DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2008

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 14.–15. 2. 2008

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Stehlíková
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2008 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN tištěné verze: 978-80-7290-386-3
ISBN CD ROM verze: 978-80-7290-380-1

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

dostává se vám do rukou sborník příspěvků z dvanáctého ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky*, která se již k naší nesmírné radosti zabydlela v diářích mnoha učitelů. Konferenci pořádá katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy v Praze, Pedagogické fakulty, ve spolupráci se Společností učitelů matematiky JČMF pro učitele matematiky všech typů škol z celé České republiky, mnoho zahraničních hostů ze Slovenska a často i několik hostů z Německa, Polska či Anglie. Těší nás, že je mnoho učitelů, kteří se na konferenci každoročně vrací, a že každým rokem přibývají noví. Program konference je zvolen tak, aby se každý účastník mohl aktivně zapojit a našel si něco, co ho obohatí a co může ve své vlastní praxi využít.

Chtěli bychom vám všem, kteří přispíváte na konferenci dílnami, referáty v sekcích, otevřenými hodinami, postery a cennými diskusemi ve všech aktivitách, poděkovat za skvělou atmosféru konference, která nám pokaždé dodá energii a chuť do další práce. Věříme, že i účastníci konference si odnášejí dobrý pocit smysluplnosti svého úsilí v hodinách matematiky.

Společnost učitelů matematiky (SUMA), která hájí profesní zájmy učitelů matematiky, nabízí učitelům prostor k předávání zkušeností i k diskusím o problémech, které nás zajímají, na portálu SUMA (www.suma.jcmf.cz). Ten byl uveden do provozu s podporou Evropského sociálního fondu. Věříme, že právě účastníci konference *Dva dny s didaktikou matematiky* budou portál aktivně využívat a sdílet tak s ostatními kolegy své cenné zkušenosti i názory.

Všem účastníkům třináctého ročníku konference přejeme, aby jim tento sborník připomněl příjemnou pracovní atmosféru a aby v něm i po roce našli další podněty pro svou práci. Ostatním čtenářům přejeme, aby je náš sborník potěšil a aby je motivoval aktivně se účastnit dalších ročníků konference *Dva dny s didaktikou matematiky*.

Na setkání na třináctém ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky* v únoru 2009 se těší

Naďa Stehlíková

předsedkyně programového výboru konference

Zvané přednášky

ZAMYŠLENÍ NAD NĚKTERÝMI MOŽNOSTMI V HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ NA ZŠ A SŠ ANEB TESTOVÁNÍ BY NEMĚLO BÝT PŘEKÁŽKOU REFORMNÍM ZMĚNÁM SMĚŘUJÍCÍM K NÁPRAVĚ SYSTÉMU VZDĚLÁVÁNÍ

EVA ŘÍDKÁ, EVA LESÁKOVÁ[1]

VÝCHODISKO

V procesu liberalizace našeho školství dochází k řadě změn. Mnohé z nich jsou vyvolány a umožněny tlakem měnící se společnosti. Zásahy přicházejí prakticky odevšad. Ke změnám se vyslovují žáci a rodiče, politici, reklamní agenti z komerčních sfér, média i někteří odborníci. Učitelé plní převážně rutinní pedagogické povinnosti. Mimo jiné se školy potýkají především s vlastním provozem, s plněním administrativních opatření od nekonečně tvořivé skupiny úředníků, s konkurenčními tlaky, s důsledky systémových i nesystémových změn, s kázeňskými problémy žáků a zpravidla na posledním místě zbývá i prostor pro řešení pedagogických záměrů a tvořivou práci. Situaci komplikují i neodborné zásahy některých politiků do systému školství za podpory některých senzacechtivých médií. Téměř neexistuje spolupráce mezi navazujícími stupni škol, která by mohla ledacos korigovat. Některé „kosmetické" změny v našem školství vyvolané tímto společenským tlakem mají nečekaně vážné důsledky v přístupu naší mladé generace ke vzdělání. Co je správné a co ne?

ÚVOD

CERMAT je organizace, kterou MŠMT zřídilo za účelem realizace společné části maturitní zkoušky (dále MZ) na všech typech středních škol ukončených maturitní zkouškou. V současné době se připravuje postupné spuštění „ostré" maturity ve dvou fázích. V roce 2010 a 2011 by měla společná část MZ obsahovat dvě zkoušky – Český jazyk a literaturu

[1]CERMAT; lesakova@cermat.cz, ridka@cermat.cz

a volitelně Matematiku nebo jeden z pěti Cizích jazyků. Všechny povinné zkoušky se budou nabízet ve dvou úrovních obtížnosti – v základní úrovni a ve vyšší úrovni.

Od roku 2012 bude maturita rozšířena o další zkoušku. Studenti budou skládat ve společné části zkoušku z Českého jazyka a literatury, zkoušku z Cizího jazyka a jednu volitelnou zkoušku. V nabídce volitelných zkoušek zůstává Matematika a přibude Občanský a společenskovědní základ a Informatika. V každé zkoušce si studenti budou vybírat jednu ze dvou úrovní obtížnosti.

V průběhu dlouhodobé přípravy společné části maturitní zkoušky proběhlo nejrozsáhlejší pilotážní šetření na našich školách. CERMAT pro potřeby objektivního posuzování získal velmi cenné informace o stavu gramotnosti našich studentů. Současně se objevila potřeba zmapovat situaci a reflektovat změny i na nižších stupních škol. Již pátým rokem probíhá testování v rámci programu Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. V letošním roce se zhruba u 68 000 mimopražských žáků posuzovaly dovednosti v Českém jazyce, v Matematice a Obecné dovednosti.

V předchozích dvou letech úspěšně proběhlo i ověřování výsledků vzdělávání v 5. třídách základních škol. Za podpory ESF připravuje CERMAT rovněž Evaluační testy pro mimopražské základní a střední školy. Prostřednictvím všech zmíněných činností získal CERMAT kromě potřebných dat i cenné zkušenosti v oblasti testování. V příspěvku se zamyslíme nad obecnými otázkami testování. Osvětlíme pohled na konstrukci testu a z ní vyplývající výpovědní hodnotu testu. Stručně pohovoříme též o objektivitě a srovnatelnosti testů a o možné neodborné interpretaci výsledků testu. Uvedeme ukázky z plošného testování žáků 5. a 9. tříd v projektu Kvalita I. Stručně se zamyslíme i nad možnostmi vhodného využívání testů pro různé účely (evaluace jednotlivce a skupiny, soutěže, přijímací řízení apod.). Závěrem položíme několik otázek v souvislosti s využitím a významem testování v podmínkách našeho školství.

Testy

V laické, ale i odborné pedagogické veřejnosti je ještě dnes zažitá představa, že test je pouze taková forma zkoušení či ověřování znalostí, v níž adept ke každému úkolu vybírá správné řešení z nabídky několika alternativ (A, B, C, zpravidla ještě D a případně i E). Nezasvěcený účastník se obvykle přiklání k názoru, že 50 % správně zodpovězených otázek zvládne průměrný adept a hranice úspěšnosti odpovídá asi 25 %. Obvykle se však neptá, co vlastně test měří, je-li objektivní, je-li možné výsledky porovnat s výsledky v jiném testu apod. Nutnou podmínkou k zodpovězení těchto otázek je znalost konstrukce testu, tedy obsah i formáty použitých úloh.

Klasifikace typů úloh

Z hlediska hodnocení testových úloh se používá základní dělení na úlohy otevřené a uzavřené. V úzce otevřených úlohách se hodnotí jen odpověď (slovní vyjádření, upravený vzorec, číselný výsledek, bod grafu, úsečka apod.). V široce otevřených úlohách se hodnotí i postup. Uveďme pouze tři nejčastěji užívané typy uzavřených úloh.

Nejužívanějším typem uzavřené úlohy je **úloha s výběrem odpovědi**, tzv. **multiple choice**, kde se vybírá jediná správná odpověď z nabídky několika (čtyř, pěti apod.) odpovědí. Výběr správné odpovědi se hodnotí plným počtem bodů.

Příklad: Ivan měl včera narozeniny. Zítra je čtvrtek. Ve který den měl Ivan narozeniny?

(A) neděle (B) pondělí (C) úterý (D) jiné řešení

Dalším typem uzavřené úlohy je **úloha přiřazovací**. K několika úlohám se přiřazují správné odpovědi ze společné nabídky (počet nabídek zpravidla převyšuje počet úloh). Plným počtem bodů se hodnotí jen správné vyřešení všech částí úlohy. Je možné přidělit dílčí body i za částečně správné řešení.

Příklad: V následujících posloupnostech je $a_{n+1} = a_n + 3$ pro všechna přirozená čísla n. Ke každé takové posloupnosti dodefinované jedním jejím členem (v A–C) přiřaďte první člen posloupnosti (vybírejte z 1–5).

(A) $a_{100} = 299$	(1) $a_1 = 1$
(B) $a_{50} = 152$	(2) $a_1 = 2$
(C) $a_{99} = 295$	(3) $a_1 = 3$
	(4) $a_1 = 4$
	(5) jiná možnost

Ve svazku dichotomických úloh se zpravidla hodnotí pravdivost (ANO) či nepravdivost (NE) několika výroků. Opět se plným počtem bodů hodnotí jen správné vyřešení všech částí úlohy.

Příklad: O každém tvrzení (1) až (4) rozhodněte, je-li pravdivé (ANO), nebo nepravdivé (NE). Součin dvou přirozených čísel je 18.

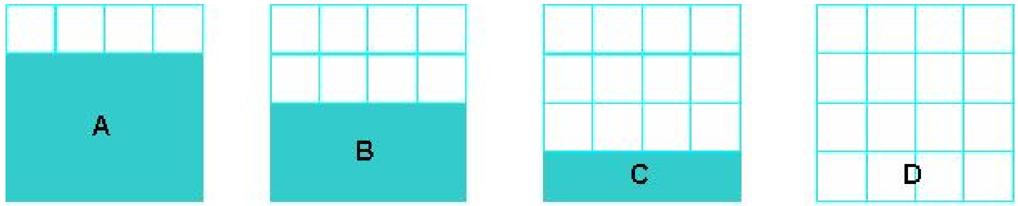
(1) Jejich součet je číslo sudé.	(ANO-NE)
(2) Jejich součet může být prvočíslem.	(ANO-NE)
(3) Jejich součet je větší než 8.	(ANO-NE)
(4) Jejich rozdíl může být nula.	(ANO-NE)

SPOLEHLIVOST TESTU

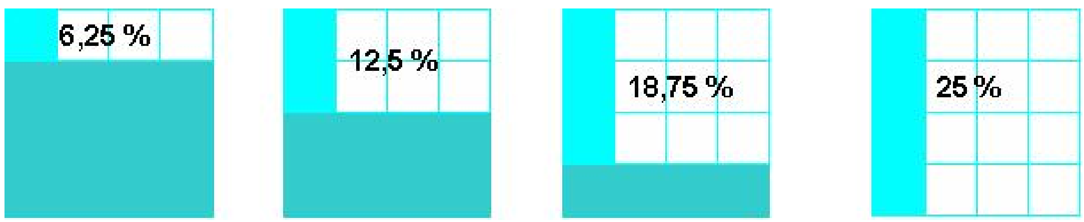
Problém nastává při posuzování obtížnosti a spolehlivosti testu. Změna typu úlohy může oba tyto parametry významně ovlivnit. V testech CERMATu bylo opakovaně ověřeno, že korelace RIR (korelace úlohy se zbytkem testu) je významně nižší u uzavřených úloh oproti úlohám otevřeným. Mezi korelacemi dvojic uzavřených úloh různých typů bývá pak výrazně nejnižší, jde-li o dvojici uzavřených úloh typu multiple-choice. Nabízí se tedy tvrzení, že uzavřené úlohy jsou mj. méně spolehlivé než úlohy otevřené. Situaci si objasníme na následujícím zjednodušeném příkladu.

Představme si test s 16 úlohami typu multiple choice. V každé úloze se nabízejí čtyři odpovědi, právě jedna je správná. Dále předpokládejme čtyři ideální skupiny řešitelů:

každý člen ve skupině A umí správně vyřešit 75 % úloh, zbytek hádá, ve skupině B 50 %, ve skupině C 25 % a ve skupině D si s žádnou úlohou nikdo neporadí.

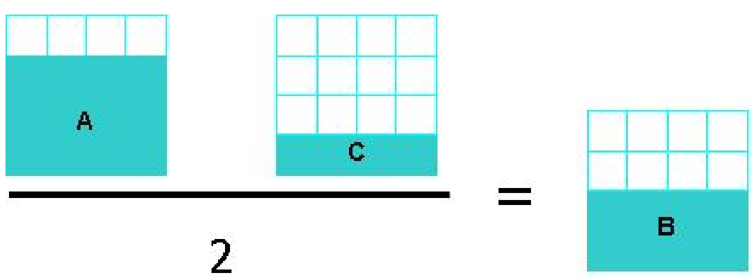


Jakou úspěšnost v jednotlivých skupinách naměříme? V první skupině A má každý řešitel možnost hádat ze čtyř úloh. Pravděpodobnost uhodnutí správné odpovědi je jedna čtvrtina, při dostatečně velikém počtu řešitelů tedy v průměru uhodnou jednu úlohu navíc. Ve druhé skupině B se hádá z dvojnásobného počtu úloh, v průměru se tedy uhádnou dvě, ve skupině C tři a ve skupině D čtyři.

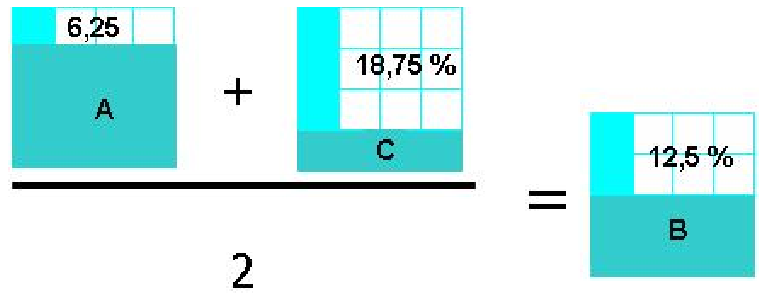


V nejlepší skupině tedy naměříme hodnotu úspěšnosti 81,25 % místo 75 %, v nejslabší skupině 25 % místo 0 %. Z ukázky je patrné, že navýšení úspěšnosti klesá s růstem úrovně skupiny, a to lineárně od hodnoty pravděpodobnosti uhodnutí správné odpovědi (o 25 %) až k 0 %, pokud by existovala skupina, která vyřeší všechny úlohy testu bezchybně.

Ve skutečnosti předvedené homogenní skupiny samozřejmě neexistují. Co můžeme očekávat u skupiny, v níž jsou jedinci různé úrovně? Předpokládejme opět ve zjednodušeném případě např. skupinu s průměrnou úspěšností 50 %, v níž jsou mj. zastoupeni jedinci úrovně A a C.



Jakou úspěšnost naměříme? Pokud by skutečná úspěšnost byla 50 %, lze předpokládat, že díky druhé polovině úloh, kterou řešitelé neumí vyřešit a výsledky mohou pouze odhadovat či náhodně vybírat, by byla naměřená úspěšnost navýšena až o 12,5 %.



Změna úspěšnosti není závislá na rozložení úspěšnosti ve skupině, závisí jen na průměrné hodnotě úspěšnosti.

Srovnatelnost průměrných výsledků v testech

Jak je možné snížit nechtěný přírůstek úspěšnosti testu způsobený hádáním? Problém se zpravidla řeší třemi možnými způsoby. Náhodný úspěch v úloze je možné částečně snížit **větším počtem nabízených odpovědí**, dále je možné upravit bodování **zavedením trestných bodů** za chybnou odpověď a nakonec je možné **změnit typ úlohy**. Pokud se počet odpovědí v nabídce zvětší ze čtyř (p = 25%) na pět (p = 20%) nebo dokonce na deset (p = 10%), můžeme očekávat jen drobné zlepšení situace (viz tabulka 1).

Tab. 1: Úspěšnost u naměřená v testu v závislosti na počtu nabídek v uzavřených úlohách

p	0 %	5 %	**10 %**	15 %	**20 %**	**25 %**	30 %	35 %	40 %	45 %	50 %	u
	25 %	21 %	**17 %**	12 %	**6 %**	**0 %**						**25 %**
	30 %	26 %	22 %	18 %	13 %	7 %	0 %					30 %
	35 %	32 %	28 %	24 %	19 %	13 %	7 %	0 %				35 %
	40 %	37 %	33 %	29 %	25 %	20 %	14 %	8 %	0 %			40 %
	45 %	42 %	39 %	35 %	31 %	27 %	21 %	15 %	8 %	0 %		45 %
$\frac{u-p}{1-p}$	50 %	47 %	**44 %**	41 %	**38 %**	**33 %**	29 %	23 %	17 %	9 %	0 %	**50 %**
	55 %	53 %	50 %	47 %	44 %	40 %	36 %	31 %	25 %	18 %	10 %	55 %
	60 %	58 %	56 %	53 %	50 %	47 %	43 %	38 %	33 %	27 %	20 %	60 %
	65 %	63 %	61 %	59 %	56 %	53 %	50 %	46 %	42 %	36 %	30 %	65 %
	70 %	68 %	67 %	65 %	63 %	60 %	57 %	54 %	50 %	45 %	40 %	70 %
	75 %	74 %	**72 %**	71 %	**69 %**	**67 %**	64 %	62 %	58 %	55 %	50 %	**75 %**
	80 %	79 %	78 %	76 %	75 %	73 %	71 %	69 %	67 %	64 %	60 %	80 %
	85 %	84 %	83 %	82 %	81 %	80 %	79 %	77 %	75 %	73 %	70 %	85 %

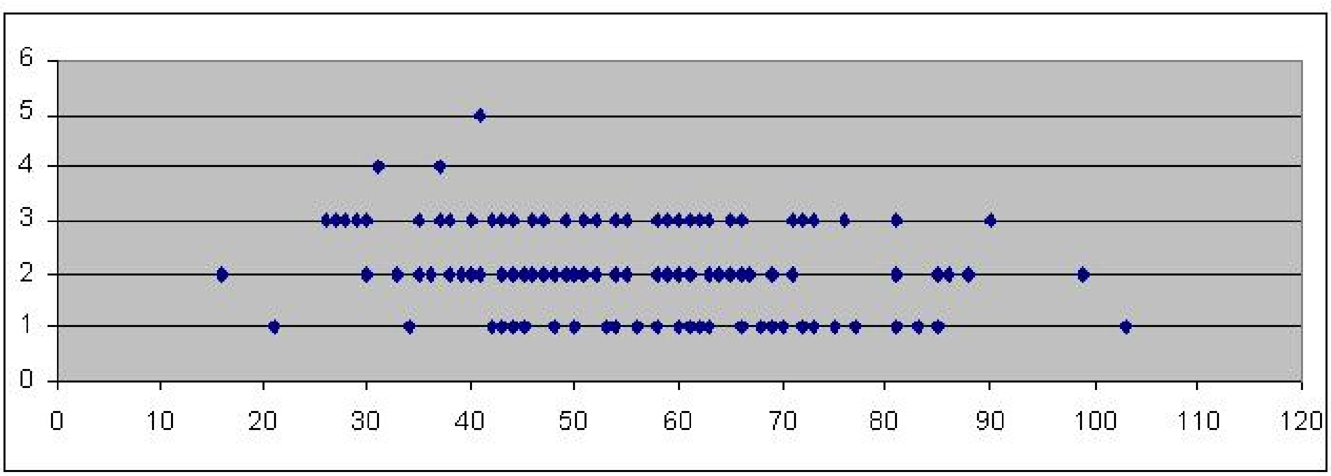
Symbolem p je označena pravděpodobnost uhodnutí libovolné úlohy, ($p = \frac{1}{n}$, kde n je počet nabízených odpovědí). Z tabulky je patrné, že např. při naměření 50% úspěšnosti v testu ve skutečnosti existuje záruka, že vědomě (s vyloučením náhody) a správně bylo vyřešeno 33 % úloh, pokud test obsahoval úlohy s nabídkou čtyř odpovědí. S nabídkou pěti odpovědí mohla být skutečná úspěšnost pouze 38 %. Pokud byly v nabídce jen tři odpovědi, podle uvedeného vztahu je možné spočítat, že skutečná úspěšnost by mohla klesnout na 25 %. Naopak obsahoval-li test pouze otevřené úlohy, skutečná úspěšnost by se s naměřenou hodnotou měla shodovat.

Výsledek v testu je možné ovlivnit nastavením bodování, např. přidělováním záporných bodů za chybnou odpověď. Počet kladných bodů ku počtu záporných bodů by měl odpovídat poměru pravděpodobnosti náhodného výběru chybné odpovědi ku pravděpodobnosti náhodného výběru správné odpovědi (obě veličiny jsou v opačném poměru). Např. u úloh s nabídkou pěti odpovědí lze přidělit 4 body za správnou a -1 bod za chybnou odpověď, nebo 1 bod za správnou a $-0{,}25$ bodu za chybnou odpověď apod. Při dodržení této zásady se průměrná úspěšnost v testu nezmění ani náhodným výběrem odpovědi při neznalosti řešení. Třetí možností jak objektivizovat výsledek testu je zařazení svazků dichotomických úloh, přiřazovací úlohy a zejména otevřené úlohy. Nutnou podmínkou je opět vhodné nastavení bodování (např. plný počet jen za všechny správné odpovědi ve svazku a přidělení částečného počtu bodů za jedinou chybu), aby se snížilo riziko kladného hodnocení náhodně vybraných odpovědí.

Srovnatelnost jednotlivých výsledků v testu

Větším problémem než případné posunutí průměrné úspěšnosti v testu je náhodné rozložení jednotlivých výsledků testu, mají-li řešitelé možnost správné odpovědi tipovat či náhodně vybírat.

V následujícím grafu jsou uvedeny výsledky 15letých žáků v soutěži Matematický klokan. Žáci řešili 24 uzavřených úloh typu multiple choice, správnou odpověď hledali v nabídce 5 alternativ. Správné odpovědi ve 24 otázkách byly podle obtížnosti hodnoceny 3 až 5 body, za každou chybnou odpověď se odčítal 1 bod. Dosažení záporného výsledku znemožní 24bodová bonifikace.

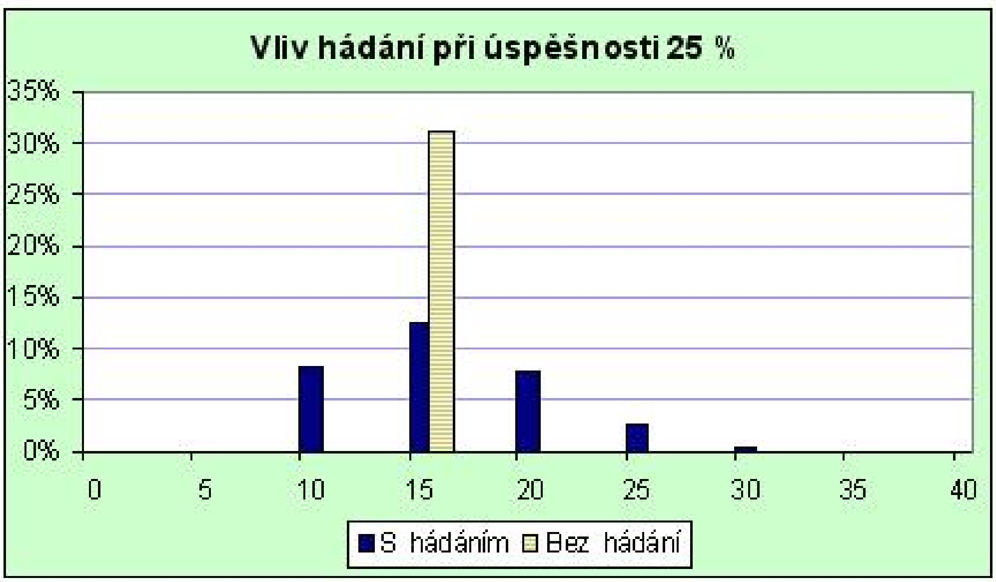


Obr. 1

V grafu je na vodorovné ose výsledek v soutěži, na svislé ose známka z matematiky v pololetí. Včetně počáteční bonifikace (24 bodů) je průměrná úspěšnost v soutěži 47 %, po odečtení bonifikace je necelých 34 %. Z grafu je možné vyčíst, že horší známce z matematiky odpovídá o něco nižší průměrná úspěšnost v soutěžním testu. Korelace mezi oběma veličinami je relativně nízká (0,26). Nelze samozřejmě očekávat, že výsledek v testu bude odpovídat známce z matematiky na vysvědčení. Přesto je na místě otázka, je-li test dostatečně objektivní.

Díky nízké úspěšnosti v testu je zřejmé, že žáci uměli vyřešit jen část úloh a odpovědi tak mohly být ve velkém počtu tipovány, některé se štěstím, jiné neúspěšně. Body získané jednotlivými řešiteli jsou při stejném počtu tipovaných výsledků rozděleny s odpovídající pravděpodobností mezi několik položek.

V následujících grafech je možné nahlédnout důsledky tipování v osmi soutěžních úlohách (třetina testu). Pokud řešitelé správně vyřeší jen dvě otázky, získají společně s 8bodovým bonusem celkem 16 bodů (světlý sloupec). V případě, že se pokusí další úlohy alespoň vytipovat, s vysokou pravděpodobností dosáhnou na 10, 15 nebo 20 bodů, se štěstím mohou získat 25 bodů a výjimečně (s velmi nízkou pravděpodobností) i 30 bodů.

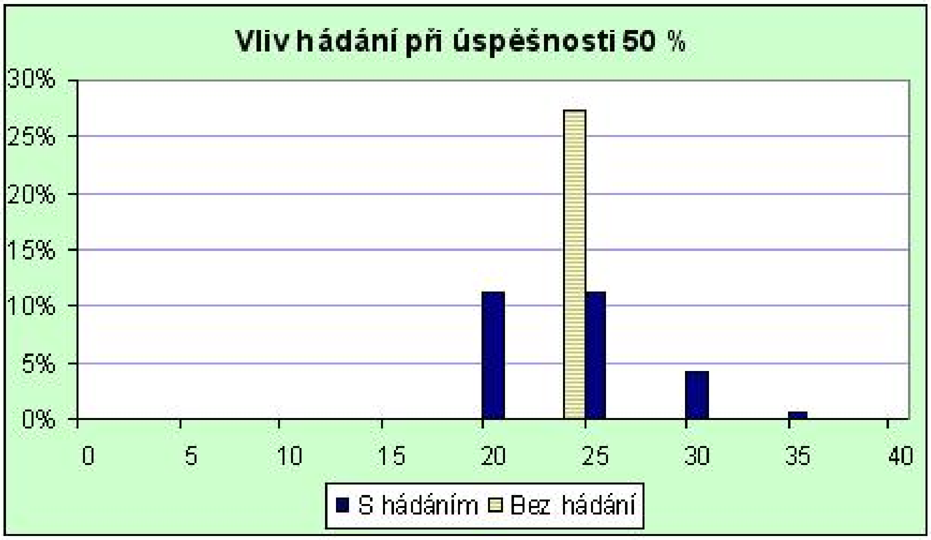


Obr. 2

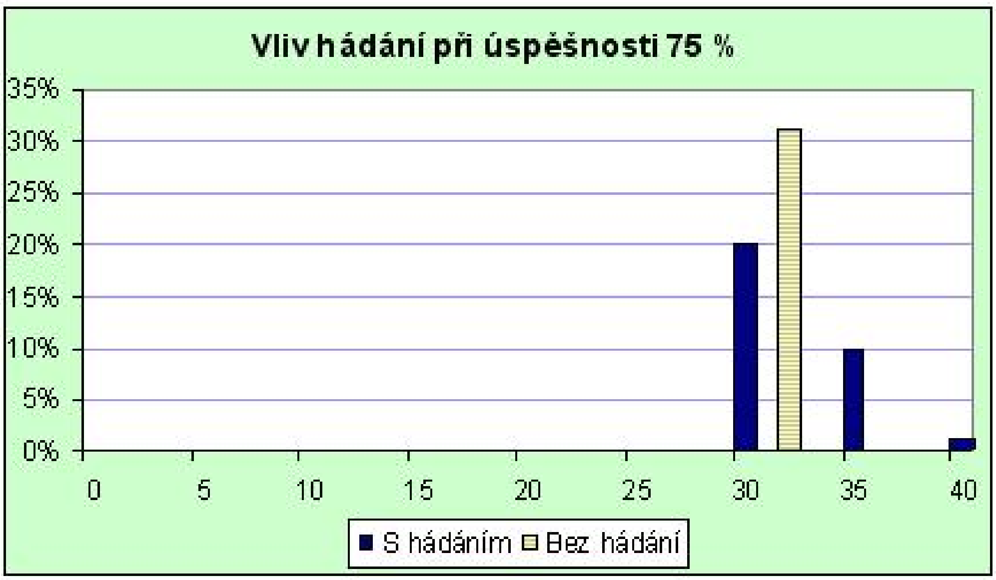
Pokud řešitelé správně vyřeší 4 otázky, společně s tipováním mohou za 8 úloh místo 24 bodů získat se stejnou pravděpodobností 20 nebo 25 bodů, menší počet řešitelů může dosáhnout na 30 a výjimečně až na 35 bodů. Čím jsou řešitelé lepší, tím méně prostoru mají na tipování, což lze vyčíst z dalších dvou grafů (obr. 3 a 4).

Tipováním dvou odpovědí si většina řešitelů pokazí výsledek o dva body, asi poloviční počet řešitelů si o tři body polepší, jen výjimečně dosáhne na plný počet bodů (obr. 5).

Nejmenší šance na zlepšení výsledku je při tipování jediné úlohy. Zajímavé je srovnání situace, kdy řešitelé odpověď u nevyřešených úloh neuvádějí, se situací, kdy naopak tipují. Výsledky v 8 úlohách bez tipování jsou na obr. 6.

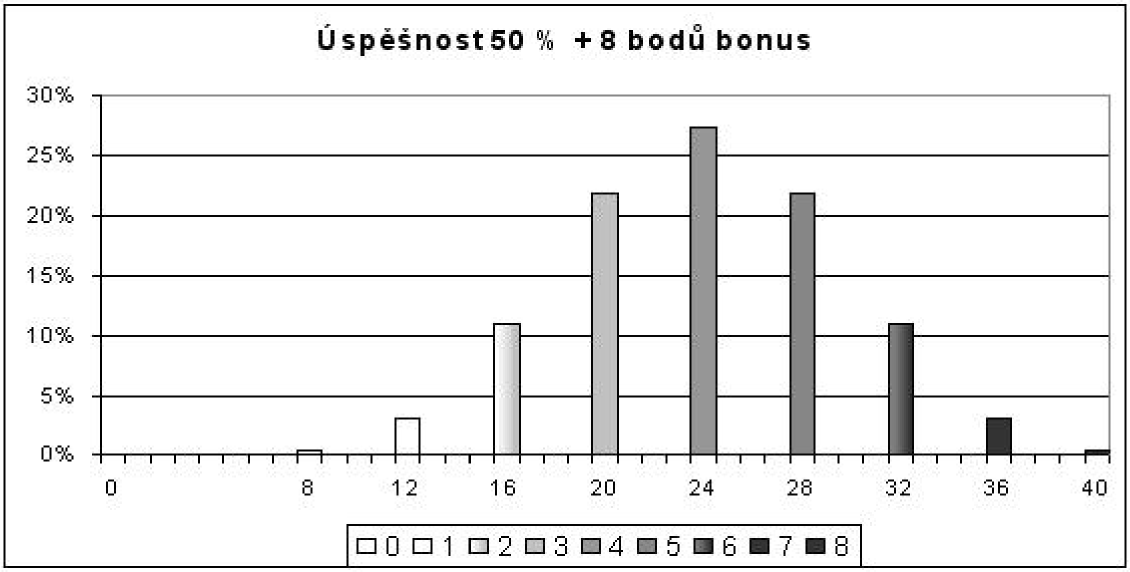


Obr. 3



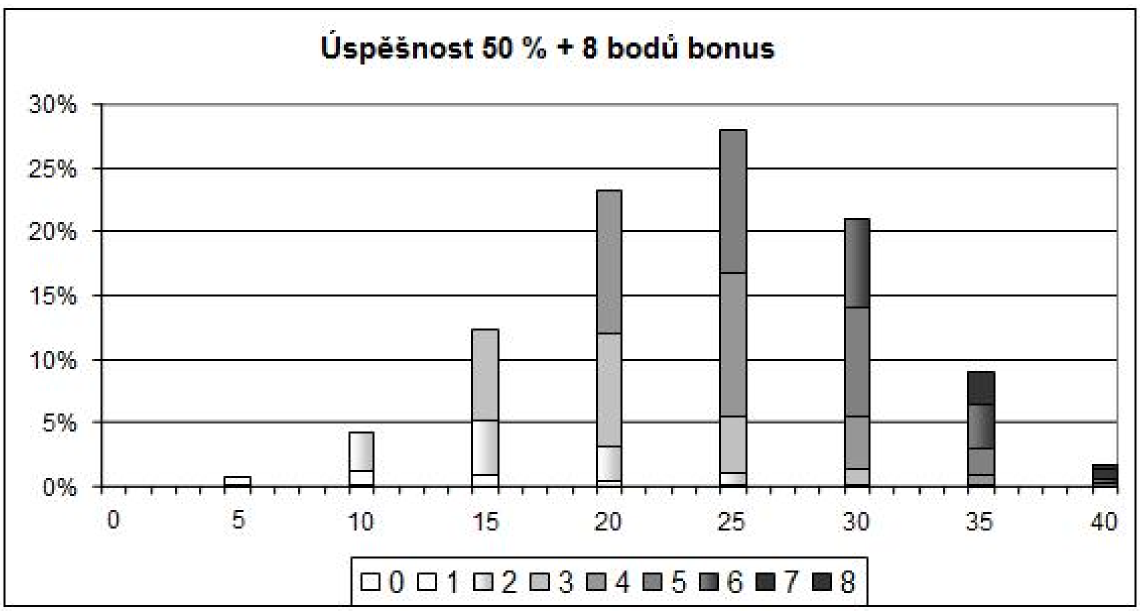
Obr. 4

Obr. 5



Obr. 6

V **obou** grafech představují čísla 0 až 8 počet správně vyřešených úloh bez tipování. Výsledky v 8 úlohách s tipováním jsou na obr. 7.



Obr. 7

Všimněme si, že ve stejných sloupcích jsou řešitelé, kteří se v počtu samostatně řešených úloh liší. Např. 25 bodů je možné získat za vyřešení 2 až 5 úloh, zbývající řešení byla vytipována. Bez tipování by tito řešitelé získali od 16 do 28 bodů. Z této ukázky je jasné, že štěstí nebo smůla může hrát v testu s úlohami multiple choice velikou roli. Čím hůře test dopadá, tím větší roli hraje náhoda. Nelze tvrdit, že stejné výsledky získávají jen stejně schopní řešitelé a že dobrými výsledky se mohou pochlubit jen dobří řešitelé. Přesto je vidět, že mezi nejlepší řešitele neproniknou podprůměrní jedinci a mezi slabé jedince se nedostanou výteční řešitelé.

Je vhodné používat pro hodnocení testy s úlohami typu multiple choice?

Nespornou výhodou testu s uzavřenými úlohami je rychlost hodnocení a vyloučení chyb ze strany hodnotitelů. V **soutěžích**, jejichž cílem je odlišit nejlepší řešitele, je takový test na místě. Nemá však smysl porovnávat mezi sebou soutěžící se slabšími výkony. Rovněž **evaluační** testy je možné konstruovat obdobným způsobem, pokud **hodnotíme skupinu** jako celek. Současně je možné vyčlenit nejúspěšnější řešitele. Pro hodnocení jednotlivců podobné testy nejsou dostatečně objektivní. Pokud je např. u přijímacích zkoušek stanovena hranice uspěl – neuspěl, v jejím okolí dochází spíše k náhodnému uspořádání než k objektivnímu rozdělení na úspěšné a neúspěšné. Lepším řešením by bylo stanovení hraničního pásu, z něhož by žáci byli vybíráni prostřednictvím dalšího kritéria (známka na vysvědčení, ústní zkouška apod.) Některé společnosti dávají studentům možnost testy opakovat. Pokud mají řešitelé tři pokusy a hodnotí se nejlepší výkon, řešitelům se vyplácí tipovat výsledky úloh, které nezvládají.

Neviditelné, ale důležité

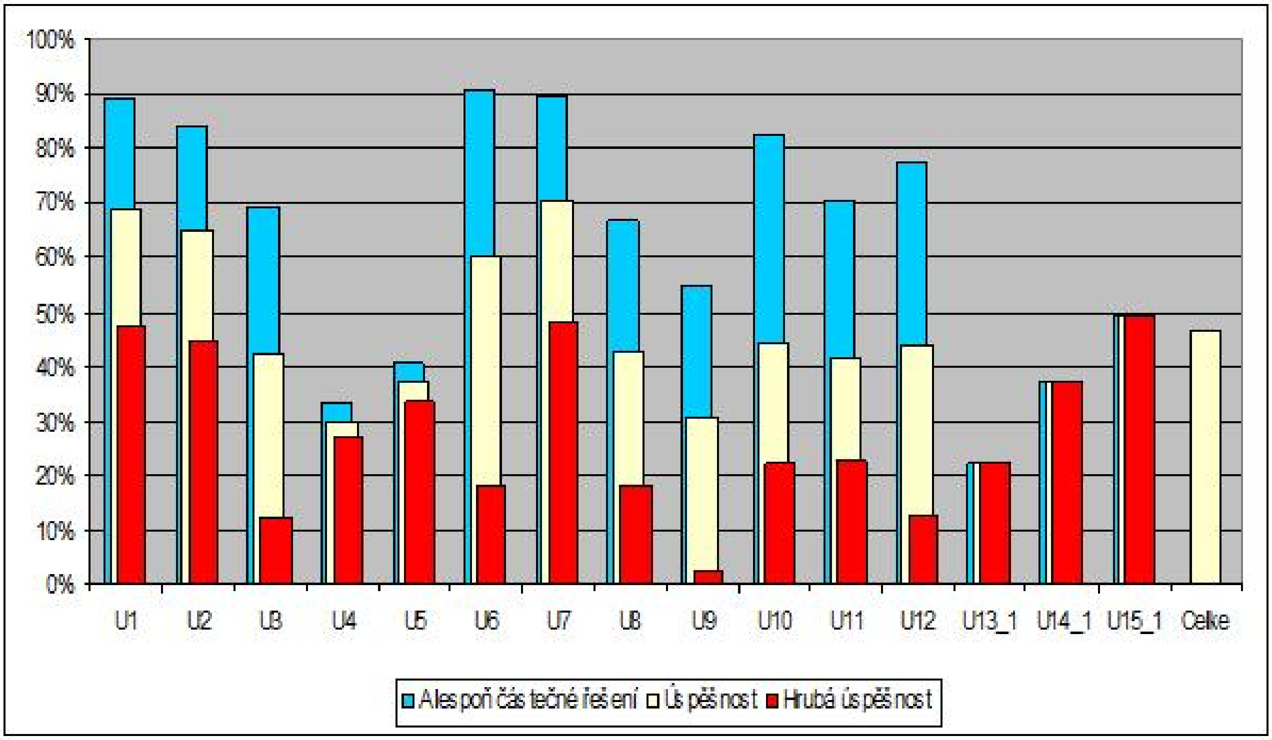
- U testů nemusí hodnota průměrné úspěšnosti vypovídat o skutečné úspěšnosti.

Zkreslování výsledků **skupiny** je ovlivňováno:

- pravděpodobností uhodnutí správné odpovědi,
- úrovní sledované skupiny,
- nastavením bodování (zápornými body je možné téměř eliminovat zkreslení průměrného výsledku skupiny).
- Pro měření úrovně **skupiny** jako celku je vhodné používat záporných bodů, naopak zkreslení při porovnávání **jednotlivců** odstranit nelze.
- Zcela **spolehlivý** (jak pro skupinu, tak i pro jednotlivce) je test sestavený z **otevřených úloh** (nulové náhodné skóre).
- Náhodné skóre je možné ovlivnit výběrem **vhodných typů uzavřených úloh**.

Testy CERMATu

V projektu Kvalita I bylo v testech z matematiky použito několika typů úloh. V otevřených úlohách (U1–U9), ve svazcích dichotomických úloh (U10 a U11) i v přiřazovací úloze (U12) bylo možné ohodnotit i částečné řešení. V uzavřených úlohách typu multiple choice ($U13_1$, $U14_1$ a $U15_1$) je hodnocen jen správný výsledek.



Obr. 8

Nejvyšší (tmavě šedé) sloupce uvádějí počty žáků v procentech, kteří úlohu řešili alespoň s částečným úspěchem. Nejnižší sloupce uvádějí počty žáků, kteří řešili úlohu zcela bezchybně. Světlé sloupce uvádějí úspěšnost žáků v úloze, resp. obtížnost úlohy. Z grafu je možné vysledovat, že uzavřené úlohy přiřazovací i svazkové byly v průměru srovnatelně obtížné s úlohami typu multiple choice, avšak jemněji rozlišily úroveň ve znalostech či dovednostech žáků a měly lepší citlivost. Díky nižšímu náhodnému skóre svazky vykazovaly i vyšší korelaci ke zbytku testu.

V testech CERMATu se za chybné odpovědi neodečítají žádné body. **Řešitel** má **jistotu**, že ocenění za správně vyřešené úlohy bude v plné výši (**nebude ošizen**), což je důležité pro **stanovení** minimální hranice, tzv. **cut off score**. I v některých testech CERMATu převažují uzavřené úlohy typu multiple choice a dochází tak k posunutí průměrné úspěšnosti až o 15 %. Náhodné rozložení jednotlivců se řídí stejnými pravidly, která byla výše popsána u soutěže Matematický klokan. Pokud se tedy porovnávají jednotlivé testy, je třeba se seznámit s bodováním, s náhodným skóre i s typy používaných úloh.

TESTOVÁNÍ ANO ČI NE?

Na konferenci v Hradci Králové v září 2007 byly předneseny a diskutovány dvě výzvy reflektující klesající úroveň vzdělanosti v našem státě. Zaznělo, že **matematika by neměla být jen pro nadané a vyvolené**. K poznání matematiky mají mít **příležitost všichni**, kteří k ní tíhnou a **budou ji potřebovat**.

Učená společnost (předseda Dr. Jiří Grygar) ústy profesorky H. Illnerové deklarovala **potřebu** zkvalitnit výuku matematiky **na školách** a **zvýšit** její **prestiž** na gymnáziích zavedením povinné maturity z **matematiky**. Stále více škol ruší přijímací zkoušky a mnohé **školy nepřihlížejí** ani **k výsledkům** uchazečů **dosažených v předchozím studiu**. **Kriteriem k postupu** na vyšší stupeň školy již není dosažená úroveň znalostí a dovedností studenta, ale **počet volných míst**, které je třeba zaplnit, aby si škola zajistila ekonomickou jistotu.

V mezinárodních testech jsou naši základoškoláci průměrní, ale **nikdo se nezabývá kvalitou** našich středoškoláků, nikdo nezkoumá **příčiny neúspěchu** velkého počtu **posluchačů vysokých škol**. Naši žáci ve srovnání s vrstevníky z ostatních států OECD nemají rádi matematiku a ve vzdělání jsou mnohem více závislí na sociálním zázemí v rodině.

Proč **škola nedostatečně motivuje studenty**? Má špatné učitele nebo se jen nachází v horších podmínkách než školy v úspěšnějších státech? Existují **objektivní studie**, které by objasnily skutečné **příčiny**?

Tvoří se nové studijní programy, aniž by byla zmapována a **objektivně posouzena kvalita našich školáků**. Před plošným zaváděním nových programů nebyla zveřejněna žádná studie pilotních škol, která by garantovala **účinnost nových metod**. Současně se zahajuje reforma středních škol. Nikdo netuší, jaké budou výstupy ze základních škol, ale již se tvoří programy, které předjímají splnění **vstupní kvality uchazečů o studium na střední škole**.

Je patrná snaha odpovědných institucí zvýšit **počet maturantů a vysokoškoláků**. Maturitní vysvědčení a vysokoškolský diplom mají zajistit vyšší konkurenceschopnost naší mladé generace. Jak odpovědné instituce současně zajistí, aby získání kýžených dokladů bylo podloženo skutečnou **kvalitou**?

V posledních letech odborníci diskutují o tom, zda plošné testování v pátých a devátých třídách není mj. v rozporu s reformními snahami ve školství. Nechtějí omezovat tvořivost učitelů zjišťováním výsledků ve vzdělávání testováním základního učiva stanoveného osnovami a následně RVP. Nechtějí, aby se žáci učili na testy. Bojí se vytváření a možného zneužití žebříčků škol. Stát má v úmyslu **garantovat** teprve **výstup absolventů** středních škol **po 13 letech studia**. Nebude již pozdě?

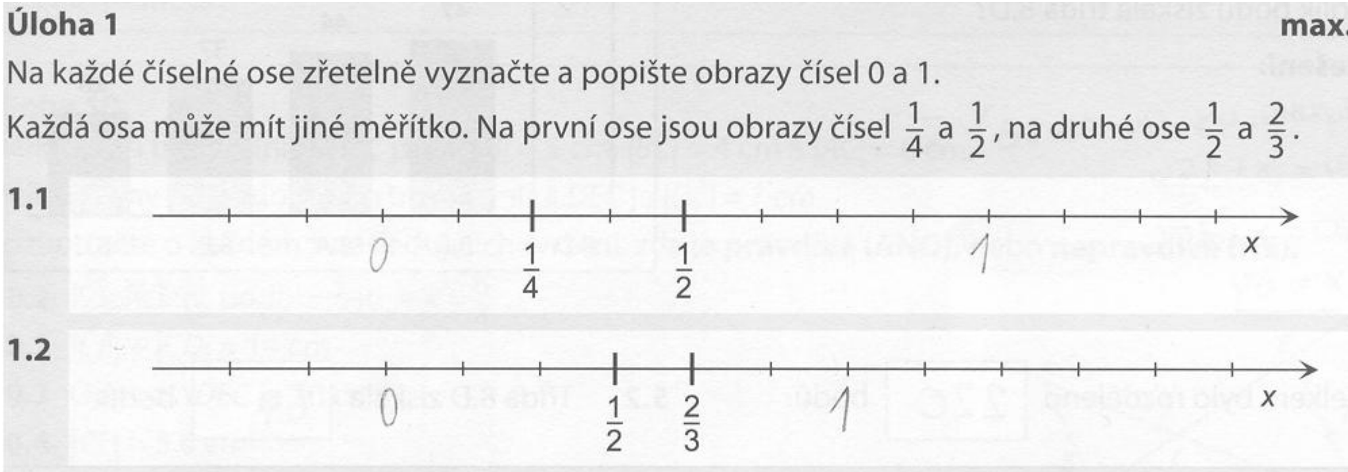
Největší díl **zodpovědnosti** za vzdělávání nesou na svých bedrech **učitelé**. Zejména na základních školách musí překonávat řadu problémů. Např. výuku matematiky zatěžuje nesourodá skladba žáků od talentovaných přes průměrné až po dyslektiky. Ani moderní metody výuky nedokáží vyvážit např. handicap způsobený snižováním počtu hodin matematiky. Na většině škol byly zrušeny půlené hodiny. Učitelé podléhají nejrůznějším tlakům společnosti počínaje rodiči. Snižuje se zájem o studium na pedagogických fakultách a učitelské sbory na základních školách začínají prokvétat důchodci a neaprobovanými učiteli. To vše se odrazí ve výsledcích žáků. Samotné testy problémy neodstraní, ale pomohou je rychleji odhalit.

Vývoj zaznamenaný v testech

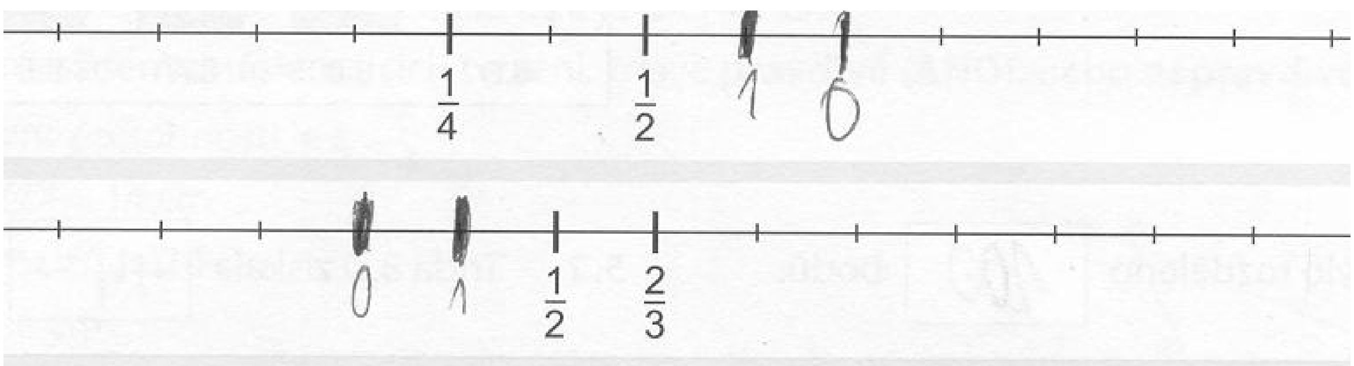
Již pátým rokem provádí CERMAT testování v rámci programu Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. V některých odborných kruzích se uvádí, že testování může být škodlivé, neboť žáci se budou učit na testy, což zabrání kýžené tvořivé atmosféře a svobodnému rozhodování při vyučování. V testech CERMATu se kontroluje míra zvládnutí základního učiva, které by se mělo vyučovat na všech školách. Závěrečné testy nediktují ani metody práce, ani časový sled probírané látky. Pouze rozpoznávají, bylo-li učivo vůbec probíráno a s jakou účinností se uplatnily zvolené metody ve výuce. Vývoj v předchozích čtyřech letech spíše naznačuje, že závěrečné testy by mohly učitelům pomoci motivovat žáky v úsilí osvojit si ve škole potřebné vědomosti.

Rok	Téma: procenta	Úspěšnost
2004	O kolik procent musíme zvýšit částku 1600 Kč, abychom dostali 2160 Kč? A) o 135 % B) o 74 % C o 35 % D) o 26 %	38,5 % (vynechalo 22,6 % žáků)
2005	Po zdražení o 5 % jsme platili 525 Kč. Jaká byla cena nákupu (c) před zdražením?	43 % (vynechalo 19 % žáků)
2006	Po zlevnění jízdného o 40 % cestující zaplatí 48 korun. Kolik korun by stála jízdenka bez slevy?	45,2 % (vynechalo 23 % žáků)
2007	40 % ze 60 mincí je mincí. 40 % ze ....mincí je 60 mincí. 40 mincí je ....% ze 160 mincí.	66,5 % (vynechalo 0 % žáků)

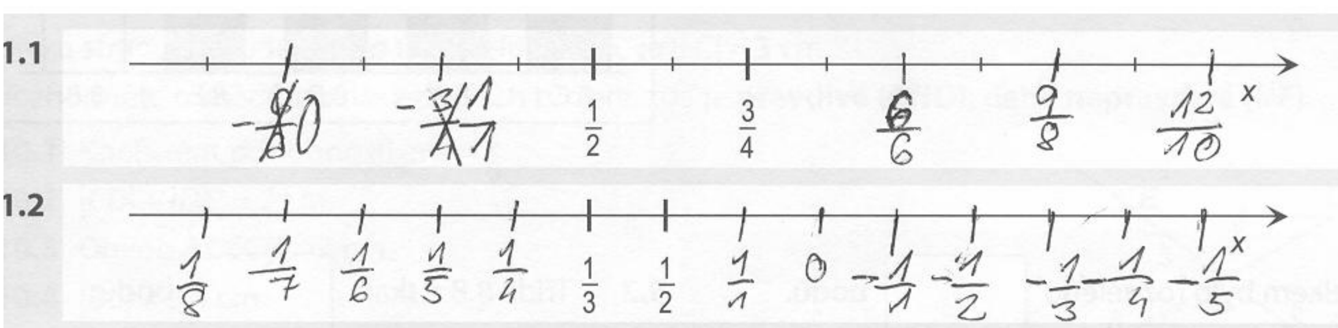
Základním předpokladem pro úspěšné zvládnutí testu by mělo být pochopení a osvojení učiva probíraného ve škole. Určitě není vhodným prostředkem bezhlavé nacvičování typových úloh z předchozích let či testů z internetu, jak dokládá ukázka žákovských řešení z letošního testování.



Další řešení dokládá, že žák nemá tušení, že čísla na číselné ose jsou uspořádána.



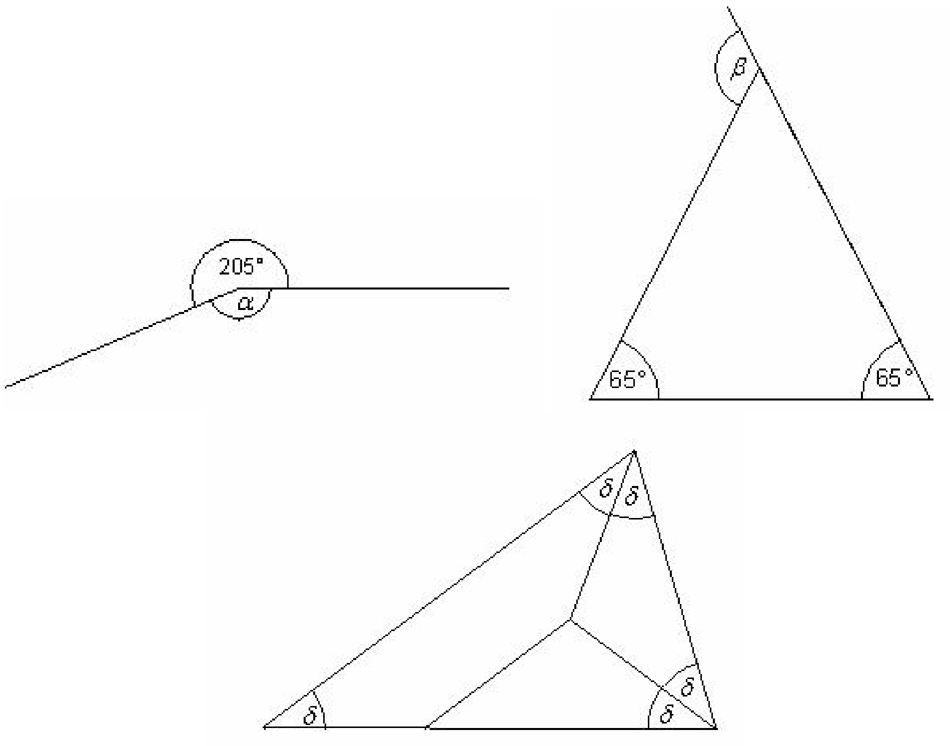
Následující řešení ukazuje, že ačkoliv žák při matematice nepronikl do tajů číselné osy, určitě se před testováním seznámil s číselnými řadami, které bývají používány v logických testech.



GEOMETRIE JE NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE POPELKOU

Následující geometrická úloha z testování v r. 2007 dokládá, že mnozí žáci nezvládají základní geometrické učivo. Úloha měla nejvyšší hodnotu korelace s výsledkem v testu.

Úloha 2. Vypočtěte úhly α, β, γ.

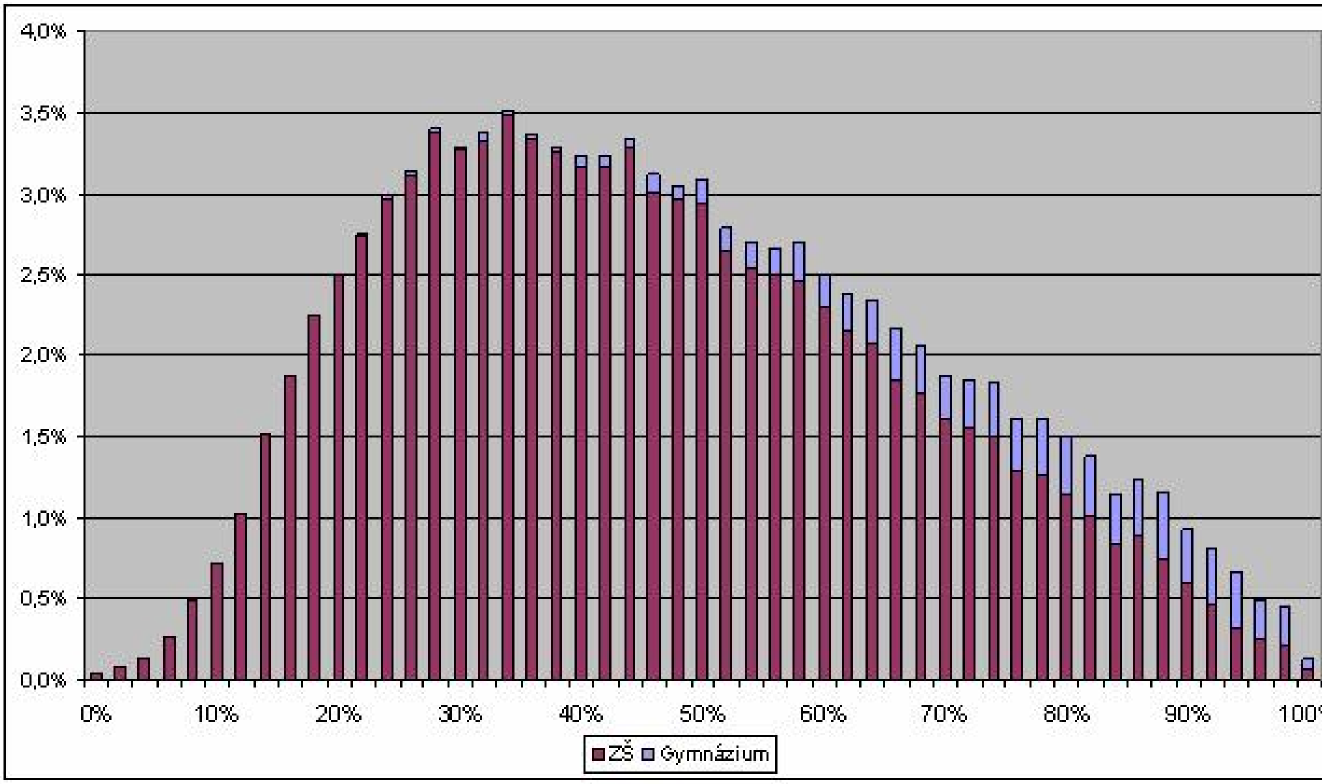


Úspěšnost v %		ZŠ	Víceletá gymnázia
		48,4	65
Počet správných odpovědí v %	0	23	
	1	29	
	2	28	
	3	20	49

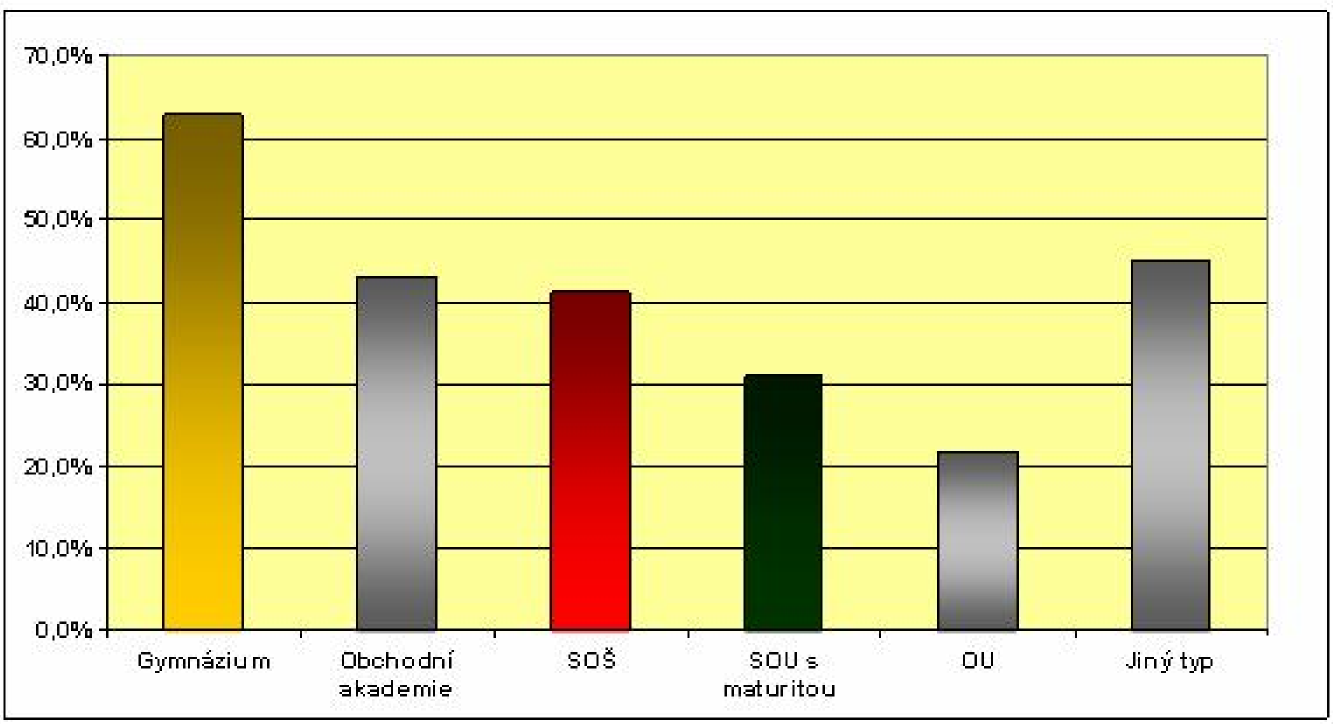
Více než polovina žáků neumí dopočítat velikost úhlu v trojúhelníku. Naopak 20 % dětí, které si poradí se všemi úlohami, se při výuce musí podřídit tempu slabých spolužáků. Na víceletých gymnáziích patří ke schopným řešitelům (75% úspěšnost v testu) méně než polovina třídy.

POROVNÁNÍ ÚSPĚŠNOSTI PATNÁCTILETÝCH ŽÁKŮ PODLE TYPU ŠKOLY, KTEROU NAVŠTĚVUJÍ

Z následujícího grafu je patrné, že většina žáků víceletých gymnázií by patřila k lepší polovině třídy ZŠ. Naopak třetina až polovina základoškoláků by pravděpodobně zvládla výuku matematiky na víceletých gymnáziích. Vesměs však mají veliký handicap v tom, že výuku matematiky ve třídách ZŠ brzdí druhá část velmi slabých studentů.



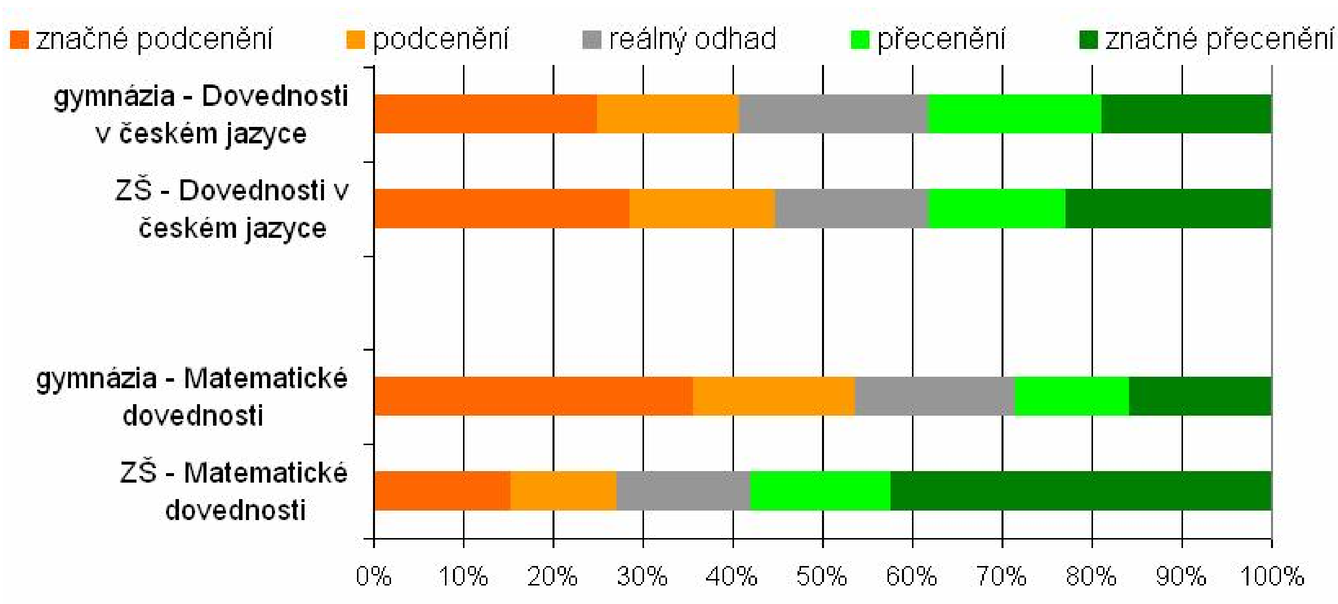
ÚSPĚŠNOST ŽÁKŮ V TESTU PODLE TYPU ŠKOLY, NA NIŽ SE HLÁSÍ



Žáci, kteří se hlásí na gymnázia, mají v testech téměř srovnatelné výsledky se studenty víceletých gymnázií. Je třeba dodat, že se jedná o základní učivo. Na gymnáziu tyto žáky čeká větší krajíc než kolegy z 8letých gymnázií, jejichž dosavadní výuka byla určitě efektivnější. Ostatní středoškoláci si odnášejí ze ZŠ velmi chatrné znalosti v matematice.

VYBRÁNO Z VÝSLEDKŮ – SEBEHODNOCENÍ ŽÁKŮ

Testování CERMATu přináší ještě řadu dalších zajímavých informací. V následujícím grafu jsou vidět rozdíly v sebehodnocení žáků na ZŠ a ve víceletém gymnáziu v matematice a v českém jazyce. Překvapivé je zejména výraznější podceňování žáků v matematice ve víceletých gymnáziích.



ZÁVĚR

V posledních pěti letech provedl CERMAT rozsáhlá a významná zjištění ve výsledcích vzdělávání na českých základních a středních školách a získal řadu zkušeností v oblasti testování. MŠMT stojí před zkouškou, zda dokáže nabízených informací využít ku prospěchu naší vzdělávací soustavy.

LITERATURA

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Prométheus, Praha 1993.

[2] Horenský, R., Rys, P., Zhouf, J., Molnár, J. *Počítejte s Klokanem 1995–1999, kategorie Junior*. Prodos, Olomouc, 2001.

[3] Hrubý, D., Kuřina, F., Vopěnka, P.: O matematice a jejím vyučování. *Pokroky matematiky fyziky a astronomie*, 4, 2008, s. 330–342.

[4] Chrástka, M.: *Didaktické testy*. Paido, edice pedagogické literatury, Brno 1999.

[5] La Sala, Z.: Je testování páťáků a deváťáků minulostí? *Týdeník školství*, 17, 2007, s 2.

[6] Straková, J.: *Vědomosti a dovednosti pro život*. ÚIV, Praha 2002.

[7] *Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání*. VÚP, Praha 2004.

[8] Řídká, E.: Srovnatelnost testů. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2007*. (ed. Zhouf, J.), Praha: Pedagogická fakulta UK, 2007, s. 168–178.

Dostal žák správnou známku? aneb Pojednání o průměrech

Jaroslav Zhouf[1]

Abstrakt: *Článek se zabývá několika typy průměrů počítaných ze zadaných hodnot. Každý průměr je dokumentován nějakou školskou úlohou, aby byla zdůvodněna využitelnost této teorie ve škole. Důraz je přitom kladen na úlohy ze základní školy, jsou však ukázány i úlohy ze střední školy a z matematické olympiády. Na závěr článku se objevuje úvaha, zda výpočet průměrné známky pomocí aritmetického průměru je ten nejsprávnější postup. Závěrečné zamyšlení má pomoci učitelům při rozhodování, jakou metodu celkového hodnocení žáka mají použít.*

Úvod

Tento článek se zabývá řešením situací, kde se užívá aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, kvadratický průměr atd., a to z pohledu matematického, hlavně však z pohledu didaktického.

Článek vznikl jako reakce na mou dlouholetou zkušenost s počítáním průměrných hodnot z několika zadaných hodnot lidmi, kteří už jsou mimo školu, ale i žáky ve škole, a dokonce i učiteli, kteří by měli tuto problematiku žáky učit. Mám v paměti případ, kdy kolegyně matematičky byly svým kolegou elektrikářem požádány, aby žákům vysvětlily pojem „harmonický průměr“, aby mohl být použit v uvedeném oboru. Kolega neuspěl, a tak jsem si řekl, že se trochu více budu zajímat, jak je to v mém okolí se znalostí počítání průměrných hodnot. Zjišťoval jsem tuto znalost i mezi našimi studenty na katedře a jen málokdo věděl, na co se ptám.

[1] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Ptám se žáků a studentů: „Počítali jste někdy ve škole nebo v životě aritmetický průměr několika hodnot?“ Odpověď zní „ano“. Tak se dále ptám: „A počítali jste někdy geometrický či harmonický či kvadratický průměr několika hodnot?“ To už téměř nikdo neví. Ptám se i kolegů: „Řešíte ve škole úlohy na využití aritmetického či geometrického či harmonického či kvadratického průměru?“ Odpověď na aritmetický průměr je pozitivní, ale na ostatní průměry bývá téměř vždy negativní. A jak je to ve skutečnosti, počítají nebo nepočítají takové úlohy? Na to existuje krátká odpověď. „Ano.“ Mám zkušenost, že žáci při přijímacích zkouškách na střední školu (a to dokonce do tříd se zaměřením na matematiku) počítají *průměrnou rychlost auta, které jede z místa A do místa B stálou rychlostí* 80 *km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí* 120 *km/h, za oba úseky dohromady jako* $(80+120)/2$ *km/h* $=100$ *km/h.* Nebo když počítají *délku hrany průměrné krychlové krabice, která má stejný objem jako soubor krychlových krabic s hranami délek* 10 *cm,* 20 *cm,* 60 *cm,* 60 *cm,* 70 *cm,* 80 *cm, jako* $(10+20+60+60+70+80)/6$ *cm* $=50$ *cm.* A stejně tak se chovají i mnozí dospělí, učitele nevyjímaje. A tady právě vidím dluh nás učitelů vůči mladým lidem.

Ve škole existuje řada úloh, kde počítáme nějaký průměr ze zadaných hodnot, např. „Vypočtěte průměrnou hodnotu z čísel 80 a 120.“ a míníme tím aritmetický průměr těchto dvou hodnot. Ve většině případů ale nezní úkol „Vypočtěte průměrnou hodnotu...“, nýbrž opisuje se to jinými slovy, např. „Jaká je délka hrany krabice, která má stejný objem jako šest krabic se zadanými délkami hran?“ Ono to je správně v učebnicích napsáno, ale tím, jak se nemluví o průměrné hodnotě, tak v okamžiku, kdy se zeptáme na průměrnou hodnotu (viz např. úloha výše na výpočet průměrné rychlosti), použije se jen jediný vzorec na výpočet aritmetického průměru. Kdybychom ale používali častěji otázku „Vypočtěte průměrnou hodnotu...“, tak by se žáci více zamysleli, jaký vzorec to mají vlastně použít. A tím by se předešlo mnoha chybným výpočtům.

Možná to je nadbytečná informace znát všechny možné termíny, není však nadbytečné umět správně počítat průměrné hodnoty z několika zadaných hodnot. Dále se tedy zaměřím na různé způsoby počítání průměrných hodnot. Na příkladech ukážu, že při různém počítání průměrných hodnot vycházejí různé výsledky. Tady předesílám a dále ukážu, že ale není jedno, jaký způsob výpočtu průměrné hodnoty použiji, že je vše dáno logikou věci a přírodními zákonitostmi.

Vše budu směrovat k základní škole, ale ukážu i příklady ze střední školy a i příklady obtížnější, jako jsou např. úlohy z matematické olympiády.

ÚLOHY NA ÚROVNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY NA VÝPOČET PRŮMĚRNÝCH HODNOT

Nejprve uveďme úlohy, se kterými se setkáváme na základní škole.

Úloha 1: Vypočtěte průměrnou známku, jestliže žák dostal postupně známky 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, které mají stejnou váhu.

Řešení: Průměrná známka je

$$p = \frac{2+2+2+2+3+3+3+4+5}{9} = 3.$$

Úloha 2: Vypočtěte průměrnou rychlost *p* automobilu na celé své dráze, jestliže první hodinu jel rychlostí $a = 80$ km/h a druhou hodinu jel rychlostí $b = 120$ km/h.

Řešení: Průměrná rychlost se počítá jako podíl celkově ujeté dráhy a celé doby jízdy. V našem případě to je

$$p = \frac{a+b}{2} = \frac{80+120}{2}\ \text{km/h} = 100\ \text{km/h}.$$

Počítali jsme podle vzorce

$$A(a,b) = p = \frac{a+b}{2},$$

čemuž se říká *aritmetický průměr čísel* a, b. Označili jsme ho $A(a,b)$.

Úloha 3: Určete průměrnou rychlost automobilu, který jede z místa *A* do místa *B* stálou rychlostí $a = 80$ km/h a zpět z místa *B* do místa *A* stálou rychlostí $b = 120$ km/h.

Řešení: Je-li s vzdálenost mezi místy *A*, *B*, dále *t* doba jízdy z *A* do *B* a *u* doba jízdy z *B* do *A*, je průměrná rychlost rovna

$$p = \frac{2s}{t+u} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}\text{km/h} = 96\text{km/h}.$$

Vidíme, že tato hodnota je menší než v předchozím případě. Počítali jsme podle vzorce

$$H(a,b) = p = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

čemuž se říká *harmonický průměr čísel a, b*. Označili jsme ho $H(a,b)$.

Úloha 4: Tři Popelky přebírají hromadu hrachu. První Popelka by ho přebrala za $a = 2$ hodiny, druhá za $b = 3$ hodiny a třetí za $c = 6$ hodin. Za jak dlouho by přebrala hromadu „průměrná Popelka“?

Řešení: První Popelka přebere za jednu hodinu $\frac{1}{2}$ hromady hrachu, druhá $\frac{1}{3}$ hromady a třetí $\frac{1}{6}$ hromady. Celkem tedy za jednu hodinu přeberou všechny tři $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ hromady. Jelikož Popelky jsou tři, budou přebírat tři hromady a bude jim to trvat průměrnou dobu

$$p = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\ \text{hodiny} = 3\ \text{hodiny}.$$

Opět je to harmonický průměr, tentokrát ze tří čísel:

$$H(a,b,c) = p = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$$

Úloha 5: Obdélník má rozměry $a = 2$ cm, $b = 8$ cm. Jaké rozměry má čtverec stejného obsahu jako obdélník, tj. jak se musí „zprůměrovat“ hodnoty *a, b*?

Řešení: Je-li *p* strana čtverce, platí

$$p^2 = ab,$$

$$p = \sqrt{ab} = \sqrt{2\cdot 8}\ \text{cm} = 4\ \text{cm}.$$

Je to méně, než kdybychom spočítali aritmetický průměr čísel *a, b*. Počítali jsme podle vzorce

$$G(a,b) = p = \sqrt{ab},$$

čemuž se říká *geometrický průměr čísel a, b.* Označili jsme ho $G(a,b)$.

Úloha 6: Kvádr má rozměry *a, b, c*. Jaké rozměry má krychle stejného objemu jako kvádr, tj. jak se musí „zprůměrovat“ hodnoty *a, b, c*?

Řešení: Hrana hledané krychle je

$$G(a,b,c) = p = \sqrt[3]{abc},$$

což je geometrický průměr čísel *a, b, c*.

Úloha 7: V posledních třech letech byla úrodnost osiva, tj. číslo udávající, kolikrát více se sklidilo, než zaselo, rovna 25, 30, 36. Jaká byla průměrná úrodnost v těchto třech letech?

Řešení: V prvním roce se z jednoho metrického centu získalo 25 metrických centů, z nich se pak získalo $25\cdot 30$ metrických centů a z nich se nakonec získalo $25\cdot 30\cdot 36$ metrických centů. Při počítání průměrné úrodnosti p se prvním rokem získalo z jednoho metrického centu *p* metrických centů, z nich pak p^2 metrických centů a z nich p^3 metrických centů. Porovnáním obou hodnot dostaneme průměrnou hodnotu

$$p = \sqrt[3]{25\cdot 30\cdot 36} = 30,$$

a nikoli $(25+30+36)/3 = 30,333\ldots$

Úloha 8: Určete délku *p* strany dvou průměrných čtverců, které zaberou stejnou plochu jako čtverce o délkách stran $a = 10$ cm a $b = 70$ cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o čtvercových polích.)

Řešení: Má platit

$$2p^2 = a^2 + b^2,$$

$$p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2 + 70^2}{2}} = 50 \text{ (cm)}.$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$Q(a, b) = p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

což je *kvadratický průměr čísel a, b*. Označili jsme ho $Q(a, b)$.

Úloha 9: Určete délku p hrany šesti průměrných krychlí, které zaberou stejný objem jako krychle o délkách hran $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $c = 60$ cm, $d = 60$ cm, $e = 70$ cm a $f = 80$ cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o krychlových nádobách nebo kopání jam, kde každý den vykopeme jednu jámu a ptáme se na průměrnou jámu.)

Řešení: Má platit

$$6p^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3,$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3}{6}} = \sqrt{\frac{10^3 + 20^3 + 60^3 + 60^3 + 70^3 + 80^3}{6}} = 60 \text{ (cm)}.$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$C(a, b, c, d, e, f) = p = \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3}{6}}$$

což je *kubický průměr čísel a, b, c, d, e, f*. Označili jsme ho $C(a, b, c, d, e, f)$.

ÚLOHY NA ROZHRANÍ ZÁKLADNÍ A STŘEDNÍ ŠKOLY NA VÝPOČET PRŮMĚRNÝCH HODNOT

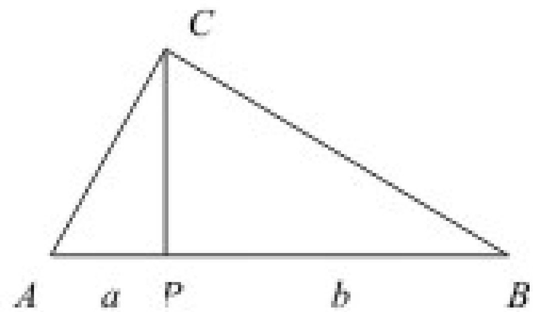
Následující úlohy sice obsahem patří na střední školu, svojí obtížností by ale mohly být probírány i na škole základní.

Úloha 10: Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky $p = \sqrt{6}$.

Řešení: Můžeme psát

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{1 \cdot 6} = \sqrt{4 \cdot 1,5} = \dots,$$

což znamená, že číslo $\sqrt{6}$ je geometrickým průměrem čísel 2 a 3, nebo 1 a 6, nebo 4 a 1,5 atd. Na sestrojení této úsečky pomocí dvou zadaných úseček nám může posloužit např. Euklidova věta o výšce. Její odvození je jednoduché i pro žáky základní školy. Na obr. 1 je pravoúhlý trojúhelník *ABC* svojí výškou *CP* rozdělen na dva podobné trojúhelníky *ACP* a *CBP*, pro něž platí $\frac{p}{a} = \frac{b}{p}$, neboli $p = \sqrt{ab}$. Sestojíme tedy úsečku délky $a + b$ a nad ní jako nad průměrem Thaletovu kružnici. V bodě *P* vztyčená kolmice protne kružnici v bodě *C*, čímž získáme úsečku délky p. Na obr. 1 je $a = 1,5$ cm, $b = 4$ cm.



Obr. 1

Úloha 11: Vážíme maso na nerovnoramenných vahách. Nejprve ho položíme na levou misku vah a vyvážíme závažím o hmotnosti $a = 2,25$ kg. Pak ho položíme na pravou misku vah a vyvážíme závažím o hmotnosti $b = 1,44$ kg. Kolik váží maso skutečně, tj. jaká je průměrná hmotnost masa vypočtená z navážených hmotností?

Řešení: K řešení využijeme rovnováhy na dvojzvratné páce. Má-li levé rameno vah délku *u* a pravé rameno délku *v* (obr. 2) a skutečná (průměrná) hmotnost masa je *p* kg, můžeme psát:

$$pu = 2,25v$$

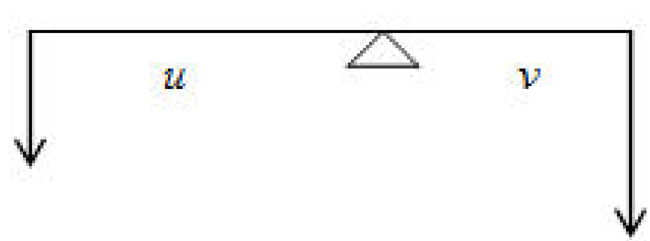
$$pv = 1,44u$$

Vynásobením obou rovnic a následnou úpravou dostaneme

$$p^2uv = 2,25 \cdot 1,44uv,$$

$$p = \sqrt{2,25 \cdot 1,44}\,\mathrm{kg} = 1,5 \cdot 1,2\,\mathrm{kg} = 1,8\,\mathrm{kg}.$$

Skutečná hmotnost masa je $1,8$ kg. Počítáme-li to pomocí aritmetického průměru, tak si myslíme, že jsme koupili $1,845$ kg masa, což je pouhý psychologický moment.



Obr. 2

ÚLOHY NA ÚROVNI STŘEDNÍ ŠKOLY NA VÝPOČET PRŮMĚRNÝCH HODNOT

Přidejme ještě aspoň jednu úlohu z oblasti, která se v každém případě probírá až na střední škole.

Úloha 12: Odvoďte vzorec pro střední kvadratickou rychlost molekul plynu.

Řešení: Označme n počet molekul plynu v uvažovaném souboru, m hmotnost jedné molekuly plynu, v_1, v_2, $\ldots$,v_n skutečné rychlosti jednotlivých molekul, v průměrnou rychlost všech těchto molekul. Pro skutečné a průměrnou kinetickou energii molekul souboru platí

$$n \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}mv_n^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}{n}},$$

což je *kvadratický průměr rychlostí* jednotlivých molekul.

Přehled jednotlivých průměrů

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s několika způsoby, jak se vypočítává průměrná hodnota z několika zadaných hodnot. Proveďme rekapitulaci těchto poznatků a přidejme ještě další informace na toto téma. Průměry uvedené výše byly počítány většinou jen ze dvou nebo tří hodnot, nyní tyto vzorce zobecníme na libovolný počet hodnot. Počet hodnot označme n a jednotlivé kladné hodnoty označme a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Zatím jsme se seznámili s těmito průměry:

Aritmetický průměr	$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$
Harmonický průměr	$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$
Geometrický průměr	$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$
Kvadratický průměr	$Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$
Kubický průměr	$C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[3]{\dfrac{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}{n}}$

Kromě těchto průměrů existuje nekonečně mnoho dalších. Jen pro zajímavost uveďme ještě další příklady průměrů, které však nemají ve školské matematice uplatnění (kromě úloh matematické olympiády); poslední dva platí jen pro dvě hodnoty:

Harmonicko-kvadratický průměr	$HQ(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\dfrac{n}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}}$
Kontraharmonický průměr	$KH(a, b) = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$
Logaritmický průměr	$L(a, b) = \dfrac{b - a}{\ln b - \ln a}, a \neq b$

Prvních šest uvedených průměrných hodnot se dá napsat jednou společnou formulí:

$$\overline{a_k} = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}}$$

Pro $k = -2$ jde o harmonicko-kvadratický průměr, pro $k = -1$ jde o harmonický průměr, pro $k \to 0$ jde o geometrický průměr, pro $k = 1$ jde o aritmetický průměr, pro $k = 2$ jde o kvadratický průměr a pro $k = 3$ jde o kubický průměr.

V případě vážených průměrů má formule tvar

$$\overline{a_k} = \sqrt[k]{\frac{m_1 a_1^k + m_2 a_2^k + \cdots + m_n a_n^k}{n}},$$

kde m_1 je četnost výskytu hodnoty a_1, m_2 je četnost výskytu hodnoty a_2 atd.

Vztahy mezi průměry

Mezi uvedenými, ale i mezi těmi ostatními, průměry platí celá řada vztahů. Nejčastější z nich jsou nerovnosti mezi nimi. A z nich je asi nejznámější tzv. *AG-nerovnost*, která má pro libovolné kladné hodnoty a, b tvar (jak jsme viděli na výše na konkrétním případě)

$$G(a, b) \leq A(a, b),$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

a pro n hodnot má tvar

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

Rovnost v těchto nerovnostech platí, právě když se všechny průměrované hodnoty rovnají. Důkaz pro dvě hodnoty vypadá např. takto (používáme ekvivalentní úpravy):

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Pro n hodnot se dá využít matematické indukce.

Analogicky by se dokazovaly další nerovnosti, takže bychom pro dvě kladné hodnoty a, b dostali:

$Min\,(a,b) \leq HQ\,(a,b) \leq H\,(a,b) \leq G\,(a,b) \leq A\,(a,b) \leq Q\,(a,b) \leq C\,(a,b) \leq$
$\leq KH\,(a,b) \leq Max\,(a,b)$

$Min\,(a,b) \leq \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq Max\,(a,b)$

Navíc pro logaritmický průměr platí

$$G\,(a,b) \leq L\,(a,b) \leq A\,(a,b)\,,$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Podle výše uvedeného označení můžeme psát nerovnosti

$$\dots \leq \overline{a_{-2}} \leq \overline{a_{-1}} \leq \overline{a_0} \leq \overline{a_1} \leq \overline{a_2} \leq \overline{a_3} \leq \dots$$

Také platí několik zajímavých rovností:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

(geometrický průměr dvou čísel je roven geometrickému průměru jejich harmonického a aritmetického průměru)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

(kvadratický průměr dvou čísel je roven geometrickému průměru jejich kontraharmonického a aritmetického průměru)

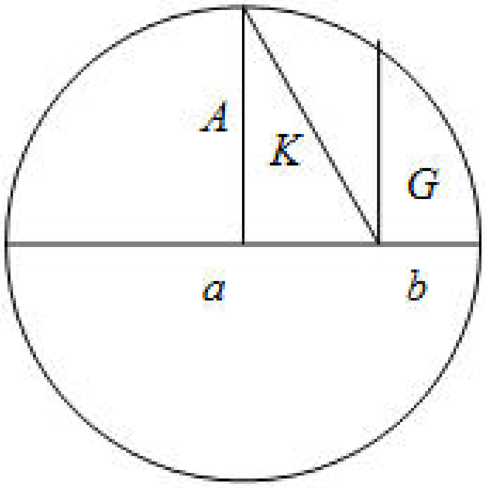
$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$$

(aritmetický průměr dvou čísel je roven aritmetickému průměru jejich harmonického a kontraharmonického průměru)

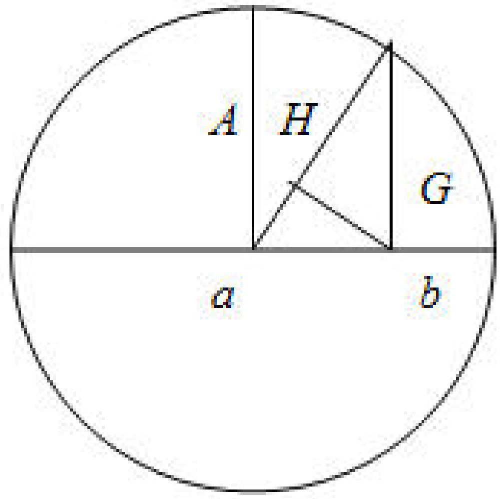
$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\right]}$$

(aritmetický průměr dvou čísel je roven kvadratickému průměru jejich geometrického a kvadratického průměru)

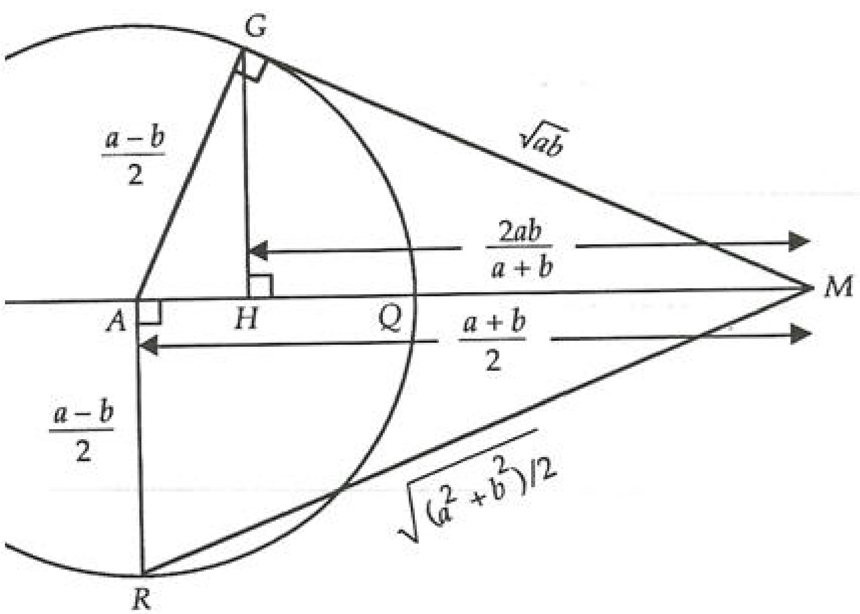
Důkazy těchto nerovností se dají také provést graficky „beze slov“ (obr. 3, obr. 4 a obr. 5).



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Těchto nerovností se dá využít při důkazech některých tvrzení, které spíše spadají do matematické olympiády.

Úloha 13: Dokažte, že pro kladná čísla a, b, c platí

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 9abc.$$

Řešení: Dokazovanou nerovnost získáme, pokud vynásobíme nerovnosti:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Úloha 14: Ze všech pravoúhelníků o daném obvodu o najděte ten, který má největší možný obsah.

Řešení: Označme a, b délky stran hledaného pravoúhelníku a S jeho obsah. Platí

$$\sqrt{S} = \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{o}{4} = \text{konstanta.}$$

Obsah S bude největší, právě když bude $a = b$, tj. když to bude čtverec.

Úloha 15: Navrhněte rozměry krabice ve tvaru kvádru, aby měla předepsaný objem V a aby se spotřebovalo co nejméně materiálu, jestliže neuvažujeme žádný materiál na překrývání kvůli přelepování.

Řešení: Označme a, b, c délky hran hledaného kvádru, V jeho objem a P jeho povrch. Platí

$$\frac{P}{6} = \frac{ab+bc+ca}{3} \leq \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{V^2} = konstanta.$$

Povrch P bude nejmenší, právě když bude $ab = bc = ca$, tj. právě když bude $a = b = c$, tj. když to bude krychle.

V matematické olympiádě pro rok 2008/2009 bude úloha, v níž jsou opět nerovnosti mezi průměry. Prostřední průměr ale nemá název. Úlohu zde řešit nebudeme, protože bude předmětem soutěže v příštím školním roce.

Úloha 16: Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnosti

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\,(a+b)} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

a že rovnost nastane, právě když $a = b$.

Medián a modus

Ještě bychom neměli zapomenout na dvě průměrné hodnoty, medián a modus. Nejprve n uvažovaných hodnot srovnáme podle velikosti $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Medián $\tilde{a}$ těchto hodnot je číslo s indexem $\frac{n+1}{2}$ pro n liché a aritmetický průměr čísel s indexy $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2}+1$ pro n sudé.

Modus $\hat{a}$ těchto hodnot je číslo, které se mezi uvažovanými hodnotami vyskytuje nejčastěji.

Jak vypočítat průměrnou známku z předmětu

Teď se dostáváme ke klíčové otázce celého článku, a sice jak bychom měli správně vypočítat výslednou známku z předmětu z několika daných známek. Viděli jsme, že máme nepřeberné množství možností, jak to udělat. A který průměr si tedy máme zvolit?

Zkusme nejprve spočítat průměrnou známku ze dvou známek pomocí různých průměrů. Řekněme, že žák dostal dvě známky, a sice 1 a 5. V tom případě jsou hodnoty průměrů:

$$HQ\,(1;5) = \sqrt{\frac{2\cdot 1^2\cdot 5^2}{1^2+5^2}} \doteq 1{,}387$$

$$H\,(1;5) = \frac{2\cdot 1\cdot 5}{1+5} \doteq 1{,}667$$

$$G\,(1;5) = \sqrt{1\cdot 5} \doteq 2{,}236$$

$$A\,(1;5) = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$\frac{2\left(1^2+1\cdot 5+5^2\right)}{3\,(1+5)} \doteq 3{,}444$$

$$Q\,(1;5) = \sqrt{\frac{1^2+5^2}{2}} \doteq 3{,}306$$

$$C\,(1;5) = \sqrt[3]{\frac{1^3+5^3}{2}} \doteq 3{,}979$$

$$KH\,(1;5) = \frac{1^2+5^2}{1+5} \doteq 4{,}333$$

$$\sqrt[7]{\frac{1^7+5^7}{2}} \doteq 4{,}527$$

Vypočtené hodnoty potvrzují výše uvedené nerovnosti. Důležité je uvědomit si, že průměrná hodnota musí ležet mezi čísly 1 a 5, nemusí však být uprostřed. Hlavně však je vidět, že by žák mohl dostat jakoukoli známku od 1 do 5. Tady nás určitě napadne otázka, jaký výpočet bychom měli používat, která z vypočtených hodnot představuje tu správnou známku.

Dvě zcela odlišné známky je krajní případ, který asi nenastane, vypočtěme tedy ještě ve dvou reálnějších případech několik průměrů známek. Mějme přitom na paměti, že známky mají stejnou váhu. Pokud by tomu tak nebylo, počítali bychom příslušnou známku vícekrát. Vždy si přitom uvědomme, že každý vypočtený průměr musí ležet mezi nejmenší a největší získanou známkou. Nejprve výpočet proveďme pro skupinu známek 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5. Zde jsou některé průměry rovny:

$$A\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 2{,}6$$

$$G\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 1{,}904$$
$$H\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 1{,}471$$
$$Q\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 3{,}256$$
$$Q\,(1;1;1;1;1;5;5;5;5;5) = 3{,}606 \quad \text{(pozor, místo 1 je 5)}$$
$$\tilde{a}\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 1$$
$$\hat{a}\,(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5) = 1$$

A totéž proveďme pro skupinu známek 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5. Pak jsou tyto průměry rovny:

$$A\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) = 3$$
$$G\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 2{,}806$$
$$H\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 2{,}647$$
$$Q\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 3{,}180$$
$$\tilde{a}\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) = 3$$
$$\hat{a}\,(2;2;2;2;3;3;3;5;5) = 2$$

Při větším počtu známek a jejich rovnoměrnějším rozdělení už rozdíly nejsou tak veliké, takže je téměř jedno, podle jakého průměru známku počítáme. Když bychom se ale rozhodli pro medián nebo modus, mohli bychom se dopustit asi největší odchylky.

I přes tento víceméně pozitivní závěr z výpočtů různých průměrů se přiznám, že vůbec nevím, proč se nejčastěji počítá známka jako aritmetický průměr obdržených známek. Klidně si dovedu představit, že si známku znázorním v zápisníku jako čtvereček o straně délky, která je rovna obdržené známce. Na závěr si pak udělám čtverec, který má obsah stejný jako součet obsahů všech dílčích čtverečků, čímž vlastně použiji kvadratický průměr. Též si umím představit, že známka bude představovat počet hodin, za které žák stihne udělat celkovou práci. Pak je to převedeno na úlohu o Popelkách a k výpočtu průměrné známky se použije harmonický průměr.

Takže znovu opakuji, že nevím, proč se používá aritmetický průměr k výpočtu průměrné známky. Jediný důvod dle mého je snad jeho jednoduchý výpočet. A možná i jeho tradiční používání (a to je opět asi kvůli jeho jednoduchosti).

Význam článku neboli závěr

Dám-li otázku, k čemu je tento článek dobrý, tak si umím představit, co mi někdo odpoví. Já si však myslím, že článek měl upozornit na to, že bychom měli ve škole používat termíny „geometrický průměr“, „harmonický průměr“ atd. a ne jen „průměr“, aby, když mají žáci průměrnou hodnotu vypočítat, použili ten správný vzorec a nenasadili na výpočet jen aritmetický průměr.

Článek má tedy sloužit k zamyšlení, že není nic absolutní, tak jak nám to bylo někdy řečeno, ale máme se snažit uvažovat nad alternativními metodami uvažování. Co se týče konkrétně známkování, je vidět, že např. k aritmetickému průměru bychom měli přidat ještě komplexní pohled na žáka, tj. ohodnotit i odpozorované další schopnosti a možná i morální vlastnosti.

Literatura

[1] Bartsch, H. J., *Matematické vzorce*. Mladá fronta, Praha 2002.

[2] Nelsen, R. B., *Proofs without Words*. The Mathematical Association of America, Washington 1993.

Jednání v sekcích

CESTY KE ZLEPŠENÍ ŠKOLNÍ PRAXE

JANA CACHOVÁ[1]

Mnoho začínajících učitelů po nástupu do praxe pociťuje rozpor mezi tím, co se učili na vysoké škole, a tím, co po nich realita školní praxe požaduje. V tomto článku chci přiblížit své zkušenosti s výukou semináře didaktiky matematiky pro studenty učitelství pro primární vzdělávání na naší fakultě. Z vlastní zkušenosti mohu potvrdit, že i studenti učitelství po nástupu na průběžnou pedagogickou praxi přistupují daleko více kritičtěji než před praxí k náplni seminářů. Někteří studenti po prvních zkušenostech z praxe projevují svou nespokojenost – podle jejich názoru je didaktika matematiky málo připravuje pro školní práci.

Studentům jsem nechala prostor, aby vyslovili své návrhy, co by se mělo zlepšit:

- Více zařazovat různé didaktické hry;
- ukazovat, jak naučit novou látku, jak dětem srozumitelně látku vysvětlit, jak je něco naučit (např. jak naučit žáky zlomky; písemné dělení – jak to dětem přiblížit, jak je to naučit, jak je motivovat, jak je učit algoritmus. . .);
- sdělovat si zážitky z praxe; rozebírat praxe.

Podle Hejného a Stehlíkové (1999) je možné v didaktice matematiky rozlišit dva hlavní proudy, sice obsahově orientovanou didaktiku (zabývající se např. otázkami *jak seznámit žáky se zlomky, zápornými čísly, absolutní hodnotou, otočením?*) a procesně orientovanou didaktiku (klade si např. otázky *jak rozvíjet matematickou kulturu žáka, proč někteří žáci nejsou schopni porozumět principu sčítání zlomků?*). Je vidět, že náměty studentů jsou spíše orientované na obsahovou didaktiku, přesto požadavek podrobného rozboru praxe je možné zařadit do kategorie procesně orientované didaktiky matematiky.

Srovnejme dva názory na otázku, ***co začínající učitel především potřebuje***:

- Názor studentky 4. ročníku na konci pedagogické praxe: *Opakování a procvičování není problém, jak ale docílit toho, aby žáci novému učivu porozuměli? Jak zajistit, aby si děti vytvořily správné představy?*
- Názor začínající učitelky (po roce praxe ve škole): *Jak dětem dobře vyložit novou látku? Jak ji vysvětlit, aby všichni pochopili? Jak dovést žáky ke skutečnému porozumění?*

[1]Katedra matematiky PdF UHK; jana.cachova@uhk.cz

Je vidět, že otázky správného porozumění, pochopení, vytváření správných představ patří k těm složitým a je zapotřebí na ně studenty připravovat. Přesně podle čínského přísloví: *Daruješ-li člověku rybu, nakrmíš ho na den, naučíš-li ho lovit, dáš mu potravu na celý život. . .* , je sice možné na seminářích dávat studentům ukázky toho, co se dá dělat a jak, ale není možné projít veškerá témata a studenti se musí naučit si sami hledat další cesty. Za nutné považuji ukazovat různé formy a metody práce ve vyučování na konkrétním učivu, ne bez matematického obsahu (didaktiku matematiky nelze zúžit na pedagogicko-didaktické principy, oproštěné od matematiky).

Podle Hejného a Michalcové (2001): *. . . objem didaktických poznatků, které posluchač s nepatrnými pedagogickými zkušenostmi může přijmout, je malý. . . . . . Didaktika matematiky však může naučit budoucího učitele metody získávání didaktických znalostí a zkušeností. Měla by ho důkladně připravit v oblasti metadidaktického poznání. . . (tj.) jak může učitel využívat svou každodenní zkušenost k získávání didaktického poznání, a v důsledku toho postupně zlepšovat svou vlastní práci. Měla by tedy v budoucím učiteli pěstovat chuť experimentovat, evidovat vlastní pedagogické zkušenosti a zkoumat je.*

Za jednu z možností, jak zlepšit vztah mezi semináři z didaktiky matematiky a školní praxí, považuji vést studenty k reflexi školní práce, k situačnímu výzkumu. Podle Slavíka (2004): *Reflexi spojenou s interpretací učebních situací můžeme pokládat za nejlepší způsob, jak rozvíjet profesní myšlení učitelů a jak ukazovat funkčnost didaktické teorie pro praxi. . .*

Reflexemi ve vyučování matematice se zabývají např. Tichá, Hošpesová (2008) a Stehlíková (2007), akčním výzkumem ve škole Nezvalová (2003). V rámci seminářů z didaktiky matematiky a jejich lepším propojením s praxí jsme se studenty začali zabývat sledováním školních situací. Studenti na začátku semestru dostali úkol – sledovat zajímavé situace v hodinách matematiky na praxi. Situace se mohou vázat k činnostem učitele, k žákovi, ke skupinkám žáků či celé třídě, k učivu, netradičním postupům, řešením úloh, k chybám. . . cokoli, co je na praxi zaujme a o čem je možné na semináři diskutovat (co v sobě skrývá nějaký problém, který je možné různě řešit). Studenti pak situaci přednesou na semináři – buď nechají otevřený konec, neukáží, jak situace dále probíhala, popř. svůj zásah do situace nebo vyústění situace odhalí. Pokud je odkryt obtížnější problém k zamyšlení, dostávají studenti cca 3 minuty na samostatné promyšlení – hledání vhodných cest, jak se zachovat, jak postupovat. Poté diskutují nad svými návrhy buď ve skupinkách, nebo všichni společně. Studenti většinou nalézali více variant, jak v dané situaci postupovat, měli o diskuzi zájem, diskutovaná problematika se jich skutečně dotýkala, často si uvědomovali, že mají podobné zkušenosti. Cílem této aktivity – *zvyšovat citlivost vůči jevům, kterým by měl učitel věnovat pozornost.*

PŘÍNOS PRO STUDENTY

Zprvu se studenti zaměřovali jen na některé situace, nyní je jevů, kterým přikládají význam, daleko více (učí se je vyhledávat, všímat si jich, reagovat na ně). Ačkoli by si sami podobné situace nevšimli nebo se s ní nesetkali, na semináři se dostává do jejich zorného pole. Na konci semestru byli studenti schopni na situace vhodně reagovat, zamýšlet se nad problémy.

Dobrý učitel musí umět najít rovnováhu mezi respektováním cílů školy, potřeb dítěte a specifikou vyučovaného předmětu (didaktikou matematiky). Učitel se může dále učit tím, že citlivě reaguje na situace, které přináší školní praxe, a zpětně se nad nimi zamýšlí.

Domnívám se, že takto mohou postupovat i učitelé na školách. Samostatně se zamýšlet nad situacemi z vlastní výuky. Z nich vybírat takové, které stojí za diskuzi. V malých skupinách (ve dvojici, popř. trojici) s kolegy – učiteli pak o vybraných situacích diskutovat. Důležité je ovšem najít na škole partnery pro takovou diskuzi. **Pokud se podaří efektivní diskuze na škole vést, určitě přispějí ke zlepšení samotné výuky.**

Literatura

[1] Hejný, M., Michalcová, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*, Metodické centrum Tomáškova 4, Bratislava, 2001

[2] Hejný, M., Stehlíková, N. *Číselné představy dětí*, PedF UK, Praha, 1999

[3] Nezvalová, D. Akční výzkum ve škole, *Pedagogika*, 53 (3), 2003

[4] Slavík, J. Profesionální reflexe a interpretace výuky jako prostředník mezi teorií a praxí, In *Konference Oborové didaktiky v pregraduálním učitelském studiu*, PdF MUNI, Brno, 2004

[5] Stehlíková, N. Videozáznamy ve vzdělávání (budoucích) učitelů matematiky. In Stehlíková, N. a Jirotková, D. *Dva dny s didaktikou matematiky 2007, sborník příspěvků*. Praha: PedF UK, 2007, 167–173.

[6] Tichá, M., Hošpesová, A. Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování?, In *Cesty zlepšování kultury vyučování matematice*, PdF JU, České Budějovice, 2008

Způsoby řešení vybraných úloh

Barbora Divišová[1]

Úvod

Jako učitele matematiky a milovníka geometrie mne velice mrzí, když se každodenně setkávám s nechutí studentů při hodinách geometrie a s nevolí řešit geometrické problémy.

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; divisova.barbora@post.cz

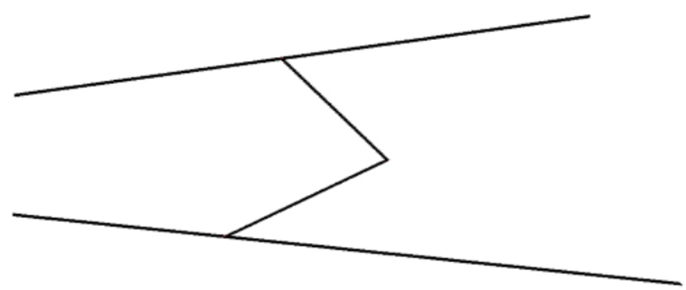
Mnohokrát jsem se se studenty bavila na téma geometrie i dělala nejrůznější dotazníky, abych zjistila, proč je nechuť ke geometrickým otázkám tak veliká. Studenti pod geometrií často chápou pouze dovednosti spojené s přesným rýsováním a nudné zapisování postupů konstrukce. Přitom tato část matematiky zahrnuje mnohem více zajímavých problémů. Právě úlohy, se kterými vás v tomto článku seznámím, rozvíjí i další geometrické úvahy a dovednosti. Nejen že se díky nim dá odhalit povaha a způsob myšlení studentů, ale také jejich pomocí mohou studenti najít cestu ke geometrii a prohloubit zájem o ni.

Úloha Ploty zahrad

S touto úlohou jsem se setkala na jednom z doktorandských seminářů, kde nám byla prezentována na videozáznamu hodina z japonské základní školy.

Zadání úlohy

Na obrázku 1 vidíte dva oplocené pozemky. Přestavte plot, který tyto dva pozemky odděluje tak, aby byl rovný (úsečka) a přitom se nezměnily velikosti ploch zahrad.

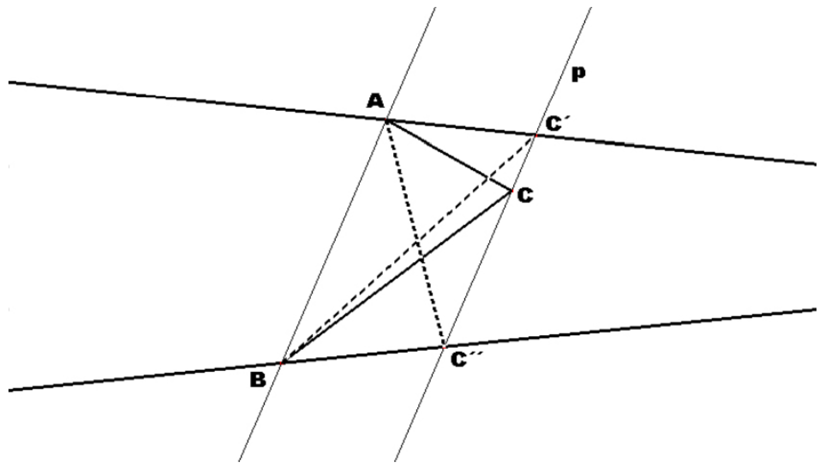


Obr. 1: Původní zadání úlohy

Správné řešení úlohy

Úlohu je možné řešit algebraicky. V tom případě by bylo ale nutné pracovat s obrázkem jako s plánem v daném měřítku, změřit jednotlivé strany zahrady a teprve pak s těmito daty pracovat. Takové řešení ale není příliš přesné a už vůbec ne obecné. Proto za správný a nejpřesnější způsob považuji řešení geometrické. To je navíc velice jednoduché a vychází ze znalosti vzorce o obsahu trojúhelníku, ze vztahu mezi obsahem, délkou strany a příslušné výšky ($S = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kde a je základna a v_a je výška na danou základnu), se kterým se studenti setkávají již od sedmé třídy základní školy. Úloha je však problémová, neboť ani jeden ze dvou uvedených parametrů není vyznačen ani zdůrazněn v obrázku nebo zadání úlohy. Dokonce ze zadání úlohy není jasné, že řešení povede přes trojúhelník.

Řešit úlohu je nejvhodnější tak, jak naznačuji na obrázku , ve kterém jsem vyznačila body A, B, C. Body A a B vedeme přímku a s ní rovnoběžnou přímku p procházející bodem C. Nyní již trojúhelník ΔABC nelze přehlédnout. Vzdálenost rovnoběžek AB a p nám také určuje výšku v_c v trojúhelníku ΔABC. Je tedy zřejmé, že při libovolném posouvání bodu C po přímce p bude obsah trojúhelníku ΔABC zachován. Stačí tedy bod C posunout až na okraj zahrady do bodu C' nebo C'', jak je vidět na obrázku 2.



Obr. 2: Správné řešení úlohy

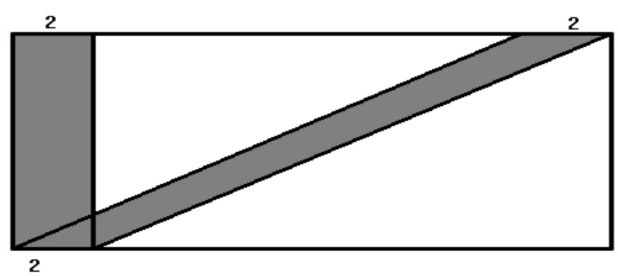
Na japonské škole předcházela této úloze jiná úloha, kde si vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku ($S = \frac{a \cdot v_a}{2}$) žáci odvodili a naučili se s ním pracovat.

Úloha Cestička

Zadání této úlohy jsem našla v textech prof. Kuřiny vytvořených pro účely kurzu ESF. Úloha mne zaujala a tak jsem se rozhodla ji zařadit do výuky v hodinách matematiky v 6. ročníku základní školy a v 5. ročníku osmiletého gymnázia. Nebudu zde ale uvádět možná řešení. Ta byla popsána v textu. Chtěla bych se především zaměřit na jeden konkrétní způsob, pomocí kterého úlohu vyřešili moji dva žáci a který v textech nenalezneme.

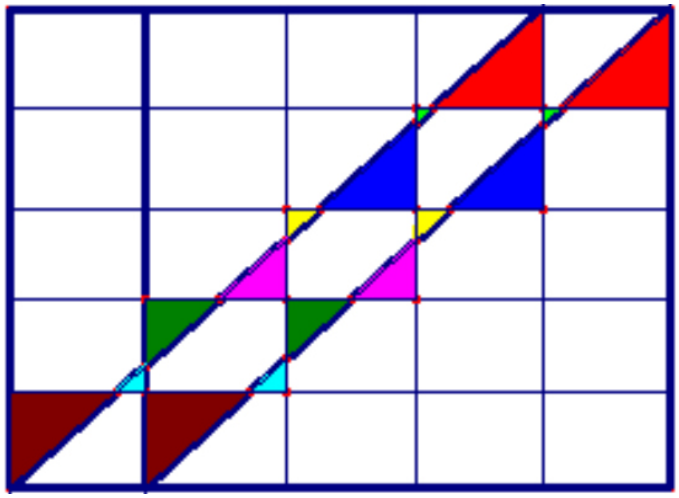
Znění úlohy

Na obrázku 3 jsou nakresleny dvě cesty přes obdélníkovou louku. Která zaujímá větší plochu?



Obr. 3: Zadání úlohy

Na takové řešení přišli pouze dva žáci. Oba žáci si rozdělili obrázek na 25 shodných obdélníků, tak jak naznačuje obrázek 4. Jeden žák použil barev, tak jak tomu je na obrázku zde. Druhý žák namísto stejných barev označil políčka stejnými čísly.



Obr. 4: Řešení úlohy

Oba žáci měli stejné argumenty. Tvrdili, že shodně obarvená či očíslovaná políčka mají i stejný obsah. Proto je možné přidat k cestě obarvené (očíslované) políčko, které leží mimo cestu. Potom zjistíme, že políčka v jednom řádku obrázku můžeme poskládat tak, aby bylo vidět, že dohromady tvoří jeden obdélníček. Šikmá cesta sejně jako kolmá cesta zabírá jeden obdélníček na každém řádku. Mají tedy stejný obsah.

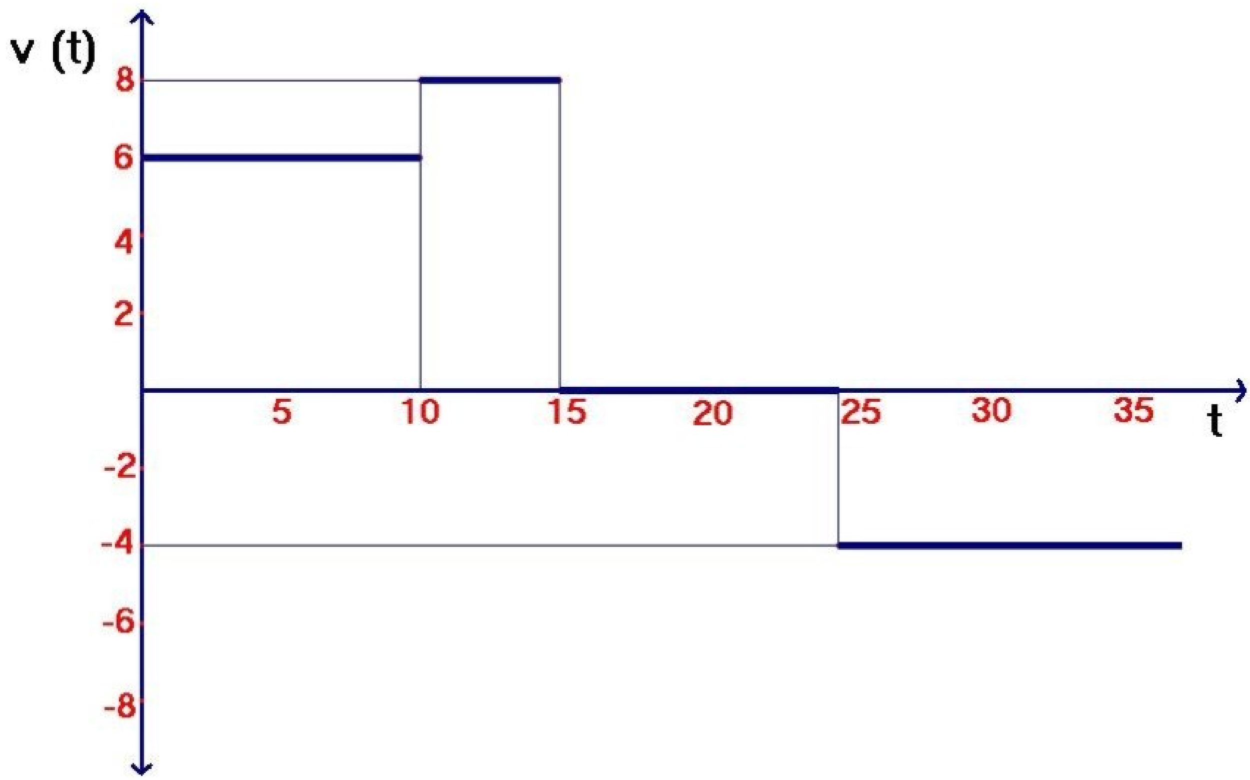
O JEDNÉ KOMPLEXNÍ APLIKAČNÍ ÚLOZE NA ROZVOJ FUNKČNÍHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ A STUDENTŮ

PETR EISENMANN[1]

Následující slovní úloha je vhodná pro motivaci, ilustraci či procvičení základních pojmů tématu *Funkce ve výuce matematiky na základní a střední škole*. Předností úlohy je fakt, že akcentuje ve výuce jistě rozumný požadavek na budování poznatků žáků a studentů pomocí jejich zkušeností.

Úloha: Interpretujte závislost popsanou grafem funkce na obrázku 1. Popište děj, který graf vystihuje.
Odpověď: Graf funkce na obrázku 1 vyjadřuje závislost rychlosti přítoku vody $v(t)$ do vany na čase t. V čase $t = 0$ byla vana prázdná. Čas je uveden v minutách, rychlost přítoku v litrech za minutu.

[1]PřF UJEP Ústí nad Labem; eisennmannp@sci.ujep.cz



Obr. 1: Rychlost přítoku vody

Úkoly a otázky:

1. Popište vlastními slovy děj, který tento graf zachycuje.
2. Kolik litrů vody bylo ve vaně maximálně? V jakém čase to bylo?
3. Kolik litrů bylo ve vaně v 35. minutě?
4. Kdy byla vana prázdná?
5. Nakreslete graf funkce $V(t)$ vyjadřující závislost množství vody ve vaně na čase t.
6. Sestavte předpis funkce vyjadřující závislost množství vody na čase
   (a) od okamžiku napouštění vany do 10. minuty
   (b) od 10. do 15. minuty
   (c) od 15. do 25. minuty
   (d) od 25. minuty do vyprázdnění
7. Popište co nejstručněji souvislost mezi funkcemi $V(t)$ a $v(t)$.
8. Popisuje graf na obr. 1 reálnou situaci věrně, a nebo je zjednodušením? Pokud ano, v čem?

Řešení:

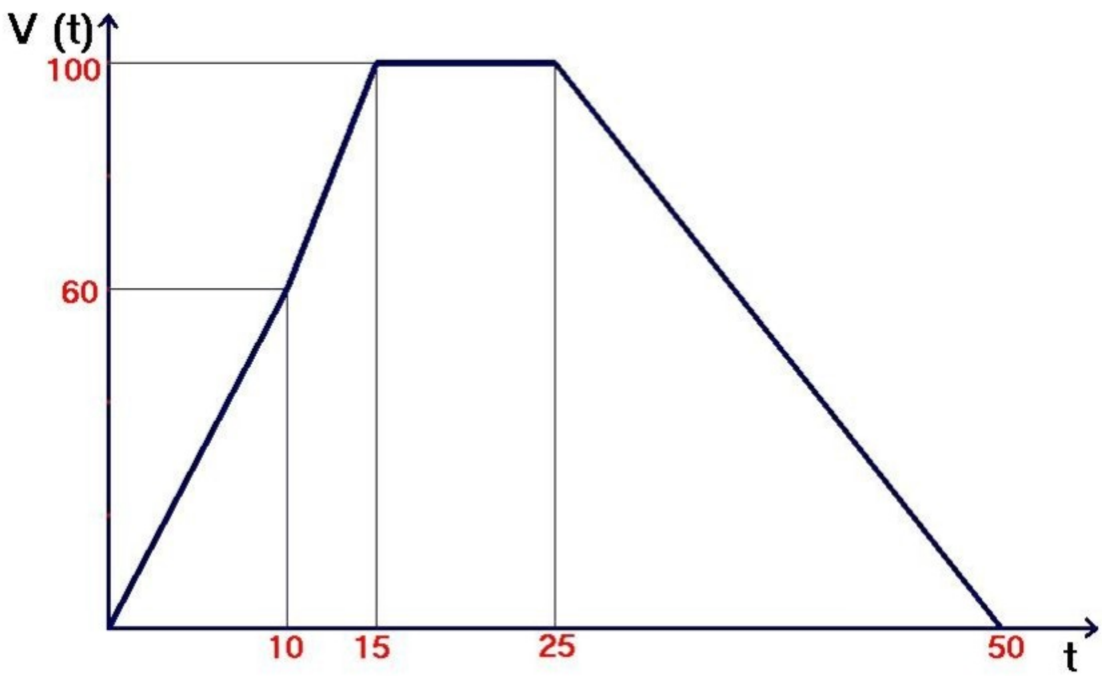
1. Jde o koupání ve vaně. Někdo si začal napouštět vanu (přítok činil 6 litrů za minutu). Po 10 minutách zjistil, že je vody málo a kohoutkem přítok zvětšil (na 8 litrů za minutu). Po pěti minutách kohoutek zavřel, 10 minut se koupal a poté vytáhl špunt.

2. Ve vaně bylo maximálně 100 litrů vody. Bylo to mezi 15. a 25. minutou.

3. 60 litrů.

4. V 50. minutě.

5. Viz obrázek 2.



Obr. 2: Množství vody ve vaně

6. (a) $V(t) = 6t$
   (b) $V(t) = 8t - 20$
   (c) $V(t) = 100$
   (d) $V(t) = -4t + 200$

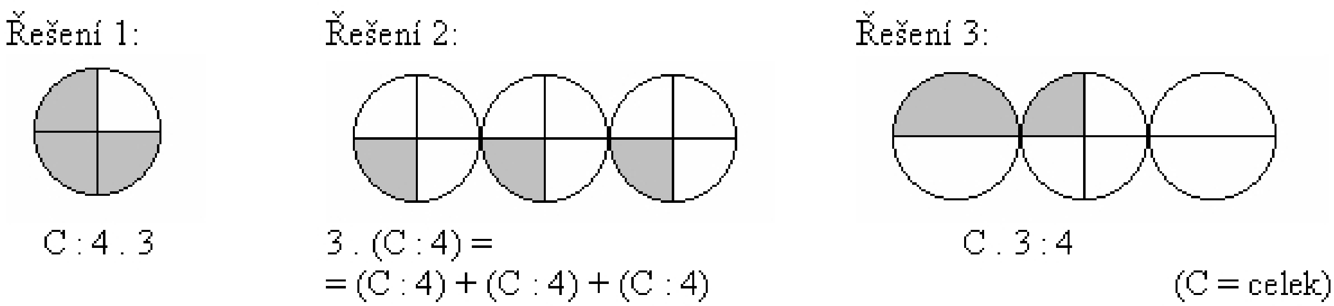
7. Funkce $v(t)$ je derivací funkce $V(t)$.

8. Zjednodušení jsou minimálně dvě:
   (a) manipulace s kohoutkem neumožňuje ve skutečnosti skokové změny rychlosti přítoku vody tak, jak to prezentuje graf na obr. 2. Vzhledem k celkovému času napouštění je to však nepřesnost zanedbatelná;
   (b) vypouštění vody neprobíhá ve skutečnosti lineárně, závisí také na aktuálním množství vody ve vaně.

CHÁPÁNÍ CELKU U MODELU ZLOMKU $\frac{3}{4}$ ŽÁKY 3. ROČNÍKU ZŠ

DANA FIALOVÁ[1]

Vzorová úloha (vz.ú.): Michal, Iva, Luděk a David jedou na chatu vlakem. Cesta vlakem trvá tři hodiny. Mají však jen jedno volné místo k sezení. Jak dlouho každý z nich bude ve vlaku sedět, aby to bylo spravedlivé?



Tři různá řešení odpovídají třem různým způsobům chápání celku v tématu zlomek (Fialová, 2001). Řešení 1 je nejběžnější a odpovídá nejčastější představě (vnímání) zlomku, tedy zlomku jako části z jednoho celku. Kerslake (1986) ve své práci o dětských strategiích a chybách poukazuje na chybějící představu zlomku ve smyslu řešení 2 a 3 vz.ú. Avšak u žáků se objevuje i vnímání zlomku ve smyslu řešení 2 a 3 vz.ú. (Neumann, 1997).

V didaktikách matematiky (Hejný, 1990, Hruša, Vyšín, 1964, Divíšek, 1989, Padberg, 1989) a Koullenově učebnici matematiky (1992) jsem se setkala s rozlišováním dvou představ zlomku, přičemž představa ve smyslu řešení 2 a 3 vz.ú. je slučována. U žáků

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; anadf@centrum.cz

se ale setkáváme s rozlišováním představy zlomku ve smyslu řešení 2 a 3 vz.ú. Lamon (2001) ve výsledcích výzkumu zaměřeném na různé reprezentace zlomku u žáků třetího ročníku uvádí, že „racionální číslo $\frac{3}{4}$ popisuje tyto situace: 1 (kus $\frac{3}{4}$), 3 (kus $\frac{1}{4}$) a $\frac{1}{4}$ z trojbalení“. To odpovídá řešení 1, 2, 3 vz.ú. Domnívám se, že tyto tři rozdílné představy (vnímání) zlomku vycházejí (a souvisí) z rozdílného chápání celku v tématu zlomek.

V letech 2001 a 2005 jsem provedla soubor šetření „Chápání celku u modelu zlomku $\frac{3}{4}$ žáky 3. ročníku ZŠ“. Šetření se zúčastnilo šest žáků 3. ročníku ZŠ (8–10 let). Jedním z cílů šetření bylo zjistit, jak žáci vnímají celek u modelu konkrétního zlomku před seznámením se s tématem zlomek ve škole. Každému žákovi jsem předložila tři obrázky – modely zlomku $\frac{3}{4}$ (obrázky z řešení 1, 2, 3 vz.ú.), nad kterými jsme vedli rozhovor. K rozhovoru jsem měla připravené tyto otázky: Co je na obrázcích? Jaký je mezi obrázky rozdíl? Vymysli ke každému obrázku příběh nebo příklad. Rozhovory byly zaznamenávány videokamerou (kromě prvního rozhovoru z roku 2001, který byl průběžně zapisován) a dále zpracovávány a vyhodnocovány. Výsledky šetření jsou shrnuty v tabulce 1.

	Vnímání **C**			Popis **C**	Vnímání části			Popis části	Realita
Model	[A]	[B]	[C]		[A]	[B]	[C]		
Ondřej	1**C**	3**C**	troj**C**	kruh	$\frac{3}{4}$	po $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,C	třičtvrtě, čtvrt, půl	koláče
Petra	?			kolečko, křížek	ne			půlka křížku	ne
Libor	1**C**	$\frac{3}{4}$=**C**, **K**=**C**, 3**C**		všechno	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ po $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$	třičtvrtě, tři čtvrtky, půlka, čtvrtka	jídlo, peníze
Jakub	1**C**	3**C**	?	ne	3**O**	po 1**O**	$\frac{1}{2}$	půlka	Ne
Karel	1**C**	?			$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$, asi $\frac{3}{4}$	asi $\frac{3}{4}$	tři čtvrtiny, čtvrt	ne
Filip	1**C**	3**C**	troj**C**	celek, tři celky	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ po $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$	třičtvrtě, čtvrt, tři čtvrtiny, čtvrtina, půl	nesledováno

Tab. 1: Představy o celku a části
C – celek, **O** – objekt, **K** – kruh, ? – není z výpovědí jasné

Výsledky šetření ukázaly, že zkoumaní žáci 3. ročníku ZŠ vnímali první model (obr. v řeš. 1 vz.ú.) vesměs jako jeden celek a většina žáků vnímala vybarvené plochy modelu jako tři čtvrtiny. Druhý model (obr. v řeš. 2 vz.ú.) vnímali žáci vesměs jako tři celky a většina žáků vnímala čtvrtinu, vyskytovalo se vnímání tří čtvrtin po jedné čtvrtině. Dva žáci (Libor a Filip) chápali třetí model (obr. v řeš. 3 vz.ú.) jako celek složený ze tří celků (trojcelek). A tito dva žáci (a zřejmě i Karel) vnímali různé interpretace tří čtvrtin na jednotlivých modelech. Objevilo se vnímání třetího modelu jako tří celků a vybarvených částí tohoto modelu jako poloviny, čtvrtiny a „ničeho“ či celku. V některých případech nebylo z výpovědí jasné, jak je model chápán. Libor vnímal jako celek jednak kruh a jednak tři čtvrtiny. Vyskytlo se chápání čtvrtin jako objektů, což může znamenat vnímání celku jako množiny. Všichni vnímali i pojmenovávali polovinu. Pojmenování částí (např. čtvrt, půlka), které žáci většinou používali, může souviset se spravedlivým rozdělováním nebo s určováním času.

Výsledky šetření poukázaly na to, že zkoumaní žáci vnímají zlomky, resp. celek různě a jsou schopni akceptovat představu zlomek i jinak (korespondenčně s řeš. 2 a 3 vz.ú.) než tradiční cestou (odpovídající řeš.1 vz.ú.).

U jednoho z respondentů (Filipa) šetření proběhlo ve dvou časových etapách (2. a 6. ročník ZŠ). První etapa proběhla před tím, než se žák seznámil se zlomky ve školním vyučování, druhá etapa byla uskutečněna po probrání tématu zlomky (včetně operací se zlomky) ve vyučování. Výsledky těchto šetření ukázaly, že před seznámením se se zlomky ve vyučování přijímal Filip tři různé interpretace zlomku, resp. vnímal tři různé způsoby chápání celku u zlomku (ve smyslu obr. řešení 1, 2, 3 vz.ú.) a že vlivem vyučování tématu zlomek svoje představy omezil na jediný způsob chápání celku u zlomku (ve smyslu obr. v řeš. 1 vz.ú.), možná i na jedinou interpretaci zlomku.

Literatura

[1] Divíšek, J. a kol. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1.stupně ZŠ*. Praha: SPN.

[2] Fialová, D. (2001). *Remarks to the teacher's beliefs about introduction of fractions*. In: Proceedings SEMT 01, Praha: UK–PedF,179.

[3] Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky* 2. Bratislava: SPN.

[4] Hruša, K., Vyšín, J. (1964). *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole*. Praha.

[5] Kerslake, D. (1986). *Fraction: Children's strategies and errors. A report of strategies and errors in secondary mathematics project*. Nfer-Nelson, Windsor, Berks.

[6] Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001). *Adding it up, Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

[7] Koullen, R. (1992). *Mathematik real 6, allgemeine Ausgabe*. Cornelsen Verlag Schwann – Girardet, Düsseldorf.

[8] Lamon, S. J. (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics. Presenting and Reprezenting. From Fraction to Racional Number*. NCTM, s. 152–153.

[9] Neumann, R. (1997). *Problema von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs. Eine empirische Untersuchung*. Bielefeld: Verlag Hans Jacobs.

[10] Padberg, F. (1989). *Didaktik der Bruchrechnung: gemeine Brüche – Dezimalbrüche*. Zürich: BI-Wiss.-Verlag.

[11] Padberg, F. (2000). *Die Bruchrechnung – ein Auslaufmodell? Didaktik der Bruchrechnung*. Jahrgang 46, Heft 2/2000.

IKONICKÝ JAZYK A PROPEDEUTIKA ROVNIC U ŽÁKŮ 1. ROČNÍKU ZŠ

MICHAELA FRANKOVÁ[1]

ÚVOD

Ve své diplomové práci, kterou jsem psala na katedře matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK pod vedením paní PhDr. Jany Slezákové PhD., jsem se věnovala netradičnímu matematicko-didaktickému prostředí. Toto netradiční sémantické prostředí „Dědy Lesoně“ bylo rozpracováno autory nových učebnic matematiky pro 1. ročník ZŠ nakladatelství Fraus (Hejný, Jirotková, Slezáková).

Netradičnímu matematickému prostředí „Dědy Lesoně“ se věnovala v roce 2005 také paní učitelka Klára Nejedlá [1], která vystoupila na konferenci *Dva dny s didaktikou matematiky* v roce 2006 se svými zkušenostmi při zavádění tohoto prostředí u dětí v 1. ročníku ZŠ. Můj způsob zavedení a sledování dětí v rámci diplomové práce byl však odlišný. Za cíl jsem si kladla ověřit, do jaké míry je toto téma použitelné u dětí předškolního a mladšího školního věku – a sice u žáků 1. ročníku ZŠ. Obsahem mé diplomové práce bylo zkoumání schopnosti krátkodobé paměti, práce s ikonami a uchopení jednoduchých rovnicových vztahů.

Zde stručně popíši netradiční matematické prostředí. Dále uvedu své získané zkušenosti při zavádění tohoto prostředí dětem a podrobněji popíši jeden jev.

MATEMATICKÉ PROSTŘEDÍ „DĚDA LESOŇ“

Prostředí dědy Lesoně je prezentováno jeho zvířaty. Těmito zvířaty jsou: myš, kočka, husa a pes. Mezi zvířaty je definován vztah (M = myš, K = kočka, H = husa, P = pes): MM = K, MK = H, MH = P.

[1] ZŠ Klíček, o.p.s., Donovalská 44, Praha 4; frankova.m@gmail.com

Vztah mezi zvířaty je modelován motivačně: Děda Lesoň pořádá pro svá zvířata závody. Jendou z mnoha disciplín je také disciplína přetahovaná. Děda Lesoň si zde klade otázku, jaké družstvo zvířat zvítězí, bojují-li proti sobě např.: M x K – vyhraje kočka, M x H – vyhraje husa, MM x K – je stav nerozhodný, MM x H – vyhraje husa, MMM x K – vyhrají myši, MMM x H – zápas je nerozhodný.

Toto prostředí lze dále rozvíjet. Otázku vítěze můžeme nahradit otázkou „Jaké zvíře musí přiběhnout do jakého družstva, aby byl zápas nerozhodný?“. Např. bojují-li proti sobě: H x P – huse přiběhne na pomoc 1 myš, HM x K2M – zápas je nerozhodný, žádné zvíře nepřiběhne, KM x P – kočce a myši přiběhne jedna myš na pomoc.

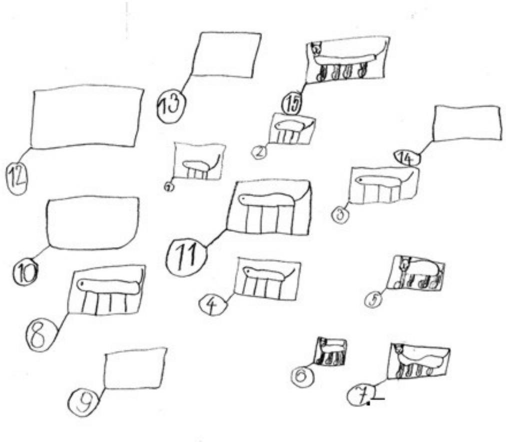
Vlastní postup při zavádění netradičního matematicko- didaktického prostředí

Prvním krokem při zavádění prostředí „Dědy Lesoně“ bylo představení zvířátek s krátkým motivačním komentářem. Dále následovalo již zadání 1. úlohy, kdy bylo mým cílem zkoumání krátkodobé paměti žáků. Zvířata přicházela v určitém pořadí na hřiště. Úlohou žáků bylo si pořadí příchodu zvířat nejdříve zapamatovat a následně jej rekonstruovat. Počet zvířat na hřiště byl k tomu přizpůsoben – nepřesahoval 6 zvířat.

Druhým krokem byl záznam příchodu zvířat. K tomuto kroku byli žáci vyzváni bez jakéhokoliv dalšího upřesnění. Způsob záznamu příchodu zvířat si žáci volili zcela samostatně.

Pro záznam pořadí příchodu zvířat využili žáci ve svých strategiích především kresby zvířat, písmena, číslice a zápis pomocí jednoduché čárky (obr. 1–3). Pro žáky nebylo těžké vymyslet způsob záznamu, následně však pro ně bylo obtížné porozumět svému zápisu a určit správné pořadí příchodu zvířat.

Třetím krokem, ke kterému jsem při zavedení sémantického prostředí „Dědy Lesoně“ přistoupila, bylo zavedení vztahů mezi zvířaty, čili představení jednoduchých „rovnicových“ vztahů mezi nimi. Jak jsem již v úvodu zmínila, k představení těchto vztahů jsem využila hry přetahovaná. Žáci měli určit vítěze daného zápasu.



Obr. 2

Obr. 3

Na tomto místě bych ráda zmínila zajímavou strategii určování vítěze, kterou předvedla žákyně 1. ročníku ZŠ. Byla zadána úloha, kdy proti sobě soupeří MM x KK. Žákyně určí chybně výsledek zápasu jako nerozhodný. Své rozhodnutí argumentuje. Z její formulace se pravděpodobně vynořuje následující myšlenka, kterou cituji: „každá kočka je na půl“ – vyjadřuje, že jedna půlka kočky je jedna myš. Ve vyjádření „když jsou dohromady dvě, . . . “ – vyjadřuje, že aby se mohla bavit o jedné kočce, tak potřebuje dvě půlky. Spojením poslední části myšlenky žákyně „dohromady myš“ – vyplyne, že „každá kočka je . . . na půl . . . dá . . . dohromady myš“. Žákyně 1. ročníku ZŠ tak na této úloze prezentuje příklad krácení, který také sama navrhuje. Vidí a argumentuje, že $\frac{1}{2}$ kočky je 1 myš. Má představu poloviny, je tedy schopna ve své mysli krátit.

Závěr

Díky zkušenostem získaných z provedených experimentů mohu říci, že toto netradiční prostředí je pro žáky z hlediska budování předalgebraického myšlení velmi vhodné a motivující. Na základě závěrů mých a kolegyně Nejedlé lze konstatovat, že toto prostředí umožňuje prohlubování konceptuálních přestav o čísle. Mnohem rychleji se tak však děje až ve 2. ročníku ZŠ. U dětí ve věku 5 až 7 let je energie vydávána více na ikonický záznam. U žáků 1. ročníku se objevuje nízká míra abstrakce a uplatňuje se ikonický jazyk. Vztah jedna kočka jsou dvě myši u nich nebyl ještě plně přijat. Z daných závěrů vyplývá, že žáci 2. ročníku ZŠ přijmou dané prostředí snadněji. Proto si dovoluji souhlasit s kolektivem autorů, jež toto prostředí zavedl až do učebnic 2. ročníku ZŠ.

Literatura

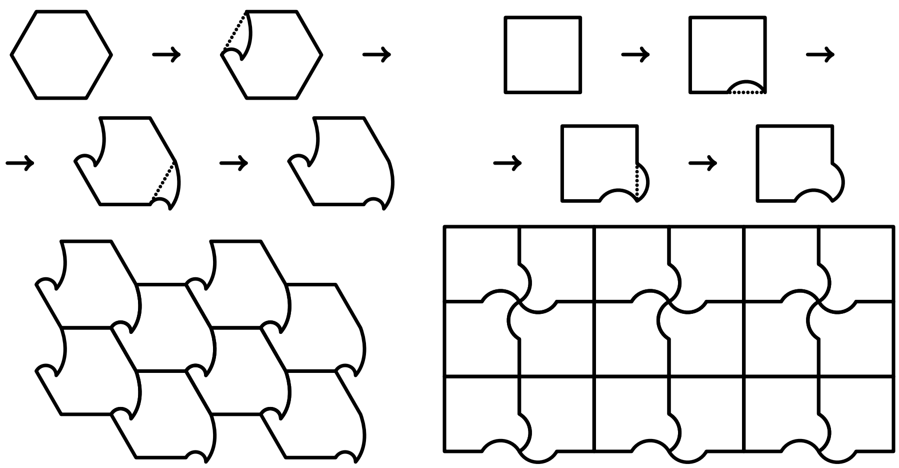
[1] NEJEDLÁ, K. Zkušenosti s netradičním matematickým prostředím „Děda Lesoň“. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky*, Praha, Pedagogická fakulta UK, 2005. s. 58–60.

GEOMETRIA A VÝTVARNÁ TVORIVOSŤ DETÍ[1]

LUCIA ILUCOVÁ[2]

Často v škole učíme deti aj to, čo už dávno vedia, hoci len na intuitívnej úrovni. Pritom mnohé poznatky a schopnosti by sme mohli budovať na základe žiackych skúseností, a ešte k tomu rozvíjať ich tvorivosť. A práve v geometrii, s ktorou sme všetci v kontakte od narodenia, som sa s týmto javom stretla napríklad v súvislosti s geometrickými zobrazeniami.

V rámci dvoch hodín matematiky v prime osemročného gymnázia som žiakom predviedla dva rôzne postupy pre tvorbu útvarov – ciel – vytvárajúcich escherovské teselácie[3] (obr. 1; [2]).



Obr. 1: Predvedené postupy pre tvorbu ciel a príslušné escherovské teselácie: a) využitie posunutia, b) využitie otočenia. (Podstatou je deformácia strany pôvodného teselujúceho útvaru – napr. štvorca alebo pravidelného šesťuholníka – a jej následné posunutie o dĺžku strany alebo vzdialenosť protiľahlých strán, resp. otočenie o 90° alebo 120° okolo vrchola pôvodného útvaru. Dôležité je, že „to, čo z pôvodného útvaru uberieme, to k nemu musíme pridať".)

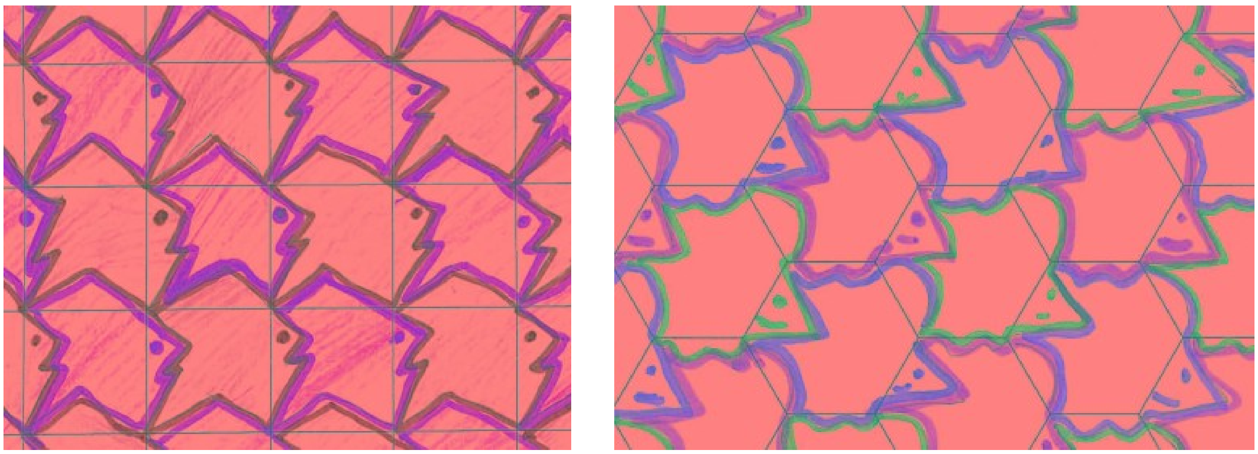
Ich úlohou bolo na hodine nakresliť obrázky (teselácie), v ktorých sa budú pravidelne opakovať rovnaké útvary vytvorené na základe predvedených postupov; obrázky kreslili na pripravené štvorcové a šesťuholníkové siete. Na cely pritom mohli nakresliť nejaký

[1]Práca bola podporená projektom AVOZ 10190503.

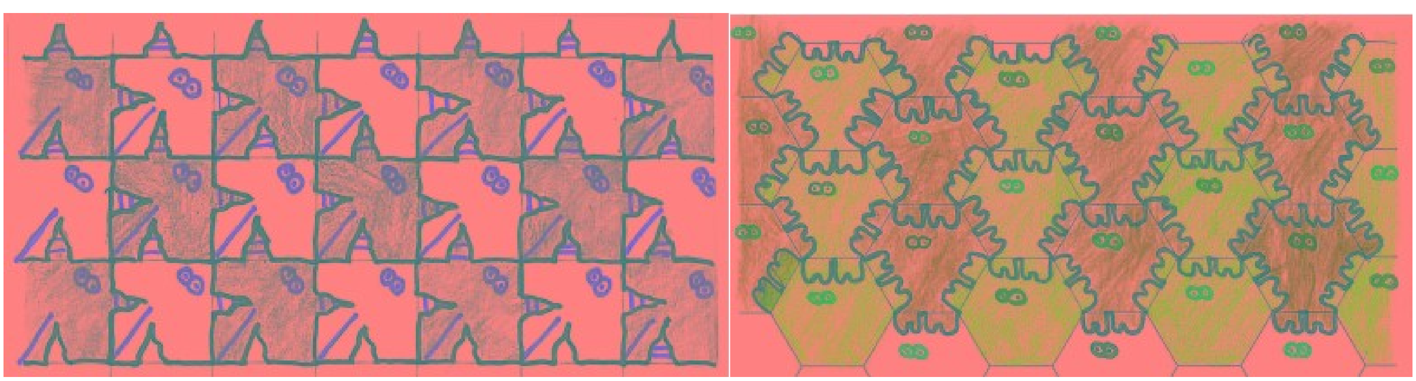
[2]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, MÚ AV ČR Praha; ilucova@gmail.com

[3]Rovinnou teseláciou rozumieme pokrytie roviny útvarmi bez medzier a prekrytí. Escherovské teselácie sú zložené z ciel, ktoré vznikli na základe deformácií strán iných teselujúcich útvarov a ich následnom posunutí alebo otočení. Vzniknuté útvary môžu byť mnohouholníkové (obr. 1a), alebo niektoré z ich strán (alebo všetky) môžu byť zaoblené (obr. 1b). (Viac informácií o teseláciách je možné nájsť napr. v [1].)

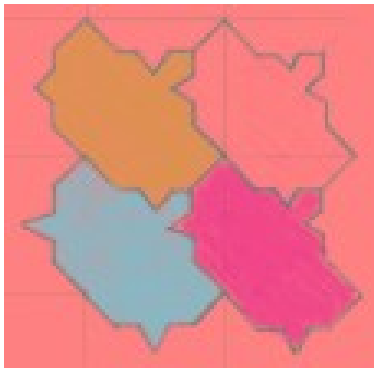
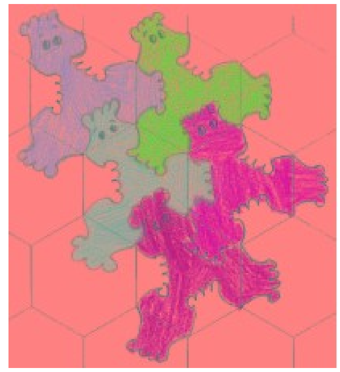
ornament, aby výsledné cely niečo pripomínali (napr. zvieratká alebo strašidlá). Napriek tomu, že sa tieto deti ešte nevenovali téme týkajúcej sa zobrazení, pri vysvetľovaní som použila pojmy ako „posuniem o...“, „otočím okolo...“ a žiaci nemali problém ani s pochopením postupov, ani s použitím zobrazení. Niektoré z odovzdaných detských prác síce neboli teseláciami alebo vytvorené cely nebolo možné opakovať tak, aby vytvorili teseláciu, ale väčšina obrázkov teseláciami boli a mnohé z nich sa dokonca vyznačovali zložitými deformáciami strán. Uvádzam niektoré z nich – obr. 2–4. (Viac inšpirácie a postupov pre tvorbu escherovských teselácií je možné nájsť napr. v [3].)



Obr. 2: Anička (11 rokov): Cely escherovských teselácií skonštruované na základe posunutia a príslušné teselácie (dievčatko použilo pri každej konštrukcii dve, resp. tri, rôzne deformácie strany a ich následné posunutia).

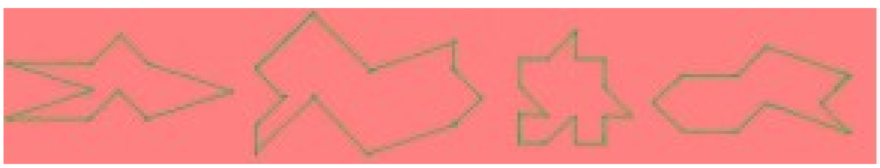


Obr. 3: Lucka (11 rokov): Cely escherovských teselácií skonštruované na základe otáčania a príslušné teselácie (bola použitá dvakrát, resp. trikrát, rovnaká deformácia strany; rovnaký výsledok by sme mohli dostať pri použití posunutia; pozoruhodná je uhlopriečna farebná symetria).

Obr. 4: a) Andrea (11 rokov): Cely skonštruované na základe dvakrát použitého otáčania jednej deformácie o 90°, b) Barča (11 rokov): cely skonštruované na základe trikrát použitého otáčania jednej deformácie o 120°.

Uvedené postupy je možné použiť i pri riešení ďalších problémoch – napríklad pri hľadaní mnohouholníkových útvarov vytvárajúcich teseláciu (resp. sieť) rôznych od štvoruholníkov, ako samostatne použila študentka strednej školy (obr. 5).



Obr. 5: Johana (18 rokov): Mnohouholníky ako teselujúce útvary vytvorené pomocou postupov pre tvorbu escherovských teselácií (študentka kreslila na štvorcovej sieti, ako základný útvar použila obdĺžnik, resp. štvorec).

Deti sa stretávajú v školskej geometrii najmä s pravidelnými útvarmi, napriek tomu, že tie sa vyskytujú v bežnom živote výnimočne. Ale ukázali, že sú citlivé i na oveľa zložitejšie útvary a bolo by vhodné im poskytnúť viac priestoru na skúmanie práve takýchto útvarov.

LITERATURA

[1] Grünbaum, B., Shephard, G. C. (1987): *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and Company, New York.

[2] Ilucová, L. (2005): Escherovské teselácie. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.): *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků.* PedF UK, Praha, 68–74.

[3] Ranucci, E. R., Teeters, J. L. (1977): *Creating Escher-type drawings*. Creative Publications, Palo Alto.

TVORBA DIFÚZNYCH ÚLOH ŽIAKMI NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE

IVANA KOVÁROVÁ[1]

V bežnom živote sa každý z nás stretáva s nejasnými situáciami (významovo nepresné, neurčité, nezrozumiteľné), ktoré je nutné zvládnuť. Nastáva teda otázka ako pracovať s nejasne zadanými problémami a ako nájsť vhodnú hranicu medzi nejasnosťou a presnosťou. Využiteľným nástrojom pre učiteľov matematiky vo vyučovaní pri nácviku presnosti vyjadrovania môže byť napríklad i riešenie difúznych úloh (*difúzna úloha je matematická úloha formulovaná slovne, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi*). Táto problematika je z rôznych hľadísk spracovaná i v ďalších prácach, čitateľ má možnosť hlbšie preniknúť do tejto problematiky napríklad v článku [1]. Predmetom tohto príspevku je naša skúsenosť s vytváraním difúznych úloh žiakmi.

Začiatkom roka 2007 realizovali J. Mihalčová a J. Sekerák [2] prieskum súvisiaci so schopnosťou prvákov štvorročného gymnázia (15–roční žiaci) interpretovať zadaný matematický model. Na základe analýzy žiackych riešení (formulácií) bola autormi stanovená hypotéza: *Interpretácia matematického modelu žiakmi je jedným z možných spôsobov vytvárania difúznych úloh*. V experimente, ktorého popis a závery sú súčasťou tohto príspevku, sme sa okrem iného pokúsili overiť túto hypotézu.

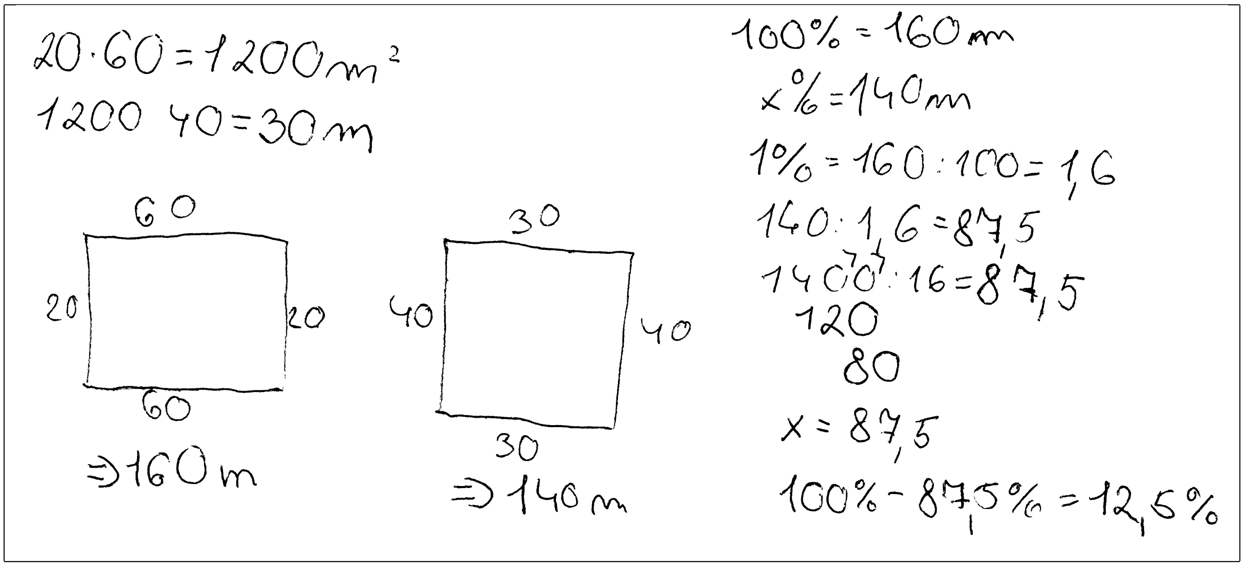
Experiment sa uskutočnil v tercii (29 žiakov) osemročného gymnázia so zameraním na matematiku (12–13 roční žiaci). V prípravnej hodine sme žiakom predložili dva riešené matematické modely, ku ktorým mali naformulovať zadania. Žiakov sme rozdelili do štvoríc na základe ich úspešnosti v prípravnej hodine. Následne sme žiakom predložili zadania dvoch príkladov na samostatné riešenie, po dve zadania z každého príkladu do každej štvorice. Po vyriešení žiaci s rovnakým zadaním (v rámci štvoríc) vytvorili dvojice. Dvojica, ktorá riešila zadanie A si vymenila svoje riešenia s dvojicou, ktorá riešila zadanie B a následne mali vo dvojiciach naformulovať zadanie k predloženým dvom riešeniam. Žiaci boli vopred upozornení, že zápis a odpoveď nemajú písať, navzdory tomu veľká časť riešení bola nevhodná (obšírny slovný zápis a odpoveď). Z toho dôvodu niekoľko formulovaných zadaní bolo vylúčených z analýzy. Ako ukážku riešení a následnej formulácie uvádzame nasledovné:

Pôvodné zadanie znelo:

Ferkov otec oplotil obdĺžnikovú záhradu s rozmermi 20 m a 60 m. Zuzkin otec má obdĺžnikovú záhradu s rovnakým obsahom a s jedným rozmerom 40 m, kúpil preto také isté množstvo materiálu na plot, ako Ferkov otec. Koľko % materiálu mu zvýši?

Jedno z dvoch riešení (druhé riešenie bolo veľmi podobné):

[1] Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; ivana.kovarova@upjs.sk



Zadanie naformulované žiakmi:

Aký je rozdiel v % obvodov dvoch obdĺžnikov ak majú rovnaký obsah, pričom jeden obdĺžnik má rozmery 20 m a 60 m a u druhého máme udanú iba stranu dlhú 40 m?

Z uvedenej formulácie nie je zrejmé, ktorý obdĺžnik predstavuje 100 %, teda od ktorého máme vypočítať rozdiel. Ak by bol obdĺžnik s dĺžkami 20 m a 60 m považovaný za základ (tak ako to je i v pôvodnej úlohe), druhý obdĺžnik by mal o 12,5 % menší obvod. V opačnom prípade by bol prvý obdĺžnik o 14,3 % väčší ako druhý. Žiaci teda uviedli nejasné zadanie a preto úlohu nimi naformulovanú považujeme za difúznu. Príklady naformulovaných zadaní podobné uvedenej formulácii nám potvrdili skúmanú hypotézu. Môžeme teda povedať, že pri formulácii zadania žiakmi môže dôjsť k naformulovaniu difúznej úlohy.

Podobné nejasné úlohy sa však (omylom) nachádzajú i v niektorých učebniciach, niekedy nedopatrením i v rôznych matematických súťažiach. Preto si myslíme, že by im mal učiteľ matematiky venovať patričnú pozornosť, prinajmenšom by mal žiakov na ne upozorniť. Je možné žiakov naučiť pracovať s nejasne zadanými úlohami a to tak, že ich naučíme pozrieť sa na úlohu s odstupom. Vtedy riešiteľ úlohu vyrieši v každej (ním objavenej) obhájiteľnej interpretácii.

LITERATURA

[1] HARMINC, M.; MOLNÁR, P.: *Some experiences with the diversity in word problems*. IM Preprint, series A, No. 10/2006, P. J. Šafárik University, September 2006.

[2] MIHALČOVÁ, J.; SEKERÁK, J.: Interpretácia matematického modelu. In: *Matematika - fyzika - informatika*. ISSN–1210–1761, 2008, roč. 17., číslo 5, s. 260-267.

Využitie difúznych úloh na základnej škole

Ivana Kovárová[1]

Škola, najmä vo vyučovaní matematiky, sa snaží žiakov naučiť presnosti a to nie len vo vyjadrovaní. Difúzne úlohy, ako jeden typ neštandardných úloh, je možné využiť pri nácviku presnosti vyjadrovania (*difúzna úloha je matematická úloha formulovaná slovne, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi*). Sú vhodné tiež pri ukázaní potreby presnej formulácie.

V predošlom príspevku s názvom *Tvorba difúznych úloh žiakmi na Základnej škole* sme opísali experiment, v ktorom sme overili jeden z možných spôsobov vytvárania difúznych úloh. Súčasťou tohto experimentu bolo i vyskúšanie navrhnutej vyučovacej hodiny, ktorá by využívala difúzne úlohy. Predmetom tohto príspevku je návrh vyučovacej hodiny doplnený o naše skúsenosti.

Pôvodná myšlienka je použiť autentické difúzne úlohy, teda také, ktoré by vytvorili sami žiaci. Z tohto dôvodu sme navrhovanú vyučovaciu hodinu rozdelili do troch častí (možno vhodnejšie by bolo, ak by to boli časti troch vyučovacích hodín nie v rámci jedného dňa).

Samostatné riešenie žiakmi

V prvej časti je potrebné vytvoriť úlohy, pomocou ktorých žiakom predvedieme nutnosť presnosti vyjadrovania. Poslúži nám na to ľubovoľná slovná úloha, ktorú dáme žiakom samostatne vyriešiť. Je potrebné žiakov upozorniť, aby nepísali slovný zápis ani odpoveď, pretože by tým výrazne uľahčili následnú formuláciu. Keďže však žiakom neustále vštepujeme nutnosť týchto zápisov ako neoddeliteľnú súčasť riešenia (riešenie vo všeobecnosti obsahuje zápis, rozbor, postup riešenia, slovnú odpoveď) je zrejmé, že niekoľko riešení ich obsahovať bude napriek upozorneniu. Učiteľ by mal takéto riešenia neskôr vylúčiť a z ostatných zvoliť jedno (možno niekoľko riešení), ktoré uzná za vhodné na predloženie k následnej formulácii. V uskutočnenom experimente sme použili žiacke riešenia bez triedenia, čo v konečnom dôsledku nebolo veľmi prospešné. Niekoľko výsledných formulácií sme museli z analýz vylúčiť, pretože riešenia boli veľmi obšírne a slovne komentované.

Samostatná interpretácia matematického modelu žiakmi (formulácia zadania)

Zvolené riešenia učiteľ predloží žiakom druhej triedy (je vhodné zapojiť do tvorby difúznych úloh dve triedy, pretože pre žiaka, ktorý formuluje zadanie by pôvodná úloha

[1]Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; ivana.kovarova@upjs.sk

mala byť neznáma). Je možné použiť riešenia úloh, ktoré riešili žiaci v minulosti (je pravdepodobné, že ich bude nutné dodatočne upraviť).

Žiaci by mali samostatne interpretovať predložený matematický model, teda mali by naformulovať zadanie k danému riešeniu. Keďže žiaci nemajú veľké skúsenosti s tvorbou úloh, ich formulácie sú častokrát nepresné (ako sme predviedli v predošlom príspevku). Úlohou učiteľa po hodine je vytriediť získané zadania podľa nepresnosti alebo chýb, ktorých sa žiaci dopustili. Z každého typu by bolo vhodné (v závislosti od času, ktorý na to učiteľ plánuje venovať na ďalšej hodine) vybrať po jednom zadaní. V uskutočnenom experimente sme pri formulovaní zadania vytvorili dvojice, čo neprinieslo predstavovaný efekt. Odporúčame preto aby žiaci formulovali individuálne.

Diskusia

Záverečná, no najdôležitejšia, je časť, v ktorej učiteľ spolu so žiakmi prediskutuje naformulované zadania. Predloží im jednotlivé zadania k riešeniu, tieto s nimi prediskutuje a nechá žiakov aby sami zistili kde sú nejasné, slabé alebo chybné miesta v zadaniach. Ak bude diskusia cielene vedená, v jej závere by si žiaci mohli uvedomiť potrebu presnej formulácie v zadaniach a následne z toho vyplývajúcu potrebu presného vyjadrovania vo všeobecnosti.

Nejasne formulované zadanie úlohy je možné chápať ako zlú (chybnú alebo nežiadúcu) formuláciu, no pri jej vhodnom použití je to účinný prostriedok využiteľný na hodinách matematiky. Ďalšia ukážka podobného použitia difúznej úlohy je rozpracovaná v práci [1].

Literatura

[1] KOVÁROVÁ, I.; MIHALČOVÁ, J.: Vplyv riešenia jednej difúznej úlohy a následný rozbor na riešenie druhej difúznej úlohy o 12–tich kockách. *Učitel matematiky* (prijatý do tlače).

Dramatizace ve výuce matematiky

Magdalena Krátká[1]

Úvod

Metodu dramatizace chápu jako jednu z podob tzv. aktivizující výuky (Vašutová, 1999). Má sama o sobě silný motivační potenciál. Bereme za samozřejmé, že ji lze

[1] PřF UJEP v Ústí nad Labem; kratka@sci.ujep.cz

užít jako oživení a zpestření některých hodin. Má ale i další funkce. Můžeme ji užít k opakování látky nebo k rozvíjení různých kompetencí vymezených v RVP.

I časová náročnost může být velmi různá – od krátkých „cvičení“ až po dlouhodobé projekty. V rámci kurzu Didaktika matematiky jsem zařadila dramatizaci právě jako prostředníka pro tématický celek projektové vyučování. Studenti tak v rámci zpracování dlouhodobého projektu jako dílo vytváří činoherní ztvárnění nějakého matematického tématu (od nastudování příslušného tématu, přes tvorbu scénáře až po samotné představení).

Forma aktivity

Jistě nás napadne nejtradičnější způsob dramatizace, totiž činohra. Své místo zde ale mají i další formy. Vedle činohře podobnému loutkovému divadlu apod. můžeme žáky/studenty vyzvat k přípravě pantomimického zpracování. Jindy naopak využijeme „jen“ psaného příběhu nebo básně. Záleží jednak na záměru učitele, dále na vnějších podmínkách a samozřejmě na tvůrčích preferencích potenciálních autorů.

Vždy si ale uvědomme, že připravovaná forma je jen výsledek celé náročné situace. Pokud při dramatizaci pracujeme skupinově (což je obvyklé), na její realizaci se budou podílet jednotlivý aktéři v různých rolích. Jak bylo řečeno, je mnohdy třeba nejprve nastudovat, nebo si alespoň promyslet zpracovávanou tématiku. Dále připravit scénář, kulisy, kostýmy apod. Teprve po závěrečném nazkoušení je možné dílko předvést.

Co lze v matematice zdramatizovat?

Při volbě tématiky – hlavní myšlenky realizované dramatizace máme překvapivě širokou škálu možností. Ty, které napadli nás při práci na zmiňovaném projektu v rámci kurzu Didaktika matematiky, nabízím stručným výčtem (ilustrace následují v dalším paragrafu). Je zřejmé, že v jednom díle se můžeme setkat s více fenomény současně.

– historická událost
– postavy matematiky
– matematický pojem
– matematické tvrzení
– matematická myšlenka
– matematický problém
– matematická teorie, koncepce

Ukázky z činoher

Jak bylo řečeno výše, v rámci kurzu Didaktika matematiky zpracovávají studenti učitelství dlouhodobý projekt zaměřený na dramatizaci ve výuce. Z jejich výtvorů jsem vybrala dvě ukázky, které mohou dobře ilustrovat, co vše lze do takové činohry z matematiky zahrnout a jakých možností můžeme při dramatizaci využít.

PRVOČÍSELNÁ DVOJČATA

V rámci hry se objasňuje pojem prvočíselného dvojčete. Je zde zachycen problém o počtu prvočíselných dvojčat. V obecnější rovině je naznačen význam hypotézy, věty a jejího důkazu.

Ve čtyřčleném týmu se všichni podíleli na vzniku scénáře. Tři se pak zhostili i rolí, čtvrtý student představoval vypravěče:

Vypravěč: *Ihned poté, co se prvočíselná dvojčata převlékla za sudá čísla, nebylo po nich ani vidu ani slechu. Ale jako Věta hledala dvojčata, dvojčata hledala větu. Bylo tedy nejvýše jasné, že poslední střet se blíží.*

Věta: *Musím uznat, že dvojčata nejsou rozhodně hloupá, prošla jsem už mnoho zobrazení, ale nikde jsem je nenašla* (unavená grimasa). *Na chvíli si odpočinu a načerpám nové síly* (sedneš si třeba na židle). (O chvilinku později se v přestrojení dostaví na scénu d vojčata, budou se snažit vypadat mile a přátelsky, ovšem nosy nahoru si nechte.)

361 700 $055x2^{39020} - 1$: *Zdravíme tě chrabrá věto, už nějakou dobu po tobě pátráme.*

Věta: (okamžitě zbystříš a stoupneš) *Kdo jste a co chcete? Nejste vy náhodou ta zlá prvočíselná dvojčata?* (podezřívavý pohled)

361 700 $055x2^{39020} + 1$: *Ale kdež, co tě bere slovutná* (je cítit náznak odporu) *věto. My jsme jejich sousedky, já jsem* 361 700 $055x2^{39020} + 2$ a tohle je 361 700 $055x2^{39020} - 2$

...

Věta: *Kudy tedy za nimi?* Dvojčata ukážou Větě směr a drží se potom za ní. Nakonec na ní hodí deku a začnou ji tlouct, podaří se jim ukořistit důkaz. Věta musí vypadat jako zpráskaný pes. Ukáže se divákům, už bude mít cedulku hypotéza...

Dvojčata jednohlasně: *Bývala jsi slavnou větu, teď jsi pouhou hypotézou.* (Věta to psychicky nevydrží a s brekem uteče ze scény.)

NEWTON A LEIBNIZ

Ve hře se jednak setkáváme s reálnými osobnostmi matematiky. Je zde zpracována jedna historická událost, neboť se řeší, kdo formuloval diferenciální počet? Divák se setká s pojmem derivace, směrnice tečny apod. Autoři se snažili zachytit vývoj matematických myšlenek a toho, že teorie „nepadají z nebe“, ale při jejich vytváření se některé cesty zavrhují a v jiných se pokračuje.

Ve skupině pracovalo pět studentů, všichni se podíleli na scénáři a všichni pak ve hře účinkovali.

LEIBNIZ: *No, naopak můžete si vybrat, do koho se vtělíte. Derivace jsou přece f1uxe, ty blázne stará!*

NEWTON: *Co tu zase chceš, ty plagiátore jeden!*

LEIBNIZ: *Copak sis na to dal nějaký copyright!*

NEWTON: *Vy jste se snad všichni úplně zbláznili!*

LEIBNIZ: *Co my, snad ty!*

SÁRA: *Nooo, úča nám říkal, že jste byl duševně chorý.*

NEWTON: (obří zlost) *Bože.* (Uklidní se.) *Pojď, děvče* (ukáže na Báru), *ukáži ti, na co jsem přišel.* (Přesune se s Bárou k tabuli a Bára začne zapisovat, co Newton říká.) *Fluenty si označíme v , x, y, z, jsou to rychlosti, s nimiž se každá f1uenta pohybem zvětšuje, to je právě ta naše f1uxe! Rozumíš?* (Bára nesouhlasně zavrtí hlavou.)

ZÁVĚR

I když se dramatizace může na první pohled zdát jako samoúčelná metoda zpestření výuky, při jejím vhodném zařazení plní řadů výukových funkcí. Žáci si při hraní musí uvědomit různá fakta a spojitosti dané problematiky. Při přípravě představení po žácích vyžadujeme soustavnou a samostatnou práci. Žáci tak přebírají zodpovědnost za svou práci. Je zřejmé, že dochází k rozvoji verbální i neverbální komunikace, ale i dalších kompetencí vymezených v RVP.

Tato metoda může učiteli poskytovat i velmi účinnou zpětnou vazbu. Mnohdy se totiž při takovýchto aktivitách teprve ukazuje, čemu žáci neporozuměli nebo kde si vytvořili chybné představy. Proto by vždy měla následovat diskuse, o čem představení bylo, co nebylo podáno dobře apod.

LITERATURA

[1] Vašutová, J. a kol. : *Vybrané otázky vysokoškolské pedagogiky.* 1. vyd., Praha, Pedagogická fakulta UK, 1999, 222 s., ISBN: 80-86039-97-8 PedF. Praha.

O VZŤAHU MEDZI SYMBOLICKÝM A GEOMETRICKÝM MYSLENÍM

LADISLAV KVASZ[1]

Učivo školskej matematiky možno rozdeliť na dve skupiny predmetov, ktoré (aspoň tak sa zdá) rozvíjajú rôzne schopnosti a kompetencie žiakov. Prvú, zahŕňajúcu počítanie, algebru a slovné úlohy, charakterizuje používanie číselných znakov a algebraických symbolov. Jej cieľom je naučiť žiakov zvládať situácie, v ktorých vystupujú kvantitatívne vzťahy. Druhá skupina, zahŕňajúca geometriu, a to ako syntetickú tak aj analytickú, má za cieľ rozvíjať predstavivosť a naučiť žiakov zvládať situácie, v ktorých vystupujú priestorové vzťahy, rôzne relácie usporiadania a vzájomnej polohy objektov. Učiteľ je pomerne často konfrontovaný so skutočnosťou, že niektorí žiaci dosahujú dobré výsledky v jednej z týchto skupín, kým druhá im nevyhovuje a sú v nej neistý. Preto sa zdá,

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; ladislav.kvasz@pedf.cuni.cz

že oddeľovanie týchto skupín predmetov ako v osnovách (t.j. časovo) tak aj v učive (obsahovo) je prirodzené a plne oprávnené.

A. Keď sa na túto otázku pozrieme z historického hľadiska, odhalíme pozoruhodné striedanie týchto oblastí matematiky. Matematika začína v **3. tisícročí pnl.** v starovekých civilizáciách Egypta, Mezopotámie, Číny a Indie, pričom v podobe výlučne aritmetickej. Celá matematika je redukovaná na návody ako **počítať** určité veličiny (pozri Vymazalová 2006).

B. V **5. storočí pnl.** dochádza v matematike k zásadnej zmene, súvisiacej s objavom dôkazu. Táto zmena sa udiala v antickom Grécku a mala za následok úplné opustenie aritmetického charakteru matematiky, aký táto mala v starovekom Egypte a Mezopotámii. Gréci matematiku vybudovali na **geometrických** základoch, pričom v tomto dospeli tak ďaleko, že praktické počítanie, ktoré tvorilo náplň matematiky predošlých dva a pól tisícročí, označili za *logistiké techné* (umenie počítať), a z matematiky vylúčili (pozri Vopěnka 2000). Gréci pestovali aj teóriu čísel či riešenie „kvadratických rovníc“ v geometrickom pojatí. Riešiť „rovnicu“ tak znamenalo skonštruovať úsečku, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy (Kolman 1968, s. 115).

C. Po období trinástich storočí sa okolo roku **800 nl.** v islamskom svete rodí algebra. Takto vzniká nový druh **symbolickej** manipulácie, v ktorej namiesto čísel počítame s písmenami. Algebra znamenala pokrok v porovnaní s antickou matematikou predovšetkým v tom, že umožnila prelomiť medze, ktorými trojrozmerný priestor zväzoval geometriu a tým aj celú na geometrii založenú matematiku. Pre Grékov bol súčin dvoch úsečiek plocha, súčin troch bol objem, a ďalej sa nedalo pokračovať, lebo to nepripúšťa priestor. V algebre je symbolika nezávislá na priestore a tak tvorba vyšších mocnín nepredstavuje problém (pozri Kvasz 2007).

D. Po uplynutí asi ôsmych storočí sa okolo **roku 1637** rodí analytická geometria. Descartes a Fermat vytvárajú nový spôsob tvorby geometrických útvarov vďaka tomu, že zmenili interpretáciu súčinu dvoch úsečiek (pozri Fiala 2005). Podľa Descarta je súčinom úsečiek x a y opäť úsečka, a jej dĺžka je xy. Možno tak povedať, že Descartes vytvoril prvé komutatívne teleso, teda súbor veličín uzavretý na sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie.

Vidíme, že v dejinách sa zaujímavým spôsobom strieda symbolický a geometrický spôsob reprezentácie matematického poznania. Toto striedanie pokračuje aj vo vyššej matematike. Po analytickej geometrii sa rodí nový symbolický jazyk *diferenciálneho a integrálneho počtu*. Potom sa rodí nový geometrický jazyk *fraktálnej geometrie* aby na ňu opäť nadviazal nový symbolický jazyk *predikátového počtu*. Tento vývin je opísaný v (Kvasz 2000 a 2008).

Z hľadiska didaktiky matematiky je zásadná otázka, prečo sa s takou pravidelnosťou strieda geometrické a symbolické myslenie v dejinách matematiky. Zdá sa, že nejde o dva nezávislé spôsoby myslenia, ale akoby jeden podmieňoval rozvoj druhého. Aby sme pochopili ako, zameriame sa na obdobie prechodu, na obdobie, kedy sa matematika

„prelaďuje“ z obdobia nadvlády jedného na obdobie nadvlády druhého. Tieto prechodové obdobia sú pozoruhodné tým, že v nich existujú radikálne zmeny pohľadu na objekty matematiky.

1. **Pytagorejská vizualizácia počtu** prostredníctvom *figurálnych čísel*. Počas celého obdobia starovekého Egypta či Mezopotámie bolo číslo niečo s čím sa počítalo, bolo predmetom čisto symbolických operácií. Pytagorejci začali čísla ukladať do rôznych geometrických útvarov, čo umožnilo prvýkrát dokázať všeobecné tvrdenia (pozri Hejný 1986, s. 33). Teda niečo, čo bolo pôvodne chápané čisto symbolicky, sa stáva predmetom geometrického názoru.

2. **Symbolizácia premennej**. Predchodcom premennej bola úsečka neurčitej dĺžky, čo bol vynález geometrov, pomocou ktorého dokazovali všeobecné tvrdenia. Keď v geometrickej konštrukcii narysujem úsečku a, ale neudám čo je jednotka dĺžky, môže úsečka reprezentovať ľubovoľnú dĺžku. Síce na obrázku mám e konkrétnu úsečku, ale dodatočnou voľbou jednotky táto môže reprezentovať ľubovoľnú úsečku. Keď algebraici zaviedli na označenie neznámej písmená, preniesli túto pôvodne geometrickú fintu do symbolickej oblasti. Písmeno, rovnako ako úsečka neurčitej dĺžky, reprezentujú ľubovoľnú veličinu.

3. **Karteziánska vizualizácia polynómov**. Polynóm bol pôvodne čosi výlučne symbolické, bol to objekt s ktorým sa počítalo. Descartes vytvoril súradnú sústavu a polynómom priradil tvar. Niečo čo bolo pôvodne chápané čisto symbolicky, sa stáva predmetom geometrického názoru.

Pojem **neznámej** nie je čisto algebraický pojem ale je to len symbolické vyjadrenie myšlienky úsečky neurčitej dĺžky, ktorá sa zrodila v geometrii. Podobne pojem **krivky** nie je čisto geometrický pojem. Je to geometrické vyjadrenie hlbokej idey polynómu, ktorá sa zakladá na zrovnoprávnení rôznych mocnín neznámej, a ako taká je to výsostne symbolická idea. Preto symbolické a geometrické myslenie sú zásadne prepojené a je možné že žiaci ktorí nedokážu zvládnuť niektorý z týchto spôsobov myslenia, sú blokovaní tým, že nie dostatočne dozrela predošlá fáza a tak príslušná vizualizácia či symbolizácia nemôže nastať. A ak je to pravda, tak algebru treba začať učiť v geometrii, teda myšlienku všeobecnosti (či neznámej) treba vytvoriť v jej primárnej podobe, ktorou je úsečka neurčitej dĺžky. A analytickú geometriu treba začať učiť v algebre, teda myšlienku formy (či krivky) treba vytvoriť v algebre.

Príspevok je súčasť grantu VEGA 1/3621/06 Historické a filozofické aspekty exaktných disciplín.

LITERATURA

[1] Fiala, J. (2005): Descartova metoda a mathesis universalis. In *René Descartes*, FF ZČU, Plzeň.

[2] Hejný, M. (1986): Prológ. In *Pohľad do dejín matematiky*, Alfa, Bratislava.

[3] Kolman, A. (1968): *Dějiny matematiky ve starověku*. Academia, Praha.

[4] Kvasz, L. (2000): Changes of Language in the Development of Mathematics. *Philosophia mathematica*, Vol. 8, s. 47–83.

[5] Kvasz, L. (2007): Vznik algebraickej symboliky. In Stehlíková, N. a Jirotková D. (ed.): *Dva dny s didaktikou matematiky 2007*, PedF UK v Praze s. 18–30.

[6] Kvasz, L. (2008): *Patterns of Change – Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Birkhäuser, Basel.

[7] Vopěnka, P. (2000): *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Práh, Praha.

[8] Vymazalová, H. (2006): *Staroegyptská matematika*. Český egyptol. ústav, Praha.

Diferenciálna rovnica ako matematický model povrchu

Anna Macurová[1]

Abstrakt. *Príspevok obsahuje zostavenie diferenciálnej rovnice, ktorá vyjadruje model nerovnosti obrobeného povrchu kovov sústružením.*

V texte budeme používať premenné podľa terminológie teórie obrábania povrchov sústružením [4]. Aplikácia diferenciálneho počtu v tejto oblasti je pre študentov náročnejšia, ak sa používajú premenné podľa noriem platných v oblasti teórie obrobeného povrchu. Premenná Rz označuje nerovnosť obrobeného povrchu kovov sústružením. Nerovnosť obrobeného povrchu sa volá tiež v teórii obrábania drsnosť obrobeného povrchu. Závisí od posuvu nástroja f a od polomeru zaoblenia hrotu nástroja r_ϵ, t. j. $Rz = Rz\,(f)$, r_ϵ budeme považovať za parameter.

Diferenciálna rovnica

Pre drsnosť obrobeného povrchu Rz sa používa vzťah

$$Rz = r_\epsilon - \sqrt{r_\epsilon^2 - \frac{f^2}{4}}, \tag{1}$$

kde r_ϵ je polomer zakrivenia hrotu a f je posuv [1], [7], [8]. Nech r_ϵ je parameter, t.j. $Rz = Rz\,(f)$, drsnosť obrobeného povrchu Rz je funkciou posuvu f. Z rovnice (1) vyplýva

$$Rz - r_\epsilon = \sqrt{r_\epsilon^2 - \frac{f^2}{4}}$$

[1] Fakulta výrobných technológií Technickej univerzity v Košiciach so sídlom v Prešove; anna.macurova@tuke.sk

a po úprave dostaneme

$$Rz^2 - 2Rzr_\epsilon + r_\epsilon^2 = r_\epsilon^2 - \frac{f^2}{4}.$$

Nasledujúcu úpravami získanú rovnicu považujeme za implicitné vyjadrenie funkcie Rz

$$Rz^2 - 2Rzr_\epsilon + \frac{f^2}{4} = 0. \tag{2}$$

Diferenciálnu rovnicu, ktorá bude obsahovať neznámu funkciu Rz získame z rovnice (2), t.j. z rovnice $F\left(f\, Rz\, r_\epsilon\right) = 0$ (v (2) sme označili pravú stranu $F\left(f\, Rz\, r_\epsilon\right)$). Derivovaním pravej strany (2) podľa premennej f, t.j. z rovnice $\frac{dF}{df} = 0$ vyjadríme r_ϵ.

Rovnica

$$\frac{dF}{df} = 0$$

znamená

$$2RzRz' - 2Rz'r_\epsilon + \frac{f}{2} = 0,$$

kde Rz' je prvá derivácia funkcie podľa f. Z toho vyplýva, že polomer zaoblenia hrotu, resp parameter r_ϵ je vyjadrený vzťahom

$$r_\epsilon = Rz + \frac{f}{4Rz'}, \tag{3}$$

pričom $Rz' \neq 0$. Po dosadení (3) do vzťahu (1) máme

$$Rz = Rz + \frac{f}{4Rz'} - \sqrt{\left(Rz + \frac{f}{4Rz'}\right)^2 - \frac{f^2}{4}}.$$

Je zrejmé, že z poslednej rovnosti vyplýva nasledujúca rovnica

$$0 = \frac{f}{4Rz'} - \sqrt{\left(Rz + \frac{f}{4Rz'}\right)^2 - \frac{f^2}{4}},$$

a po umocnení a úpravách získame

$$2fRz + 4Rz^2Rz' - f^2Rz' = 0, \tag{4}$$

ktorú je možné vyjadriť aj jednoduchšie

$$Rz'\left(4Rz^2Rz'\right) - f^2Rz' = 0. \tag{4a}$$

Riešením diferenciálnej rovnice (4) kde Rz je drsnosť obrobeného povrchu, f je posuv, získame vzťah pre Rz, pričom Rz ako neznáma funkcia v diferenciálnej rovnici (4) je funkciou posuvu f a $Rz' = \frac{dRz}{df}$. Za predpokladu, že $f \neq 0$ je rovnica (4) delená výrazom f^2, pričom vznikne

$$2\frac{Rz}{f} + 4Rz'\frac{Rz^2}{f^2} - Rz = 0,$$

t.j. homogénna diferenciálna rovnica prvého rádu. Pomocou substitúcie

$$\begin{aligned} Rz &= uf \\ Rz' &= u'f + u \\ u' &= \frac{du}{df} \end{aligned} \tag{5}$$

je riešená diferenciálna rovnica

$$u'\frac{4u^2 - 1}{4u^3 + u} = -\frac{1}{f},$$

ktorá je vzhľadom na (5) v tvare

$$\frac{4u^2 - 1}{4u^3 + u} = -\frac{df}{f}.$$

Integrovaním vznikne

$$\int \frac{4u^2}{4u^3 + u}du - \int \frac{1}{4u^3 + u}du = -\int \frac{1}{f}df.$$

Po určení jednotlivých integrálov je funkcia u implicitne vyjadrená nasledujúcou rovnicou

$$\ln\left|\frac{4u^2 + 1}{u}\right| = -\ln|f| + \ln|c|, \tag{6}$$

kde c je reálna konštanta.

Na základe vlastností logaritmov je možné vyjadriť zo (6) rovnosť

$$\frac{4u^2 + 1}{u} = \frac{c}{f}, \tag{7}$$

kde u, c nadobúdajú kladné hodnoty.

Úpravou rovnice (7) vznikne

$$4u^2 - \frac{c}{f}u + 1 = 0$$

a jej riešenia sú

$$u_{1,2} = \frac{\frac{c}{f} \pm \sqrt{\frac{c^2}{f^2} - 16}}{8}$$

alebo v tvare

$$\frac{Rz}{f} = \frac{c}{8f} \pm \sqrt{\frac{c^2}{f^2 64} - \frac{1}{4}}. \tag{8}$$

Po ďalších úpravách, pričom pre $\frac{c}{8} = r_\epsilon$, je $Rz = r_\epsilon - \sqrt{r_\epsilon^2 - \frac{f^2}{4}}$.

ZÁVER

Matematickým modelom povrchu je rovnica (4a) v tvare

$$Rz' \left(4Rz^2 - f^2\right) - 2fRz = 0.$$

Vzťah (8) je riešenie rovnice (4a) a vyjadruje závislosť drsnosti obrobeného povrchu na posuve, kde r_ϵ je polomer zaoblenia hrotu nástroja a v tomto prípade je parameter.

LITERATURA

[1] BUDA, J., SOUČEK, J., VASILKO, K.: *Teória obrábania*. Alfa Bratislava, 1988, 391 s.

[2] GREGUŠ, M., ŠVEC, M., ŠEDA, V.: *Obyčajné diferenciálne rovnice*. Bratislava, ALFA 1985, s. 376.

[3] KALPAKIJAN, S.: *Manufacturing Engineering and Technology*. New York: Addiso Wesley Publishing Company. 1990, 1199 s. ISBN 0-201-12849-7.

[4] KURZWEIL, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Praha, SNTL,1978.

[5] MACURA, D.: *Funkcia viac premenných*, Prešov, FHPV PU Prešov, 2005, ISBN 80 8068-321-2.

[6] MACURA, D., MACUROVÁ, A.: About the system three quasilinear differential first order equations with special matrix, *6th Scientific Conference*, Košice: Stav. fakulta TU, 1997, s. 123–130, ISBN: 80-7099-277-8.

[7] MACURA, D., MACUROVÁ, A.: Boundedness and oscilatoricity of Solutions of non-linear differential systems. *International Scientific Conference of Mathematics*, Žilina, Žilinská univerzita, 1998, s. 153–161, ISBN 80-7100-578-9.

[8] MARUŠIAK, P., MORAVČÍK, J.: *MATEMATIKA II. Systémy diferenciálnych rovníc*. Žilinská univerzita, 1996, s. 163.

[9] VASILKO, K., MACUROVÁ, A: Optimalizácia rezných podmienok z hľadiska drsnosti obrobeného povrchu. *Funkčné povrchy 2001*. Trenčín, Fakulta špeciálnej techniky, Trenčianska univerzita, 2001 s. 231, s.217–222. ISBN 80-88914-345.

[10] VASILKO, K, MACUROVÁ, A., VASILKOVÁ, D.: Nová metóda na zlepšenie drsnosti obrobeného povrchu pri sústružení. *Acta Mechanica Slovaca Košice*. Strojnícka fakulta TU, 2/1999, s. 17–31.

[11] WEBER, H., LOLADZE, T. N.: *Grundlagen des Spanens*. Berlín, VEB Verlag Technik, 1986, s. 252.

ROZVÍJANIE INTUITÍVNEHO MYSLENIA ŽIAKOV V PRAVDEPODOBNOSTI

JANA MIHALČOVÁ[1]

Výsledky testovania PISA [2] nás upriamili na potrebu rozvíjať u žiakov stochastické myslenie viac ako v minulosti. V správe sa uvádza, že naši žiaci majú najväčšie problémy práve v tejto oblasti. V príspevku analyzujeme vyučovaciu hodinu realizovanú v tercii osemročného gymnázia (12–13 roční žiaci) v triede so zameraním na matematiku ešte pred preberaním tematického celku pravdepodobnosť.

V súčasnosti existujú dva prístupy k preberaniu pravdepodobnosti na školách.

- klasický prístup – využíva klasickú definíciu pravdepodobnosti.
- štatistický prístup – používa sa pri pokusoch, ktorých výsledky nie sú rovnako pravdepodobné, alebo sa nechceme spoliehať na predpoklad rovnakej pravdepodobnosti.

V našich podmienkach prevláda skôr prvý prístup. Analyzovaná vyučovacia hodina je vedená v duchu druhého prístupu.

V stochastike (kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika) sú známe rôzne paradoxy, pri riešení ktorých nás silne klame intuícia. Úlohy tohto typu sú pre žiakov silne motivujúce. Zvolená úloha nesúvisí priamo s paradoxmi, lež s mylnými predstavami. Aby si žiak opravil mylnú predstavu, je vhodné urobiť odhad a potom ho porovnať s aktuálnymi výsledkami (ktoré vyplývajú z pokusov). Tak ako je uvedené v štandardoch NCTM [2] žiaci najprv riešia úlohy, v ktorých experiment predchádza aritmetické riešenie, spracovávajú údaje a diskutujú o tom, či sú výsledky experimentu v súlade s ich predpoveďami.

[1]Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; jana.mihalcova@upjs.sk

V korešpondenčnom seminári *Sezam* [1] sa objavila úloha, ktorá sa nám zdala vhodnou na prvé stretnutie žiakov s pravdepodobnosťou:

Alicina hracia kocka mala šesť stien, na ktorých boli čísla od jedna do šesť. Alica si zobrala pero a papier a začala hádzať. Ak šestka padla na prvýkrát, napísala si na papier číslo 1. Potom hádzala a počítala znova od jedna. Ak šestka padla na druhýkrát, napísala si na papier číslo 2 a znovu pokus zopakovala. . . . Ak šestka padla na 99-ty krát, napísala si na papier číslo 99 a počítala odznova. . . . Takto hádzala niekoľko hodín a keďže hádzanie kockou je úplne náhodné a Alica nijako nepodvádzala, na papieri sa jej nazhromaždili rôzne čísla. Alica sa poriadne pozrela na papier a od prekvapenia zhíkla. Sherlock, driemkajúci v hojdacom kresle, sa rozospato spýtal, čo sa deje. Nato mu Alica položila zaujímavú otázku: „Čo si myslíš, padá šestka častejšie na piatykrát alebo na druhýkrát? Alebo inak, ktoré číslo mala Alica častejšie napísané na papieri, pätku alebo dvojku? Prečo to tak je?“ (Na túto úlohu nás upozornila prispievateľka úloh do korešpondenčného seminára RNDr. Katarína Bachratá, PhD.)

Priebeh žiackych riešení sme zaznamenávali na audiovideo záznam a následne vyhodnocovali. Často žiaci po prvom prečítaní úlohu mylne pochopili takto: Na 99 pokus padne častejšie 2 alebo 5? Následne sme so žiakmi vo dvojiciach ešte raz podrobne prečítali úlohu, aby sme sa uistili, že každý dobre rozumie zadaniu.

Na vyučovacej hodine žiaci pracovali vo dvojici. K dispozícií mali tradičné hracie kocky. Pred samotným vlastným experimentom si sformulovali hypotézy. Väčšina žiakov sa zhodla na tom, že 6-ka padne častejšie na piatykrát ako na druhý. Ako jeden z argumentov podporujúci túto ich hypotézu bola ich osobná skúsenosť s rôznymi stolovými hrami, v ktorých šestka „nie a nie padnúť“ (ako napr. hra „Človeče nehnevaj sa“).

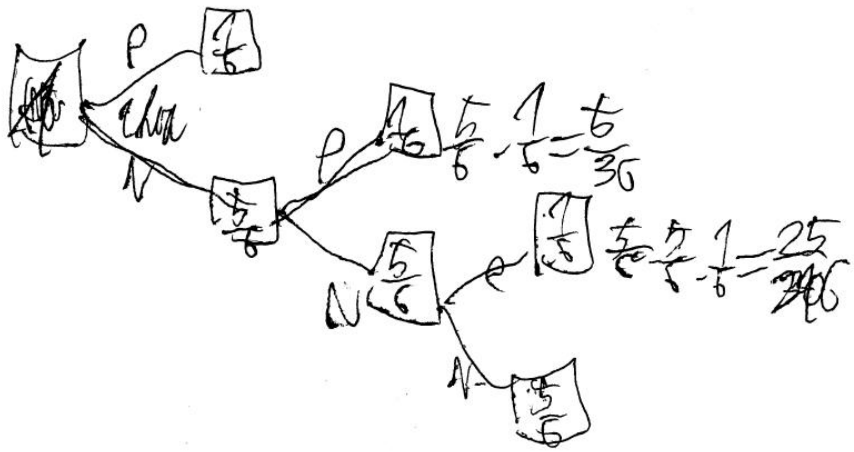
Neskôr žiaci realizovali vlastné experimenty s hracími kockami. Ich počiatočné nadšenie z hádzania sa zmenilo na sklamanie z množstva pokusov, ktoré v niektorých skupinách boli v rozpore s hypotézou.

Keďže sme so žiakmi ešte doposiaľ nepreberali analýzu dát (u nás sa častejšie používa slovné spojenie *popisná štatistika*) aj zápisy výsledkov žiackych experimentov boli spočiatku veľmi chaotické a medzi jednotlivými skupinami rôzne a neprehľadné pre všetkých čitateľov okrem autorov záznamu.

Hádzanie kockou nepresvedčilo všetkých žiakov o správnosti jednej z odpovedí. Často argumentovali, že každý hod je založený len na náhode a nijak sa to nedá vypočítať. Pri veľkom množstve pokusov (99 a viac) žiaci pripustili, že ich hypotéza nebola pravdivá a snažili sa svojim matematickým aparátom dokázať správnosť inej hypotézy: Šestka padá častejšie na druhýkrát ako na piatykrát.

Ako ukážku uvádzame riešenie všestranne nadaného žiaka (obr. 1). Zároveň pripúšťame, že v „bežnej triede“ by na objavenie tohto riešenia nestačila len jedna vyučovacia hodina.

Touto úlohou sme chceli, aby žiaci zažili proces tvorenia hypotézy, aby vyčítali istú zákonitosť z dát, aby na intuitívnej úrovni pochopili, že aj náhoda sa pri veľkom množstve pokusov správa podľa istých zákonitostí, a že na vyslovenie hypotézy často nestačí len náš vnútorný pocit a na jej potvrdenie (dôkaz) málo pokusov.



Obr. 1

Literatura

[1] *Korešpondenčný seminár z matematiky pre ZŠ Sezam* [online]. [cit. 2008–02–25]. Dostupné na internete: <`http://www.sezam.sk`>.

[2] *Principles & Standards for School Mahtematics* [online]. [cit. 2008–02–25]. Dostupné na internete: <`http://standards.nctm.org/`>.

[3] ŠPÚ: PISA SK 2003, *Matematická gramotnosť.* Bratislava, štátny pedagogický ústav, 2004. ISBN 80–85756–89–9

Koleso šťastia

Jana Mihalčová[1]

Svet okolo nás je popisovaný veľkým množstvom údajov. Nie je ľahké sa orientovať v tomto mori dát. Možno aj preto sa veľmi moderným slovom stalo práve slovo štatistika. Často je chápaná ako nutné zlo a v časovo tematických plánoch škôl ju nachádzame na konci, v období tesne pred prázdninami.

V testoch PISA sa práve oblasti náhodnosť venovala väčšia pozornosť [2]. O význame tejto oblasti matematiky nemožno pochybovať. Cieľom tohto príspevku je poukázať na zaujímavé úlohy a prístupy k vyučovaniu štatistiky v poľských učebniciach. Tieto úlohy

[1] Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach; jana.mihalcova@upjs.sk

môžu slúžiť ako zdroj inšpirácie pre našich učiteľov, ktorý sa s týmto celkom neraz pasujú a podobným učebniciam nemajú prístup.

V poľskej učebnici pre 6. ročník (szkoły podstawowej) [1] využívajú v tomto celku známu hru koleso šťastia a navrhli nasledovné postupy, akými by sa žiaci mohli dostať k potrebným údajom:

- Pozerať súťaž na televíznych obrazovkách a počítať koľko samohlások a spoluhlások sa vyskytuje v nimi volených slovách,
- Vybrať si úryvok z nejakých populárnych novín a spočítať počet samohlások a spoluhlások, ktoré sa tam vyskytujú
- Na každé slovo abecedy zobrať niekoľko slov, ktoré sa začínajú týmto písmenom a spočítať v nich samohlásky a spoluhlásky.
- Vybrať niekoľko slov zo slovníka a následne spočítať v nich samohlásky a spoluhlásky.

Žiaci robia štatistický zber údajov na textoch. Počítajú výskyt jednotlivých samohlások a spoluhlások v poľskom texte, v rôznych titulkoch. Po zozbieraní údajov výskyty písmen zaznamenávajú do tabuliek.

Vyskúšali sme túto hru na jednej vyučovacej hodine v tercii (12-13 roční žiaci) osemročného gymnázia (v triede so zameraní na matematiku) s upravenými pravidlami:

- Poznáme počet písmen hádaného slovného spojenia.
- Na kartičkách sú napísané rôzne hodnoty (od 100 do 1000). Jeden žiak (dopredu vybratý z triedy) vytiahne náhodne kartičku s číslom.
- Skupina získa vylosovanú hodnotu za správne uhádne písmeno zo slovného spojenia alebo stratí vylosovanú hodnotu, ak písmeno neuhádne.
- Skupina háda písmená do vtedy, kým sa nepomýli (maximálne 5 písmen, pričom každého hodnota sa ťahá zvlášť).
- Uhádnutím celého slova sa skupine pridelí počet bodov: počet doposiaľ neuhádnutých písmen krát vylosovaná hodnota.
- Vyhráva tá skupina, ktorá ma najviac bodov.

Žiaci pracovali v štvorčlenných skupinách a keďže chceli vyhrať, tak prvotné nepremyslené typy vystriedali slovné úvahy a taktizovanie. Vádzame niekoľko ukážok slovných spojení, ktoré mali žiaci k dispozícií:

- *Biela stužka v tvojich vlasoch* (názov úryvku z literatúry)

- *Komu sa nelení, tomu sa zelení* (slovenské príslovie)

Po uhádnutí niekoľkých slovných spojení nasledovala diskusia, v ktorej sme sa žiakov pýtali, ako si vyberali písmena, aby získali čo najviac bodov. Ako prvé písmeno uvádzali písmeno *A* z toho dôvodu, že v slovenských textoch má práve toto písmeno najbohatší výskyt. A iné písmena si volili podľa oblastí, z ktorej bolo slovné spojenie (napr. v hádankách sa často vyskytuje písmeno *Č*, v prísloviach dosť často *K*,. . . .) Očakávali sme, že žiaci pocítia potrebu spraviť si vlastný zber údajov a zistiť frekvenciu výskytu jednotlivých písmen v slovenských textoch. To sa nám však nepodarilo. Žiaci využívali predovšetkým svoje doterajšie skúsenosti a intuíciu pri voľbe jednotlivých písmen.

LITERATURA

[1] Klakla M., Serafin, S.: *Błękitna Matematika, Podręcznik dla klasy 6. szkoły podstawowej*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała, 1997, ISBN 83-7194-154-4, s. 84–98.

[2] ŠPÚ: PISA SK 2003, *Matematická gramotnosť.* Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2004. ISBN 80-85756-89-9

VÝVOJ STAVBY ZE STAVEBNICE KAPLA U TŘÍLETÝCH DĚTÍ

VĚRA RICHTEROVÁ[1]

Stavebnice a hra s ní má mnoho významů a zaujímá jednu z klíčových rolí v rozvoji dětských schopností.

Úroveň stavby o mnohém vypovídá (viz vývojová psychologie). Stimuluje rozvoj senzomotorické orientace, hmatové, zrakové i polohové paměti, myšlení v souvislosti s konstrukcí (předvídání, porovnávání, korekce, plánování a podobně) a další duševní funkce. Je náročnější na organizaci hry i na technickou představivost. Hra se stavebnicí rozvíjí u dítěte nejen jemnou motoriku, pohybovou zručnost, ale i poznávací procesy. U dítěte v předškolním věku tedy jsou již podmínky pro zařazení stavebnice Kapla. Je otázka, jak se dítě vyrovnává s takovým novým materiálem. Pro hledání odpovědi bylo zorganizováno dlouhodobé nezúčastněné sledování jednotlivců při hře se stavebnicí v mateřské škole (24 týdnů). Cílem bylo sledovat, jestli jsou fáze vývoje stavby ze stavebnice Kapla shodné s vývojovými fázemi ze stavebnice Tofa. Z výzkumu, které byly prováděny se stavebnicí

[1]ZŠ a MŠ Jesenice

typu Tofa, vyplývá, že vývoj stavby u těchto dětí je odlišný v závislosti na charakteru stavebních kamenů.

U každé stavby je možné sledovat **proces a výstup**. Nešlo o pouhé sledování konstrukce po stránce technické. Evidovány byly i poznatky z proceduální části, protože čas, uchopování, korekce stavby, samotný zájem o práci mohou výstupnou úroveň dětí ovlivnit. Například korekce – dítě opravuje, přendává kámen z ruky do ruky, z místa na místo a podobně, to vše může vypovídat o (ne)dokonalé představě o materiálu, co si s ním může dovolit, o kompozici jednotlivých kamenů. Dítě má nějakou představu, nebo ji získává během stavby.

Princip Kaply je jednoduchý – jedná se o krabici plnou kamenů – dřevěné díly jsou vyrobeny z měkkého dřeva a mají jednotné rozměry $120 \times 24 \times 8$ mm. Stavění spočívá v prostém pokládání kostek na sebe nebo vedle sebe. Stavba tedy drží pouze vlastní vahou. Kameny nemají žádné zářezy, které by umožňovaly zvýšit trvalost stavby či jinak ovlivnit stabilitu.

Fáze hry se stavebnicí Kapla (které tedy můžeme vysledovat u tříletých dětí) se neliší od hry s Tofou v **nulté fázi** (Kaslová, Reitspiseová). V **dalších fázích** se objevuje ohrádka někdy v kombinaci s dominantou, nástup mezery je výrazně ranější než u Tofy podobně jako šikmost polohy kamenů. Oproti Tofě se celkem brzy se objevují rovnovážné prvky, algoritmus stavby směrem vzhůru. Typická je zde symetrie staveb s využitím mezer (podobně jako u Tofy). Stavění dílů na výšku se objevuje u dětí s dobře rozvinutou motorikou, nebo u dětí, které nemají problémy s korekcemi stavby. Pro jiné děti může být stavba do výšky pro náročnost na stabilitu a přesnost demotivující. Výrazně rychleji se objevují u Kaply složitější stavby, které nahrazují obrázky, což se u Tofy nevyskytuje. To je pravděpodobně dáno charakterem kamenů.

U Kaply tedy můžeme sledovat větší skoky ve vývoji, než u Tofy, kde je vývoj plynulejší. Typickou polohou dílku je na plocho nebo na podélnou hranu. Oproti Tofě se u dětí vyskytuje častěji návrat k předchozímu typu a jeho následné obohacení.

Jaká je role stavebnice v přípravě dítěte na školu? Analyzujeme-li schopnosti dítěte nutné pro nástup školní matematiky (např. B. Novák UP Olomouc), je patrné, že se při této hře rozvíjí prostorová představivost, schopnost představy tvořit i modifikovat, představy porovnávat s realitou (vjemem), uvědomovat si možnosti poloh kamenů, zpracovávat prostorové vztahy a to i v rovině jazykové, vnímat a využívat souměrnost, při práci s předlohou užít transformaci prostor – rovina, dále i zmenšování nebo zvětšování vnímaného do rozměrů odpovídajících předloze či samotným kamenům stavebnice, rozvíjí se vnímání celku a jeho částí, tedy zvládání procesů jako je kompozice, dekompozice, korekce a podobně. Tyto zkušenosti dítěte se uplatní jak ve školské geometrii, tak i při modelování situací spjatých s řešením slovních úloh. Pokud má dítě v konstrukcích se stavebnicemi obtíže, je zde i předpoklad pro to, že některé z výše popsaných schopností nemusejí být na očekávané úrovni na počátku školní docházky a lze to považovat za signál upozorňující na určité deficity. Zmapování vývoje stavby u stavebnice Kapla tedy může sloužit učitelům orientačně jako jedna z forem diagnostikování úrovně dětských schopností. Zařazení hry s Kaplou na počátku školní docházky představuje nenásilný přechod z mateřské školy na první stupeň a umožňuje dítě zkoumat, aniž by si to uvědomovalo. Zařazení Kaply je možné i mezi aktivity stimulované v rámci zápisu dítěte do školy. Hra s Kaplou může plnit i nástroj adaptace na nové prostředí, vytvářet prostředí pro kooperaci dětí a stimulaci slovní komunikace týkající se prostorových vztahů, tvarů a poloh objektů.

Nedorozumění učitel – žák ve vyučování matematice[1]

Jana Slezáková, Ewa Swoboda[2]

Úvod

Není nic zvláštního, že se stávají v běžných rozhovorech nedorozumění, není tomu jinak ani ve škole. V podnětném vyučování chceme, aby žáci rozmlouvali, a to jednak mezi sebou, tedy žák-žák, ale také žák-učitel, třída-učitel. V takových situacích, když dojde k nedorozumění, by bylo dobré, abychom my – učitelé uměli co nejlépe reagovat. Tedy abychom reagovali tak, že podpoříme diskusi, konkrétněji např. argumentaci žáků, nebo tak, že dáme žákovi možnost, aby si našel chybu a opravil ji, nebo aby promýšlel hlouběji jistou myšlenku.

Domníváme se, že tato činnost učitele vede nejen ke zlepšení klimatu ve třídě, ale navíc se ještě v takových situacích učitel může hodně naučit o tom, jak žák myslí, tedy jak žák rozumí pojmům, vztahům apod. Tato učitelova činnost vede k hlubšímu porozumění žákovi v matematice.

Výše uvedený fakt nás vedl k tomu, že jsme začaly evidovat nedorozumění v naší experimentální činnosti a ty pak analyzovat, vedlo to k rozpracování nástroje, který nám pomáhal porozumět podstatě vzniku nedorozumění. Později se vynořily čtyři kategorie nedorozumění, které se vyskytly v našich experimentech (Slezáková-Kratochvílová, Swoboda, 2006).

V současnosti sbíráme a následně analyzujeme běžné třídní situace ve vyučování matematice zaznamenané studenty – budoucími učiteli. Tedy nejsou to vymyšlené situace,

[1]Článek byl vypracován s podporou grantu VZ MSM 002 162 0862.

[2]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; jana.slezakova@pedf.cuni.cz; Řešovská univerzita (Polsko), eswoboda@univ.rzeszow.pl

ani situace vybrané z experimentů výzkumníků. Jedná se o situace, ve kterých evidujeme nedorozumění. Pro ilustraci jsou zde vybrány dvě, které se staly v polských školách.

SITUACE 1

Poznámka: Níže uvedené protokoly situací jsou uvedeny v originální podobě, tedy v jazyce polském a jejich překlady do českého jazyka jsou psány kurzívou. Vysvětlivky: U. označuje výstup učitelky, Ž. označuje výstup žáka/žákyně.

Vyučovací hodina matematiky ve třídě nižšího gymnázia, téma: zvětšování úsečky

N.01: Proszù zwiùkszyû długosû danego odcinka półtora raza.

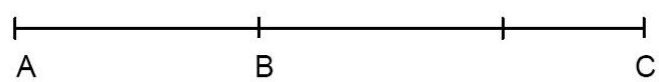
U.01: Prosím, zvětšete délku úsečky jeden a půlkrát.

U.01: Uczennica na tablicy przedłużyła odcinek AB poza jego koniec B, odłożyła go od tego koca raz, a potem jeszcze pół raza, otrzymujšc punkt C. (obr. 1)

Ž.01: Žákyně na tabuli prodloužila úsečku AB za jeho koncovým bodem B, přenesla tuto úsečku ještě jednou, a potom ještě její polovinu, tak dostala bod C. (obr. 1)

N.02: (zdziwienie w głosie) Co ty zrobiłas?

Ž.02: (podiv v hlasu) Cos to udělala?



Obr. 1

Komentář: Učitelka si poměrně rychle uvědomila, že dívka udělala něco neočekávaného. Je zřejmé, že došlo k nedorozumění. Odkud se vzalo? Učitelka viděla, že dívčino řešení není správné. Dívka slovo „Zvětšete“ interpretovala jako „zvětšete o“. Když se poprvé setkala se slovem „zvětšit“, bylo to v aditivních operacích, kde se zvětšuje počet prvků, často spojených se signálním slovem „přidat“, „doplň“, někdy i „zvětšit o“. Co asi bylo ve vědomí žákyně, když uslyšela učitelčinu reakci? Myslela si, že úlohu vyřešila správně, ale otázka učitelky jí naznačila, že něco není v pořádku. Dívka nerozuměla reakci učitelky. Když by se toto později opakovalo, tak to pravděpodobně zablokuje jakoukoliv iniciativu žákyně – dívka rezignuje na další činnost. Výsledkem by bylo, že žákyně pouze čeká na instrukce učitelky. Nepřemýšlí nad problémem, ale přemýšlí, jak by to chtěla učitelka. Stává se neautonomní. Co by měl v takové situaci učitel dělat? Měl by přijmout řešení, a to tím způsobem, že se dívky zeptá, jak úlohu řešila. Dále by se měl zeptat třídy, co si o tom myslí. Měl by rozpoutat diskusi o řešení na tabuli. Velmi pravděpodobné je, že část třídy bude uvažovat stejně jako dívka a část stejně jako učitel. Vznikne hádka, kde děti budou dávat různé argumenty pro obhajobu svého názoru. Učitel se nakonec zeptá třídy, jak jsem se měl zeptat, abych dostal jednu, nebo druhou odpověď. Proč by měl být tento přístup lepší, než tomu je v ukázce? V tomto přístupu je lepší klima, podporuje žáka, či celou třídu argumentovat, formuje přesné vyjadřování, podporuje žákovu zodpovědnost za porozumění situaci, zvyšuje motivaci k porozumění.

SITUACE 2

Vyučovací hodina matematiky ve třídě 4. ročníku ZŠ, téma: pojmy „ar“ a „hektar“

V tematickém celku o obsahu rovinného obrazce se mimo jiné objevily nové pojmy „ar“ a „hektar“. Učitelka řekla žákům, že ar je obsah čtverce o straně 10 metrů (taková definice se též vyskytuje v učebnicích). Děti vypočítaly, že to je 100 metrů čtverečních. Následovala úloha, která spočívala ve výpočtu obsahu obdélníku o stranách 20 metrů a 5 metrů.

N.01: Ile wam wyszło?

U.01: Kolik vám vyšlo?

U.01: 100 m^2.

Ž.01: 100 m^2.

N.02: Widzicie ten prostokšt ma powierzchniù 1 ara.

U.01: Vidíte, že takový obdélník má obsah 1 ar.

U.02: Jak to? Przecież to nie jest kwadrat. . .

Ž.02: Jak to? Přeci to není čtverec. . .

Komentář: Je zřejmé, že definice vnesla žákům zmatek. Učitel by si měl uvědomit, že žáci nemají dostatečně vybudovanou představu aru. Ve vědomí žáků je díky definici ar spojen pouze s pojmem čtverec. Co mohl učitel udělat? Např. zadat úlohu: Alice a Jarka mají zahrádky. Alice má čtvercovou zahrádku o straně 10 metrů, Jarka má obdélníkovou zahrádku o stranách 5 a 20 metrů. Obě pěstují na těchto zahrádkách jahody. Která z nich má více místa na vysázení jahod?

ZÁVĚR

Uvedené a další získané situace často pocházejí z tradičních vyučovacích hodin matematiky. Je v nich vidět, že učitel nevyužívá vzniklé nedorozumění mezi ním a žákem jakožto výzvu k zahájení diskuse o problému, ze které by se mohl více dozvědět o myšlení žáka.

LITERATURA

[1] SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J., SWOBODA, E. (2006). Kognitywne przeszkody w komunikowaniu sie nauczyciel – ucze. *Dydaktyka Matematyki*, 29, Kraków : Polskie Towarzystwo Matematyczne, 185–207

EXPERIMENTOVÁNÍ V HODINÁCH MATEMATIKY

ZDENĚK ŠÍMA[1]

„Cílem vzdělání není osvojit si nejisté pravdy, ale osvojit si procesy, kterými je možné pravdy hledat a ověřovat.“

Učitel musí proto dodržovat jisté zásady:

- nebude žákům předkládat hotová vysvětlení, ale bude připravovat příležitosti k jejich objevování;
- bude žákům zadávat takové úkoly, v nichž se může uplatnit rozmanitost řešení, a tím umožnit skutečné porozumění;
- bude využívat skupinové diskuse, aby se žáci naučili přijímat i nezvyklá řešení a přemýšleli o nich;
- musí ve třídě vybudovat bezpečné prostředí, kde se cení názory každého jedince;
- bude hledat silné stránky žáka tak, aby si žák sám uvědomil, v čem spočívá jeho cena;
- bude využívat třífázového modelu procesu učení (evokace, uvědomění si významu informací, reflexe);
- musí vyvolat a udržet vnitřní motivaci žáků k učení;
- využívá při vyučování různé formy párových a skupinových aktivit;
- dává žákům dostatek příležitostí k sebereflexi;
- musí učit žáky stanovit si cíl učení, hledat efektivní cestu, která povede k cíli, musí umět vyhodnotit, jak je jeho učení úspěšné a umět nalézt v učení uspokojení;
- musí ovládat metody aktivního učení a způsoby rozvíjení kritického myšlení;
- musí se snažit o individuální přístup ke každému žákovi s respektem k jeho potřebám a možnostem;
- musí zadávat alternativní domácí úkoly;

[1]Gymnázium a SOŠ Aš; zdenek.sima@gymsos.com

- dávat prostor individuální práci (využívá fáze Já), práci ve dvojici (fáze Ty) a společné prezentaci poznatků (fáze My);
- spolupracovat aktivně s rodiči žáků;
- využívat při práci brainstorming;
- zadávat promyšlené skupinové práce formou projektů.

Jaký úkol zadávat? Ten, který:

- má více než jednu odpověď, nebo více než jedno řešení
- je zajímavý pro žáky
- přispívá žákům k obohacení dle jejich schopností
- je smyslově komplexní
- je pro žáky výzvou

EXPERIMENT S VĚKOVĚ RŮZNORODOU SKUPINOU DĚTÍ

Cílem je, aby žáci něco vymysleli, připravili a uskutečnili formou projektu. Využívám skutečnosti, že jsou žáci schopni pracovat metodou trojkroku. Nejprve pracuje každý žák samostatně a zaměří se na problematiku tak, jak se ve skupině žáci domluví.

Obr. 1: Vánoce a matematika. Ukázka.

Základním rysem matematicky gramotného jedince je kompetence rozeznat v úloze problém a slovně ho formulovat, sestavit matematický model situace a použít ho při řešení. Jedná se o přenesení řešení matematického problému do reálné situace.

Z kvantitativní analýzy výsledků vyplývá, že jen část respondentů dokáže správně interpretovat zadaný matematický model. To potvrzuje názor, že se žáci snaží často řešit problémy bez tvořivého přístupu. Zlepšení vidím v tom, že se skutečně žáci naučí pracovat tak, aby si rozdělili úkoly podle svých schopností a dokázali využívat při práci různé strategie.

LITERATURA

[1] Kopka, J.: *Výzkumný přístup při výuce matematiky*, Ústí n. Labem 2004, ISBN 80-7044-604-8.

[2] Kubínová, M.: *Přijdu na to sám*, Albatros Praha 2005, ISBN 80-00-01591-9.

PRAVDĚPODOBNOST A ZDRAVOTNÍ TESTY

MILENA ŠPINKOVÁ[1]

Vztah společnosti k pravděpodobnosti a statistice je u nás spíše negativní. Učitelé, údajně z nedostatku času, tuto látku vynechávají. Vždyť „se jedná jenom o kostky a mince“. Je to však omyl, jedná se o naše životy, a v tomto příspěvku na tuto skutečnost upozorním několika příklady.

HIV TESTY

Příběh Susan [1]. Při běžné lékařské návštěvě byla 26-tiletá svobodná matka Susan testována na HIV. Susan užívala drogy, ale ne nitrožilně a nepovažovala se za rizikovou osobu z hlediska viru. Test se však vrátil s pozitivním nálezem. Zpráva o Susanině diagnóze se rozšířila a nakonec ztratila práci. Za několik měsíců znovu podstoupila HIV test. Test se vrátil negativní! Původní vzorek Susaniny krve byl znovu testován a také byl negativní. Při prvním testu byl výsledek Susanina testu totiž zaměněn s výsledkem jiného pacienta, který byl HIV pozitivní! Omyl nejenže přinesl Susan zoufalství, ale také falešnou naději jinému pacientovi.

Příběh Davida [1]. David se dal anonymně testovat na HIV. Za dva týdny mu přišel pozitivní výsledek. Byl zničený. Jeho ošetřující lékař mu doporučil odjet do Kalifornie, kde je nejlepší péče o pacienty s HIV. Nový lékař trval na dalším testu. Představte si Davidův šok, když nový výsledek byl negativní! Lékař ho testoval znovu a výsledek byl opět negativní.

Okolo 0,01 procenta lidí bez známého riskantního chování je nakaženo virem HIV. Když takový člověk má virus, je 99,9 procentní pravděpodobnost, že výsledek testu bude pozitivní. Když člověk není nakažen, je 99,99 procentní pravděpodobnost, že výsledek testu bude negativní. *Když Vám vyjde pozitivní test na HIV, jaká je šance, že virus nemáte?* Uvažujme například 10 000 lidí, kteří nepatří do riskantní skupiny. Jeden je nakažen a bude mít nejspíše pozitivní test. Z ostatních 9 999 lidí bude mít další jeden také pozitivní test. Předpokládáme tedy, že dva lidé budou mít pozitivní test. Kolik lidí je skutečně nakaženo?

[1] Matematický ústav AV ČR, Praha; milena.sp@centrum.cz

MAMOGRAF [1]

Pravděpodobnost, že žena ve věku 40 let onemocní rakovinou prsu, je přibližně 1 %. V případě, že má rakovinu, je pravděpodobnost pozitivního testu na mamogramu 90 %. V případě, že nemá rakovinu, je pravděpodobnost negativního testu 91 %. *Jaká je pravděpodobnost, že žena s pozitivním testem má opravdu rakovinu?* Uvažujme 100 žen. Jedna má rakovinu a bude mít pravděpodobně pozitivní test. Z ostatních 99, které nemají rakovinu, 9 bude mít také pozitivní test. Tedy celkem 10 žen bude mít pozitivní test. Kolik z těchto žen, které mají pozitivní test má skutečně rakovinu? Pouze 1 z 10.

TESTY DNA [1]

Představte si, že jste obviněni z vraždy a postaveni před soud. Proti Vám je pouze jeden důkaz, ale potenciálně usvědčující: Vaše DNA se shoduje se vzorkem, který byl nalezen na oběti. (Připomeňme, že se neporovnává celá DNA, ale pouze její vybrané části). *Co z této shody vyplývá?* Přivolaný expert tvrdí: „Pravděpodobnost, že by se tato shoda vyskytla náhodou je 1:100 000.“ Už se vidíte za mřížemi. Nicméně představte si, že by specialista řekl stejnou informaci jinak: „Z každých 100 000 lidí se ukáže 1 shoda.“ Pokud žijete ve městě s 1 milionem dospělých obyvatel, najdete zde 10 lidí, jejichž DNA se bude shodovat se vzorkem DNA oběti. Zdá se velice nepravděpodobné, že by Vás tento fakt dostal za mříže.

Vioxx–LÉK NA TIŠENÍ BOLESTI [2, 4]

Pomohl miliónům a vydělal miliardy. Pak začal zabíjet. Jaká je historie léku proti bolesti „nové generace“? Vioxx byl velmi populární, společnosti Merck jen na něm vydělala 2,5 miliardy dolarů. Lék vyhnala v roce 2004 z trhu studie společnosti Whitehouse Station, která prokázala vyšší riziko srdeční zástavy a infarktu po dlouhodobém používání. Studie publikovaná v časopise The Lancet odhadovala, že Vioxx byl nejspíše příčinou 88 000 až 140 000 případů srdečních chorob. Wall Street Journal uvedl, že Merck toto riziko tušil již dříve. Vnitřní podnikové e-maily v roce 1997 zaznamenaly, že „možnost zvýšeného počtu kardiovaskulárních chorob je velmi znepokojivá“. O kolika lécích pravdu ještě neznáme!!!

JOHANNES VON KRIES (1853-1928) [3]

Již v 19. století upozorňoval na obtížnou aplikovatelnost běžné statistiky v lékařství. Pacienti, kteří onemocněli nějakou chorobou, nejsou nestranným výběrem – vybrala je choroba, a navíc jejich onemocnění nemají stejný stupeň, a ten ani nedovedeme spolehlivě určit. Také schopnost pacientů uzdravit se i bez léku je různá. Zdraví dobrovolníci sice mohou být vybráni nestranně, ale jejich reakce na lék může být zásadně odlišná od reakce nemocných. Dokonce podávaný lék může být pro zdravé jedince nebezpečný. Kromě toho se také nedávno bezpečně prokázalo, že farmaceutické firmy mají tendenci statistické výsledky falšovat.

Jaké máme pořadí?

Jistá očkovací látka vyvolává u 1 z 1000 dětí bolestivou reakci. Při očkování se jedno děvčátko zeptalo lékaře: „A kolikátá v pořadí jsem já?"

Závěr

Kolik lidí ročně umírá v důsledku nesprávné medikace? Kolik nevinných je neprávem odsouzeno? Kolika nehodám by se dalo předejít úvahami o spolehlivosti a pravděpodobné době života strojních a stavebních komponent? Jaké jsou znalosti z pravděpodobnosti a statistiky lidí, kteří rozhodují o našich životech (lékaři, soudci, technici, . . .)? Příklady musejí být z reálného života, musejí se studentů přímo dotýkat, aby je zaujaly.

Učit pravděpodobnost a statistiku ve škole není otázka osnov, ale naší osobní zodpovědnosti.

Poděkování: Práce byla vypracována v rámci výzkumného záměru AVOZ 10190503.

Literatura

[1] Gigerenzer G., *Calculated Risks: How to Know When Numbers Deceive You*, New York 2002, Simon & Schuster.

[2] Rosenthal, J. S., *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities*, Canada 2005, Harper Collins.

[3] Saxl I., Pravděpodobnost a statistika v našich životech. In Lávička, M., Bastl, B., Ausbergerová, M. (Eds.) *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Srní 2.–4. 2006. Vydavatelský servis, Plzeň 2006, s. 37–45.

[4] `http://www.protivioxxu.com/`

Úroveň zrakové paměti u dětí těsně před vstupem do základní školy

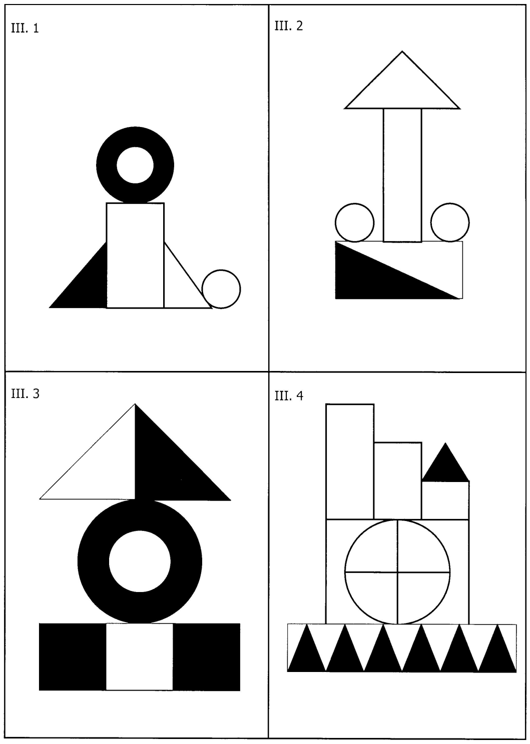
Jarmila Tomanová[1]

V tomto příspěvku bych vás chtěla seznámit s částí své diplomové práce, ve které jsem se zabývala zrakovou pamětí u dětí těsně před vstupem do 1. třídy. Experimentální část se skládala ze dvou částí: Zraková paměť u dětí před vstupem do základní školy a druhá část pak zraková paměť u týchž dětí po uplynutí 6 měsíců, tedy až po nástupu do 1. třídy.

[1] studentka PedF UK, Praha; jarkat2@seznam.cz

Experimentální část byla rozdělena na tři série aktivit. Jedna z nich zahrnovala reprodukci, druhá kompletaci a třetí komparaci celku na základě zrakového vnímání.

Dítě před vstupem do školy nevnímá stejným způsobem jako dospělý už jenom proto, že přechází z fáze celostního vnímání na vnímání analyticko-syntetické a má jiný typ zkušeností než dospělý.



Proč jsem se právě tímto tématem zabývala? Kladla jsem si otázky, do jaké míry zraková paměť ovlivňuje úspěšnost dítěte v matematice, a také zda MŠ dostatečně připravuje dítě na vstup do ZŠ z hlediska zrakového vnímání a zrakové paměti. Zraková paměť se podílí na obyčejných aktivitách v matematice, a to především tam, kde to dítě potřebuje. Např. když se podívá na tabuli a následně má cokoli zapsat do sešitu, v rámci krátkodobé nebo operační paměti musí uplatnit jak kompletaci, tak komparaci i reprodukci. Pro všechny procedury, které v matematice probíhají, se krátkodobá nebo operační paměť musí podílet. Dítě nemůže diskutovat o něčem, co si v paměti nedovede alespoň na chvíli uchovat.

Série aktivit spočívající v komparaci celku na základě zrakového vnímání zahrnovala zkoumání zrakové paměti na různých obrázcích stejného charakteru. Lze je charakterizovat jako kompozici z plošných geometrických tvarů. Obrázky byly stejně velké a byly vždy černobílé. Lišily se pouze v počtu jednotlivých částí a dále pak v poměru částí bílých/černých. Pro ilustraci jsem vybrala čtyři ze šesti předkládaných obrázků.

Jednotlivé obrázky jsem dětem předkládala postupně. Dítě se na obrázek podívalo, mělo si ho zapamatovat a následně pak vybrat z předložené nabídky. Těchto aktivit bylo celkem šest. Lišily se podmínkami k zapamatování a časovou prodlevou, která se pohybovala v rozmezí od několika vteřin po 15 vteřin. Čas k prohlížení obrázků jsem nelimitovala.

Podmínky k zapamatování byly tyto: Dítě sedí v lavici. . .

1. vidí obrázek, otočí ho, vybírá z možností

2. vidí obrázek, dá ho jinam (do lavice), vybírá z možností

3. vidí obrázek, zakryje ho, vybírá z možností

4. vidí obrázek, zanese ho na koberec, vrátí se do lavice, vybírá

5. obrázek je umístěn na tabuli, dítě se na něj podívá, jde do lavice, vybírá
6. vidí obrázek, otočí ho, následuje mluvené slovo (říkanka), vybírá

Následovalo vyhodnocení těchto aktivit, kdy mě zajímalo, zda dítě předložený obrázek na základě zapamatování vybralo správně, a pokud ne, s jakým typem obrázku z předložených možností ho zaměňovaly. Dále mě zajímalo, zda úspěšnost dětí ovlivní výše zmíněné rozdílné podmínky k zapamatování, a to jak u dětí předškolních, tak týchž dětí školního věku s odstupem času cca 6 měsíců.

Došla jsem k závěru, že děti předškolního věku v těchto aktivitách chybovaly celkem 20krát. Jejich chybovost spočívala převážně v záměně umístění jednotlivých detailů (14 ch z 20 ch). Po nástupu do ZŠ se chybovost u dětí výrazně nesnížila, ale zato se značně změnil její charakter. Ten spočíval v záměně černých a bílých částí (12 ch z 16 ch).

Sledovala jsem také úspěšnost zapamatovaných obrázků vzhledem k jejich typu. Očekávala jsem, že hůř zapamatovatelné obrázky budou ty, kde je vyšší celkový počet jednotlivých částí. To se nepotvrdilo u dětí předškolních, jejichž úspěšnost spočívala v poměru černých a bílých částí. Obrázky, které měly vyšší počet detailů zároveň obsahovaly i větší počet černých částí, čímž se pro děti předškolního věku staly snáz zapamatovatelné bez ohledu na to, že počet částí byl vyšší. Naopak děti školního věku, které se zaměřovaly spíš na detaily, v zapamatování takovýchto obrázků chybovaly. Z toho lze usuzovat, že dítě předškolního věku si snadněji zapamatuje obrázky plošné, dítě školního věku naopak obrázky dané čarou. Dále jsem zjistila, že rozdílné podmínky k zapamatování úspěšnost dětí nijak zvlášť neovlivnily. Pouze u aktivity č. 5 se chybovost u dětí předškolního věku vyskytla ve větší míře. To však nemuselo být způsobeno typem této aktivity, ale také tím, že obrázek byl v tomto případě, jako jediný ze všech aktivit, dítěti předložen v jiné poloze, na což dítě předškolního věku není zvyklé. V této souvislosti je nutno říct, že právě v této aktivitě, došlo k největšímu posunu úspěšnosti ve srovnání dětí předškolních a školních.

ZÁVĚR

My předpokládáme, že při vstupu do školy je zraková paměť do jisté míry rozvinutá, a také na ní často stavíme. V případě, že zraková paměť nefunguje, nebylo cílem mojí diplomové práce zjistit, že tomu tak je, ale jakých typů chyb se děti dopouštějí, aby v tomto smyslu byl učitel ZŠ na vstup dítěte do školy připraven. Aby věděl, co lze od dětí očekávat a co ne, aby v tomto ohledu na ně nekladl nepřiměřeně vysoké nároky.

PROBLÉMY S VYUŽÍVÁNÍM TZV. REKREAČNÍ MATEMATIKY

MARTA VOLFOVÁ[1]

Učitel má často vytvářet vlastní nové úlohy buď proto, že v užívané učebnici žádná další vhodná úloha už není, nebo že chce vytvořit obzvlášť přitažlivou, zábavnou – nebo zapeklitou, problémovou pro nadanější žáky, které již obvyklé školní úlohy mohou začít nudit. A tak, i když je v dnešních učebnicích mnoho skutečně pěkných úloh, přesto učitel rád sáhne po pomocníkovi, po nějaké z publikací rekreační matematiky (dále RM).

Nadaní žáci mohou část takové vhodné publikace sami prostudovat nebo sami zkusit řešit některé úlohy. (Jako příklad lze uvést Matematické pohádky L. Hozové, kdy se děti hned po prvním kontaktu s knihou s nadšením pustily do čtení a řešení úloh.) Kořeny rekreační matematiky sahají až do Starého Egypta. Často citovaný Rhindův (nebo Ahnesův) papyrus ze 17. století př. n. l. obsahuje 84 úloh s řešeními. Zřejmě již tehdy chápali, jak důležitou roli v učení hraje prvek poutavosti, zajímavosti – a tak mezi úlohami najdeme i takové, které pak byly po staletí přepisovány do dalších a dalších sbírek zábavné matematiky – např.

„V každém ze 7 domů žije 7 koček; každá kočka chytla 7 myší, každá myš by sežrala po 7 klasech, z každého klasu se mohlo urodit 7 měřic chleba.“ Kolik chleba tedy kočky zachránily?

K RM patří částí i babylónské klínové tabulky, které obsahují i zábavné úlohy a hlavolamy, matematické příručky ze Staré Indie a Číny i části většiny matematických děl středověké arabské kultury, „Liber abaci“ Leonarda Pisánského (s jeho úlohou o králících) z r. 1228, sbírka „Příjemných a zajímavých úloh, řešených pomocí čísel“ od C. G. Bacheta z r. 1612 aj. a aj.

Zásadní a originální přístup k RM prokázal téměř před 100 lety (v r. 1912) na 5. mezinárodním matematickém kongresu v Cambridge řecký matematik N. Hatzidakis, kdy vystoupil s pozoruhodnou přednáškou „Systematický kurz zábavné matematiky v SŠ“. Je asi škoda, že nikdo tuto myšlenku nezkusil realizovat a vyhodnotit výsledky. Myšlenka uplatnění RM tedy rozhodně nová není.

U nás na Univerzitě v Hradci Králové se pro využívání RM snažíme budoucí učitele připravit. Především musí o literatuře z RM vědět. Dostávají seznam (zatím 85) vhodných titulů MR, na výběrovém semináři (v 5. ročníku) se s některými publikacemi blíže seznámí, řeší i řadu zajímavých úloh a hlavolamů z nich.

Nabídka titulů RM stále roste, je dnes mnohem větší než před několika lety, a to hlavně díky překladům. Objevují se nové zajímavé úlohy a hlavolamy (také ovšem mnohé staré až prastaré, jen poněkud přeformulované).

[1]Katedra matematiky, PedF UHK; marta.volfova@uhk.cz

Má to však i problematickou stránku. Protože nakladatelé mohou celkem dle své vůle vydávat publikace, objevují se mezi tituly RM nezřídka i knížky se špatným překladem, se značnými nedostatky v užívání matematických termínů, s nejasně až zmateně zadanými úlohami, s úlohami, kde uváděný výsledek neodpovídá textu zadání aj.

Jako příklad uvádím publikaci P. Cartera a K. Russela „IQ testy – matematické kvízy a hádanky", Computer Press, Brno 2004), kde se všechny výše popsané neduhy vyskytují. (Bohužel však je – mezi jinými – doporučována učitelům matematiky v „Knížce pro učitele ke ŠVP na 2. stupni ZŠ".)

Nelze spoléhat na reklamu na obálce knihy – zde např. na zadní straně čteme: „Nebaví vás... nudné abstraktní vzorce a příklady, cítíte k nim nechuť? Potom je (tato) příručka... určena přesně pro vás... Příklady jsou připraveny formou vtipných kvizů, hádanek, veselých cvičení až po náročnější úlohy a matematické kuriozity..."; ale doporučíme-li ji žákovi, brzy zjistí, že některou úlohu nechápe (ale ona je kvůli špatnému překladu opravdu nejasná, např. str. 8, 19, 64), že kniha uvádí jiný výsledek než vyšel jemu (ale žák může mít pravdu, někde je uveden výsledek jen jeden, i když jsou řešení dvě, např. str. 21), že termíny a definice (např. str. 7, 63, 115–119) jsou podivné a matoucí apod.

Chci proto učitelskou matematickou obec upozornit na nutnost dobře prozkoumat (zejména přeložené) publikace dříve, než je doporučíme dětem – mohly by se setkat s výše popsanými nedostatky a případně zanevřít na celou matematiku a tak bychom třeba přišli o budoucího Cauchyho či Eulera.

Kromě prohřešků proti matematice sklouzávají některé publikace RM (snad ve snaze přiblížit se dnešnímu světu s jeho častým násilím a agresivitou) k úlohám, které citlivějšího člověka oprávněně odpuzují (např. „Oprsklá matematika").

Nevím, jak zabránit tomu, aby se takové publikace nedostávaly do rukou žáků. Snad by mohla být v nějakém didaktickém časopisu založena pravidelná rubrika o vydaných publikacích RM s doporučeními nebo i varováním.

Některé knihy jsou samozřejmě výborné – např. od T. Stickelse „Hlavolamy", přitažlivé je od J. Balla „Mysli si číslo", ze starších L. P. Močalov: „Hlavolamy" a již klasický B. A. Korděmskij „Matematické prostocviky". Z českých již uvedené Matematické pohádky L. Hozové, od J. Pěnčíka - J. Pěnčíkové „Lámejte si hlavu" a ze starších vynikající „Matematika kolem nás" od Z. Opavy.

Na Slovensku vyšel překlad „federálních" úloh MO kategorie Z pod názvem „Úlohy MO ZŠ" (Bratislava, IUVENTA, 2003). Podobný soubor úloh MO, rozdělený podle tématických zaměření a s náznaky řešení, jsme připravovali – (část ÚK MO) – i v Čechách – pro nedostatek zájmu o vydání (snad i peněz) se to bohužel nerealizovalo, i když by šlo o jistě lehce a dobře využitelnou zásobu zajímavých úloh.

Přeji všem učitelům šťastnou ruku při výběru dobrých publikací RM, (ať je stále z čeho vybírat) a úspěšné výsledky při jejich používání – v podobě lepšího vztahu dětí k matematice a dobrého klima na ZŠ.

Pracovní dílny

ŽÁKOVSKÁ TVORBA SLOVNÍCH ÚLOH

JIŘÍ BUREŠ, HANA HRABÁKOVÁ[1]

ÚVOD

Žákovská tvorba úloh patří mezi aktivity, kterými lze významně obohatit hodiny matematiky ve škole. V rámci výuky mají žáci možnost tvořit vlastní úlohy, což je součástí reálné podstaty matematiky jako vědní disciplíny (Kopka, 1996). Podle Silvera (1997) je školská matematika často velmi málo spojována s tvořivostí, ale matematika jako vědecká disciplína je na tvořivosti založena. Matematici si většinou úlohy tvoří sami, popř. navzájem (na rozdíl od žáků v rámci obvyklého průběhu vyučování).

Existuje mnoho různých způsobů, jak je možné zadat žákům, aby sami vytvářeli úlohy. Žáci mohou např. tvořit úlohy, v jejichž zadání se vyskytují předem daná čísla nebo úlohy s daným matematickým modelem. Dále mohou tvořit úlohy související s daným tématem, úlohy ke konkrétnímu příběhu nebo reálné situaci (např. v rámci projektu nebo přípravy školních akcí). V tomto článku se budeme zabývat žákovskou tvorbou originálních úloh.

TVORBA ÚLOH JAKO SOUČÁST RÁMCOVÉHO VZDĚLÁVACÍHO PROGRAMU PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

Žákovská tvorba úloh se objevuje také mezi očekávanými výstupy RVP pro základní vzdělávání v rámci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

Mezi očekávanými výstupy tematického celku ***Číslo a početní operace*** lze najít následující dovednosti: *Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace* (1. období), nebo *Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel* (2. období).

V rámci tematického celku ***Číslo a proměnná*** jsou například tyto očekávané výstupy: *Žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel; Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav;*
Žák analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.

K úspěšnému naplnění jednoho z očekávaných výstupů tematického celku ***Závislosti, vztahy a práce s daty***: *Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data* lze také přispět pomocí žákovské tvorby úloh.

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; buresjirik@seznam.cz, hanka.hrabakova@centrum.cz

Tvorba slovních úloh

Tvorba slovních úloh je jednou z částí problematiky, která je v zahraniční literatuře označována jako *problem posing*. V českém jazyce neexistuje jednoznačný překlad tohoto termínu. Silver (1994) popisuje *problem posing* jako skupinu tří různých matematických aktivit:

1. *Presolution posing* – tvorba zcela nových úloh na základě zadané situace
2. *Within-solution posing* – přetváření zadání úlohy v průběhu jejího řešení (interpretace zadání)
3. *Postsolution-posing* – obměňování výchozích podmínek nebo cílů úlohy již vyřešené

(Co když. . . ? Co když ne?)

Problem posing je většinou vnímáno jako dobrá a efektivní metoda práce v rámci vyučování matematiky. Silver (1993) nabízí několik různých pohledů na *problem posing* jako:

- nejvýznamnější součást matematické činnosti
- znak tvořivé činnosti nebo výjimečných matematických schopností
- okno do žákovského chápání matematiky a matematických pojmů
- nástroj ke zlepšení schopnosti řešit úlohy
- prostředek ke zlepšení žákovských postojů k matematice
- jeden z atributů problémového vyučování

Problem posing podle něj naznačuje, jaký obsah a charakter má školní zkušenost žáků s matematikou.

Bonotto (2006) poukazuje na skutečnost, že při aktivitách spojených s *problem posing* žáci interpretují a kriticky analyzují skutečnost tím, že oddělují důležitá data od nepodstatných, odhalují vztahy mezi nimi a rozhodují, jsou-li informace, které mají k dispozici, dostatečné k řešení daného problému. Tento proces je identický s procesem, který probíhá mimo školu, při řešení reálných životních problémů.

Tvorba originálních slovních úloh

Tvorba originálních slovních úloh je součástí Presolution posing (viz výše). Před zavedením pojmu originální slovní úloha se nejprve podíváme na následující skupinu slovních úloh a zkusíme se zamyslet nad tím, co mají jednotlivé úlohy společného a co mají rozdílného:

Úloha 1. *V nejmenovaném stánku s rychlým občerstvením proběhl malý dopolední průzkum prodeje hamburgerů, twistrů a sendvičů. Dohromady jich prodali 288. Bylo zjištěno, že hamburgerů se prodalo sedmkrát víc než twistrů a sendvičů o osm víc než twistrů. Kolik prodali hamburgerů, kolik twistrů a kolik sendvičů?*

Úloha 2. *Rákosníček, Křemílek a Vochomůrka pracovali o víkendu pro strýčka Skrblíka. Skrblíkovi se ale zdálo, že všichni nepracovali stejně, takže jim odměnu 1320 Euro rozdělil takto: Rákosníček dostal čtyřikrát víc než Vochomůrka, Křemílek dostal šestkrát víc než Vochomůrka. Kolik peněz dostal každý z nich?*

Úloha 3. *Firma měla původně na splnění zakázky 15 dní. Pokud by pracovala na dvě směny, dokončila by zakázku za 15 dní. Zákazník si přeje, aby firma splnila zakázku dříve. Za jak dlouho ji splní, bude-li pracovat na tři směny?*

Jednotlivé úlohy je možné porovnat podle různých kritérií, pro nás je vzhledem k zaměření dílny nejdůležitější hledisko matematického modelu, který lze využít při řešení daných úloh. První a druhou úlohu lze řešit pomocí stejného matematického modelu (přímá úměrnost, vztah části a celku), kdežto na vyřešení třetí úlohy tento model použít nelze a musíme použít jiný (nepřímá úměrnost). Pro popsání těchto společných a rozdílných vlastností slovních úloh zavedeme nyní následující pojmy:

Originální úlohou v rámci konkrétní skupiny úloh rozumíme takovou úlohu, k jejímuž vyřešení je potřeba použít **jiný matematický model**, než u ostatních úloh ze skupiny (viz Úloha 3).

Úlohy z jedné rodiny v rámci konkrétní skupiny úloh jsou takové úlohy, v jejichž řešení se objevuje **zcela nebo částečně stejný matematický model** (viz Úloha 1 a 2).

Konkrétní skupinu úloh můžeme tedy rozdělit na úlohy originální a úlohy z jedné rodiny. Rozdělení se vždy vztahuje k dané skupině úloh. Při posuzování stejné úlohy v rámci jiné skupiny se tak může z originální úlohy stát úloha patřící do jedné rodiny a naopak. Vzhledem k tomu, že se některé úlohy dají řešit více způsoby, mohou se objevovat různé varianty rozdělení úloh v rámci dané skupiny.

V průběhu dílny učitelé převzali roli žáků. Jejich úkolem bylo nejprve vytvořit ve čtveřicích dvě originální úlohy spadající do tematického celku *Racionální čísla a procenta*, čímž vzniklo celkem osm úloh. Poté byli učitelé rozděleni do dvou skupin a jejich úkolem bylo vytvořené úlohy analyzovat a rozdělit podle příbuznosti, tj. na originální úlohy a úlohy z jedné rodiny. Učitelé ve skupinách došli k různým rozdělením úloh s tím, že většinou ale nedodrželi předem stanovené kritérium rozdělení podle matematického modelu a zabývali se převážně tematickou příbuzností jednotlivých úloh. Z časových důvodů nedošlo během dílny na detailní rozbor úloh. Následující dvě úlohy vybíráme jako ukázku z vytvořených úloh:

Školní sportoviště lze pořídit za 15 000 000 Kč. Kolik sportovišť by bylo možno vybudovat za částku, která by se ušetřila, kdyby byl prezident ČR v roce 2008 zvolen v 1. kole 1. volby?

Soukromý zemědělec chce koupit traktor v Rakousku, protože je tam o 1/8 levnější než u nás. Kolik % ušetří?

Pro srovnání uvedeme ukázky úloh vytvořených v rámci aktivity „Vytvořte originální úlohu“žáky tercie pražského osmiletého gymnázia. Jedná se o první vytvořenou variantu, úlohy jsou přepsány přesně tak, jak je děti odevzdaly. Na úlohách je patrná přítomnost formulačních nepřesností, nejednoznačnosti i gramatických chyb. Při následném řešení úloh docházelo často k diskuzím autorů úloh se spolužáky, během kterých byli autoři často nuceni upravit úlohu tak, aby byla pro všechny srozumitelná a řešitelná. Z celkového množství 23 vytvořených úloh vybíráme na ukázku následující úlohy, na kterých jsou dobře patrné různé druhy nedostatků a nepřesností:

V divokém hejnu hus je 78 kusů ptáků. V hejnu je 2/6 houserů a zbytek hus. Polovička hus je dvouletých a polovička hus jednoletých. Všichni houseři jsou dvouletí. Husy dokáží létat po jednom roce a po 2. roce můžou mít housátka. Každá dvou a víceletá husa má 6 housátek. Husy se poklidně rozmnožovali dva roky. Po druhém roce je napadli vlci, kteří sežrali 148 dvou a víceletých hus/houserů. Hejno muselo odletět, neodletěli jen ti, kterým byl jeden rok. Když husy přelétali nad polem, tak 3/22 hus sestřelili pytláci. A 3/11 zbylých hus ustřelili nožičku. 16 hus umřelo cestou, z toho 9 mělo ustřelenou nožičku. Husy zahnízdili na ostrůvku uprostřed jezera. Kolik bylo na ostrůvku nohou, když tam byla ještě bobří rodina o sedmi členech?

V obchodě se prodávaly zvýhodněné džusy. 1. den se prodalo 9/18, 2. den 40 džusů a večer při kontrole zjistili, že 3/36 byly zapadnuty za regálem. Kolik džusů bylo celkem?

Při srovnání úloh vytvořených učiteli během dílny a žáky v rámci aktivity „Vytvořte originální úlohu“ je patrné, že tvůrci z obou skupin reagovali na zadání úkolu podobným způsobem – hledali originalitu zejména v obsahu zadání a nezaměřili se tolik na hledání originálních úloh z hlediska matematického modelu. Obě skupiny se také dopustily nepřesností způsobujících neřešitelnost vytvořené úlohy, u žákovských úloh se navíc často vyskytovaly pravopisné chyby.

Závěrečné poznámky: Přínos pro žáky a učitele

Tvorba originálních úloh má řadu konkrétních pozitivních dopadů na žáky, jejich přístup k matematice a jejich budoucí činnost v matematice. Při samostatné tvorbě úloh se žáci dostávají do nové role v rámci vyučovacího procesu, kdy se z pasivního příjemce úloh zadaných učitelem nebo učebnicí stávají samostatnými tvůrci úloh a blíží se tak samotné podstatě matematické aktivity. Při tvorbě úloh musí žák překonávat konkrétní překážky, jako např. formulační nepřesnosti, srozumitelnost zadání pro ostatní, smysluplnost a reálnost zadání a výsledků.

Během řešení a třídění úloh mají žáci možnost rozvíjet schopnost řešit nestandardně zadané úlohy, odhalovat matematický model úloh, hledat společné a rozdílné znaky úloh a třídit úlohy podle konkrétního kritéria. Při řešení úloh je často potřeba opravit a upřesnit některá zadání, což napomáhá ke zlepšení schopnosti přesně formulovat matematickou úlohu.

Při práci ve skupinách je rozvíjena schopnost komunikace a spolupráce ve skupinách a žáci jsou nuceni formulovat a prezentovat vlastní názor.

Zařazení tvorby originálních úloh do výuky představuje vhodný motivační, pracovní a diagnostický nástroj pro zkvalitnění práce žáků i učitele v hodinách matematiky. Nejnáročnější etapou pro učitele může být přimět žáky, aby vůbec vytvořili nějaké úlohy. Motivující může být např. práce na společné sbírce úloh pro mladší spolužáky, tematické projekty, soutěž o nejlepší úlohu atd. Způsob zadání záleží vždy na konkrétních podmínkách a situaci.

Při práci s vytvořenými úlohami se učitel musí někdy vypořádat s nesrozumitelností, nejednoznačností, nesmyslností zadání a výsledků nebo neřešitelností úloh. Nabízí se však možnost přenést zodpovědnost na žáky tím, že při řešení slovních úloh si žáci nejasnosti opraví navzájem a učitel působí pouze jako organizátor a moderátor diskuze.

Tvorba originálních úloh je jednou z možností, jak vnést netradiční prvek do výuky s tím, že oproti jiným alternativním metodám práce není pro učitele tak náročná na přípravu jako např. interdisciplinární projekty, protože tvořivá činnost je v rámci této aktivity vyhrazena žákům.

LITERATURA

[1] Bonotto, C. (2006): Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. s. 33–40. Praha: PME.

[2] Cifarelli, V., Cai, J. (2006): The role of self-generated problem posing in mathematical exploration. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5. s. 369–376. Praha: PME

[3] Koman, M., Tichá, M. (1998): On travelling together and sharing expenses (Examples of investigation of situations). *Teaching Mathematics and its Applications* Vol. 17, No. 3. s. 117–122

[4] Kopka, J. (1996): Problem Posing and Learning of Mathematics, In *Didactics of Mathematics, Proceedings of the Seminar of Doctoral Students*, Praha. s. 13–15

[5] Silver, E.A.(1994): On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 14, No. 1 s. 19–28.

[6] Silver, E.A.(1997): Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Vol. 29, No. 3. s. 75-80

[7] Silver, E.A., Cai, J.(1996): An analysis of aritmetic problem posing by middle school students, *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, No. 5, s. 521–539.

[8] Silver, E.A., Mamona-Downs, J., Leung, S.S., Kenney, P.A. (1996): Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 27, No. 3, s. 293–309.

VYUŽITIE DOMINA PRI ZÍSKAVANÍ POČTOVÝCH ZRUČNOSTÍ

MATÚŠ HARMINC[1]

Táto pracovná dielňa bola určená hlavne vyučujúcim na prvom stupni základnej školy. Mala im ukázať použitie súpravy hracích kameňov spoločenskej hry známej pod menom Domino na hodinách matematiky za účelom získavania a rozvoja počtových zručností a zároveň priblížiť tvorbu takýchto aktivít s pokusom o vytvorenie ďalších.

Predviedli sme štyri párové aktivity. Prvé dve z nich sú zamerané na precvičenie a upevnenie sčítania a odčítania v prvom, resp. v druhom ročníku základnej školy. Tretia a štvrtá sú zamerané na sčítanie dvojciferných čísel, rozvoj kombinačných zručností a propedeutiku absolútnej hodnoty. O všetkých štyroch sme už písali pred časom v [1]. Posledná časť dielne mala byť venovaná spoločnému rozboru ďalších možností využitia domina vzhľadom k potrebám výučby matematiky a návrhom na variácie pravidiel a hodnotenia uvedených štyroch herných aktivít.

PRVÁ AKTIVITA: O SÚČTE A JEHO ROZKLADE

Táto aktivita je určená žiakom v prvom, prípadne v druhom ročníku základnej školy. Je zameraná na sčítanie čísel v obore od 0 do 12 a na ich rozklad na dva sčítance. Hodí sa na precvičovanie a upevňovanie sčítania a odčítanie a systemizáciu niektorých vlastností týchto operácií (napr. komutatívny zákon pre sčítanie). Uskutočňuje sa formou hry vo

[1]ÚMV PF UPJŠ, Jesenná 5, Košice; matus.harminc@upjs.sk

dvojiciach, v ktorej proti sebe hrajú jednotlivci. Žrebom alebo dohodou sa určí, ktoré dieťa hru začne, pri ďalšej hre začne druhé z dvojice.

Súprava domina je rozložená na lavici chrbtom nahor, takže nie je vidieť, kde je koľko bodiek. Najprv prvé dieťa náhodne vyberie jeden hrací kameň domina a pozrie si ho tak, aby druhé dieťa nevidelo, čo na ňom je. Sčíta počty z oboch štvorcových polí vybratého kameňa a oznámi druhému dieťaťu tento súčet. Druhé dieťa si toto číslo vypočuje, na základe predošlého vývoja (ak už tomu nejaký predchádzal) oznámi svoj tip na počty v jednotlivých poliach a zapíše si tento tip. Ak bol jeho tip správny, získava bod (alebo ten kameň), ktorý si zaznačí. Ak nie, zapíše aj správnu možnosť a bod (kameň) získava súper. Uvedieme ukážku. Prvé dieťa oznamuje: „Osem.“ Druhé zapisuje: $8 = 6 + 2$, ale keďže to bol kameň obsahujúci 5 a 3, doplní svoj zápis takto: $8 = 6 + 2 = 5 + 3$.

Po tomto procese si deti vymenia roly: druhé vyberá kameň, oznamuje súčet a prvé tipuje, aké sčítance tento súčet vytvárajú na vybratom kameni. Pokračujeme v ukážke: Druhé dieťa pokračuje výberom kameňa a oznamom: „Osem.“ Prvé tipuje a zapisuje: $8 = 4 + 4$. A keďže (dajme tomu) to je pravda, doplní svoj zápis nejakou značkou (akou chce, napr.: $) na znamenie, že tu získalo bod (dostane tento kameň). Nasleduje zápis, ktorý zachytáva možný priebeh prvých šiestich ťahov so ziskom štyroch bodov (a dvoma neúspešnými tipmi):

1. dieťa	2. dieťa
$8 = 6 + 2 = 5 + 3$	$8 = 4 + 4$ $
$2 = 1 + 1$ $	$3 = 2 + 1$ $
$4 = 3 + 1 = 2 + 2$	$11 = 5 + 6$ $

V tejto chvíli je vyhráva druhé dieťa, má viac značiek úspešnosti (získaných kameňov). Hrajú dovtedy, kým sa neminú všetky kamene. Porovnajú si počty úspešných tipov (kameňov). Potom všetky hracie kamene opätovne rozložia chrbtami nahor a hrajú túto hru s vymeneným poradím. Ak niektoré dieťa vyhrá obe hry, je víťazom, inak je remíza.

Podľa situácie a pokročilosti môžeme vynechať zapisovanie priebehu. Rovnako sa môžeme dohodnúť (ale nie hneď v prvých hrách), že odohrané kamene sa už neprezerajú, čím podporíme činnosť krátkodobej pamäte. Táto hra so sebou prirodzeným spôsobom prináša okrem predstáv malých mohutností aj propedeutiku pojmov častý a zriedkavý.

Druhá aktivita: o súčte a riziku

Aj táto aktivita je zameraná na sčítanie čísel, ale už v obore do 100 (fakticky stačí do 50). Rovnako ako pri prvej aktivite hrajú vo dvojiciach proti sebe jednotlivci, žrebom alebo dohodou sa určuje začínajúce dieťa (pri druhej hre sa zmení začínajúci), súprava domina je rozložená chrbtom nahor.

V každom kole zbiera dieťa body tak, že si vyberie jeden kameň a ukáže jeho bodové hodnoty. Ak jedno pole vybraného kameňa znázorňuje nulu, alebo ak dokonca obe polia sú prázdne, v tomto kole nezískava žiadny bod. Toto pravidlo sa uplatňuje v ktoromkoľvek okamihu hry. Ak však obe polia sú nenulové, pripočíta si ich hodnoty k bodom získaným v tomto kole. Potom sa rozhodne, či ukončí toto svoje kolo dobrovoľne, pripočíta si súčet z tohto kola k zisku z predošlých kôl a nechá ťahať druhé dieťa. Ak nie, ak sa teda rozhodne v tomto kole ešte pokračovať ťahom ďalšieho kameňa, riskuje, že vytiahne kameň s nulou a nezíska v tomto kole nič.

Na ukážku si predstavme, že dieťa vytiahlo kameň $7 = 2 + 5$. Rozhodne sa ťahať ďalej, lebo 7 bodov sa mu máli. Potiahne ďalší kameň $6 = 6 + 0$. Nezískava teda v tomto kole vôbec žiadny bod. Nasleduje druhé dieťa, vyberie si kameň $4 = 1 + 3$ a oznámi, že mu to stačí, získalo 4 body a opäť ide prvé. Má smolu, potiahne $0 = 0 + 0$ a zase nezískava nič. Druhé nasledovne ťahá kameň $5 = 3+2$, pokračuje ďalej a ťahá $3 = 0+3$. Za toto kolo teda ani jedno dieťa nezískalo nič, celkový stav je 0 ku 4, zatiaľ vedie druhé dieťa.

Ťahané kamene sa do hry nevracajú, tie, za ktoré sa započítavajú body, si nechávа príslušné dieťa, ostatné sa kladú nabok. Podobne ako pri prvej aktivite je v prvých hrách rozumné povoliť nazerať do odohraných kameňov, neskoršie túto informáciu nechať na pamäť hrajúcich detí. Vyhráva dieťa, ktoré prvé dosiahne alebo prekročí hranicu 50 bodov. Ak sa tak nestane ani po vyčerpaní kameňov, víťazí to dieťa, ktoré nahralo viac bodov.

Je možné hodnotiť aj presnejšie určovaním rozdielu medzi nazbieranými bodmi oboch detí. Vo výsledku sa takto odzrkadlí vzájomný vzťah úspešnosti detí. Je možné vyhodnotiť rekord získaných bodov za celú triedu alebo zostaviť rebríček, prípadne najvyšší bodový zisk dieťaťa v jednom kole. Je možné pozmeniť aj pravidlo o počte detí pri jednej súprave domina na tri (štyri je už veľa) dokola sa striedajúce deti.

Táto hra upozorňuje na výnimočnosť nuly (neutralita vzhľadom k sčítaniu a agresivita vzhľadom k násobeniu). Vedľajším efektom môže byť rozvoj zodpovednosti za vedomé riziko (ťahám ďalej), propedeutika pravdepodobnosti (akú mám šancu, že nepotiahnem kameň s nulou) a skúsenosť so strategickým rozhodovaním a jeho vhodnej zmeny (zmeniť stratégiu podľa vývoja hry, podľa stavu získaných bodov či podľa počtu odohratých kameňov s prázdnym poľom).

Tretia aktivita: o súčte a kombináciách

Táto aktivita je tiež párová a je určená žiakom na precvičenie a upevnenie sčítania dvojciferných čísel a prechodu cez 100, tiež systemizuje desiatkovú sústavu a komutatívnosť sčítania. Žrebom alebo dohodou sa určí začínajúce, druhú hru sa poradie vymení. Súprava domina je rozložená na lavici chrbtom nahor.

Deti si striedavo berú zo spoločnej kopy po jednom kameni. Ak jedno pole kameňa znázorňuje nulu (napr. 0 a 5), môže tento kameň použiť ako taký násobok desiatky, aký počet znázorňuje druhé z polí tohto kameňa (t.j. ako číslo 50). Ak ani jedno z polí neznázorňuje nulu (napr. 2 a 5), môže kameň použiť otočený tak, ako sa mu to hodí (buď ako 25, alebo ako 52). Ak obe polia tohto kameňa znázorňujú nulu, dieťa si zoberie namiesto neho náhradný kameň. Deti berú striedavo po jednom kameni dovtedy, kým sa niektorému z nich nepodarí pomocou sčítania z dvojciferných čísel znázornených niektorými svojimi kameňmi utvoriť číslo 100, alebo kým sa kamene nevyčerpajú. Nemusí na to použiť všetky svoje kamene. Ťahané kamene sa do hry nevracajú.

Na ukážku: prvé dieťa má už vybraté štyri kamene (0 a 2), (0 a 6), (5 a 1), (2 a 2). Ako piaty vyberie (4 a 3), pomocou ktorého zostaví číslo $100 = 20 + 15 + 22 + 43$. Druhé dieťa má vybraté kamene (1 a 0), (1 a 1), (1 a 3), (0 a 3), ako piaty (2 a 1). Z nich nevie utvoriť číslo 100, najbližšie k nemu utvorí $103 = 10 + 11 + 31 + 30 + 21$.

Vyhráva to dieťa, ktoré ako prvé zloží 100 zo svojich kameňov. Získava toľko bodov, aký je rozdiel medzi číslom 100 a číslom najbližším ku 100, ktoré vie utvoriť v tom okamihu druhé dieťa z dvojice. V našej ukážke to boli teda iba tri body. Možným výsledkom je aj remíza, keď deti oznámia zostavenie súčtu 100 v rovnakom kole (alebo keď ani po vyčerpaní všetkých kameňov sa číslo 100 nedarí zostaviť a obe sa rovnako priblížia k číslu 100 a jedno z ktorej strany). Aj pri tejto činnosti je možné vyhodnotiť rekord získaných bodov za celú triedu alebo rekord za najmenší počet kôl, či použitých kameňov, prípadne zostaviť rebríček. Ak chceme klásť o trochu väčšie nároky na čas sústredenia a trpezlivosť detí, môžeme zvýšiť dosahované číslo zo 100 na 120. Túto hru je možné hrať aj v trojiciach, štvorice už neodporúčame kvôli počtu hracích kameňov. Okrem tréningu kombinačnej zručnosti sa ňou systemizuje pozičná sústava (prechod cez desiatku).

ŠTVRTÁ AKTIVITA: O SÚČTE, DVOJNÁSOBKU A ODPOČÍTAVANÍ

Uvedieme najprv verziu tejto hry s pôvodným bodovým hodnotením výkonov. Ako vyššie, aj teraz hrajú dve deti. Poradie možno určiť žrebom, v druhej hre bude vymenené. Prvé dieťa oznámi svoju veštbu čísla (deti samé prídu na to, že v rozmedzí od 1 do 23), potom si vyberie dva hracie kamene domina zo súpravy rozloženej na lavici chrbtom nahor. Môže nastať jedna z troch nasledujúcich situácií:

(1) ak veštené číslo je presne súčtom všetkých štyroch čísel znázornených vybratými kameňmi, dieťa si pripočíta v tomto kole bodový zisk rovný dvojnásobku vešteného čísla;

(2) ak veštené číslo je menšie ako tento súčet, ale dieťa ho vie pomocou čísel znázornených vybratými kameňmi získať ako súčet troch alebo dvoch čísel, alebo je dokonca jedným z týchto čísel, pripočíta si v tomto kole bodový zisk rovný ním veštenému číslu;

(3) ak z akéhokoľvek dôvodu nevie utvoriť veštené číslo (hoci aj preto, lebo bolo väčšie než súčet všetkých štyroch čísel znázornených na poliach vybraných kameňov), odpočíta si od celkového bodového zisku rozdiel medzi bešteným číslom a súčtom všetkých štyroch znázornených čísel.

Ukážky: keby dieťa veštilo číslo 10 a následne vytiahlo kamene (5 a 1) a (0 a 4), získalo by 20 bodov, lebo $20 = 5 + 2 + 0 + 3$; keby veštené číslo bolo 9, získa 9 bodov, lebo vie utvoriť $9 = 5 + 4$; napokon keby veštené číslo bolo 8 a dieťa utvorí $6 = 5 + 1$

(v prípade, že ho nenapadne utvoriť $9 = 5 + 4$), odpočítavajú sa mu dva body, lebo $8 - 6 = 2$ (keby utvorilo číslo 9, odpočítal by sa mu iba jeden bod).

Ťahané kamene sa do hry nevracajú. Deti striedavo veštia a berú po dva kamene dovtedy, kým niektoré z nich dosiahne alebo prekročí hranicu 60 bodov. Celkový zisk bodov dieťaťa je rovný rozdielu medzi jeho počtom bodov a počtom bodov jeho partnera v tomto okamihu. Vyhodnocovať môžeme aj rekord za celú triedu, aj rebríček najúspešnejších.

Vzhľadom k tomu, že záporné čísla a počítanie s nimi sa dostali do vyšších ročníkov, navrhujeme nezačínať od nuly, ale od kreditu 40 bodov a cieľ postaviť 100 bodov. Kto však svojou hrou zíde pod nulu, prehráva a zisk vyhrávajúceho je rovný počtu jeho bodov v tomto momente. Okrem precvičenia sčítania a odčítania čísel a ich porovnávanie sa touto hrou systemizuje zdvojnásobovanie, rozvíja kombinačná zručnosť a pripravuje pravdepodobnosť a absolútna hodnota.

Všetky vyššie uvedené aktivity zamestnávajú čiastočne aj ruky a mimovoľne nútia deti rozvíjať skúsenosť s počítaním bez písania na papier. V prípade potreby im to však v žiadnom prípade nezakážme. Je vhodné vyrobiť si sady domina na iných vyučovacích hodinách napríklad z tvrdého papiera. Už pri výrobe si deti mimovoľne všímajú rôzne matematické skutočnosti (počet potrebných kartičiek-kameňov, dvojice čísel na nich, prázdne pole symbolizujúce nulu, vzorky symbolizujúce iné čísla). Nezaškodí, ak si v druhej fáze vyrobia aj svoje originálne dominové súpravy, líšiace sa od štandardných napríklad vzorkami čísel.

Literatura

[1] Harminc, M.: Aktivity s dominom v elementárnej matematike, *Orava Journal*, 2 (2001), No. 2, 16–17.

Algebraické výrazy na základní škole

Miroslav Hricz[1]

Probíhající reforma ve školství předpokládá, že každý učitel bude disponovat různými metodami, prostředky a formami práce, kterými podpoří rozvoj kompetencí a kapacit svých žáků. Bude na něm, které z nich zvolí, pro jakou vzdělávací strategii se rozhodne.

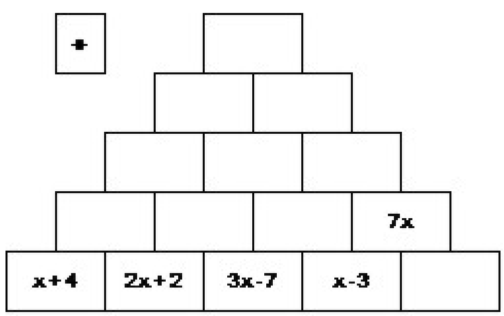
[1]FZŠ Táborská 45/421, Praha 4, www.zstaborska.cz; miroslav.hricz@centrum.cz

Volbu mu usnadňuje školní vzdělávací program, celkové nasměrování školy, na které působí.

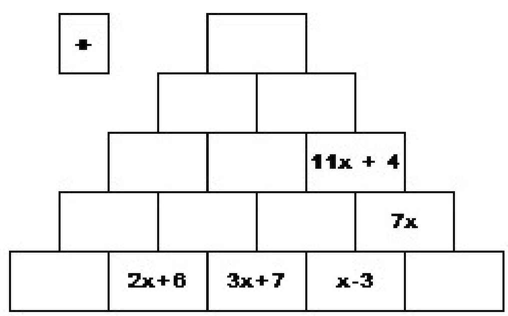
Jsem hluboce přesvědčen, že výše uvedené je možné naplňovat ve všech oblastech matematického vzdělávání. Úpravy algebraických výrazů často činí žákům obtíže. Právě proto je nutné propedeutice, upevňování a prohlubování tohoto učiva věnovat dostatečné množství času. Tímto tématem jsem se zabýval již v minulých letech. Tento příspěvek bude navazovat na [1].

Připravil jsem další čtyři pyramidy na procvičování sčítání algebraických výrazů. V první je snadné dopočítat výraz na vrcholu pyramidy. Řešení pyramidy 2 není jednoznačné. Je nutné zvolit v jednom políčku výraz, aby bylo možné určit výraz na vrcholu pyramidy. Úkolem pyramidy 3 není určit výraz na vrcholu pyramidy, ale doplnit zbývající políčka. Nejčastější chybou je chybějící kontrola, zda součet v předposledních řádcích Pyramida 4 je pro žáky komplikovaná, na několika místech musí odhalit chybu. Výsledkem je pak částečně doplněná pyramida. Mnozí žáci určí, že pyramidu nelze doplnit (úloha nemá řešení).

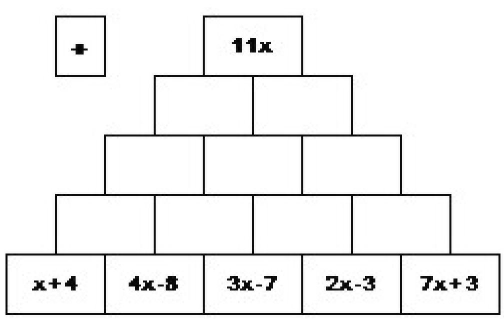
Symbolika matematického myšlení prošla dlouhou a náročnou cestou vývoje, jak ukazuje historie matematiky. Současná symbolika algebry vznikla na konci 16. století. Jejím objevitelem byl francouzský matematik Francois Viéte (1540–1603). Nahrazování čísel písmeny znamenalo velký pokrok. Jeho jazyk mimo jiné přispěl k rozvoji infinitezimálního počtu a analytické geometrie. Je proto velmi důležité, aby upevňování a prohlubování učiva byl věnován dostatečný čas.



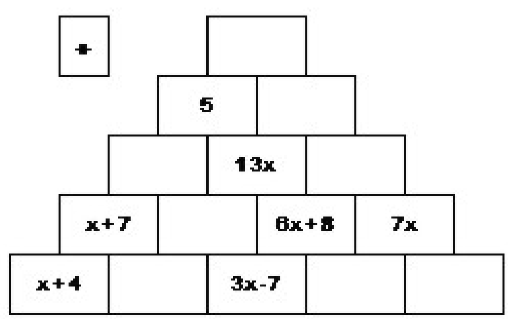
pyramida 1



pyramida 2



pyramida 3



pyramida 4

Literatura

[1] Hricz, M. (2004) Algebraické výrazy v 8. ročníku ZŠ. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2004*, sborník příspěvků, Praha: UK-PedF.

[2] Hejný, M. a kol. (1990): *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN Bratislava.

[3] Novotná, J. a kol. (1998): *Matematika s Betkou 3, učebnice matematiky pro 8. ročník*. Scientia, Praha.

[4] Novotná, J. a kol. (1998): *Matematika s Betkou 3, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 8. ročník*. Scientia, Praha.

[5] Novotná, J. a kol. (2000): *Matematika s Betkou 4, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 9. ročník*. Scientia, Praha.

Není jenom SUDOKU aneb využití japonských rébusů ve výuce matematiky

Rudolf Chloupek[1]

Úvod

Z velkého množství „japonských" rébusů je zřejmě nejrozšířenější Sudoku, které zaplavilo i české časopisy a stalo se značně oblíbenou zábavou dětí i dospělých. V matematice ZŠ má ale omezené použití, i když jím rozvíjíme logické myšlení a kombinační schopnosti. Tento druh hádanek lze využít spíš pro volnější hodiny jako relaxaci, úkoly navíc apod.

Z nabídky úloh byly pro dílnu vybrány rébusy s geometrickým základem. Tyto úlohy patří k netradičním úlohám vhodným k využití na druhém stupni základní školy (viz RVP ZV).

Pomocí těchto úloh se rozvíjejí geometrické představy žáků, například pojmy obsah a obvod mnohoúhelníku. Výsledků lze však využít i v mnoha jiných souvislostech s učivem matematiky. Úlohy motivují a aktivizují žáky a vedou je k systematické práci podle daných pravidel a rozvíjejí tak řadu klíčových kompetencí žáků. Jejich využití ve školské matematice může být překvapivě efektivní.

[1]Základní škola Jihlava, Kollárova 30; rchloupek@zskol.ji.cz

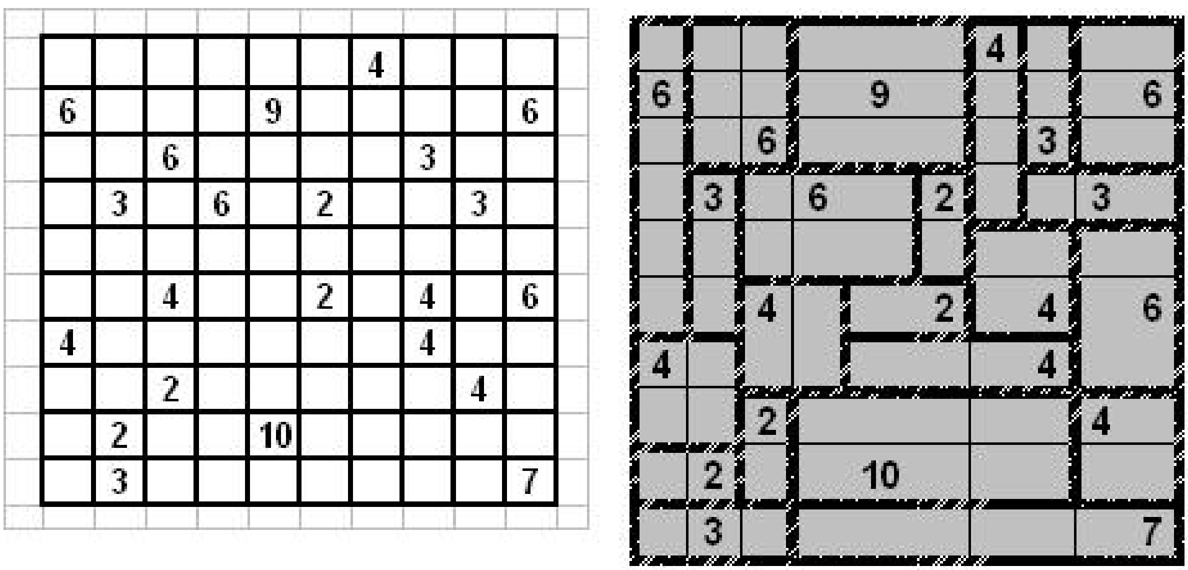
Účastníci dílny se seznámili s hrami Sikaku, Fillomino, Nurikabe, Slitherlink a Masyu, jejich možným použitím ve výuce, diskutovali o možnostech využití ve výuce a zkusili si některé úlohy vyřešit.

SHIKAKU

Hra pracuje s obsahy pravoúhlých rovnoběžníků různých tvarů a má poměrně jednoduchá pravidla:

Rozděl čtvercovou síť úplně na nepřekrývající se obdélníky a čtverce tak, aby v každém útvaru bylo obsaženo právě jedno políčko s číslem. Toto číslo určuje obsah pravoúhelníku.

Zájem o Shikaku (někdy Sikaku, Divide by Box) podnítil i rozhovor s kolegy o problematice mechanického používání vzorců, špatném rozlišování obvodu, obsahu a objemu žáky.



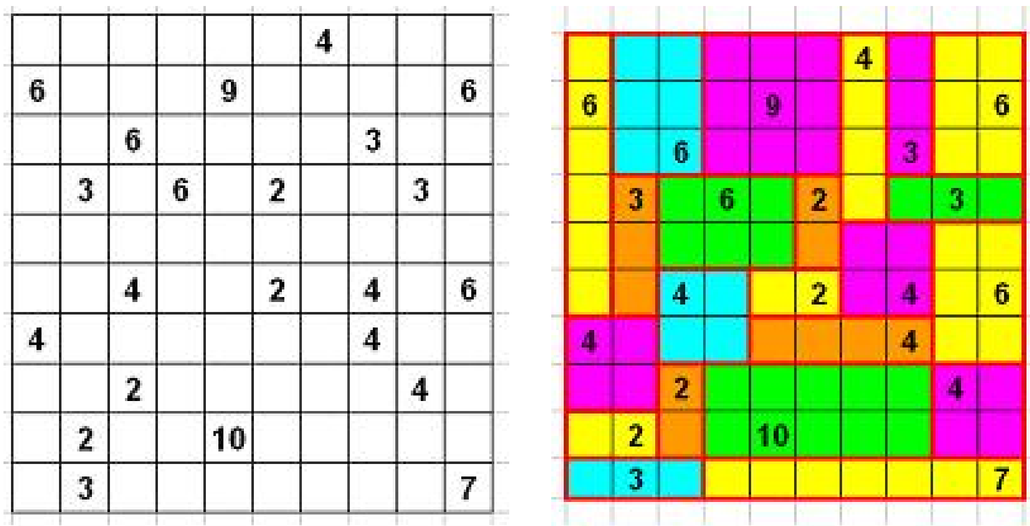
Obr. 1: Shikaku

Místo dlouhého povídání si všechno vysvětlíme na příkladu: Vlevo na obr. 1 vidíte zadání úkolu, vpravo je úkol vyřešen (úloha je vytvořena pomocí tabulky ve Wordu). Zvolíme-li větší hrací pole (nemusí být nutně čtvercové), můžeme použít i obrazce s větším obsahem. Na hru pak může navázat diskuse o možných rozměrech pravoúhelníků s daným obsahem, hledání mnohoúhelníku s nejmenším a největším obvodem při daném ob-sahu apod.

Možná obměna je v tom, že si žáci vyrobí příslušné tvary pravoúhelníků z tvrdšího papíru a obarví je. Při hře samotné je umísťují na hrací plochu. Odpadá tak gumování a lépe se cvičí prostorová představivost. Manipulací s tvary se s nimi a jejich vlastnostmi žáci blíže seznamují.

Zajímavé je také využití připravených tvarů pro posouzení dělitelnosti čísel. Jaký tvar má pravoúhelník, jehož obsah reprezentuje prvočíslo?

Další využití připravených pravoúhelníků a samotné hry už ponechám fantazii čtenáře. K řešení Shikaku se dá velmi dobře využít i MS Excel. Stačí mít zadání ve formě tabulky. Pak už jenom zapneme nástroj ohraničení, zvolíme silnější čáru a barvu ohraničení a můžeme začít. Chybné tahy se dají zrušit tímtéž nástrojem pomocí gumy.

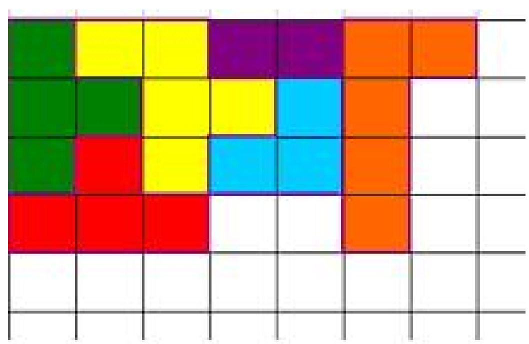


Obr. 2: Shikaku

Pro žáky je však v určité fázi mnohem zábavnější, jestliže úlohy připravují sami. I v tom jim může počítač pomoci.

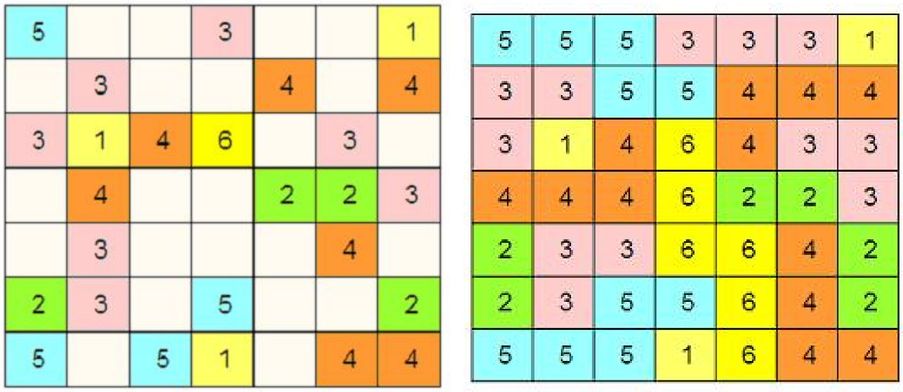
FILLOMINO

Tato hra je podobná předchozí, místo obdélníků však používá tzv. polymina, tj. mnohoúhelníky, které jsou sestaveny z navzájem se nepřekrývajících čtverců dotýkajících se stranami.



Obr. 3: Polymina

Úkolem hráče je zcela vyplnit hrací mřížku těmito útvary, přičemž do prázdných políček vepisuje čísla podle daného obsahu. Názornější je, pokud řešitel políčka příslušná k téže části vybarvuje. Dvě stejně velká polymina se nesmí dotýkat stranou.



Obr. 4: Fillomino 1, fillomino 2

NURIKABE

Další hra může navazovat na předchozí. Opět se týká se mnohoúhelníků složených ze čtverců, které se navzájem nepřekrývají (polymina).

Princip hraní je následující – v hracím plánu rozděleném na čtverečky se nachází několik čtverečků, na kterých jsou čísla označující, z kolika čtverečků se daný ostrov skládá. To znamená, že má-li číslo jedna, není potřeba přidávat čtverečky, kdežto když má číslo čtyři, je třeba na ostrůvek připojit další tři čtverečky (Na ostrůvku smí být jen jedno číslo a neexistují ostrůvky bez čísla). Zní to sice složitě, ale jakmile objevíte jak na to, hra vás uchvátí.

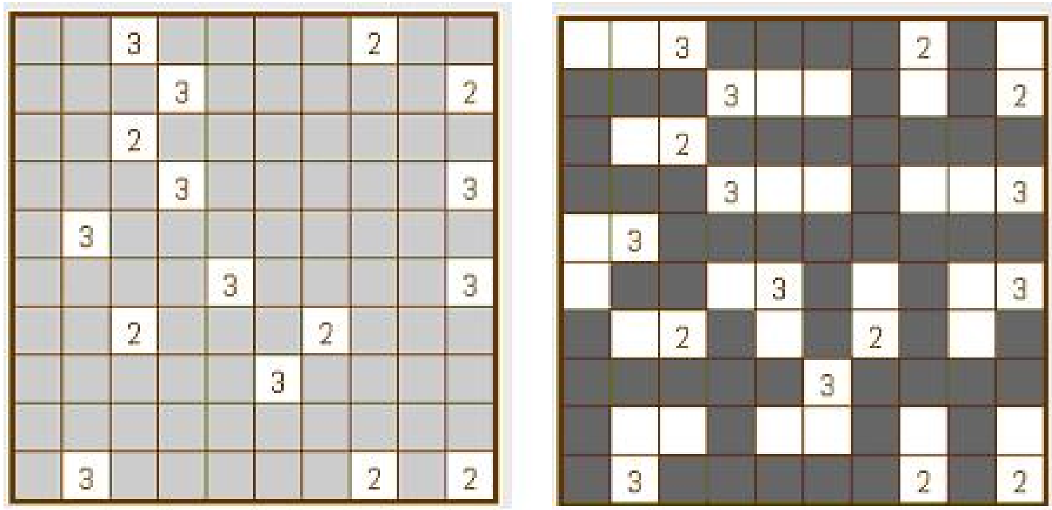
Ano, ještě je třeba zbylé čtverce obarvit na modro (nebo jinak), aby vznikl jakýsi dojem, že se jedná o modrou lagunu se spoustou atolů. Kromě dělání ostrůvků se musíte řídit dalšími, neméně významnými, pravidly. Zaprvé, je třeba, aby všechny ostrovy byly propojeny vodou a nevznikaly mezi nimi rybníčky bez přístupu do moře. Dále se dva různé ostrovy spolu nemohou dotýkat jinak, než rohy a posledním pravidlem je, že na mapě nesmí vzniknout modré útvary větší než 2 x 2 čtverečky.

Hra podporuje prostorovou představivost a logické myšlení. Ukazuje, že stejný obsah mohou mít velice různé rovinné útvary a slouží k výpočtům složených útvarů. Didakticky se dá opět využít nejen hra, ale i připravené hrací objekty. Pokud si žáci připraví různá polymina, dají se velmi dobře použít i k demonstraci shodností a shodných zobrazení, skládání různých tvarů apod. (ale to už trochu zasahuje i do království Blokusu).

Příklad hry (obr. 5): I když se zdá, že pravidla hry jsou poměrně složitá, a také nalézt řešení zabere nějakou dobu, žáky hra zaujala, stejně jako vytváření dalších úloh pro spolužáky. Při této činnosti se dá použít buď vyrobených polymin nebo kostek ze hry Blokus (s omezením velikosti ostrovů)

U složitějších zadání je kontrola složitější (je lépe mít řešení připraveno dopředu).

Další dvě hry, Slitherlink a Masyu se liší od předchozích zejména tím, že cílem není vyplnění plochy, ale vytvoření uzavřené souvislé lomené čáry, která ohraničuje mnohoúhelník.



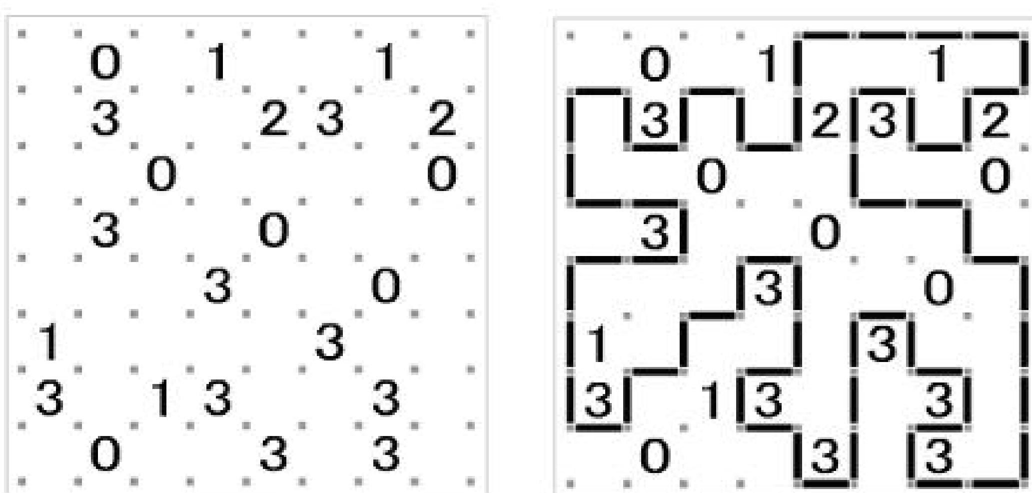
Obr. 5: Hurikabe 1, nurikabe 2

SLITHERLINK

Pravidla hry Slitherlink (klouzavé spojení):

1. Spojte sousedící body vodorovnou nebo svislou čarou
2. Spojení vytvoří souvislou čáru bez křížení a větvení
3. Čísla naznačují, kolik čárek je obklopuje
4. Je-li buňka prázdná, může být rámována li-bovolným počtem čárek

Příklad hry je na obr. 6.



Obr. 6: Slitherlink 1, slitherlink 2

Tuto hru zařazuji jako protiklad ke hrám s rovinnými útvary, protože zde se jedná o čáru, tedy obvod obrazce. V myšlení žáků tak dochází k diferenciaci pojmů obvod a obsah. Je vhodné také úlohy na zjištění obvodu obrazce zařadit. Následně může být vypočítán i obsah. Žáci tak pochopí obsah pojmu nezávisle na výpočtu podle vzorce a naopak docházejí k různým postupům při výpočtech.

Pro vytvoření herního plánu se dá výhodně využít programu Cabri geometrie (vytiskneme část tzv. mřížových bodů, dá se ale hrát i v klasické čtvercové síti.

MASYU

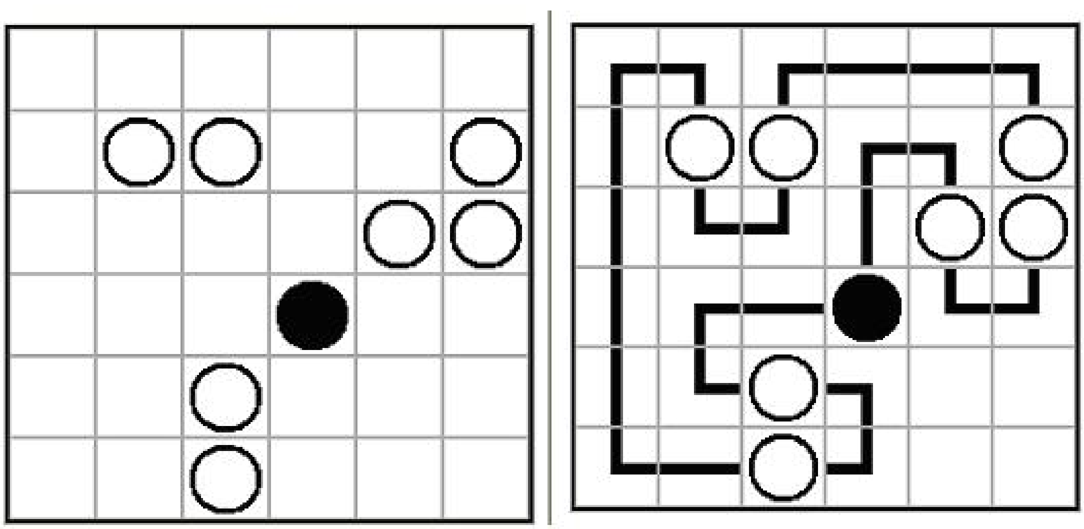
Pravidla

Masyu je zajímavá, ale dost obtížná hra. Hráč má za úkol navléci černé a bílé perly na provázek, který tvoří uzavřenou smyčku. Provázek ale může být umístěn pouze vodorovně nebo svisle. Z políček, která perlu neobsahují, může čára znázorňující provázek vycházet z libovolných dvou stran. Pro políčka s perlami platí následující pravidla:

černé perly: Čára procházející černou perlou se v ní lomí do pravého úhlu. Sousedními políčky musí ale procházet přímo.

bílé perly: Čára musí procházet bílou perlou přímo (nelomí se v ní). Naopak alespoň v jednom bezprostředně sousedním plolíčku se lomí do pravého úhlu (může tedy i v obou).

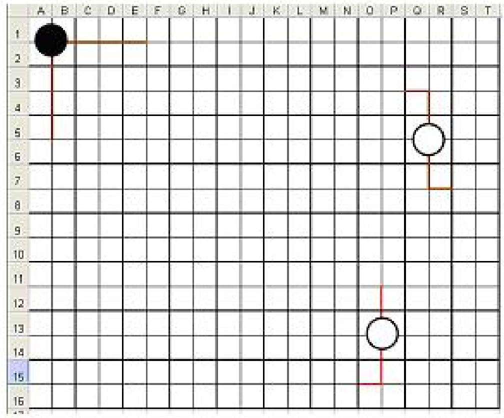
Místo složitého vysvětlování je lépe si prohlédnout ukázku (obr. 7).



Obr. 7: Masyu 1, masyu2

Pro žáky je někdy obtížné kreslení čáry, protože nemají v případě zlomu oporu v herním plánu. Je proto lepší, je-li plán připraven na jemnější čtvercové síti, kde jednu buňku tvoří čtyři čtverečky.

Ukázka vytvoření Masyu v Excelu (včetně demonstrace pravidel) je na obr. 8.



Obr. 8: Masyu 3

I zde je možné na hru navázat matematickými úlohami. Úkol je pro žáky obtížnější, pokud určíme rozměr malého čtverečku.

Literatura

[1] *Sikaku – Nové japonské rébusy*, Euromedia Group k.s. – Knižní klub, Praha 2006, ISBN 80-242-1648-5

[2] Mepham, M.: *Velká kniha japonských rébusů*, BB/art, Praha 2007, ISBN:80-7381-100-6

Internetové odkazy (ke dni 19. 3. 2008)

Masyu

`http://www.sudoku.org.uk/`
`http://2n1.org/applets/pearls/`
`http://www.answers.com/topic/masyu?cat=technology`
`http://specgram.com/CLII.1/12.jones.masyu.html` lingvistické
`www.proofbypicture.com/weblogs/puzzles/2007/02/hexagonal-masyu-3.html` 6úhelníkové
`http://www.tellmehowto.net/howto/play_masyu_4538`

Sikaku

`http://sikaku.sk/`
`http://www.sikaku.co.uk/`
`http://www.janko.at/Raetsel/Sikaku/index.htm`

Nurikabe

`http://www.logicgamesonline.com/nurikabe`

http://www.puzzle-nurikabe.com/
http://profuvsvet.ic.cz/view.php?nazevclanku=nurikabe-aneb-quotcerna-a-bilaquot&cisloclanku=2007050013
http://www.dailysudoku.com/nurikabe/index.shtml
http://www.logicgamesonline.com/nurikabe/tutorial.html
http://www.saidwhat.co.uk/puzzleclub/nurikabe/

SLITHERLINK

http://www.saidwhat.co.uk/puzzleclub/slitherlink/
http://www.puzzle-loop.com/
http://en.wikipedia.org/wiki/Slitherlink
http://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/slitherlink/

ŠIFROVÁNÍ A MATEMATIKA

ANTONÍN JANČAŘÍK[1]

Utajování informací je skoro stejně star, jako lidská civilizace. Jakmile informace začaly nabývat na ceně, začali je lidé tajit. Doklady o šifrování nalézáme u starých Egypťanů, Indů, Číňanů i Římanů. Použití šifer lze dokonce vysledovat i ve Starém zákoně. Není divu, že na vývoji nebo odhalování šifer se často podíleli nejlepší myslitelé své doby. Moderní kryptologie, která vznikla s nástupem počítačů, je již výhradně doménou matematiků. Přesto, že počítače jsou schopné většinu historických šifer dešifrovat ve velice krátkém čase, jsou tyto stále oblíbené jako součást šifrovacích soutěží a her. Cílem tohoto článku je ukázat základní metody – substituci a transpozici, které se při šifrování používají, a metody, které lze na jejich rozluštění, i bez pomoci počítačů, použít.

SUBSTITUCE

Substitucí nazýváme šifrovací metodu, při níž je jeden nebo více znaků nahrazeno jedním nebo více jinými znaky. Nejjednodušší substituční šifrou je šifra monoalfabetická, v níž je jeden znak vždy nahrazován znakem jiným. Klíčem pro šifrování i dešifrování je převodní tabulka (nebo pravidlo), která udává, který znak má být kterým znakem nahrazen. Mezi nejstarší monoalfabetické šifry patří hebrejské šifry (např. šifra Atbaš, ve které je každé písmeno nahrazeno písmenem z opačného konce abecedy (takto je například v knize Jeremijáš několikrát místo slova Babel použito slovo Šéšak) a Césarova šifra, v níž je každé písmeno nahrazeno písmenem stojícím o tři pozice v abecedě dál. V šifrovacích hrách se s monoalfabetickou substituční šifrou setkáváme např. pod názvem

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

šifra kapitána Kida. Ve hrách také často místo písmen používáme jiné znaky. Nejznámější šifrou tohoto typu je Morseovka. V počítači takovou šifru vyrobíme snadno tím, že místo normálního fontu použijeme některé z obrázkových písem, např. WingDings.

Velkou oblibu má také šifra známá jako Velký polský kříž:

A B C	D E F	G H CH
I J K	L M N	O P Q
R S T	U V W	X Y Z

V této šifře místo znaku používáme obrázek znázorňující jeho pozici ve kříži.

JAK DEŠIFROVAT SUBSTITUČNÍ ŠIFRU

Postup dešifrování u monoalfabetické substituční šifry je velice jednoduchý. Při dešifrování využíváme vlastností jazyka, které jsou vzhledem k substituci invariantní. Jedná se především o rozdílnou frekvenci výskytu jednotlivých znaků. Čeština nepoužívá všechna písmena používána stejně často. Písmena jako e, o, a, i či n používáme velice často, naproti tomu q, g či f se v textech takřka nevyskytují.

Pro dešifrování textu zpravidla stačí spočítat frekvenci výskytu jednotlivých znaků a doplnit za nejhojnější znaky odpovídají písmena. Doplnění pěti až šesti nejčastějších písmen obvykle postačuje k rozluštění celého textu, neboť již snadno odhadnete význam některých slov a doplníte další písmena.

Např.: *X teto Xete Xe poXeXaXo poXXe pet pXXXeX.*

Při dešifrování můžete použít následující informace:

Pořadí znaků v češtině podle frekvence výskytu:
E,O,A,I,N,S,T,R,V,U,L,Z,D,K,P,M,C,Y,H,J,B,G,F,X,W,Q

Pořadí znaků v češtině podle frekvence výskytu na začátku slov:
P,S,V,Z,N,T,O,J,K,D,A,B,M,R,U,C,I,H,E,L,F,G,W,Y,Q,X

Pořadí znaků v češtině podle frekvence výskytu na konci slov:
E,I,A,O,U,Y,M,T,H,V,L,K,S,Z,D,N,R,C,J,B,P,G,F,W,X,Q

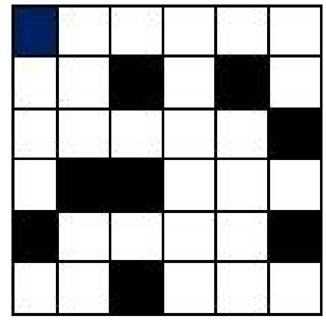
Nejčastější dvojice znaků:
ST, PR, SK, CH, DN, TR

Nejčastější trojice znaků:
PRO, UNI, OST, STA, ANI, OVA, YCH, STI, PRI, PRE, OJE, REN, IST, STR

Transpozice

Druhou nejčastěji používanou šifrovací metodou je transpozice. V této šifrovací metodě neměníme jednotlivé znaky, nýbrž jejich polohu. Jinými slovy, písmenka v textu prostě přeházíme. Poměrně časté je například psaní odzadu, či s přeházenými slabikami uvnitř slova. Asi nejznámější transpoziční šifrou je transpoziční mřížka.

Transpoziční mřížka je tabulka, v níž jsou některá políčka vystřižena, a do nich je postupně vpisován otevřený text. Po zaplnění všech políček je tabulka otočena o 90° a postup se opakuje. Tuto šifru použil J. Verne ve svém románu Hrabě Monte Christo.



Jsou možné vytvořit i jiné tvary šifrovací tabulky než čtverec, například šestiúhelník se šestiúhelníkovými políčky, který se 5krát otáčí o 60°. Klíčem této šifry je rozložení vystříhaných políček.

Jak dešifrovat transpoziční šifru

Také transpoziční šifru lze poměrně snadno dešifrovat, pokud máme k dispozici dostatečně dlouhý text a známe délku použité permutace. Postup dešifrování je pak následující. Text si zapíšeme do tabulky s počtem sloupců odpovídajícím délce permutace. Sloupce tabulky rozstříháme a přeskupujeme tak, abychom se snažili zohlednit bigramové četnosti (např. PR, ST) a samohláskové a souhláskové vazby, a to ve všech řádcích tabulky najednou. Postupně se tedy pokoušíme k sobě přikládat vhodné sloupce, až v řádcích dostaneme celé bloky otevřeného textu. Ačkoli tato metoda vypadá velmi složitě, je jednoduchá. Během druhé světové války dokázala německá rozvědka tímto způsobem dešifrovat i zprávy českého odboje, které měly několik desítek sloupců a pouhé tři řádky.

Jak odhalit délku permutace

V některých případech ale neznáme délku použité permutace a musíme ji nejprve odhalit. Ve většině případů délka permutace dělí délku zašifrovaného textu, což nám velice zjednodušuje celou situace. Pokud máme vybrat z několika potencionálních kandidátů, nejprve rozepíšeme text do příslušné tabulky jako v situaci, kdy délku permutace známe. Následně spočítáme poměr mezi souhláskami a samohláskami na jednotlivých řádcích. Tabulka, ve které se tento poměr na největším počtu řádků blíží poměru $4:6$ ve prospěch souhlásek, je s největší pravděpodobností ta, kterou máme dále dešifrovat.

Závěr

Šifrovací hry jsou vhodným nástrojem pro seznámení žáků se statistickými metodami, permutacemi, ale i nástrojem pro získání jazykového citu. Ukazují interdisciplinární vazby mezi matematikou a lingvistikou. Šifrování není suchopárnou vědou, ale dobrodružným příběhem, do kterého se mohou zapojit i naši žáci.

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

Literatura

[1] ADAMS, S. *Šifry a kódy: od hieroglyfů po hackery*, Praha: Slovart, 2003.

[2] GROŠEK, O., Porubský, Š. *Šifrovanie – algoritmy, metódy, prax*, Praha: Grada, 1992.

[3] HANŽL, T. *Šifry a hry s nimi: kolektivní outdoorové hry se šiframi*, Praha: Portál, 2007.

[4] PIPER, F. C., MURPHY, S. *Kryptografie*, Praha: Dokořán, 2006.

[5] VONDRUŠKA, P. *Kryptologie, šifrování a tajná písma*, Praha: Albatros, 2006.

Didaktická hra v hodinách matematiky

Michaela Kaslová[1]

Vymezení pojmu a realita

Definice zařazená do Pedagogického slovníku: Didaktická hra je ***analogií spontánní činnosti dětí****, která sleduje* ***didaktické cíle****. Může se odehrávat v učebně, tělocvičně, na hřišti, v přírodě. Má svá pravidla, vyžaduje průběžné řízení, závěrečné vyhodnocení. Je určena jednotlivcům i skupinám, přičemž role pedagogického vedoucího mívá široké rozpětí od hlavního organizátora až po pozorovatele. Její předností je* ***stimulační náboj****, neboťprobouzí zájem, zvyšuje angažovanost žáků na prováděných činnostech, podporuje jejich tvořivost, spontaneitu, spolupráci i soutěživost, nutí je využívat různých poznatků a dovedností, zapojovat životní zkušenosti. Některé didaktické hry se blíží modelovým situacím reálného života.* (Průcha s. 48)

Koťátková (s. 54) uvádí didaktickou hru z pohledu praxe v mateřské škole: *Didaktická hra je charakteristická hlavním* ***podílem záměrného pedagogického cíle****. . . . Mají za cíl vytvoření určité dovednosti nebo jejího základu. S podobným záměrem jsou tyto (didaktické) hry používány v kognitivní oblasti k prohloubení poznání v určitých obsahových tématech, nebo k rozvoji vizuální nebo audio analýzy s integrací nového do již poznaného.*

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Didaktická hra bývá v odborné literatuře podobně jako v příspěvcích učitelů vymezována také jako **z vnějšku řízená motivovaná činnost**, která je využívána k naplnění pedagogických záměrů. *Didaktická hra je **hra**, při které děti získávají nebo procvičují, upevňují vědomosti, dovednosti, návyky, rozvíjejí se psychické funkce (vnímání, paměť, představivost, myšlení, pozornost, postřeh). Jsou to hry, které **tvoří přechod mezi hrou a učením**. A jsou i důležitým motivačním prostředkem. Správná didaktická hra je taková, kdy si dítě hraje a **nemá pocit, že se něco učí**. Pro děti je velice přitažlivá, poskytuje změnu, odpočinek, radost a zábavu.* [13] Kasíková (1, s. 207) chápe didaktickou hru jako ***seberealizaci žáků, řízenou určitými pravidly** a sledující **výchovně vzdělávací cíle.***

Jak je z výše uvedených pojetí didaktické hry patrné, je zde chápána jako **relativně izolovaná aktivita**. Tento přístup minimálně v hodinách matematiky nelze připustit. Didaktická hra **nabývá na významu a zúročuje se aktivita v rámci jejího průběhu** teprve tehdy, je-li na hru **vhodně navázáno**. Je-li didaktická hra propojena s látkou, ke které se váže, zejména slabším žákům usnadní využít nových zkušeností z didaktické hry v matematických aktivitách. Tato návaznost nemusí být bezprostřední, avšak čím je žák starší, tím více potřebuje zvědomění toho, co se ve hře odehrávalo. U nadprůměrných žáků dokonce platí pravidlo nutnosti (Matějčkovo pojetí smysluplnosti) předem zdůvodnění smyslu zařazení hry (Kaslová: jinak aktivita nadprůměrného žáka, není-li soutěživý nebo výjimečně hravý, opadá, neboť zpravidla hru chápe jako činnost pro malé nebo slabé žáky).

U didaktických her bývají zmiňovány 4 etapy, někdy nazývané strukturou didaktické hry: *1) Úkol (cíl); 2) Vlastní hravá činnost; 3) Pravidla; 4) Závěr, vyhodnocení hry*. Toto ovšem platí pouze tehdy, je-li hra zařazena do hodiny **pouze jednou**. Jinou strategií, zejména v matematice, je **opakované zařazení** hry během delšího období, někdy jde o vytvoření rituálu v hodinách matematiky (např. Nechanická: Matematický král). Pak můžeme mluvit o jiné etapizaci či strukturaci: 1) úvodní aktivity, informace 2) základní orientace ve hře, 3) dílčí zkušenosti sdělované mezi některými hráči či s učitelem, jde více o dojmy, 4) opakované zařazení hry a prohloubený pohled na podstatu hry, hledání strategií, zjednodušujících kroků, zobecnění nebo ekonomizace procedur, 5) schopnost nadhledu nad hru, oproštění od konkrétních kroků jedné hry, 6) formulace metazkušeností propojujících svět hry se světem matematiky.

Jsou specifické hry, které při jediném zařazení mohou být těžko klasifikované jako didaktické. Teprve při **opakování takové hry** se ze hry stává didaktická hra především v momentě, kdy se žák vyrovnává s určitými obtížemi, které mu brání do hry proniknout a které nejsou přímo spjaty s didaktickým cílem. I izolovaně zařazená hra nemusí nabýt charakteru didaktické hry bez následných aktivit řízených či iniciovaných učitelem. Aktivity nemusejí být předem plánované, mohou vycházet z momentální situace, z kontextu ať věcného, či emočně sociálního.

Jak uvádí Kasíková, je didaktická hra stále hrou. To znamená, že pokud ji dítě přijme jako opravdovou hru, je zde vyšší podíl emocí než v běžných úlohách. U některých hrových aktivit dochází tedy k takovým procesům, které **umožní zapomenout na svět matematiky**, tato skutečnost může být také blokem, proč k přenosu nových zkušeností do světa matematiky plně nedochází. **Emoce** navíc mohou blokovat nástup racionálních procedur. Jde-li o takovou hru, je třeba se k ní **vrátit z jiného pohledu a napojit na ni nové aktivity** na pomezí hry a řešení matematických problémů tak, aby oba světy žák propojil sám či v kooperaci s ostatními. V některých didaktických hrách dochází **k vytěžení ze hry** například hledáním odpovědi na vhodně položenou otázku (reagováním na poznámku) navazující na předchozí hru. Jindy to může být výzva k tvořivé aktivitě, k obměně hry dle podmínek (zjednodušení nebo ztížení obtížnosti). Jsou didaktické hry směřující k prohloubení sebepoznání, zde je vhodné, aby na takovou hru navázala beseda například v malých skupinách.

Hra DIGIT

Typickou ukázkou, kterou jsme zvolili, je zařazení hry DIGIT do hodin matematiky. Hra Digit sehrála několik rolí, v každém období jinou, a to v závislosti na kontextu, do kterého byla zasazena, a v závislosti na postupném vyspívání hráčské zkušenosti.

Se hrou Digit se žáci setkali poprvé v prosinci 2007 v rámci školního DOPOLEDNE S HRAMI rozvíjejícími uvažování a prostorovou představivost. Rozhodně zde žáci nespojovali hry s matematikou. Pro řadu z nich to byla doba, kdy se místo vyučování hrálo.

Ve druhé etapě byla hra Digit zařazena v průběhu ledna následně třikrát do hodin matematiky, třídy to zpočátku pojímaly spíše jako zábavu za odměnu. Při opakování se ve tří či čtyřčlenných skupinách rodily otázky: a) míra pravděpodobnosti výhry, b) vliv konfigurace (sestavy) tyčinek na její nestavitelnost, c) přijatelnost zrcadlení, rotace do řešení, d) existence konfigurací blokujících vznik požadovaných konfigurací. V této fázi se třída ukázala „zralou“ na přechod od hry k didaktické hře. V tento moment nastává příhodná chvíle pro to, kdy se na počátku nové hodiny tyto otázky vhodně otevřou a znovu se nechají žáci hru jednou zahrát. Hra byla tentokrát zařazena do hodiny geometrie, kde byla žákům připomenuta již dříve probraná látka o shodných zobrazeních, speciálně o osové souměrnosti. Byli vyzváni k tomu, aby sledovali, zda se ve hře geometrie objevuje a jak.

Po odehrání jedné hry, kterou náhle žáci komentovali zcela jinak (i s použitím školské terminologie), dostaly skupiny pracovní listy dvojího typu: a) skupina se měla rozdělit do dvojic a každá dvojice měla řešit totéž, v závěru výsledky práce porovnat (viz příloha 1), b) pracovní list měli všichni řešit společně s využitím tyčinek ze hry Digit (viz příloha 2). Na to navázal tvořivý úkol: sestavit hru – karty Digitu pro malé děti, kde by na kartách byly jen konfigurace 4 tyčinek. Hledání všech možných konfigurací vedlo k opakovanému probírání problému shodnosti konfigurací, porovnávání a diskusi. Pokud si žáci nevěděli rady, mohli opět využít manipulace s tyčinkami. Nalezení všech 16 možností vyústilo ve tvorbu takových hracích karet pro mladší (problém dělaly například proporce, umístění úseček na čtvercové kartě). Která skupina byla hotova, mohla hledat pořadí (4–5) vybraných nových karet tak, aby každé dvě sousední karty představovaly takové dvě konfigurace, kde lze z jedné konfigurace k druhé dojít přesunem jediné tyčinky.

V březnu v rámci oslav J.A. Komenského měli žáci možnost získávat body za úspěšné řešení hrových úkolů. Jedním z nich bylo nalézt takové pořadí všech vyrobených 16 karet (16 různých konfigurací), aby ke každé následující bylo možné přejít přesunem jediné tyčinky. Pro řešení je zde nutné využít zpracování konfigurací v představě s využitím rotace nebo osové souměrnosti. Šlo de facto o řešení seriozního matematického úkolu, který se ovšem ve spojení s dřívější herní zkušeností jevil jako hra. Vedlejším produktem zařazení hry Digit do vyučování byla skutečnost, že žáci objevili možnost „vyhrát si s málem“, citujme: *„Vona zábava nemusí bejt drahá.“ „Jo a vejde se do kapsy.“ „A můžeme mít i svý pravidla!“*

Dalším efektem čistě pedagogickým byla změna postoje k práci ve skupinách, požadování dalších her, které „matematice pomůžou“. U žáků šestých ročníků již tedy nemluvíme o nenápadnosti didaktické hry a pouhé motivační roli. Zde došlo k pochopení efektu hry a požadování podobného typu aktivit s cílem zlepšit se.

LITERATURA

[1] Kasíková, H. *Kooperativní učení, kooperativní škola*. Praha: Portál, 1997. ISBN 80-7178-167-3

[2] Kasíková, H. *Kooperativní učení a vyučování. Teoretické a praktické problémy*. Praha: Karolinum; 2001, ISBN 80-246-0192-3

[3] Kasíková, H. Vališová A. *Pedagogika pro učitele*. Praha : Grada 2007. ISBN: 8024717344

[4] Kaslová, M. Komunikace a talent. In *Ani jeden matematický talent nazmar*. Ed. Jaroslav Zhouf. PC Hradec Králové : 2003. ISBM 80-7015-936-7

[5] Kárová, V. *Didaktické hry ve vyučování matematice*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1998.

[6] Koťátková, S. *Hry v mateřské škole v teorii a praxi*. Praha : Grada Publishing, 2005, ISBN 80-247-0852-3.

[7] Maňák, J. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků*. Brno: Masarykova univerzita, 1998.ISBN 80-210-1880-1

[8] Opravilová, E. *Hra II*. Studijní texty ZU Liberec 2003.

[9] Pasch, M., Trevor, G. a kol. *Od vzdělávacího programu k vyučovací hodině*. Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-127-4

[10] Petty, G. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-029-4

[11] Průcha, J., Mareš, J., Walterová, E. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 1995. ISBN

[12] Silberman, M., Lawson, K. *101 Metod pro aktivní výcvik a vyučování*. Praha: Portál, 1997. ISBN 80-7178-124-4.

Internetové zdroje (IZ)

[13] http://www.math.muni.cz/ vondra/studium/odid.html ⟨2.4. 2008⟩

[14] http://books.google.cz/books?id=BVnJYEfp23IC&pg=PA54&lpg=PA54&dq=didaktick%C%A1+hra&source=web&ots=rTOZ40xVG5&sig=hg-W9DRrfQaP79YArhMHjfZNSH0&hl=cs ⟨15.3. 2008⟩

[15] http://gamesy.blogspot.com/2006_03_01_archive.html ⟨13.3. 2006⟩

[16] http://gamesy.blogspot.com/2006_03_01_archive.html ⟨1.1. 2008⟩

POSTUPY A JEJICH KÓDOVÁNÍ V HODINÁCH MATEMATIKY

MICHAELA KASLOVÁ[1]

ÚVOD

Zabýváme-li se kódováním, lze uvažovat, o dvou hladinách kódování: jedna, která v sobě nese jedinečnou konkrétní informaci, jiná, která má obecnější charakter. K těm paří například popis konstrukce n-úhelníka pomocí geometrické symboliky v případě, že je dána úloha parametricky. Víme, že popis postupu řešení jakékoliv úlohy je úkol pro žáka ne právě snadný. Jsou však žáci, kteří popis v grafické podobě berou jako hravou formu kódování a jsou díky tomu schopni zapomenout na své komunikační obtíže. Jiní dávají grafické formě komunikace přednost již jen proto, že neradi mluví.

MOTTO:

Současné matematické knihy se zdají být symboly přímo zahlceny, ale matematický znak ještě není sám o sobě matematikou, jako notový part ještě není hudbou. Hudba nevzniká okamžikem notového zápisu, ale teprve ve chvíli, kdy pronikne do naší mysli. To také platí pro matematiku. (Devlin, s. 13)

STIMULACE ŽÁKŮ

Žáci různých věkových skupin i různé úrovně byli vyzváni, aby dali písemně návod, jak řešit danou úlohu, daný typ úlohy. Jde svým způsobem o substituční aktivitu

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

(Marchini, Kaslová, 2003). Pokud je téma geometrické, je žák vázán již zavedenými znaky a pravidly pro jejich užití. Z uvedených důvodů byli žáci vedeni k tvorbě vlastního způsobu záznamu. Aby byla úloha pro žáky smysluplná, simulovali jsme situaci, kdy má žák dát co nejstručnější návod nemocnému slabšímu spolužákovi (e-mailem, esemeskou, na kousku papíru) aniž by za něho úlohu vyřešil.

Napsat stručný návod byl pro některé žáky obrovský problém, avšak požadavek stručnosti vedl žáky k rozhodování, co je podle nich v postupu nejpodstatnější, jaké jsou priority kroků, museli také zvážit, kterou terminologii použít, respektive jak ji srozumitelně zakódovat.

Úlohy a jejich charakter

Ve všech případech šlo o zadání aritmetických úloh, které (byť ne vždy standardní, avšak aspoň několikrát ve škole řešené) nepředstavovaly problém u vyzvaných řešitelů.

Zadané úlohy lze rozdělit do tří základních skupin:

a) úlohy se 4 základními operacemi (pamětné, písemné algoritmy, použití závorky)

b) úlohy se zlomky

c) algebrogramy

Grafické záznamy

Žákovská řešení či přístupy odrazily v první řadě míru nadhledu nad daným typem úlohy. Aniž to bylo původně záměrem, ukázalo se, že tato aktivita nese i rysy diagnostické aktivity a dokáže odrážet i míru pochopení úlohy daného typu. To, co se neprojevilo v ústní komunikaci, to ukázalo řešení s využitím grafického kódu.

V mluvním projevu se žáci často uchylovali k obratům, které odposlouchali od učitelů, šlo tedy o pouhou více či méně přesnou *reprodukci slov*, která neodrážela nutně míru pochopení. Dalším jevem, který při užití grafického kódu odpadl, bylo v mluvním projevu *nahrazování slov gesty*, nadměrné používání *ukazovacích zájmen* s pokyvováním hlavou, s *ukazováním* na konkrétní části zápisu zadání při vlastního řešení.

Grafický projev *vyblokoval komunikační nápodobu nebo reprodukci* dříve slyšeného, užití nepřesných mluvních znaků, na druhé straně nutil žáka do přesnějšího a jednoznačnějšího vyjádření. Tam, kde si žák nevěděl rady s volbou grafického kódu, tam byl dříve či později nucen vytvořit vlastní kód nebo již zavedenému znaku dát novou interpretaci. Jak jsme předpokládali, objevily se v grafickém kódu **dvě úrovně obecnosti**:

1. grafický záznam obsahoval konkrétní data ze zadané úlohy;

2. grafický záznam byl použitelný pro řešení jakéhokoli problému daného typu, někteří žáci dokonce pracovali s grafickým záznamem parametrů (v podobě rovinných geometrických útvarů, několika teček, slovních zkratek apod.). Písmena se objevovala

převážně u žáků čtvrtých a pátých ročníků. Grafické znaky se od sebe lišily především tím, zda žák (ne)použil znaky zavedené ve škole, či zda si vytvořil znaky sám (šipky, vlnovky, zkratky slov), nebo dokonce kombinoval zavedené znaky s hláskovým písmem (pokynů, příkazů odposlouchaných ve škole a zapsaných slovy) jako např. „zapiš“, „opiš“, „namaluj“, neboť je pokládal za důležité (ať z pohledu matematiky, tak pod vlivem sociálního kontextu).

Žákovská reflexe

Žáci zpočátku nechápali, co se po nich požaduje, přestože projevovali snahu „pomoci slabšímu“, projevovali známky empatie. Zde docházelo k diskusi, zda žákovi pomůže popis postupu u konkrétní úlohy, nebo zda nedat raději návod, který by platil i pro jiné úlohy téhož typu. Co považuji za přínosné, je rozbor žákovských návrhů a zamyšlení se žáků nad nimi. Najednou se jevila i jejich vlastní symbolika či použití matematické terminologie jako smysluplné. Pro některé žáky úkol představoval obtížné rozhodování mezi podstatným a méně podstatným, nutil je přemýšlet o povaze úlohy, charakteristice čísel, vlastnostech operací a podobně. Petr M. (7. r.): *To mě nenapadlo, to má Vašek dobrý. No jo, tady se dá využít čitatel (chápej slovo čitatel), rozšířit i zkrátit.* Kačka P. (7. r.): *To bych si takhle mohla dělat značky o tom, co probíráme, líp by se to učilo.* Kája M. (2. r. člen Klubu přátel matematiky): . . . *teď se mi hoděj desítky a jednotky. Nevadí, že sem psal d a j malý?* Gábi S. (2. r.): *Já sem ale nepsala d, ale desítky a taky ne =, ale sečti. Ale to asi nevadí. Ve škole to tak (+) čteme. Že by to pochopil?!* Nora M. (7. r.): *Já to psala asi moc podrobně, jako návod (gestikuluje ¶ k pračce): No ty zkratky s mi líběj, ale bude tomu rozumět. Vlastně jo. Já to taky chápu.* Bára K. (6. r.) : *Připomíná to geometrii, ale tady sem si musela značky VYMYSLET! No něco taky ne (+, =). To je dobrý.*

Závěr

Chápejme tento námět především jako inspirační podnět, jako obohacení učitelské práce, jako motivační stimul pro návrat k probrané látce a pro diskusi prohlubující pohled na probranou látku. Za případné připomínky a podněty předem děkuji.

Literatura

[1] Devlin, K. *Jazyk matematiky – Jak zviditelnit neviditelné*. Dokořán : Praha 2002 ISBN 80-86569-09-8

[2] Marchini C., Kaslová, M. Substitution. In *SEMT 03*, Ed. Novotná, J. UK Pedf : Praha 2003 ISBN 80-7178-124-4

[3] Muchinelli A. a kol. *Étude des communication – Aproche par les processus*. Armand Colin : Paris 2004. ISBN2-200-26786-X

[4] Pospíšil, J., Michal, S. *Multimediální slovník*. Rubico: Olomouc 2004 ISBN 80-7346-019-X

[5] Vygotskij, L. S., *Myšlení a řeč*. SPN: Praha 1972.

REPREZENTAČNÍ PROSTŘEDÍ PRO SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

FILIP ROUBÍČEK[1]

V dílně byly prezentovány ukázky reprezentačních prostředí vhodných pro výuku shodných zobrazení v rovině na druhém stupni základní školy, a to osové a středové souměrnosti, otočení a posunutí. Pozornost byla věnována vlastnostem jednotlivých zobrazení, skládání osových souměrností a především různým formám modelování: zrcadlení, vystřihování, obkreslování, otiskování a vzorování.

ÚVOD

Vyučování geometrii na základní škole nabízí řadu příležitostí pro zařazení různých forem modelování. Neobvyklá reprezentační prostředí pomáhají nejen oživit výuku geometrie, ale také motivovat žáky k činnostem, které jsou založeny na geometrických aplikacích. Reprezentačním prostředím rozumíme komplex vymezený určitým prostředkem reprezentace a činnostmi souvisejícími s jeho užitím. Nejde tedy jen o popis modelů shodných zobrazení, ale hlavně o práci s těmito modely.

Osová a středová souměrnost je tradičně zařazována do učiva matematiky v 6. a 7. ročníku ZŠ. Naopak otočení a posunutí bývají v učivu matematiky na ZŠ spíše výjimečně (žáci se s nimi podrobněji seznamují většinou až na střední škole). Zařazení otočení a posunutí do učiva ZŠ je přínosné zejména pro pojmotvorný proces – vytváření představ o geometrických útvarech v rovině i prostoru. Například na modelech pravidelných mnohoúhelníků lze vysvětlit otočení kolem středu o daný úhel a ukázat souvislost otočení o 180° se středovou souměrností. Posunutí lze využít nejen v konstrukcích rovnoběžníků, ale také grafů lineárních funkcí. Nemůžeme opomenout ani zkušenosti žáků s těmito zobrazeními, které získali při pozorování svého okolí (například architektury).

Modely používané pro výuku osové a středové souměrnosti jsou často vytvářeny tradičním rýsováním, případně moderněji na počítači. Pro vybudování dobrých představ o těchto zobrazeních je účelné seznámit žáky s více způsoby modelování, včetně těch,

[1]Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Praha; roubicek@math.cas.cz

[2]Článek vznikl za podpory grantu GA ČR č. 406/08/0710 a výzkumného záměru AV0Z10190503.

které jsou založeny na manipulativní činnosti. Pro modelování shodných zobrazení můžeme použít snadno dostupné pomůcky, jako jsou zrcátko, razítko, průsvitka nebo nůžky, a také techniky, které žáci znají z hodin výtvarné výchovy. Není třeba se omezovat na tužku a papír, nebo naopak všechny modely tvořit jen prostřednictvím počítače, ale můžeme zvolit i jiné, pro žáky jednoduché a zajímavé způsoby modelování.

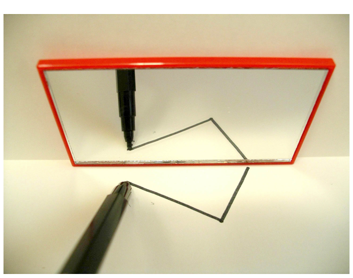
Obr. 1: Určování shodných zobrazení na dlažbě

ZRCADLENÍ

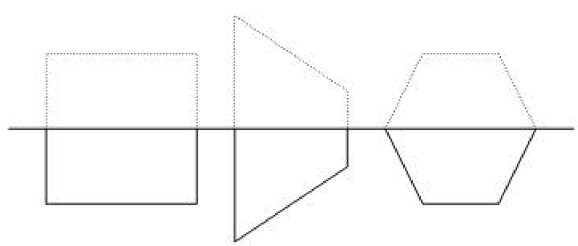
Zrcátko je vhodnou pomůckou pro objevování zákonitostí osové souměrnosti. Umožňuje žákům proniknout do podstaty tohoto zobrazení a získat představy důležité pro pochopení ostatních shodných zobrazení, která vznikají skládáním osových souměrností. Žáci pomocí zrcátka také snadno zkontrolují, zda sestrojili obraz v osové souměrnosti správně, nebo zjistí, zda daný obraz je osově souměrný. Používání zrcátka při řešení geometrických úloh podněcuje žáky k experimentování a hlubšímu poznávání vlastností osově souměrných útvarů (viz úloha 1). Má však i své nevýhody – v případě, že osa souměrnosti protíná vzor, je v zrcátku zobrazena jen jeho část (obraz je neúplný).

ÚLOHA 1

Nakreslete lomenou čáru tvořenou třemi úsečkami tak, aby ve spojení s jejím obrazem v zrcadle vznikl a) čtverec, b) lichoběžník, c) kosodélník, d) šestiúhelník.



Obr. 2: Zrcadlení

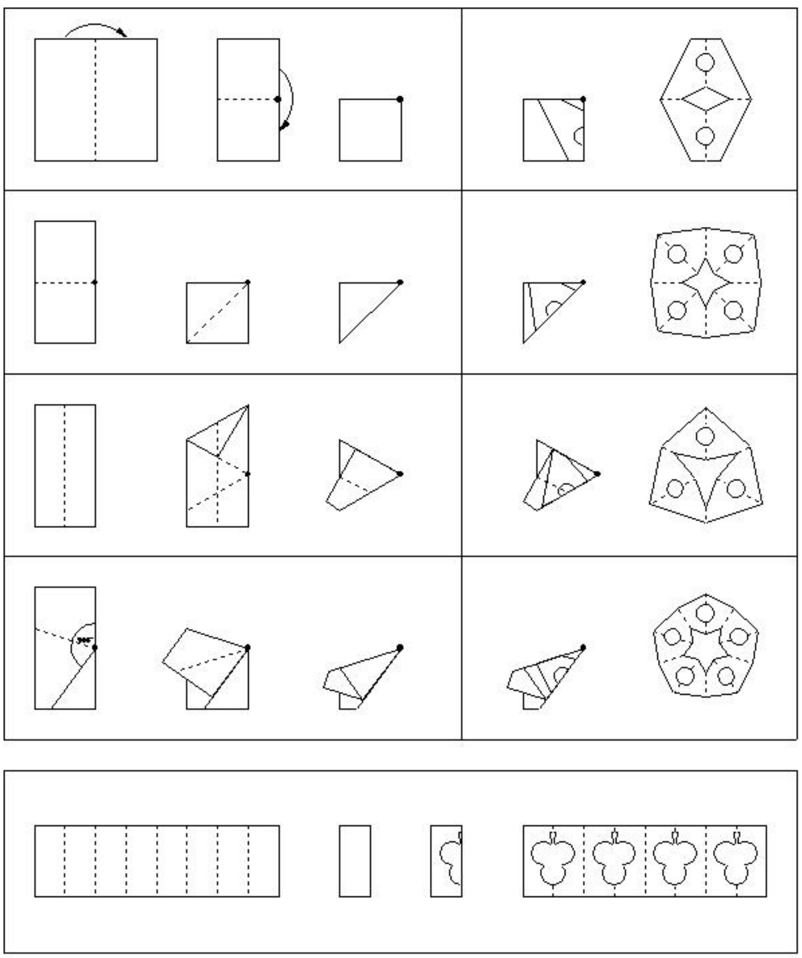


Obr. 3: Řešení úlohy 1

Kreslením různých lomených čar před zrcátkem (viz obrázek 2), nebo obráceným postupem – hledáním osy souměrnosti nakresleného útvaru pomocí zrcátka žáci sami zjistí, že čtverec, lichoběžník i šestiúhelník lze sestrojit (viz obrázek 3), zatímco kosodélník nikoliv.

Vystřihování

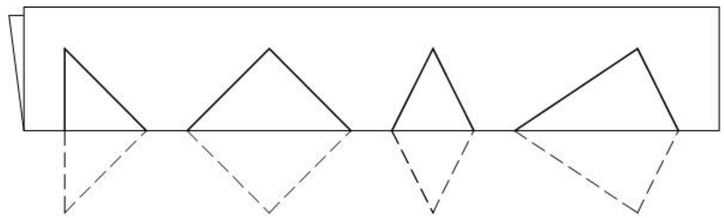
Pro modelování osově souměrných útvarů s jednou i více osami souměrnosti je vhodné použít vystřihování přeloženého listu papíru (viz obr. 4). Vytvořit obrazec s jednou, dvěma, čtyřmi osami souměrnosti není nijak obtížné. V případě vystřihování obrazců, které mají tři osy souměrnosti, lze použít při překládání papíru konstrukci rovnostranného trojúhelníku nebo úhel o velikosti 60° získat měřením, příp. zkusmo. Pro vytvoření obrazce s pěti osami souměrnosti je třeba přeložit papír tak, aby hrany svíraly úhel o velikosti 72°. Toho žáci docílí nejsnáze měřením pomocí úhloměru. Vystřihováním lze získat také středově souměrné obrazce nebo obrazce vytvořené pomocí posunutí.



Obr. 4: Vystřihování přeloženého listu papíru

Úloha 2

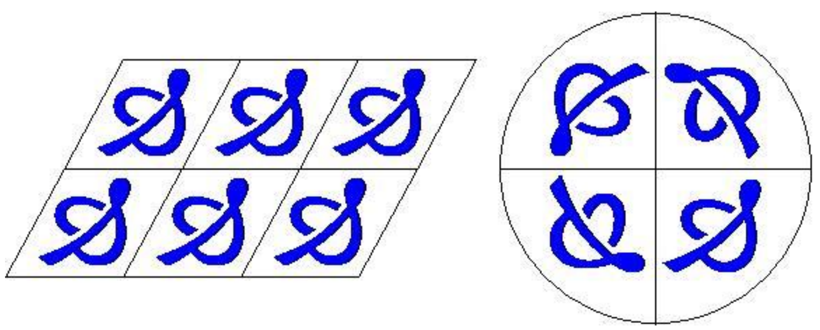
Z přeloženého pruhu papíru vystřihněte trojúhelníky tak, aby vznikl a) pravoúhlý trojúhelník, b) čtverec, c) kosočtverec, d) deltoid. Jaké další mnohoúhelníky lze tímto způsobem získat?



Obr. 5: Řešení úlohy 2

Obkreslování a otiskování

Pomocí zrcadlení nebo vystřihování vznikají nepřímo shodné útvary (vzor a jeho obraz v osové souměrnosti). Stejně tak tomu je v případě užití průsvitky nebo pauzovacího papíru. Průsvitka je vhodná nejen pro ověřování shodnosti útvarů, ale také pro zobrazovaní složitých obrazců v osové souměrnosti. Žáci obkreslí obrazec měkkou tužkou (č. 1) na průsvitku, průsvitku obrátí a čáru obtáhnou. Opakováním tohoto postupu lze získat také přímo shodné útvary. Obdobným způsobem můžeme použít i různé šablony. Pro zobrazování ve středové souměrnosti, otočení a posunutí, kdy vzor i obraz jsou přímo shodné útvary, lze použít obkreslování obrazců pomocí šablony nebo otiskování obrázkového razítka do různých rastrů (čtvercové či jiné sítě nebo kruhových výsečí, viz obrázek 6).



Obr. 6: Obkreslování a otiskování do rastru

Úloha 3

Vytvořte otiskováním obrázkového razítka středově souměrný kruhový ornament, který nemá žádnou osu souměrnosti.

Vzorování

Obdobou otiskování je vzorování, které je založeno na vytváření různých geometrických vzorů skládáním dvou shodných zobrazení. Vzorování provádíme pomocí čtvercové šablony 7 cm x 7 cm s nesouměrným obrazcem na bílé nebo barevné listy papíru formátu A3 (6 sloupců a 4 řady). Jednobarevné nebo dvoubarevné vzory tvoříme vodovými barvami pomocí plochého nebo tupovacího štětce (štětec by měl být téměř suchý, aby barevnou stopu zanechávaly pouze konečky štětin a barva rychle zasychala).

Pro vzorování volíme dvě zobrazení (buď stejná, nebo různá) a v daném směru (sloupci, řadě) používáme vždy jen jedno zobrazení.

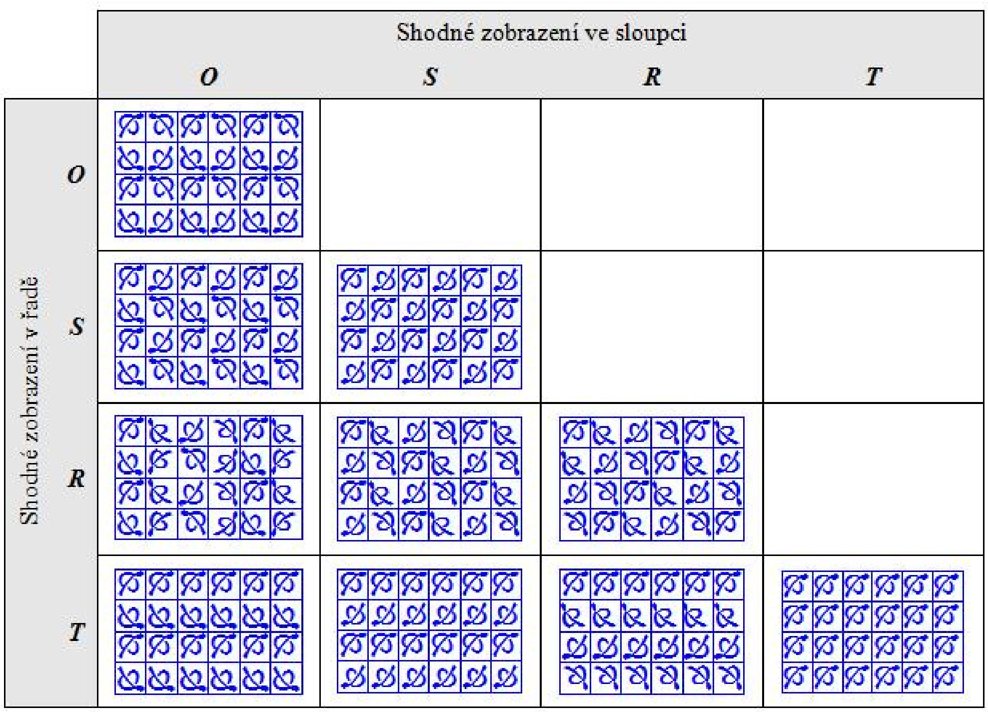
- Vzor tvořený obrazy v osové souměrnosti O vytváříme postupným překlápěním šablony podle strany čtverce. Osová souměrnost je nepřímo shodné zobrazení, proto obraz nelze získat posunutím nebo otočením šablony (je-li obrazec na šabloně nesouměrný).

- Vzor tvořený obrazy ve středové souměrnosti S vytváříme postupným otáčením šablony o 180° kolem středu strany čtverce. Středová souměrnost, otočení a posunutí jsou přímo shodná zobrazení, proto se šablona používá pouze z jedné strany.

- Vzor tvořený obrazy v otočení R vytváříme postupným otáčením šablony kolem vrcholu čtverce o 90° v kladném, nebo záporném smyslu. Otočením v kladném smyslu se rozumí otočení ve směru proti pohybu hodinových ručiček. Zvolený smysl otáčení nelze během vytváření vzoru (v řadě nebo sloupci) měnit.

- Vzor tvořený obrazy v posunutí T vytváříme postupným posouváním šablony ve směru daném sloupcem nebo řadou o délku strany čtverce.

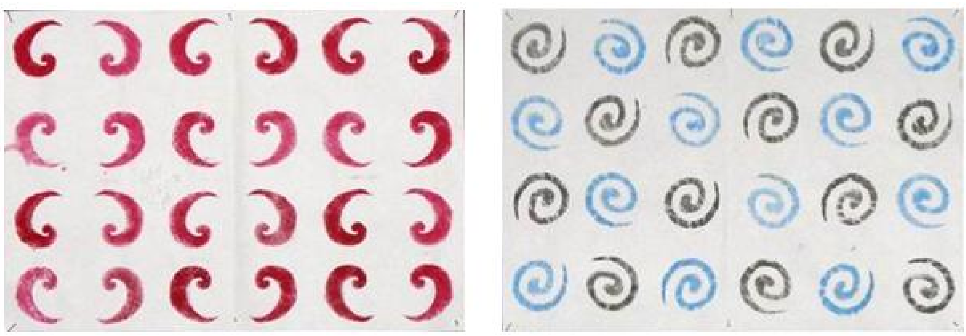
V tabulce (viz obrázek 7) jsou uvedeny kombinace výše uvedených zobrazení a výsledné vzory.



Obr. 7: Kombinace zobrazení a výsledné vzory

Hlavní přínos užití tohoto reprezentačního prostředí spočívá v tom, že vede žáky přirozenou cestou k

- užití poznatků o shodných zobrazeních v rámci výtvarné činnosti,
- prohloubení jejich představ o shodných zobrazeních prostřednictvím manipulativní činnosti,
- objevování souvislostí mezi shodnými zobrazeními na základě jejich skládání,
- rozpoznávání jednotlivých shodných zobrazení ve vytvořeném vzoru,
- provádění vizuální kontroly pravidelnosti vzoru v průběhu činnosti.



Obr. 8: Ukázky prací žáků 7. ročníku

ZÁVĚR

Popsaná reprezentační prostředí jsou jen stručnou ukázkou toho, jak lze žáky ZŠ seznámit se shodnými zobrazeními v rovině. Stejně tak uvedené úlohy zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti, jak v daných prostředích pracovat. Společným znakem těchto prostředí je manipulativní činnost. Skutečnost, že žáci manipulují se zrcátkem, obracejí průsvitku, otáčejí nebo posouvají šablonu, je pro poznávání shodných zobrazení velmi důležitá. Zmíněné pomůcky (zrcátko, průsvitka aj.) navíc poskytují žákům nástroj pro samostatné objevování a snadnou kontrolu konstrukcí.

NETRADIČNÍ ÚLOHY JAKO NÁSTROJ ROZVOJE MATEMATICKÝCH KOMPETENCÍ

LUCIE RŮŽIČKOVÁ[1]

Při přípravě pracovní dílny jsem vycházela z již dříve prezentovaného názoru (např. Zhouf, Růžičková 2008), že vhodné užití netradičních matematických úloh v hodinách matematiky hraje klíčovou roli v diagnostice i rozvoji tvůrčího matematického potenciálu žáků. Netradičními úlohami zde rozumím úlohy, při jejichž řešení nestačí spolehnout se na předem daný algoritmický postup. Řešení takových úloh často nevyžaduje žádné speciální znalosti, ale spíš kreativitu a nápad.

V rámci pracovní dílny byly možnosti využití netradičních úloh v rámci podnětné a rozvíjející práce s žáky v hodinách matematiky ilustrovány na několika úlohách z matematické soutěže Turnaj měst určené pro žáky posledních ročníků ZŠ a pro studenty SŠ. (Více o této soutěži např. Růžičková, Zhouf 2008; Švrček, Zhouf 2007). Některá zajímavá žákovská řešení se stala podkladem pro diskuzi o diagnostickém potenciálu předkládaných úloh, o způsobu hodnocení žákovských přístupů k netradičním úlohám a o rozdílu mezi správným a úplným řešením. Dále uvádím zadání diskutovaných úloh.

Úloha 1: Na listu papíru je napsáno číslo 1 a číslo x, které není celé. V každém kroku dále napíšeme na tento list buď součet, nebo rozdíl některých dvou čísel na papír již dříve napsaných (je povoleno přitom uvažovat totéž číslo dvakrát), nebo převrácenou hodnotu některého z dříve napsaných čísel. Rozhodněte, zda tímto způsobem je možno napsat po několika krocích na list papíru číslo x^2.

Úloha 2: Kouzelník, který má zavázané oči, nabídne divákovi pět karet, na nichž jsou napsána přirozená čísla od 1 do 5. Divák uschová dvě z těchto pěti karet. Asistent kouzelníka pak ukáže divákovi dvě ze zbývajících tří karet a divák sdělí kouzelníkovi čísla na obou těchto kartách (v libovolném pořadí). Poté kouzelník uhádne čísla na obou kartách, které divák uschoval. Jakým způsobem se musí dohodnout kouzelník se svým asistentem, aby kouzelník mohl vždy správně sdělit čísla na kartách, které divák uschoval?

Úloha 3: Určete největší počet černých a bílých figurek, které je možno rozestavit na šachovnici 8×8 tak, aby v každém řádku a v každém sloupci bylo právě dvakrát více bílých figurek než černých. (Každá figurka je umístěna na právě jednom poli šachovnice.)

[1]GCHD Zborovská, Praha, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; Lucie_Ruzickova@seznam.cz

Úloha 4: Střed jedné strany a paty výšek ke zbylým dvěma stranám daného trojúhelníku ABC tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Rozhodněte, zda trojúhelník ABC musí být také rovnostranný.

Úloha 5: Míša stojí uprostřed kruhového trávníku o poloměru 100 m. Po každé minutě udělá krok délky 1 m. Před každým krokem sdělí Katce, kterým směrem se vydá, Katka však může zvolený směr změnit ve směr opačný. Rozhodněte, zda se Míša může vhodným rozhodováním dostat ven z kruhového trávníku, nebo zda ho Katka může vždy svými pokyny na tomto trávníku udržet.

Literatura

[1] RŮŽIČKOVÁ, L., ZHOUF, J. Matematická soutěž Turnaj měst, žákovská řešení úloh. In: Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2007: Sborník příspěvků.* Praha: PedF UK, 2008.

[2] ZHOUF, J., RŮŽIČKOVÁ, L. Práce s matematickými talenty jako součást projektu ESF. In: Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2007: Sborník příspěvků.* Praha: PedF UK, 2008, s. 182–185.

[3] ŠVRČEK, J., ZHOUF, J. Turnaj měst v České republice s rozborem úloh. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2007*: Sborník příspěvků. Praha: PedF UK, 2007, s. 55–64.

Matematické projekty – dva náměty[1]

Petra Švrčková[2]

Tento příspěvek se zabývá projekty jako metodou výuky, která může být využita při výuce matematiky na druhém stupni základní školy. Projektová práce je zde představena jako jeden z nástrojů realizace školních vzdělávacích programů.

První část hovoří o pojmu projekt, respektive projekt ve výuce matematiky. Zdůrazňuje body, které by při návrhu a realizaci projektu neměly být opomenuty.

Druhá část pak přináší dvě ukázky projektů, které byly realizovány na druhém stupni základní školy.

[1]Příspěvek vznikl v rámci řešení projektu GAUK č. 102807.

[2]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; psvrckova@seznam.cz

Úvod

Mnoho učitelů si uvědomuje skutečnost, že pokud je vyučování, respektive činnosti ve vyučování pro žáky zajímavé a přitažlivé, pak práce žáky baví a šance, že výuka bude úspěšná, vzrůstá. Učitelé velmi často volí úlohy, které jsou zajímavé svou formou – křížovky, rébusy, matematické pohádky apod. Z mého pohledu je však z dlouhodobějšího hlediska přínosnější volit spíše zajímavé, respektive odlišné metody než formy práce. Jednou z takových metod, která se nabízí, může být metoda projektová.

Projekt je pojem, který se ve spojení s vyučováním, nejen matematiky, používá stále častěji. Projekty ve vyučování matematiky se mohou použít ve všech částech učebního procesu – od fáze motivační až po aplikační. Na projekty můžeme nahlížet i z jiné roviny – projekty mohou spojovat několik vyučovacích předmětů (interdisciplinární projekty) či mohou být ryze matematické.

Pokud sáhneme po odborné literatuře, zjistíme, že o projektech mluví různí autoři různě. Poprvé o projektovém vyučování mluví John Dewey a William Kilpatrick, a to na počátku 20. století v USA. Kilpatrick specifikuje projekt jako každou záměrnou, systematickou aktivitu, která se odehrává v sociálním prostředí. Zdůrazňuje slovo záměrná a říká, že projekt může zahrnovat různé záměrné cíle, které přináší život. Jako příklad uvádí dívku, která si šije šaty, třídu předvádějící hru, skupinu chlapců organizujících basketbalový turnaj apod.

Jiní autoři, jako např. Petty (1996, s. 213) rozumí projektem úlohy nebo sérii úloh, které žáci řeší samostatně nebo ve skupinách. Důležité je, že žáci se mohou často rozhodnout jak, kde, kdy a v jakém pořadí budou úlohy řešit.

V Čechách se projektová metoda využívala již ve 30. letech 20. století. Později pedagogové od této metody upustili a svého „znovuobjevení“ se dočkala na konci 90. let.

Z českých autorů, kteří charakterizují termíny projekt a projektové vyučování, koresponduje můj přístup nejvíce s M. Kubínovou (2002, s. 27), která o projektech píše takto:

- Je to část učiva, jejíž osvojení směřuje k dosažení určitého cíle.
- Není připraven jako fixní program, který je shora daný a neměnný.
- Vzniká a je realizován na základě žákovské odpovědnosti.
- Souvisí s mimoškolní skutečností, vychází z prožitků žáků.
- Vede ke konkrétním výsledkům.

Pokud se rozhodneme připravit projekt, měli bychom si promyslet jeho tři hlavní fáze – přípravu, realizaci a evaluaci projektu.

Důležité body můžeme uspořádat do tabulky (volně inspirováno dle Kubínové, 2002) tak, abychom žádný z nich neopomenuli:

<table>
<tr><td colspan="2">Název projektu:</td><td colspan="2" rowspan="2">Typ projektu:
I. Motivační
Fixační
Reflexe
II. Matematický
Mezipředmětový</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cílová skupina:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Připravil:
o Učitel
o Žáci
o Učitel + žáci</td><td>Místo konání:</td><td>Časový rámec + termín odevzdání:</td></tr>
<tr><td>Cíle:</td><td colspan="3">o Matematické:
o Klíčové kompetence:
o Mezipředmětové vztahy:</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Pomůcky:</td><td colspan="2">Forma práce:
o Skupinová
o Individuální</td></tr>
<tr><td colspan="2">Výstup:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pravidla pro práci:</td><td colspan="2">Kritéria hodnocení:</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. část – motivace
2. část – vlastní práce na projektu
3. část – prezentace
4. část – reflexe</td></tr>
</table>

Pro žákovskou práci je velmi důležité zadat přesné instrukce pro práci i kritéria hodnocení. Při realizaci projektu žáci postupně prochází již zmíněnými čtyřmi částmi:

1. Motivace – povzbuzení žáků k práci na daném projektu; učitel může využít zajímavou úlohu, otázku nebo problém, který vyvolá diskuzi mezi žáky, situaci z reálného života apod.

2. Vlastní práce na projektu – žáci pracují samostatně, ve dvojicích nebo skupinách v závislosti na charakteru projektu. Práce může probíhat jak ve škole (v hodinách matematiky i jiných), tak doma. V této části projektu je učitel především v roli rádce, který by měl pomoci, pokud je požádán, ale měl by se vyhnout přílišnému usměrňování práce žáků.

3. Prezentace – umožňuje žákům, aby byli pozitivně ohodnoceni za svou práci nejen učitelem, ale i spolužáky, rodiči apod. Prezentace může mít formu referátu, vystaveného plakátu, výrobku, krátkého ústního představení práce nebo kombinace kterýchkoli zmíněných variant.

4. Reflexe – může být provedena učitelem samostatně (vyhodnocením předem daných kritérií) nebo společně se žáky například formou řízené diskuse. Zaměřit bychom se

měli především na naplnění zadaných úkolů a cílů, atmosféru a pocity žáků při práci atd.

Projekty nabízí prostor nejen pro získání vědomostí, ale také pro rozvoj klíčových kompetencí definovaných v Rámcovém vzdělávacím programu, podporu aktivity žáků a zpravidla mají velkou motivační sílu.

Jako inspiraci pro všechny učitele, které téma projektů zajímá, uvádím dva projekty, které byly realizovány při vyučování matematiky na 2. stupni základní školy.

TROJÚHELNÍKY

Tento projekt byl připraven učitelkou a realizován ve dvou hodinách matematiky v šestém ročníku. Cíle projektu byly následující:

1) Žák si pomocí prezentace pojmové mapy uvědomí své znalosti o trojúhelnících.
2) Žák si procvičí své znalosti o vlastnostech trojúhelníků pomocí práce na pojmové mapě.
3) Žáci rozvíjí spolupráci ve skupině.
4) Žák se naučí používat pro své učení novou techniku - pojmovou mapu.

Na začátku aktivity byla stanovena pravidla pro práci:
1) Žáci pracují ve skupině čtyř nebo pěti žáků.
2) Vypracují plakát (pojmová mapa na téma trojúhelníky).
3) Žáci si zvědomují postup tvoření pojmové mapy.
4) Všichni členové skupiny prezentují pojmovou mapu v závěru hodiny – matematické informace i postup tvoření mapy.

Dále byla stanovena i kritéria hodnocení.
1) Matematická správnost.
2) Počet údajů (informací) na pojmové mapě.
3) Spolupráce ve skupinách.
4) Počet členů prezentujících plakát.

Tento projekt je podrobně popsán ve sborníku z konference „Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let“, viz [4].

MALÍ CESTOVATELÉ

Tento projekt byl připraven učitelkou začátkem školního roku pro žáky 6. ročníku. Probíhal v hodinách matematiky a jedné hodině informatiky po dobu jednoho týdne. Cíle projektu byly rozděleny na matematické: žáci si zopakují převody jednotek délky, zaokrouhlování desetinných čísel, výpočet průměrné hodnoty, a rozvoj klíčových kompetencí: vyhledávání informací, rozvoj spolupráce i zodpovědnosti za samostatnou práci.

Žáci mohli pracovat samostatně nebo v maximálně tříčlenných skupinách. Jejich úkolem bylo vypracovat úlohy zadané na pracovním listu, zhotovit plakát a prezentovat své výsledky. Kritérii pro jejich hodnocení byli: matematická správnost výpočtů, počet požadovaných informací, prezentace posteru.

V první hodině matematiky dostali žáci zadání projektu formou průvodního dopisu (příloha 1) a rozdělili se do skupin. Poté žáci obdrželi pracovní list a řešili první úlohu, která byla převzata z učebnice Matematika 6 pro ZŠ a VG Aritmetika nakladatelství Fraus. Zde žáci převáděli jednotky délky, zaokrouhlovali přirozená a desetinná čísla, počítali průměrnou rychlost.

Po této hodině následovala hodina informatiky, kde vyhledávali informace k dalším úlohám z pracovního listu:

Úloha 2. Zjisti (vyhledej) finančně nejvýhodnější variantu cesty (dopravního spojení) pro dvě dospělé osoby (v pátek odpoledne vyrazí z Prahy a v neděli se budou vracet zpět).
Úloha 3. Která z variant dopravního spojení je časově nejkratší?
Úloha 4. Kterou variantu dopravního spojení doporučíš cestujícím? Proč?

Žáci zpracovávali v následující hodině matematiky a mimo vyučování. Na konci týdne proběhla prezentace vzniklých plakátů a reflexe nad prací formou diskuze.

Celkem pracovalo pět skupin, z nich práci dokončili tři. Práce čtvrté a páté skupiny nebyly dokončeny, protože se členové skupin během týdne nesešli a žádný z členů skupiny nechtěl dělat práci za ostatní. S odstupem času mohu říct, že tento postoj žáků měl v daný moment velkou hodnotu jak pro žáky, tak pro mě jako učitele. Ujasnila jsem si, že je důležité zadávat průběžné termíny, aby žáci mohli kontrolovat časový rámec plnění úkolů. Žáci si během dalších společných prací začali postupně uvědomovat, že záleží na práci jednotlivce pro celou skupinu. Usuzuji tak podle toho, že tyto případy se objevují méně často.

Plakáty, které byly prezentovány, obsahovaly celkem tři různé varianty dopravního spojení (osobní automobil, autobus a vlak), byla vybrána časově nejkratší i nejvýhodnější spojení. Žádná ze skupin ale neuvedla současně všechny možnosti. Vyskytla se pouze kombinace vlak – auto a autobus – auto. Dvě skupiny pojaly plakát jako leták cestovní kanceláře, která nabízí různá dopravní spojení na trase Praha – Uherské Hradiště. Poslední skupina, která byla tvořena pouze chlapci, pojala plakát jako nabídku půjčovny aut, kde nabízeli hned několik značek vozů s výpočtem jejich spotřeby benzínu/nafty a následné kalkulace ceny.

Ve všech skupinách se shodli, že doporučí cestu autem, protože byla časově kratší, podle jejich názoru pohodlnější, cestující nebyli vázáni na jízdní řády a cenově příliš nepřevyšovala ostatní možnosti.

Výletníci

Na jedné z třídnických hodin ve třídě 6. ročníku se probíralo téma třídního výletu, který měl být realizován v červnu. Tato diskuse byla prvotním impulsem pro vznik projektu „Výletníci“, jehož cílem bylo sestavení kompletního plánu výletu, a to zejména:

- Časový harmonogram
- Možnosti dopravy, ubytování a stravování
- Náplň výletu (tj. památky, sport . . .)
- Kalkulace ceny

Během těchto činností žáci měli samostatně vyhledávat a třídit informace, provádět početní operace s celými čísly, řešit problémy, rozvíjet svou schopnost spolupráce ve skupině, přebírat odpovědnost za vypracování úkolu, učit se dodržovat vymezená pravidla práce apod.

Projekt byl žáky řešen z velké části mimo vyučování, ve škole mu byly věnovány tři vyučovací hodiny matematiky a jedna hodina informatiky v průběhu jednoho měsíce. Zahájen byl předáním průvodního dopisu, kde byla shrnuta pravidla pro práci a důležité body, které nesmí opomenout nikdo, kdo připravuje výlet. Žáci vytvořili tři pětičlenné skupiny dle své volby. Následovala krátká diskuse, během které se mohli žáci zeptat na cokoli ohledně projektu.

Po dvou týdnech proběhla druhá hodina matematiky věnovaná konzultacím. Všechny skupiny si již vybraly objekt pro školní výlet (vždy alespoň jeden člen ze skupiny zde trávil prázdniny), proto nebylo potřeba využít materiály, které jsem měla připraveny jako alternativu (katalogy s vhodnými objekty, www odkazy). Objevilo se pouze několik dotazů jako: Co je to zákaznické jízdné? Můžeme vypracovat i přesný program? Je možné vzít si s sebou kola? Kolik učitelů s námi pojede? (Kvůli počtu osob a možnosti nabídnout např. 2 aktivity na stejnou dobu). Navrhla jsem také několik doplňujících otázek pro další práci skupin: Existují i jiné druhy jízdného? Jaké jsou pokoje? Jak poznám, kde objekt stojí – u lesa, ve městě?

Všechny skupiny zpracovaly vyhledané informace do podoby plakátu. Na každém plakátu bylo několik fotografií vyhledaného objektu, způsob dopravy, cena za dopravu, cena za ubytování a průměrná cena na 1 žáka. Dva z plakátů obsahovaly i tipy na výlety a časový harmonogram aktivit, které by se mohly uskutečnit.

Z matematického hlediska byl projekt zaměřen na opakování běžných operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) přirozených a desetinných čísel a výpočet průměrné ceny. Jedna skupina se setkala také s procenty (při určitém počtu osob byla nabídnuta % sleva). Protože se s výpočty týkající se procent během vyučovacích hodin žáci doposud nesetkali, vypomohla jim starší sestra jedné řešitelky.

Jako klíčovou roli tohoto projektu jsem pociťovala v rozvoji sociálních kompetencí, zejména spolupráce a diskuze ve skupině, a komunikativních kompetencí s důrazem na formulaci a obhájení myšlenek a naslouchání druhým. Vedl mě k tomu stav, kdy tato konkrétní třída vznikla „slepením různých skupinek“, a jako celek tyto kompetence postrádala.

Během závěrečné třetí hodiny probíhala prezentace žákovských návrhů a reflexe, která byla zaměřena na rozhovor s žáky a volbu nejlákavější nabídky, jež byla na konci školního roku také realizována. Všechny tři nabídky se cenově příliš nelišily, proto si žáci vybrali možnost, která podle jejich vyjádření byla prezentována nejzajímavěji a jako jediná nabídka obsahovala možnost venkovního koupání a návštěvy zajímavé výrobny vánočních skleněných ozdob.

Je důležité mít na paměti, že realizace projektů je složitá a ovlivňuje ji řada činitelů, které mají dopad jak na průběh samotné práce, tak i na výsledky a úspěšnost projektu. Podle mého názoru je důležité, aby se práci na projektech postupně učili jak žáci, tak učitelé.

Literatura

[1] KILPATRICK, W. H.: The Project Method. *Teachers College Record*, Vol. 19, No. 4, 1918, p. 319–335.

[2] KUBÍNOVÁ, M.: *Projekty ve vyučování matematice, cesta ke tvořivosti a samostatnosti*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2002.

[3] PETTY, G.: *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996.

[4] ŠVRČKOVÁ, P., STEHLÍKOVÁ, N. Pojmová mapa v žákovském projektu. In Stehlíková, N. (ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2008, s. 143–150.

[5] VALENTA, J.: *Pohledy. Projektová metoda ve škole a za školou*. Praha: Ipos Artama, 1993.

Příloha 1 – Průvodní dopis

MALÍ CESTOVATELÉ

Milé žákyně, milí žáci,

v novém školním roce nás čekají i nové projekty. Dnes je tady projekt s číslem jedna. Protože každý z nás čas od času cestuje (a nejen autem), máte příležitost zjistit, kolik nás cestování stojí a jaké dopravní prostředky můžeme použít.

Abychom mohli výsledky Vaší práce porovnat s ostatními, zaměříme se na jednu konkrétní cestu. Přitom je třeba dodržet určitá pravidla:

Můžete pracovat jednotlivě nebo ve skupinách, které nebudou mít více než tři členy.

Pro shromáždění informací potřebných k Vaší práci můžete využít hodinu informatiky, osobní návštěvu informačního centra a podobně.

Vaši práci budete prezentovat formou Posteru, který bude vystaven v naší třídě.

Hodnocení Vaší práce na projektu bude součástí hodnocení Vaší práce ve vyučování matematice v prvním pololetí školního roku 2007/2008.

Projekt je třeba vypracovat nejpozději do 7. 11. 2007.

PŘÍLOHA 2 – POSTER MALÍ CESTOVATELÉ

CLIL – VÝUKA MATEMATIKY V ANGLIČTINĚ

LENKA TEJKALOVÁ[1]

V roce 2003 schválila Evropská unie dokument pod názvem „Podpora jazykového vzdělávání a lingvistické rozmanitosti“ jako součást strategie, jejímž cílem je dosáhnout aktivního osvojení dvou cizích jazyků (kromě mateřštiny), a to pro všechny obyvatele EU do roku 2010. Součástí tohoto dokumentu je myšlenka integrace obsahového a jazykového vzdělávání (CLIL - Content and Language Integrated Learning). Možnosti integrovat cizí jazyk do výuky nabízí i matematika.

CLIL je termín zastřešující situace, kde probíhá výuka odborného předmětu nebo jeho části v cizím jazyce. CLIL klade důraz na rovnováhu mezi odborným obsahem a jazykovou složkou: nejde pouze o výklad tematického celku v cizím jazyce, důležitý je rozvoj znalostí v odborném předmětu, ale i v příslušném cizím jazyce. Do celkové výukové situace tak vstupují dva jazyky: jazyk mateřský (L1) a jazyk vyučovací (L2). V případě matematiky můžeme mluvit ještě o třetí jazykové rovině, již tvoří symbolický jazyk matematiky a její vizuální stránka. Tento „třetí jazyk“ se díky své mezinárodní srozumitelnosti stává přirozeným mostem mezi rodným jazykem a jazykem cizím, usnadňuje tak komunikaci a poskytuje žákům i učiteli pevný bod, ze kterého mohou vycházet i v případě, že jejich znalosti L2 nejsou na vysoké úrovni.

Výhody nicméně nepřináší jen matematika jazykové výuce, ale i cizí jazyk matematice. Cizí jazyk může v matematice například pomoci bojovat s formálními znalostmi. S cizojazyčnými výrazy pojmů se pochopitelně mění i používané písmenné symboly, odlišný často bývá i ustálený způsob zapisování vzorců. Je potřeba chápat koncept, který vzorec symbolicky zapisuje, protože cizí jazyk odstraňuje berličku naučené „básničky“: například pro obsah trojúhelníka přestává stačit bezchybně si pamatovat výraz $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ – v angličtině se najednou žáci setkají např. se zápisem $A = \frac{1}{2}sh$. CLIL tak může být účinným prostředkem, jak formalismy u žáků vysledovat a odstranit. Ani nedokonalá znalost příslušného cizího jazyka není překážkou, často je tomu naopak. Obtížnost L2 nutí žáky i učitele se soustředit na skutečně klíčové pojmy a myšlenky, přeformulovávat své výroky tak, aby dokázali sdělit poznatky a myšlenky i při omezené slovní zásobě, a to může významně přispět k hlubšímu pochopení a vhledu do probírané látky.

CLIL svou integrující povahou nutí učitele měnit standardní metody a postupy, hledat alternativní řešení. V zásadě staví na spojení didaktik cizího jazyka a odborného předmětu. Úspěšná hodina CLIL vyžaduje aktivní metody, spolupracující prostředí ve třídě, klade důraz na komunikaci, vychází z dosavadních znalostí žáků, které rozšiřuje a integruje;

[1]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; lenka.tejkalova@gmail.com

zároveň nabízí celou škálu podnětů pro projektové vyučování a otevírá široké možnosti pro využití vizuálních prostředků atd.

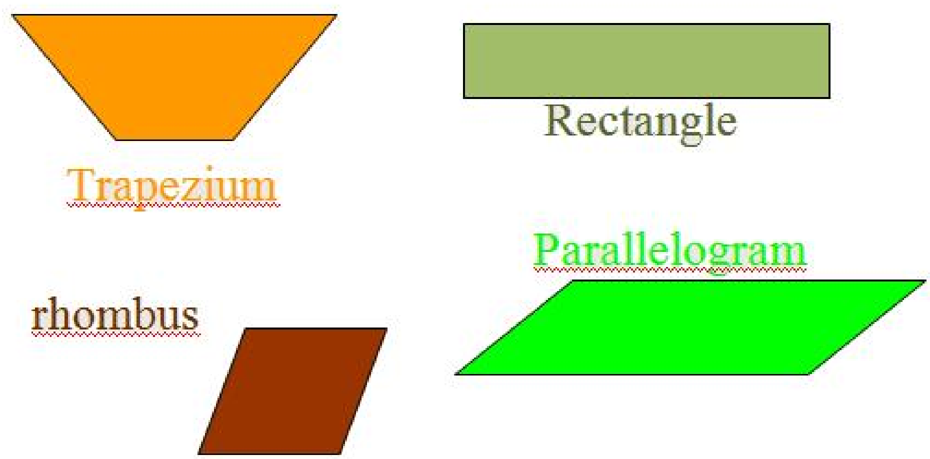
EXPERIMENT: SHAPES – TVARY

Experimentální hodina CLIL: *Shapes* byla realizována na Lauderových školách v Praze v rámci semináře z matematiky pro 1. – 3. ročník čtyřletého gymnázia. Všichni žáci byli v angličtině na úrovni mírně pokročilí nebo vyšší.

Cílem hodiny bylo vybudovat slovní zásobu týkající se jednoduchých planimetrických útvarů a především soustředit se na jejich vlastnosti a vzájemné vztahy.

Prezentace nové slovní zásoby bezprostředně vychází z dosavadních jazykových znalostí žáků (jednoduché výrazy: *square – čtverec, circle – kruh* apod.) a rozšiřuje je o odbornější terminologii. Učitel využívá obrazového materiálu, zařazena je práce ve skupinách nebo dvojicích i skupinová diskuze řízená učitelem.

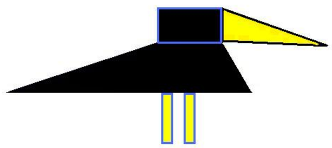
PRŮBĚH HODINY



S pomocí obrázků – bez nutnosti překladu – zavádí učitel pojmy rovnoběžník, lichoběžník apod. Novou slovní zásobu systematicky zapisuje na tabuli k obrázkům, tak aby žáci měli možnost soustředit se na obsah a průběh hodiny a nikoliv na nutnost okamžitě si zapamatovat seznam nových pojmů, a přitom mohli odbornou terminologii používat.

Žáci nejdříve pod vedením učitele sestavují popisy/definice jednotlivých geometrických útvarů a snaží se popis co nejvíce zpřesnit nebo uvést co nejvíce detailů (př.: má 4 strany, nemá žádný pravý úhel, dvě strany jsou rovnoběžné, úhlopříčky jsou stejně dlouhé. . .). Žáci průběžně zjišťují, že pro přesné pojmenování některých prvků potřebují další slovíčka – využívají buď již existujícího seznamu na tabuli, nebo se na potřebné výrazy ptají. Učitel dotazované pojmy průběžně doplňuje na tabuli.

Učitel následně uvede sérii podmínek a žáci diskutují o tom, které geometrické útvary tyto podmínky splňují všechny, příp. které útvary nesplňují pouze některou z nich či dokonce ani jednu z nich. Jde de facto o převrácenou první aktivitu, jejímž cílem je jak upevnit novou slovní zásobu, tak rozvíjet schopnost žáků vnímat geometrický tvar a jeho vlastnosti jako celek. Role učitele spočívá především v moderování diskuze a podněcování žáků k samostatným úvahám; učitel také podporuje žáky v názorných ukázkách jejich hypotéz u tabule atd.



Ve druhé části hodiny dostanou žáci sadu připravených rovinných útvarů. Jejich úkolem je nejdříve sestavit z nich obrázek (žáci, se kterými byl experiment prováděn, měli z předchozí hodiny čerstvou zkušenost se skládáním tangramu) a následně svůj obrázek v angličtině popsat spolužákovi, který (aniž by viděl vzor) má podle instrukcí poskládat tentýž obrázek. Žáci si následně vymění role. Variantou pro větší skupiny je, že si skupina žáků vybere „tvůrce“, ostatní skládají obraz podle instrukcí a na závěr porovnávají rozdíly ve svých výsledcích. Učitel v průběhu této části hodiny monitoruje probíhající konverzace a vede žáky k důslednému používání angličtiny.

Závěrem vyučovací hodiny je učitelem vedená skupinová reflexe na realizovanou aktivitu, analýza problematických momentů, ať už jazykových, nebo matematických (*Které slovíčko pro vás bylo nejsložitější? U kterého útvaru jste narazili na sporné definice? Kde a proč vznikaly chyby u skládání obrázků?*)

Shrnutí

Během této vyučovací hodiny žáci:

- osvojují si názvy základních planimetrických útvarů a jejich vlastností v angličtině,
- shrnují vlastnosti jednoduchých útvarů: v diskuzi ověřují, které znaky jsou charakteristické pro skupiny útvarů a/nebo pro individuální útvary, kategorizují útvary podle sdílených charakteristik,
- procvičují anglické předložky a slovesa související s pohybem a pozicí v rovině (položit, otočit, spojit¶]), v závěrečné reflexi procvičují minulý čas,
- formulují hypotézy, vyvracejí je či potvrzují, argumentují,
- kriticky hodnotí přesnost a intenzitu vlastní činnosti v kontextu práce ve dvojici/skupině.

Závěr

CLIL pro žáky i učitele představuje výzvu: integruje výuku odborného předmětu a cizího jazyka a otevírá tak široké možnosti interdiciplinárních vazeb. Matematika je pro CLIL výhodná i díky možnosti využití symbolického zápisu a naopak, změna vyučovacího jazyka může prohloubit a zpevnit poznatky v matematice.

Existují nejrůznější způsoby začlenění CLIL do výuky. Zřejmá je souvislost s tzv. bilingvními školami, kde jsou celé odborné předměty vyučovány v cizím jazyce; CLIL lze realizovat například jako volitelný seminář, pravidelně i nárazově v rámci hodiny cizího jazyka, v rámci odborného předmětu i v rámci volnočasových aktivit žáků, můžeme se setkat i s variantou, kdy např. jedno pololetí je vyučováno v rodném jazyce a druhé pololetí v jazyce cizím[1].

Tento článek prezentuje konkrétní aktivitu CLIL začlenitelnou do běžné výuky a v závěru shrnuje přímo i nepřímo rozvíjené matematické a jazykové složky. Během realizace této vyučovací hodiny v semináři byli studenti velmi aktivní, spontánně si zjišťovali novou slovní zásobu a debata o vlastnostech jednotlivých tvarů vyústila ve velmi živou diskusi. Všichni účastníci experimentu tuto zkušenost s CLIL hodnotili jednoznačně kladně, jako přínosnou a motivující.

Literatura

[1] APAC Monographs, *CLIL in Catalonia, from Theory to Practice*. Girona: APAC, 2006

[2] Marsh, D., Langé, G. *Implementing Content and Language Integrated Learning*. Jyväskylä: Continuing Education Centre, University of Jyväskylä, 1999

[3] Novotná, J., Hofmannová, M., *CLIL and Mathematics Education. In: Mathematics for Living*. The Mathematics Education Into the 21st Century Project. Ed. A. Rogerson, 2000, s. 226-,230.

Selbst erstellte Tangrams für Bilder – Eine Lernumgebung zur Geometrie für die Grundschule

Bernd Wollring [1]

Zu Beginn

Im Arithmetikunterricht der Grundschule ist man in Europa allgemein auf dem Weg neben den Fertigkeiten in gleichem Maße Strategien zu betonen. Bei dem für den Mathematikunterricht so wichtigen Üben bildet sich dies ab in die Unterscheidung von automatisierendem Üben und operativen Üben. Das automatisierende Üben, dessen Ziel darin besteht, Fertigkeiten so zu sichern, dass sie auf Anfrage schnell zu mobilisieren sind, hat im Mathematikunterricht nach wie vor seine Berechtigung und Bedeutung, es sollte aber ausbalanciert sein mit operativem Üben, das, wie der Leitsatz oben markiert, den Strategien und Strukturen gewidmet ist. Diese Unterscheidung erscheint uns nicht nur für die Arithmetik im Mathematikunterricht der Grundschule bedeutsam, sondern auch für die Geometrie. Auch dort sind Strategien und Strukturen von besonderer Bedeutung und der Geometrieunterricht sollte organisatorischen und intellektuellen Raum geben, sie zu entdecken und zu nutzen (vgl. Bauersfeld 1992).

Dabei zeigt sich eine Besonderheit des Geometrieunterrichts darin, dass er zumeist auch in den unteren Jahrgangsstufen bereits Gegenstände betrifft, die in der Sache so komplex sind, dass viele Kinder zwar keine Schwierigkeiten haben, sie handelnd zu bewältigen, wohl aber Schwierigkeiten, sie in einer geeigneten Sprache mündlich oder schriftlich darzustellen. Vielmehr entwickelt sich gerade im Geometrieunterricht die Sprache erst begleitend zu den Handlungen. Das gilt zwar mit Einschränkungen auch im Arithmetikunterricht, hat aber dort deshalb nicht das gleiche Gewicht, weil im Arithmetikunterricht bereits mit Beginn des ersten Schuljahres eine ganz spezifische Schriftsprache entwickelt wird, mit der man Rechnungen dokumentiert. Eine derart spezifische funktionale Sprache wird im Geometrieunterricht wenig bis gar nicht entwickelt. Zwar treten hier und da einige Fachvokabeln auf, aber ein Textvokabular oder gar ein formales Vokabular oder Darstellungssystem für die Operationen findet sich nicht.

Vielmehr gilt ein anderes Prinzip: "Geometrie ist die Sprache der Formen" notiert von Baravalle als Widmung für den Geometrieunterricht an Waldorfschulen (von Baravalle 1957). Für den Autor enthält dieser Satz die Essenz, das geometrische Prozesse und Strukturen gewissermaßen als Zusammenhänge zwischen den Formen und Gestalten wiederum mit Hilfe geometrischer Mittel dargestellt werden. Einfacher gesagt, die ersten

[1] Fachbereich Mathematik, Universität Kassel; wollring@mathematik.uni-kassel.de

Dokumente in der Geometrie der Grundschule entstehen nicht in einer Schriftsprache, sondern zunächst in einer Bildsprache.

In diesem Sinne ist das Gestalten von Bildern die Ausgangssituation für das Gestalten geometrischer Texte, mit denen die Entdeckungen und Erfindungen, die Kinder zu geometrischen Formen machen, festgehalten werden. Dazu soll im Folgenden ein kleines Beispiel vorgestellt werden.

Tangrams – gegeben und gemacht

Das chinesische Tangram ist ein Formenset, der eine Quadratzerlegung darstellt. Es besteht eine lange Tradition, Tangrams in der Grundschule im Geometrieunterricht zu nutzen. Das geschieht richtigerweise meist spielerisch. Allerdings dominiert ein bestimmtes Aufgabenformat, und es besteht eine spezifische mathematische und eine in der Regel logistische Schwierigkeit beim Arbeiten mit Tangrams.

Das vorherrschende Aufgabenformat besteht darin, dass ebene Figuren durch ihren Umriss gegeben sind und mit den Tangram-Teilen auszulegen sind. Bei diesem Aufgabentyp sind stets alle sieben Teile des Tangrams zu verwenden. Eine spezifische mathematische Schwierigkeit entsteht dabei durch die Figuren, welche die Teile des Tangrams bilden, die "Tans" des Tangrams. Denn alle fünf Dreiecke und das Quadrat sind achsensymmetrisch, aber das Parallelogramm ist nicht achsensymmetrisch. Daher erzeugt es nach unseren Erfahrungen die meisten Schwierigkeiten. Die Kernfrage beim Lösen der Auslegeaufgabe mit Tangrams lautet stets: Auf welcher Seite liegt das Parallelogramm?

Es erscheint daher durchaus sinnvoll, auch Tangrams zu verwenden, die kein Parallelogramm, oder besser gesagt nur achsensymmetrische Figuren enthalten. Damit entsteht die Frage, ob man nicht überhaupt bedenken sollte, Tangrams im Unterricht der Grundschule nicht nur zu benutzen, sondern auch herzustellen, und zwar so, wie man sie für die jeweilige Lernumgebung passend benötigt.

Zwei logistische Schwierigkeiten erzeugen die üblichen konfektionierten Tangrams. Eine besteht darin, dass sich verloren gegangene Teile in der Regel nicht ersetzen lassen und ein Tangram, dem ein Teil fehlt, meist wertlos ist. Eine weitere Schwierigkeit entsteht, wenn man – was richtig ist – im Unterricht Spielräume und Dokumente unterscheiden will (vgl. Wollring 2008).

Charakteristisch für einen Spielraum ist, dass man in dieser Situation die Teile oder besser gesagt die aus den Teilen erstellten Figuren bequem und schnell variieren kann, um so umfassende experimentelle Erfahrung zu sammeln und wo es gefordert ist vom nicht systematischen zum systematischen Probieren zu finden. Nun haben solche Spielräume aber zumeist den Nachteil, dass die verschiedenen Zustände und Figuren in ihnen zeitlich-sequenziell erscheinen und man dabei die Übersicht über die Vielfalt der Zwischenergebnisse verlieren kann.

Daher macht es Sinn, das Arbeiten in den Spielräumen durch Dokumente oder besser gesagt durch Dokumentieren zu begleiten. Das heißt, durch ein Festhalten von Ergebnissen, sodass man sie räumlich-simultan wahrnehmen und aus ihrer Vielfalt gemeinsame Strukturen oder Zusammenhänge ableiten kann. Diese Balanciertheit zwischen Spielraum und Dokument ist allgemein ein wesentliches Organisationsproblem des Mathematikunterrichtes.

Für unsere Tangrams entsteht das Problem, Figuren möglichst in derselben Geschwindigkeit, in der ein Kind im Spielraum sie variiert, durch ein anderes Kind dokumentierend festzuhalten. In dem schönen Buch “Der Tangram-Zauberer” von Campbell-Ernst und Ernst (Campbell-Ernst & Ernst 1990) wird dies gelöst, indem strukturierte Bilder aus Tangram-Teilen, die verschiedene Gestalten darstellen, durch ein beigelegtes Tangram auszulegen sind. Allerdings entfällt damit das Problem, diese Struktur zu finden, das ist der Preis dafür, dass die Struktur dokumentiert ist und man “zum Spielen” nur ein einziges Tangram benötigt, das dem Buch in einer Tüte beigegeben ist. Nun erscheint als natürliche Methode zum Vervielfältigen von Figuren im Geometrieunterricht das Zeichnen, entweder freihändig oder unterstützt, etwa durch Schablonen. Das ist in diesem Fall durchaus geeignet, allerdings sind auch die Schablonen passend zu den Tangrams herzustellen. Wir schlagen einen anderen Weg vor. Wir beschreiben eine Technik, mit der man auf einfache Art und Weise viele kongruente Tangrams herstellen kann, so viele, dass man sie zum Dokumentieren verbrauchen kann. Unsere Dokumente sind aus Tangram-Teilen geklebte Bilder.

Tangrams – Zerlegen von Quadraten

Wir kennzeichnen Tangrams als spezielle Zerlegungen von Quadraten. Zur Konstruktion genügen Quadrate, deren Seiten durch Marken geviertelt sind. Bild 1 zeigt eine Arbeitsvorlage mit zwei eingezeichneten chinesischen Tangrams (C-Tangrams), bei denen das Parallelogramm jeweils anders liegt. Man kann ein “linkes C-Tangram” und ein “rechtes C-Tangram” unterscheiden.

Ein nahe liegendes Dreieck-Tangram (D-Tangram) entsteht, wenn man das Parallelogramm und das Quadrat jeweils diagonal so teilt, dass drei Sorten Dreiecke entstehen: Sie sind sämtlich gleichschenklig und rechtwinklig, und das jeweils kleinere hat den halben Flächeninhalt des nächst größeren. Alle Figuren, die sich mit einem C-Tangram legen lassen, kann man auch mit einem D-Tangram legen. Ein großer Raum zur Differenzierung entsteht, wenn man das Quadrat auf individuelle Art in gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt, dabei kann man größere oder kleinere Auflösungen wählen.

Eine zweite Option besteht darin, die Quadrate, die man zerlegen will, in verschiedenen Größen anzubieten. Bild 2 zeigt eine Vorlage mit drei verschieden großen Quadraten. Da der Flächeninhalt der Quadrate sich vom kleineren zum jeweils größeren verdoppelt, vergrößern sich die Seitenlängen mit dem Faktor ?(2). Man stellt dann fest, dass etwa “die großen Dreiecke des Tangrams in der Mitte genauso groß sind wie die mittleren Dreiecke des Tangrams oben”, dass sich also teilweise gleich große Dreiecke in den verschiedenen Tangrams finden.

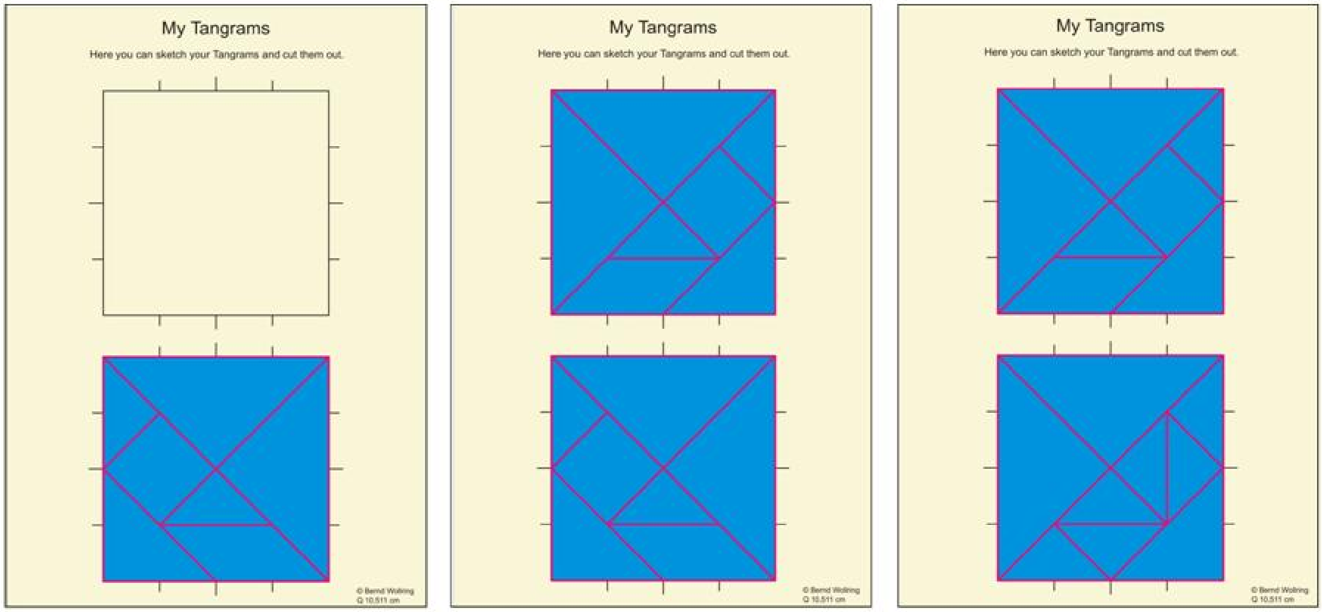


Bild 1: C-Tangram im Arbeitsbogen (Links), "rechtes C-Tangram" und "linkes C-Tangram" (Mitte), C-Tangram und D-Tangram (Rechts)

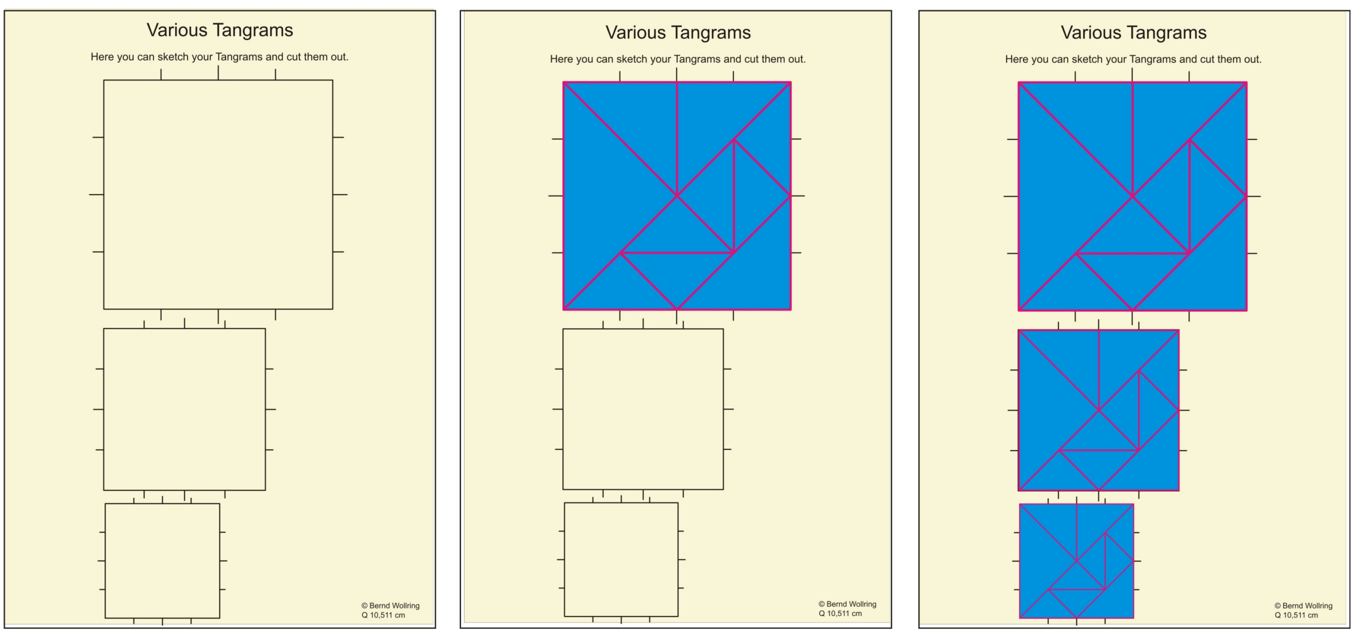


Bild 2: Arbeitsbogen für D-Tangrams in drei Größen, Vergrößerung der Flächen um jeweils 2, Vergrößerung der Längen jeweils um $\sqrt{2}$

Mit den so selbst konzipierten Tangrams lassen sich gut kongruente Figuren und ähnliche Figuren herstellen, – wenn genügend viele davon zur Verfügung stehen (vgl. Wollring 2001a und 2001b).

Bild 3: D-Tangrams in Arbeit, Konferenz in Prag

Tangrams – vervielfältigt durch Schneiden von Stapeln

Viele derartige Tangrams lassen sich in der Grundschule wie folgt herstellen: Die Tangrams werden in Arbeitsbögen gezeichnet, wie sie Bild 1 und Bild 2 zeigen. Die Bögen ihrerseits werden zu Stapeln aufeinander geheftet und dann mit einer Schere ausgeschnitten. So entstehen aus den Stapeln viele kongruente Tangrams. Dabei muss lediglich der obere Bogen eines Stapels das Tangram als Zeichnung tragen, die Tangrams aus den unteren Bögen entstehen deckungsgleich von selbst.

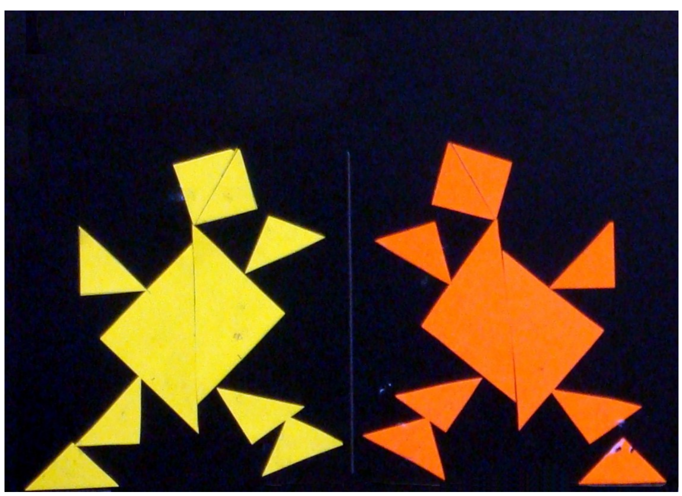


Bild 4: Kongruente und ähnliche Figuren, komponiert aus D-Tangrams

Diese Herstellungshandlung hat nicht nur einen technischen Aspekt, sie ist auch mathematisch substanziell: Denn die Kongruenz der Tangrams ist hier nicht eine nachträgliche gefundene Eigenschaft, sondern durch das Herstellungsprinzip “aufeinander legen und schneiden” ein vorab bei der Konstruktion der Figuren genutztes Prinzip. Ebenso lassen sich ähnliche Tangrams in größerer Anzahl herstellen. Ein Stapel von fünf aufeinander gehefteten Bögen lässt sich noch bequem mit der Hand zerschneiden. Wählt man die Farben der einzelnen Bögen in den Stapeln sämtlich unterschiedlich, so entstehen lauter Tangrams mit verschiedenen Farben, die man nach dem Schneiden bequem auseinander sortieren kann.

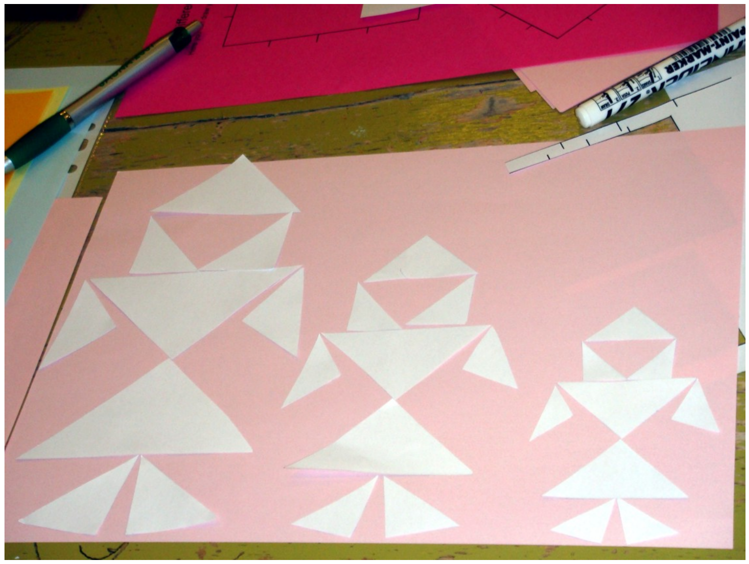


Bild 5: Kongruente und ähnliche Figuren, komponiert aus D-Tangrams

TANGRAMS – BAUSTEINE FÜR BILDER UND GESCHICHTEN

Diese Tangrams lassen sich nutzen, um Motive aus kongruenten Bildern und aus ähnlichen Bildern herzustellen. Die Tangrams bieten einen attraktiven und motivierenden Spielraum, der ohne Störung sicher funktioniert. Verloren gegangene Teile der Tangrams lassen sich leicht ersetzen. Da die Tangrams sich leicht in ausreichender Anzahl herstellen lassen, ist es möglich, viele Ergebnisse der Experimente im Spielraum durch Dokumente festzuhalten. Dazu werden die Figuren einfach auf Papier oder Kartonbögen festgeklebt. Dunkle Kartonbögen ergeben attraktive, strahlende Bilder.

Ein besonderer Reiz dieser Lernumgebung besteht darin, dass man die so entstehenden Bildmotive durch Einfügen kurzer Textzeilen zu Geschichten zusammenfassen kann. Wählt man ein geeignetes rahmendes Motiv, wie etwa den "Traum des Tangram-Zauberers", so lassen sich die einzelnen Szenen von den beteiligten Schülern einer Gruppe oder einer ganzen Klasse zu einer attraktiven Serienbildgeschichte zusammenfassen.

ZUM SCHLUSS

Der günstige logistische Rahmen dieser Lernumgebung ermöglicht ein echtes Experimentieren zu Kongruenz und Ähnlichkeit. Die Konstruktionen werden entscheidend dadurch unterstützt, dass man mit vorbereiteten Elementen arbeitet, die bereits reich an Strukturen sind. Hier sind es die Dreiecke. In ihren Handlungen erarbeiten die Schüler an Beispielen zwei bedeutsame allgemeine mathematische Sätze, auch wenn sie diese in der Grundschule meist so noch nicht formulieren werden:

Allgemeiner Kongruenzsatz
Figuren, die aus kongruenten Teilen in gleicher Weise konstruiert werden, sind kongruent.
Allgemeiner Ähnlichkeitssatz
Figuren, die aus ähnlichen Teilen in gleicher Weise konstruiert werden, sind ähnlich.

Hier ist später sprachlich zu präzisieren, was mit "Teilen" und was mit "in gleicher Weise" genau gemeint ist. Aber eine Grundidee zur Kongruenz und Ähnlichkeit ist angelegt. Weitere Fragestellungen, etwa Betrachtungen zu Flächenmaßen und Umfängen, können sich anschließen.

LITERATURA

[1] von Baravalle, H. (1957). *Geometrie als Sprache der Formen*. Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben. 1. Auflage 1957, 2. Auflage 1963, 3. Auflage 1980.

[2] Bauersfeld, H.: Drei Gründe, geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1992, S. 7–33

[3] Campbell-Ernst, L., & Ernst, L. (1990). *The Tangram Magician*. New York: Harry N. Abrams Inc. Publishers.

[4] Wollring, B. (2001a). Working Environments for the Geometry of Paper Folding in the Primary Grades. In M. Hejný, & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Mathematics Teaching (SEMT '01)* Prague, the Czech Republic, Charles University, Faculty of Education, August 26–31, 2001 (S. 177–178). Prague: Charles University, Faculty of Education.

[5] Wollring, B. (2001b). Der Tangram-Zauberer – Eine fächerverbindende computerbezogene Lernumgebung zur Geometrie in der Grundschule. In W. Weiser, & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Festschrift für Siegbert Schmidt (S. 307–321). Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

[6] Wollring, B. (2008). Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In Kasseler Forschergruppe (Hg.), *Lernumgebungen auf dem Prüfstand*. Bericht 2 der Kasseler Forschergruppe Empirische

[7] *Bildungsforschung Lehren – Lernen – Literacy* (S. 9–26). Kassel: Kassel university press GmbH.

METODICKÁ PODPORA VÚP ZAMĚŘENÁ NA MATEMATIKU A TVORBU ŠVP

EVA ZELENDOVÁ, TOMÁŠ PAVLAS[1]

Činnost Výzkumného ústavu pedagogického v Praze je různorodá. V našem příspěvku se zaměříme na aktivity VÚP, které se týkají metodické podpory učitelů matematiky a podpory všech, kteří tvořili, tvoří či budou tvořit školní vzdělávací program (ŠVP). Podrobněji představíme některé výstupy dvou projektů, které jsou na VÚP realizovány: projektu Metodika a projektu Pilot G/GP.

PROJEKT METODIKA

V lednu 2006 vznikl ve VÚP v Praze projekt Metodika. Hlavním cílem tohoto projektu bylo vytvoření systematické podpory pedagogů při realizaci školské reformy a jako hlavní prostředek této podpory vznikl Metodický portál provozovaný na adrese `www.rvp.cz`. Pro snadnou orientaci je Metodický portál rozdělen do pěti sekcí: Předškolní vzdělávání, Základní vzdělávání, Gymnaziální vzdělávání, Speciální vzdělávání a Odborné vzdělávání. Z dalšího členění, které je u většiny z uvedených sekcí velmi podobné, se nejprve zastavíme u nabídky Metodická podpora.

METODICKÁ PODPORA VZDĚLÁVACÍHO OBORU MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

Praktická tabulka vyhledávání příspěvků je novou pomůckou, která návštěvníkům portálu pomůže při vyhledávání jednotlivých článků. Nejprve je třeba zvolit v levé části tabulky vzdělávací obor či průřezové téma a v horní části si najít požadovaný typ textu. Pak už stačí jen kurzorem označit okno, které tvoří průsečík předchozí volby. Objeví se výzva VSTUPTE, stačí jedno kliknutí a uživatel může vybírat ze seznamu všech článků dané sekce. Vyberme si Matematiku a její aplikace a Praktické náměty. Na monitoru počítače se objeví název a krátká anotace zveřejněných článků.

Po kliknutím na název se čtenář může seznámit s obsahem celého článku, článek si vytisknout a případně si stáhnout či vytisknout přílohy. Jako příklad si uveďme přílohu článku Symbolický jazyk výrokové logiky, který naleznete na adrese

`http://www.rvp.cz/clanek/365/1804`.

Pracovní list žáka, který učitel může po vytisknutí použít bez dalších úprav přímo v hodině, obsahuje sedm nepříliš složitých citátů, které mají žáci přepsat pomocí logických spojek. Jejich výsledky můžete porovnat s výsledky 14 dobrovolníků. Různost

[1] VÚP v Praze, zelendova@vuppraha.cz; Gymnázium Rumburk, ext. spolupracovník VÚP v Praze; pavlas@gymrumburk.cz

přepisu konkrétního složitějšího citátu, kterou můžeme využít k tomu, abychom žákům vysvětlili důležitost jednoznačnosti zápisu vět matematických a jednoznačnosti zápisů jejich důkazů, si ukažme na následujícím citátu:

Luk se láme, když je napjatý, ale duše ztrácí své síly nečinností.

A. . . luk je napjatý
B. . . luk se láme
C. . . duše je nečinná
D. . . duše ztrácí síly
$(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D)$

A. . . luk je napjatý
B. . . luk se láme
C. . . duše ztrácí své síly nečinností
$(A \Rightarrow B) \wedge C$
$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C$
$(B \wedge C) \Rightarrow A$
$(A \Leftrightarrow B) \wedge C$

Tematický vstup Nadaní žáci

Sekce Tematické vstupy byla vytvořena z praktického důvodu. Aby veškerá aktuální témata, která se v průběhu provozu portálu ukázala pro návštěvníky a pro jejich práci na tvorbě ŠVP jako důležitá, byla soustředěna na jednom místě. V současné době zde naleznete tyto podsekce: Průřezová témata, Klíčové kompetence, Autoevaluace školy, Hodnocení žáků, Speciální vzdělávání, Nadaní žáci, Klima školy a Vzdělávání menšin. Z hlediska metodické podpory výuky matematiky se podrobněji podíváme na příspěvky v tematickém vstupu Nadaní žáci.

Identifikace a diagnostika mimořádně nadaných žáků patří k velkým problémům v běžném školním životě. Proto pracovníci VÚP připravili projekt Učitel a jeho žák. Na problematiku nadaných žáků se návštěvník portálu má možnost podívat ze dvou pohledů. Jednak očima pedagogů, kteří se vzděláváním nadaných zabývají, jednak očima žáků, kteří byli svými vyučujícími za nadané označeni. Mezi takto označené žáky patří i osobnost známá nejen ve světě matematiky, ale i ve světě uměleckém, kterou je hudebník Kryštof Eben. Rozhovor s ním najdeme na adrese:

`http://www.rvp.cz/clanek/462/2188`

Velmi zajímavá je ta část rozhovoru, ve které Kryštof Eben vzpomíná, jak se vlastně do matematické třídy dostal: „Jsem z muzikantské rodiny a dlouhou dobu jsem si myslel, že jediný způsob, jak se můžu uživit, je muzika. Nejdřív to vypadalo, že se stanu klavíristou. Táta i strýc byli klavíristé a skladatelé a já jsem nepočítal, že bych se mohl živit něčím jiným. Byl jsem spíš orientovaný humanitně na jazyky a muziku, k tomu jsem měl dispozice. Na střední školu jsem nastoupil na klasické gymnázium, kde byla latina a řečtina. Tam jsem půl roku studoval, s tím, že po takových čtyřech měsících mi vycházela z matematiky trojka a z fyziky čtyřka. V té době jsem si náhodou přečetl nějaké knihy, víceméně populární, které ale způsobily, že mě matematika natolik zaujala, až jsem si řekl, že tohle je možnost zkusit něco, co nikdo z naší rodiny profesionálně nedělal. Táta z matematiky sice maturoval a dědeček byl učitel, ale nikdo to nedělal profesionálně, široko daleko v celé rodině. Pro mě to bylo takové dobrodružství. V těch šestnácti letech jsem se tedy rozhodl, že přejdu z akademického gymnázia ve Štěpánské na Píkárnu."

Metodická podpora vzdělávání v sekci Nadaní žáci se opírá o praktické a osvědčené náměty pro práci s nadanými žáky. Co bylo podnětem pro sérii článků *Nadaní žáci na gymnáziu* se dozvíme z úvodního textu (`http://www.rvp.cz/clanek/689/1712`): „Někdy je člověk sám překvapen, jaké asociace mu některá slova vyvolají. V daném případě mi slovní spojení *uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti a funkční předpis* vyvolala vzpomínku na osobnost, se kterou jsem se seznámila před 32 lety na MFF UK. Pro vás, kteří máte rádi hádanky, ještě malá nápověda. Osobnost, o které hovořím, je muž, autor následujících veršů:

Nezáporná čísla mají odmocnítko ráda:
když se pod něj schovají, mají krytá záda.
V nečasu a nepohodě slouží jim jak stan.
Záporná však ke své škodě přístup mají zakázán.

Řada z vás již ví, že výše uvedenou osobností a mým velkým pedagogickým vzorem je doc. RNDr. Emil Calda, Csc. Vzpomínka na něj se propojila se vzpomínkami na mé pedagogické začátky v matematických třídách – na to, jak jsem každý den dlouho do noci dělala přípravy, na mé nadšení, když jsem v Rozhledech matematicko-fyzikálních objevila články o panu profesorovi Ypsilonovi, na to, že jsem si řadu z nápadů pana profesora hned vyzkoušela se svými žáky. A pak jsem si uvědomila, že už je to dost let, že někteří současní učitelé matematiky snad ještě ani nebyli na světě! Od hypotézy, že existuje alespoň jeden učitel matematiky, který nezná články pana docenta Caldy o profesoru Ypsilonovi, byl jen krůček k činu."

PROJEKT PILOT G/GP

Projekt Pilot G/GP, který podporuje tvorbu a ověřování školních vzdělávacích programů, zprostředkovává od března 2007 na internetové adrese `www.pilotg-gp.cz` zkušenosti pilotních škol. Najdete zde výpovědi ředitelů a koordinátorů o tom, jaké změny jim reforma umožnila na jejich škole, s jakými problémy se při tvorbě svého školního vzdělávacího programu potýkali, co mohou nabídnout jako inspiraci pro ostatní učitele – tzv. příklady dobré praxe. Na setkání ředitelů a koordinátorů pilotních škol vznikl nápad pokusit se maximálně využít stávajících stránek projektu a zveřejňovat na nich konkrétní ukázky ze školních vzdělávacích programů. Každá vybraná ukázka je doplněna komentářem, který vyzdvihuje klady a v některých případech poukazuje i na možnosti vylepšení či alternativního zpracování dané části ŠVP. Na stránkách projektu Pilot G/GP naleznete také přehled publicity projektu (tiskové zprávy, články a ostatní informace), přímé prokliky na texty Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia a Manuálu pro tvorbu ŠVP na gymnáziích a odkazy na Metodický portál a Konzultační centrum. Zatím poslední novinkou je Gympliště.

KOMUNITA GYMPLIŠTĚ

Jedná se o diskusní forum sloužící k podpoře koordinátorů a učitelů na gymnáziích. Jestliže na stránkách `www.pilotg-gp.cz` zvolíme záložku Gympliště, dostaneme se na hlavní stránku komunity. Na ní si můžeme vybrat například jednu z tematických kluboven, ve kterých účastníci diskusního fóra společně hledají odpověď na témata, která je zajímají. Cílem této vznikající komunity je vzájemná podpora při tvorbě a zavádění školního vzdělávacího programu na gymnáziích. Zkušeností z pilotních škol je, že v různých fázích tvorby ŠVP se osvědčila setkání, na kterých si koordinátoři mohli vyměnit své zkušenosti a minimálně si uvědomit, že obtíže, které zažívají na své škole, mají obecnější charakter. Gympliště nabízí alternativní možnost setkávání na internetu, což má své výhody a nevýhody. Zapojit se do diskusí není obtížné. Pod každým příspěvkem je dána možnost ODPOVĚDĚT a kliknutím na ní se objeví pole, do nějž je možné psát. Před odesláním je nutno opsat kontrolní kód. Nebo je také možné se zaregistrovat. Opět se nejedná o příliš složitý úkon. V horní části stránky je nutno zvolit Registrovat se. Na následující stránkách souhlasit s pravidly diskusního fóra a vyplnit základní údaje o sobě. Posledním krokem registrace je potvrzení registračního mailu, který přijde registrovanému na uvedenou mailovou adresu. Výhodou registrace je možnost nezávisle komunikovat s dalšími registrovanými členy a získávat od moderátorů novinky o dění na Gympliští.

Budeme velmi rádi, když stránky projektu Metodika i stránky projektu Pilot G/GP sami navštívíte. Jsme přesvědčeni, že zde naleznete řadu informací a zajímavých námětů. A máte-li sami nějaký příspěvek, který by mohl být zajímavý pro ostatní, neváhejte a pošlete nám ho. Všechny potřebné informace o tom, jak publikovat na Metodickém portálu, naleznete na úvodní stránce `www.rvp.cz` (horní lišta, záložka Pro autory).

LITERATURA

[1] CALDA, E., ZELENDOVÁ, E. Nadaní žáci na gymnáziu a matematika 1. část. Večerníček řeší problém profesora Ypsilona, Z umělecké dílny profesora Ypsilona. *Metodický portál RVP* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 13. 11. 2007. Dostupný na: `http://www.rvp.cz/clanek/689/1712`, ISSN: 1802-4785

[2] TOMEK, K., ZELENDOVÁ, E. Učitel a jeho žák – 2. část – žák Kryštof Eben. *Metodický portál RVP* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 7. 4. 2008. Dostupný na: `http://www.rvp.cz/clanek/462/2188`, ISSN: 1802-4785

[3] ZELENDOVÁ, E. Metodická podpora při tvorbě školních vzdělávacích programů. *Moderní vyučování*, říjen 2007, roč. 12, č. 8, s. 24.

[4] ZELENDOVÁ, E. Symbolický jazyk výrokové logiky. *Metodický portál RVP* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 14.1.2008. Dostupný na: `http://www.rvp.cz/clanek/5/1804`, ISSN: 1802-4785

Další příspěvky

Výskum flexibilného myslenia žiakov ZŠ a SŠ

Štefan Gubo, Ladislav Végh[1]

Úvod

Flexibilné (pružné) myslenie je jeden z najdôležitejších komponentov tvorivosti, ktoré umožňuje riešiteľovi skúmať daný problém z rôznych aspektov. Faktor flexibility teda predstavuje schopnosť vytvárať rôznorodé riešenia problému a predpokladá sa v ňom schopnosť prekonávať myšlienkovú zameranosť a funkčnú fixáciu. V tomto príspevku chceme zverejniť výsledky empirického výskumu, ktorého cieľom bolo nájdenie vzťahu medzi úrovňou flexibilného myslenia žiakov základných a stredných škôl a nasledovnými faktormi: vek žiakov a polročná známka z matematiky.

Merací prostriedok výskumu

Úroveň flexibilného myslenia žiakov sme chceli merať pomocou nami zostaveného neštandardizovaného testu. Problémové situácie, ktoré vyžadujú flexibilné myslenie, veľmi dobre reprezentujú (matematické) hlavolamy (Dreyfus a Eisenberg, 1998), ktoré zvyšujú motiváciu žiakov. Test „Hlavolamy“ obsahoval 11 problémov, ktoré mali charakter hádaniek a k ich riešeniu nebola potrebná hlbšia matematická vedomosť. S tým sme chceli vylúčiť, aby matematické neznalosti a nejasné matematické pojmy neboli prekážkami riešenia.

Test sme prichystali v dvoch verziách (A a B), žiaci, ktorí sedeli v jednej lavici, dostali odlišnú verziu. Problémy verzie B sme konštruovali pomocou preštylizovania problémov verzie A, pričom sme dávali pozor na to, aby sa zmeny týkali iba povrchových čŕt problémov. Pri kvantitatívnom vyhodnotení riešení sme používali len dve kategórie: *správny* (1 bod) alebo *nesprávny* (0 bodov). Neriešené problémy sme skórovali takisto 0 bodmi. Žiaci teda vedeli získať maximálne 11 bodov. Na vypracovanie úloh testu mali žiaci 40 minút.

Charakteristika výskumnej vzorky

Zber údajov výskumu sme uskutočnili v apríli a máji školského roka 2004/2005 na základných školách (ZŠ), gymnáziách (G) a gymnáziách s osemročným štúdiom (OG)

[1]Pedagogická fakulta, Univerzita J. Selyeho v Komárne; guboi@selyeuni.sk, vegh@ide.sk

v Banskobystrickom, Košickom a Nitrianskom kraji. Výskumnú vzorku tvorilo celkovo 745 žiakov: 247 žiakov 5. ročníka ZŠ a Prímy OG, 280 žiakov 8. ročníka ZŠ a Kvarty OG a 249 žiakov 2. ročníka gymnázií a Sexty OG. Od žiakov sme očakávali, aby v stanovenom čase vyriešili čo najväčší počet problémov. Všetky tri ročníky dostali ten istý test „Hlavolamy".

Hypotézy výskumu

Hypotéza H1: Predpokladáme, že medzi všeobecnými matematickými vedomosťami žiakov a výkonom preukázaným v teste „Hlavolamy" je štatisticky významná pozitívna závislosť.

Hypotéza H2: Predpokladáme, že flexibilné myslenie je závislé od veku; t. j. medzi výkonmi jednotlivých vekových skupín preukázanými v teste „Hlavolamy" sú štatisticky významné rozdiely v prospech vyšších ročníkov.

Výsledky štatistického vyhodnotenia výskumu

Overenie Hypotézy H1: Na základe polročnej známky z matematiky sme vytvorili 4 skupiny, ktoré sme označili rímskymi číslami od I. do IV. Do skupiny I. boli zaradení žiaci s prospechom „výborný", do skupiny II. žiaci s prospechom „chválitebný" a do skupiny III. žiaci s prospechom „dobrý". Žiakov s hodnotením „dostatočný" a „nedostatočný" sme sa rozhodli zaradiť do tej istej skupiny (IV). Na základe výsledkov Dunnettovho postupu a analýzy rozptylu (ANOVA) môžeme konštatovať, že v každom ročníku je štatisticky významná pozitívna závislosť medzi výkonom žiakov preukázaným v teste „Hlavolamy" a ich polročnou známkou z matematiky. Žiaci s lepším školským hodnotením z matematiky (prospech „výborný" a „chválitebný") boli výrazne úspešnejší v riešení problémov testu než ich z matematiky slabší spolužiaci (prospech „dostatočný" a „nedostatočný"). **Tieto skutočnosti nám dovoľujú hypotézu H1 považovať za potvrdenú.**

Štatistické overenie významnosti rozdielov medzi výkonmi žiakov jednotlivých ročníkov v riešení problémov testu „Hlavolamy" vo všetkých prípadoch poukázalo na vysokú závislosť úspešnosti riešenia úloh od veku žiakov. Medzi výkonmi jednotlivých vekových skupín sú štatisticky vysoko signifikantné rozdiely $(p << 0,001)$ vždy v prospech starších žiakov. **Na základe uvedených výsledkov hypotézu H2 považujeme za potvrdenú.**

Záver

Ako prvoradý cieľ výskumu sme si vytýčili zistiť, aký je vzťah medzi úrovňou flexibilného myslenia žiakov a ich polročnou známkou z matematiky. Pozitívna závislosť bola potvrdená výsledkami Dunnettovho postupu a analýzy rozptylu. Uvedenú štatisticky veľmi významnú závislosť možno vysvetliť tým, že rozvinuté matematické vedomosti zvyšujú pravdepodobnosť spoznania štruktúry daného problému. Spoznanie štruktúr v procese riešenia problémov rozvíja flexibilitu a zvyšuje efektivitu v matematike (Dreyfus a Eisenberg, 1998). Ak počiatočné zakódovanie problémovej situácie neaktivizuje relevantné poznatky, tak môže pomáhať priblíženiu problému z iného aspektu. Žiaci s lepším prospechom z matematiky boli úspešnejší v riešení problémov testu „Hlavolamy", pretože vedeli vytvoriť o nich širšiu mentálnu reprezentáciu ako z matematiky slabší spolužiaci.

Výsledky štatistického vyhodnotenia výskumu poukázali na veľké rozdiely medzi úrovňou flexibilného myslenia žiakov rôznych vekových skupín. Toto všetko opätovne potvrdzuje domnienku, že flexibilné myslenie sa dá rozvíjať a jeho vývoj významne ovplyvňujú predmetné znalosti. Vedomosti žiakov sa vekom postupne rozšíria a stanú sa čoraz viac štruktúrovanými. Na jednej strane osvojené poznatky, v ktorých sú dobré vzájomné vzťahy, môžu dávať podnet k novým a prekvapujúcim asociáciám, a tým umožňujú priblížiť problém z iného aspektu. Na druhej strane možno prisúdiť vyššiu úspešnosť starších žiakov aj faktu, že problémy testu „Hlavolamy" sú náročné a títo žiaci majú skúsenosti s riešeniami širšieho okruhu problémov a úloh.

Literatura

[1] DREYFUS, T. – EISENBERG, T. 1998. A matematikai gondolkodás különböz oldalairól. In: Sternberg, R. J. – Ben-Zeev, T. (eds.): A matematikai gondolkodás természete. Budapest : Vincze Kiadó kft., 1998. 249–278 s. ISBN 963-9069-78-7

Možnosti využitia prostredia Matlab pri jednoduchých simuláciách

Stella Hrehová[1]

Úvod

Pri riešení matematických úloh je často užitočné, ak sa názorne zobrazujú jednotlivé kroky, resp. vplyv daných koeficientov na výsledok riešenia. V príspevku bude uvedený možný postup jednoduchej simulácie, ktorá bude zobrazovať vplyv jednotlivých koeficientov na výsledný tvar polynomickej funkcie využitím prostredia Matlab.

[1]Fakulta výrobných technológií TU v Košiciach so sídlom v Prešove, Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky, Bayerova 1, Prešov; stella.hrehova@tuke.sk

VYTVORENIE SIMULÁCIE

MATLAB je interaktívny program, ktorý kombinuje vysoko účinné numerické výpočty, grafiku, vizualizáciu a má podporu v silnom programovom jazyku. Obsahuje teda základné techniky pre efektívnu simuláciu a vizualizácia rozličných procesov. Využitím možnosti tvorby užívateľského prostredia vytvoríme prostredie pomocou tzv. M-súborov, kde budeme postupne meniť hodnoty jednotlivých koeficientov polynomickej funkcie pomocou vytvorených posuvníkov - Slider. Pomocou vlastnosti týchto posuvníkov nastavíme dolnú a hornú hranicu - interval ktorý ohraničuje hodnoty posuvu, a ďalej nastavíme krok, o ktorý sa bude číselná hodnota meniť.

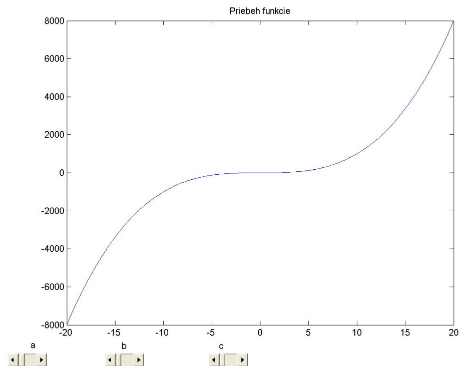
V príspevku bude uvedený príklad polynomickej funkcie 3-tieho stupňa, s koeficientami a, b a c v tvare $ax^3 + bx^2 + cx$. V prvom kroku vytvoríme užívateľské prostredie, ktoré bude obsahovať tri tlačidlá – Slider. Jedná sa o posuvník. Zadávame minimum a maximum hodnôt, ktoré ma posuvník nadobúdať pri zmene polohy jazdca od ľavej krajnej polohy po pravú krajnú polohu. Dôležité je tiež definovať krok jazdca pri klikaní na tlačidlo, resp. pri klikaní dovnútra posuvníka. Návrh takéhoto prostredia môže byť nasledovný:

```
u=uicontrol('style','slider','position',[10 10 60 20]);
i=uicontrol('style','slider','position',[100 10 60 20]);
o=uicontrol('style','slider','position',[190 10 60 20]);
x=(-20:0.1:20);
a=1;b=3;c=4;
y=a*x.^3+b*x.^2+c*x;
set(u,'min',0,'max',20,'sliderstep',[1/20;0.1],'callback','koeficient')
set(i,'min',0,'max',20,'sliderstep',[1/20;0.1],'callback','koeficient')
set(o,'min',0,'max',20,'sliderstep',[1/20;0.1],'callback','koeficient')
p=plot(x,y)}
```

Aby zobrazená krivka reagovala na zmenu jazdca pri jeho posúvaní, je potrebné vytvoriť ďalší M-súbor, ktorý bude reagovať na odozvu a upraví zobrazenie danej funkcie. Jedná sa o príkaz Callback. Je to naprogramovanie reakcie tlačidiel na základe užívateľovho zásahu. V tomto prípade sa jedná o zmenu tvaru krivky, pri zmene hodnoty jednotlivých koeficientov. M-súbor, môže vyzerať nasledovne:

```
a=get(u,'value');
b=get(i,'value');
c=get(o,'value');
y=a*x.^3+b*x.^2+c*x;
set(p,'xdata',x,'ydata',y);
```

V prípade, že v danom M-súbore nedáme potlačiť výpis, tzn. nedáme dvojbodky na konci riadku, môžeme sledovať ako sa daná krivky mení a aj hodnoty jednotlivých koeficientov. Z didaktického hľadiska sa jedná o vhodnejšiu formu, pretože študent názorne vidí vplyv zmeny jednotlivých koeficientov v prípade rastúcej, alebo klesajúcej hodnoty.



ZÁVER

Využitím jednoduchých nástrojov systému Matlab je možné názorným spôsobom nasimulovať rôzne situácie, ktoré sa vyskytujú v technickej praxi.

LITERATURA

[1] Bartko, R., Miller, M.: *Matlab I. – algoritmizácia a riešenie úloh*, Digital Graphics, Trenčín, 2004, ISBN 80-968337-3-1

[2] Zaplatílek, K., Doňar, B.: *Matlab pro začátečníky*, BEN – technická literatúra, Praha, 2005, ISBN 80-7300-175-6

[3] Zaplatílek, K., Doňar, B.: *Matlab, tvorba užívatelských aplikací*, BEN – technická literatúra, Praha, 2004, ISBN 80-7300-133-0

OTEVŘENÁ HODINA: SOUMĚRNOSTI

VYUČUJÍCÍ: JAROSLAVA KLOBOUČKOVÁ[1]

Místo: ZŠ Generála Janouška, Praha 9

Ročník: 7.A (třída s rozšířenou výukou jazyků)

Cíl hodiny: Budování představy pojmu „středová souměrnost" ve vědomí žáků cestou od činnosti k pojmu.

Stavba hodiny:

1. Organizační záležitosti
2. Opakování celých čísel
3. Hra „Vysílač – přijímač"
4. Objevení pravidel pro středovou souměrnost
5. Nalezení tématu hodiny

[1] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta; jaroslava.klobouckova@pedf.cuni.cz

SCÉNÁŘ HODINY (PŘÍPRAVA) S KOMENTÁŘEM PO USKUTEČNĚNÉ HODINĚ

1. Organizační záležitosti: Přivítám se s žáky, představím hosty – učitele, účastníky semináře s cílem otevřít přátelskou atmosféru, upozorním na nahrávání na diktafon.

Komentář: Přivítání i další administrativní záležitosti proběhly v úvodu hodiny zcela bez problémů, očekávala jsem připomínky ze strany některých chlapců (jsou zvyklí komentovat vždy a vše a vědí, že s tím nemám problém, jejich komentář je velice často k meritu věci), tentokrát mě však „zklamali“, žádný komentář se dnes nekonal. Doba trvání 2 minuty.

2. Opakování celých čísel: V předchozích hodinách jsme probrali a procvičili operace s celými čísly, proto připravím na úvod aktivitu, která naváže na předchozí látku a zároveň mi umožní rozřadit žáky do pracovních dvojic. V čepici budu mít připraveno 26 lístečků (tab. č. 1) s číselnými úkoly z oblasti operací s celými čísly. (Dva poslední vložím až tehdy, když žádný z žáků nebude chybět.) Každý žák si vylosuje jeden úkol a bude se snažit nalézt kamaráda, který má jiný úkol se stejným výsledkem. Pro kontrolu napíšeme všechny nalezené dvojice na tabuli. Takto nalezené dvojice se posadí do jedné lavice a budou muset po zbytek hodiny spolupracovat.

		Výsledek
$-11+4$	$14:(-2)$	-7
$12-18$	$(-2)\cdot(-3)$	-6
$-4-1$	$15:(-3)$	-5
$1-5$	$(-40):10$	-4
$-7+4$	$(-27):9$	-3
$-1-1$	$36:(-18)$	-2
$65-66$	$5:(-5)$	-1
$-3+2+1$	$6\cdot(-7)\cdot 3\cdot 0$	0
$-4+5$	$(-1)\cdot(-1)$	1
$7-1-4$	$(-16):(-8)$	2
$-11+14$	$(-1)\cdot(-3)$	3
$18-(-1)+5$	$(-2)\cdot(-2)$	4
$7+(-14)-(-12)$	$(-25):(-5)$	5
$12-6$	$(-3)\cdot(-2)$	6

Tab. 1: Opakování celých čísel

Komentář: Cílem této aktivity bylo jednak samotné opakování celých čísel, jednak organizace další práce. Nejprve jsem s čepicí obešla celou třídu a nabídla každému jeden úkol. Pomocí tohoto losování bylo zajištěno náhodné rozdělení všech žáků do pracovních dvojic. Tím jsem si zajistila, že se nevyskytla diskuze o tom, kdo s kým bude a kdo s kým nebude spolupracovat. Žáci si měli nalézt partnera beze slov, což se ale ukázalo jako nemožné, bylo potřeba, aby si žáci navzájem nejen ukázali svá zdání, ale museli si také sdělit svůj výsledek. Každá nalezená dvojice si tedy nejprve navzájem zkontrolovala shodný číselný výsledek a teprve poté, kdy si byli oba členové jisti svým přiřazením, napsali své úlohy na tabuli vedle sebe. Přestože to bylo opakování probraného a procvičeného učiva, několik žáků potřebovalo moji pomoc. Také z tohoto důvodu zabrala tato aktivita značnou část hodiny (10 minut).

3. Hra „Vysílač – přijímač“: Nejprve všem připomenu pohyb na čtverečkovaném papíru, který všichni znají, již jsme pomocí čtverečkovaného papíru pracovali. Poté vyzvu všechny žáky sedící u okna (vysílač), aby si znázornili na svůj čtverečkovaný papír libovolný n-úhelník ($n = 5$ a více) a pak nadiktovali žákům vedle sebe (přijímač), co vymysleli. Tím bude mít každý z dvojice shodný vzor. Dále si zvolí oba dva bod S tak, aby byl mimo původní obrázek. Pak vysílač bude diktovat cestu od bodu S ke všem vrcholům původního obrazce, ale všechny pokyny bude říkat přesně obráceně. Přijímač bude zaznamenávat jeho pokyny na svůj čtverečkovaný papír. Pokud důsledně dodrží postup, vznikne přijímači vzor a obraz středově souměrného útvaru.

Komentář: Při pokynu „načrtni si na svůj papír libovolný n-úhelník, kde $n = 5$ nebo více“ vznikaly na papíru ve většině případů právě pětiúhelníky, jen v jedné dvojici vznikl šestiúhelník. Další pokyn byl: „Nadiktuj svému sousedovi co nejjednodušeji, jak má postupovat, aby získal shodný obrazec na svém čtverečkovaném papíru.“ Vysílač svůj konceptuální vjem převedl do procesuálního pokynu (jak to má soused namalovat), kdežto přijímač postupoval obráceně – procesuální pokyny převedl do tzv. „hotového obrázku“, který neviděl, ale dokázal ho podle pokynů znázornit. Vysílač musel provést ve své mysli mnohem více mentálních činností: svůj obrázek viděl jako koncept, přeložil si jej do procesuálního vnímání, musel rozhodnout o způsobu procesního zpracování, převést do nabídnutého matematického jazyka a vše slovně interpretovat. Výsledkem bylo znovu konceptuální uchopení daného útvaru, tentokrát na pracovní ploše přijímače. Tato činnost nebyla žákům cizí, hry podobného zaměření s nimi hraji docela často, a proto se tu nevyskytly žádné problémy ani nejasnosti.

V druhé fázi si měli žáci zvolit bod O tak, aby oba z dvojice měli shodnou polohu tohoto bodu vzhledem ke svým původním obrázkům. Pak dostal vysílač další pokyn: „Nadiktuj svému kamarádovi znovu polohu všech původních bodů, tentokrát však vzhledem k novému bodu O, ale záměrně při diktování popleť všechny pokyny a říkej je přesně opačně.“ Po prvních minutách se ozval Kristián, že tomu asi nerozumí: „Já jsem myslel, že bude mít znovu ty původní body a oni mu tam vznikají úplně nové body.“ K tomu se ozvali i další, že jim také vznikají nové body. Na to Tereza: „Přece nám nemůžou vzniknout stejné body, když se jako pleteme, musíme je mít jinde. Já mám ale jiný problém. Přece nemůžu mít v jednom obrázku dva body A, dva body B a tak.“ Na to zareagoval Šimon: „No tak tam lupni čárku, to už jsme dělali u osové souměrnosti.“ S tím Tereza souhlasila a i ostatní se ujistili, že skutečně musí vznikat jiné body, které bude dobré označit čárkou v horním indexu. Teď už probíhala další spolupráce bez problémů, všechny sporné obrázky byly opraveny buď za mé pomoci, nebo za pomoci spolužáků.

Jednalo se pouze o to, že část pokynů popletli, ale část ponechali ve správném znění. U všech přijímačů vznikly dva středově souměrné útvary, přestože tento pojem ještě nezazněl. Pokud byla dvojice hotová, vyzvala jsem, aby si na závěr vyměnili role vysílače a přijímače, aby měli oba kompletní obrázek. To už často urychlili tak, že si to vysílač říkal sám tak, jak to předtím diktoval svému spolužákovi. Doba trvání 24 minut.

4. Objevení pravidel pro středovou souměrnost: Předpokládám, že se všem dvojicím podaří znázornit vzor a obraz rovinného útvaru ve středové souměrnosti. Poté budu klást otázky, aby si žáci uvědomili nejprve konceptuální stránku práce – jaké dva obrázky jim vznikly, kolik vrcholů má původní obrázek (vzor) a kolik nový obrázek (obraz), jaké jsou rozměry odpovídajících stran atd. a poté procesuální stránku – jaká je vzájemná poloha jednotlivých bodů a jak tyto body vznikaly.

<u>Komentář:</u> Hned po mé první otázce „Co můžete říct o vašich dvou obrazcích?“ odpověděla Lucka „Jsou osově souměrné“. Madla jí odporovala: „A kde máš osu? Jsou stejné, ale nejsou osově souměrné.“ Lucka se zřejmě nechtěla smířit s tím, že by měla opustit svoji původní myšlenku a tak argumentovala: „Tak tu osu musíme najít, to jsme přece také dělali.“ Vyzvala jsem ji, aby to zkusila, zatímco ostatní budou diskutovat o dalších vlastnostech svých obrazců. Postupně jsme společně prodiskutovali všechny navrhované vlastnosti: shodný počet vrcholů, u všech odpovídajících si úseček (nejen stran) stejná délka. Lucka si ověřila, že osu souměrnosti najít nemůže a Honza zformuloval myšlenku středově souměrných útvarů: Oba útvary jsou přímo shodné, neboli „kdybychom jeden vystřihli a otočili na druhý, tak se budou překrývat.“ Pak jsme zformulovali i to, jak jednotlivé body vznikaly – na opačné straně od bodu O, ale stejně daleko. Doba trvání 6 minut.

5. Nalezení tématu hodiny: V poslední části hodiny vyzvu žáky k nalezení dnešního tématu naší práce. Předpokládám, že slovo souměrnost je napadne, ale na bod O, kolem kterého se vše odehrálo, je budu muset upozornit. Teprve poté provedeme zápis hodiny do sešitu s tím, že si každý nalepí svůj obrázek a pod něj se pokusí samostatně zapsat společně zformulované myšlenky.

<u>Komentář:</u> Slovní spojení „Osová souměrnost“ zaznělo již v průběhu hodiny, takže jsem měla na co navazovat a velice brzy se objevil i celý správný název: „Středová souměrnost“. Zbylo tedy dost času na samostatné zpracování zápisu do sešitu. Někteří žáci si vzali na pomoc učebnici a objevili odbornou terminologii (vzor, obraz, přímá shodnost, střed souměrnosti, samodružný bod), jejíž užití jim nečinilo žádné problémy. V závěru hodiny jsem poděkovala všem za vzornou spolupráci a rozloučili jsme se i s našimi hosty. Doba trvání 3 minuty.

Diskuse

Po přestávce jsem se s účastníky konference přesunula do zasedací místnosti, kde jsme diskutovali o průběhu předchozí hodiny. Jednotlivé fáze na sebe vhodně navazovaly, přestože byly použity úkoly ze dvou různých oblastí matematiky – celá čísla a středová souměrnost. Drobná výtka zazněla k obtížnosti úvodních úkolů, účastníkům z víceletých gymnázií se zdály být příliš jednoduché a přesto s nimi měli mnozí žáci problémy. Postupně jsme probrali všechny části otevřené hodiny, ale v závěru se naše diskuse stočila na provozní záležitosti školy a třídy – co se žáky, kteří jsou nepřítomní ve výuce, zda zadávat domácí úkoly, zda trvat na vlastních pomůckách pro práci atd.

ZÁVĚR

Otevřené hodiny jako způsob předávání vlastních zkušeností jsou přínosem pro všechny zúčastněné, nejen pro účastníky konference, ale i pro vyučujícího v konkrétní hodině, všichni učitelé se vzájemně obohatí o svoje zkušenosti. Mohou si ověřit svoje postupy při výuce ve vlastní třídě a obohatit se o návrhy na zajímavé činnosti s dětmi při výuce stejného tématu. V neposlední řadě se zde nabízí možnost porovnání vlastní metody práce s metodou nabídnutou v otevřené hodině.

KOMPETENCIE MATEMATICKÉHO MODELOVANIA ŽIAKOV STREDNÝCH ŠKÔL

JOZEF SEKERÁK[1]

ABSTRACT. *Competences of mathematical modeling belong to important competences in the present. This paper deals with student's problems with mathematical modeling as a part of problem solving. Three phases of mathematical modeling are suggested and some types of models are described in this paper. Presented results are based on a pedagogical survey which is characterized here too.*

KEY WORDS: *mathematical modeling, phases of mathematical modeling, types of models, competences of mathematical modeling*

ÚVOD

Svet sa vďaka technologickému rozvoju čoraz viac komplikuje. Stojíme pred novými a ťažkými problémami, ktoré je potrebné rýchlejšie riešiť. Sú to problémy, ktorých riešenia nie sú univerzálne a nedajú sa naučiť. Mohé riešenia si vyžadujú špecifické informácie, ktoré v dôsledku informačného rozmachu nie je možné učiť sa naspamäť. Aj tieto dôvody

[1]Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Ústav matematických vied, Jesenná 5, Košice; jozef.sekerak@upjs.sk

poukazujú na to, že je potrebnejšie zamerať sa pri riešení problémov na poznávanie okolností riešenia a nie na samotné riešenie. Vo vyučovaní by sa mal klásť dôraz na rozvíjanie kompetencií u žiakov, ktoré môžu byť v mnohých situáciách kľúčové, a nie len na obohacovanie ich vedomostnej štruktúry. Tieto skutočnosti sa stávajú samozrejmosťou a preto je zaujímavé, že sa neodrážajú v kurikulárnych zmenách.

V tomto článku sme sa zamerali na kompetencie matematického modelovania ako na časť kompetencií potrebných pri riešení problémov. O týchto kompetenciách bližšie píšeme ve 2. časti. V 1. časti popisujeme proces matematického modelovania, ktorý delíme do troch etáp. V poslednej časti uvádzame prieskum a interpretujeme získané výsledky.

Matematické modelovania

Matematické modelovanie je poznávacou metódou, pričom pôvodný objekt resp. situácia je nahradená modelom a jeho skúmaním získavame poznatky, ktoré by sme získali skúmaním pôvodného objektu resp. situácie. Modelovanie je neoddeliteľnou súčasťou riešenia problémov, ktoré nemusia byť nevyhnutne čisto matematické. Preto aj kompetencie modelovania zaraďujeme medzi kľúčové. Podstatou matematického modelovania je dôkladné zvažovanie všetkých informácií zadaných v úlohe a na ich základe zostavenie matematického (abstraktného) modelu formou matematických a logických vzťahov a iných reprezentácií, ktoré hodnoverne popisujú zadanú situáciu. Proces modelovania možno rozčleniť do troch etáp:

1. identifikácia východísk modelovanej situácie,
2. vytvorenie matematického modelu,
3. verifikácia vytvoreného modelu.

Identifikácia východísk modelovanej situácie je začiatočnou etapou modelovania, v ktorej sa naviac charakterizujú väzby medzi východiskami. Najskôr je však nevyhnutné rozhodnúť, ktoré vstupné informácie sú v modelovanom procese relevantné a je nutné ich do modelu zahrnúť a naopak, ktoré je možné zanedbať. V tejto etape hrajú dôležitú úlohu kompetencie týkajúce sa práce s informáciami.

Nasleduje etapa vytvárania matematického modelu, t. j. prevod získaných informácií z prvej etapy do matematického jazyka – matematizácia. Výsledkom sú rôzne matematické reprezentácie: rôzne typy rovníc a nerovníc, výrokové funkcie, grafy, geometrické útvary. Táto etapa v procese modelovania je najpodstatnejšia a zdá sa, zo skúsenosti z rôznych realizovaných prieskumov v tejto oblasti, že je aj najťažšia.

Poslednou etapou je etapa verifikácie vytvoreného modelu, v ktorej sa overuje adekvátnosť modelu, t. j. či odpovedá zadanej situácii. Model musí byť neprotirečivý, musia v ňom byť dodržané zákony matematickej logiky a musí adekvátne popisovať východziu situáciu. V tejto etape, v ktorej sa spätne interpretuje matematický model, je nevyhnutná dematematizácia. Tá je dôležitá aj pri interpretácií výsledkov riešenia tohto modelu – vysvetlenie získaných riešení v jazyku, v ktorom je formulovaná pôvodná úloha. Riešenie modelu a interpretáciu výsledkov nepovažujeme za súčasť samotného procesu modelovania.

TYPY MATEMATICKÝCH MODELOV

Oddelením procesu riešenia modelu od samotného procesu modelovania nám umožňuje členiť modely podľa matematického aparátu, ktorým boli vytvorené, a podľa reprezentácií, ktoré pri modelovaní boli zvolené. Podľa tohto kritéria zjednodušene hovoríme o štyroch typoch modelov:

1. *Algebraicko-analytický* – model je reprezentovaný nejakým typom rovnice alebo nerovnice, prípadne sústavou rovníc alebo nerovníc, ktorých prvkami sú rôzne premenné, množiny, funkcie, vektory, matice a pod.
2. *Grafický* – model je reprezentovaný grafom vyjadrujúcim istú funkčnú závislosť.
3. *Geometrický* – model je reprezentovaný geometrickými útvarmi.
4. *Kombinovaný.*

Výber typu modelu (typu matematickej reprezentácie) závisí od vlastností modelovanej situácie, od vstupných informácií.

KOMPETENCIE MATEMATICKÉHO MODELOVANIA

V tejto časti článku sa chceme venovať kompetenciám matematického modelovania. Prvom rade však vysvetlime, čo si predstavujeme pod pojmami kompetencie a kľúčové kompetencie, a zdôraznime rozdiel medzi nimi.

Pod pojmom kompetencie rozumieme zjednotenie všetkých vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré jedinec nadobúda počas celého života. Jednotlivé kompetencie umožňujú ich nositeľovi konať adekvátne v konkrétnej situácii, v určitej oblasti ľudskej činnosti. Kľúčové kompetencie sú však tie kompetencie, ktoré sú využiteľné v rôznych oblastiach činnosti, predstavujú len časť nadobudnutých vedomostí, zručností, schopností a postojov. Z toho možno kľúčové kompetencie chápať ako multifunkčný súbor vedomostí, zručností, schopností a postojov; chápať ako potenciál jedinca preukázať vedomosti, zručnosti, schopnosti a postoje v rôznych praktických činnostiach. Ak si má kompetencia zaslúžiť prívlastok „kľúčová“, musí byť nevyhnutná a prospešná.

Na základe štúdií zahraničných aj domácich publikácií a výskumov, ktoré boli realizované v tejto oblasti, a poznania procesu matematického modelovania navrhujeme tieto kompetencie matematického modelovania:

- zamerať sa na východiska modelovanej situácie,

- štrukturalizovať oblasti alebo situácie, ktoré sa majú modelovať,
- „matematizácia“ (prevod „reality“ do matematických štruktúr) – odhaliť kvantitatívne alebo priestorové vzťahy a zákonitosti reálnych situácií,
- vytvárať matematické modely,
- overovať model z hľadiska reálnej situácie,
- uvažovať, analyzovať, prezentovať model (vrátane jeho ohraničenia či obmedzenia),
- „dematematizácia“ (interpretácia matematických modelov v zmysle „reality“),
- sledovať a kontrolovať proces modelovania.

Prieskum

Z mnohých prieskumov vyplynulo, že neschopnosť žiakov riešiť problémy je v najväčšej miere spôsobená ich problémami s modelovaním. V prieskume, ktorý sa realizoval v marci 2007 a zapojilo sa doň 398 žiakov 3. a 4. ročníka rôznych stredných škôl, sme našu pozornosť zamerali na jednotlivé etapy matematického modelovania. Cieľom bolo zistiť, v ktorej etape robia žiaci najčastejšie chyby, a tak identifikovať najproblematickejšie kompetencie matematického modelovania. V tomto prieskume sme sa upriamili na model algebraicko-analytického typu. Na tento účel nám poslúžili nasledujúce úlohy:

Úloha č. 1: Vodná nádrž má dva odtoky, ktorých parametre popisuje nasledujúca tabuľka.

	Odtok č. 1	**Odtok č. 2**
Priemer odtokovej rúry	6 m	9 m
Výkon turbíny	1250 W	1875 W
Absolútny výkon	nádrž/45 hod.	nádrž/30 hod.

Oboma odtokmi súčasne by sa vyprázdnila za 18 hodín. Nastala krízová situácia a bolo nutné vyprázdniť nádrž do 24 hodín. Teda otvorili oba odtoky súčasne. Nádrž sa však vyprázdnila až za 22,5 hodín. Po analýze sa zistilo, že odtok č. 2 sa počas vyprázdňovania zablokoval a cez tento odtok neprechádzala žiadna voda. Vypočítajte koľko hodín bol tento odtok funkčný po otvorení? Písomne okomentujte svoj postup.

Úloha č. 2: Vodná nádrž má dva odtoky. Prvým by sa vyprázdnila za x hodín a druhým za y hodín.

a) Pri vyprázdňovaní môžu nastať rôzne situácie. Akú situáciu vyjadruje nasledujúca rovnica: $9 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{4,5}{y} = 1$

b) Vypočítajte za koľko hodín sa vyprázdni nádrž len prvým odtokom a za koľko hodín sa vyprázdni len druhým odtokom, ak sa nádrž vyprázdni pri otvorení oboch odtokov za 12 hodín. Pri riešení využite aj informácie z možnosti a). Písomne okomentujte svoj postup.

Úlohou č. 1 sme sledovali ako žiaci dokážu vyextrahovať podstatné informácie, čo súvisí s ich kompetenciou *zamerať sa na východiská modelovanej situácie.* Tá je spolu s kompetenciou *štrukturalizovať oblasti alebo situácie, ktoré sa majú modelovať* a kompetenciami súvisiacimi s prácou s informáciami najdôležitejšia v prvej etape matematického modelovania. V tejto úlohe sú identifikovateľné aj iné kompetencie matematického modelovania.

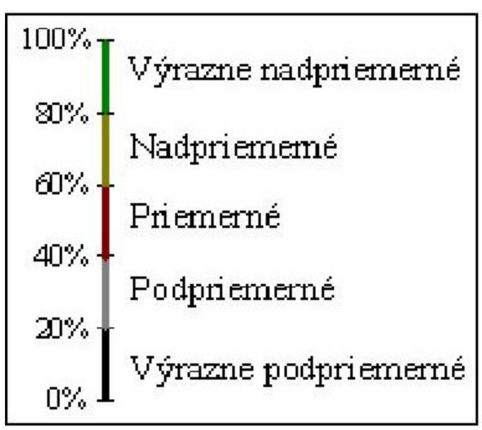
Úloha č. 2

a) slúžila na diagnostikovanie kompetencií ako sú *overovať model z hľadiska reálnej situácie, „dematematizácia" (interpretácia matematických modelov v zmysle „reality").* Tieto kompetencie sa v najväčšej miere uplatňujú v poslednej etape matematického modelovania. Dematematizácia je však dôležitá aj pri interpretácii výsledku, ktorý dostaneme riešením vytvoreného modelu.

b) slúžila na diagnostikovanie kompetencií: *„matematizácia" (prevod „reality" do matematických štruktúr) - odhaliť kvantitatívne alebo priestorové vzťahy a zákonitosti reálnych situácií, vytvárať matematické modely.* Jedná sa o najpodstatnejšie kompetencie uplatňujúce sa v druhej etape matematického modelovania.

VYHODNOTENIE VÝSLEDKOV PRIESKUMU

Úroveň kompetencií jednotlivých etáp matematického modelovania sme posudzovali na základe zistenia úspešnosti žiakov (pozri obr. č. 1), pričom na vyhodnotenie sme použili binárne skórovanie.



Obr. 1

Napr. kompetencie žiakov využívané v prvej etape matematického modelovania sú priemerné, ak úspešnosť v tejto etape modelovania je vyššia ako $40\,\%$, no nižšia alebo práve $60\,\%$.

V testovaní mali žiaci najväčšie problémy s úlohou č. 1. Len $19,85\,\%\,(79)$ z celkového počtu žiakov malo správne vytvorený matematický model. Z tejto skupiny až $93,67\,\%\,(74)$ žiakov vytvorený model aj správne vyriešilo. Ostatný žiaci buď túto úlohu vôbec neriešili (63), alebo nesprávne vytvorený matematický model riešiť nedokázali (256). Ako sme už spomínali, táto úloha súvisela s kompetenciou *zamerať sa na východiská modelovanej situácie* a kompetenciami týkajúcimi sa práce s informáciami. Vo všeobecnosti možno povedať, že žiaci majú veľké problémy s úlohami, ktoré súvisia so získavaním údajov z viacerých zdrojov (tabuľka, informácie v texte). Nevedia sa na takéto údaje plne sústrediť, nečítajú ich s porozumením. S tým súvisí ich neschopnosť takto zadané informácie správne interpretovať a teda nevedia s nimi ďalej pracovať. Zadané informácie nevedia zaradiť do súvislosti, problémy im robí logický úsudok.

Chyby v modeloch boli spôsobené tým, že žiaci sa snažili využiť všetky informácie zadané v tabuľke, alebo tieto informácie bezhlavo kombinovali. Preto žiaci dostávali viac rovníc ako neznámych alebo naopak, ktoré sa síce snažili riešiť, no nikto nedospel k riešeniu. Z týchto výsledkov vyplýva, že žiaci neanalyzujú situáciu, nepremýšľajú o skrytých vzťahoch, ktoré vedú k vytvoreniu matematického modelu. Je zrejme, že žiaci nepochopili podstatu problému, a to je aj dôvod prečo neboli úspešní vo vyhľadávaní relevantných informácií a teda neboli schopní riešiť tento problém. Kompetencie žiakov využívané v prvej etape matematického modelovania sú výrazne podpriemerné.

Kompetencie využívané v druhej etape matematického modelovania sme skúmali pomocou úlohy č. 1, ale najviac informácií sme získavali z riešení úlohy č. 2 b), pretože v tejto úlohe boli len potrebné informácie a boli zadané jednoducho. Teda žiaci nemohli zlyhať na tom, že sa nedokážu zamerať na podstatné východiská modelovanej situácie. Z riešení úlohy č. 1 teda vyplynulo, že ak žiaci pochopia podstatu problému, zamerajú sa na správne východiská a uvedomia si vzťahy medzi nimi, tak vytvorenie matematického modelu je pomerne úspešné $(71,54\,\%)$. Podobne úspešne $(74,37\,\% - 296)$ dopadla aj matematizácia situácie v úlohe č. 2 b). S doriešením úlohy to však nebolo až také optimistické. Túto úlohu správne vyriešilo len $23,12\,\%\,(92)$ žiakov z celkového počtu žiakov. Neúspech spočíval v tom, že žiaci nevedeli ako majú využiť informácie z možnosti a) tejto úlohy, pretože zadanej rovnici nerozumeli. To bolo ich najčastejšie písomné zdôvodnenie. $92,39\,\%\,(85)$ žiakov, ktorí doriešili túto úlohu, boli úspešní aj v interpretácií rovnice zadanej v možnosti a) úlohy č. 2. Ostatní úspešní riešitelia využili rovnicu z možnosti a) bez toho, aby ju vedeli interpretovať. Z informácií získaných z riešení úlohy č. 2 b) vyplýva, že žiaci disponujú kompetenciami: *„matematizácia“ (prevod „reality“ do matematických štruktúr) - odhaliť kvantitatívne alebo priestorové vzťahy a zákonitosti reálnych situácií, vytvárať matematické modely,* ktoré sú nadpriemerne rozvinuté.

Kompetencie *overovať model z hľadiska reálnej situácie, „dematematizácia" (interpretácia matematických modelov v zmysle „reality")* sú prejavom vysokej úrovne matematického modelovania. Prvá menovaná sa však najčastejšie zanedbáva. Dôkazom sú riešenia modelov, ktoré nemajú žiaden vzťah so zadanou situáciou, dokonca modelov, ktoré sú neriešiteľné. Čo sa týka *interpretácie matematických modelov,* tak s touto kompetenciou majú žiaci tiež značné problémy. Len $23,12\,\%$ (92) žiakov zmysluplne interpretovalo danú rovnicu. Veľkú výhodu mali žiaci, ktorí dokázali vytvoriť matematický model v úlohe č. 1. Medzi kompetenciami *interpretácia matematických modelov a zamerať sa na podstatné východiská modelovanej situácie* sa zistila výrazná závislosť. Obe kompetencie sú však na nízkej úrovni. Kompetencia *interpretácia matematických modelov* je podpriemerne rozvinutá. Dôvod môže byť aj to, že s takýmito úlohami sa žiaci bežne na vyučovaní matematiky nestretávajú.

Žiaci teda majú najväčšie problémy v prvej etape matematického modelovania. Najproblematickejšou kompetenciou je *zamerať sa na podstatné východiska modelovanej situácie.* V tesnom závese sú kompetencie *overovať model z hľadiska reálnej situácie, „dematematizácia" (interpretácia matematických modelov v zmysle „reality").* To znamená, že žiaci vedia modelovať situácie, ktoré sú zadané jednoducho (pričom vytvorený model väčšinou neoverujú) a interpretácia riešenia je jednoduchá. Takéto situácie sú najčastejšie vymyslené a umelé, čo nie je užitočné pre žiakov. Aby sa vyučovanie matematiky stalo užitočným, a to nie len pre žiaka, je nutné prehodnotiť jeho ciele a metódy. Podľa nás by sa vyučovanie matematiky malo zamerať na to, aby sa žiaci naučili:

- chápať javy, rozpoznávať súvislosti,
- modelovať,
- formulovať otázky, riešiť problémy,
- formulovať hypotézy, tvoriť závery,
- argumentovať, vysvetľovať a dokazovať,
- počúvať, diskutovať a kritický zvažovať názory,
- organizovať a plánovať si prácu,
- vyhľadávať informácie a vedieť ich zaznamenávať, usporiadávať a spracovávať,
- prezentovať a chápať informácie v tabuľkách a grafoch,
- tímovo spolupracovať a prezentovať výsledky svojej práce.

Záver

Ako sme uviedli v prvej kapitole, matematické modelovanie je významnou poznávacou metódou. Rozvíja schopnosť induktívneho a deduktívneho myslenia žiakov, kompetencie ako sú *riešiť problémy, formulovať a overovať hypotézy, odhaľovať príčinné vzťahy a súvislosti medzi javmi.* Samozrejme, že vyučovanie matematiky nemá byť len o tom, aby sa žiaci naučili riešiť každodenné problémy, ale má sledovať aj tzv. afektívne ciele, ktoré sú rovnako dôležité. To však nebolo predmetom medzinárodného testovania ako sú PISA, TIMSS atď., v ktorých sme nedopadli dobre. Preto je dôležité zvážiť zmenu matematického vzdelávania a prejsť od kvantity ku kvalite. Nie je dnes výhra vedieť veľa, ak to nevieme praktický využiť. Rôzne informácie dokážeme vyhľadať za okamih, ale musíme vedieť ako s nimi pracovať ďalej. A práve s tým majú naši žiaci najväčší problém.

Literatura

[1] EDWARDS, D., HAMSON, M.: *Guide to Mathematical Modelling*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2003. 326 s. ISBN 0-333-79446-X.

[2] FISCHER, R., MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992. 336 s. ISBN 80-08-01309-5.

[3] FLOREKOVÁ, Ľ.: *Matematické modelovanie*. Bratislava: Alfa, 1986. 270 s.

Softvérova podpora aplikácií diferenciálnych rovníc

Alena Vagaská[1]

Úvod

V snahe dosiahnuť kvalitatívny posun v edukácii matematických predmetov na fakultách technických univerzít je žiaduce študentov, ako budúcich technikov, naučiť využívať výhody vhodných programových systémov pri riešení aplikačných úloh, či problémov z technickej praxe. V článku na konkrétnom príklade uvádzam možnosti a zhodnotenie výhod či nevýhod, ktoré nám v rámci výučby diferenciálnych rovníc ponúka Matlab.

[1]Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky, FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove, Bayerova 1, Prešov, SR; alena.vagaska@tuke.sk

APLIKAČNÁ ÚLOHA

S cieľom pozdvihnúť úroveň motivácie a eliminovať absenciu aplikačných úloh je vhodné na cvičeniach z matematickej analýzy, či na tzv. počítačových cvičeniach z numerickej matematiky riešiť takúto úlohu (Fulier, 2001):

Vietor pri prechode lesom stráca svoju rýchlosť vplyvom odporu, ktorý mu kladú stromy lesa. Experimentálne sa potvrdilo, že strata rýchlosti vetra je priamo úmerná dĺžke tejto dráhy a veľkosti rýchlosti vetra. Nájdite rýchlosť vetra smerujúceho dovnútra lesa vo vzdialenosti 150 m od okraja lesa, ak začiatočná rýchlosť vetra na okraji lesa bola $\mathrm{v}_0 = 12\ \mathrm{ms}^{-1}$ *a vo vzdialenosti* 10 m *od okraja lesa sa rýchlosť vetra zmenšila na hodnotu* $\mathrm{v}_1 = 9,85\ \mathrm{ms}^{-1}$.

Pri aplikácií teórie diferenciálnych rovníc na vyššie nastolený problém a pri vytváraní matematického modelu musíme vychádzať z úvahy, že ide o rovnomerne spomalený pohyb a podľa fyzikálnych zákonov platí $dv = -k \cdot v\,ds$, kde $v = v\,(s)$ je rýchlosť vetra vo vzdialenosti *s* od okraja lesa. Matematickým modelom uvedenej aplikačnej úlohy je obyčajná diferenciálne rovnica

$$\frac{dv}{ds} = -k \cdot v \tag{1}$$

s počiatočnou podmienkou $v\,(0) = 12$ a doplňujúcou podmienkou $v\,(1) = 9,85$. Je zrejmé, že ide o separovateľnú diferenciálnu rovnicu, odkiaľ získame všeobecné riešenie v tvare $v = C \cdot e^{-10k}$. Využitím počiatočnej podmienky určime hodnotu všeobecnej konštanty $C = 12$.

Použijúc doplňujúcu podmienku $v = C \cdot e^{-10k}$ určime konštantu k z rovnice $9,85 = 12 \cdot e^{-10k} \Rightarrow k = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{12}{9,85}$. Ak zoberieme do úvahy (1) a konštantu k, tak dostaneme pre danú situáciu diferenciálnu rovnicu znižovania rýchlosti vetra v tvare

$$\frac{dv}{dv} = \frac{1}{10} \ln \frac{9,85}{12} \cdot v \tag{2}$$

odkiaľ separáciou premenných a využitím počiatočnej podmienky získame riešenie rovnice:

$$v = 12 \cdot \left(\frac{9,85}{12}\right)^{\left(\frac{s}{10}\right)} \tag{3}$$

Je zrejmé, že to isté riešenie možno získať dosadením konštánt k a C do všeobecného riešenia. Keďže nás zaujíma rýchlosť vetra vo vzdialenosti 150 m od okraja lesa, stačí do vzťahu (3) dosadiť s =150 m a dostávame, že v tejto vzdialenosti má vietor rýchlosť už len $v = 0,62087763\ \mathrm{ms}^{-1}$.

NUMERICKÉ RIEŠENIA OBYČAJNÝCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC POMOCOU MATLABU

Ukážme si, ako môžeme numericky riešiť diferenciálnu rovnicu (2) pomocou Eulerovej či Heunovej metódy. Cieľom článku nie je odvádzanie a dokazovanie týchto metód. Pripomeňme si však, že ak na intervale $[A, B]$ máme nájsť aproximáciu riešenia diferenciálnej rovnice $y' = f\,(x, y)$, $y\,(a) = y_0$, tak musíme uvažovať sieť bodov

$(x_i) = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Konkrétnou numerickou metódou nájdeme aproximáciu neznámych hodnôt $y(x_i)$, ktoré označíme y_i. Numerické riešenie diferenciálnej rovnice (2) teda nezískame v tvare funkcie $y = y(x)$, získame len jej aproximáciu v tvare dvojíc vektorov (x_i) , (x_i), ktorá sa v Matlabe často prezentuje v stĺpcovej podobe, matici rozmeru $[n, 2]$. Pri Eulerovej metóde (kde volíme konštantný krok siete $h = x_{i+1} - x_i$ pre všetky i) vychádzame z Taylorovej vety, odkiaľ za predpokladu, že krok siete je dostatočne malý, získavame rekurentný vzťah Eulerovej metódy v tvare

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \text{ kde } f(x_i, y_i) = y'(x_i). \tag{4}$$

Uvažujme o riešení diferenciálnej rovnice (2) na intervale $[0, 150]$ pomocou M-funkcií v Matlabe. Jednoduchou implementáciou Eulerovej metódy, v ktorej vstupným argumentom nie je krok siete h, ale počet n uzlov siete, keď $a = x_1$, $b = x_{n+1}$, môžeme vytvoriť v Matlabe M-funkciu nazvanú napríklad „Eulern“, volaním ktorej získame riešenie rovnice (2):

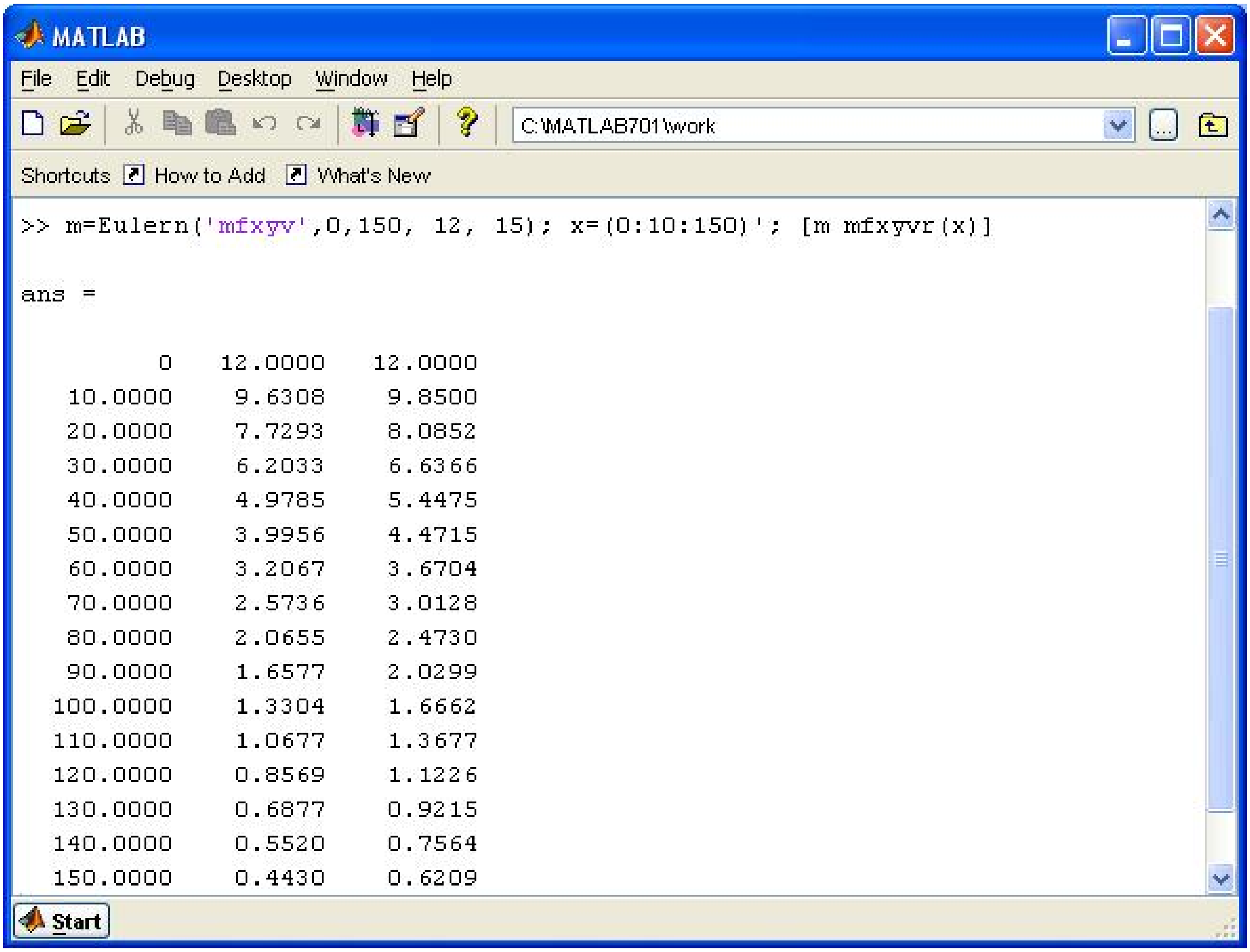
```
function mxy=Eulern(mf,a,b,y0,n)
% mf meno(t.j. string) funkcie f=(x,y)
% y0 zac.podm.: y(a)=y0
% n = pocet uzlov siete (bez bodu a)
% mxy matica n x 2 [x(i), aprox. y(x(i))]
h = (b-a)/n;          %krok
x = a:h:b;            %x(1)= a
y = zeros(1,n+1);     %pre-alokovanie
y(1)=y0;              %y(a) = y0
for i=1:n
    y(i+1) = y(i) + h*feval(mf,x(i),y(i));
end
mxy = [x',y'];
```

Ďalšou potrebnou M-funkciou bude funkcia \uv{mfxyv}, ktorá vyjadruje rovnicu (2) a funkcia \uv{mfxycr}, ktorá vyjadruje presné riešenie diferenciálnej rovnice (2):

```
function z=mfxyv(x,y)
%dif.rovnica znizovania rychlosti vetra
%v=(-1/10)*ln(12/9,85)*v   (y=(1/10)*ln(9,85/12)*y)
z=(y/10)*log(9.85/12);
```

```
function z=mfxyvr(x)
% presne riesenie DR zniz.rychlosti vetra
% v=12*(9,85/12)^(s/10)
z=12*(9.85/12).^(x/10);
```

Volaním funkcie \uv{Eulern} získame následovné diskrétne numerické riešenie rovnice (2), viď obrázok 1.

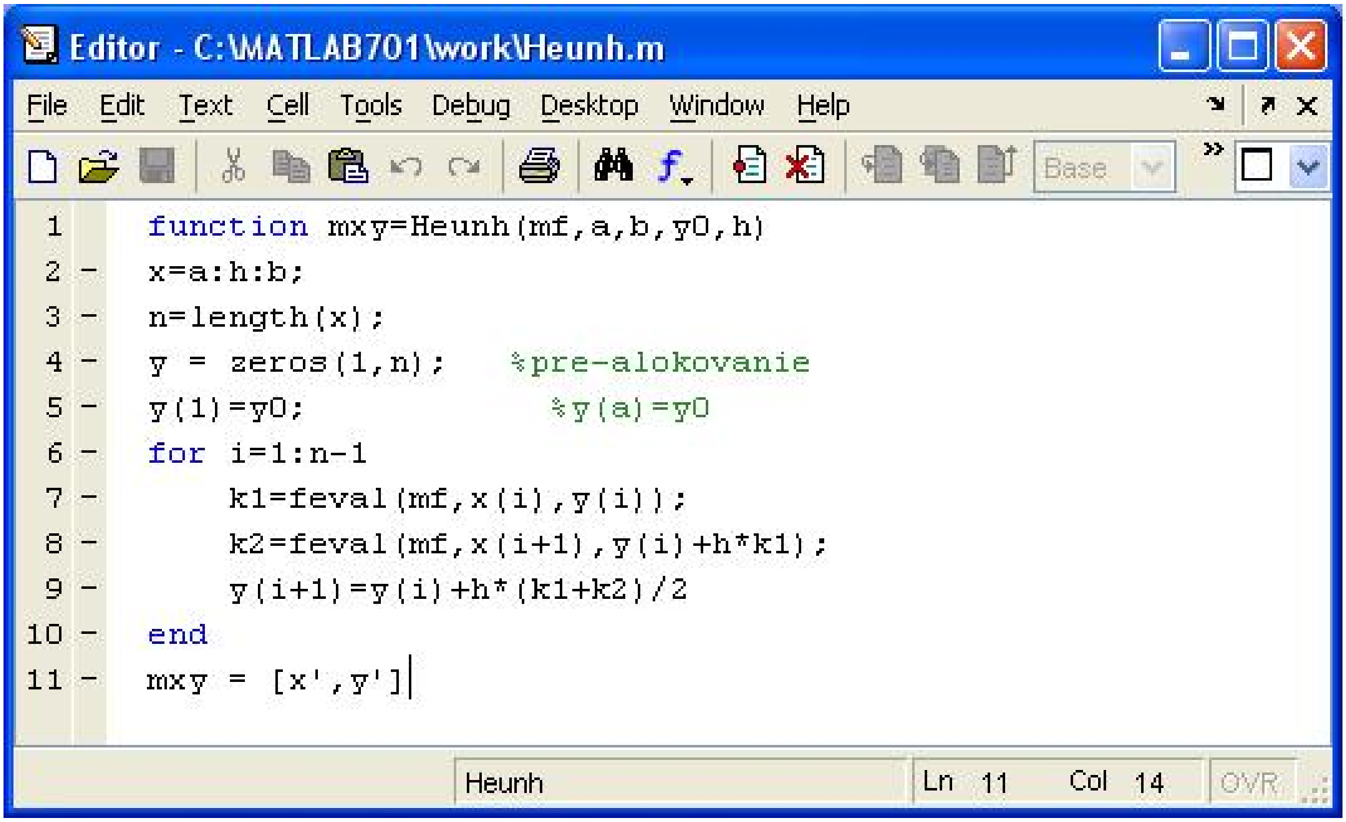


Obr. 1

Z obrázku 1 vidíme, že v prvom stĺpci sú hodnoty vzdialenosti s, v druhom diskrétne riešenie rovnice (2) a tretí stĺpec predstavuje hodnoty presného riešenia. Je zrejmé, že globálna chyba je veľká (Volauf, 2005). Znížiť ju môžeme zmenšením kroku h, čo je aj tak pri tejto metóde dosť neefektívne. No študentom odporúčam vyskúšať si to, pomocou matematického softvéru to nie je časovo náročné. Slabým miestom Eulerovej metódy je, že prírastok riešenia na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ sa aproximuje prírastkom dotyčnice v bode $(x_i; y_i)$. To znamená, že smerová funkcia nemôže dobre vystihnúť priebeh derivácie Preto treba použiť iné, vhodnejšie metódy. Napr. Heunovu metódu, ktorej rekurentný vzorec v tvare

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_0 + h \cdot f\left(x_0, y_0\right)\right)\right) \tag{5}$$

sa získava inou úvahou – integrovaním. Implementáciou vzťahu (5) vytvoríme novú M-funkciu \uv{Heunh}. Písmeno h v názve funkcie symbolizuje, že teraz je argumentom veľkosť kroku a nie počet uzlov (viď obr. 2).



Obr. 2

Volaním funkcie preveríme správnosť implementácie na riešení nášho problému. Získavame diskrétne riešenie rovnice:

```
>> m=Heunh('mfxyv',0,150,12,10);x=(0:10:150)';[m mfxyvr(x)]
ans =
           0    12.0000    12.0000
     10.0000     9.8647     9.8500
     20.0000     8.1093     8.0852
         ...        ...        ...
    130.0000     0.9395     0.9215
    140.0000     0.7723     0.7564
    150.0000     0.6349     0.6209
```

Vidíme, že teraz je veľkosť globálnej chyby v bode $x = 150$ rádovo menšia v porovnaní s Eulerovou metódou. Ešte presnejšie výsledky možno získať pomocou známych jednokrokových metód, ktoré odvodili na začiatku 20. storočia nemeckí matematici Runge a Kutta. Na nich sú založené aj M-funkcie ode23 a ode45, ktoré sú súčasťou Matlabu a sú výsledkom mnohoročného úsilia profesionálov. S presnosťou numerického riešenia rovnice (2), ktoré získame volaním M-funkcie ode45 sme samozrejme spokojní.

```
>> [x,y]=ode45('mfxyv',[0,150],12);[x,y]
ans =
```

```
       0   12.0000
  2.5445   11.4120
     ...       ...
148.7945    0.6358
150.0000    0.6209
```

ZÁVĚR

Na cvičeniach z numerickej matematiky sa osvedčilo, aby po klasickom výklade, vyriešení príkladu na danú tému a overení, či je pochopený algoritmus, nasledovala etapa využitia výpočtovej techniky s vhodným matematickým softvérom. Implementácia ICT do výučby numerickej matematiky nám totiž umožňuje nielen vypočítať viac príkladov, ale aj porovnať jednotlivé metódy z hľadiska odhadu chyby, rýchlosti, konvergencie a vhodnosti danej metódy. Nespornou výhodou je taktiež grafická interpretácia výsledkov numerického riešenia pomocou matematického softvéru (to už nech je predmetom iného článku). Cieľom však ostáva, aby študenti mali numerické metódy pochopené a osvojené do takej miery, aby ich vedeli samostatne naprogramovať v akomkoľvek vhodnom prostredí matematického softvéru.

LITERATURA

[1] Beisetzer, P.: *Samostatná práca edukanta a počítač*. Prešov: FHPV v Prešove, 2005, 107 s., ISBN 80-8068-428-6

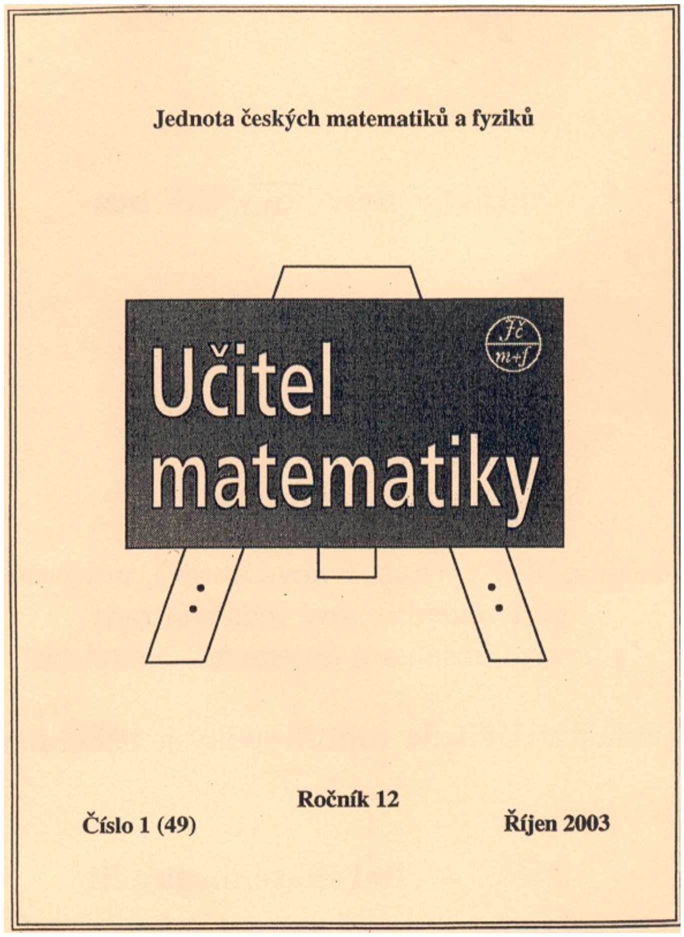
[2] Beisetzer, P.: Učiteľ a jeho schopnosť zhodnotiť aplikáciu počítača. In: *Kľúčové kompetencie a technické vzdelávanie* [elektronický zdroj] : III. InEduTech 2007. Prešov : Prešovská univerzita v Prešove, 2007. ISBN 978-80-8068-612-3. S. 94-98. Popis urobený 16.10.2007.

[3] Fulier, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2001, 177 s., ISBN 80-8050-418-0

[4] Stanoyevitch, A.: *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations Using Matlab*. Wiley Series in Pure and Applied Mathematics. J. Wiley Sons, 2005, ISBN-10: 0-471-69738-9, ISBN-13: 978-0-471-69738

[5] Šterbáková, K.: Multimédia a počítačom podporovaná výučba fyziky. In: *INFOTECH 2007. Moderní informační a komunikační technologie ve vzdělávání [elektronický zdroj] : sborník příspěvků*: díl 2. Olomouc : Univerzita Palackého, 2007. ISBN 978-80-7220-301-7. S. 433–436.

[6] Volauf, P.: *Numerické a štatistické výpočty v Matlabe*. Bratislava: STU, 2005. ISBN 80-227-2259-6



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 16. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické" periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické" články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Cena jednoho čísla je 30,- Kč, roční předplatné za čtyři čísla činí 110,- Kč.

Zájemci o odběr časopisu mohou napsat na adresu:

Redakce Učitele matematiky
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno

nebo poslat e-mail na adresu: ucmat@math.muni.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Dva dny s didaktikou matematiky 2008. Sborník příspěvků.

Editoři:	Naďa Stehlíková, Darina Jirotková
Sazba:	Naďa Stehlíková, systémem LaTeX
Počet stran:	170
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2008
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN tištěné verze: 978-80-7290-386-3
ISBN CD ROM verze: 978-80-7290-380-1