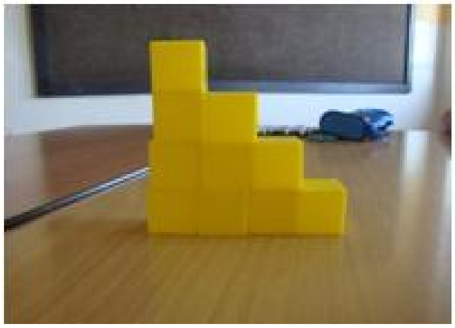
Ani s pokynem „postavte libovolnou stavbu z dvanácti kostek“ a poté: „Změňte stavbu tak, aby čtvrtina kostek byla červených“ neměly děti prakticky žádné problémy.

Zajímavé však bylo zdůvodnění. Na otázku „jak víš, že to máš dobře?“ některé děti odpovídaly: „No, protože čtvrtina z dvanácti jsou tři (resp. polovina z osmi jsou čtyři)“ nebo „Protože 12 : 4 = 3“. Některé děti však reagovaly slovy: „No prostě to vím“ nebo „Vždyť je to jasný“. Také tady se projevovaly rozdíly mezi oběma třídami. Zatímco žáci z 5.A spíše počítali a také tak správnost své stavby zdůvodňovaly, děti z 5.B spíše experimentovaly.

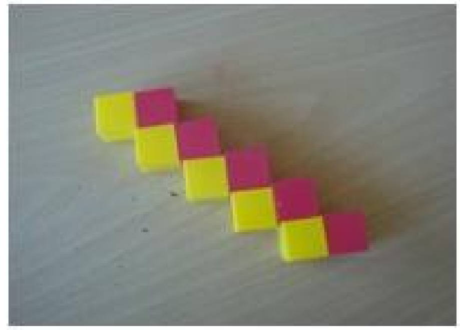
Až doposavad nikoho z dětí nenapadlo, že by mohly změnit i celkový počet krychlí k dosažení požadované části v červené barvě.

V dalším kroku však byla situace podstatně komplikovanější. Začaly se tady také výrazněji projevovat rozdíly mezi oběma skupinami. Úkolem bylo sestavit z deseti krychlí stavbu, která by se dala nazvat schody. Většina dětí postavila stavbu jako na obrázku 2, pouze v barevných obměnách, případně jinak otočené. Pouze jedna skupina pojala schody úplně jinak (obr. 3). Na další pokyn „Změňte stavbu tak, aby třetina kostek byla červených“ už se reakce dětí výrazně lišily. Děti, které pracovaly ve skupinách, se začaly radit mezi sebou, děti, které pracovaly individuálně, reagovaly udiveně: „Ale to nejde!“ Když se experimentátor zatvářil neurčitě, začaly některé děti zkoušet různé počty krychlí a pak konstatovaly, že by to šlo jedině, kdyby změnily počet krychlí. Protože se jim nedostalo záporné odpovědi (experimentátor pouze zopakoval pokyn v původním znění), děti pracující individuálně se ještě na moment zamyslely a pak úkol splnily. Ve skupinách zaznívaly výroky typu „No jasně, to musíme změnit i počet kostek, jinak by to nešlo“. Některé děti ubraly jen jednu kostku, jiné se odvážily změny hodně radikální a vytvořily schody jen ze tří kostek. Většina dětí se snažila vytvořit stavbu, kterou by i nadále mohly nazývat schody, ale tvarově ji přizpůsobily počtu krychlí (obr. 4). I v těchto stavbách však zůstávaly červené krychle pohromadě.

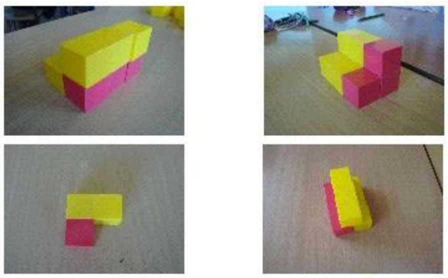
Některé děti řešily problém naopak přidáním krychlí. Tady však vesměs docházelo k chybám (obr. 5).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Obr. 5

Posledním úkolem bylo krychli, která obsahovala polovinu červených kostek, nakreslit. Protože v obou třídách bylo probíráno zobrazení krychle ve volném rovnoběžném promítání v relativně nedávné době (méně než před měsícem), snažily se všechny děti tuto metodu zobrazení uplatnit pro řešení tohoto úkolu. Výsledky však byly zprvu všechny nesprávné. Děti sice zachytily přední stěnu, rozdělenou na čtyři čtverce, do hloubky však zachytily pouze jednu krychli. Většina dětí nebyla s výsledkem spokojena, některé děti práci vzdaly se slovy, že to nedokážou. Některé děti však práci v této podobě odevzdaly s přesvědčením, že je to správně. Při následném rozhovoru některé po upozornění chybu uznaly, jiné na připomínku, že stavba měla osm krychlí, reagovaly slovy: „No vždyť já jich mám osm“ a začaly odpočítávat jednotlivé stěny v obrázku. Další rozhovor s těmito dětmi ukázal, že zaměňují pojmy krychle a čtverec.

Situaci příliš neusnadnilo ani to, že děti vybarvovaly polovinu krychlí červeně. Pokud byly červené krychle pohromadě, ať už ve spodní, horní či boční vrstvě, vybarvily děti příslušnou polovinu stavby, kterou ve skutečnosti zobrazily. Pokud byly červené krychle vpředu či vzadu, vybarvily děti přední stěnu jednou barvou a zbývající stěny druhou barvou. „Nejzlobivější“ byla krychle z obrázku 1. Tady si děti nejlépe uvědomovaly, že jejich obrázek neodpovídá skutečnosti. Tyto děti většinou nechtěly obrázek odevzdat, dokud neodpovídal stavbě. Jednalo se o jednu skupinu chlapců a jednu skupinu dívek. V těchto skupinách se děti skutečně radily, kriticky posuzovaly svou práci a nakonec opravdu vytvořily obrázek, který vystihoval skutečnost. Obě skupiny přinesly obrázky až hodinu po skončení samotného experimentu.

V časovém rozmezí experimentu nikdo z dětí nedokázal vytvořit správný obrázek. Bylo by zajímavé zjistit, jestli to byla jen otázka vytrvalosti a motivace (celý experiment proběhl v jedné vyučovací hodině a tak se mohlo stát, že děti vzdávaly kreslení obrázků spíše proto, že byly unavené a ne proto, že by si už skutečně nevěděly rady). Dále by bylo zajímavé zabývat se otázkou, jestli souvislost mezi správným zakreslením a barevným uspořádáním krychle byla náhodná, nebo jestli by barevné uspořádání krychle vedlo i další děti ke správné kresbě anebo jestli barevné uspořádání (a možná tvořivost) a vytrvalost v řešení jsou spolu spojeny a pramení v dětech samotných.

Diagnostika postojů žáků pátých ročníků ZŠ k řešení slovních úloh

Alena Rakoušová[1]

Pokud se chceme zabývat otázkou rozvoje postojů žáků mladšího školního věku k řešení slovních úloh, nevyhneme se otázce motivace. Z psychologického hlediska je pro proces učení nejhodnotnější motivace vnitřní. Ta vychází z vnitřních potřeb žáka. Žák se v takovém případě učí, protože sám chce, chce řešit slovní úlohy a zpravidla vítá situace, které řešení úloh navozují. Ne všichni žáci tuto vnitřní motivaci během školní docházky získali. Někteří žáci si vnitřní motivaci a tím i určitý způsob přístupu k učení teprve osvojují. Jiní žáci disponují vnější motivací – snaží se o dosažení odměny, nebo se naopak bojí trestu. Někteří autoři mezi vnější motivaci zahrnují i tzv. sociální motivaci, kdy se žáci neučí ze zájmu o matematiku, ale z potřeby vyniknutí, z potřeby prestiže atd. Snahou učitelů a průvodců žáka by přirozeně mělo být dosažení motivace vnitřní cestou formování motivů a „zvnitřňování“ motivace vnější. Motivační zaměření a sféra zájmů jsou nejkomplexnější motivační charakteristiky osobnosti (Hrabal, Hrabal, 2004).

Cílem tohoto příspěvku není popisovat celou strukturu motivace, ale seznámit čtenáře s diagnostikou těch potřeb a motivů, které se nejvíce podílejí na školní zdatnosti žáka při řešení slovních úloh. Proč? Rozvíjíme metodiku tzv. integrovaných slovních úloh (Rakoušová, 2009), jejichž hlavním znakem je kontextovost, protože téma úlohy prochází napříč mimomatematickými předměty a pochopitelně matematikou. Výuka integrovaných slovních úloh napříč vyučovacími předměty podle našich dosavadních šetření významně zlepšuje postoje vzorku žáků k řešení slovních úloh. Chceme zjistit, zda se tato intervence projeví na kvalitě vnitřní motivace žáků. Abychom mohli studovat postoje, potřebujeme znát strukturu potřeb žáků zahrnutých do výzkumného vzorku. K tomu slouží standardizovaný Preferenční motivační dotazník autora Hrabala (1988, s. 97. V příloze uvádíme jeho modifikaci.

[1]PedF UK v Praze, alena.rakousova@seznam.cz

Výzkumná šetření (Hrabal, Pavelková, 1984) poukazují na úroveň rozvoje nejméně tří oblastí potřeb: jsou jimi potřeby poznávací, výkonové a sociální, přičemž právě potřeby poznávací jsou zdrojem vnitřní motivace učební činnosti (tamtéž, s. 96). Tyto potřeby jsou uspokojovány samotnou činností, nikoli jejím vnějším následkem. Podle Hrabala (Hrabal, Pavelková, 2011) vyučující vzbuzuje poznávací potřeby žáků tím, **jaký typ úloh předkládá a jakými metodami vyučuje**, a výkonové potřeby jsou vzbuzovány podle toho, jakou úroveň požadavků z hlediska jejich obtížnosti má na žáky. Proto chápeme integrované slovní úlohy jako jeden z prostředků rozvoje vnitřní motivace. O vlivu zařazování těchto úloh do vyučování na zlepšení žákovských postojů k řešení slovních úloh se může čtenář přesvědčit v předchozích ročnících sborníku Dva dny s didaktikou matematiky.

Preferenční motivační dotazník, se kterým chceme čtenáře podrobněji seznámit, umožňuje diagnostikovat šest potřeb (pozitivní sociální motivaci, poznávací motivaci, morální motivaci, obavu z následku, touhu po vyniknutí a prestiži, dobrý pocit z výkonu). Potřeba souladu s morálními normami (morální potřeba) se v praxi u dětí projevuje tím, že děti chápou učení jako povinnost. Pokud jsou potřeby poznávání školou úspěšně rozvíjeny, stávají se významnými zdroji rozvoje osobnosti dítěte (Hrabal, 2004). Výkonové potřeby jsou utvářeny buď potřebou úspěšného výkonu, nebo potřebou vyhnutí se neúspěchu. K první z nich se váží projevy přiměřené aspirační úrovně, druhá se pak projevuje neadekvátní aspirační úrovní a obavou z neúspěchu (Hrabal, 2004, s. 96). Může také docházet k tomu, že strach, nebo naopak potřeba úspěšného výkonu, se může zobecnit do celé oblasti vyučovacího předmětu – matematiky.

Sociální motivace se od ostatních typů motivace liší tím, že je pokládána spíše za motivaci vnější. Z těchto důvodů nyní seznámíme čtenáře s preferencemi žáků na vstupu šetření, abychom získali přehled o struktuře motivace jak vnitřní, tak vnější.

Preferenční motivační dotazník

Vyhodnocení dotazníku může pomoci zmapovat rozdíly žáků i celých tříd v motivaci a důvody, proč se žáci snaží řešit slovní úlohy. Žáci mají odpovídat tak, jak je napadne, hned po přečtení dvojice otázek, odpovědi vyznačují křížkem.

Motivační kategorie:

I = pozitivní sociální motivace
II = poznávací motivace
III = morální motivace – pocit povinnosti
IV = obava z následku
V = touha po vyniknutí a prestiži
VI = dobrý pocit z dobrého výkonu

Zpracování výsledků (Hrabal 1988, 2004; Hrabal, Pavelková, 2011):

1. sečteme křížky u jednotlivých typů otázek;
2. zapíšeme je k římským číslicím;
3. sestavíme tabulku, do které přidáme prospěch žáka podle klasifikace v daném předmětu;
4. vypočítáme průměry pro údaje v každém sloupci;
5. určíme převažující motivaci;
6. navrhneme opatření podle daných výsledků.

Bodové skóre získané v Preferenčním dotazníku	Sociální potřeba	Poznávací potřeba	Morální povinnost	Obava z neúspěchu	Potřeba prestiže	Potřeba dobrého výkonu
Průměr	I	II	III	IV	V	VI
5.A	1,95	1,9	**3,09**	1,36	1,045	2,55
5.B	1,83	2,16	**3,1**	1,88	**0,88**	2,83
5.C	1,88	2,22	**3**	1	**0,61**	2,22

Z tabulky vyplývá, že převažující motivace ve všech třech třídách začínajících pátých ročníků je určována pocitem, že učení je nutností a povinností. Tato atmosféra je ve všech třídách podobná. Výsledky jsou důležité pro porovnání výstupů zjišťovaných stejnou metodou na konci 5. ročníku. Tím bude možné zjistit, kde jsou rezervy a silné stránky v motivačním působení učitele.

Závěr

Je jistě v pořádku, že žáci obou skupin považují učení za povinnost. Ceníme si také toho, že žáci nemají zvýšenou potřebu sociální prestiže často navozenou soutěžemi.

Na výsledky v oblasti zjišťování motivace žáků navážeme experimentem, který bude zjišťovat vliv typů motivace na postoje žáků k řešení slovních úloh.

Předpokládáme, že výuka integrovaných slovních úloh by mohla dále rozvíjet vnitřní motivaci. Předpoklad činíme na základě výuky těchto úloh v experimentální třídě. Ze zkušenosti víme, že stále více žáků přichází s požadavkem na další zadání slovních úloh k řešení. V případě nízké vnitřní motivace by tomu tak nebylo.

Poznámka: Článek byl podpořen grantem GAUK Integrované slovní úlohy jako jedna z možností rozvíjení klíčových kompetencí žáků 1. stupně základní školy, číslo 666612.

Příloha

Motivační kategorie		Ve škole se snažím, protože:		Motivační kategorie	
	I	chci, aby ke mně měl učitel dobrý vztah	to, co se učím, mě zajímá	II	
	V	chci být lepší než někteří spolužáci	mám dobrý pocit, když se něco dobře naučím	VI	
	II	to, co se učím, mě zajímá	obávám se, že nebudu nic umět	IV	
	III	vím, že učení je má povinnost	mám dobrý pocit, když se něco dobře naučím	VI	
	VI	mám dobrý pocit, když se něco dobře naučím	chci, aby ke mně měl učitel dobrý vztah	I	
	IV	obávám se, že nebudu nic umět	chci být lepší než někteří spolužáci	V	
	VI	mám dobrý pocit, když se něco dobře naučím	to, co se učím, mě zajímá	II	
	I	chci, aby ke mně měl učitel dobrý vztah	vím, že učení je má povinnost	III	
	III	vím, že učení je má povinnost	obávám se, že nebudu nic umět	IV	
	IV	obávám se, že nebudu nic umět	chci, aby ke mně měl učitel dobrý vztah	I	
	II	to, co se učím, mě zajímá	vím, že učení je má povinnost	III	
	V	chci být lepší než někteří spolužáci	to, co se učím, mě zajímá	II	
	III	vím, že učení je má povinnost	chci být lepší než někteří spolužáci	V	
	IV	obávám se, že nebudu nic umět	mám dobrý pocit, když se něco dobře naučím	VI	
	I	chci, aby ke mně měl učitel dobrý vztah	chci být lepší než někteří spolužáci	V	
Jiné důvody:					

Literatura

[1] HRABAL, V. st., HRABAL, V. ml. *Diagnostika. Pedagogicko-psychologická diagnostika žáka s úvodem do diagnostické aplikace statistiky*. Praha: Karolinum, 2004.

[2] HRABAL, V. Pavelková, I. *Jaký jsem učitel*. Praha : Portál, 2011.

[3] HRABAL, V. *Psychologické otázky motivace ve škol*e. Praha: SPN, 1988.

[4] RAKOUŠOVÁ, A. Integrované slovní úlohy jako jedna z možností rozvíjení klíčových kompetencí žáků primární školy. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2009. Sborník příspěvků.* PedF UK Praha, 2009, s. 60–61. ISBN 978-80-7290- 420-4.

Od zlomků k procentům

Lucie Růžičková[1]

Příspěvek uvádí výsledky výukového experimentu, při němž žáci ve věku 6. ročníku ZŠ využívají svých předchozích znalostí práce se zlomky k získání zkušeností, které dále umožní smysluplné zavedení pojmu procento. Experiment je součástí dlouhodobého výzkumného projektu s cílem identifikovat výuková prostředí, v nichž si žáci osvojují matematické poznatky a projevují obecnější vědomosti (Růžičková, Novotná, 2011a, 2011b).

Popis experimentu

Aktivita byla realizována se žáky 1. ročníku osmiletého gymnázia ve dvou po sobě jdoucích vyučovacích hodinách, jejichž organizační forma vykazovala některé znaky matematické rallye (Brousseau, 2001). V první vyučovací hodině žáci ve skupinách řešili na pracovní listy pět úloh s každodenní tematikou. Ve druhé vyučovací hodině proběhla společná diskuze v rámci celé třídy, kdy byly jednotlivé úlohy a skupinové strategie jejich řešení podrobně rozebrány. Vyučující tak připravila prostředí pro zavedení pojmu procento, které proběhlo v následující vyučovací hodině.

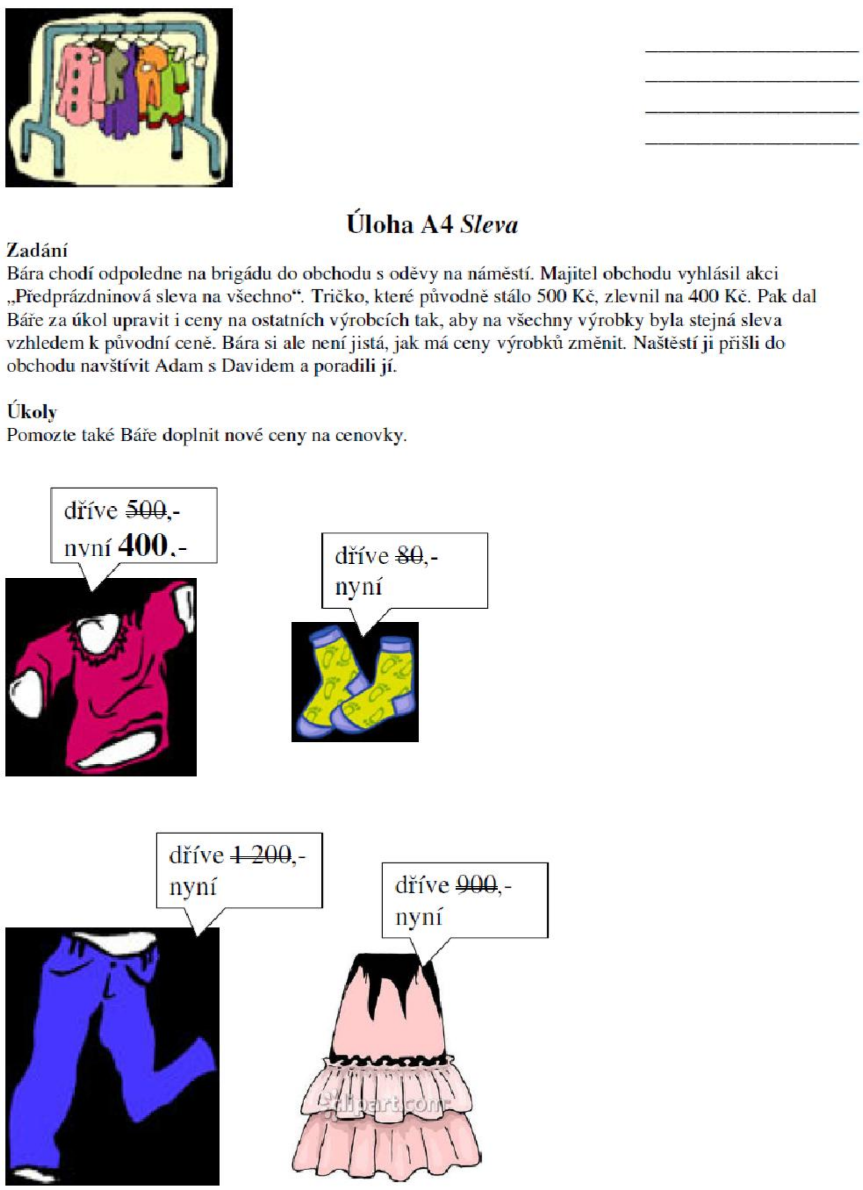
Charakteristika zadaných úloh a strategie jejich řešení

Řešené úlohy byly volně provázány kvazireálným kontextem společného příběhu. Zadání některých úloh bylo formulováno poměrně otevřeně, takže jejich řešení vyžadovalo

[1] KMDM PedF UK, `lucie_ruzickova@seznam.cz`

hledání vhodných strategií a odpovídající argumentaci. Matematickou podstatou všech úloh bylo porovnávání částí různých celků nebo určování ekvivalentních částí různých celků. Přestože se v zadání úloh nevyskytoval zlomkový zápis, žáci s využitím svých předchozích znalostí popisovali zkoumané problémové situace pomocí zlomků. Pro vyřešení každého z úkolů museli žáci najít vhodný nástroj porovnávání částí z různých celků, čímž získali v několika různých situacích zkušenosti s (dosud nezavedeným) pojmem procento.

Ukázka úkolu: Na konferenci byla prezentována a analyzována zadání a žákovská řešení matematických úkolů ze všech pěti pracovních listů. Zde se omezíme na jeden pracovní list s názvem *Sleva* (obr. 1).



Úloha A4 *Sleva*

Zadání
Bára chodí odpoledne na brigádu do obchodu s oděvy na náměstí. Majitel obchodu vyhlásil akci „Předprázdninová sleva na všechno“. Tričko, které původně stálo 500 Kč, zlevnil na 400 Kč. Pak dal Báře za úkol upravit i ceny na ostatních výrobcích tak, aby na všechny výrobky byla stejná sleva vzhledem k původní ceně. Bára si ale není jistá, jak má ceny výrobků změnit. Naštěstí ji přišli do obchodu navštívit Adam s Davidem a poradili jí.

Úkoly
Pomozte také Báře doplnit nové ceny na cenovky.

Obr. 1

Zadání: Bára chodí odpoledne na brigádu do obchodu s oděvy na náměstí. Majitel obchodu vyhlásil akci „Předprázdninová sleva na všechno“. Tričko, které původně stálo 500 Kč, zlevnil na 400 Kč. Pak dal Báře za úkol upravit i ceny na ostatních výrobcích tak, aby na všechny výrobky byla stejná sleva vzhledem k původní ceně. Bára si ale není jistá, jak má ceny výrobků změnit. Naštěstí ji přišli do obchodu navštívit Adam s Davidem a poradili jí.

Úkol: Pomozte také Báře doplnit nové ceny na cenovky.

V průběhu třídní diskuze k tomuto úkolu se řešila především otázka, zda „stejná sleva na všechny výrobky“ znamená „sleva o stejný počet korun“.
Žák 1: „To asi těžko. To by museli zlevnit všechno o stovku, takže k těm ponožkám by mi ještě dvacku přidali.“
Žák 2: „Stejná sleva znamená sleva o stejnou část té první ceny.“
Žák 3: „To triko se zlevnilo o pětinu. Takže se to všechno zlevnilo o pětinu.“
Žák 4: „No, my jsme to počítali, že ta nová cena je čtyři pětiny té staré ceny.“

Závěr

V rámci plnění úkolů si žáci osvojili princip převádění zadaných údajů na společnou jednotku pro účely vyjadřování a porovnávání částí různých celků a vyjadřování stejně velkých částí různých celků. Při řešení jednotlivých úloh volili společnou jednotku podle konkrétní situace. Na základě těchto zkušeností pak žáci sami pocítili potřebu zavést takový matematický objekt, který jim obecně umožní vyjadřovat a porovnávat části libovolných různých celků a vybírat z různých celků stejně velké části. Setiny daných celků (s názvem procenta), které pro účely porovnávání navrhla v další hodině vyučující, přijali žáci jako vhodný prostředek.

Poznámka: Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309.

Literatura

[1] Brousseau, G. (2001). *Les doubles jeux de l’enseignement des mathématiques.* (Lecture at Colloque inter IREM, 15–17 June 2001.)

[2] Ruzickova, L., Novotna, J. (2011a). Connaissances and Savoirs in the framework of Mathematics Rallye. In Ubuz. B. (ed.) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Ankara, Turkey: PME.

[3] Růžičková, L., Novotná, J. (2011b). Matematická rallye: Shodná zobrazení. In Stehlíková, N., Tejkalová, L. (eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2011: Sborník příspěvků.* Plzeň: Vydavatelský servis.

TÍMOVÁ MATEMATICKÁ SÚŤAŽ B-DAY

MIROSLAVA SOVIČOVÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ[1]

Čo je matematický B-DAY?

Matematický B-DAY je tímová matematická súťaž pre žiakov stredných škôl vo veku 15-19 rokov. Hoci na Slovensku bola táto súťaž v školskom roku 2011/2012 organizovaná po prvýkrát, v Holandsku, Nemecku a Belgicku má už niekoľkoročnú tradíciu. Hlavným organizátorom súťaže je Freudenthalov inštitút pre vyučovanie matematiky a prírodovedných predmetov na Univerzite v Utrechte v Holandsku. Názov Matematický B-DAY je odvodený z holandských učebných osnov, ktorých B-forma je orientovaná na matematické kompetencie pre technické a prírodovedné študijné programy, pričom hlavný dôraz sa kladie na schopnosť riešiť matematické problémy (problem solving), vytváranie hypotéz a overovanie ich platnosti.

Matematický B-DAY sa koná každoročne tretí piatok v mesiaci november na stredných školách. Troj- až štvorčlenné tímy žiakov počas jedného dňa pracujú na zadaní, ktoré tvorí jeden, resp. viacero otvorených problémov so spoločným kontextom. Pri riešení môžu využiť akékoľvek dostupné metódy, nástroje a pomôcky, vrátane počítača a internetu. Výsledkom je riešenie v podobe súvislého matematického textu, ktoré je zrozumiteľné pre každého čitateľa, dokonca aj pre toho, kto nepozná zadanie problémov. Súťažiaci by doňho mali zahrnúť popis riešení, odpovede na položené otázky, ale tiež svoje úvahy a zdôvodnenia. Riešenie musia tímy odovzdať v elektronickej forme v deň súťaže, najneskôr sedem hodín od začiatku súťaže.

B-DAY na Slovensku

Na Slovensku sa súťaž Matematický B-DAY v tomto školskom roku (2011/2012) uskutočnila po prvýkrát, a to v rámci riešenia medzinárodného projektu 7RP PRIMAS

[1]KM FPV UKF, Nitra, `miroslava.sovicova@ukf.sk`, `lubomir.rybansky@ukf.sk`

(www.primas-project.eu). Jedným z hlavných cieľov projektu je „vytváranie prostredia a realizovanie aktivít vhodných na implementáciu objavného vyučovania matematiky“ [1]. Na príprave a organizácii súťaže sa podieľali riešitelia projektu 7RP PRIMAS z Katedry matematiky Fakulty prírodných vied na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre v spolupráci s partnermi projektu PRIMAS z Freudenthalovho inštitútu z Univerzity v Utrechte.

Súťaž prebehla najprv v Nitre, v piatok 25. novembra 2011 na Katedre matematiky FPV UKF. Zúčastnilo sa jej dvadsaťdva žiakov zo štyroch nitrianskych gymnázií (Gymnázium Golianova, Gymnázium Párovská, Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Gymnázium sv. Jozefa Kalazanského). O súťaž prejavili záujem aj kolegovia z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, kde sa ju podarilo zorganizovať v piatok 27. januára 2012. Súťaže sa v Bratislave zúčastnilo osemnásť žiakov z dvoch bratislavských gymnázií (Gymnázium Grösslingová, Gymnázium Jura Hronca).

Matematický B-DAY mal v obidvoch slovenských mestách u žiakov veľký úspech.. Problémy zo zadania ich zaujali a mnohí žiaci prekvapili úrovňou svojich matematických zručností, úrovňou vyjadrovania, schopnosťou logicky argumentovať i dosiahnutými výsledkami v záverečných riešeniach. Súťaž bola vyhodnotená 2. marca 2012 na Katedre matematiky FPV UKF v Nitre. Vyhodnotenia vo forme workshopu sa zúčastnili žiaci, ich pedagógovia a riešitelia projektu 7RP PRIMAS, ktorí si pre žiakov pripravili zaujímavé prezentácie a aplety o riešeniach problémov zo zadania. Najlepšie tímy boli v závere workshopu ocenené.

Zadanie z roku 2011

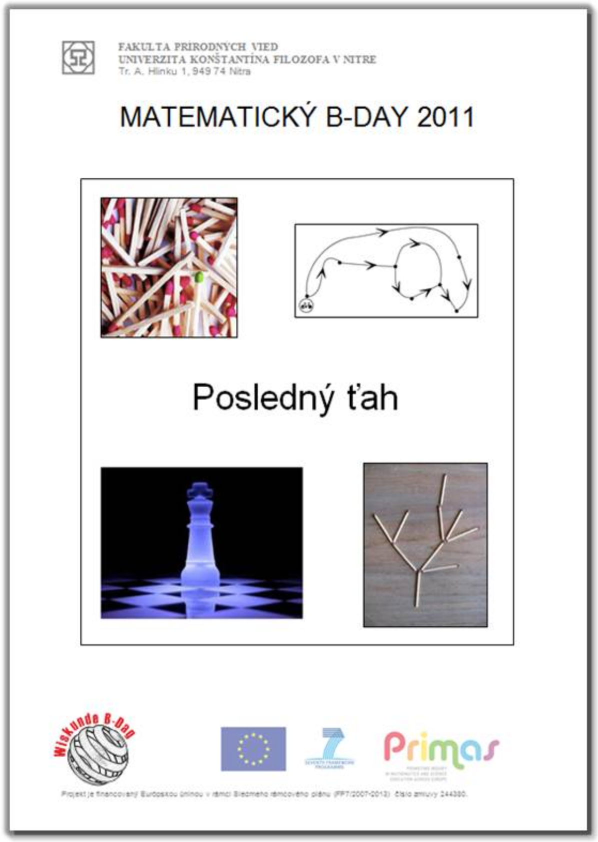
Každý rok sa téma zadania a kontext problémov líši. V roku 2011 malo zadanie súťaže Matematický B-DAY názov „Posledný ťah“ (obr. 1).

Zadanie bolo rozdelené na štyri časti. V prvej časti boli žiakom predstavené štyri kombinatorické hry, pomocou ktorých sa mali naučiť hľadať výhernú stratégiu. V druhej časti boli uvedené základné teoretické poznatky aplikovateľné na hry, s ktorými sa žiaci v prvej časti zadania oboznámili. Tretia časť zahŕňala detailnú analýzu jednej hry. Štvrtú časť tvorilo záverečné zadanie, ktoré bolo podstatnou časťou matematického skúmania žiakov.

Ukážky úloh

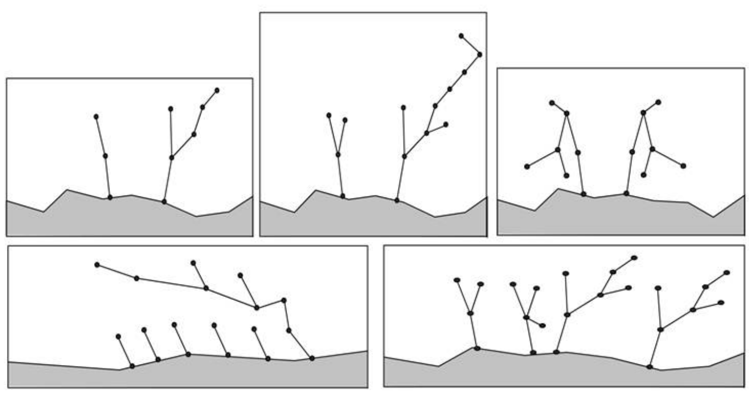
Úloha 1: Prerezávanie stromov

Stromy v záhrade tvoria vetvičky a uzly, každá vetvička začína a končí uzlom. Ťah hráča sa skladá z rezania (prerezania) vetvičky priamo nad uzlom, kde vetvička začína. Môžete odrezať aj kmeň stromu priamo nad zemou. Hráči sa v ťahoch striedajú. Prehráva hráč, ktorý nemôže uskutočniť svoj ťah.



Obr. 1

V záhrade (obr. 2) v prvom ťahu odrežte vetvičku, ktorá vychádza z druhého uzla od zeme na druhom strome zľava. Môžete si byť istí, že týmto prvým ťahom vyhráte celú hru! Prečo? Akú stratégiu použijete? Každým iným prvým ťahom vyhrá váš súper. Platí to vždy?



Obr.2: Záhrada

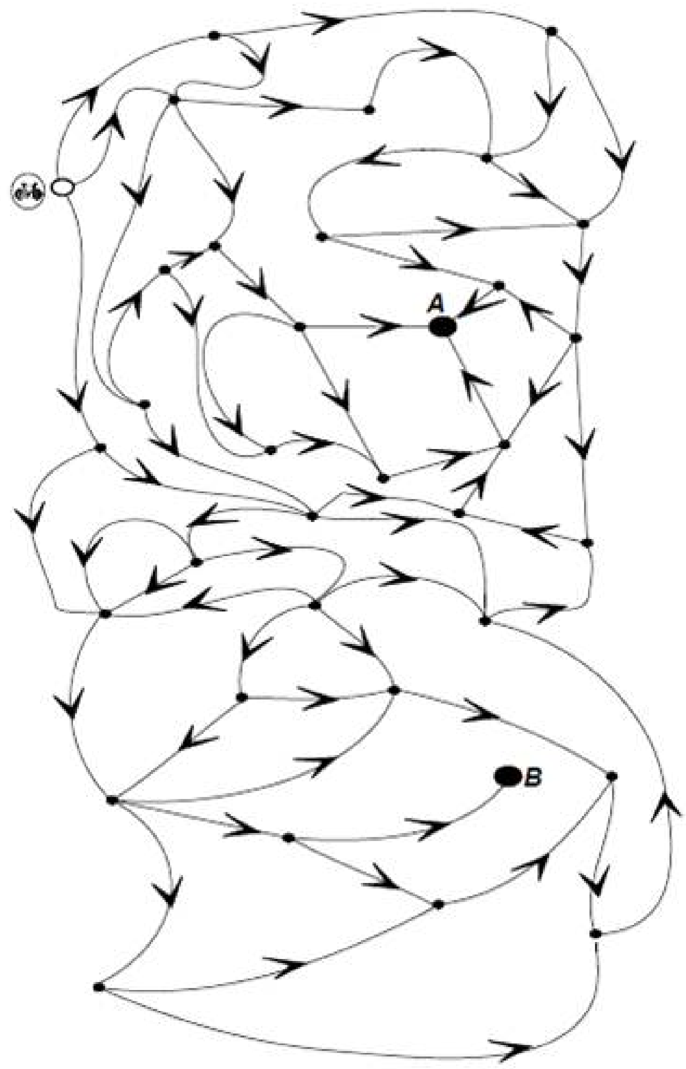
Poznámka: V teórii kombinatorických hier je táto hra známa pod názvom „Green Hackenbush“ (slovenský ekvivalent názvu hry asi neexistuje). Uvedená hra sa často používa ako ukážka definícií a konceptov používaných v kombinatorickej teórii hier (napr. v [2]).

Úloha 2: Jednosmerná hra s bicyklom

V tejto hre hráči posúvajú po dráhe bicykel z jedného miesta na druhé. Bicykel štartuje z vyznačeného štartovacieho miesta a pohybuje sa po šípkach z bodu do bodu. Cesty vyznačené šípkami sú iba jednosmerné. Prehráva ten hráč, ktorý nemôže ísť ďalej. Hra na hracom pláne (obr. 3) môže skončiť v bode A alebo v bode B.

a) Môže hru vyhrať prvý hráč?

b) Ten hráč, ktorý prehrá, by mal byť v poslednom ťahu v pozícií A alebo B. Môže hráč, ktorý prehrá, ovplyvniť hru tak, aby skončil v pozícií B?

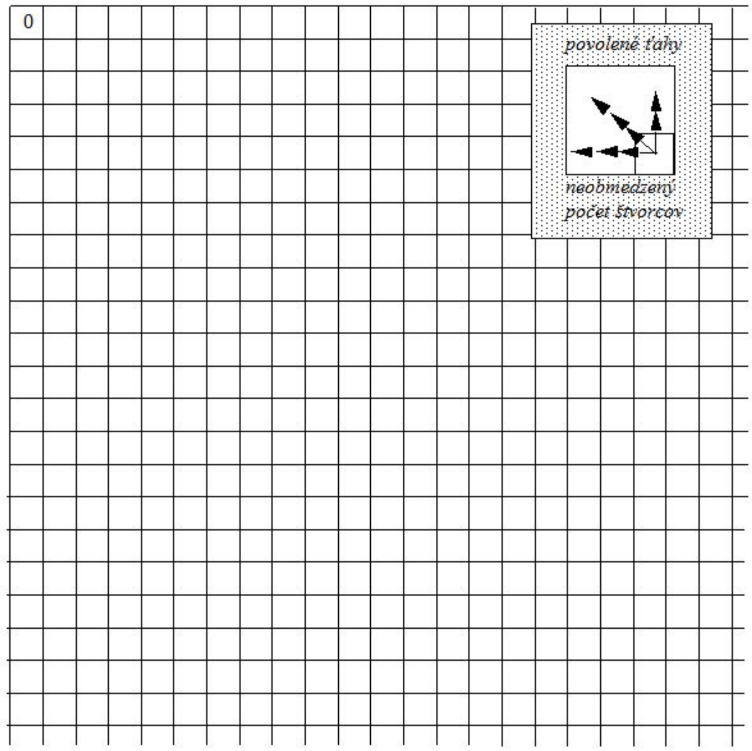


Obr. 3: Hrací plán jednosmernej hry s bicyklom

Úloha 3: Hra s kráľovnou na severozápade

Kráľovná sa môže pohybovať o ľubovoľný počet štvorcov nahor (sever), diagonálne zdola smerom vľavo hore (severo-západ) alebo doľava (západ) (obr. 4). Pokúste sa presne určiť, ktoré východiskové pozície na šachovnici umožnia vyhrať hráčovi, ktorý je prvý na ťahu bez ohľadu na to, ako dobre hrá druhý hráč. Naopak, ktoré východiskové pozície zaručia víťazstvo druhému hráčovi bez ohľadu na to, ako dobre hrá prvý hráč. Pokúste sa nájsť pozície, ktoré vedú vždy k výhre a pozície, ktoré vedú vždy k prehre.

Zahrajte si hru, v ktorej je kráľovná v začiatočnej pozícií na štvorci (20, 40). Skúste určiť víťazný ťah z nasledujúcich štvorcov: (15, 31); (20, 21); (100, 200).



Obr. 4: Hrací plán hry s kráľovnou na šachovnici

Poznámka: V teórii kombinatorických hier je táto hra známa pod názvom Wythoffova hra (je pomenovaná po holandskom matematikovi W.A.Wythoffovi, ktorý v roku 1907 publikoval matematickú analýzu tejto hry). Zaujímavosťou je, že súradnice víťazných pozícií súvisia so zlatým rezom.

Záver

Tohtoročné zadanie súťaže Matematický B-day sa týkalo témy, ktorej sa na základnej, ale ani na strednej škole v predmete matematika nevenuje prakticky žiadna pozornosť, a teda všetci súťažiaci začínali objavovať princípy teórie kombinatorických hier po prvý krát až priamo počas súťaže. Napriek tomu po siedmich hodinách bádania dospeli k výsledkom, na dosiahnutie ktorých by bolo potrebných oveľa viac vyučovacích hodín. Organizátorov súťaže záujem žiakov a dosiahnuté výsledky veľmi potešili, a preto majú ambíciu v budúcom ročníku v tímovej matematickej súťaži B-DAY pokračovať a pozvať k riešeniu netradičných úloh aj ďalšie stredné školy na celom Slovensku.

Poznámka: Príspevok je publikovaný v rámci projektu PRIMAS; 7RP 244380.

Literatúra

[1] Čeretková, S. 2012. *Netradičná matematická súťaž,* [online]. [citované 15. marec 2012]. Dostupné na: `http://www.fpv.ukf.sk/udalosti/818-netradicna-matematicka-sutaz`

[2] Conway, J.H. 2000. *On Numbers and Games.* 2. vydanie. Nattick : Taylor & Francis Inc, 2000. 256 s. ISBN 978-1-5688-1127-7

JAK ŘEŠÍ ŽÁCI A STUDENTI SLOVNÍ ÚLOHY

FRANTIŠEK ŠÍMA[1]

Při průzkumu byly zadány 157 žákům základních škol či nižšího stupně víceletých gymnázií a studentům středních škol a vyššího stupně víceletých gymnázií následující slovní úlohy.

Varianta A

1. Ve třech skladištích bylo uloženo celkem 70 tun obilí. V druhém skladišti bylo uloženo o 8,5 t méně a ve třetím skladišti o 3,5 t více než v prvním skladišti. Kolik tun obilí bylo uloženo v jednotlivých skladištích?

2. Denní produkce mléka 630 litrů byla k odvozu slita do 22 konví, z nichž některé byly po 25 litrech, jiné po 35 litrech. Všechny konve byly plné. Kolik bylo jednotlivých konví?

3. Kamion jede po dálnici z Prahy do Bratislavy průměrnou rychlostí 72 km/h. V okamžiku, kdy je kamion od Prahy 54 km, vyjíždí z Prahy osobní auto, které jede rovněž do Bratislavy a jehož průměrná rychlost je 90 km/h. Kdy a na kterém kilometru dálnice Praha – Bratislava dohoní osobní auto kamion?

4. Vodní nádrž by se naplnila jen prvním přítokem za 36 minut, jen druhým za 45 minut. Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li voda nejprve 9 minut jen prvním přívodem a pak oběma současně?

[1] VŠTE České Budějovice, `simafr2@seznam.cz`

Varianta B

1. Písemnou zkoušku z matematiky psalo 37 žáků, nikdo z nich neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát víc než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 11. Kolik žáků mělo jedničku, kolik dvojku, trojku a čtyřku?

2. Pět litrů bílého vína a šest litrů červeného vína stálo 432 Kč. Jeden litr červeného vína je o 6 Kč dražší než 1 litr bílého vína. Kolik korun zaplatíme za 2 litry bílého a 2 litry červeného vína?

3. Pánové A a B bydlí ve vzdálenosti 224 km. Vyjedou-li v autech současně ze svých obydlí proti sobě, setkají se po 2 hodinách. Pán A ujede za hodinu o 4 km více než pán B. Kolik km urazí každý z nich za hodinu?

4. Dělník A by sám provedl výkop za 7 hodin, dělník B sám za 6 hodin. Protože výkop má být skončen za 2 hodiny, byl přibrán ještě dělník C. Za jak dlouho by výkop provedl sám dělník C?

Úlohy řešili žáci devátého ročníku ZŠ a prvního a druhého ročníku SŠ. Nejlépe hodnocen, a to velmi výrazně, byl příklad 1 v obou skupinách. Důvodem bylo to, že byl evidentně nejjednodušší. Nejhůře hodnoceným příkladem byl také v obou skupinách příklad 4. Zčásti zřejmě i proto, že byl poslední (byl také nejčastěji neřešen). Výsledná hodnocení viz tabulka:

Všechny školy: **Střední školy:**

A + B	D	H	V	A + B	D	H	V
1. př.	1,94	2,26	2,09	1. př.	1,84	1,97	1,9
2. př.	3,01	3,25	3,12	2. př.	3,38	3,11	3,24
3. př.	3,73	3,54	3,64	3. př.	3,65	3,51	3,58
4. př.	4,25	3,92	4,1	4. př.	4,12	3,63	3,87
celé	3,17	3,25	3,21	celé	3,14	3,07	3,1

Základní školy: **Gymnázia:**

A + B	D	H	V	A + B	D	H	V
1. př.	2,05	2,77	2,32	1. př.	1,88	1,62	1,76
2. př.	2,63	3,5	2,96	2. př.	2,44	2,75	2,57
3. př.	3,8	3,58	3,72	3. př.	3,81	3,08	3,5
4. př.	4,38	4,42	4,39	4. př.	4,61	3,65	4,2
celé	3,21	3,58	3,35	celé	3,13	2,83	3

Nejlepších výsledků podle očekávání dosáhli studenti gymnázií; žáci základních škol měli o něco horší výsledky než studenti středních škol. V celkovém průměru byly mezi dívkami (D) a chlapci (H) minimální rozdíly, průměry byly přibližně stejné. Rozdíly však byly u jednotlivých příkladů, dívky měly lepší výsledky než chlapci u lehčích příkladů, chlapci předčili dívky u těžších příkladů.

V metodách řešení nejčastěji žáci a studenti používali, a to ve velké míře, rovnic nebo jejich soustav. Ve výrazně menším množství (až na jednotlivé výjimky) se objevovaly případy, kdy úloha nebyla řešena nebo řešení bylo chybné a nešlo jej zařadit. Z ostatních metod se ještě objevovaly úsudky. Další metody se objevovaly již jen ojediněle. Jednotlivá zastoupení zobrazují následující tabulky (pro lepší porovnání jsou hodnoty uvedeny v procentech).

Všechny školy - sk. A:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	82,9	1,2	0	0	0	11	4,9	100%
př. 2	57,3	2,4	2,4	1,2	4,9	12,2	19,5	100%
př. 3	45,1	1,2	6,1	0	1,2	11	35,4	100%
př. 4	37,8	1,2	15,9	0	0	1,2	43,9	100%
celkem	55,8	1,5	6,1	0,3	1,5	8,8	25,9	100%

Všechny školy - sk. B:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	89,3	1,3	1,3	1,3	0	4	2,7	100%
př. 2	76	1,3	4	0	0	8	10,7	100%
př. 3	45,3	1,3	20	0	0	9,3	24	100%
př. 4	56	1,3	2,7	0	0	2,7	37,3	100%
celkem	66,7	1,3	7	0,3	0	6	18,7	100%

Všechny školy - obě skupiny:

	rovnice	aritmeticky	úsudek	graficky	speciální	neurčeno	neřešeno	celkem
př. 1	86	1,3	0,6	0,6	0	7,6	3,8	100%
př. 2	66,2	1,9	3,2	0,6	2,5	10,2	15,3	100%
př. 3	45,2	1,3	12,7	0	0,6	10,2	29,9	100%
př. 4	46,5	1,3	9,6	0	0	1,9	40,8	100%
celkem	61	1,4	6,5	0,3	0,8	7,5	22,5	100%

Při svém řešení používali žáci a studenti někdy velmi zajímavé postupy. V následující části jsou některé z nich uvedeny (zkoušky a odpovědi vynechávám).

Příklad 1A

V prvním příkladu varianty A byl nejzajímavější postup užitím aritmetického řešení:

Ve všech skladištích je průměrně $70 : 3 = 23,\overline{3}$t obilí. Za základ vezměme, že v 1. skladišti je 23 t obilí, potom ve 2. skladišti musí být $23 - 8,5 = 14,5$ t obilí a ve 3. skladišti $23 + 3,5 = 26,5$ t obilí. Potom je ve všech třech celkem 64 t obilí.

Můžeme postupně do všech třech skladišť přidávat po 1 t a hledat, kdy bude součet 70 t. Postup zapíšeme do tabulky:

1. skladiště	23 t	24 t	25 t	26 t	...
2. skladiště	14,5 t	15,5 t	16,5 t	17,5 t	...
3. skladiště	26,5 t	27,5 t	28,5 t	29,5 t	...
celkem	64 t	67 t	70 t	73 t	...

Hledané hodnoty jsou 25 t (1.), 16,5 t (2.) a 28,5 t (3.). Další řešení již neexistuje, protože součty jsou dále již větší než 70 t. Postup můžeme zkrátit tím, že zjistíme rozdíl: 70 – 64 = 6 t a ten vydělíme třemi: 6 : 3 = 2. Ke každé hodnotě přidáme 2 t a dostaneme stejný výsledek jako v tabulce.

Příklad 2A

V druhém příkladu varianty A byl nejzajímavější postup užitím průměrného množství mléka v jedné konvi (student úlohu řešil pokusem, doplnil jsem řešení o teoretické zdůvodnění postupu):

Počet konví po a[l] ...... $x[ks]$
počet konví po b[l] ...... $y\ [ks]$
počet konví celkem ...... $p\ [ks]$
počet litrů celkem ...... $q\ [l]$

potom platí:

$$x + y = p$$

$$\underline{ax + by = q}$$

Řešením je tedy uspořádaná dvojice

$$[x, y] = \left[\frac{q - bp}{a - b}, \frac{ap - q}{a - b}\right].$$

Potom vypočteme průměrné množství v jedné konvi a označíme jej ρ, tedy platí:

$$q : p = \rho$$

Předpokládáme-li, že $a < b$ (tak jako v naší úloze; není to na újmu obecnosti), potom:

$$\rho - a = \frac{q}{p} - a; \qquad b - \rho = b - \frac{q}{p} = \frac{bp - q}{p}$$

Z předchozího modelu pro tutéž situaci vyplývá, že platí:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{q-bp}{a-b}}{\frac{ap-q}{a-b}} = \frac{q-bp}{ap-q} = \frac{bp-q}{q-ap} = \frac{b-\rho}{\rho-a},$$

tedy poměr počtu $x : y$ je roven $(b-\rho) : (\rho - a)$.

Z této úvahy vychází řešení.

$$\begin{aligned}
\rho &= 630 : 22 = \frac{315}{11} = 28\frac{7}{11}\,l \\
\rho - a &= 28\frac{7}{11} - 25 = 3\frac{7}{11} = \frac{40}{11}\,l \\
b - \rho &= 35 - 28\frac{7}{11} = 6\frac{4}{11} = \frac{70}{11}\,l \\
x : y &= (b-\rho) : (\rho - a) = \frac{\frac{70}{11}}{\frac{40}{11}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Nyní dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
x + y &= 22 \\
\underline{x : y} &= \underline{7 : 4} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{7}{4}y \\
\frac{7}{4}y + y &= 22 \quad / \cdot 4 \\
11y &= 88 \quad / : 11 \\
y &= 8 \\
x &= 22 - y \qquad \rightarrow \qquad x = 14
\end{aligned}$$

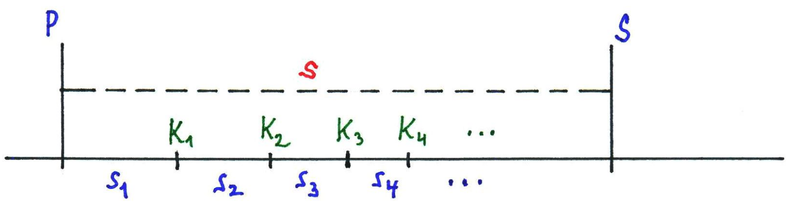
Dalším zajímavým postupem bylo užití metody chybného předpokladu:

Odhadneme čísla, která by mohla odpovídat výsledku: počet 25l konví – 16, počet 35l konví – 6 (jejich součet musí být 22).

Potom objem v těchto konvích je 610 l, tudíž rozdíl je -20 l. Musíme tedy objem zvětšit o 20 l tím, že dvě 25l konve přemístíme do 35l. Potom pětadvacetilitrových konví je 14, pětatřicetilitrových konví je 8.

Příklad 3A

V třetím příkladu varianty A byl nejzajímavější postup užitím nekonečné geometrické řady (řešitel postup dobře začal, ale nedovedl jej do úspěšného konce).



Obr. 1

V čase, kdy vyjíždí osobní automobil z Prahy (bod P), je kamion v bodě K_1 a má náskok 54 km. Automobil ujede dráhu s_1 do K_1 za čas $t_1 = 54 : 90 = 0{,}6$ h. Když je automobil v bodě K_1, je kamion již v bodě K_2 a ujede navíc dráhu $s_2 = 720{,}6 = 43{,}2$ km. Do bodu K_2 z bodu K_1 dojede automobil za čas $t_2 = 43{,}2 : 90 = 0{,}48$ h. Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_3 a ujede dráhu $s_3 = 720{,}48 = 34{,}56$ km. Do bodu K_3 dojede automobil za čas $t_3 = 34{,}56 : 90 = 0{,}384$ h.

Za tuto dobu dojede kamion do bodu K_4 a ujede dráhu $s_4 = 72 \cdot 0{,}384 = 27{,}648$ km. Do bodu K_4 dojede automobil za čas $t_4 = 27{,}648 : 90 = 0{,}3072$ h atd.

Nyní stačí sečíst obě nekonečné řady (jak pro dráhu, tak pro čas).

Řada $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots = 54 + 43{,}2 + 34{,}56 + 27{,}648 + \ldots$ je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{s_4}{s_3} = \ldots = \frac{43{,}2}{54} = \frac{34{,}56}{43{,}2} = \frac{27{,}648}{34{,}56} = \ldots = 0{,}8 = q$$

Součet této řady je

$$s = \frac{s_1}{1-q} = \frac{54}{1-0{,}8} = \underline{270}\ \text{[km]}.$$

Řada $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots = 0{,}6 + 0{,}48 + 0{,}384 + 0{,}3072 + \ldots$ je nekonečná geometrická řada, neboť platí

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \ldots = \frac{0{,}48}{0{,}6} = \frac{0{,}384}{0{,}48} = \frac{0{,}3072}{0{,}384} = \ldots = 0{,}8 = q.$$

Součet této řady je

$$t = \frac{t_1}{1-q} = \frac{0,6}{1-0,8} = \underline{3} \text{ [h]}.$$

Příklad 4A

V čtvrtém příkladu varianty A byl nejzajímavější postup, kdy řešitel užil částečně úsudek a potom poměr:

1. přítokem se naplní za 36 min	. . . . .	1 nádrž
2. přítokem se naplní za 36 min	. . . . .	36 : 48 = 0,8 nádrže
oběma přítoky se naplní za 36 min celkem	. . . . .	1 + 0,8 = 1,8 nádrže

Za 9 minut nateče 1. přítokem nádrže, proto se budou napouštět jen nádrže. Dostáváme trojčlenku (poměr):

$$\uparrow \begin{array}{lcl} 36 \text{ min} & \ldots\ldots & 1{,}8 \text{ nádrže} \\ x \text{ min} & \ldots\ldots & \frac{3}{4} \text{ nádrže} \end{array} \uparrow$$

Potom

$$\frac{x}{36} = \frac{\frac{3}{4}}{1,8} \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{1,8} = 15 \text{ minut.}$$

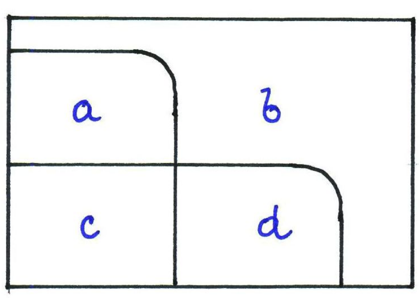
(Za 15 min se naplní oběma přítoky $\frac{3}{4}$ z 1,8 nádrže.)

Celkem $9 + 15 = 24$ minut.

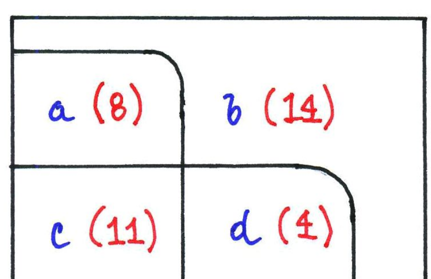
Příklad 1B

V prvním příkladu varianty B byl nejzajímavější postup, kdy řešitel pro názornost použil Vennovy diagramy a pak úlohu převedl na řešení soustavy rovnic.

Danou situaci zobrazíme pomocí Vennova diagramu (viz obr. 2, obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

V obr. 2 označíme: a – jedničky, b – dvojky, c – trojky, d – čtyřky.

Zapíšeme-li vztahy, dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 37 \\ a &= 2d \\ a+6=b, \qquad .....b &= 2d+6 \\ \underline{c} &\underline{= 11} \end{aligned}$$

odkud:

$$2d+2d+6+11+d = 37-17$$

$$5d = 20 \qquad |:5$$

$$\underline{d=4} \qquad \rightarrow \qquad a=8,\, b=14,\, c=11.$$

Výsledek je zobrazen v obr. 3.

Příklad 2B

V druhém příkladu varianty B byl zřejmě nejzajímavější postup pomocí úsudku:

Šest litrů červeného vína je celkem o $6\cdot 6 = 36$ Kč dražší. Odečteme-li tuto hodnotu od celkové ceny, dostáváme $432-36 = 396$ Kč. To je cena 11 litrů levnějšího (bílého) vína. Potom 1 l bílého vína stojí $396 : 11 = 36$ Kč. Červené víno je o 6 Kč dražší, jeho 1 l stojí $36+6 = 42$ Kč.

2 l bílého a 2 l červeného stojí $236+242 = 156$ Kč.

Příklad 3B

V třetím příkladu varianty B byl zřejmě nejzajímavější aritmetický postup:

Vydělíme: $224 : 4 = 56$. Toto je průměrná rychlost (v km/h) obou. Volíme postupně rychlosti podobné této (začneme např. pro $v_1 = 54$ km/h, $v_2 = 50$ km/h) a hledáme, kdy bude jejich trasa rovna 224 km (viz tabulka).

pán A	...	54	56	58	60	...
pán B	...	50	52	54	56	...
trasa	...	208	216	224	232	...

Z tabulky je zřejmé, že jediné řešení je $\underline{v_1 = 58 \text{ km/h}}$, $\underline{v_2 = 54 \text{ km/h}}$.

Příklad 4B

Ve čtvrtém příkladu varianty B byl nejzajímavější postup, kdy řešitel užil procent:

A udělá za 7 h	...	100 %, potom	...	za 2 h udělá	...	$(100:7)\cdot 2 \doteq 28{,}571\,\%$
B udělá za 6 h	...	100 %, potom	...	za 2 h udělá	...	$(100:6)\cdot 2 \doteq 33{,}333\,\%$
C udělá za x h	...	100 %, potom	...	za 2 h udělá	...	zbytek, tj. $38{,}096\,\%$

Zbytek: $100 - 28{,}571 - 33{,}333 = 38{,}096$.

$$\uparrow \begin{array}{lll} 2\ \text{h} & \ldots\ldots & 38{,}096\ (\%)\ \text{nádrže} \\ x\ \text{h} & \ldots\ldots & 100\ (\%) \end{array} \uparrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{100}{38{,}096} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{200}{38{,}096} \doteq 5{,}250\,\text{h} = \underline{5\,\text{h}\,15\,\text{min}}.$$

A na závěr jedno pěkné využití zlomků završené jednoduchým úsudkem:

1. dělník	.....	za 1 h udělá	...	$\frac{1}{7}$ práce	.....	za 2 h udělá	...	$\frac{2}{7}$ práce,
2. dělník	.....	za 1 h udělá	...	$\frac{1}{6}$ práce	.....	za 2 h udělá	...	$\frac{1}{3}$ práce,

oba společně pak za 2 h udělají $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{6+7}{21} = \frac{13}{21}$ práce.

Na třetího dělníka zbývá $1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$ práce. Jestliže třetí dělník udělá za 2 h $\frac{8}{21}$ práce, za 1 h udělá polovinu, tj. $\frac{4}{21}$ práce. Celou práci pak udělá za $\frac{21}{4}\,\text{h} = 5\,\text{h}\,15\,\text{min}$.

Závěr

Závěrem je možné říci, že při rozboru výsledků a při výběru metod řešení se z pohledu statistiky neobjevilo nic neočekávaného. Nejzajímavější byly postupy některých jednotlivců, kteří hledali neobvyklá řešení. Přestože někdy neuspěli, je třeba tuto snahu ocenit. Některé uvedené postupy mohou být pro řešitele slovních úloh inspirující.

Literatura

[1] František Běloun a kolektiv; *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Dotisk 8. upraveného vydání. Praha, Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-104-3.

[2] Pavel Czudek a kol.; *Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ.* Sdružení podnikatelů HAV, Praha 1998.

[3] Stanislav Trávníček; *Oprava písemek z matematiky.* UP Olomouc, 2006. ISBN 80-244-1556-9.

[4] František Vejsada, František Talafous; *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ.* 1. vydání. Praha, SPN, 1969. 15-534-69.

ROZVOJ VYUČOVACÍCH STRATÉGIÍ POMOCOU REFLEXIE PODPORENEJ VIDEO LISTOM

JÁN ŠUNDERLÍK[1]

Úvod

Vo vyučovaní matematiky sa každodenne stretávame s množstvom nových situácií, na ktoré potrebujeme reagovať, zaujať stanovisko alebo opraviť vzniknuté neporozumenie žiakov. Viacerí autori (Shulman, 1986; Ball et al. 2008) sa snažia definovať požiadavky na kvalifikovaného učiteľa, ktorý by vedel adekvátne reagovať na komplexnú situáciu v triede.

Na zvládnutie komplexnej situácie učiteľ matematiky používa jednotlivé metódy a stratégie. Vyučovacie metódy chápeme v širšom význame ako „zámerné usporiadanie obsahu vyučovania, činnosti učiteľa a žiaka, ktoré sa zacieľujú na dosiahnutie stanovených výchovných a vzdelávacích cieľov.“ (Petlák, 2004). V tomto zmysle chápeme vyučovacie stratégie ako konkrétne kroky a aktivity v rámci zvoleného usporiadaného obsahu a procesu vyučovania. Ako uvádzajú Brown & Coles, (Brown, & Coles, 2008) jednotlivé stratégie vychádzajú z potrieb učiteľa vyplývajúcich zo situácie v triede v závislosti od komplexnosti situácie.

V rámci medzinárodného projektu PRIMAS (`www.primas-project.eu`) sa venujeme na Katedre matematiky UKF v Nitre implementácii objavného vyučovania na základných a stredných školách. V implementácii objavného vyučovania považujeme za veľmi dôležité práve vytvorenie vhodných stratégií učiteľmi a je jednou z oblastí výskumu v rámci daného projektu.

Reflexia

Jedným z dôležitých prvkov skvalitňovania práce učiteľa je využívanie reflexie učiteľa na svoju prax. K chápaniu reflexie výrazne prispel Schön (Schön, 1983, 1987) uvádzajúci, že reflexia je úzko spojená s akciou, činnosťou. V spojitosti s učiteľskou profesiou si musíme uvedomiť, že reflexia by mala byť spojená priamo s reálnou situáciou. Ako uvádza Merseth (Merseth, 1996, str. 724) „konanie vychádza z indukcie z viacerých skúseností a nie dedukciou z teoretických princípov“. Preto prostredníctvom reflexie na

[1]UKF v Nitre, `jsunderlik@ukf.sk`

vyučovanie sa profesionáli stávajú schopnejšími rozvíjať a zlepšovať svoju pedagogickú prax. V príspevku okrem predstavenia teoretických východísk čiastočne venujeme aj ukážke reflexii na odučenú hodinu.

V uvedenej ukážke uplatňujeme prístup reflexie podporenej Video Listom, kde sa snažíme nájsť vhodnú rovnováhu medzi dostatočným množstvom inštrukcií v triede a zároveň aj primeraným priestorom pre samotné objavovanie žiakmi. Ide o interakciu medzi množstvom inštrukcií a objavovaním žiakov.

Video a Video List

Pri analýze vyučovacej hodiny má svoje pevné miesto videozáznam, nakoľko zachytáva udalosti v reálnom čase. To nám umožňuje prezrieť si záznam retrospektívne. Práve táto možnosť veľmi napomáha reflexii po udalosti (odučenej hodine).

Možnosti uvedomenia si jednotlivých situácií v triede sú ešte znásobené v multimediálnom softvéri VideoPaper (preklad autora Video List) (Šunderlík, 2011). Video List je multimodálne prostredie, v ktorom sú zakomponované a zosynchronizované obrázky, text aj video v jednom dokumente. Celé prostredie Video Listu je vytvorené v HTML jazyku, čo umožňuje ľahké prepojenie textu s videom a prezentáciou obrázkov. Vytváranie Video Listu je možné pomocou softvéru VideoPaper Builder 3.0 (VPB3) (Concord Consortium and TERC, 2006, `http://vpb.concord.org`), ktorý je voľne stiahnuteľný.

Ukážka matematického skúmania, NIM hry

V prezentácii sme predstavili ukážky z použitia objavného prístupu u žiakov 5. ročníka základnej školy ako spôsobu práce skúmania vzťahov a vytvárania nových poznatkov. Výskumník je zároveň aj učiteľom matematiky v danej triede, čo umožňuje komplexnejšie vnímanie situácie. So žiakmi sme pracovali od začiatku školského roka, kde sme sa snažili vytvoriť vhodné prostredie pre skúmanie vzťahov a aktívne získavanie nových poznatkov v triede. Okrem matematického obsahu sme sa zameriavali na jednotlivé procesné zručnosti matematického skúmania.

Predstavovaná ukážka pozostávala z troch vyučovacích hodín, na ktorých sme postupne prešli od didaktických hier NIM a ŠČELK k novému učivu. Vybraná didaktická hra bola úvodom do kombinatorických hier NIM (Žabka, Černek, 010a, str. 86.) a poskytovala základné pojmy teórie hier. Pre žiakov neznámy obsah hry sme použili na navodenie situácie, v ktorej žiaci nachádzali vyhrávajúcu stratégiu. Získané poznatky slúžili na vyhratie hry a ďalej sme danú problematiku nerozvíjali. S uvedenou hrou súvisí aj nasledujúca vyučovacia hodina, na ktorej sme najskôr so žiakmi prieriešili domácu úlohu a následne sa venovali novému učivu „Násobenie a delenie číslami 10, 100, 1 000, . . . “ (Žabka, Černek, 2010b, str. 6).

Žiaci strávili s danou hrou viac ako jednu vyučovaciu hodinu, čo bol čas potrebný na jednotlivé kroky a hľadanie vyhrávajúcej stratégie. Počas analýzy videozáznamu a spracovávania jednotlivých častí hodiny sme si „všimli“ viacero podnetov na zlepšenie práce so žiakmi. Najnáročnejšou časťou celého vyučovacieho procesu bolo:

- Ako usmerňovať získané poznatky zo skúmania na vytváranie, overovanie predpokladov a vytváranie nových vedomostí,
- prevedenie uvedených procesov do bežnej práce žiakov,
- ako pôsobiť na žiakov, ktorí potrebné vedomosti ešte neobjavili, ale zostali na určitej hranici,
- kedy je vhodný čas na inštrukcie a aké stratégie použiť na podporu väčšej samostatnosti žiakov.

Práve spracovanie uvedenej problematiky prostredníctvom Video Listu umožňuje vloženie odkazov na konkrétnu časť videozáznamu, ako aj jeho interpretáciu v textovom poli.

My sme sa podrobnejšie zamerali na meta-poznámky (poznámky o procese riešenia) jednotlivých krokov matematického skúmania so zameraním na formuláciu vyhrávajúcej stratégie z experimentu (hry) prenesených do aritmetického obsahu ako prístupu na vytváranie pravidiel počítania. Meta-poznámky napomáhajú žiakom v ďalšom procese vyučovania a vytvárania kultúry práce na hodinách matematiky.

Cieľom uvedeného prístupu je podporenie žiackych kompetencií a samostatnosti pri identifikácií a riešení problémov s dostatočnými vedomosťami z príslušného matematického obsahu.

Diskusia

Celý proces analýzy a interpretácie videozáznamu je možný aj bez jeho publikovania prostredníctvom Video Listu. Výhoda tohto spracovania je presnejšia formulácia a názornosť ako pre autora, tak aj pre čitateľa. Nevýhodou vytvárania Video Listu je mierna časová náročnosť celého procesu, čo obmedzuje jeho bežné používanie v pedagogickej praxi. Veľký potenciál však vidíme v kurzoch ďalšieho vzdelávania učiteľov alebo ako nástroj na zlepšovanie pedagogickej praxe v rámci predmetovej komisie.

Poznámka: Príspevok vznikol s finančným prispením projektu 7RP 244380 PRIMAS.

Literatura

[1] Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

[2] Brown, L., Coles, 2008: *Hearing Silence*, Black Apollo Press, 132 s. ISBN 97-8190-0355599

[3] Merseth, K. K. (1996). Cases and case methods in teacher education. In J. Sikula (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 722–44). New York: MacMillan.

[4] Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

[5] Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action.* New York: Basic Books.

[6] Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: Towards a new design for Teaching and Learning in the Professions.* San Francisco: Jossey Bass

[7] Šunderlík, J. Rozvoj reflexie študentov učiteľstva matematiky pomocou „Video Listu“ / Ján Šunderlík, 2011. In: *Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek.* Žilina : EDIS, 2011. ISBN 978-80-554-0393-9, S. 133–142.

[8] Žabka, J., Černek, P. (2010a): *Matematika 5 – 1. časť*, Orbis Pictus Istropolitana, 2010a

[9] Žabka, J., Černek, P. (2010b): *Matematika 5 – 2. časť*, Orbis Pictus Istropolitana, 2010b

[10] `http://vpb.concord.org`

[11] `www.primas-project.eu`

ALGEBRICKÉ ŠTRUKTÚRY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

MIROSLAVA ZAŤKOVÁ[1]

Úvod

Pre náš výskum vnímania a používania algebrických štruktúr žiakmi sme si vybrali 7. ročník základnej školy. Výskum prebiehal na vzorke 99 žiakov z rôznych škôl.

Algebrické štruktúry

V našom výskume sme sledovali algebraické vlastnosti uvedené v tabuľke 1. V tabuľke, je okrem pomenovania algebraickej štruktúry aj jej označenie, ktoré využívame v analýze príkladu a v štatistickom vyhodnotení.

Tab. 1

Didaktická premenná	Vlastnosti štruktúry (Q,+)
	TRIEDA ČÍTANIA
Q1.1	komutatívnosť sčítania
Q1.2	asociatívnosť sčítania
Q1.3	existencia nulového prvku
Q1.4	existencia opačného prvku
Q2.3	existencia jednotkového prvku
	vlastnosti štruktúry (Q,$\cdot$)
	TRIEDA NÁSOBENIA
Q2.4	existencia inverzného (prevráteného prvku)
Q2.5	distributívny zákon
	vlastnosť štruktúry (Q,$+,\cdot$)

Analýza príkladu

Pre náš výskum sme si vybrali tento príklad: Riešte lineárnu rovnicu

$$(7x+3)-3(2x+1)=3x-1-(x+2).$$

[1]Základná škola Viliama Zásborského, Vráble, hururka@gmail.com

Možné riešenie:

$$
\begin{array}{rcl}
(7x+3)-3\cdot(2x+1) & = & 3x-1-(x+2) \\
(7x+3)+(-3)\cdot 2\cdot x+(-3)\cdot 1 & = & 3x-1+(-1)x+(-1)\cdot 2 \\
7x+(3+(-6)x)+(-3) & = & 3x+(-1)x+(-1)+(-2) \\
7x+(-6)x+3+(-3) & = & (2+1+(-1))x+(-1)(1+2) \\
(1+6+(-6))x+0 & = & (2+0)x+(-3) \\
x & = & 2x+(-3) \qquad |+(-2)x \\
x+(-2)x & = & 2x+(-3)+(-2)x \\
(1+(-(1+1)))x & = & (-3)+0 \\
-x & = & (-3) \qquad |\cdot(-1) \\
x & = & 3
\end{array}
$$

Použite vlastnosti:

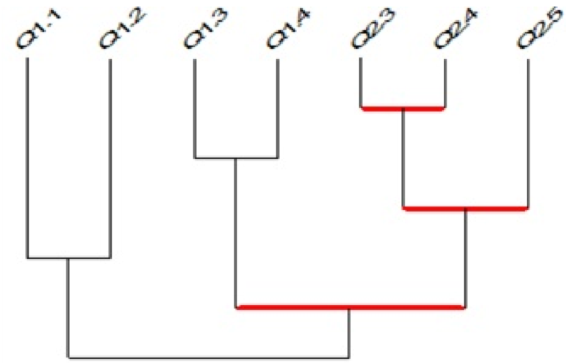
$$
\begin{array}{rcl}
\text{Q1.1:}\ldots(-3)+(-2)x & = & (-2)x+(-3) \\
\ldots 3+(-6)x & = & (-6)x+3\ldots \\
\text{Q1.2:}\ldots((-6)x+3)+(-3) & = & (-6)x+(3+(-3))\ldots \\
\text{Q1.3:}\ldots(-3)+0 & = & -3 \\
\ldots(-6)x+0 & = & (-6)x\ldots \\
\ldots(2+0)x & = & 2x\ldots \\
1+6+(-6))x+0 & = & 1+6+(-6))x\ldots \\
\text{Q1.4:}\ldots 2x+(-2)x & = & 0 \\
\ldots 3+(-3) & = & 0\ldots \\
\text{Q2.4:}\ldots 3\cdot 1 & = & 3 \\
\text{Q2.5:}\ldots -3\cdot(2x+1) & = & (-1)\cdot(3\cdot 2\cdot x+3\cdot 1)\ldots \\
\ldots(-1)\cdot(6\cdot x+3) & = & (-1)\cdot 6\cdot x+(-1)\cdot 3\ldots
\end{array}
$$

Pri riešení príkladu môžu žiaci využiť vlastnosti Q1.1, Q1.2, Q1.3, Q1.4, Q2.4, Q2.5.

Vyhodnotenie príkladu

Pre vyhodnotenie príkladu sme si zvolili štatistickú metódu Implikačná analýza, ktorú sme robili pomocou programu CHIC. Pomocou programu CHIC sme vytvorili nasledovný graf (strom podobnosti), obr. 1.

Z obr. 1 môžeme vyčítať nasledovné podobnosti:



Obr. 1: Similarity tree

- Vlastnosti Q1.1 a Q1.2 sú spojené na jednej úrovni, ktorá je spojená s množinou premenných Q1.3, Q1.4, Q2.1, Q2.2, Q2.3, Q2.4, Q2.5. Náš predpoklad v analýze a-priori bol, že premenné Q1:1, Q1:2, Q1.3, Q1.4 vytvoria jednu triedu a Q2.1, Q2.2, Q2.3, Q2.4 vztvoria druhú triedu. Táto hypotéza nebola potvrdená. Síce premenné nevytvorili dve viditeľné triedy ale jednotlivé úrovne rozdeľujú premenné na množinu premenných Q1:1, Q1:2, Q1.3, Q1.4 a množinu Q2.1, Q2.2, Q2.3, Q2.4.

- Premenné Q2.3 a Q2.4 majú silnú podobnosť a sú spojené na jednej úrovni. Toto zistenie spĺňa náš predpoklad podobne ako v šiestom ročníku.

Záver

V grafe podobnosti sa vytvorili dve množiny. Prvá je podobnosť premenný Q1.1, Q1.2 a druhá množina je spojenie množiny premenných Q1.3 a 1.4 s množinou Q2.3 a Q2.4 a premennou Q2.5. Nie sú to síce dve triedy ako sme predpokladali v hypotéze, ale výskum ukázal, že výsledok je blízky k nášmu tvrdeniu. Poukázal na množinu premenných Q2.3 a Q2.4 a premennou Q2.5, ktorá je blízka tvrdeniu hypotézy o druhej triede, o triede násobenia.

Premenná Q2.5 je spojená v grafe podobnosti s množinou Q2.3, Q2.4 aj keď nepatrí do triedy násobenia, ale existuje priama podobnosť tejto vlastnosti s ostatnými vlastnosťami množiny.

Hledání paralel ve vývoji logického myšlení žáka a v dějinách logiky

Karel Zavřel[1]

Vyučování logiky

Rozvoj logického uvažování žáků by měl být jedním z důležitých úkolů matematiky na základní i střední škole. Svým způsobem tento typ uvažování rozvíjí téměř každá matematická aktivita, ke které žáci přistupují s porozuměním a dostatečným vhledem, neboť matematika stojí na logických základech. V naší práci se ovšem zaměřujeme především na úlohy, které jsou často oproštěny od naučených či dokonce naučitelných postupů, ale tříbí čisté (matematické) uvažování.

Zařazování úloh z této kategorie do vyučování matematiky lze chápat i jako jednu ze strategií využívanou při konstruktivistickém přístupu k vyučování. Žákova schopnost skutečně správně řešit úlohy zakládající se na logice nutně vyžaduje dostatečný vhled do situace a nenechává žádný prostor pro chorobu formalismu ve vyučování, jak o ní píše Hejný.

Požadavek po takových úlohách vznáší i *RVP ZV*. Jeden z očekávaných výstupů za 2. období 1. stupně zní: „Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky." Podobnou formulaci najdeme i ve výstupech druhého stupně. To vše ale pouze v oblasti občasných (netradičních) úloh, formální znalost matematické logiky a jejích pravidel se na základní škole nevyžaduje.

Na střední škole je už situace jiná a logika je přímo vyučována, typicky jako jedno z prvních témat (příslušnou citaci z *RVP G* čtenář snadno dohledá).

Genetickou paralelou rozumíme tezi, že úspěšné učení do jisté míry opakuje vývoj dané vědy v průběhu dějin. Používaná terminologie je odvozena z biologie: fylogenezí je zde nazýván vývoj druhu, ontogenezí pak vývoj jedince. V přeneseném smyslu je fylogenezí myšlen historický vývoj dané vědy, ontogeneze pak označuje růst jedince v rámci této vědy.

V této souvislosti bývá uváděn až poetický citát z práce P. Erdnijeva:

> „Růst stromu matematických znalostí v hlavě jednoho člověka bude úspěšný jen tehdy, když v určité míře zopakuje historii rozvoje této vědy."

[1]FZŠ Táborská, Praha, `kzavrel@seznam.cz`

Za příklad porušení tohoto růstu je pak často považována matematická analýza a obtíže s ní spojené, jak se s nimi studenti potýkají na úvodních vysokoškolských kurzech. Původní Newtonův a Leibnizův infinitezimální kalkul byl odvržen jako historický omyl a základním nástrojem diferenciálního a integrálního počtu se stal ε, δ-kalkul, který sice svým uživatelům poskytuje často teoreticky větší volnost, chybí mu však intuitivnost a průhlednost původního infinitezimálního počtu.

ad Fylogeneze

Fylogenezí logiky (stejně jako každé vědy) je její historie, jak ji sama reflektuje. Pro hledání lokací genetické paralely je to však pramen vskutku nedostatečný. Říká se, že historii píší vítězové; historii vědy (resp. díla, která jsou pro nás historií) psali také ti nejlepší ze svých oborů. Navíc praxe obtížných překladů a ručních opisů zajistila, že podnes se zachovala jen díla nejlepší z těchto nejlepších. Pro nás jsou však zajímavější právě chyby a nedostatky, které se objevily (v globálním měřítku) v historii a opakují se i dnes v podobě fenoménů typických pro určitý věk dítěte.

Jako alternativní pramen fylogeneze jsme tedy zvolili etnografická zkoumání myšlení přírodních národů. Konkrétním východiskem se nám stala monografie *O historickém vývoji poznávacích procesů* sovětského psychologa A. R. Luriji. Pojednává o výzkumu prováděném ve 30. letech 20. století v prostředí zapadlých vesnic dnešního Kyrgyzstánu a Uzbekistánu. Lurija zkoumal mj. schopnosti klasifikace, abstrakce a porozumění verbálně-logickým soudům (sylogismům).

Společné všem experimentům, které Lurija popisuje, je hluboké zakotvení respondentů v konkrétních situačních kontextech a naprostá neochota od nich abstrahovat. Na sylogismy, které kontextově přesahovaly obzor jejich zkušenosti, odmítali odpovídat.

E: Bavlna může růst pouze tam, kde je horko a sucho. V Anglii je chladno a sychravo. Může tam růst bavlna?

S: *„Nevím, byl jsem jen v Kašgarii, víc toho neznám. (...) Kdyby tu byl člověk, který by měl velkou zkušenost a všude byl, dobře by se mu na tuto otázku odpovídalo.“*

ad Ontogeneze

V návaznosti na předchozí citovaný sylogismus uvádíme příklad z našeho výzkumu:

E: V jedné třídě prý pro všechny chlapce platí tato dvě pravidla:

[1.] Každý, kdo hraje fotbal, umí dobře běhat.

[2.] Někdo z těch, kdo hrají hokej, hraje také fotbal.

Můžeme s jistotou říci, jestli je v této třídě nějaký hokejista, který umí dobře běhat?

S1: *„Ano, v hokeji se také běhá, hlavně útočníci. Brankáři, ti jen brání u brány a moc se nepohybují.“* (žák 7. ročníku)

S2: *„Ano, když bruslí, tak to je velká zátěž na nohy, hlavně když se pohybuje rychle. . . “* (žákyně 5. ročníku)

Odpovědi jsou jiné, neobjevuje se již fenomén *odmítnutí*, ale pramen argumentace je stejný: je to zkušenostní vrstva, z níž se usuzuje nikoli na pravdivost verbálně-logického soudu, nýbrž na možnost pravdivosti (pravděpodobnost) jeho obsahu.

Paradoxy materiální implikace jsou známé a v historii logiky je možno najít několik pokusů o jejich odstranění pomocí revize kondicionálu, či alespoň úpravy externích podmínek jeho platnosti. Problémem všech těchto systémů však typicky bylo vystoupení z logiky extenzionální (která sleduje pouze pravdivostní hodnoty) do logiky intenzionální, modální. Systém je sice obohacen a dost možná lépe reflektuje strukturu přirozeného jazyka, ovšem ztrácí se jeho přehlednost a jednoduchost.

Narozdíl od sylogismu, jehož strukturu používáme v běžné mluvě celkem neuvědoměle a jehož používání většinou mnoho obtíží nepřináší, některé důsledky implikace jsou silně kontraintuitivní, a přesto je používána v matematice již na základní škole a žáci by jí měli správně rozumět: *Pokud je číslo dělitelné deseti, pak je dělitelné i pěti.* Záměnou antecedentu a konsekventu se pravdivostní hodnota výroku pochopitelně mění. Přesto z mnoha výzkumů vyplývá, že „dětská logika“ implikaci a ekvivalenci často nerozlišuje.

V našem výzkumu jsme mj. použili dvě úlohy částečně inspirované poměrně známou výzkumnou otázkou *Wason selection task*.

Je-li za dveřmi tygr, pak je na nich určitě písmeno T.

D	T	
Je tam tygr.	Je tam tygr.	Je tam tygr.
Není tam tygr.	Není tam tygr.	Není tam tygr.
Nemůžeme rozhodnout.	Nemůžeme rozhodnout.	Nemůžeme rozhodnout.

Druhá úloha byla obdobná, pouze pořadí antecedentu a konsekventu bylo změněno. To, co bychom nazvali „očekávanou chybou,“ je odpověď BAC, tedy v prvních dveřích tygr není, ve druhých ano a o třetích nemůžeme rozhodnout (36 % z 228 žáků 5. až

9. ročníku), správná odpověď (BCB) se objevuje u 2 % respondentů. To je však silně povšechná analýza. Snažíme se proto odlišit dílčí jevy a fenomény, které k této odpovědi vedou. Je např. velice zajímavé, kolik žáků zvolí různou odpověď pro první a třetí dveře (61 %), ačkoli z pohledu předloženého pravidla v nich žádný rozdíl není. Ukazuje to na dětskou potřebu jasného a doslovného zadání: když na dveřích nic není, tak zkrátka nemohu rozhodnout. (Vzpomínáte na kyrgyzského pastevce, který neměl dost informací k rozhodnutí, zda v Anglii roste bavlna?)

Místo závěru

Příspěvek je krátkým výtahem z rozpracované diplomové práce autora, jejímž vedoucím a ideovým spoluautorem je Ladislav Kvasz. Části, které zde prezentujeme, jsou pouze útržky nutně vytržené z kontextu. Nechceme zde tedy činit žádné závěry, jde spíše jen o ochutnávku a malý výlet „do hlubin študákovy duše.“

Výzkum logického myšlení dětí je opravdu zajímavý a velmi podnětný. Pokud jeho výsledky navíc poměříme zkušeností z historie, máme šanci, že je dokážeme interpretovat, pochopit a správně rozvíjet.

Literatura

[1] LURIJA, Alexander R. (1976.) *O historickém vývoji poznávacích procesů.* Praha : Academia.

PROČ SE (STÁLE) DĚLÍ NULOU

JANA ŽALSKÁ[1]

Úvod

Dělení nulou, lépe řečeno nesmyslnost operace dělení nulou, je jedním z pilířů aritmetiky v oborech celých, racionálních, reálných i komplexních čísel. Jeho didaktické uchopení může být považováno za klíčové nejen pro osvojení určitého souboru matematických dovedností žákem, ale také pro způsob, jakým je matematika jako věda žákům představena učitelem: jako formální soubor pravidel a konvencí, nebo jako celistvý předmět i nástroj

[1] Pedagogická fakulta UK v Praze, jana.zalska@pedf.cuni.cz

lidské činnosti, ve kterém je vše opodstatněno a navzájem provázáno.[2] Tento krátký průzkum do problematiky dělení nulou ve školní výuce matematiky je inspirován osobními (jak studijními, tak učitelskými) zkušenostmi autorky a jejích kolegů. Z pedagogického hlediska navazuje na předchozí pozorování a úvahy nad úskalími i výhodami formálního uchopení matematiky jako předmětu školní (i vyšší) matematiky.

„Nulou nepodělíš“ vs. dělení nulou

Výše zmíněné zkušenosti ukazovaly, že nemožnost dělení nulou je často chápána, ať učitelem nebo žákem, jako jakási matematická konvence: pravidlo, na kterém se dohodli matematikové-vědci proto, „aby vše lépe vycházelo“, konvence, která se dále aplikuje zpravidla v procesu určování vyžadovaných definičních oborů a která je nezbytná k vyřešení spousty úloh „na plný počet bodů“.[3] V nemálo případech je dělení nulou chybně prováděno (s různými výslednými hodnotami), a to nejen na úrovni žáků a studentů základní a střední školy. Jako zajímavost lze uvést i případ studenta 3. ročníku střední školy, který se zjevně o této vlastnosti operace dělení doslechl poprvé právě v tomto ročníku, a to úplnou náhodou. Nejednalo se o prostředí české školy, ale i tak poukazuje situace výmluvně na to, jak oddělenost vyučovaných matematických konceptů může vést k nepochopení základů školní matematiky.

V zahraniční odborné literatuře si autoři všímají podobných jevů: například Tsamir, Tirosh (2002) zkoumali řešení několika úloh vedoucích k dělení nulou nebo dělení nuly u studentů na středních školách. Jejich výzkum ukázal, že asi pětina řešitelů opakovaně uvedla výsledky, aniž brala v potaz nedefinovanost dělení nulou. Quinn a kol. (2008) poukazují na fakt, že ze souboru 35 stávajících učitelů matematiky (přibližně našeho 2. stupně ZŠ) reagovalo na otázku „Představte si, že se Vás žák zeptá, kolik je sedm děleno nulou. Jak mu odpovíte?“ čtrnáct učitelů, že odpověď zní nula. Pouze jedenáct z nich prokázalo porozumění problematice dostatečným odůvodněním. Zbývajících deset chápalo nemožnost dělení nulou jako pravidlo a konvenci, kterou je třeba aplikovat na relevantních úlohách.

Ukazuje se tedy, že problém zahrnuje dva odlišné aspekty:

a) případ, kdy samotné dělení nulou je provedeno jako automatické zobecnění operace dělení přirozených čísel na další číslené obory (tedy dělení nulou vede buď k nulové hodnotě, nebo k hodnotě rovné dělenci). Tento případ vede k matematicky chybným výsledkům.

[2] Autorka si uvědomuje, že oba uvedené případy představují pouze dva extrémy z širšího okruhu možných přístupů. V tomto článku nám půjde o diskuzi formálních, izolovaných představ o matematických objektech na straně jedné a o budování představ celistvosti a vzájemnosti na straně druhé, obojí v jejich krajních pojetích, vzhledem k účinnosti výuky a žákovu porozumění.

[3] Citace v této větě charakterizují výpovědi některých autorčiných žáků a studentů.

b) případ, kdy dělení nulou je chápáno jako nedefinované nebo nemožné, protože jde o pravidlo, které nelze nebo není nutno matematicky odůvodnit. Tento případ nebrání žákům řešit úspěšně úlohy a osvojit si matematické dovednosti, formálnost znalosti však může vést k chybné aplikaci či zapomenutí pravidla atd. v budoucnu.

Na tomto místě by bylo vhodné uvést některé známé didakticko-matematické modely pro odůvodnění nedělitelnosti nulou:

1. tzv. *koláčový model*: vychází z metafory procesu dělení číslem n jako rozdělování na n částí. Žák je veden k pochopení nesmyslnosti či nemožnosti rozdělení celku (např. koláče) na *žádný* díl. Tento model je oblíbený a jednoduše aplikovatelný i u žáků s poměrně krátkou matematickou zkušeností (např. první stupeň ZŠ), jeho nedostatky spočívají převážně k nemožnosti rozšířit metaforu dělení na další číselné obory (například rozdělit koláč na *mínus tři* díly představuje stejně neřešitelný problém a přece se zápornými čísly dělí),

2. *model inverzních operací*: vychází z inverzní podstaty operací násobení a dělení. Pokud pro dvě přirozená (celá, reálná, komplexní) nenulová čísla a a b platí, že $a/b = 0$, pak z inverznosti operací vyplývá, že $a = b \cdot 0$, což vede ke sporu s předpokladem nenulovosti čísla a,

3. *model limitní*: je založen na podstatě nevlastní limity funkce $f(c) = \dfrac{a}{b}$ pro $b \to 0$ na množině reálných čísel. Ve školním prostředí půjde zpravidla o intuitivní závěr vycházející z vyhodnocení členů posloupnosti hodnot $\dfrac{a}{b}$ pro vhodně zvolenou posloupnost proměnné b (např. klesající posloupnost n-tin). Tento model je vhodný zejména jako propedeutikum ke konceptu limity, ale také např. upevňuje porozumění vztahů mezi dělencem, dělitelem a podílem (v rozšíření na obor racionálních čísel dělení neznamená jednoznačně zmenšení dělence).

Dělení nulou v českých učebnicích matematiky

Jelikož výzkum podobný výše uvedeným nebyl ve školním prostředí ČR zatím proveden, při hledání odpovědi na otázku, proč dochází k jevům charakterizovaným v první části příspěvku, se autorka pokusila najít částečný vhled do situace tím, že prostudovala přístup autorů učebnicových řad k dané tématice. Učebnicová rešerše se týkala osmi učebnicových řad[4], které jsou běžně k dostání v knihkupectví jako výukový materiál pro druhý stupeň ZŠ[5].

[4] Výčet konkrétních řad je uveden v závěrečné části příspěvku.

[5] Jedna z těchto řad je určena nižším ročníkům osmiletých gymnázií. Pouze dvě řady nabízejí metodickou příručku. Žákovské sešity nebyly do rešerše zahrnuty.

V učebnicích prvního stupně se obecně žáci setkají (alespoň podle záměru autorů učebnic) poprvé a neopakovaně s pravidlem, že nulou nelze dělit, v rámci rozšiřování oboru přirozených čísel na nulu. Již na této úrovni se můžeme setkat s jednoduchou prezentací prvních dvou modelů pro odůvodnění (koláčového modelu a modelu inverzních operací).

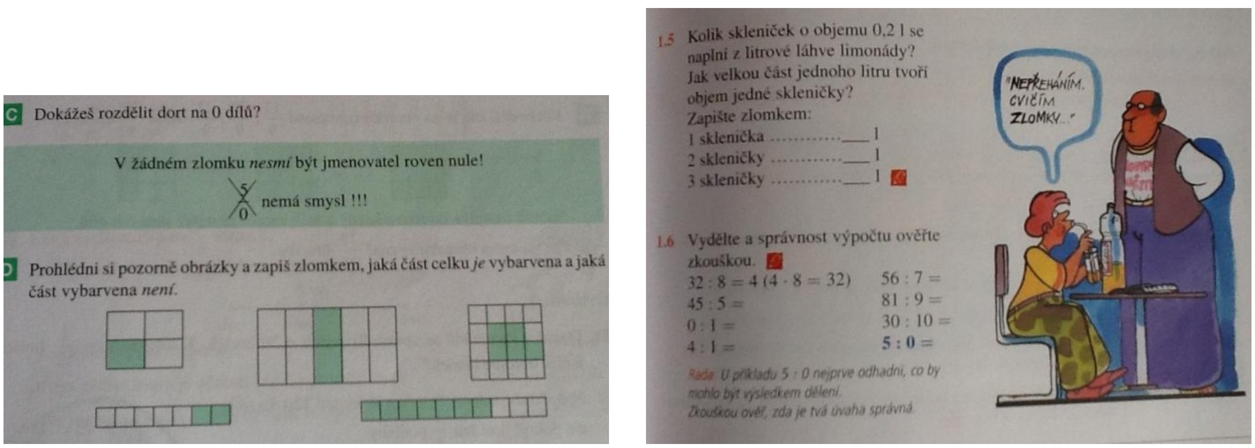
Ve zkoumaných osmi řadách učebnic jsou přístupy k odůvodnění nedělitelnosti nulou zastoupeny následovně:

a) Autoritativní („Protože víme, že nulou se dělit nesmí“): 3 řady

b) Koláčový model (viz obr. 1): 3 řady

c) Inverzní operace (viz obr. 1): 2 řady

d) Žádná explicitní zmínka: 1 řada



Model inverzních operací (nahoře) a koláčový model (dole) v učebnicích matematiky 2. stupně ZŠ (Zdroje: učebnice řady FRAUS a učebnice řady Prometheus)

Vidíme, že čtyři z osmi učebnicových řad neposkytují ani učiteli ani žákovi podporu v pochopení nebo znovuuchopení či prodiskutování podstaty problematiky. Jedna řada pracuje na dvou různých místech se dvěma různými modely odůvodnění. Model využívající intuitivně limity není přítomen.

Druhým důležitým faktorem, který autorka zkoumala, byla kvantitativní stránka věci: v kolika různých tématech a matematických prostředích se žáci mohou s podporou autorů učebnic setkat? Na kolika místech je jim poskytnuta příležitost si uvědomit souvislosti a získat nové zkušenosti s tématem dělení nulou? V rozsahu učiva podle daných osmi řad učebnic byla identifikována následující klíčová témata, ve kterých se problematika mohla diskutovat:

- Opakování operací s přirozenými čísly

- Zlomky
- Převrácené zlomky
- Složené zlomky
- Dělení v oboru celých čísel
- Poměr
- Nepřímá úměra
- Lomené výrazy
- Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

Zajímavé je podívat se také na návrhy přístupu autorů učebnic nejen k tomu zda, ale také jak je práce s nedělitelností nulou v daných tématech uvedena.[6] V kombinaci s jednotlivými tématy jsou tyto didaktické přístupy znázorněny v tabulce 1, kde „0“ značí žádnou zmínku autorů, „I“ implicitně uvedený koncept (např. převrácené zlomky jsou definovány v rámci definice pro dělitel různý od nuly), „P“ uvádí pasivní vysvětlení, uvedení informace a „A“ značí aktivní zapojení žáka v procesu odůvodnění (např. pomocí úlohy nebo otázky typu „Pro jaké zlomky nenajdeme jejich převrácené tvary?“). Z tabulky lze na první pohled vyčíst různorodost přístupu autorů ke konceptu nedělitelnosti nulou (jak po didakticky kvalitativní, tak obsahově kvantitativní stránce) a také témata, ve kterých se dělení nulou nejčastěji a nejméně často diskutuje.

Tab: Přístup autorů učebnic k dělení nulou u jednotlivých klíčových témat

Témata/učebnicové řady	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Opakování operací s přirozenými čísly	P	P	P	0	I	P	I	0
Zlomky	0	A	A	I	P	P	P	A
Převrácené zlomky	0	A	I	0	I	A	0	A
Složené zlomky	0	A	0	I	I	0	0	0
Dělení v oboru celých čísel	0	0	0	0	0	P	I	A
Poměr	0	P	I	I	0	0	I	I
Nepřímá úměra	0	0	I	I	A	P	0	A

Poznámka: Jednotlivé řady jsou kódovány velkými písmeny abecedy následovně, dle nakladatelství: A Prodos, B Prometheus (autoři Odvárko a Kadleček) C Prometheus (Šarounová a kol.), D Fortuna, E Prometheus, řada pro osmiletá gymnázia, F Nová Škola, G SPN, H Fraus.

[6] Ačkoli považujeme za samozřejmé, že učitel v samotném procesu výuky sehraje nejdůležitější roli, předpokládáme, že samotný návrh autorů učebnic může situaci ovlivnit.

Určování definičních oborů a dělení nulou

Témata lomené výrazy a lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli nejsou v tabulce 1 uvedeny, protože ve všech zkoumaných učebnicích se autoři nule věnují v rámci určování definičního oboru výrazů, rovnic a funkcí. Zde problematika nabývá nové dimenze neboť se ukazuje, že procedurální znalost určování definičního oboru často není spojena s konceptem nedefinovanosti nulového dělitele. Dochází tak například k situaci, kdy žák či student na jednu stranu dovede správně určit definiční obor lomeného výrazu, ale výraz $5/0$ položí roven 5 (resp. 0).

Ve spojitosti s tímto problémem je dobré si připomenout, že určitou implicitní roli ve zformalizování poznatků hraje i jazyk, který používáme. Jestliže zdůvodňujeme definiční obor lomených výrazů tím, že „ve jmenovateli nesmí být nula“, přesunujeme podstatu celé problematiky z matematického (nedefinovanost nuly jako dělitele) na jakýsi pseudo-grafický jev týkajícího se matematických symbolů (zákaz nuly pod zlomkovou čárou). Jedná se samozřejmě o běžnou praxi (stejně jako „pod odmocninou nesmí být záporné číslo“ aj.), ale měli bychom se alespoň občas nad touto jazykovou zkratkou se žáky zamyslet a připomenout si její matematickou podstatu.

Některé návrhy efektivního didaktického uchopení problematiky

1. Využít příležitosti provázání jednotlivých témat s tématem dělení nulou a použít několika modelů k zdůvodnění nedělitelnosti nulou, s možností budování či prohlubování zkušeností s dalšími matematickými tématy (zlomky, dělení, posloupnosti, funkcemi, nekonečno, limita – viz výše).

2. Zapojit žáky aktivně v procesu zdůvodňování a vysvětlování „pravidla“. O totéž usilovat u určování definičních oborů.

3. Pokud používáme v komunikaci „grafický“ výraz typu „ve jmenovateli nemůže být nula“, vracet se k jeho matematické podstatě (tj. jmenovatel nemůže být nula, neboť nulou nelze dělit).

4. V procvičovacích fázích učiva (klíčových témat) zahrnout úlohy, které vedou k nedefinovanému dělení nulou.

Poznámka: Příspěvek vznikl v rámci grantového úkolu GAČR P407/11/1740 „Kritická místa matematiky na ZŠ – analýza didaktických praktik učitelů.“

Zdroje

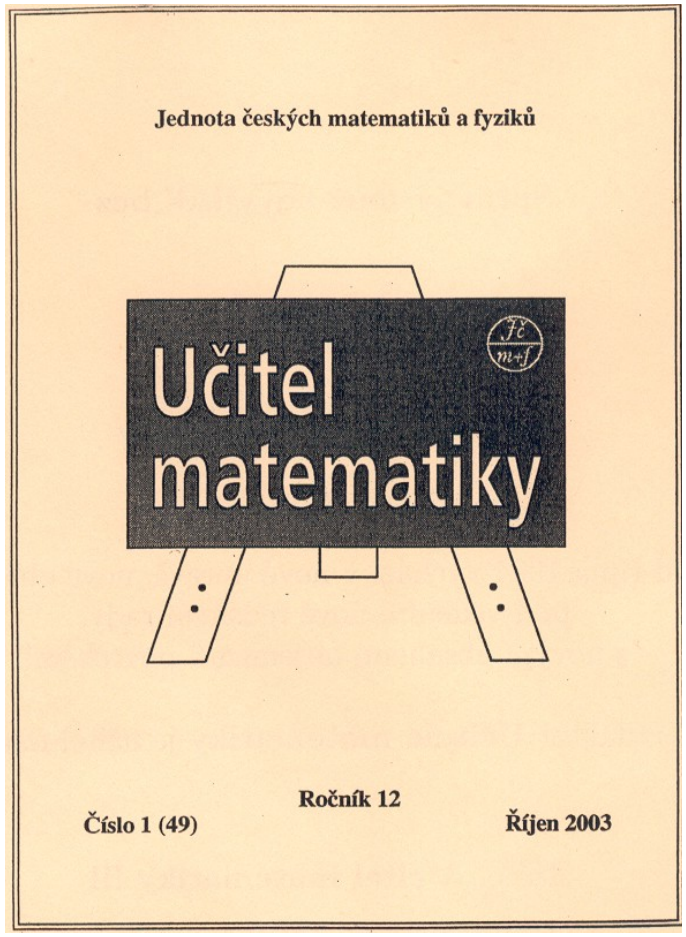
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia : příručka učitele.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia : příručka učitele.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia : příručka učitele.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009
BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia : příručka učitele.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010
COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007
COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 7. ročník základní školy.* 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007
COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007
COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007
HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: racionální čísla, procenta.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004
HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: kladná a záporná čísla : prima*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998
HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: výrazy [2] : Tercie.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997
HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: výrazy. 1. vyd.* Praha: Prometheus, 1995
HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: úměrnosti : tercie.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997
MOLNÁR, Josef a kol. *Matematika 6.* Olomouc: Prodos, 1998
MOLNÁR, Josef a kol. *Matematika 7.* Olomouc: Prodos, 1999
MOLNÁR, Josef a kol. *Matematika 8.* Olomouc: Prodos, 2000
MOLNÁR, Josef a kol. *Matematika 9.* Olomouc: Prodos, 2001
ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004
ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004
ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2004
ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Knížka pro učitele k učebnicím Matematiky pro 7. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999
ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 6. ročník.* Brno: Nová škola, 1997
ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Brno: Nová škola, 1998
ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník.* Brno: Nová škola, 1999
ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník.* Brno: Nová škola, 1999
ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 6*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998
ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 7.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998
ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 8*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998
ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 9.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998
TREJBAL, Josef, Darina JIROTKOVÁ a Václav SÝKORA. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1997
TREJBAL, Josef, Darina JIROTKOVÁ a Václav SÝKORA. *Matematika pro 7. ročník základní školy.* 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2004
TREJBAL, Josef. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 1998
TREJBAL, Josef. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 2. vyd. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2003

Literatura

[1] QUINN, Robert J., Teruni D. LAMBERG a John R. PERRIN. Teacher Perceptions of Division by Zero. *Clearing House.* 2008, roč. 3, č. 81, s. 101–104

[2] TSAMIR, Pessia a Dina TIROSH. Intuitive Beliefs, Formal Definitions and Undefined Operations: Cases of Division by Zero, In E. Pehkonen, G. C. Leder, G. Torner (Eds). *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 21. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.
Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.
Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran.

Administrace časopisu:
Miluše Hrubá
Gymnázium, A. K. Vítáka 452
Jevíčko
569 43
e-mail: hruba@gymjev.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2012. Sborník příspěvků.

Editor:	Naďa Vondrová
Sazba:	Naďa Vondrová a Hana Šustková, systémem LaTeX
Počet stran:	207
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2012
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7290-604-8 (CD ROM verze)