SU Společnost učitelů matematiky JČMF MA

DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2007

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 15.–16. 2. 2007

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Stehlíková
Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)

Věnováno památce Marie Kubínové.

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci semináře.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2008 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN 978-80-7290-345-0

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

zahájili jsme více než zdárně druhé desetiletí konference *Dva dny s didaktikou matematiky*. Objem sborníku jasně hovoří o narůstajícím zájmu učitelů o tuto konferenci. Začínali jsme se sborníkem na šedesáti stránkách a dnes je již více než trojnásobný. Konferenci pořádá katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy v Praze, Pedagogické fakulty, ve spolupráci s MPS JČMF, pro učitele matematiky všech typů škol z celé České republiky, mnoho zahraničních hostů ze Slovenska a často i několik hostů z Německa, Polska či Anglie. Těší nás, že je mnoho učitelů, kteří se na konferenci každoročně vrací, a že každým rokem přibývají i ti, kteří se předchozích ročníků nezúčastnili. To nás utvrzuje v přesvědčení, že forma i obsah konference je zvolen dobře. Je zvolen tak, aby se každý účastník mohl aktivně zapojit do programu a našel si v něm něco, co ho obohatí a co může ve své vlastní praxi využít. Proto i nadále nebudeme podstatné části programu měnit.

Chtěli bychom vám všem, kteří přispíváte na konferenci dílnami, referáty v sekcích, otevřenými hodinami, postery a cennými diskusemi ve všech aktivitách, poděkovat za skvělou atmosféru konference, která nám pravidelně dodává energii a chuť do další práce. Věříme, že i účastníci konference si odnášejí dobrý pocit smysluplnosti svého úsilí na půdě školy.

Společnost učitelů matematiky (SUMA), která hájí profesní zájmy učitelů matematiky, nabízí učitelům prostor k předávání zkušeností i k diskusím o problémech, které nás zajímají, na portálu SUMA (www.suma.jcmf.cz). Ten byl uveden do provozu s podporou Evropského sociálního fondu. Věříme, že právě účastníci konference *Dva dny s didaktikou matematiky* budou portál aktivně využívat a sdílet tak s ostatními kolegy své cenné zkušenosti i názory.

Všem účastníkům jedenáctého ročníku konference přejeme, aby jim tento sborník připomněl příjemnou pracovní atmosféru a aby v něm i po roce našli další podněty pro svou práci. Ostatním čtenářům přejeme, aby je náš sborník potěšil a aby je motivoval aktivně se účastnit dalších ročníků konference *Dny s didaktikou matematiky*.

Na setkání na dvanáctém ročníku konference *Dny s didaktikou matematiky* v únoru 2008 se těší

Naďa Stehlíková

předsedkyně programového výboru konference

Zvané přednášky

PROČ ŽÁCI MÁLO ROZUMÍ PODSTATĚ SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ A JAKÉ TO MÁ DŮSLEDKY[1]

MILAN HEJNÝ[2]

FORMULACE PROBLÉMU

Cílem našeho zkoumání[3] je pochopit, jak my učitelé a následně pak i naši žáci vnímáme součet a sčítání. Nástrojem zkoumání jsou diagnostické úlohy. Dvě takové úlohy – první didaktická, druhá matematická – zahájí naše úvahy.

ÚLOHA 1.

Žáci ve druhém ročníku dostali za domácí úkol vytvořit tři úlohy na součet dvou dvoumístných čísel. Výsledek u všech tří úloh měl být stejný. V sešitě jednoho žáka bylo napsáno $37 + 47 = 74$. Jak tuto chybu opravíte?

První otázka, kterou si dnes položíme, zní:

Proč většina učitelů opravuje číslo 74 a ne čísla 37 a 47, popřípadě celou rovnost?

ÚLOHA 2.

Do tabulky s 25 okny doplňte do každého prázdného okna jedno číslo tak, aby a) součet, b) součin každých tří čísel v obdélníku 3×1 položeném horizontálně i vertikálně byl 6.

				3
		1		
1				2

Většina řešitelů této úlohy ať již z řad žáků nebo učitelů nejprve získá vhled do situace metodou pokus-omyl, a pak najde řešení. Existuje ale i jiná cesta k řešení, která je již méně častá. Je založena na dešifrování podmínky o trojici sousedních čísel. Z ní vyplývá, že dvě čísla, mezi nimiž jsou další dvě čísla (tedy krajní čísla obdélníku 4×1), jsou nutně stejná. Proto je v naší tabulce hned pod číslem 3 číslo 2, a tedy poslední sloupec je 3, 2, 1, 3, 2. Podobně najdeme poslední řádek 1, 2, 3, 1, 2. Dále již musíme odlišit případy a) a b). V případě a) je prostřední řádek 4, 1, 1, 4, 1. V případě b) je prostřední řádek 6, 1, 1, 6, 1. Zbytek je již nasnadě.

[1] Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2] PedF UK v Praze, milan.hejny@pedf.cuni.cz

[3] Výzkum je realizován ve spolupráci s kolegyní D. Jirotkovou a J. Slezákovou.

Druhá otázka, kterou si dnes položíme, zní: Proč je odhalení vztahu

„krajní čísla každého obdélníku 4×1 jsou nutně stejná“ (*)

tak náročné a řídké?

Na první pohled nemají obě položené otázky nic společného. Podrobnější analýza ale ukáže, že je zde velice důležitá společná příčina obou uvedených jevů.

VÝCHOZÍ EXPERIMENT

K úvahám, které zde uvádíme, nás dovedl následující experiment, ve kterém se respondent choval velice překvapivě. Experiment jsme uskutečnili společně s J. Slezákovou.

PŘÍBĚH 1.

Dva žáci druhého ročníku základní školy, Mirek a Slávek, kteří patří k nejlepším v matematice ve třídě, individuálně řešili následující sérii čtyř úloh:

Do dvou prázdných okének doplň dvě čísla tak, aby součet tří levých čísel a tří pravých čísel byl pokaždé 9.

2	4	_	_

_	1	7	_

_	5	_	3

2	_	_	3

Když žáci u první z úloh pochopili zadání, vyřešili další dvě úlohy bez problémů. Problémy nastaly u třetí úlohy. Navzdory našemu očekávání, že záhy objeví neřešitelnost úlohy, oba žáci soustředěně dosti dlouho hledali řešení. Nakonec se rozhodli, že to vyřeší doma. Po týdnu jsme se opět s Mirkem sešli a on nám sdělil, že jeho maminka řekla, že úloha nemá smysl. Přesto se opět pustil do hledání řešení. Nakonec zklamaně řekl, že to řešit neumí.

Přenesli jsme tedy úlohy do manipulativního kontextu. Na levou stranu lavice jsme dali lístek s číslem 2 a na pravou lístek s číslem 3. Mirek dostal do ruky dva prázdné lístky. Požádali jsme jej, aby na každý lístek napsal jedno číslo tak, aby součet těchto dvou čísel s číslem na levé straně lavice byl 9 a součet těchto dvou čísel s číslem na pravé straně lavice byl 9. Po čtyřech neúspěšných pokusech Mirek znechuceně řekl, že to neumí.

Pak dostal jen jeden prázdný lístek a byl vyzván, aby napsal na lístek jedno číslo tak, že jeho součet s číslem na levé straně lavice bude 9 a jeho součet s číslem na pravé straně lavice bude též 9. Tentokrát Mirek již po dvou pokusech řekl, že to se nedá, že *tady bude pokaždé o 1 víc.*

Jak vysvětlíme Mirkovo překvapivé chování? Podle našeho názoru v jeho vědomí zatím není vybudováno schéma součtu. Jinak řečeno, znaménko „+“ vnímá jako příkaz k činnosti „sečti“, nikoli jako znak, který je součástí vazby $2+3=5$. Podobně i u našeho řešení úloh 1 a 2 jsme slovo „součet“ vnímali jako činnost sčítání, nikoli jako prvek schématu. Poslední termín osvětlíme.

Schéma v běžném životě

Nejprve termín *schéma* představíme v oblasti vně matematiky a až později se zaměříme na schéma v matematice.

Představte si, že se vás někdo zeptá, kolik máte ve svém bytě/domě a) koberců, b) dvěří, c) lamp, d) oken, e) obrazů ... Asi žádné z těchto čísel neřeknete ihned, ale ke každému se dopracujete. Budete v duchu procházet svým obydlím, z místnosti do místnosti, a budete počítat koberce, dveře, lampy, okna, obrazy ... To můžete udělat proto, že ve vědomí máte uloženo *schéma* svého bytu. Výsledek neřeknete ihned, ale najdete jej zcela bezpečně.

Podobně je v našem vědomí uloženo schéma supermarketu, v němž běžně nakupujeme, nebo schéma ulic, náměstí, parků a důležitých budov města, v němž bydlíme, ale i rozmístění žáků v lavicích ve třídě, v níž učíme, nebo rodokmen naší rodiny.

V uvedených případech se schéma v našem vědomí vytváří na základě *opakované evidence*. Obě tato slova jsou důležitá. První potvrzuje i stará latinská moudrost repetitio est mater studiorum (opakování je matkou moudrosti). Je jasné, že čím častěji do supermarketu chodíme, tím lépe jej známe. Na druhé straně některé regály obchodu neznáme skoro vůbec, i když jsme je již viděli mnohokrát. Je to proto, že o zboží zde vystavené nejevíme zájem, a tedy jej neevidujeme. Naopak regál, ve kterém hledáme často (například různá koření), známe tak dobře, že když fenykl přemístí s pepřem, ihned to poznáme.

Majitelé obchodních řetězců se snaží, aby všechny jejich prodejny byly sestaveny podle stejného plánu, aby se ve vědomí zákazníka schéma vytvořené v prodejně A dalo použít i v prodejně B tohoto řetězce. Tak je větší naděje, že zákazník půjde právě sem a ne ke konkurenci.

Schéma v matematice

Mám-li jasnou představu čtverce, nemusím si pamatovat, že jeho obsah je strana na druhou, obvod čtyřikrát strana, že úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé, ... Nemám-li tu představu, všechno toto a ještě mnoho dalšího si pamatovat musím a stejně nedokáži tvořivě se čtvercem pracovat.

Úloha 3 (diagnostická)

Je dán čtvrtkruh SAB. Na kružnicovém oblouku AB je dán bod M, jehož kolmé průměty na úsečku SA, resp. SB označíme U, resp. V. Víme, že $|SA| = 6$ cm, $|SU| = 2$ cm. Najděte délku úsečky UV.

Mám-li představu pojmu procento, nemusím si pamatovat tři základní vzorečky

$$p = 100c/z,\ z = 100c/p,\ c = zp/100.$$

Jestliže mi ta představa schází, pak si vzorečky pamatovat musím a stejně nebudu schopen s pojmem procento tvořivě pracovat.

Úloha 4 (diagnostická)

Z dědictví 1 000 000 Kč dostal první podílník p % a druhý ze zbytku $(p+5)$ %. Oba dostali stejně. Kolik to bylo?

Úloha 5 (diagnostická)

V rovnoramenném trojúhelníku s úhly α, $\beta = \gamma$ platí: velikost úhlu α je rovna 160 % velikosti úhlu β. Jak veliké úhly má trojúhelník?

Úloha 6 (diagnostická)

V trojúhelníku platí: velikost největšího úhlu je 250 % velikosti nejmenšího úhlu a velikost prostředního úhlu je rovna 3/7 velikosti součtu dvou zbylých úhlů. Jak veliké úhly má trojúhelník?

Úloha 7 (diagnostická – řešit pouze v představě, bez papíru)

Velikost nejmenšího úhlu rovnoramenného trojúhelníku je rovna 20 % velikosti součtu zbylých dvou úhlů. Jak veliké úhly má trojúhelník?

Ilustrace ukazují, že základem porozumění matematice není ani znalost algoritmů, ani znalost vzorečků, ale znalost schémat. Toto schéma vzniká ze zkušeností, které žák nabývá konkrétními činnostmi. V současné terminologii: žák činnostmi získává konkrétní dílčí zkušenosti – *izolované modely* – a z nich si pak zobecňováním vytváří *model generický*, který mu zajišťuje vhled do dané situace. Blíže viz [1]. Přitom

kvalita schématu závisí na různorodosti prostředí, v nichž je schéma uhnízděno.[4]

Uvedený poznatek, který byl v našich studiích latentně přítomen již před 30 lety, je zde poprvé jasně artikulován. Je výchozím didaktickým vodítkem při tvorbě učebnic pro nakladatelství Fraus autorskou trojicí D. Jirotková, J. Slezáková a M. Hejný.

Tedy znát dobře „čtverec“ znamená mít zkušenosti se čtvercem modelovaným sirkami, vytvořeným skládáním papíru, nakresleném na čistém papíře, nakresleném v různých polohách na čtverečkovaném papíře, se čtvercem vepsaným do kružnice, pohybujícím se čtvercem, čtvercem jako stěnou krychle, … Podobně znát dobře „procento“, znamená mít zkušenosti s procenty v oblasti peněz, délek, obsahů, objemů, úhlů, teploty atd.; navíc zde je nutno mít zkušenosti s propojením jazyka procent na jazyk zlomků a desetinných čísel.

Schéma versus procedura

Snaha o oslabení procedur a obohacení schémat ve výuce matematiky není ani tak změnou obsahu jako změnou metod. Jestliže procedurálně orientovaná didaktika zdůrazňuje nácvik a utvrzování různých řešitelských postupů, výuka schémat je založená na zcela jiné metodě. Dobře ji porozumíme, když se vrátíme k ilustraci s naším bytem

[4] Termín „uhnízděný poznatek“ (nested knowledge) je převzat z teorie abstrakce T. Dreyfuse.

a položíme si otázku, jak jsme se naučili schéma našeho bytu. Zjistíme, že my jsme se to schéma vůbec neučili. My jsme se v bytě stále pohybovali, na jednotlivé objekty bytu jsme tu více a tu méně zaměřili pozornost a po jisté době jsme v představě měli celý byt i všechny jeho pro nás podstatné objekty.

Kdyby nás někdo přiměl k tomu, abychom se byt učili systematicky: první týden den po dni bychom opakovali rozmístění všech objektů v kuchyni, dalších 10 dní v obývacím pokoji (jeť náročnější než kuchyně), další týden v ložnici, pak tři dny ve spíži atd., byl by asi výsledek takového učení se méně účinný než výsledek učení bytu tím, že v něm žijeme. Takové systematické učení by na jedné straně bylo málo zajímavé a pro mnohé svým tlakem i frustrující. Smysl této práce by asi nikdo nechápal. Na druhé straně by systematicky získané poznatky byly uloženy v našem vědomí nikoli v souladu se životem, ale uměle, bez přirozeného řádu života.

Metafora, se kterou zde pracujeme, je podle našich zkušeností věrná. Počítání mnoha úloh na sčítání a odčítání dvou malých čísel v prvním ročníku, řešení úloh na úpravu algebraického výrazu v sedmém ročníku i nácvik derivování v prvním ročníku na vysoké škole je činnost nezáživná, pro tvořivé žáky úmorná a pro pomalé žáky frustrující.

Náš návrh orientovat výuku matematiky na schémata je založen na tom, že žák je postupně seznamován s různými prostředími a v nich jsou mu předkládány různé úlohy tak, aby jejich řešení přispívalo k postupnému budování příslušného schématu. Přitom nutno volit taková prostředí, která umožňují výraznou variabilitu problematiky co do náročnosti, aby zde jak matematicky slabší, tak i vyspělejší žák mohl najít pro sebe přiměřené úlohy, jejichž řešení bude sice vyžadovat intelektuální úsilí, ale bude úspěšné.

Schéma aditivní triády

I když se v dalším zaměříme na matematicky jednoduchý jev sčítání a součtu, jsou naše úvahy dobře aplikovatelné i na další oblasti školské matematiky.

Termínem *aditivní triáda* v úzkém strukturálním slova smyslu (jak jej zavedli Černek a Repáš v [2]) rozumíme trojici čísel, z nichž jedno je součtem dalších dvou. Například (2, 5, 3).

Představu, která o triádě vzniká ve vědomí žáka, budeme nazývat *schéma triády*. Je to komplexní představa, která v sobě zahrnuje jak *strukturální* (pracující pouze s čísly), tak i *sémantické* (propojené na životní zkušenosti žáka) *generické modely*. Žák, který má plně vytvořeno schéma triády, dokáže

a) v jakémkoliv kontextu nahradit dvojici čísel triády číslem třetím a
b) s triádou pracovat jako s celkem.

Mirek v příběhu 1 nedokázal v popsaném kontextu nahradit dvojici čísel jejich součtem. I když umí již sčítat a odčítat od tisíce (a možná i více), v jeho vědomí ještě schéma aditivní triády vytvořeno v dané době nebylo. Z poznatku, který jsme výše napsali kurzívou, vyplývá, že schéma triády si chlapec vytvoří zkušenostmi s operací sčítání v různorodých prostředích. V dalším ukážeme dvě strukturální a jedno sémantické prostředí. Ve výše zmíněných učebnicích je již v prvním ročníku zavedeno 12 takových prostředí.

V dalším zaměříme pozornost na standardní strukturální prostředí, v nichž se triáda objevuje.

STANDARDNÍ STRUKTURÁLNÍ PROSTŘEDÍ

Zápisy typu $2 + 3 = 5$ nebo $5 - 2 = 3$ vnímáme nikoli jako vztahy, jako triády, ale jako výsledky operací sčítání $(2 + 3 =?)$ a odčítání $(5 - 2 =?)$. Stejně i později, když vstupní čísla jsou psána pod sebou, je příslušný zápis vnímán jako operace. Proto tyto zápisy nepovažujeme za modely schématu triády.

K budování představy triády spíše přispívají úlohy typu $2+? = 5$ a $5-? = 3$. I zde ale převládá vnímání procedurální. První úlohu řeší žáci dopočítáváním a druhou odpočítáváním. Teprve úlohy typu $? + 3 = 5$ a $? - 2 = 3$, které žáci řeší metodou pokus-omyl, přispívají k budování schématu triády. Je zajímavé, jak na tyto úlohy hledí někteří učitelé.

PŘÍBĚH 2.

Skupina osmi učitelů 1. stupně základní školy posuzovala didaktickou vhodnost úloh typu $? + 3 = 5$ a $? - 2 = 3$. Kolegyně Slávka řekla: „Nemám je ráda, protože vedou žáky k povrchnosti; žáci tyto úlohy neřeší, ale výsledek hádají.“ Kolegyně Radka ji oponovala vlastní dobrou zkušeností: „Hele, když je naučíš pravidlo, jak úlohy číslem řešit, je po problémech.“ Na naši prosbu Radka své pravidlo prozradila: „Když hledám první číslo, tak změním znaménko. Tedy úlohu $? + 3 = 5$, ve kterém je znaménko „+“, řeším odčítáním, tedy $5 - 3 = 2$ a úlohu $? - 2 = 3$, ve které je znaménko „−“, řeším sčítáním $2 + 3 = 5$.“ Slávka na to chvíli hleděla, a pak řekla, že je to chytré, že to též své žáky naučí. Na náš dotaz, zda žáci vědí, proč se tak počítá, Radka řekla: „V první a druhé třídě žáci neví, proč to funguje, ale později na to sami příjdou.“

PŘÍBĚH 3.

V testu v (dnešní) sextě gymnázia byla dána rovnice: $\big||x - 1| - 1\big| = 1$. Řešení žáka Miloše: Nad výrazem $|x - 1|$ byla svorka a u ní písmeno y. K tomu text:

bod y je od 1 vzdálený $1 \Rightarrow y = 0, 2$, teda
bod x je od 1 vzdálený $0 \Rightarrow x = 1$
bod x je od 1 vzdálený $2 \Rightarrow x = -1, 3$

$$x_1 = -1, x_1 = 1, x_1 = 3.$$

Byl jsem v kabinetě, kde kolegyně písemku opravovala. Obrátila se na mne s otázkou, zda bych za takové řešení dal plný počet 6 bodů. Odpověděl jsem kladně. Ona ale pochybovala. Stěžovala si, že Miloš, i když je v matematice dobrý, musí stále něco vymýšlet, aby ji potrápil. Pak zapochybovala, zda může napsat, že y je bod, a zda dokázal, že jiná řešení neexistují.

Oba poslední příběhy ukazují, že někteří učitelé za korektní a plně legální řešitelské postupy považují pouze procedury a algoritmy a na řešení pomocí schémat, která vznikají namnoze použitím metody pokus-omyl, hledí s nedůvěrou. Domníváme se, že právě toto pedagogické přesvědčení značné části učitelské obce je vážnou příčinou nízkého porozumění matematice mnoha našich žáků. Je to totiž právě metoda pokus-omyl, která nejčastěji pomůže žákovi získat vhled do dané situace, a tedy porozumět algoritmu, který používá.

Proto se pokoušíme nabídnout učitelům takové přístupy k úlohám, v nichž není řešitelský algoritmus na začátku poznávacího procesu, ale na jeho konci. Stručně lze navrhovaný didaktický postup popsat jako posloupnost pěti kroků:

problém → jeho řešení metodou pokus-omyl → odhalení schématu → použití schématu k řešení daného problému → odhalení obecného algoritmu (**)

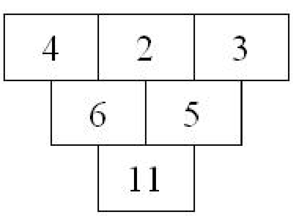
DVĚ NESTANDARDNÍ STRUKTURÁLNÍ PROSTŘEDÍ

První z níže uvedených nestandardních strukturálních prostředí je známé, ale snažíme se ukázat na jeho další didaktické možnosti. Druhé prostředí je naše původní.

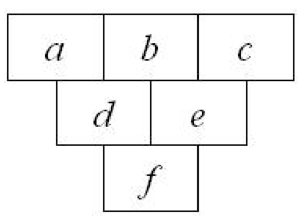
PROSTŘEDÍ TROJÚHELNÍK (PYRAMIDA)

Připomeneme, že *součtovým trojúhelníkem* rozumíme soubor šesti, resp. deseti *oken* uspořádaných do tvaru trojúhelníka.[5] Přitom v každém okně je právě jedno číslo a platí, že *pod každými dvěma sousedními čísly leží jejich součet.*

Příklady součtových trojúhelníků vidíme na obrázcích 1a a 2a. Podle počtu oken v horní řádce je budeme nazývat *3-trojúhelník* a *4-trojúhelník*. Je zřejmé, jak vypadá n-trojúhelník pro $n = 5$, $n = 6, \ldots$ Obecně, pomocí písmen, jsou n-trojúhelníky pro $n = 3$ a $n = 4$ zapsány na obrázcích 1b a 2b. Vedle každého z trojúhelníků je soupis všech jeho *základních vazeb* (1) – (3), resp. (4) – (9). V nich jsou vypsány všechny sousední dvojice daného trojúhelníka.



Obr. 1a



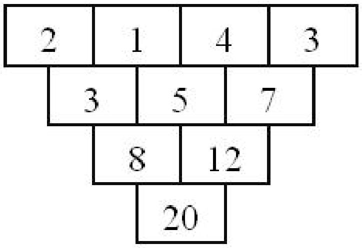
Obr. 1b

Základní vazby jsou tři:

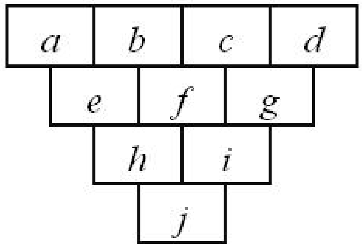
$a + b = d$ (1)
$b + c = e$ (2)
$d + e = f$ (3)

Úlohy, v nichž je v n–trojúhelníku dáno n vhodných čísel a zbylých $n(n-1)/2$ čísel je nutno najít, jsou dobře známé. Několika úlohami chceme naznačit méně známé možnosti tohoto prostředí.

[5] Viz také např. Kubínová & Stehlíková (2002).



Obr. 2a



Obr. 2b

<u>Základních vazeb</u> je šest:

$a + b = e$ (4)
$b + c = f$ (5)
$c + d = g$ (6)
$e + f = h$ (7)
$f + g = i$ (8)
$h + i = j$ (9)

Úloha 8

Ve 4-trojúhelníku známe tři rohová čísla a, d, j. Z této znalosti umíme určit jedno další číslo. Které? Dá se uvedený výsledek zobecnit na n-trojúhelník?

Úloha 9

Ve 4-trojúhelníku je $b = 0$ a v dalších 8 oknech trojúhelníka jsou čísla 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 8. Jaké je poslední, zatím neznámé číslo?

Úloha 10

Kolika různými způsoby lze doplnit 3-trojúhelník, když známe číslo f a platí $a \leq c$?

Úloha 11

Označme v 3-trojúhelníku u součet všech 6 čísel a $v = a + b + c$ součet čísel horního řádku. Dokažte, že pak nutně $3v \leq u \leq 4v$. Toto tvrzení zobecněte pro n-trojúhelník.

Úloha 12

V lineární algebře zavádíme pojem *skupina lineárně závislých / nezávislých vektorů*. Porozumění těmto pojmům lze připravit vhodnou sérií úloh v prostředí n-trojúhelníků, když zavedeme tuto definici:

<u>Definice</u>. Řekneme, že skupina čísel (oken) v n–trojúhelníku je *závislá*, jestliže lze jedno z těchto čísel vypočíst ze zbývajících pomocí základních vazeb n–trojúhelníka. Skupina, která není závislá, se nazývá *nezávislou.*

Vytvořte takovou sérii úloh.

Prostředí sousedé

Jedno nestandardní prostředí, které pochází z naší dílny, bylo uvedeno úlohou 2 a didakticky rozvedeno v příběhu 1. Toto prostředí jsme nazvali Sousedé. Jeho prvním edukačním cílem je vést žáky, prostřednictvím vhodně volených úloh, k odhalení poznatku (*), který má schématický charakter. Na základě poznatku (*) je možné řešit nejen úlohu 2, ale všechny podobné úlohy algoritmicky. Algoritmus je jednoduchý a má dva kroky:

1. každé číslo, které se v čtverečkovém pravoúhelníku vyskytuje, přepiš do všech oken, která jsou od daného okna vzdálena o 3, 6, 9, ... oken ve svislém nebo vodorovném směru; operaci pak zopakuj se všemi okny, která jsi právě vyplnil;

2. prázdná okna dopočítej.

To, zda daný žák umí, nebo neumí poznatek (*) k řešení úloh daného typu použít, je nepodstatné. Podstatné je, jak se k poznatku dostal. Když jej objevil sám, získal tím tři posuny ve svém intelektuálním růstu. Na kognitivní úrovni je to objev schématu a následně i algoritmu. Na meta-kognitivní úrovni je to nárůst schopnosti objevovat schémata. Na osobnostní hladině je to radost z vlastního výkonu provázená nárůstem sebevědomí a zvýšením motivovanosti k objevování.

Je jasné, že ve třídě jen malý počet žáků objeví schéma samostatně. Většina žáků to od nich převezme. Ale i tito mají z převzatého poznatku daleko větší užitek, než kdyby jim byl poznatek sdělen učitelem. Především, a to je rozhodující, tím, že se sami o objev pokoušeli a možná i jisté jeho zárodky již uviděli, jsou připraveni na jeho přijetí – cítí potřebu tento poznatek mít. Dále, poznatek k nim nepřišel v hotové vycizelované formě, kterou si mohou pouze pokorně uložit do paměti, ale ve formě nehotové, náznakové a oni sami, případně v diskusi se spolužáky si tento poznatek interiorizují.

Mohlo by se zdát, že objevením pravidla (*) je prostředí Sousedů didakticky ukončeno. Není tomu tak, neboť v prostředí Sousedé je možné formulovat mnohé další úlohy i úlohy výrazně náročnější. V nich se používá termín *útvar sousedů*. Rozumíme tím útvar nakreslený na čtverečkovaném papíru skládající se z konečného počtu čtverců, přičemž v každém čtverci je jedno číslo a součet všech tří čísel v každém obdélníku 3×1, který celý leží v daném útvaru, má předepsaný součet s. Například u úlohy 2 je oním útvarem čtverec 5×5 a součet $s = 6$. Následující úloha je ilustrací náročnějších úloh z prostředí Sousedé.

Úloha 13

Je dáno přirozené číslo s a pravoúhelník o rozměrech $m \times n$ na čtverečkovaném papíře. Pravoúhelník je vyplněn čísly tak, že tvoří útvar sousedů se součtem s. Označme S součet všech čísel v pravoúhelníku. Jakých hodnot může číslo S nabývat, když čísla m, n, s jsou pevně dána?

Sémantická prostředí

Sémantická prostředí mají při tvorbě schématu triády vedoucí postavení, protože umožňují využít rozsáhlou životní zkušenost žáka a pro většinu žáků jsou motivačně silná. Prostředí lze dělit do tří skupin.

Dynamická jsou prostředí, v nichž jsou všechna tři čísla triády reprezentována jevy, které proběhnou v čase, odezní a není je možné dále smyslově vnímat. Například dvakrát dupnu a třikrát tlesknu a ptám se, kolik zvuků jsem vydal. Práce v tomto prostředí přispívá především k budování procesuálních představ. Podrobněji viz [3].

Statická jsou prostředí, v nichž jsou všechna tři čísla reprezentována jevy, které jsou neměnné, žák se k nim může kdykoli vrátit. Například dvě modré kuličky a tři červené kuličky ležící v misce a ptáme se, kolik je zde kuliček dohromady. Práce v tomto prostředí přispívá především k budování konceptuálních představ. Podrobněji viz [4].

Staticko-dynamická jsou prostředí, v nichž aspoň jedno číslo je reprezentováno jevem statickým a aspoň jedno jevem dynamickým. Například na jedné misce jsou 2 kuličky a na druhou, která není vidět, postupně hodíme 3 kuličky, přičemž každá při dopadu cinkne. Otázka zní, kolik kuliček je na obou miskách.

Jak ukazují naše dřívější experimenty i probíhající výzkum (viz [5]), úlohy s operátory působí žákům základních i středních škol značné potíže. Dvě úlohy ilustrují tento případ.

Úloha 14

Maminka přidala Ivě do prasátka 5 korun a Iva si z něj vybrala 3 koruny. Přibylo, nebo ubylo v prasátku peněz? Kolik?

Úloha 15

V únoru zlevnily svetry o 15 % a v březnu se o 10 % ceny svetrů zvýšily. Jak se celkově změnila cena svetrů?

U obou těchto úloh se řešitelé často dožadují záchytného bodu: kolik korun bylo původně v prasátku, resp. jaká byla původní cena svetrů? Potíž, kterou řešitelé mají s řešením těchto úloh, je způsobena skutečností, že v čísle jako operátoru jsou virtuálně přítomna dvě další čísla: výchozí a koncové. Jsme přesvědčeni, že schopnost žáků řešit dynamické úlohy se zvýší, když žáky již od první třídy budeme seznamovat s aditivní trojicí tvořenou operátory.

V dalším představíme nejzdařilejší z dynamických prostředí, které jsme zatím zkoušeli. Je to prostředí Krokování, které buduje aditivní triádu v tom nejnáročnějším sémantickém kontextu, v kontextu operátorů. Podrobněji viz [3].

Prostředí Krokování

Když žák na povel *udělej tři kroky!* udělá 3 kroky, odehraje se něco, co po akci zaniká. Kdyby teď někdo vstoupil do třídy, nevěděl by, co se zde odehrálo. Žák, který krokoval, změnil svoji pozici. Podstatné u krokování jsou tři věci:

1. povel i kroky jsou pomíjivé,
2. čísla jsou zde ve funkci operátorů,
3. potřeba virtuálních stavů nebo adres zde není naléhavá.

Zkušenosti, které zde žáci získají, jsou základem jejich schopnosti pracovat s operátory.

Etapa první (pouze slova a kroky)

Dva žáci, Eva a Adam, stojí bok po boku u jedné značky. Učitelka velí: „Evo, dva kroky, pak tři kroky, začni teď!“. Třída do rytmu počítá „jeden, dva – jeden, dva tři“. Pak učitel vyzve třídu, aby dala Adamovi jednodílný povel, aby hoch opět stál vedle Evy. Určený žák velí: „Adame, pět kroků, začni teď!“ Adam odpochoduje. Opět jsou obě děti bok po boku. Je vidět, že 2 kroky a 3 kroky je 5 kroků.

Problémy, které se zde objeví, spočívají v různé délce kroků jednotlivých žáků. Proto nutno udělat technické opatření.

Etapa druhá (přibudou značky)

Na podlahu položíme řadu značek, sousední jsou vzdáleny jeden dětský krok. To pomůže odstranit chyby způsobené různou délkou kroků jednotlivých žáků. Značky ale přináší do prostředí i statický prvek – lze je vidět stále, nezanikají.

Úloha $2+3=?$ je snadná. Náročnější je úloha $2+?=5$. Učitel nejprve velí Adamovi a hoch odkrokuje 5 kroků. Pak velí Evě: „Evo, dva kroky, pak “(učitel udělá významnou pauzu a žáci vědí, že mají povel doplnit slovy) „tři kroky, začni teď!“ Eva odkrokuje, stojí vedle Adama, úloha je vyřešena. Ve vědomí řešitele proběhne tento proces: řešitel si představí, že Eva již 2 kroky udělala, a dopočítá, kolik kroků ještě zbývá, aby byla vedle Adama. Někteří žáci při tom ukazují prstem na značky na podlaze. Je jasné, že zde značky řešiteli výrazně pomáhají.

Nejnáročnější je úloha $?+3=5$. I zde Adam odkrokuje 5 kroků. Pak učitel řekne: „Evě dáme povel, aby opět stála vedle Adama. Povel bude mít dvě části. První část musíte objevit vy, druhá část bude: „pak tři kroky, začni, teď!“.“ Když jsme prostředí krokování zaváděli ve druhém ročníku, jeden žák objevil, že tuto úlohu lze převést na předchozí: nejprve v duchu odkrokujeme Eviny 3 kroky, a pak dopočítáme do 5. Tento objev byl vlastně odhalením komutativity sčítání v dynamickém prostředí.

Etapa třetí (krokování pozpátku)

Zatím se chodilo pouze dopředu. Teď začneme chodit i dozadu. Opět stojí chlapec a dívka vedle sebe a učitel velí: „Evo, pět kroků dopředu, pak dva kroky dozadu, začni teď!“ Pak určený žák dá povel Adamovi: „Adame, tři kroky dopředu, začni, teď!“ Adam odkrokuje a dostane se k Evě. Tím je úloha je vyřešena.

Krokování dozadu otevírá okno k záporným číslům, tedy k pojmům, k nimž statická prostředí nevedou. U běžných statických prostředí nelze znázornit úlohu a) $2-3=?$ ani úlohu b) $-2+3=?$ V prvním případě je výsledkem záporné číslo, které nelze znázornit počtem, ve druhém případě je výsledek číslo kladné, ale první krok výpočtu je odebrání a odebrat není z čeho. Prostředí krokování tyto úlohy znázornit umí.

a) Zadáním je povel „Evo, dva kroky dopředu, pak tři kroky dozadu, začni teď!“ a řešením je povel „Adame, jeden krok dozadu, začni, teď!“.

b) Zadáním je povel „Evo, dva kroky dozadu, pak tři kroky dopředu, začni teď!“ a řešením je povel „Adame, jeden krok dopředu, začni, teď!“.

ETAPA ČTVRTÁ (VÝCHOZÍ ZNAČKA)

Krokovat může i jeden žák. Když odkrokuje dvoudílný povel, vrátí se na výchozí značku a najde jednodílný povel, kterým se dostane na stejnou značku, na kterou jej poslal předešlý dvoudílný povel. U těchto úloh je nutné si pamatovat výchozí značku. Abychom si práci usnadnili, jednu ze značek trvale označíme jako výchozí. Je dobré, když to navrhnou žáci jako vylepšení procesu řešení těchto úloh. Volba výchozí značky je zárodek představy číselné osy s vyznačenou nulou, která dělí čísla na kladná a záporná. Zatím ale o těchto pojmech učitel nemluví. Zavedením výchozí značky se posílila statičnost prostředí krokování.

PÍSEMNÝ ZÁPIS KROKOVÁNÍ

Když už ve třídě krokujeme dva týdny, stávají se povely, které vymýšlí žáci sami, dosti složité. Vznikne potřeba nějak si povely zaznamenat. (Totéž děláme i u jiných nestálých čísel v životě kolem nás: hodiny odbíjí devátou, ale ručičky na ciferníku tuto skutečnost ještě aspoň nějaký čas uchovávají; v utkání kopané padnou tři góly a tabule nad hřištěm tuto informaci uchovává.)

Zapsat krokování znamená vytvořit vhodný jazyk. Žáci nejprve povely zapisují, pak si někteří vytvoří zkratky, například „3 dop 2 doz“ znamená „3 kroky dopředu, pak 2 kroky dozadu“. Po jisté době učitel, jakoby mimoděk, si na tabuli zaznamená nějaký povel a použije k tomu šipky. Více žáků jazyk šipek pochopí a někteří jej začnou ihned používat. Po jisté době tento jazyk používá (skoro) celé třída. V jazyce šipek se povel:

„Adame, pět kroků, začni teď!“ zapíše: A $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$ a povel: „Evo, tři kroky, pak dva kroky, začni teď!“ zapíšeme takto: E $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\rightarrow\rightarrow}$.

V tomto jazyce pak tři úlohy triády (2,3,5) mají následující zápis:
úloha $3 + 2 = ?$ je zapsána vztahem $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\rightarrow\rightarrow} = \boxed{\underline{\qquad\qquad}}$,
úloha $3 + ? = 5$ je zapsána vztahem $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\underline{\qquad}} = \boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$ a
úloha $? + 2 = 5$ je zapsána vztahem $\boxed{\underline{\qquad}}\boxed{\rightarrow\rightarrow} = \boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$.

Kroky dozadu zapisujeme šipkou směřující doleva. Například povel „Evo, pět kroků dopředu, pak dva kroky dozadu, začni teď!“ se zapíše $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\leftarrow\leftarrow}$. Rovnost $5 - 2 = $ $= 3$ je zapsána vztahem $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\leftarrow\leftarrow} = \boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$.

Vytvořením jazyka šipek se prostředí krokování dostalo na vyšší úroveň. Už to není čistě dynamické prostředí, ale dynamické prostředí se zápisem. Zkušenosti, které žáci získají při řešení úloh o krokování, a zejména poznání, že pomíjivé krokování lze převést do trvalého šipkového zápisu, je klíčem k didaktickému řešení problému, jak žáky naučit řešit úlohy s operátory změny. Například úlohu 14. Navíc se zde i záznamem připravuje pojem záporného čísla, protože povel $\boxed{\leftarrow\leftarrow}$, z něhož se později vytvoří číslo -2, je srozumitelný stejně jako povel $\boxed{\rightarrow\rightarrow}$, z něhož se později vytvoří číslo $+2$. Skutečnost, že chůze pozpátku není běžná, není překážkou k budování představy záporného čísla.

Podobně jako u předchozích prostředí i zde, u Krokování, je možné pokračovat i ve vyšších ročnících tvorbou náročnějších úloh.

ÚLOHA 16

Do daného vztahu doplňte k šipek tak, aby vztah byl pravdivý. Najděte všechna řešení:

(a) $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$, $k = 3$,
(b) $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}\boxed{\leftarrow\leftarrow}$, $k = 4$,
(c) $\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}\boxed{\leftarrow\leftarrow} = \boxed{\quad\quad\quad}$, $k = 5$.

Dříve, než uvedeme další a poslední úlohu, zavedeme nové značení. Tučným písmem budeme označovat jistý pevný soubor šipek. Například $\mathbf{a} = \boxed{\leftarrow\leftarrow}$ nebo $\mathbf{b} = \boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$ apod. Při tomto značení platí například $\boxed{\mathbf{a}}\boxed{\mathbf{b}} = \boxed{\rightarrow}$ nebo $\boxed{\mathbf{a}}\boxed{\mathbf{a}}\boxed{\mathbf{b}} = \boxed{\leftarrow}$.

ÚLOHA 17

Najděte soubor šipek *x* a soubor šipek *y* tak, aby bylo:

(a) $\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\leftarrow}$ a současně $\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\rightarrow}$
(b) $\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\leftarrow}$ a současně $\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\boxed{\mathbf{x}} = \boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow}$

ZÁVĚR

Výsledky výzkumu, které jsme výše uvedli, nelze považovat za definitivní, protože výzkum stále probíhá a každý měsíc přinese nová zjištění. Problematiku konzultujeme s učiteli z praxe a jejich postřehy, náměty i kritické připomínky jsou cenným příspěvkem k výzkumu. Jsou to zejména kolegyně Jitka Michnová, ZŠ Neratovice, a Klára Nejedlá, ZŠ Vodičkova, Praha, které naší spolupráci věnovaly již mnoho času i energie, za což jim děkujeme. Uvítáme i další spolupracovníky z řad učitelů prvního stupně.

LITERATURA

[1] HEJNÝ, M., KUŘINA,F. *Dítě, škola a matematika*, Praha, Portál 2001.

[2] REPÁŠ,V., ČERNEK, P., PYTLOVÁ, Z., VOJTELA, I. *Matematika pre 5. ročník základních škol (Mathematics for Grade 5)*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1997.

[3] SLEZÁKOVÁ, J. Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (eds), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Srní, 2006, s. 253–258.

[4] JIROTKOVÁ, D. Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5-8 let.In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (eds), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Srní, 2006, s. 143–149.

[5] RUPPELDTOVÁ, J. Interpretačná dominanta riešenia slovnej úlohy. In *Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy*, Olomouc 2006, s. 212–217.

[6] KUBÍNOVÁ, M. a STEHLÍKOVÁ, N. Žákovské projekty jako prostředek pro aktivizaci žáků. HEJNÝ, M. a kol. (Eds.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10-15 let*. Litomyšl: MPS JČMF, 2002, s. 71–78.

VZNIK ALGEBRAICKEJ SYMBOLIKY

LADISLAV KVASZ[1]

Vznik súčasnej algebraickej symboliky predstavuje zložitý proces tiahnuci sa mnohými storočiami. Pri jeho skúmaní si budeme všímať niekoľko aspektov, ktoré sú dôležité aj z hľadiska didaktiky matematiky:

1. Aritmetika mocnín – spôsob, ako matematici označovali jednotlivé mocniny neznámej. Pre nižšie mocniny spravidla používali úplne odlišné slová (napr. al-Chwárizmí používal *šai*, *mál* a *káb*) ale označenie vyšších mocnín neznámej už vytvárali pomocou pravidiel. Naša symbolika označujúca stupeň mocniny pravým horným indexom (päťka v x^5), pričom postupuje rovnakým princípom pre nižšie aj pre vyššie mocniny, pochádza až od Descarta.

2. Identita neznámej – pokiaľ sa rôzne mocniny tej istej neznámej označujú rôznymi slovami (ako napríklad *šai*, *mál* a *káb*), pričom nič nenaznačuje, že ide o mocniny tej istej neznámej, je identita neznámej daná len implicitne. To znamená, že vieme, že keď je *šai* 7, je *mál* 49. Symbolika však túto informáciu nie je schopná explicitne vyjadriť. Preto sa takáto symbolika hodí len na rovnice s jednou neznámou. Idea, že by symbolika okrem stupňa mocniny neznámej, mala explicitne označovať aj jej identitu (písmeno x v x^5), pochádza až od Viéta.

3. Odlíšenie neznámych a parametrov – teda idea, že aj koeficienty rovníc možno označiť písmenami, a teda je možné riešenie rovnice zapísať vo všeobecnom tvare, je tiež neskorá, pochádza až od Viéta.

4. Zavedenie znakov pre operácie – spočiatku sa aritmetické operácie označovali písmenami (zväčša to boli prvé písmená slov, označujúcich príslušné operácie). To robilo

[1] Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky FMFI UK, Bratislava, KMDM PedF UK v Praze, kvasz@fmph.uniba.sk

symboliku dosť neprehľadnou. Preto sa pozvoľna presadzoval princíp, podľa ktorého písmená sú rezervované pre (rôzne) neznáme či parametre a operácie sa označujú pomocou špeciálnych typografických značiek ako $+$ a podobne. Z tohto hľadiska je pozoruhodný osud znaku pre odmocninu, ktorý zaviedol Regiomontanus v tvare veľkého R od slova radix. Michael Stifel prešiel k malému r, pod ktoré písal písmeno označujúce, o ktorú odmocninu ide. Náš symbol pre odmocniny, označujúci rád odmocniny ľavým horným indexom je až od Descarta.

PREHISTÓRIA ALGEBRY – DIOFANTOS Z ALEXANDRIE

Diofantos z Alexandrie žil okolo roku 250 nášho letopočtu a napísal dielo *Aritmetika*, ktoré pozostávalo z 13 kníh. V arabskom preklade sa dochovalo prvých 7 kníh, z Byzancie sa dochovalo 6 kníh, a to prvé tri a tri neskoršie. V súčasnosti je tak z pôvodných 13 kníh známych 10. U Diofanta sa stretáme s prvým variantom symboliky. Diofantos zavádza *znak pre neznámu* a jej mocniny, *znak pre rovnosť* a *znak pre odčítanie*. Väčšinu symbolov tvoria skratky zodpovedajúce prvým písmenám gréckych termínov a používa princíp vytvárania vyšších mocnín skladaním (obr. 1).

jednotky	μονας	M
neznáma (x)	αριθμος	ς
x^2	δυναμις	Δ^{Y}
x^3	κυβος	K^{Y}
x^4	δυναμοδυναμις	$\Delta^{Y}\Delta$
x^5	δυναμοκυβος	ΔK^{Y}
x^6	κυβοκυβος	$K^{Y}K$
$1/x$	αριθμοστον	$ς^{x}$
$1/x^2$	δυναμοστον	Δ^{Yx}
=	ισος	ι^{σ}
–	λειπειν	Λ

Obr. 1

Existuje zásadný rozdiel medzi Diofantom a al-Chwárizmím. Al-Chwárizmí sa usiluje vypracovať *všeobecné algoritmické postupy* (táto črta jeho diela je tak markantná, že slovo algoritmus vzniklo skomolením jeho mena). Diofantos úlohy riešil pomocou trikov, *čo príklad, to trik*. Po všeobecnejších metódach nie je uňho ani stopy.

Úloha II, 8: „Rozlož daný štvorec na dva štvorce. Nech je dané rozložiť 16 na dva štvorce. Koreň jedného nech je x, koreň druhého nech je nejaký násobok x mínus toľko jednotiek, koľko je koreň čísla, ktoré máme rozložiť, nech je teda $2x - 4$. Potom budú oba štvorce x^2 respektíve $4x^2 + 16 - 16x$. Nakoniec chcem, aby ich súčet bol 16. Teda je $5x^2 + 16 - 16x = 16$, čo dáva $x = \frac{16}{5}$. Bude to štvorec jedného koreňa $\frac{16}{5}$, čo je $\frac{256}{25}$, a druhého koreňa $\frac{12}{5}$, teda $\frac{144}{25}$. Skúška je zrejmá.“

Bola to táto úloha, ktorá podnietila Fermata, aby na okraj svojej kópie Diofantovej *Aritmetiky* poznamenal, že podobné vyjadrenie pre vyššie mocniny, teda rovnosť $x^n + y^n = z^n$ pre $n > 2$, už nie je možné. Našiel pre to „skutočne čarovný dôkaz“, ale pre nedostatok miesta na okraji textu ho neuvedie. Odvtedy sa trápili generácie matematikov, aby ho našli, až sa to podarilo anglickému matematikovi Andrew Wilesovi. Otázka, či možno Diofantovu symboliku prehlásiť za zrod algebry, je problematická, lebo u Diofanta *chýbajú algebraické metódy uvažovania*. Pokiaľ algebru považujeme za súbor metód a nie za súbor trikov, tak asi nie.

AL-CHWÁRIZMÍ A RIEŠENIE ROVNÍC DRUHÉHO STUPŇA

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádžúsí žil približne v rokoch 780–850. O jeho živote nevieme skoro nič. Napísal knihu *Kniha o sčítaní a odčítaní podľa indického počtu* (Kitáb al-džam wa-t-tafrígh bi-hisáb al-Hind), kde je vyložená desiatková pozičná sústava s nulou a sú objasnené algoritmy pre aritmetické operácie v tejto sústave. Dochovala sa v latinskom preklade ako *Algorizmova kniha o praxi aritmetiky* (Libro algorismi de practica arismatrice) z polovice 12. storočia odkiaľ skomolením vzniklo slovo *algoritmus*. Kniha obsahuje opis matematických operácií podľa indického vzoru:

„Ak chceš pripočítať číslo k číslu alebo odčítať číslo od čísla, postav obe čísla do dvoch riadkov, t.j. jedno pod druhé, a nech je rád jednotiek pod rádom jednotiek a rád desiatok pod rádom desiatok. Ak chceš sčítať obe čísla, teda pridať jedno k druhému, tak pripočítaj každý rád k rádu rovnakého druhu, ktorý je nad ním, teda jednotky k jednotkám, desiatky k desiatkam. Ak v niektorom ráde, t.j. v ráde jednotiek alebo desiatok, alebo v niektorom inom sa zloží desať, napíš miesto nich jednotku a presuň ju do vyššieho rádu, teda ak máš v prvom ráde, ktorý je rádom jednotiek, desať, urob z nich jednotku a posuň ju do rádu desiatok, a tam bude označovať desať. Ak z čísla niečo ostalo, čo je menej ako desať, alebo ak je samo číslo menej ako desať, nechaj ho v tom istom ráde. . . “

Všeobecný algoritmus potom ilustruje na príklade: „Aby sa to dalo ľahšie pochopiť, je nutné predviesť to na príklade, a my to predvedieme troma spôsobmi, aby sa niekto nezamotal v niektorom spôsobe. Takže zoberme ľubovoľné číslo a povedzme napríklad: postavme šesťtisíc štyristo dvadsaťdva v svojich rádoch a povedzme, že od nich chceme odčítať tritisíc dvesto jedenásť. A tak postavíme v prvom ráde, ktorý sa nachádza vpravo, dva, v druhom dvadsať, v treťom štyristo, a v štvrtom šesťtisíc; postavíme rovnako aj to číslo ktoré chceme odčítať od neho, pod ním podobnými rádmi takto: postavíme jednotku pod dvojku v prvom ráde, . . . “

Al-Chwárizmí dôrazne upozorňuje, aby sa nezabudlo na zápis nuly, aby sa neplietol rád cifry. „Ak pri odčítaní nič neostane, napíš malý krúžok, aby miesto neostalo prázdne. Krúžok musí zaujať to miesto, lebo inak by bolo menej miest a napríklad druhé by sme považovali za prvé.“ Je však zaujímavé, že *nulu nepovažuje za cifru*, lebo v texte stále hovorí o zápise čísel pomocou deviatich znakov. Nula je iba akási značka, podobne ako desatinná čiarka.

Al-Chwárizmí napísal aj knihu *Krátka kniha o počte algebry a al-muqábaly* (Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala). Na tejto knihe je pozoruhodné, že nielenže *nepoužíva symboliku*, ale nepoužíva dokonca ani znaky na označenie čísel a úplne všetko vyjadruje slovne. Pre mocniny neznámej má termíny x – *šai* (vec), x^2 – *mál* (majetok), x^3 – *káb* (kocka), x^4 je *málmál*, x^5 je *kábmál* . . .

Prv ako sa pustil do riešenia úloh, najprv „rovnicu“ previedol na kanonický tvar, v ktorom vystupovali len kladné koeficienty a pri najvyššej mocnine bola jednotka. Aby to dosiahol, používal operácie:

al-džabr – ak na jednej strane rovnice vystupujú členy, ktoré treba ubrať, tak sa k obom stranám pripočíta zodpovedajúca hodnota

al-muqábala – ak vystupujú na oboch stranách rovnaké mocniny, odčíta sa menší člen na jednej strane od väčšieho na druhej

al-radd – ak je koeficient pri najvyššej mocnine rôzny od jednotky, tak sa ním vydelí celá rovnica

Názov operácie *al-džabr*, ktorá je v titule traktáte na prvom mieste, sa onedlho začal používať na označenie celej náuky o rovniciach. V Európe sa slovo algebra ako názov vedy objavuje už v 14. storočí. Pri preberaní algebraickej terminológie od Arabov boli arabské názvy vyjadrené ich latinskými ekvivalentmi, teda *res* pre *šai* (vec), *census* pre *mál* (majetok) a *cubus* pre *káb* (kocku). Táto terminológia sa objavuje v prvých talianskych pojednaniach o algebre zo 14. storočia.

Čo je však na al-Chwárizmího prístupe zaujímavé, je, že po tom, ako slovne uvedie formulu na riešenie rovnice, *geometricky dokazuje jej správnosť*. Prax dokazovať algebraické formuly pomocou geometrie sa zachovala až po Cardana v polovici 16. storočia, ktorý podobne dokazuje svoje formuly na riešenie rovníc tretieho stupňa.

Al-Chwárizmího postup si ukážeme na príklade rovnice $x^2 + 10x = 39$, ktorú píše ako „štvorec a desať jeho koreňov sa rovná tridsaťdeväť“. Jej riešenie je: „Zober polovicu počtu koreňov, to jest päť, a vynásob ju samu sebou, dostaneš dvadsaťpäť. Pridaj to k tridsaťdeväť, dostaneš šesťdesiatštyri. Zober druhú odmocninu, alebo osem, a odčítaj od nej polovicu počtu koreňov, čo je päť. Výsledok tri je hľadaný koreň.“

Tento postup sa vyznačuje *explicitnou všeobecnosťou*. Pojmy *šai*, *mál* a *káb* umožňujú dať postupu všeobecný charakter. Ďalší príklad uvedieme na ilustráciu algebraických úprav: „Desať som rozdelil na dve časti a túto som delil tou a tú touto, súčet toho je dva dihramy a šestina.“

V našej symbolike ide o sústavu

$$u + v = 10, \qquad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2\frac{1}{6},$$

ktorú substitúciou $v = x$ a $u = 10 - x$ možno dosadením do druhej rovnice previesť na:

$$\begin{aligned} 100 + 2x^2 - 20x &= 21\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6}x^2 && \textit{al-džabr} \\ 100 + 4\frac{1}{6}x^2 &= 41\frac{2}{3}x && \textit{al-radd} \\ 24 + x^2 &= 10x \end{aligned}$$

Al-Chwárizmí robí presne tieto kroky, ale v čisto verbálnej podobe: „To bude dvadsať jedna vecí a dve tretiny veci bez dvoch majetkov a jednej šestiny, rovné sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí. *Al-džabruj* to a pridaj dva majetky a jednu šestinu k sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí a pridaj tých od sta a dvoch majetkov ubraných dvadsať vecí k dvadsať jednej veci a dvom tretinám veci. Tak si dostal sto a štyri majetky a šestinu majetku rovné štyridsať jednej veci a dvom tretinám veci. *Al-radduj* to . . . “

Recepcia arabskej algebry v Európe

Znovudobytie (reconquista) Španielska v 11. a 12. storočí a najmä dobytie Toleda r. 1085 otvorilo kresťanom možnosť spoznať grécku ako aj arabskú matematiku z arabských rukopisov. 12. storočie sa označuje ako *storočie prekladania*. V jeho priebehu boli z arabčiny preložené Euklidove *Základy* (1142), Apolloniove *Conica*, Ptolemaiov *Almagest*, al-Chwárizmího traktáty o aritmetike a algebre (1145), ako aj ďalšie diela z optiky, geometrie, astronómie a trigonometrie. Roku 1269 bol vydaný úplný Archimedov korpus v latinčine. Kvalita týchto prekladov bola pomerne zlá, lebo prekladatelia nerozumeli oblasti, o ktorej pojednávalo prekladané dielo.

Johann Müller Regiomontanus (1436–1476)

Regiomontanus študoval na univerzite v Lipsku a v rokoch 1450–1457 vo Viedni. Tu roku 1456 pozoroval kométu, ktorá bola neskôr identifikovaná ako Halleyova kométa. Regiomontanus podnikol cestu po Taliansku – spoznal Rím, Bolognu, Ravennu, Padovu a ďalšie mestá, kde sa zoznámil s klasickými dielami gréckej matematiky a astronómie. Roku 1467 po pobyte v Ostrihome u arcibiskupa prichádza do Bratislavy, kde sa zúčastnil na otvorení Academie Istropolitana. V rokoch 1468–1471 pôsobil ako knihovník na dvore Mateja Korvína, kde opatroval grécke rukopisy kráľovskej knižnice.

Regiomontanus zaviedol symbolické označenie pre *odmocninu*, a vypracoval pravidlá na počítanie s odmocninami. Z algebraickej operácie odmocňovania sa stáva odmocnina.

Toto malo veľký význam pre ďalší rozvoj algebry. Regiomontanus označuje odmocninu *R* od latinského *radix* (koreň).

$\sqrt{8}$ písal ako R de 8 $\sqrt[3]{7}$ písal ako R cubica de 7

V Regiomontanových dopisoch z r. 1463 je doložené jedno z prvých použití *algebraickej symboliky* v dejinách európskej matematiky:

250^r ig 25^c —— 2^c et 100 ig 20^r
$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$

Neznámu označuje *r* od latinského *res* (vec), druhú mocninu *c* od latinského *census* (odhad majetku). Neznámu píše ako *horný index*. Operácie vypisuje slovne, kým pre znak rovnosti používa vodorovnú čiaru, ktorá môže symbolizovať rovnováhu ramien váh.

NICOLAS CHUQUET (1445–1500)

Nicolas Chuquet roku 1484 dokončil svoju *De triparti en la science des nombres* (Veda o číslach v troch častiach). V jej úvode vysvetľuje aritmetické operácie. Pre číselné úkony používa slová *plus* (viac), *moins* (menej), *multiplier* (násobiť) a *partir* (deliť). Prvé dve operácie označuje symbolmi $\tilde{p}$ a $\tilde{m}$. Na jeho symbolike je zaujímavé, že pre neznámu nepoužíva žiaden symbol, iba jej stupeň udáva indexom pri koeficiente. Tak 4^1 znamená $4x$, 4^2 označuje $4x^2$ a podobne. Konštantu v rovnici označuje indexom 0, takže číslo 5 píše ako 5^0.

$6x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = -5$
$6^3\,\tilde{p}\,4^2\,\tilde{m}\,2^1\,\tilde{p}\,3^0$ egaulx $\tilde{m}5^0$

Na označenie koreňa používa písmeno *R*, ako Regiomontanus. Tak $R^2 30$ znamená $\sqrt{30}$. Používal aj záporné odmocniny.

$42x^2 : 6x^5 = 7x^{-3}$
$42^2 : 6^5$ egaulx $7^{\tilde{m}3}$

Namiesto zátvoriek používal podčiarkovanie, takže tvrdil, že
$R^2\ \underline{14\ \tilde{p}R^2 180}$ egaulx 3 $\tilde{p}$ R^{2}5 čiže $\sqrt{14 + \sqrt{180}} = 3 + \sqrt{5}$,
o čom sa možno presvedčiť umocnením.

LUCA PACIOLI (1445–1517)

Pacioliho hlavné dielo *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Zhrnutie aritmetiky, geometrie, pomerov a úmerností) vyšlo roku 1494 v Benátkach. Symbolika sa zhoduje s Chuquetovou, s tým rozdielom, že používa písmeno *c* od latinského *cosa* (vec) pre neznámu, a namiesto podčiarkovania označuje členy stojace pod spoločnou odmocninou písmenom *V* od *universale*. Teda

RV 35 $\tilde{m}$ R 50 $\sqrt{35 - \sqrt{50}}$

Algebru nazval *regula della cosa* (pravidlo veci). Preto sa algebraická škola, ktorá preberá jeho symboliku, nazýva *COSSISTI*. Rozšírená bola v Nemecku v 16. storočí.

Johannes Widmann (1462–1498)

Chebský rodák, pôsobil na univerzite v Lipsku. Roku *1489* vydal *Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmanschaft* (Rýchle a pekné počítanie pre každého kupca). V nej sú prvýkrát vytlačené symboly $+$ a $-$, ktorými nahradil Chuquetove $\tilde{p}$ a $\tilde{m}$. Tým sprehľadnil algebraickú symboliku, lebo *písmená oslobodil od úlohy znakov operácií*. Okrem toho sprehľadnil zápis mocnín:

x	...	*r* (res, vec)	x^2	...	*z* (zenus, majetok)	x^3	...	*c* (cubus, kocka)
x^4	...	*zz*	x^5	...	*rzz*	x^6	...	*zzz*
x^7	...	*czz*	x^8	...	*zzzz*	x^9	...	*czzz*

Algebru nazýva *Regel Algebre oder Cosse*, preberá Pacioliho chápanie algebry ako pravidiel narábania s vecami: *regula della cosa*.

Michael Stifel (1487–1567)

Vyštudoval teológiu a stal sa kazateľom. Spočiatku ho zaujala číselná mystika. V nej pokročil tak ďaleko, že na 19. 10. 1533 predpovedal koniec sveta. To, že sa predpoveď nesplnila, ho natoľko znechutilo, že zanevrel na číselnú mystiku, zanechal kázanie a pôsobil ako profesor matematiky v Jene.

Napísal knihu *Arithmetica integra* (Úplná aritmetika), ktorá vyšla roku *1544*. Stifel uvádza pravidlá na počítanie so zápornými číslami. *Záporné čísla interpretuje ako čísla menšie než nula* a preto -4 píše ako $0-4$. Vedľa znakov $+$ a $-$ zavádza *m* pre násobenie (lat. *multiplicatio*) a *d* pre delenie (*divisio*). Mocniny neznámej označuje podobne ako Widmann, ale používa kratšie vyjadrenia: *R (res* – veľké písmeno má preto, lebo *malé používa na odmocninu), z (zensus), c (cubus), zz (zensi-zensus), zc (zensi-cubus), cc (cubi-cubus).* Odmocňovanie označuje štylizovaným r (z lat. *radix* – koreň) v tvare $\surd$. Pri druhej odmocnine písal $\sqrt{z}$, pri tretej$\sqrt{c}$, pri štvrtej$\sqrt{zz}$.

$$3x^2 + 4x - \sqrt{5}x^3 + \sqrt[3]{325} = 0$$

$$3z + 4R - \sqrt{z}5c + \sqrt{c}325 \quad \text{equatur} \quad 0$$

Stifel skôr než sa pustil do riešenia rovnice, najprv preniesol všetky členy na jednu stranu. Tak vlastne *spojil všetkých 5 typov kvadratických rovníc do jedinej všeobecnej podoby vďaka tomu, že pripustil, aby koeficienty mohli byť aj záporné.*

Cardanove formuly pre riešenie rovnice tretieho stupňa

Girolamo Cardano (1501–1576)

Roku *1545* vychádza v Norimbergu Cardanove dielo *Ars Magna sive de Regulis Algebracis* (Veľké umenie čiže o zákonoch algebry). Táto kniha obsahuje prvý výsledok európskej matematiky, ktorý prekračuje rámec znalostí antiky, riešenie rovníc tretieho stupňa. Ide o rovnicu:

„De cubo et rebus aequalibus numero“

a spomínané riešenie má tvar:

„Umocni na tretiu jednu tretinu počtu vecí, pridaj k tomu štvorec polovice čísla rovnice a vypočítaj druhú odmocninu z tohto celku. Toto zduplikuj a k jednej z dvoch pridaj polovicu čísla rovnice a od druhej odčítaj polovicu toho istého. Potom budeš mať *binomium* a jeho *apotome*. Potom odčítaj tretiu odmocninu apotome od tretej odmocniny binomia, zvyšok, ktorý ostane, je vec.“

Cardano pravidlo ilustruje na rovnici $x^3 + 6x = 20$, ktorej riešenie udáva ako:

„RV: cub: R: 108 p: 10 m: RV: cub: R: 108 m: 10“

kde RV znamená radix universalis. V našej symbolike to je

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

NICCOLO FONTANA-TARTAGLIA (1500–1557)

Uvedené pravidlo však neobjavil Cardano ale Tartaglia. Ukážeme si postup, ako asi mohol Tartablia nájsť riešenie rovnice typu

$$x^3 + bx = c.$$

Pritom koeficienty boli konkrétne kladné čísla. My si ich zapíšeme pomocou premenných preto, aby lepšie vynikla štruktúra postupu. Po viacerých pokusoch asi dospel k hypotéze, že riešenie bude tvaru

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}.$$

Keď tento výraz umocníme na tretiu, dostaneme

$$x^3 = u - 3\sqrt[3]{u^2v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v.$$

Dva prostredné členy možno prepísať do tvaru

$$-3\sqrt[3]{u^2v} + 3\sqrt[3]{uv^2} = -3\sqrt[3]{uv}x,$$

a teda pre x^3 dostávame vyjadrenie

$$x^3 = u - 3\sqrt[3]{uv}x - v,$$

$$x^3 + 3\sqrt[3]{uv}x = u - v.$$

Keď tento vzťah porovnáme s pôvodnou rovnicou, dostávame sústavu

$$b = 3\sqrt[3]{uv}, \qquad c = u - v. \tag{1}$$

Z druhej rovnice si môžeme vyjadriť $v = u - c$, a dosadiť do prvej. Takto dostaneme

$$b^3 = 27u(u - c),$$

čo je kvadratická rovnica s neznámou u:

$$u^2 - uc - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0$$

Jej koreň dostaneme podľa známeho vzťahu v tvare

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^3}.$$

Neznámu v dostaneme v tvare

$$v = u - c = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^3}.$$

Riešenie rovnice $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ je potom

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^3}}.$$

Vidíme, že celý postup je založený na tom, že „uhádneme“ *tvar riešenia* $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ a hodnoty u a v určíme dodatočne. Tu vidíme výhodu jazyka algebry, ktorý umožňuje tipovať, že výsledok bude mať určitý tvar (bude rozdielom dvoch tretích odmocnín), a keďže algebra je *„regula della cosa“*, môžeme s týmto vyjadrením ďalej pracovať, až kým sa nám nepodarí určiť jeho konkrétnu hodnotu.

Vývin algebraickej symboliky od Viéta po Descarta

Moderná algebraická symbolika sa zrodila v dvoch variantoch. Prvý pochádzal od Françoisa Viéta a bol založený na pojme rozmernej veličiny. Dnes sa s ním môžeme stretnúť na stránkach učebníc fyziky. Druhý variant algebraickej symboliky pochádza od Reného Descarta a zakladá sa na pojme bezrozmernej veličiny.

François Viéte (1540–1603)

Jeho matematické idey zhŕňa dielo *In Artem Analyticam Isagoge* (Úvod do analytického umenia). Slovo analýza v tej dobe označovalo algebru. Knihu vydáva po častiach od roku 1591. Podáva v nej prehľad súvekej algebry. Jeho cieľom bolo *zjednotiť* rôzne postupy, ktoré sa používali pri riešení rovníc. Algebra tak, ako ju sformoval Cardano, spočívala v súbore trikov, ktoré umožňovali riešiť jednotlivé typy rovníc. Triky boli sformulované vo vetách prirodzeného jazyka. Chýbalo však porozumenie pre to, čo sa pri týchto trikoch deje.

Viéteovou hlavnou inováciou bolo, že *zaviedol rozlíšenie neznámej a parametra*. Aj koeficienty rovníc začal zapisovať pomocou písmen. Pre *neznáme* používal veľké samohlásky A, E, I, O, U. Na označenie *koeficientov* rovnice používal spoluhlásky B, C, D, F atď. Každá veličina mala rozmer. Zvlášť uvádza rozmery mocnín *neznámej*: 1-*longitudo*, 2-*planum*, 3-*solidum*, 4-*plano-planum*, 5-*plano-solidum*, 6-*solido-solidum*, 7-*plano-plano-solidum*, 8-*plano-solido-solidum*, 9-*solido-solido-solidum*; zvlášť *koeficientov*: 1-*latus*, 2-*quadratum*, 3-*cubus*, 4-*quadrato-quadratum*, 5-*quadrato-cubus*, 6-*cubo-cubus*, 7-*quadrato-quadrato-cubus*, 8-*quadrato-cubo-cubus*, 9-*cubo-cubo-cubus*. Explicitne uvádza rozmery iba po 9, ale poznamenáva, že v príslušnom rade možno bez obmedzenia pokračovať.

Viéte *interpretuje svoje písmená ako veličiny*. Rozmer každej veličiny písal slovne za jej symbolom, napríklad A *planum* bola neznáma rozmeru dva, kým B *cubus* bol parameter rozmeru tri. Sčítať a odčítať bolo možné iba veličiny rovnakej dimenzie, pričom výsledok bola veličina rovnakého rozmeru ako súčinitele. Pravidlá pre násobenie a delenie obsahovali aj zákony o rozmeroch, ako napríklad

longitudo krát *longitudo* dáva *planum*
solidum krát *plano-solidum* dáva *plano-solido-solidum*

Keďže Viéte nepripúšťal záporné mocniny veličín, pri delení bolo ešte treba dbať na to, aby bola dimenzia čitateľa väčšia než dimenzia menovateľa. Aj keď je Viéteova symbolika komplikovaná, urobil kvalitatívny krok vpred. Vytvoril *univerzálny jazyk na manipuláciu s výrazmi*. Možno povedať, že tu sa rodí algebra v modernom chápaní. Viéte si bol významu svojho objavu plne vedomý. Hovorí, že vytvoril novú vedu, umožňujúcu matematické objavy. Ako ukážku takéhoto objavu si ukážeme jeden príklad:

$$\text{Oportet } \frac{\textit{Aplano}}{\textit{Bquadratum}} \text{ addere } \frac{\textit{Zquadratum}}{\textit{Gquadratum}}.$$

$$\text{Summa erit } \frac{\textit{GinA} + \textit{BinZ}}{\textit{BinG}}.$$

Síce toto odvodenie nepôsobí impozantne, ale je to *prvý formálny zápis všeobecného vzťahu v dejinách matematiky*. Až od Viéta je možné hovoriť o vzorcoch v matematike, o formulách vyjadrujúcich riešenie nejakého problému. Nová symbolika umožňovala vytvoriť *všeobecnú metódu na riešenie všetkých problémov*. Pozostávala z troch krokov:

1. Všetky veličiny úlohy, teda tie, ktoré poznáme, aj tie, ktoré nepoznáme, treba označiť písmenami a ich vzťahy treba vyjadriť pomocou rovníc.

2. Overiť správnosť vyjadrenia úlohy pomocou rovníc.

3. Príslušné rovnice vyriešiť a nájsť vyjadrenie neznámej.

Overenie správnosti vyjadrenia úlohy spočívalo v kontrole toho, či príslušné rovnice spĺňajú princíp homogenity. Svoju knihu končí Viéte optimistickým vyhlásením o svojom analytickom umení: *Žiaden problém neostane nevyriešený*.

Viétov systém mal aj viaceré nedostatky. V prvom rade je to *slovné písanie dimenzie veličín*. To malo za následok, že nepoznal zlomkové ani záporné mocniny veličín, čo ho nútilo ku komplikovanému zápisu takýchto prípadov. Ďalej, keďže jeho písmená nereprezentovali čísla ale dimenzionálne veličiny, sú v jeho systéme *nemysliteľné záporné alebo komplexné riešenia*. Preto úlohy, ktoré vedú k takýmto riešeniam, musí obchádzať.

RENÉ DESCARTES (1594–1650)

Roku 1637 vydáva *Discours de la méthode*, ktorá obsahuje tri dodatky, *Dioptriku, Geometriu* a *Meteory*, v ktorých Descartes ilustruje svoju filozofickú metódu. Z hľadiska dejín algebry má prvoradý význam *Geometria*. Descartes ukazuje, že problémy, ktoré možno skonštruovať pomocou kružítka a pravítka, sú ekvivalentné rovniciam druhého stupňa. Aby to ukázal, vysvetľuje, ako sa aritmetický kalkul vzťahuje k operáciám geometrie. Pritom *prekonal bariéru rozmernosti*, ktorá obmedzovala dovtedajšiu geometriu. Od antiky až po Viéta bolo násobenie dvoch úsečiek interpretované ako plocha a násobenie troch úsečiek ako objem. Ale neexistovala žiadna interpretácia pre súčin štyroch a viac úsečiek. Descartes *súčin úsečiek dĺžky a a b interpretuje ako úsečku dĺžky ab*. Všetky mocniny úsečky sú opäť úsečkou, a preto ich možno porovnávať. Takto Descartes prekonáva komplikácie, ktoré pre Viéteov systém znamenal princíp homogenity. Nepotreboval, aby koeficienty dopĺňali neznámu vždy na dimenziu najvyššieho stupňa, a mohol aj voľne deliť a odmocňovať. Až od Descarta môžeme písať rovnice v kanonickom tvare

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Takáto formula bola pred Descartom nemysliteľná. Miešať dĺžky, plochy, objemy s veličinami vyššej dimenzie nebolo možné. Až Descartes tým, že všetky členy interpretoval ako úsečky, mohol niečo takéhoto napísať. Pritom treba zdôrazniť, že premenné nepredstavujú čísla ale úsečky, pretože pojem čísla bol v tej dobe príliš obmedzený.

Descartova symbolika je podstatne dokonalejšia než Viéteova. Parametre úlohy označuje *malými písmenami zo začiatku abecedy* (a, b, c), kým neznáme *malými písmenami z jej konca* (x, y, z), a táto konvencia sa udržala dodnes. Mocniny píše nie pomocou slov, ako to robil Viéte, ale pomocou horného indexu, ako sa to robí podnes. Výnimku tvorí iba druhá mocnina, ktorú Descartes písal ako xx. Všetky písmená, ktoré používal, predstavovali iba kladné veličiny. Na označenie záporných veličín písal znamienko mínus pred písmeno. Od Descarta pochádza aj zvyk preniesť všetky členy rovnice na ľavú stranu, a na pravú stranu písať len nulu. Descartes je prvý matematik, pri čítaní ktorého nemáme problémy s pochopením symboliky. Tá je takmer zhodná s dnešnou symbolikou.

ZÁVER

Už aj na takto stručnom náčrte histórie (podrobnejšie údaje a mnoho ďalšieho materiálu možno nájsť v literatúre uvedenej na konci príspevku) vidno, ako mnohovrstvová štruktúra je skondenzovaná v našej algebraickej symbolike. Celý rad rôznorodých konvencií, z ktorých každý má vlastnú sémantiku a intuitívne zázemie, sa zhustí do jednotného kalkulu. Aby sa však tak rôznorodé idey mohli spojiť do jednotnej štruktúry, muselo najprv dôjsť k vyprázdneniu ich obsahu. Lebo len v podobe prázdnych formálnych *schém* bolo možné spojiť idey, ktoré na intuitívnej úrovni sú často nezlúčiteľné. Napríklad Viéte mal úplne jasnú sémantickú predstavu o rozmeroch neznámej, ale kvôli tomu, aby sa dali sčítavať neznáme rôzneho stupňa (vo Viétovom chápaní sčítavať objemy s dĺžkami) a tak dospieť k pojmu polynómu, bolo treba sémantiku mocnín opustiť a zachovať z nej iba vyprázdnenú schému aritmetiky mocnín.

Toto je, zdá sa, jedným z hlavných problémov v didaktike algebry. Na jednej strane pri výuke algebry musíme žiakom sprostredkovať názorné predstavy a sémantické porozumenie algebraickým pojmom a symbolom. Ale na druhej strane im musíme umožniť sa od tejto sémantiky odpútať, aby dokázali rôzne často protichodné prvky symboliky spojiť do jedného celku. Preto v algebre, na rozdiel od geometrie, hrá rozhodujúcu úlohu práve budovanie schém, t.j. štruktúr, ktoré sú nezávislé od konkrétneho sémantického ukotvenia a dokážu „plávať" v rôznych sémantikách a tieto zjednocovať. Zdá sa, že toto oslobodzovanie sa od sémantiky, ktoré na dejinách algebry možno pekne sledovať, je fenomén, ktorého porozumenie je nosné aj z hľadiska didaktiky.

História matematiky môže učiteľovi sprostredkovať plastický obraz o ideách tvoriacich základ algebraickej symboliky, pretože jednotlivé idey, ktoré sú v zrelej algebraickej symbolike často skryté, umožňuje nahliadnuť v čistote (spomeňme Chuquetovu symboliku, v ktorej je implicitnosť identity neznámej privedená do extrému, keď Chuquet vlastne žiadne symboly pre neznáme nepíše). Keď u žiaka narazí na problémy s porozumením symboliky, história môže poskytnúť vodidlá, kde treba hľadať korene neporozumenia. Preto by asi história matematiky mohla didaktike poskytnúť prehľad o základných ideách a modeloch, z ktorých bol vydestilovaný materiál tvoriaci učivo.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok je súčasť grantového projektu VEGA číslo 1/3621/06 *Historické a filozofické aspekty exaktných disciplín*.

LITERATURA

[1] Baštinec, J. a Kubištová, Z. (1998). Muhammad Ibn Músa al-Chorezmi. In *Matematika v proměnách věků*. (J. Bečvář a E. Fuchs, editori), Prometheus Praha, s. 125–141.

[2] Bečvář, J. (1999). Algebra v 16. a 17. století. In *Matematika v 16. a 17. století*. (J. Bečvář a E. Fuchs, editori), Prometheus, Praha, s. 161–237.

[3] Cardano, G. (1545). *Ars Magna or the Rules of Algebra*. MIT Press (1968).

[4] Descartes, R. (1637). *Rassuždenie o metode s priloženijami dioptrika, meteory, geometria*. Izdatelstvo Akademii Nauk CCCP, 1953.

[5] Diofant Aleksandrijskij (250). *Arifmetika i Kniga o mnogougolńych čislach*. Preklad I. Veselovskovo, redakcia a komentár I. Bašmakovoj. Nauka, Moskva 1974.

[6] Fauvel, J. a Gray, J. (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. Macmillan, London.

[7] Juškevič, A. P. (1961). *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha 1977.

[8] Klein, J. (1934). *Greek Mathematical Tthought and the Origin of Algebra*. MIT Press 1968.

[9] Kvasz, L. (2000). Epistemologické aspekty dejín klasickej algebry. *Filozofia*, 2000/10, s. 788–808.

[10] Kvasz, L. (2005). Similarities and differences between the development of geometry and of algebra. In *Mathematical Reasoning and Heuristics*, (C. Cellucci a D. Gillies Editori), King's College Publications London, s. 25–47.

[11] Kvasz, L. (2006). History of Algebra and the Development of the Form of its Language. *Philosophia Mathematica*, Vol. 14, s. 287–317.

[12] Nikoforovskij, V. (1979). *Iz istorii algebry XVI i XVII veka*. Nauka, Moskva.

[13] Nikoforovskij, V. (1987). *V mire uravnenij*. Nauka, Moskva.

[14] Muchammad Ibn Musa al-Chorezmi (800). *Matematíčeskije traktaty*. Taškent 1983.

[15] Scholz, E. (ed., 1990). *Geschichte der Algebra*. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

[16] Schwarz, Š. (1968). *Základy náuky o riešení rovníc*. SAV Bratislava.

[17] Smith, D. (1929). *A Source book in Mathematics*. Dover, 1990.

[18] Struik, D. (1969). *A source book in mathematics*, 1200–1800. Harvard UP, Cambridge (Mass).

[19] Viéte, F. (1591). *Introduction to the Analytical Art*. In: Klein 1934, s. 313–353.

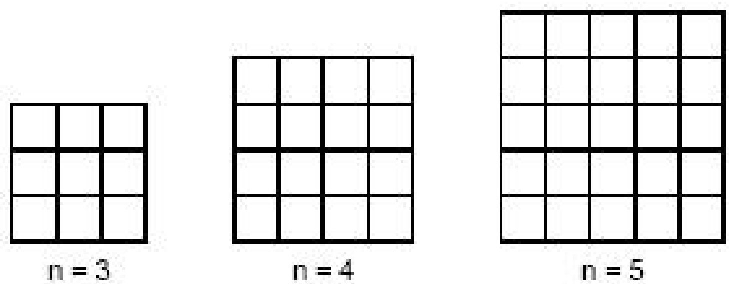
[20] Waerden, B. L. (1980). *A History of Algebra, from al-Khwarizmí to Emmy Noether*, Springer, Berlin.

Jednání v sekcích

EXPERIMENT V PROSTŘEDÍ ČTVERCOVÉ SÍTĚ

EVA BOMEROVÁ[1]

Základem mé diplomové práce bylo řešení úlohy z kombinatorické geometrie – určit počet čtverců s vrcholy v mřížových bodech čtvercové sítě uvnitř čtverce $n \times n$.



Obr. 1

Tuto úlohu lze dobře odstupňovat podle individuálních možností žáků, od zvětšování daného čtverce, přes třídění nalezených čtverců (dotýkajících se 0, 1, 2, 4 stran daného čtverce), hledání „šikmých“ čtverců a jejich třídění, až po pokusy o zobecnění a přechod k algebře. Tak, jak žáci nabývají nových poznatků a zkušeností v oblastech matematiky, může být tato úloha předkládána k zamyšlení od základní až po vysokou školu. V úloze je zcela zřejmý nenásilný, plynulý (a nutný) přechod od geometrie k aritmetice. Je názorným příkladem, jak jednotlivé obory matematiky spolu úzce souvisí. Nutí k zavádění systému, hledání pravidelností a zákonitostí, učí trpělivosti a v neposlední řadě poskytuje radost z objevů a nalezení souvislostí. Ani v nejmenším jsem však netušila, jak mocný nástroj pro studium procesů probíhajících ve vědomí žáků mám v ruce. O tom mě přesvědčily až uskutečněné experimenty. Před zahájením experimentu je nutno si položit základní otázky:

CO? Vytipování a formulování problému
KDO? Výběr žáků, kteří se experimentu zúčastní
KDE? Místo uskutečnění experimentu
KDY? Časový harmonogram

[1]ZŠ Dědina Praha 6, bomerova@centrum.cz

JAK? Konstruování nástroje, sloužícího k získání potřebných informací (formulace úlohy, způsob záznamu)

Cílem experimentů bylo hlubší porozumění myšlenkovému procesu žáků při řešení úlohy a tím i získání zkušeností, které lze zúročit v učitelské praxi. Stěžejní nebylo hledání chyb, ale otázka, proč žák postupoval právě takto. Druhým cílem bylo nabytí zkušeností s výzkumnou prací zaměřenou na zkoumání poznávacích procesů žáků a jejich využití k účinné didaktické aplikaci. Centrem mého zájmu bylo studium těchto fenoménů: způsob uchopování úlohy, forma písemné evidence objektů, objev objektů „posouvaných“ a objektů „šikmých“, volba systému posouvání, volba a případná změna strategie, vliv předchozí zkušenosti na následující případ, přechod od grafického záznamu k aritmetickému. Experimenty měly charakter řízeného rozhovoru a byly zaznamenávány na diktafon. Zúčastnilo se jich šest žáků (třetí, pátý a sedmý ročník ZŠ). Po zkušenostech s prvními nezdařenými experimenty jsem dospěla k zásadám, které jsem se snažila dodržet:

1. Poskytni žákovi dostatek času na přemýšlení i formulaci myšlenky, rušivě nezasahuj.
2. Neříkej mu, co má dělat, ale dávej impulsy, kterými podpoříš jeho aktivitu.
3. Když jeho slovům nebo záznamům nerozumíš, polož upřesňující otázku.
4. Snaž se o jednoznačnou a srozumitelnou formulaci otázek.
5. Ponech žákovi možnost volby.
6. Pochval žáka za nápaditou myšlenku i přesto, že jej tato zavede do slepé uličky. Pomoz mu však obrátit se správným směrem.
7. Nepodceňuj žáka.

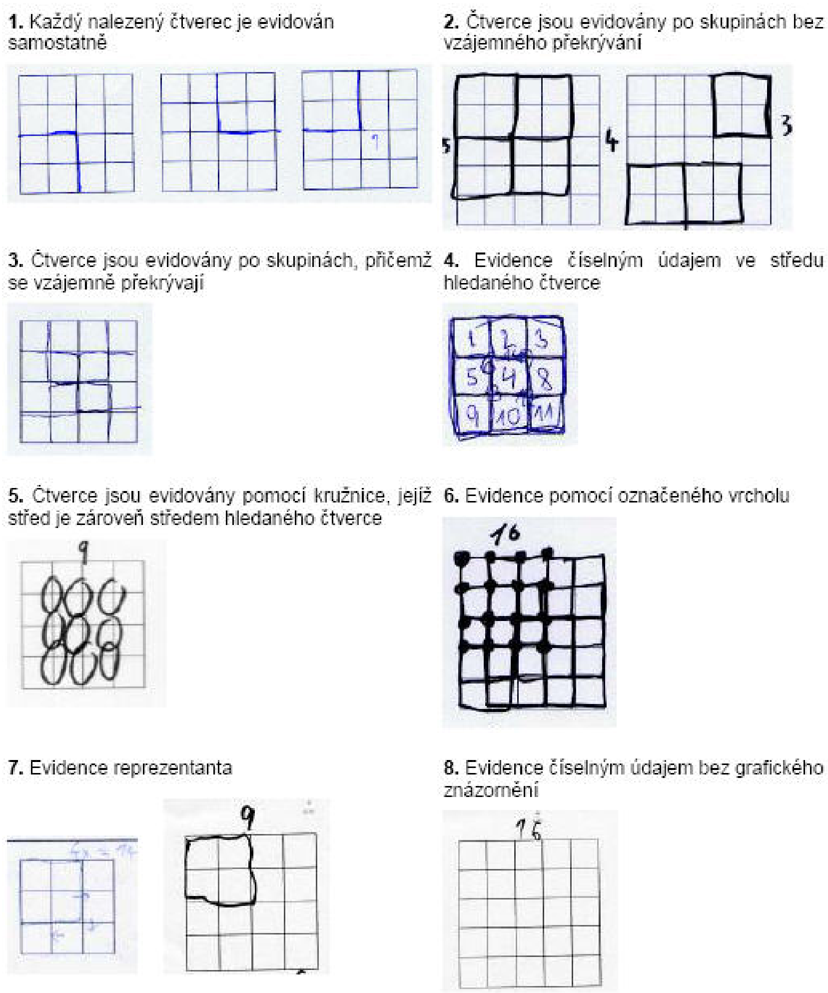
Zejména dodržení prvních bodů je značně obtížné. Jak rozpoznat, kdy žák ještě přemýšlí a kdy už očekává pomocnou ruku? Jak silný má být impuls k probuzení jeho aktivity? Problematika je o to složitější, že každý žák je osobnost a každý na podněty reaguje jinak, jak ostatně experimenty prokázaly. Žákům jsem nejprve předložila postupně čtverce o velikosti $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ spolu s pracovními listy umožňujícími libovolnou evidenci. Zejména u mladších dětí se projevilo zkratkovité uchopování úlohy – žák je přesvědčen, že schéma úlohy zná, že tedy není co uchopovat a že na položenou otázku zná odpověď.

Adam (8; 11, 3. ročník ZŠ)

08:00:00	Ex01:	Tady máš takovou úlohu (*předkládá čtverec* 3×3). Máš čtverec, který je rozdělený na malé čtverečky, a tvým úkolem je zjistit, kolik tam můžeš zakreslit čtverců, které mají vrcholy v těchto bodech (*ukazuje na mřížové body*). Ano? Takže hledáš čtverce a mají vrcholy – víš, co je vrchol čtverce?
08:00:38	Ad01:	(*Přikyvuje.*)
08:00:40	Ex02:	V těchto bodech, ano?

08:00:50 Ad02: Si to přečtu (*čte text zadání*). Já to nechápu.
08:00:57 Ex03: Co nechápeš?
08:00:59 Ad03: Tohlencto (*ukazuje na zadání*).
08:01:11 Ex04: Například tohle je čtverec (*ukazuje na levý horní jednotkový čtverec v zadání*).
08:01:16 Ad04: No.
08:01:18 Ex05: A hledáš všechny, které tam jsou. Kolik jich je?
08:01:20 Ad05: Ale to jsou tam všecky! A pořád jich je tam stejně, ne?
08:01:25 Ex06: No a kolik jich je?
08:01:28 Ad06: (*Rozhořčeně*) Devět!

U mladších žáků rovněž dominuje při řešení úlohy metoda mantinelů (jako první jsou evidovány mezní velikosti čtverců). Čtverce, které nemají stranu rovnoběžnou se stranou daného čtverce (šikmé), nebyly samostatně nalezeny, byl nutný impuls. Mladší žáci je vnímají jako kosočtverce. U všech žáků došlo nejčastěji k časové prodlevě při hledání objektů nové velikosti, které se v předchozí úloze nevyskytovaly. Nejefektivnější a z hlediska možného vzniku chyby bezpečný systém evidence odpovídá záznamu ve směru písma, tedy zleva doprava a shora dolů. Žáci použili nejrůznější formy evidence, projevil se vliv předchozí zkušenosti na následující případ (nepřehlednost nahradila přehlednější forma, záznam jednotlivých čtverců nahradil záznam číselný).



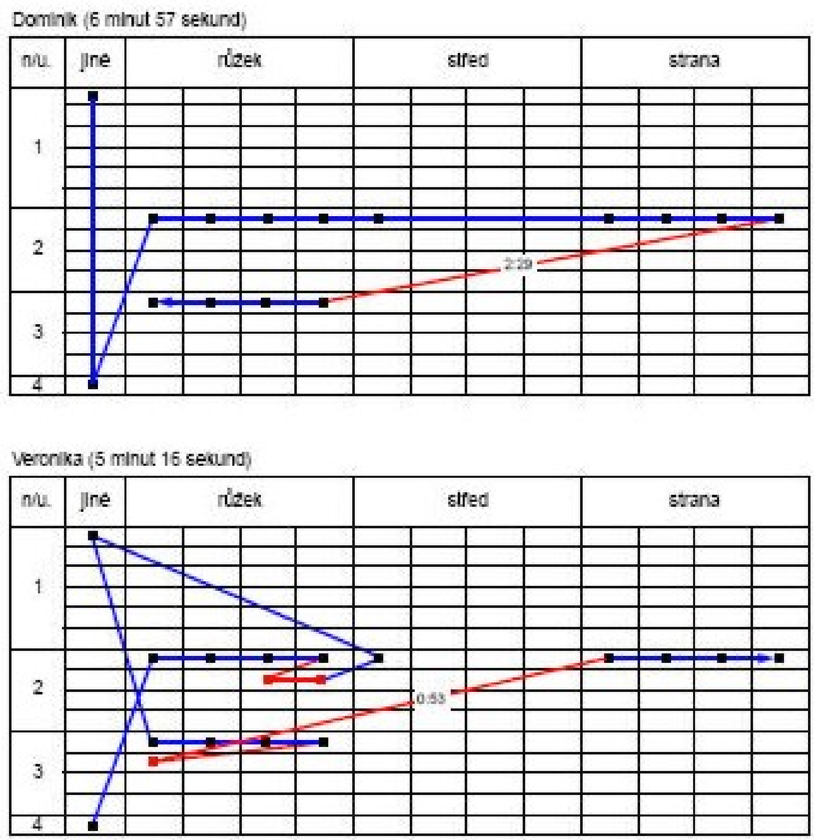
Obr. 2

Přechod od grafických záznamů k číselným činil vesměs žákům potíže. Mladší žáci čísla nepotřebovali, starší k nim přistoupili až při hledání obecného vyjádření počtu čtverců bez jejich zakreslování a doplňovali je zpětně na již vyřešené úlohy.

Trajektorie mentálních kroků

Všichni žáci, kteří se zúčastnili experimentů, řešili druhou ze série úloh (pro $n = 4$). Nalezli všechny čtverce, které mají stranu rovnoběžnou se stranou čtverce zadaného. Proto je zajímavé, porovnat jejich řešení podle evidence nalezených objektů a použitých kritérií. Použili dvě kritéria: 1. velikost ($n = 1, 2, 3, 4$), 2. umístění (střed/růžek/strana – v různém pořadí). Klasifikace odpovídá klasifikaci čtverců podle počtu stran, jichž se dotýkají („střed“ žádné strany daného čtverce, „růžek“ dvou stran, „strana“ jedné strany).

Pro zaznamenání a možnost porovnání jednotlivých řešení jsem použila trajektorii mentálních kroků v dvourozměrném poli určeném parametry: velikost vkládaného čtverce (n) a jeho umístění ve smyslu střed/růžek/strana (u) (obr. 3).



Obr. 3

Modrou barvou jsou značeny ty kroky, které proběhly bez časové prodlevy, červenou barvou kroky zpětné nebo ty, u nichž časová prodleva vznikla (udána doba). Čtvercem jsou označené evidované objekty, přičemž nezáleží na jejich umístění v dvourozměrném poli. Červeně jsou vyznačeny duplicitní nebo nenalezené objekty.

Experimentu se zúčastnilo šest žáků a získala jsem šest různých trajektorií. Samozřejmě nelze diagnostikovat žákovu kognitivní strukturu na základě rozboru řešení jedné úlohy. To ostatně také nebylo cílem. Experimenty prokázaly, že každý žák je jedinečná osobnost. U každého řešení se vyskytla nějaká výjimečná situace, kterou jsem neočekávala a která mě zaskočila. Ukázalo se, jak je nezbytné přizpůsobit se myšlení žáků a nad nestandardní reakcí se hlouběji zamyslet a snažit se ji pochopit, protože zpravidla má nějaké vysvětlení. To se netýká pouze experimentální činnosti, ale hlavně činnosti při každodenní učitelské praxi.

Diplomová práce byla mým prvním krůčkem na dlouhé cestě za hlubším porozuměním myšlenkovému procesu žáků při jejich hrátkách s matematikou. Vlastní experimentální činnost umožní učiteli být vnímavější k individuálním potřebám svých budoucích žáků, důvěrněji je poznat, lépe diagnostikovat jejich znalosti a schopnosti, adresněji jim radit, jak v práci pokračovat, jak odstraňovat nedostatky a rozvíjet své schopnosti. Každého žáka je nutno brát jako individualitu. Není-li jeho systém v danou chvíli rozpoznatelný, neznamená to ještě, že žádný nemá. Nejdůležitější je, že si jej sám zvolil, umí jej aplikovat, přizpůsobovat a dokonale mu rozumí. Trajektorie mentálních kroků je „zápisem“, který vše může poodhalit – zpřístupnit nám svět dítěte, abychom mu byli schopni porozumět a respektovat jeho individuální zvláštnosti. Závěrem uvádím přehled odvozených vzorců, pomocí nichž lze určit počet jakýchkoli čtverců splňujících podmínku výše uvedené úlohy.

Dotyků	strana rovnoběžná se stranou daného čtverce	strana různoběžná se stranou daného čtverce	celkem
0	$\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}$	$\frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{12}$	$\frac{n(n-1)^2(n-2)}{12}$
1	$2(n-1)(n-2)$	$\frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$	$\frac{2n(n-1)(n-2)}{3}$
2	$4(n-1)$	$2(n-1)(n-2)$	$2n(n-1)$
4	1	$(n-1)$	n
$\sum$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n^2(n^2-1)}{12}$	$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

Literatura

[1] Bomerová, E. *Diplomová práce – hledání objektů dané vlastnosti a organizace souboru jevů*, 2004 (nepublikováno).

[2] Hejný, M., Michalcová, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Metodické centrum Bratislava, 2001.

[3] Hejný, M., Stehlíková, N. *Číselné představy dětí.* Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 1999.

Abstraktné umenie vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ a v príprave učiteľov

Jaroslava Brincková, Hana Omachelová[1]

Chceli by sme poukázať na to, že aj v abstraktnom umení 20. storočia nachádzame množstvo geometrických podnetov. Konkrétne v geometrickej abstrakcii, umeleckom prúde v 20. rokov 20. storočia, ktorej novátorstvo spočívalo v uplatňovaní matematického myslenia.

Obraz „Krava“ od T. van Doesburga na hodine matematického krúžku

Tento obraz bol pre nás podnetným možno práve preto, že jeho názov vyjadruje reálne zviera, ale jeho forma je čisto geometrická. Doesburgova Krava je znázornená pomocou štvorcov, obdĺžnikov a horizontálnych a vertikálnych línií (obr. 1).

Na hodine matematického krúžku v 4. ročníku ZŠ sme chceli overiť, ako na tento obraz budú reagovať žiaci. Na hodinách matematiky v tom čase práve preberali učivo o štvorci a obdĺžniku. Preto sa nám takéto medzipredmetové prepojenie zdalo vhodné.

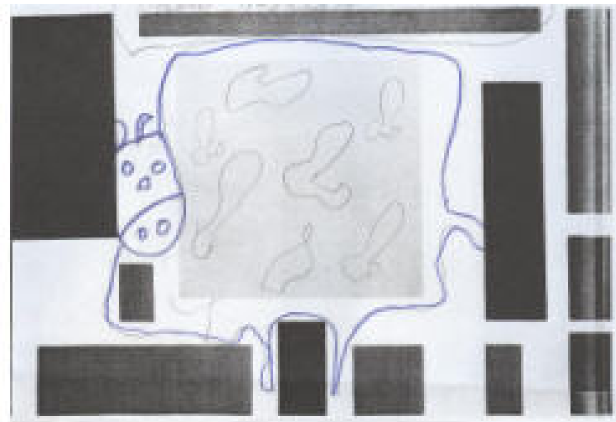
Po krátkom úvode o umení a postavení geometrie v ňom sme konverzovali o tom, čo by asi mohlo byť na obraze znázornené. Fantázia žiakov sa postupne uvoľňovala. Od prvých nápadov typu: „sú to domy pri pohľade z lietadla“, či „panelák a pri ňom zaparkované autá“, odzneli aj nápady: „žltý štvorec uprostred je jazero, menšie útvary okolo sú stánky . . . je to ako pri kúpalisku“, „sú to ohrádky pre zvieratká – žltý štvorec uprostred je ohrada s kuriatkami, v oranžovom obdĺžniku sú líšky“. Prezradenie názvu obrazu vyvolalo v žiakoch vzrušenie. Rozdali sme im kópie obrazu (bohužiaľ len čierno-biele), kde mohli dokresliť svoju kravu – tak ako si ju vedia predstaviť v obraze (obr. 2).

Aplikácia matematiky v abstraktnom umení

Obrazy geometrickej abstrakcie môžeme priamo využiť pri tvorbe zadaní matematických úloh. A to v rôznych ročníkoch. Uvedieme aspoň niekoľko nápadov:

- Aké geometrické útvary sa na obraze nachádzajú?
- Koľko je štvorcov / obdĺžnikov?
- Odmeraj dĺžky strán obdĺžnikov / štvorcov.

[1]Pedagogická fakulta UMB, Banská Bystrica, jbrinckova@pdf.umb.sk, homachelova@pdf.umb.sk

Obr. 1 Obr. 2

- Urči obvody všetkých štvorcov / obdĺžnikov.
- Odhadni, ktorý obdĺžnik bude mať najväčší obvod.
- Odhadni, ktorý útvar bude mať najväčší obsah.
- Vypočítaj obsahy geometrických útvarov na obraze.
- Prerysuj obraz do svojho zošita.

Pri úlohách môžeme využiť aj štvorcovú sieť narysovanú na priehľadnej fólii. Možností je veľa. Je len na tvorivosti učiteľa, aké úlohy vymyslí.

PRÁCA S OBRÁZKOM PRI BUDOVANÍ MATEMATICKÝCH PREDSTÁV V PRÍPRAVE UČITEĽA

Mnohí dospelí si neuvedomujú, že v každom obrázku sú skryté matematické pojmy. Preto sme v príprave učiteľov Predškolskej a elementárnej pedagogiky pristúpili v úvodnom kurze Počiatočné matematické predstavy k nácviku zručností práce s obrázkom, spojených s tvorbou matematických rozprávok.

Rozprávka patrí v mladšom školskom veku k literárnym útvarom, na ktorý sú žiaci veľmi vnímaví. Spojením názoru a živého slova je možné sprístupniť obsah nových geometrických pojmov v jazyku žiaka tak, aby nové slová (priamka, úsečka, uhol, rovnobežka, ...) vytvárali konkrétne predstavy v jeho vedomí. Učiteľ môže vhodne volenou rozprávkou, doplnenou prácou s obrázkom, ako didaktickou pomôckou, podľa V. Uherčíkovej (1992, s. 12), povzbudiť žiakov a docieliť ich zlepšenie záujmu o matematiku. Učí žiaka vnímať veci na obrázku, všímať si detaily, ktoré predtým nepostrehol. Pritom môže pracovať s obrázkom dvomi spôsobmi:

1. Pracuje s hotovým obrázkom.
2. Pracuje s neúplným obrázkom, zámerne vybraným pre potreby vyučovania.

Pri opise hotového obrázka umožňuje objaviť zamlčané fakty v rozprávke a rozvíja slovnú zásobu žiaka. Vedie žiaka k dôslednému pozorovaniu obrázka, postupne zdokonaľuje jeho schopnosť vyhľadávať informácie. Žiak môže podľa J. Mareša (1995, s. 320) zvládnuť identifikovanie: jednotlivých predmetov, činností, súvislostí, deja, uplatnenie fantázie. V každom obrázku sú podľa Ľ. Gerovej (2006, s. 12) skryté aj matematické pojmy. Na 1. stupni ZŠ a v predškolskej príprave rozvíjame pomocou obrázkov spojených s dramatizačným rozprávaním predstavy o:

- určení množiny objektov,
- triedení predmetov podľa farieb,
- pomenovaní tvarov, porovnaní a triedení podľa tvarov,
- triedení podľa veľkosti, perspektívy,
- uzavretom cykle pohybu, usporiadaní,
- predstave o množstve,
- druhoch čiar a kreslení,
- orientácii a polohe v rovine a priestore,
- pohybe na obrázku,
- zhodnosti/nezhodnosti, podobnosti, protikladoch,
- množine a jej podmnožinách.

Práca s neúplným obrázkom, zámerne zvoleným pre potreby vyučovania, rozvíja fantáziu žiaka. V školskej praxi sa realizuje hlavne:

- dotváranie obrázka podľa inštrukcií (nácvik vzor – rytmus podľa naznačenej postupnosti),
- kreslenie chýbajúcich častí objektov (dokreslite okná na domček,. . .),
- doplnenie obrázka podľa vlastnej predstavy (obrázok – krava),
- vyfarbenie častí obrázka,
- usporiadanie skupiny obrázkov podľa postupnosti deja a pod.

Záver

Medzipredmetové prepojenie matematiky s inými vyučovacími predmetmi, prepojenie matematiky so svetom rozprávok a obrazov môže plniť motivačnú funkciu. Nemusí byť pritom použité hneď ako hlavná vyučovacia metóda, postačí aj ako doplnková metóda na spestrenie vyučovania.

Literatura

[1] Brincková, J. *Tvorivé dielne 2, zamerané na didaktické hry v geometrii ZŠ*. Banská Bystrica: PF UMB, 2001, s. 9.

[2] Gerová, Ľ., Kováčik, Š. *Didaktika matematiky pre asistenta učiteľa (a nielen pre neho)*. Banská Bystrica: PF UMB, 2006, s. 12–13.

[3] Mareš, J. Učení z obrázkového materiálu. *Pedagogika*, roč. 45, 1995, s. 318–327.

[4] Uherčíková, V. *Hravá geometria*. Bratislava: DONY, 1992.

[5] *Universální lexikon umění*. Grafoprint-Neubert Knižní klub, Praha 1996.

[6] Pijoan, J. *Dejiny umenia 9*. Odeon, Praha 1983.

Matematická informatika – na pomezí matematiky a informatiky

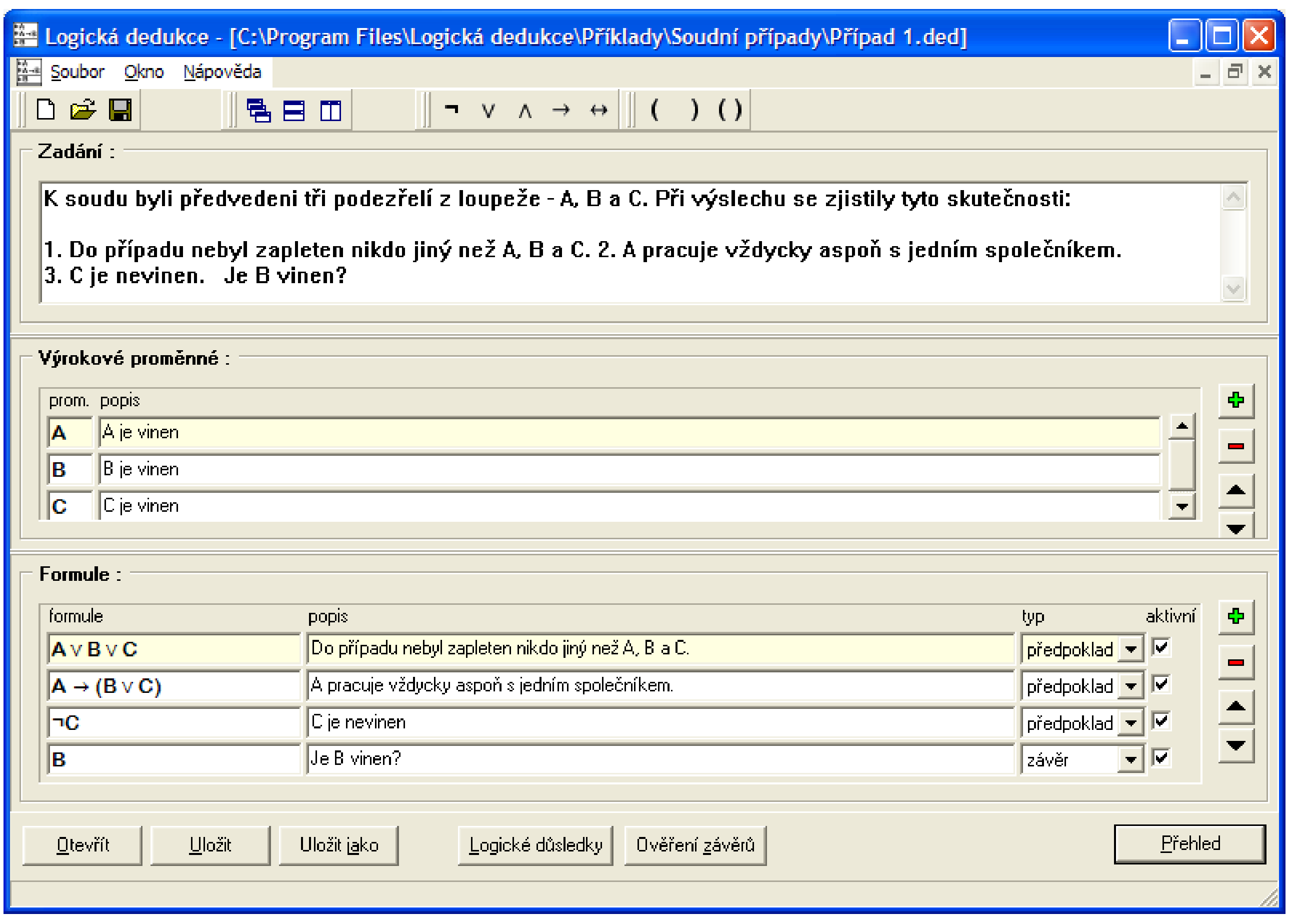
Hashim Habiballa[1]

Teoretická informatika tvoří základ celého oboru a s pomocí jejích teoretických výsledků se vytváří řada aplikovaných produktů informatiky. Vzhledem k jejich příbuznosti s matematikou a jejím formálním aparátem jsou však u studentů málo oblíbeny a pokud je jejich způsob výuky pouze formální (založený na formalizaci), pak u studentů dochází k demotivaci a memorovaní těchto vysoce logicky založených poznatků. Komplexní příprava praktických odborníků a učitelů v oblasti informatiky vyžaduje pevné základy teoretických disciplín. Je důležité vytvářet u studentů nejen statické znalosti (definice, věty, důkazy), ale také specifické dovednosti, návyky a postoje (analytické a algoritmické myšlení, strukturovaný přístup k jazykům a překladačům atd.). Cílem by mělo být, aby každý student uměl vidět vlastnosti algoritmů v jejich obecnosti, pociťoval nutnost zkoumat řešitelnost a efektivnost řešení problémů. Také by měl pochopit, že používané

[1] Přírodovědecká fakulta Ostravské Univerzity, hashim.habiballa@osu.cz

nástroje v informatice jsou založeny na pevných strukturách souvisejících s pojmy gramatiky, jazyka a analyzátoru. Taktéž logický úsudek a jeho formalizace v matematické logice by se měl stát součástí postojů informatika.

Nejtypičtějšími zástupci teoretické informatiky jsou: Teorie formálních jazyků a automatů, Teorie vyčíslitelnosti a složitosti (souhrnně označovaná jako teorie algoritmů) a Logika (její informatická část zaměřená na problematiku automatizovaného odvozování). Velmi důležitým aspektem výuky (resp. důvod, proč se velmi málo témat teoretické informatiky promítá do středoškolské výuky) bývá malá názornost a přílišná abstraktnost v úvodu studia jednotlivých disciplín. Jde o pojmy, se kterými se informatici i matematici setkávají prakticky denně, ale ve výuce je tento aspekt málo akcentován. Řešit to mohou učební pomůcky, založené na intuitivním přístupu před vlastní formalizací. V tomto krátkém textu můžeme bohužel ukázat jen jeden modelový příklad. Vyberme logiku jako průřezovou disciplínu, která zasahuje do mnoha oborů od striktně matematických (axiomatických) systémů až k humanitním oborům, jako je filozofie. Ve výuce logiky se však málo akcentují klíčové pojmy, jako je formální dedukce a její automatizace (algoritmizace), což je velmi důležitá aplikace (např. expertní systémy).



Grafické rozhraní aplikace pro dedukci

Automatizace dedukce vyžaduje najít efektivní algoritmy pro generování důsledku nebo pro prověřování konsistence množin formulí. U sémantických metod musíme provádět interpretaci formulí, což je s ohledem na již zmiňované obrovské množství ohodnocení elementárních výroků velmi neefektivní přístup. I když některé sémantické metody vylepšují tuto nevýhodu, v zásadě je sémantický přístup pro automatizaci zcela nevhodný. Druhý formální (syntaktický) přístup se snaží se zcela oprostit od interpretace (smyslu) a používat prověřená pravidla pro práci se symboly (formulemi) bez ohledu na to, co znamenají. To je v principu efektivní, protože časová složitost nezávisí na možných interpretacích. Problémem je složitost těchto metod (jsou dnes zcela v režii vysokoškolské výuky). Existuje však dobře použitelná a precizně zpracovaná diplomová práce autorky Libuše Pavliskové. Tato aplikace pracuje s výrokovou logikou (tudíž je dostatečně jednoduchá i pro SŠ výuku) a zároveň umožňuje zapsat libovolnou množinu předpokladů a buď generovat všechny možné důsledky, nebo o konkrétním závěru zjistit, zda je to důsledek. Možná ještě významnější je pro výuku na středních školách existence velkého množství připravených příkladů. Didaktický text, popis aplikace i samotnou aplikaci pro OS Windows lze získat na adrese: http://www1.osu.cz/home/habibal/dedukce/

Literatura

[1] HABIBALLA, H.; KMEŤ, T. Theoretical branches in teaching computer science. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 6/2004(35), pp. 829–841, Taylor & Francis:Great Britain.

[2] JANČAR, P. Teoretická informatika. VŠB TU Ostrava, http://www.cs.vsb.cz/jancar/ (2003)

[3] KOUBKOVÁ, A., PAVELKA, J. *Úvod do teoretické informatiky*. Matfyz press, Praha 1998.

Prejav predstavy pojmu v riešení neštandardnej slovnej úlohy

Matúš Harminc[1]

V tomto príspevku chceme upozorniť na ďalšiu z možností využitia neštandardných slovných úloh istého typu. Je určený záujemcom o výskum v didaktike matematiky, ale poučný aj pre učiteľov matematiky. Vznikol pri práci súvisiacej s tvorbou hesiel a veku primeraných definícií a jeho vznik a prednesenie boli podporené Grantom č. 3/3009/05 KEGA.

[1]Ústav matematických vied PF UPJŠ, Košice, Slovenská republika, matus.harminc@upjs.sk

Úvod

Keďže v celom príspevku sa zaoberáme len jednou úlohou, nie je nutné vymedzovať, čo nazývame *neštandardnou slovnou úlohou.* Napriek tomu upresnime, že jej neštandardnosť chápeme tak, že sa čímsi podstatne odlišuje od úloh uvedených vo vzdelávacom štandarde [7] (podobne ako napr. aj divergentné úlohy, úlohy MO, alebo MCRE-úlohy). V tomto pripade to čosi spočíva v *zámernej nejednoznačnosti zadania zapríčinenej formuláciou,* ktorá dovoľuje viacero interpretácií. Niekedy sa takéto úlohy nazývajú aj vágne formulované, difúzne, či úlohy s diverzitou. Nás k nim priviedli dva nezávislé dôvody: prieskum prístupov a postojov žiakov a učiteľov k slovným úlohám [2, 5] a otázky tvorby matematických hesiel pre webové sídlo thesaurus.maths.org.

Pod *interpretáciou* difúznej úlohy treba rozumieť úlohu, ktorá nie je difúzna, ktorú nevedomky sformuloval žiak a ktorú rieši v presvedčení, že rieši pôvodnú úlohu. Žiakovu formuláciu zisťujeme analýzou získaného riešenia. Predkladáme úlohu z oblasti geometrie, ktorá je zaujímavá aj z hľadiska procesuálneho a konceptuálneho prístupu [3]. Zároveň na nej môžeme sledovať teóriu troch svetov K. Poppera [5] v praxi: na jednej strane tretí svet – pojmy použité v úlohe, na druhej strane prvý svet – zadanie úlohy. A interpretácia úlohy s rolou z druhého sveta, ale zároveň po odtrhnutí od predstáv svojho autora element prvého sveta.

Úloha: Z kocky s hranou 5 cm utvor čo najvyšší kváder s podstavou 3 cm $\times$ 4 cm. Aká bude jeho výška?

Odporúčame čitateľovi vyriešiť túto úlohu před ďalším čítaním nášho príspevku. Zabudnite na chvíľu na prečítaný úvod, prečítajte si ešte raz zadanie tejto úlohy a vypočítajte príslušnú výšku. Máte? Nie? Tak počítajte!

Ak ste už úlohu vyriešili a máte výsledok, spomeňte si na našu zmienku o nejakej nejednoznačnosti. Našli ste ju? A máte viacero interpretacií zadania? Vypočítali ste zakaždým výšku kvádra? Koľko rôznych výsledkov ste získali?

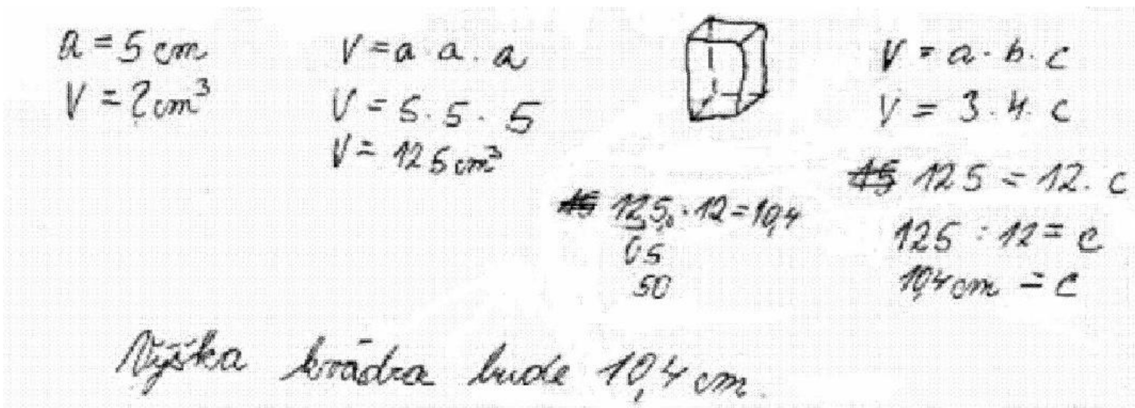
Asi ste prišli na to, že kľúčovým slovom, ktoré spôsobuje nejednoznačnosť zadania úlohy, je slovo *utvor*, ktoré každý poznáte. Nie každý si však položí otázku, ako ho chápať v kontexte tejto úlohy. Niekto to nepotrebuje, lebo si pri riešení ulohy predstaví nanajvýš vzorce. Iní majú v predstave kocky nejaký natoľko dominantný prvok, že mimovoľne sú ním ovplyvnení aj pri výklade slova utvor.

My sme zaevidovali sedem rôznych interpretácií úlohy; všetky súvisia s výkladom slova utvor. Uvedieme tie štyri, ktoré ukazujú, ako sa prejavuje predstava kocky v riešení tejto úlohy. Pod *predstavou pojmu* chápeme v súlade s P. F Lazarsfeldom [1] intuitívne rozlišovanie objektov na patriace a nepatriace k pojmu na základe každodennej skúsenosti.

Stručne priblížme priebeh realizácie prieskumu. Zadanie úlohy bolo predložené v písomnej forme, bez čítania nahlas. Žiaci boli upozornení, že nemajú klásť žiadne otázky a vysvetlenie nejasností mali hľadať sami v zadaní úlohy. Dozerajúci učitelia nesmeli nič vysvetľovať, ani neupresňovali text zadania. Upozornili žiakov na potrebu zapísať, zakresliť, alebo inak zaznačiť aj ich riešiteľský myšlienkový postup. Úloha bola predložená spolu 214 deťom, z toho 71 šiestakom, 42 siedmakom, 43 ôsmakom a 58 deviatakom základnej školy. Čas riešenia bol približne do 15 minút (podľa ročníka).

1. interpretácia úlohy: nazvali sme ju „Objem – spojito“.
Aká je výška kvádra s podstavou 3 *cm* $\times 4$ *cm, ak jeho objem je rovný objemu kocky s hranou* 5 *cm?*

Žiacke riešenie:



Modelové riešenie:
Objem kocky s hranou 5 *cm je* $5^3 = 125$ *cm*^{3}, *objem kvádra s podstavou* 3 *cm* $\times 4$ *cm a výškou* v *je* $3 \times 4 \times v = 12 \cdot v$. *Z rovnosti týchto objemov dostávame rovnicu* $125 = 12 \cdot v$ *a teda* $v = 125/12$, *čo je približne* 10, 4 *cm.*

Táto interpretácia nevyžaduje iný atribút kocky ako je objem, stačí znalosť vzorcov. Predstava kocky sa ani nemusí vynoriť. Obzvlášť u šiestakov, ktorí práve príslušné učivo prebrali. Je to akoby kúzlom premenená kocka na kváder. Niekde však predstava je prítomná, deti píšu o kocke z plastelíny, z ktorej modelujú kváder, iné hovoria o roztavení kovovej kocky a nalievaní do formy tvaru kvádra.

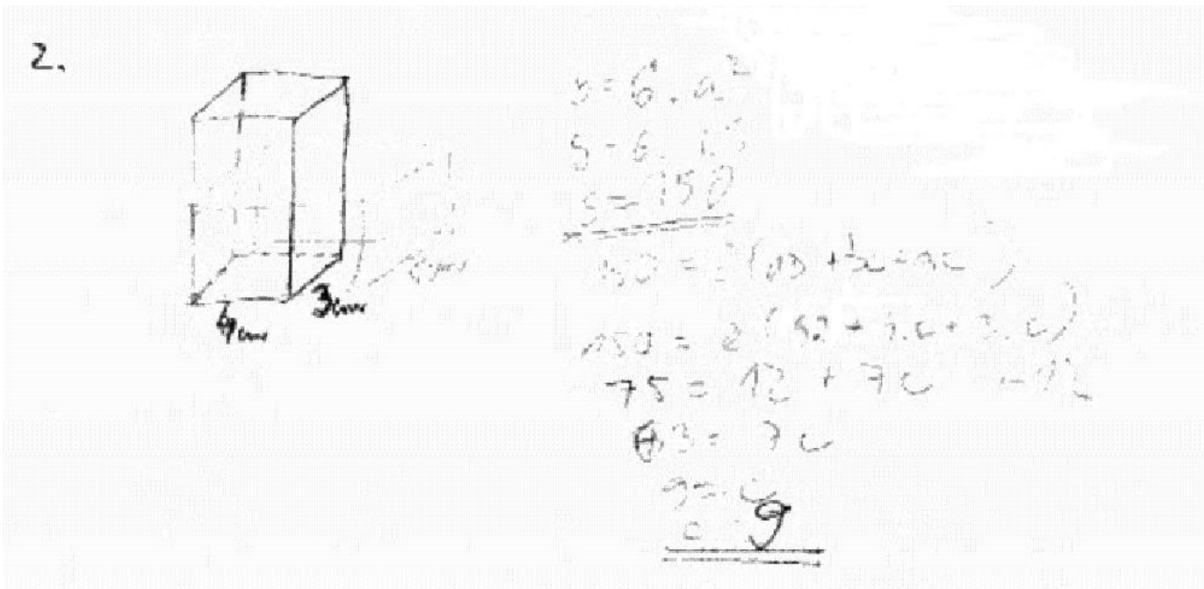
2. interpretácia úlohy: nazvali sme ju „Objem – kvantovane“
Aká je najvačšia možná výška kvádra s podstavou 3 *cm* $\times$ 4 *cm, ktorý vznikol z kocky s hranou* 5 *cm rozrezanej na kocky s hranou* 1 *cm?*

Modelové riešenie:
Rozrezaním kocky s hranou 5 *cm vzniklo* $5^3 = 125$ *malých kociek s hranou* 1 *cm. Na podstavu i na každý* 1 *cm výšky kvádra je potrebných* $3 \cdot 4 = 12$ *malých kociek. Kedže* $125/12 = 10$, *zvyšok 5, najväčšia možná výška kvádra s podstavou* 3 *cm* $\times$ 4 *cm je* 10 *cm.*

Nie je jasné, či k takejto interpretácii priviedol model veľkej kocky zložený z malých kociek používaný na vyučovaní, alebo úloha, ktorá na prieskume predchádzala tejto úlohe a bola o skladaní útvarov z rovnakých kociek [1, 5]. Predstava kocky je v tomto prípade 125 poukladaných malých kociek tvoriacich jednu veľkú kocku.

3. interpretácia úlohy: nazvali sme ju „Povrch“
Aká je výška kvádra s podstavou 3 *cm* $\times$ 4 *cm, ak jeho povrch je rovný povrchu kocky s hranou* 5 *cm?*

Žiacke riešenie:



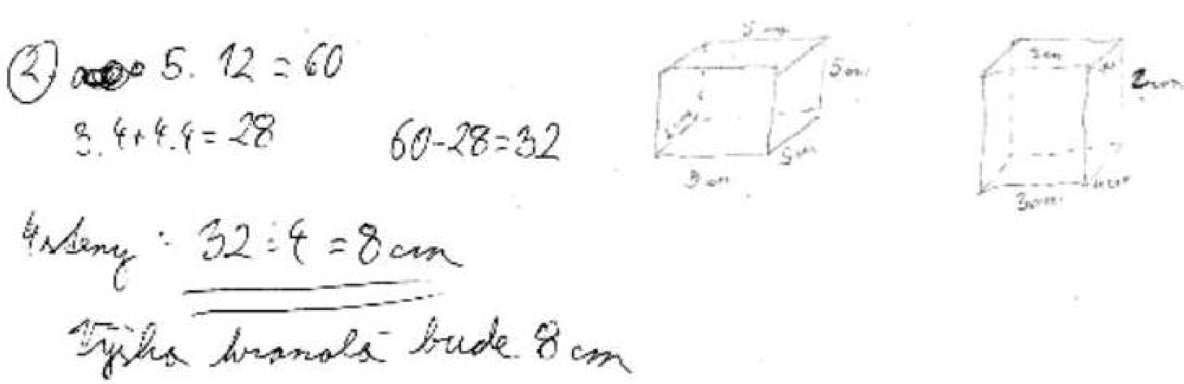
Modelové riešenie:
Povrch kocky s hranou 5 cm je $6 \times 5^2 = 150$ *cm*^{2}*. Povrch kvádra s podtavou* 3 *cm* $\times$ 4 *cm a výškou* v *je* $2(3 \cdot 4 + 3 \cdot v + 4 \cdot v) = 24 + 14 \cdot v$*. Z rovnosti týchto povrchov dostávame rovnicu* $150 = 24 + 14 \cdot v$ *a teda* $v = (150 - 24)/14 = 9$ *cm.*

Tentokrát máme do činenia s predstavou kocky, v ktorej dominuje povrch. Rozhovory s deťmi a posteriori potvrdili, že deti mali vlastné skúsenosti s výrobou papierových modelov, so sieťami kocky alebo sa s modelom kocky urobeným z papiera stretli v škole.

4. interpretácia úlohy: nazvali sme ju „Neočakávaná“

Skúste na základe nasledujúceho žiackeho riešenia sfomulovať interpretáciu, aj keď sa na prvý pohľad môže zdať, že žiak písal nezmysly.

Žiacke riešenie:



Evidentne úloha bola uchopená, riešená, predstava je zachytená aj graficky. Napriek tomu, že myšlienkový postup nie je slovne zachytený, jednoznačne ho je možné rekoštruovať.

Interpretácia:
Aká je výška kvádra s podstavou 3 *cm* $\times$ 4 *cm, ak súčet jeho všetkých hrán je rovný súčtu všetkých hrán kocky s hranou* 5 *cm?*

Modelové riešenie:
Súčet všetkých hrán kocky je $12 \cdot 5 = 60$ *cm. Súčet všetkých hrán kvádra s podstavou* 3 *cm* $\times 4$ *cm a výškou* v *je* $4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot v = 28 + 4 \cdot v$*. Z rovnosti týchto súčtov dostávame rovnicu* $60 = 28 + 4 \cdot v$*, a teda* $v = (60 - 28)/4 = 8$ *cm.*

Podobne ako v tretej interpetácií, aj tu je prítomná predstava kocky. Jej výrazným znakom sú hrany. Jedná sa o model kocky zo špajdlí, paličiek či drôtikov. Je zaujímavé, že aj učiteľka, ktorá používa takýto model kocky na výučbe, nedokázala riešenie analyzovať a považovala ho za úplne nepochopiteľné.

Záver

Z 214 detí úlohu začalo riešiť 186, len u 110 z nich môžeme hovoriť o uchopení úlohy a len u niekoľkých z nich sme evidovali spozorovanie difúznosti úlohy a snahu o jej viacerakú interpretáciu. Nasledujúci prehľad ukazuje frekvenciu výskytu interpretácií podľa ročníkov:

Interpretácia:	6. ročník	7. ročník	8. ročník	9. ročník	Spolu
Objem-spojito	14	3	14	20	51
Povrch	2	3	0	2	7
Objem-kvantovane	1	0	1	3	5
Neočakavaná	1	1	0	2	4

Poučení týmito poznatkami konštatujeme, že učiteľ, ktorý narazí na odlišný výsledok od očakávaného, by mal zvážiť, či príčinou toho je žiakova chyba, nejednoznačné zadanie, alebo nedostatočná predstava pojmu. V poslednom prípade je asi najlepšou radou poskytnúť deťom dostatok príležitostí spoznať rozličné modely a vykonávať aktivity a riešiť úlohy, v ktorých dominujú zakaždým iné atribúty príslušného pojmu.

Vyplýva z toho aj pravidlo pre tvorcov hesiel v encyklopédiách, náučných slovníkoch a webových sídlach, podľa ktorého stručná a presná definícia pojmu, čo aj ako výstižná, má byť doplnená jeho modelmi a atribútmi.

Literatura

[1] Harminc, M. Slovné úlohy s rôznym výkladom. In: (Ed. Stehlíková, N., Jirotková, D.) *Sborník příspěvků Dva dny s didaktikou matematiky Praha 2006.* Vyd. Ped. fak. UK v Praze a SUMA JČMF, 2007, s. 39–42.

[2] Harminc, M., Molnár, P. Some experiences with the diversity in word problems. *Proceedings of the 13th Polish-Czech-Slovak Mathematical School*, Krakow 2006, (v tlači).

[3] Hejný, M. *PROCEPT.* http://www.kafomet.cz/files/pdf/procept.pdf

[4] Hejný, M., Kuřina, F. Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces. *Pedagogika*, roč. 49, 2000, č. 1, s. 38–50.

[5] Kovárová, I. Prieskum riešení difúznych úloh a tvorivosti žiakov ZŠ a SŠ II. In (Ed. Töröková, Ľ, Marčoková, M.) *38. konferencia slovenských matematikov Liptovský Ján 2006*. Vyd. ŽU a SMS JSMF, Žilina, 2006. http://sms.savbb.sk/texty/oznamenia/zbornik2006.pdf

[6] Lazarsfeld, P. F.Concept Formation and Measurement in the Behavioral Sciences: Some Historical Observations. In (Ed. Di Renzo, G. J.) *Concepts, Theory, and Explanation in the Behavioral Sciences*. Vyd. Random House, New York, 1966, s. 144–204.

[7] *Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre 2. stupeň ZŠ.* http://www.statpedu.sk/buxus/docs//Pedagogicke_dokumenty/zakladne_skoly /standardy/VS_matem_2st_ZS.pdf

VORONOIOVA TESELÁCIA

LUCIA ILUCOVÁ[1]

Rovinné teselácie (t.j. pokrytie roviny útvarmi – *celami* – bez medzier a prekrytí; viď napr. [1], [2], [3]) môžu byť dobrým nástrojom pre rozvíjanie geometrického myslenia, ale i predstavivosti a kreativity. Špeciálnym typom rovinných teselácií je rovinná *Voronoiova teselácia* definovaná nasledovne:

Majme množinu bodov $\{x_1, \ldots\}$ v $\mathbf{R}^2$ (môže byť konečná, alebo lokálne konečná), ktorú nazveme *generátory*. Vnútro i-tej cely V_i teselácie je zjednotením všetkých bodov roviny, ktorých Euklidovská vzdialenosť od bodu x_i (generátor i-tej cely) je menšia ako od iných, a hranice ciel sú tvorené bodmi rovnako vzdialenými od viacerých generátorov, tj. pre $i \neq j$ platí

$$V_i = \left\{x \in \mathbf{R}^2, \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|\right\}.$$

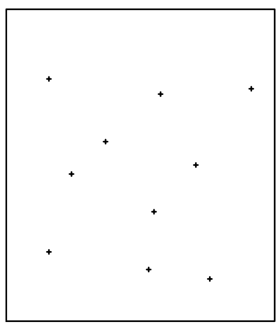
(Vzdialenosť $\|\bullet\|$ nemusí byť výlučne Euklidovská.) Zjednotením všetkých ciel je potom Voronoiova teselácia.

Prvýkrát sa myšlienka takto definovanej teselácie vyskytla v roku 1644 v práci R. Descartesa *Le Monde de Mr Descartes, ou Le Traité de la Lumière*, v ktorej sa autor zaoberal

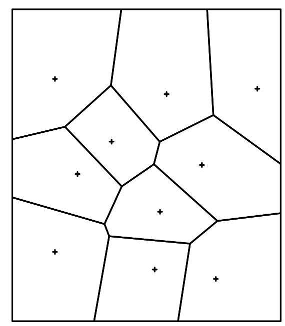
[1] Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, ilucova@gmail.com

usporiadaním hmoty v Slnečnej sústave. Ruský matematik G. F. Voronoi (1868–1908), podľa ktorého sú teselácie pomenované, rozšíril neskôr tento model pre n-rozmerný priestor.

Voronoiove teselácie majú široké využitie pri riešení problémov z rôznych oblastí. Napríklad pri voľbe polohy centier obsluhy (obchody, poštové schránky, knižnice, školy, úrady v okresných a krajských mestách, . . .) či pri výbere trás dopravných prostriedkov sa snažíme (okrem ďalších faktorov) o ich maximálnu dostupnosť, tj. o optimalizáciu ich spádových oblastí. Centrá alebo zastávky sú body – generátory, spádové oblasti sú cely Voronoiovej teselácie. (V skutočnosti sa ale ešte snažíme, aby plochy oblastí odrážali hustotu osídlenia.) Tento typ teselácie sa vyskytuje nielen v svete ľudí, ale i zvieratá (jednotlivci či skupiny, kolónie) si vytvárajú svoje teritória, ktoré sa viac-menej neprekrývajú.



a)



b)

Obrázek 1: a) Schéma staníc metra v centre Prahy, b) príslušná Voronoiova teselácia (rozdelenie centra na spádové oblasti). Pre jednoduchosť bol vybratý len jeden východ pre každú stanicu metra; horné tri body zľava znázorňujú stanice Staroměstská, Náměstí Republiky, Florenc.

Napriek tomu, že konštrukcia Voronoiovej teselácie, resp. jej ciel, sa môže javiť ako zložitá, vyžaduje len elementárne poznatky matematiky základnej školy. To platí aj pre nasledujúci problém:

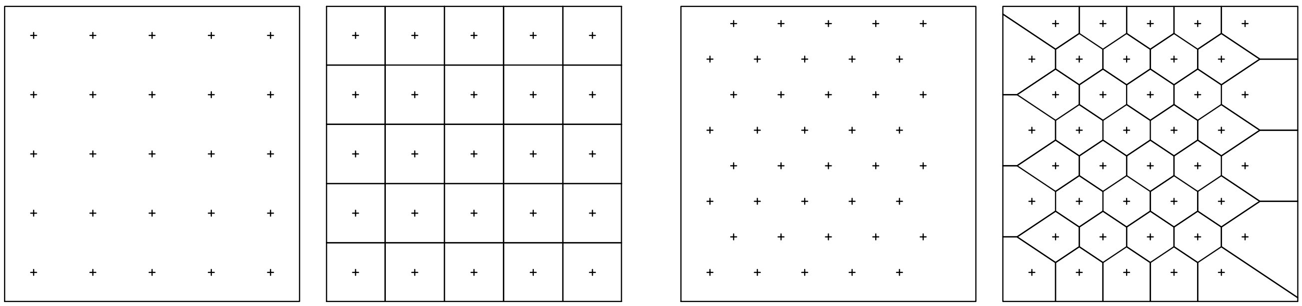
> *Na obrázku (obr. 1a) sú schematicky vyznačené stanice metra v centre Prahy. Každý človek pracujúci v tejto časti Prahy pritom využíva k doprave len tú stanicu metra (bez ohľadu na trasu A, B, C), ktorá je k jeho zamestnaniu najbližšie. Prideľte staniciam metra spádové oblasti tak, aby každý človek pracujúci v niektorej z nich, mal bližšie k stanici metra, ktorá v oblasti leží, ako k ostatným (berieme do úvahy vzdialenosť vzdušnou čiarou).*

Pri pohľade na výsledok riešenia (obr. 1b) je zrejmé, že došlo k rozdeleniu danej časti územia Prahy na oblasti (sektory) v tvare mnohouholníkov, pričom v každom z nich je jedna stanica metra. Toto rozdelenie spĺňa podmienky definície Voronoiovej teselácie.

Strany ciel (mnohouholníkov) sú skonštruované ako osi súmernosti bodov – generátorov teselácie.

Problém môžeme ďalej rozšíriť, usporiadanie bodov – generátorov – zmeníme (ako napr. na obr. 2) a konštrukcia môže prebiehať len v mysli detí (riešiteľov):

Predstavte si, že body (t.j. stanice metra) sú usporiadané pravidelne (napr. ako vrcholy štvorcovej siete). Ako vyzerajú výsledné oblasti?



Obrázek 2: Pravidelné bodové množiny a príslušné Voronoiove teselácie.

LITERATURA

[1] Grünbaum, B., Shephard, G. C. *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and Company, New York 1987.

[2] Ilucová, L. Parketáže, kachličky, mozaiky a geometria. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2004*, zborník k semináru. PedF UK, Praha 2004, 58–63.

[3] Ilucová, L. Escherovské teselácie. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2005*, zborník k semináru. PedF UK Praha 2005, 68–74.

NÁSOBENÍ TROCHU JINAK[1]

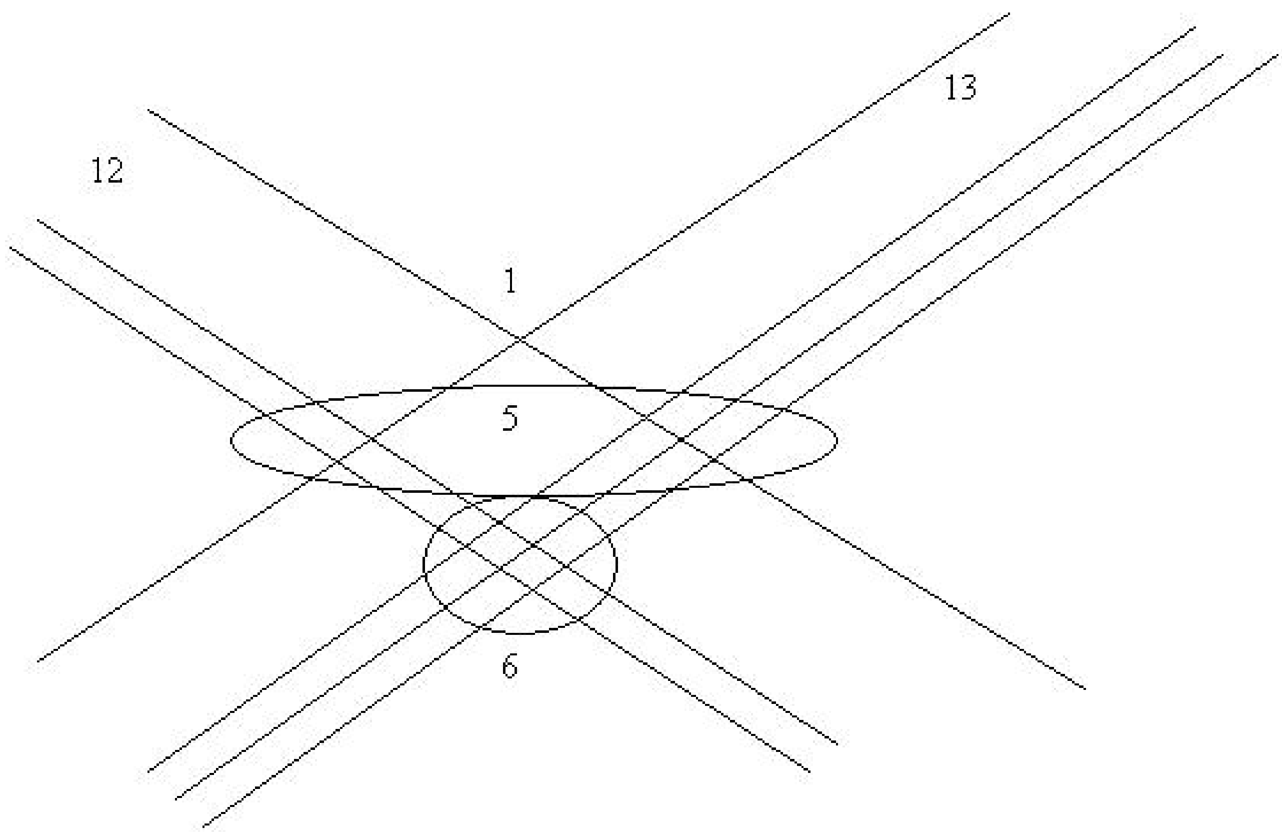
ANTONÍN JANČAŘÍK[2]

ÚVOD

Algoritmus písemného násobení je jedním z prvních algoritmů, se kterými se žáci na základní škole setkávají a následně je celý život používají. Postup, který při písemném násobení používáme, je tak samozřejmý, že obvykle ani neuvažujeme, že bychom mohli násobit nějak jinak. Algoritmus, který dnes ve školách používáme, však není jediným algoritmem, který můžeme pro násobení použít. Cílem toho článku je představit několik alternativních algoritmů, které lze pro vynásobení dvou čísel použít.

ČÍNSKÉ NÁSOBENÍ

Algoritmus známý pod názvem čínské násobení je ryze grafický. Na obrázku je znázorněn způsob, jakým lze spočítat kolik je 12 krát 13:



O výsledku rozhodují počty průsečíků mezi jednotlivými čarami.

[1]Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

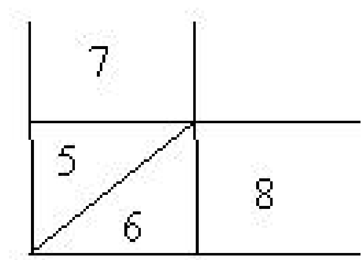
[2]PedF UK v Praze, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

Čínské násobení však není jediným netradičním algoritmem používaným v asijských zemích. Stačí přeplout z Číny do Japonska. Zde se studenti učí počítat na japonských národních počítadlech – sorobanech. Nejenom, že na nich neuvěřitelnou rychlostí sčítají a odčítají, ale dokáží na nich i násobit a dělit. Přes usilovnou snahu však autor tohoto článku může o násobení na sorobanu říci pouze to, že postup je zcela odlišný od evropských algoritmů. Snad bude počítání na sorobanech věnována pracovní dílna na některé z příštích konferencí *Dva dny s didaktikou matematiky*.

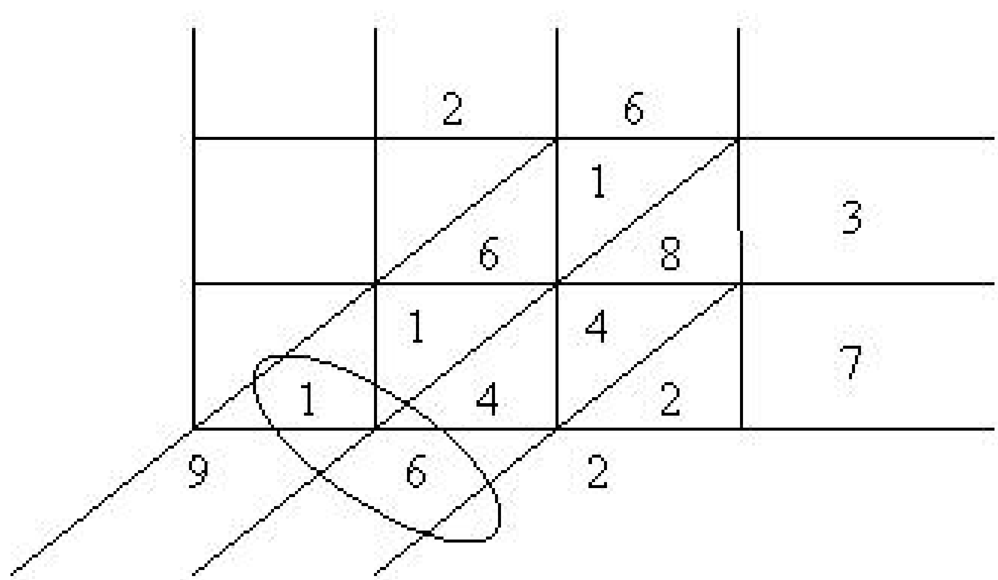
Přejděme z východní Asie na Arabský poloostrov a do Afriky, kde se i dnes můžeme setkat s následujícím algoritmem.

Arabské násobení

Algoritmu arabského násobení se od běžného postupu liší tím, že čísla, která chceme násobit, nepíšeme pod sebe, ale do záhlaví řádků sloupců tabulky, jejíž pole jsou diagonálně rozdělena. Celý výpočet je realizován ve dvou krocích. V prvním kroku vynásobíme čísla v záhlaví sloupců s čísly v záhlaví řádků a výsledek tohoto výpočtu zapíšeme do rozděleného pole tabulky:



V druhém, závěrečném, kroku čísla na diagonálách sečteme:



Na obrázku je proveden výpočet $26 \cdot 37 = 962$. V oválu je naznačeno, jak zapíšeme součet druhé diagonály, který je větší než deset.

Striktní oddělení násobení od sčítání může být velkou pomocí pro děti, které mají s počty problémy. Mnoho „početních“ chyb vzniká z toho, že se dítě nedokáže najednou soustředit na násobení a hlídání „přetékajících“ desítek a jejich přičítání. V arabském násobení tento problém odpadá, protože dítě se vždy soustředí pouze na jednu operaci.

Na severu afriky ještě chvíli zůstaneme a podíváme se na jeden z nejstarších algoritmů pro násobení, který kdy lidstvo znalo.

Egyptský algoritmus násobení

Číselná soustava, kterou staří Egypťané používali, takřka vylučovala použití běžného algoritmu pro násobení. Staří Egypťané vystavěli svůj algoritmus pro násobení na dvou operacích, které dobře ovládali – dělení a násobení dvěma.

V egyptském algoritmu jedno číslo z dvojice, kterou chceme násobit, opakovaně násobíme dvěma a současně k němu připisujeme, o kolika násobek se jedná. Celý postup si ukážeme na součinu $41 \cdot 62$. Zvolíme číslo 62 a postupně jej násobíme dvěma, až získáme jeho dvaatřicetinásobek.

Jedna násobek	1	62
Dvojnásobek	2	124
Čtyřnásobek	4	248
Osminásobek	8	496
Šestnáctinásobek	16	992
Dvaatřicetinásobek	32	1984

Následně druhé číslo rozepíšeme pomocí příslušných násobků: $41 = 32 + 8 + 1$, nyní již výsledek dopočítáme sečtením příslušných násobků:
$62 \cdot 41 = 61 \cdot (32 + 8 + 1) = 1984 + 496 + 62 = 2542$.

Nevýhodou druhého algoritmu je to, že musíme umět přepsat číslo jako součet mocnin dvojky. Tato úloha je ekvivalentní přepsání čísla do dvojkové soustavy.

Dnešní počítače počítají výhradně ve dvojkové soustavě, nemusí se tedy přepisováním do dvojkové soustavy zabývat. Navíc násobení dvěma znamená ve dvojkové soustavě napsat jednu nulu na konec čísla, resp. posunout desetinnou čárku o jedno místo doprava. Proto počítače výše uvedený, ve dvojkové soustavě velmi efektivní, algoritmus pro násobení používají.

Algoritmus ruského nevolníka

Na závěr si ukážeme algoritmus, který se nazývá algoritmem ruského nevolníka (Russian Pasant Algoritmus). Postup je založen na stejné myšlence jako předchozí egyptský algoritmus.

Čísla, která chceme mezi sebou vynásobit, napíšeme do dvou sloupců. Číslo v prvním sloupci budeme postupně dělit (celočíselně, beze zbytku) dokud nedostaneme číslo jedna.

Číslo ve druhém sloupci budeme souběžně násobit dvěma. Výsledky píšeme vedle sebe, v každém kroku na samostatný řádek. Na závěr sečteme ta čísla ve druhém sloupci, u nichž je v prvním sloupci liché číslo.

UKÁZKA

Budeme počítat 41 krát 62.

	Dělené dvěma	Násobené dvěma
1	**41**	**62**
2	20	124
3	10	248
4	**5**	**496**
5	2	992
6	**1**	**1984**

$41 \cdot 62 = 62 + 496 + 1984 = 2542$

MODIFIKOVANÝ ALGORITMUS RUSKÉHO NEVOLNÍKA

Posledním algoritmem je algoritmus ruského nevolníka modifikovaný tak, aby nebylo nutné čísla ve druhém sloupci sčítat.

POPIS ALGORITMU

Nejprve počítáme v prvním sloupci, pokud je na řádku liché číslo, napíšeme na další řádek číslo o jedna menší. Pokud je na řádku sudé číslo, napíšeme na další řádek jeho polovinu.

Zastavíme u čísla jedna. Na poslední řádek napíšeme druhé číslo a postupujeme druhým sloupcem od zdola nahoru. Pokud je v levém sloupci sudé číslo, napíšeme do řádku vpravo dvojnásobek předchozího čísla. Pokud je v řádku vlevo liché číslo, přičteme k předchozímu výsledku číslo ze spodního řádku.

Krok 1	Odečítáme jedna	**41**	**2542**	Přičítáme 62	Krok 14
Krok 2	Dělíme dvěma	40	2480	Násobíme dvěma	Krok 13
Krok 3	Dělíme dvěma	20	1240	Násobíme dvěma	Krok 12
Krok 4	Dělíme dvěma	10	620	Násobíme dvěma	Krok 11
Krok 5	Dělíme dvěma	5	310	Přičítáme 62	Krok 10
Krok 6	Odečítáme jedna	4	248	Násobíme dvěma	Krok 9
Krok 7	Dělíme dvěma	2	124	Násobíme dvěma	Krok 8
		1	**62**		

Poznámka na závěr

Pomocí posledních tří úloh lze pro žáky připravit i soutěžní úlohy, ve kterých mají s co nejmenším počtem operací spočítat součin dvou čísel, a to pouze operace sčítání a násobení a dělení dvěma.

Závěr

Školská matematika se obvykle omezuje při výuce násobení na jediný algoritmus písemného násobení. Domnívám se, že je to velká škoda. Cílem tohoto článku bylo představit některé netradiční postupy, jimiž lze učivo a procvičování násobení obohatit a zpestřit. Uvedené úlohy neslouží pouze k rozšíření a prohloubení učiva o součinech dvou čísel, ale jsou i vhodným nástrojem k rozvoji algoritmického myšlení.

Výherní strategie a jak je nalézt[1]

Antonín Jančařík[2]

Úvod

V současnosti existuje nepřeberné množství společenských her – deskových, karetních, využívajících hrací kostky či jiné herní nástroje. Cílem hraní společenských her je většinou snaha se dobře pobavit. Mnoho hráčů má však i další cíl – vyhrát. Jedním z nástrojů, které nám mohou k výhře pomoci, je matematika. Například u karetních her můžeme dopočítat pravděpodobnost jednotlivých kombinací karet a podle toho zvolit licitaci nebo výšky sázky. Je pravdou, že i kombinace s malou pravděpodobností se může objevit, pokud však budeme sázet na rozložení s větší pravděpodobností, budeme při větším množství her častěji vyhrávat. Na tomto principu jsou založena kasina. U většiny her nám výpočet pouze poskytne informaci o tom, jakou má ta která herní kombinace šanci na úspěch. Existují však i hry, ve kterých dostáváme odpověď stoprocentní – lze u nich vypočítat, jak určitě vyhrát. Nebo jinak řečeno, existuje jejich výherní strategie.

Kdy výherní strategie existuje

Třída her, u nichž existuje výherní strategie, je velmi široká, a proto je těžké ji celou charakterizovat. Navíc z každého pravidla existují výjimky. Uvedeme zde ale několik jednoduchých podmínek, které již postačí k tomu, aby existovala výherní strategie hry:

1) Hru hrají jen dva hráči.
2) Hra musí skončit po konečném počtu tahů výhrou jednoho z hráčů.

[1]Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.
[2]PedF UK v Praze, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

3) Ve hře není žádný skrytý prvek ani vliv náhody.

V některých případech připouštíme, že hra po konečném počtu kroků musí skončit buď výhrou jednoho z hráčů, nebo remízou. V takové případě buď existuje výherní strategie hry pro jednoho z hráčů, nebo remízová strategie hry pro oba hráče.

Příklady her

Pravidla pro existenci výherní strategie většinou nesplňují hry s kostkami, protože je v nich velký vliv náhody, ani většina karetních her, protože v nich neznáme hodnotu soupeřových karet, ani kartu, kterou „lízneme". Uvedená pravidla nesplňují dokonce ani piškvorky, protože není zaručeno, že každá hra musí skončit v konečném počtu tahů. Přesto bylo u piškvorek dokázáno, že existuje výherní strategie pro hráče, který hru zahajuje. Problematické jsou i šachy, neboť každá hra sice musí skončit v konečném počtu tahů, ale hra může být ukončena i remízou. V šachách buď existuje výherní strategie pro jednoho z hráčů, nebo remízová strategie pro oba hráče. Vzhledem ke komplikovanosti celé hry však neumíme rozhodnout, která varianta platí. Příkladem her, ve kterých ale určitě výherní strategie existuje, je GO (tam ji ale neumíme nalézt), či hra Ovečky a vlk. Na příkladu her GO a šachů vidíme, že existence výherní strategie a její nalezení jsou dvě samostatné otázky. V dalším textu se na několika příkladech seznámíme s některými postupy, pomocí kterých můžeme výherní strategii nalézt.

Běžným příkladem matematických her jsou hry tipu NIM. V tomto článku si ukážeme některé postupy, které lze využít u běžných společenských her.

Prozkoumání všech možností

U některých her můžeme výherní strategii nalézt pomocí prozkoumání všech možností. Prozkoumat všechny možnosti je možné pouze u jednoduchých her, takových, ve kterých se nevyskytuje příliš mnoho možných tahů. To, že se ve hře vyskytuje jen velmi málo herních situací, neznamená, že taková hra není zajímavá. Příkladem hry, ve které lze hledat výherní strategii prozkoumáním všech možností, je hra TIC-TAC. Jedná se o hru piškvorky na hrací desce, která má pouze devět polí. Hráč, který jako první dosáhne tří svých znaků v řadě, vyhrává.

U této hry není z pravidel jasné, zda existuje výherní, nebo remízová strategie. Prozkoumáním všech možností ale snadno zjistíme, že hra je remízová. Tedy pokud ani jeden z hráčů neudělá chybu, musí hra skončit remízou.

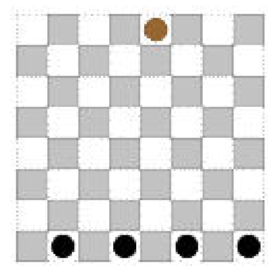
Prozkoumání všech možností po vyhrávajících tazích

U některých her nemusíme prozkoumávat všechny pozice, naprosto stačí, když prozkoumáme všechny pozice po tahu, který zaručuje výhru. Velmi jednoduchým příkladem je hra Číselný BlackJack. Tuto hru hrají dva hráči, před kterými jsou na stole rozloženy čísla od jedné do desíti. Hráči postupně odebírají karty s čísly a hodnotu odebraných karet sčítají (za oba hráče dohromady). Hráč, který jako první přesáhne svojí kartou v součtu hodnotu dvacet jedna, prohrává. Prozkoumávání všech možností by bylo příliš pomalé, pro nalezení a ověření výherní strategie stačí, když ověříme všechny situace za předpokladu, kdy první hráč odebere kartu s číslem deset. A v dalším rozboru se budeme zabývat pouze tahy, kterými může první hráč přímo vyhrát. Tímto postupem snadno zjistíme, že existuje výherní strategie této hry pro prvního hráče. Otázka, zda první hráč může vyhrát i po jiných úvodních tazích, je zajímavá, nicméně pro nalezení výherní strategie nepodstatná.

Nalezení posloupnosti výherních tahů

U některých her postačí při hledání výherní strategie nalézt sérii tahů, které zaručují cestu k výhře. V ideálním případě se může jednat o postup, který lze ve hře opakovat, a tak si zajistit vítězství. Příkladem hry, ve které lze použít tento postup, je hra Ovečky a vlk.

Pravidla hry Ovečky a vlk

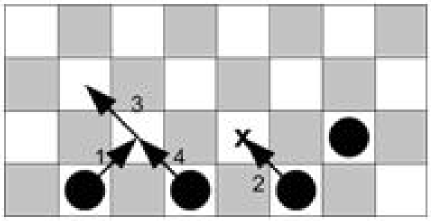


Hru hrají dva hráči. První hráč hraje za ovečky – hraje se čtyřmi kameny, které se pohybují pouze dopředu, a to na nejbližší pole stejné barvy. Druhý hráč hraje za vlka, může se pohybovat dopředu i dozadu, a to na nejbližší pole stejné barvy. Cílem oveček je znemožnit vlkovi pohyb.

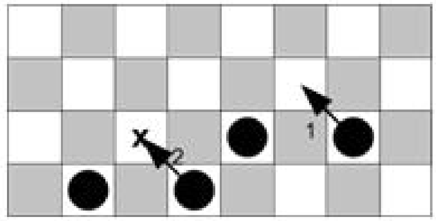
Pro hru je zřejmá strategie (ve smyslu plán hry): ovečky se snaží postupovat v řadě, kdežto vlk se snaží jejich řadu svými nájezdy roztrhnout. Jedna z vítězných strategií je na obrázku na konci článku.

Závěr

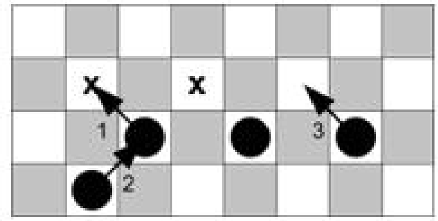
Matematika má mnoho podob a kombinatorická teorie her představuje jednu méně známou, zato však velmi zajímavou oblast matematiky. Tato disciplína je obvykle představována hrami jako jsou NIM, ve kterých se aktivně používá matematický aparát – například početní dovednosti a znalosti z oblasti dělitelnosti celých čísel a číselných soustav. Součástí kombinatorické teorie her je však i hledání výherních strategií i u běžných her. Mnoho výzkumů bylo zaměřeno na finální pozice ve hře GO a šachy. Diskuze o možných herních či dokonce výherních strategiích může být vhodným obohacením výuky matematiky a může přispět k rozvoji logického a kritické myšlení žáků.



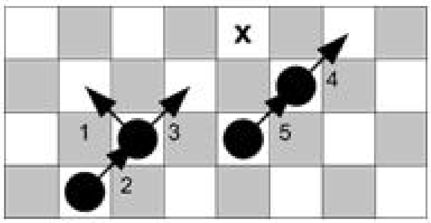
Pokud je vlk na jedné z pozic X, hrajeme tah 3, jinak hrajeme tahy 12.



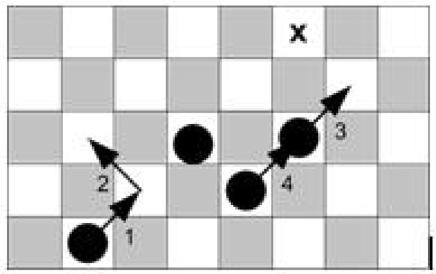
Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tah 1, jinak hrajeme tah 2.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tahy 1234, jinak hrajeme tah 2.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tah 3, jinak hrajeme tahy 12345.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tahy 3412, jinak hrajeme tahy 1234.

ÚLOHY VHODNÉ PRO NADPRŮMĚRNÉ ŽÁKY 1. STUPNĚ ZŠ

MICHAELA KASLOVÁ[1]

Vystoupení navazuje na loňský příspěvek – *Komunikace s nadprůměrnými žáky*.

TÉMATA, KTERÁ ŽÁKY PŘITAHUJÍ

- Matematika a historie – jak se dříve psalo, jak se počítalo, jaké úlohy se řešily
- Matematika a současná technika, architektura a výtvarné umění
- Poznávání vesmíru a velká čísla, Guinessovy rekordy (NEJ-)

Jsou úlohy, metody řešení, způsoby práce, kterým se nadprůměrní žáci vyhýbají. Je třeba si klást otázku proč. Nejčastější důvod je, že se bez nich obejdou; hlavní důvod však je, že nevidí smysluplnost a ekonomičnost. Je proto nutné uvažovat o takové modifikaci úlohy, u nichž nenacházejí relativně brzy řešení. Jde zejména o slovní úlohy, kde hraje roli porozumění jazyku, struktuře informací a úlohy, kde musí žáci črtat, rýsovat, kreslit a pracovat s drobným materiálem (u nadaných žáků je zpravidla podprůměrná úroveň

[1]PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

rozvoje jemné motoriky). Jsou ovšem i úlohy, které by u některých z nich stimulovaly snadněji ústní komunikaci. Je otázkou diskuse, které z odmítaných typů přesto zařazovat. V některých situacích se pro řešení vytvářejí bloky způsobené: pocitem podcenění, nucením do transformace komunikačních kódů (u nadprůměrného žáká se použití kódů řídí nikoli požadavkem učitele, ale především pocitem ekonomičnosti, snadnosti použití, což je individuální), nenasycená potřeba novosti či přesycení byť oblíbeným tématem.

Charakter úloh, které žáci sami vyhledávají

• úlohy, u nichž znají algoritmus řešení, ale kde se pracuje s výrazně vyššími čísly než ve škole
• aritmetické úlohy, které řeší na rychlost – soupeřem sám sobě, na to rádi navazují odhady výsledků (cifernost, ne větší než . . . , nejméně. . .)
• známé úlohy v nových číselných oborech
• na to navazuje skupina úloh počítání v jiných komunikačních kódech, práce na počítači, možnost cokoli řešit zpaměti, úlohy kombinatorického charakteru

Náročnější úlohy

Úlohy směřující do hloubky, vedoucí k objevování strategií představují sice úlohy motivující, avšak jejich dokončení je podmíněno nejen smysluplností, ale i chováním učitele, diskusí a předchozími zkušenostmi. Pokud žák pochopí princip, necítí často potřebu řešení dokončit. PODMÍNKOU dokončení je naděje na další využití v další úloze,ve hře, v sociální skupině, v obtížnější úloze jako výchozí krok. Podmínkou dokončení řešení je víc než snaha získat prestiž, dobrou známku či pochvalu, vyžaduje důslednost. Blokací může být také návyk užití rychločtení (z internetu), což nelze uplatnit u slovních úloh.

Podrobněji k vhodným okruhům (dále viz příloha)

Zahájení práce je u většiny žáků provázeno potřebou pracovat s čísly spíše na obtížnost než na rychlost – provádět operace, porovnávat, převádět z jedné soustavy do druhé. Další uvedu jen v heslech:
a) Znak – záznam množství, počtu (v historii od Mezopotámii po Máye), rozdíl mezi číslem a číslicí, porovnávání čísel v různých typech zápisů, převod z jedné soustavy do druhé, počítání v různých soustavách.
b) Rozdíl mezi rovinou a prostorem – význam 2. (3.) dimenze, orientace v rovině na úrovni her převážně ve dvojicích, poznání a popis dvou dimenzí jako postačujícího nástroje pro určení polohy objektu v rovině, odvození orientace v prostoru – rozdíl mezi souřadnicemi určujícími polohu objektu v 2D a 3D, využití – plány, mapy, fraktály, závislosti ve dvou směrech, shodná rozložitelnost celků.
c) Usuzování jako řetězení implikací, negace – význam v usuzování, vylučovací metoda, hypotéza a ověření – hry typu zebra, sudoku, včetně identifikační hry myslím si číslo a podobné.

Závěr

Proč diskutovat o výběru úloh? Ponechme stranou výchovnou stránku objevování a řešení. (Ne)mohou nadprůměrní žáci řešit jen to, co chtějí? Uzavření do světa matematických symbolů blokuje do jisté míry umění vidět matematiku v reálném světě.

Příloha – úlohy vhodné pro nadprůměrné žáky 1. stupně

(23 autorských úloh a jedna úloha neautorská)

1. Král chodil chodbou od dveří ke dveřím a přemýšlel. Od jednoho konce k druhému udělal 18 pomalých kroků. Když se ale rozčílil, prodloužil krok o 20 cm, rázoval chodbou od jednoho konce k druhému a potřeboval na to jen 12 kroků. Jak dlouhá je chodba?

2. Směna – na nově objevené planetě byly dvě země. Jedna používala papírové peníze s jednotkou kámen a drobné s jednotkou písek. Jeden kámen je 15 písků. V druhé zemi se používaly papírové peníze zvané klacek a drobné zvané dřívka. Jeden klacek byl za dvacet dřívek. Při obchodu mezi oběma zeměmi platilo pravidlo za tři klacky dva kameny. Vytvoř otázku a řeš. Např. kolik zaplatili klacků a dřívek, když zakoupení zboží v sousední zemi stálo 9 kamenů a 6 písků?

3. V dávné minulosti v orientu platilo směnné pravidlo 3: za tři ovce jedna kráva, za tři krávy jeden kůň, za tři koně jeden velbloud, za tři velbloudy nevěsta – princezna. Ožení se ovčák s princeznou, když má $\otimes$ ovcí? ($\otimes$ znak o určitém množství křížků nevyjádřený přirozeným číslem – základní číslovkou ani číslicemi.)

4. Kolik by potřeboval ovčák ovcí při směnném kurzu 4, aby se oženil a zůstal mu kůň?

5. Včera i dnes jsem hrál na počítači hru. Dnes jsem získal 600 bodů. Bylo to o třetinu méně než včera. Kolik bodů jsem získal včera?

6. Včera i dnes jsem hrál na počítači hru. Dnes jsem získal 600 bodů. Včera jsem získal o třetinu bodů více než dnes. Kolik bodů jsem včera získal?

7. Máme obdélník o rozměrech 6 cm a 2 cm. Rozděl ho na 3 části tak, abys z nich mohl složit čtverec.

8. Máme obdélník o rozměrech 8 cm a 4 cm. Rozděl ho na tři části tak a) abys z něho mohl složit čtverec, b) abys z něho mohl složit trojúhelník.

9. Jestliže strana jednotkového čtverce ve čtvercové síti představuje 10 m, vyznač v této síti co nejvíc různých n-úhelníků, které mají obsah (plochu) 1 ha.

10. Může mít 1 ha tvar trojúhelníka? Může mít tvar deltoidu, lichoběžníka? Tvrzení dokaž (lze i s vyžitím shodné rozložitelnosti).

11. Máme krychli složenou ze stejných kostiček, není známo z kolika. U jedné ze svislých hran jednu kostičku uberme (hrana se o 1 jednotku zkrátila) a u druhé - vodorovné hrany jednu kostičku přidejme (hrana se o jednu jednotku prodloužila) a nakonec třetí hranu vodorovnou – (k předchozí hraně kolmou) zachováme, pak stavbu upravíme tak, aby vznikl kvádr (ubíráním a přidáváním kostiček). Na tento kvádr budeme potřebovat

o 6 kostiček méně, než jsme potřebovali na krychli. Jaké byly rozměry krychle? (Kolik kostiček jsme potřebovali na krychli?)

12. Na oslavě se nabízely následující džusy: jahodový, pomerančový a banánový. Někdo si objednal sklenici jen s jedním druhem džusu, někdo si dal míchaný. Nápoje se míchaly tak, že do poloviny sklenice se nalil jeden druh a jiným druhem se zbývající polovina sklenice dolila. Každý si mohl vybrat nápoj, jaký chtěl. Kolik možností bylo na výběr? Jak jsi postupoval?

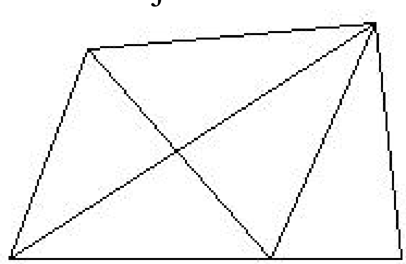
13. Ve třídě bylo 12 dívek a 10 kluků. Kolik možností má učitel na výběr pro obsazení rolí, když chce se třídou nacvičit pohádku Jak pejsek s kočičkou pekli dort (kočku může hrát jen dívka, pejska a zlého psa jen kluci).

14. Sestav labyrint tak, aby se jím dalo projít 6 (8, 8, 12) různými cestami. Cestou se myslí dráha, trasa, která směřuje k cíli (nevracíme se) a nepohybujeme se po jedné cestě v žádném úseku vícekrát (neběháme například dokola). Dvě různé cesty mohou mít společný jeden úsek nebo i více, ale nikdy nejsou trasou, která by byla oběma cestám celá společná. Cesty nemusejí být stejně dlouhé. Svá řešení porovnejte.

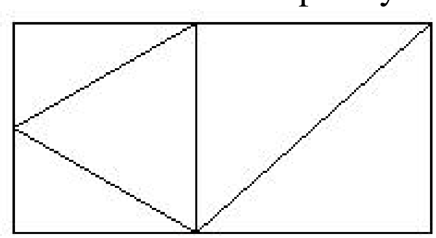
15. Sestav – vytvoř těleso (použití: modelína, nebo dráty, nákres, papír, špejle apod.), které má a) 6 vrcholů a 9 hran, b) 5 vrcholů a 9 hran, c) 6 vrcholů a 10 hran, d) 9 vrcholů a 15 hran, e) 8 vrcholů a 12 hran, f) 10 vrcholů a 14 hran. Který z úkolů má více řešení?

16. Najdeš těleso, které (ne)má: a) žádný vrchol, žádnou stěnu, b) jeden vrchol, c) 6 vrcholů, 12 hran a 8 stěn, d) 7 vrcholů, 12 hran a 7 stěn, e) 9 vrcholů, 16 hran a 9 stěn, f) 10 vrcholů, 20 hran a 12 stěn?

17. Kolik trojúhelníků (čtverců, obdélníků, kosočtverců, kosodélníků a lichoběžníků) je schováno v následujícím obrázku? Pozn. Útvary v obrázku se mohou překrývat.



a)



b)

18. Nakresli takový obrázek, aby v něm bylo možné najít přesně a) jeden obdélník, dva lichoběžníky, tři trojúhelníky, b) tři obdélníky, čtyři trojúhelníky a dva lichoběžníky.

19. Úlohy s použitím historických zápisů čísla:

a) Sečti CCXCIX
LXXVII

b) Odečti M – DII, CCC – XIX, L – XIV,

c) Vynásob dané číslo XVII takovým číslem, abys k zapsání součinu potřeboval méně znaků (písmen), než zapsání libovolného z obou činitelů.

20. Sečti taková tři čísla, abys k jejich zápisu použil 10 znaků (písmen) a součet byl: a) menší než 700, b) větší než 700, ale menší než 999 c) větší než 1050.

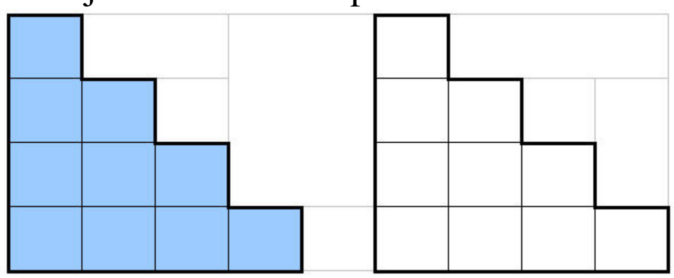
21. Algebrogramy

a) $AB + CD = EFG$ (nenulové číslice)

b) Vymysli algebrogram, který má 3 řešení.

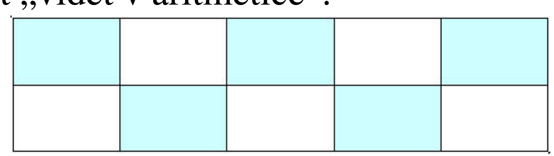
22. Zebry. Karolína, Jana, Bára a Anička sbírají plyšové hračky. Každá mluví o svém největším oblíbenci. Karolína má nejraději svého tygříka. Bára má růžového plyšáka Divu. Anička má malého plyšáka, ten není ani bílý, ani modrý. Janě se zelený oslík nelíbí, zato bílá Ája je její mazlík. Tygr není Ouško, ale Vousek. Jak se plyšáci jmenují, jakou mají barvu a komu patří?

23. Do následující mřížky vyplňte čísla od 1 do 10 tak, aby v sousedních polích nebyla čísla, která se od sebe liší o jednu nebo která patří do téže malé násobilky.



24. Úloha s „malými čísly" převzatá z *Haló sobota* (1985)

Zapiš čísla od 1 do 10 do tabulky tak, aby každé číslo zapsané v barevném poli bylo součtem čísel zapsaných v sousedních bílých polích (sousední – mají společnou stranu). Pochopitelně je každé číslo v tabulce jen jednou. Lze řešit pokusem – omylem, ale lze použít i úvahu a schopnost „vidět v aritmetice".



OTEVŘENÉ DIDAKTICKÉ SEMINÁŘE

EVA KREJČOVÁ[1]

Ve snaze přiblížit studentům, budoucím učitelům oboru 1. stupně základní školy některé organizační formy vyučování a metodické přístupy, které v roli žáků spíše nezažili a o kterých se domníváme, že jsou přínosné, pořádáme již několik let otevřené didaktické semináře. Jsou jakýmsi realizačním výstupem výběrového semináře z matematiky. Zveme na ně studenty, cvičné učitele a pracovníky fakulty.

[1] *Katedra matematiky PdF UHK, eva.krejcova@uhk.cz*

Didaktické semináře mají charakter krátkodobých projektů (zpravidla dvouhodinových) zaměřených na zvolené inspirativní téma. Jsou určeny pro žáky jedné věkové kategorie nebo pro více ročníků. Jejich předností je, že navozují reálnou situaci, neboť studenti v roli učitelů pracují s dětmi.[2] Nejde tedy o simulované situace. Účastníci zde vidí bezprostřední dopad pracovních činností na žáky: jejich reakce, nasazení.

Otevřené didaktické semináře sledují několik cílů:

- Studenti dostávají další příležitost pracovat s dětmi, a to za okolností, na kterých jim mimořádně záleží – chtějí uspět, dobře se prezentovat. To předpokládá vynaložení značného úsilí ve fázi promýšlení obsahu a metod. Zdokonalují se v přípravě didaktického materiálu (motivace, funkce).

- Pro jejich přítomné kolegy mohou shlédnuté činnosti znamenat vítaný zdroj inspirace a celková atmosféra i posílení prestiže učitelského povolání.

- Také fakultní učitelé přijímají svoji účast pozitivně. Nezřídka berou tuto příležitost i jako potřebný impuls k „vybočení ze zajetých kolejí“. Neformálně se posilují vzájemné vztahy.

- Snažíme se rovněž o širší publicitu námětů a činností, které se na seminářích ukazují jako podnětné a přínosné. Publikujeme je v podobě příspěvků v didaktických časopisech (Moderní vyučování, Komenský, Učitelské listy) – viz např. [1], [2], [3]. I tato skutečnost studenty pozitivně ovlivňuje.

Stručně přiblížíme poslední seminář s názvem: *Od knoflíku k poznatku v hodinách matematiky*. Konal se v dubnu minulého akademického roku a byl zaměřen na činnostní přístup ve vyučování a kooperativní učení zasazeného do rámce menšího projektu. Jednalo se o různé možnosti využití prosté didaktické pomůcky – knoflíku v matematice, ale i v dalších předmětech 1.–4. ročníku základní školy. Studenti pomocí manipulativních činností s knoflíky procvičovali s dětmi osvojení pojmu přirozeného čísla (kvantitativní význam, přirozenou posloupnost, princip desítkové číselné soustavy), základní početní operace (vyvození, vlastnosti), řešení slovních úloh různých typů, propedeutiku přímé úměrnosti, rozvíjeli jejich představivost a tvořivost.

Každý prezentovaný ročník zastupovali čtyři žáci, kteří pracovali nejdříve ve dvojicích, pak společně – tedy ve čtyřčlenných skupinách.

Po společném úvodu (motivace – hádanka, knoflíkový král, historie vzniku knoflíku, sestavování obrázků z knoflíků – tvořivá činnost jednotlivců) pracovaly děti podle ročníku na čtyřech stanovištích. Činnost v jednotlivých pracovních centrech řídili a usměrňovali

[2] Směrem k žákům jde o zdánlivě náročnou situaci; jiné – neznámé prostředí (semináře se odehrávají na fakultě), jiní učitelé, hodně „diváků“. Zkušenosti však naznačují, že vhodně voleným přístupem, motivací, vytvořením příznivého klimatu lze tyto obavy vyloučit.

vždy dva studenti. Paralelně tedy probíhala výuka ve všech zmíněných věkových skupinách. Zaměstnání vycházela z jejich věkových zvláštností, z probíraného učiva. Pojícím prvkem byl knoflík, jeho možné didaktické interpretace v různých předmětech.

K naplňování pedagogického požadavku „SSS“ („smysluplnost, spolupráce, svobodná volba“) přispívala nejen jednoduchá didaktická pomůcka, ale také vhodně volená zaměstnání.

Studenti připravili pro děti řadu inspirativních činností, při nichž mohly uplatnit vědomosti, dovednosti a zkušenosti z různých oblastí a dále je prohloubit. Náměty matematické povahy střídaly úkoly využívající převážně pracovní a výtvarné techniky.

K vytvoření podnětného pracovního prostředí a navození fungující vzájemné spolupráce ve skupinách přispěly i různé skládanky zhotovené v kontextu s projektem.

Děti dávaly dohromady rozbitý knoflík (papírový model knoflíku rozstříhaný na několik částí), „sešívaly“ košilku z jednotlivých dílů (matematické loto) apod.

K navázání žádoucí komunikace posloužily i vizitky školáků v podobě knoflíků (pozn. studenti děti neznali).

Dodejme, že otevřenému semináři vždy předchází průprava a potřebné sladění. Studenti mají značnou volnost ve volbě definitivní obsahové náplně i organizační strategie.

O tom, že se tyto semináře osvědčují, dokládá mj. fakt, že katedra matematiky byla požádána připravit letos v rámci konání konference k 10. výročí založení Ústavu primární a preprimární edukace PF UHK akci podobného charakteru.

Literatura

[1] Brzáková, M., Krejčová, E. Od knoflíku k poznatku v hodinách matematiky (inspirace k výuce matematiky na 1. stupni základní školy). *Moderní vyučování*, 2006, č. 6.

[2] Krejčová, E. Jak nás inspirovaly knoflíky. *Moderní vyučování*, 2006, č. 10.

[3] Krejčová, E. Knoflíková matematika (soubor námětů k činnostnímu přístupu ve vyučování matematice). In *KAFOMET*, Infra, aktualizace M-061.2.

Výsledky vzdělávání v 9. a 5. třídách ZŠ

Eva Řídká, E. Lesáková[1]

Naše dvacetiminutové vystoupení vnímáme jako příležitost aspoň stručně seznámit učitele matematiky s tím, co děláme a co zjišťujeme.

Jsme z CERMATu, dříve Centra pro reformu maturit, nyní Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání (též někdy CZVV). Webová adresa: www.cermat.cz

I) Na jaře roku 2007 jsme po sedmé zkoumali znalosti maturantů středních škol v programu „Maturita nanečisto“. V tomto programu, který je zaměřen k přípravě a zajištění společné části maturitní zkoušky (aktuálně od roku 2010, dále jen MZ), připravujeme jeden test v tzv. základní úrovni, který je koncipován jako povinně volitelný test do společné části MZ, a druhý test v tzv. vyšší úrovni. Podle aktuálních informací, které v únoru 2007 nebyly ještě známé, si maturanti budou úroveň testu ve společné části moci zvolit.

II) Na jaře roku 2007 rovněž probíhalo celostátní šetření „Hodnocení výsledků vzdělávání v 9. (5.) třídách ZŠ“. Toto šetření probíhá ve školách, které se k testování přihlásí (všechny školy jsou osloveny), a to trojicí testů: „Matematické dovednosti“, „Dovednosti v českém jazyce“ a „Obecné dovednosti“. V devátých třídách probíhalo testování počtvrté, v pátých třídách podruhé. Výsledky z tohoto testování jsou v CERMATu k dispozici a seznamujeme s nimi učitele matematiky na všech možných profesních setkáních. Testování v 5. třídách je ze strany MŠMT dočasně pozastaveno, na jaře 2008 proběhne ještě „Hodnocení výsledků vzdělávání v 9. třídách“.

III) Průběžně připravujeme s pomocí skupiny expertů z příslušných stupňů škol tematické testy, které jsou mimopražským školám k dispozici na našem webu. Z matematiky jsou tam zatím vyvěšeny testy pro ZŠ „Racionální čísla“ a pro SŠ „Algebraické úpravy“. Další dvojice se připravuje – pro ZŠ „Planimetrie“ a pro SŠ „Rovnice a nerovnice“. Testy lze nalézt pod odkazem `Projekt Kvalita 1\Přihlašování pro školy\IZO školy` a přístupové heslo. Jejich použití je bezplatné.

IV) Součástí vystoupení byl malý vhled do výsledků získaných z řešení geometrických úloh v 5. třídě, v 9. třídě a v maturitní třídě SŠ. Bylo možné nahlédnout, jak veliké procento žáků tyto úlohy vůbec neřeší a jak malé procento žáků řeší úlohy úspěšně. *Naprostá ztráta kontroly nad výstupy žáků ze základní školy se nám jeví jako velmi nešťastná.*

Pokud by se kdokoliv z čtenářů o naše testy a zjištění zajímal, nechť napíše na uvedený kontakt.

[1]CZVV, ridka@cermat.cz, lesakova@cermat.cz

OTEVÍRÁNÍ GEOMETRICKÉHO SVĚTA[1]

KLÁRA NEČASOVÁ[2]

ÚVOD

Během studia na univerzitě i v průběhu své pedagogické praxe na základní škole jsem oceňovala moderní přístupy ke vzdělávání dětí, které korespondovaly s myšlenkami konstruktivismu a kooperativního učení. [1] Aktivní forma výuky, angažovanost dětí ve výchovně-vzdělávacím procesu, hra, pohyb, konkrétnost a praktičnost byly dle mých představ nutné složky hodin. Byla jsem ale poněkud zklamaná, jak málo toho, co jsme se učili na fakultě, jsem mohla pozorovat při svých hospitacích v běžné výuce na prvním stupni základní školy. Tato má zkušenost jen podporuje tvrzení (Jirotková a Littler, 2007), že geometrii není v rámci matematiky věnován dostatek času a že zejména ve vyučování prostorové geometrii převažují transmisivní metody, které jsou spíše zaměřené na učení se terminologii, než na pojmotvorný proces.

Osobně považuji za klíčové, aby:

- ve výuce matematiky nedominovala rovinná (2D) geometrie, ale aby se žáci seznamovali i s tělesy v prostoru (3D),
- se žáci učili skrze vlastní poznání a prožitky, tedy na základě manipulace s konkrétními předměty a tvary,
- nepřevažovala frontální výuka,
- geometrie nebyla omezovaná na rýsování,
- žáci pochopili, co je obsahem pojmů, a neučili se mechanicky geometrické názvosloví bez pochopení,
- výuka byla propojena na praktický život,
- si děti budovaly pozitivní vztah k předmětu, viděly v něm smysl a zábavu.

V tomto příspěvku uvedu aktivitu, která výše uvedené složky matematického vzdělávání podporuje. Při svých experimentech realizovaných v rámci zpracování diplomového úkolu (realizovala jsem experimenty s 28 dvojicemi žáků) se tato aktivita osvědčila jako vhodná metoda pro seznamování žáků s objekty prostorové geometrie i souvisejícím názvoslovím. Aktivitu, která je vlastně jakousi hrou, lze modifikovat pro žáky 1.–5. ročníku

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GAČR 406/05/2444.
[2]klara.necasova@centrum.cz

ZŠ bez ohledu na předchozí zkušenosti a znalosti z oblasti geometrie a její pravidla je možné upravit podle potřeb.

Pravidla hry

K dispozici jsou dvě stejné sady těles, každá pro jednoho žáka. (V mých experimentech žáci pracovali se sadou 13ti těles, která obsahovala jak tělesa žákům dobře známá – krychle, pravidelný čtyřboký hranol, kvádr, čtyřboký jehlan, válec, kužel, tetraedr, tak tělesa méně známá – komolý kužel a komolý jehlan, trojboký a šestiboký hranol, ale také tělesa, se kterými se pravděpodobně do té doby ještě nesetkali – nekonvexní pětiboký hranol a jehlan. Počet a složení sady těles lze variovat podle úrovně a zkušeností žáků.)

Děti pracují ve dvojicích a jsou si navzájem partnery. Sedí tak, aby na sebe neviděly. Každý má před sebou sadu těles. Žák A si volí libovolné těleso a popisuje ho žákovi B. Žák B jej na základě informací hledá mezi tělesy své sady. Hra probíhá formou dialogu, žáci mohou používat jakékoli výrazové prostředky, doptávat se, jejich komunikace je zcela neomezená. Pokud se oba žáci dohodnou, že drží stejný předmět, hra končí a oni si tělesa porovnají, čímž okamžitě získají zpětnou vazbu o úspěšnosti. Pokud nedrží stejné objekty, diskutují, proč došlo k nedorozumění a chybnému řešení.

Ilustrace 1 (experiment realizován ve 2. třídě)

Kuba popisuje Vaškovi komolý kužel.

Kuba: „Vypadá to jako kužel, ale nevypadá to špičatý. Je to tak, jako by se to useklo, a vypadá to jako, vypadá to jako nějaká malá věž a v ní je jeden strážník.“

Vašek: „Sukně, taková pro panenky?“ Vašek drží komolý kužel.

Kuba přikyvuje, že odhalil stejný předmět. Vašek i Kuba opravdu správně našli identická tělesa.

Přínos hry: Děti musí v rámci hry komunikovat o tělesech. V běžné výuce se takovéto aktivity prakticky vůbec nevyskytují. Žáci tak rozvíjejí své komunikační dovednosti, okamžitě dostávají zpětnou vazbu, jak jim jejich komunikační partner rozumí. Také prohlubují své geometrické vědomosti – začínají si všímat jevů, pomocí kterých jisté těleso mohou popsat. Rozvíjejí i sociální stránky komunikace – jsou si partnery a jejich úkolem je, co nejdříve se domluvit. Dále uvedu čtyři jevy, které jsem na základě svých opakovaných experimentů shledala jako důležitý přínos této aktivity pro poznávání geometrických objektů v prostoru.

Názornost, konkrétnost: Děti během aktivity předměty osahávají a pojmenovávají konkrétní vlastnosti těles a průvodní jevy, které mají bezprostředně spojeny s hmatovým vjemem. Jednotlivá tělesa porovnávají, pozorně sledují, co mají společné a v čem se liší. Veškeré jevy jsou tedy vnímány zrakem i hmatem a následně jsou uchopeny do slov. Každý žák má v této hře možnost vnímat těleso na své úrovni, jako celek a také jeho jednotlivé analytické vlastnosti. Tedy manipulativní zkušenosti s tělesy předchází zavedení terminologie.

Myšlení nahlas: Žáci spolu otevřeně komunikují a vyjadřují své dojmy a poznatky o daném tělesu. Hlasitě tak sdělují svému partnerovi i učiteli své myšlenkové procesy. Učitel má tak možnost sledovat úroveň žákova vnímání, analyzovat chyby a přivádět žáky do kognitivních konfliktů, aby se jejich překonáváním sami učili.

Ilustrace 2 (experiment realizován ve 2. třídě)

Eliška po ukončení hry začala porovnávat tělesa, která zvolila jako stejná. Velice dobře pojmenovávala shodné i rozdílné vlastnosti:

Eliška: „A tohle je vlastně rozšířený jako nějaký šaty."

Začíná porovnávat nekonvexní jehlan a nekonvexní hranol. „Tohle není taky stejný, protože tohle vypadá jako pyramida nebo stíhačka."

Ukazuje nekonvexní jehlan: „A tohle jako kdyby si měla takhle, tak je to jakoby taková placatá klouzačka, když to dáte takhle. A když to dáte takhle a tak, je to jako stan."

Obrací těleso tak, aby bylo nekonvexní částí otočeno dolů na stůl. „A je to stejný v tom, tohle je stejný a není to stejný v tom, že tohle je špičatější. A tohle je skoro jako kostka, jenom kdybych tam dala trojúhelník."

Pozitivní klima: Žáci mezi sebou nesoupeří, naopak, jsou si partnery. Prostředí hry a spolupráce tak utváří bezpečné klima, žáci nemají důvod obávat se hovořit, pojmenovávat jevy podle vlastního uvážení. Toto klima silně ovlivňuje motivaci žáků k poznávání geometrických objektů a tím jistě přispívá i ke kladnému postoji k matematice.

Rozvoj komunikačních dovedností: Děti se během hry učí nutným dovednostem pro každodenní komunikaci. Nejen, že si rozšiřují slovní zásobu přejímáním pojmů, cítí potřebu používat nové výrazy jako hrana, vrchol, stěna apod., ale učí se i hovořit srozumitelně, formulovat smysluplné věty, naslouchat svému komunikačnímu partnerovi, snažit se mu rozumět a své porozumění pak vhodně reflektovat. Je zřejmé, že tato aktivita přispívá rozvoji sociálních složek osobnosti.

Metaforický jazyk – podpora pro geometrické pojmy

Žáci potřebují pro popis těles jejich názvy, případně pojmenovávat jejich vlastnosti a jevy. Neznají však správnou terminologii. Využívají tedy k popisu celou řadu přirovnání, asociují tvary geometrické s okolním světem. Například kužel byl dětmi nazván: „kulatá pyramida, tee pee, nos Pinochia"; komolý kužel popisovaly: „jako kužel bez špičky, jako věž, jako komín bez špičky, sukně pro panenky, šaty" apod.

Výrazové prostředky dětí jsou velmi bohaté a umožňují nám učitelům tak nahlédnout do spektra jejich zkušeností a zážitků, které promítají do svého porozumění geometrickým objektům. Máme pak možnost při rozhovoru s dětmi volit taková slova, pojmy, o kterých víme, jak jim rozumí, a tak eliminovat možné nedorozumění.

Cílem této aktivity není naučit žáky používat správné geometrické názvosloví, ale obrátit jejich pozornost k vlastnostem těles, naučit je vnímat jejich vlastnosti a vazby jak mezi vlastnostmi, tam i mezi tělesy. Geometrická terminologie ať již správná, nebo dětmi vytvořená, by z této aktivity měla vyplynout jako komunikační nutnost, jako prostředek, jak se vyhnout komunikačním nedorozuměním.

ZÁVĚR

Hra s tělesy je zábavnou a didakticky hodnotnou složkou vyučovacího procesu, která skrze manipulaci s předměty otevírá žákům poznání o geometrických tělesech a zároveň zdokonaluje interaktivní dovednosti. Její pravidla je možné upravovat a obměňovat podle potřeb (zavázat oči, redukovat dialog na monolog, omezit počet slov pro popis apod.). Když změníme konkrétní modely těles na jejich jiné reprezentace (např. 2D obrazy, názvy), modifikujeme tím tuto aktivitu i na druhý stupeň základní školy.

Problematika geometrie na prvním stupni, její současné pojetí i využití této hry byly obsahem mé diplomové práce a předmětem prezentace na jednání v sekci na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2007. Posluchači, zejména učitelé druhého stupně základních škol, reagovali velmi pozitivně. Souhlasili s názorem, že výuka 3D geometrie je v současném pojetí natolik abstraktní, že si žáci z ní neodnášejí dále téměř žádné znalosti. Vyskytly se i názory, že „horší by to ani být nemohlo“. Učitelé se shodli na tom, že problém netkví v nedostatku modelů na školách, téměř všude lze nalézt různé sady těles, avšak problém je v tom, že s nimi žáci při výuce nepracují. Žáci však přicházejí již z prvního stupně s velice chudými zkušenostmi s tělesy a vzhledem k nedostatku času na druhém stupni tento handicap již nelze dohnat. Tak se stanou geometrické poznatky pro žáky formální, nepodložené zkušeností a porozuměním. Mnozí učitelé velice podpořili přednesený přístup k poznávání geometrických těles, který vychází z manipulací s tělesy doprovázené slovními komentáři.

LITERATURA

[1] Jirotková, D., Littler, G. *Classification, Manipulation and Communication: Work with Pupils and Student Teachers*, http://www.cyprusisland.com/cerme/group3.htm [2. 3. 2007]

Doporučuji ke čtení relevantní publikace

[2] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

[3] Kasíková, H.: *Kooperativní učení a vyučování*. Praha: Karolinum, 2001

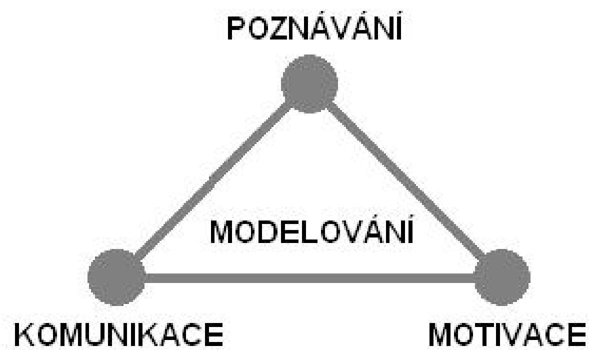
[4] Kasíková, H.: *Kooperativní učení, kooperativní škola*. Praha: Portál, 1997.

GEOMETRICKÉ MODELOVÁNÍ[1]

FILIP ROUBÍČEK[2]

ÚVOD

Geometrické modelování představuje ve vyučování matematice významný prostředek poznávání. Modely nám umožňují uchopit abstraktní svět geometrie. Uplatnění různých forem modelování ve vyučování geometrii je důležité pro rozvoj geometrické představivosti žáků. Rozmanitost modelů, s nimiž žáci pracují, ovlivňuje kvantitu a kvalitu jejich představ o geometrických objektech. Modely rovněž představují prostředky komunikace mezi učitelem a žáky. Geometrické poznání totiž nelze plně zprostředkovat bez modelů, které mohou žáci vidět nebo vzít do ruky. Všechny formy modelování, které žáka aktivizují (žák například model vytváří nebo přetváří), motivují žáka k objevování geometrických zákonitostí. Modelování tedy představuje ve vyučování geometrii prostředek poznávání, komunikace a motivace.



Z rozsáhlého studijního textu zpracovaného v rámci projektu ESF Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu pro školení modulu *Geometrické modelování jako příležitost k aktivnímu učení* vybíráme dvě krátké ukázky.

GEOMETRIE PŘEKLÁDANÉHO PAPÍRU

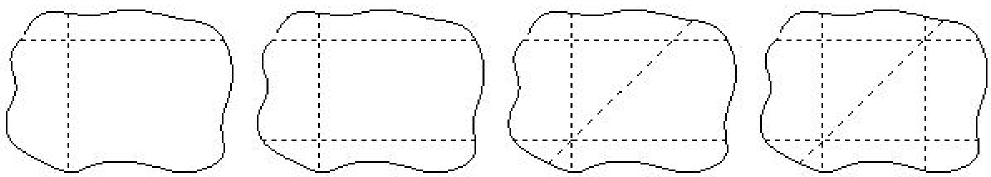
Skládanky z papíru – origami patří k tradičním technikám modelování a ve stále větší míře jsou uplatňovány i ve vyučování geometrii. Modelování překládáním papíru je zejména alternativou k tradičnímu rýsování. Používá se nejen v planimetrii, ale i ve stereometrii při modelování mnohostěnů.

---

[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. esf a výzkumného záměru AV0Z10190503.

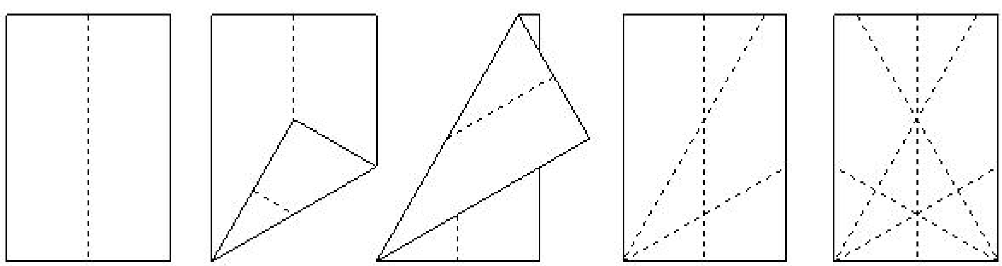
[2]Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Praha, roubicek@math.cas.cz

List papíru reprezentuje rovinu a hrana vzniklá jeho přeložením přímku. Při modelování z listu papíru formátu A4 využíváme v konstrukcích kolmost a rovnoběžnost hran listu. Chceme-li konstrukce zobecnit, je třeba rovinu reprezentovat listem papíru, který nemá rovné hrany (toho docílíme například otrháním okrajů listu papíru). Na obr. 1 je znázorněna konstrukce čtverce, ve které jsou použity tři základní konstrukce: konstrukce kolmice, konstrukce rovnoběžky a konstrukce osy úhlu. Konstrukci čtverce překládáním papíru lze provést užitím různých vlastností čtverce, například kolmosti úhlopříček. Žáci mají tedy příležitost objevovat různé konstrukční postupy.



Obr. 1: Konstrukce čtverce

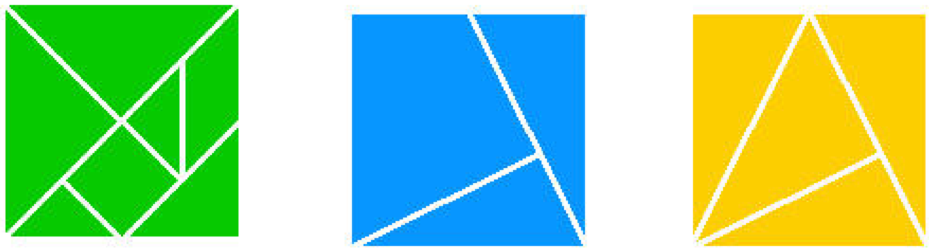
Při konstruování útvarů bez užití běžných rýsovacích potřeb (trojúhelníku s ryskou, kružítka, úhloměru) jsou žáci vedeni k uvědomování si vlastností útvarů a vzájemných souvislostí mezi nimi. Například konstrukce rovnostranného trojúhelníku pomocí kružítka a pravítka je pro žáky snadná, ovšem v novém prostředí se stává pro mnohé z nich obtížnou úlohou. Konstrukce překládáním papíru totiž vyžaduje uvědomění si nejen shodnosti stran či vnitřních úhlů trojúhelníku, ale též jeho souměrnosti (viz obr. 2).



Obr. 2: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

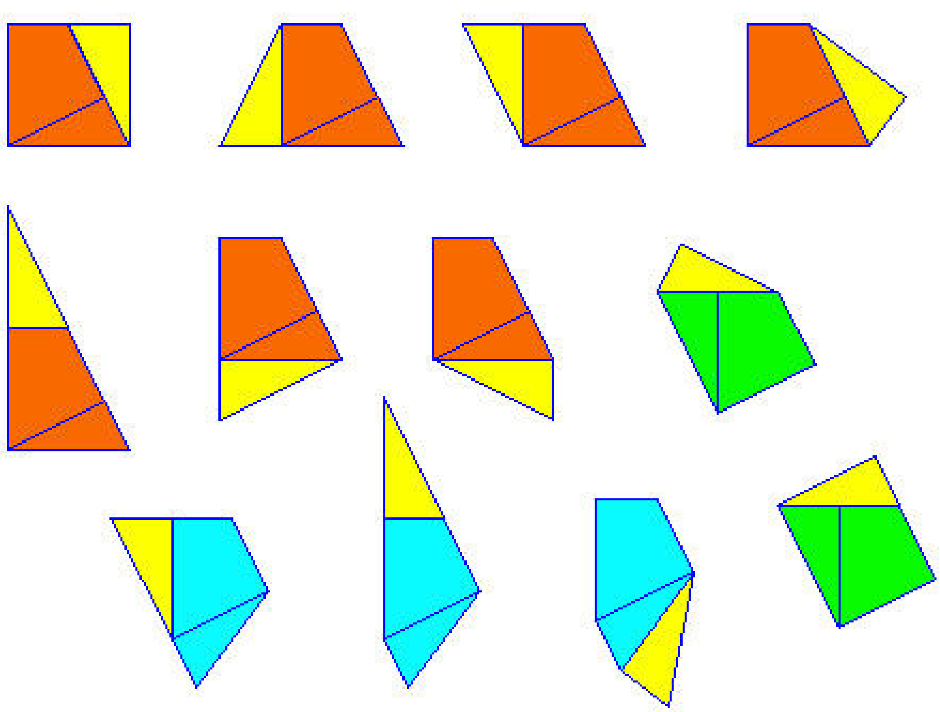
Geometrické skládačky

S modelováním geometrických obrazců pomocí různých skládaček se seznamují děti již v předškolním věku. Skládačky různého typu jsou hojně používány zejména ve výuce na prvním stupni základní školy, ale své uplatnění nacházejí i ve vyučování geometrii na druhém stupni. Mezi nejznámější patří tangram – hlavolam, který vznikl rozdělením čtverce na sedm dílů (viz obr. 3). Z tangramu lze sestavit různé obrazce zpodobňující osoby, zvířata a věci, ale také 13 konvexních mnohoúhelníků. Při sestavování je třeba dodržet dvě základní pravidla: obrazec musí být sestaven ze všech sedmi dílů a jednotlivé díly v obrazci se nesmějí překrývat.



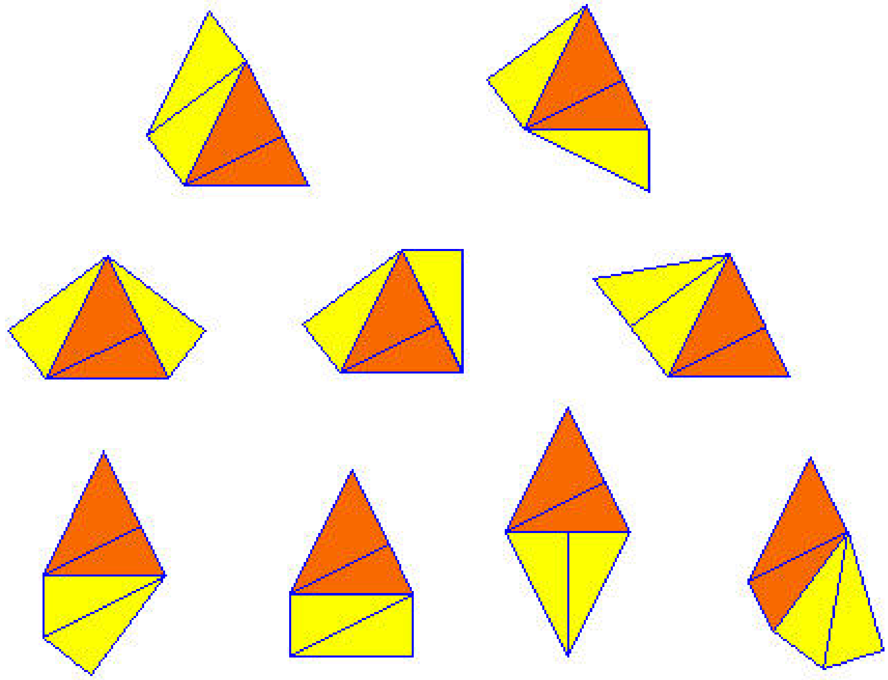
Obr. 3: Geometrické skládačky

Modelování z tangramu může být pro žáky, kteří mají tangram v ruce poprvé, obtížné. Proto je vhodné zvolit na začátek jednodušší skládačky s menším počtem dílů. Trojdílnou a čtyřdílnou skládačku na obrázku 3 získáme obdobně jako u tangramu rozdělením čtverce (dělicí čáry jsou spojnice vrcholů a středů stran čtverce, přičemž jedna z nich je ukončena v jejich průsečíku). Počtem mnohoúhelníků, které lze z nich sestavit, jsou srovnatelné s tangramem, ovšem nalezení všech možných uspořádání dílů je mnohem snazší. Z trojdílné skládačky, kterou tvoří dva podobné pravoúhlé trojúhelníky a různoběžník, lze sestavit 12 různých konvexních mnohoúhelníků (viz obr. 4).



Obr. 4: Konvexní mnohoúhelníky sestavené z trojdílné skládačky

Čtyřdílnou skládačku získáme z trojdílné skládačky rozdělením čtyřúhelníkového dílu (různoběžníku) na dva pravoúhlé trojúhelníky (viz obr. 3). Ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků (z nichž dva jsou shodné) lze sestavit dalších 9 mnohoúhelníků, mezi nimi i kosočtverec a deltoid (viz obr. 5). Pro modelování všech typů konvexních čtyřúhelníků je tedy téměř ideální pomůckou (s jedním omezením – při dodržení pravidla užití všech dílů nelze sestavit pravoúhlý lichoběžník). Při sestavování konvexních mnohoúhelníků je vhodné vést žáky k objevení postupu, kdy z jednoho mnohoúhelníku získají rozdělením a přemístěním jeho části další, jak je barevně naznačeno na obr. 4 a 5.



Obr. 5: Konvexní mnohoúhelníky sestavené ze čtyřdílné skládačky

ZÁVĚR

Uvedené metody modelování geometrických útvarů jsou jen malou ukázkou toho, co lze ve vyučování matematice použít. Existuje mnoho dalších způsobů geometrického modelování, jmenujme například geometrické stavebnice, pop-up geometrii, provázkovou geometrii. Tyto formy modelování představují alternativu k tradičnímu rýsování a demonstraci hotových modelů. Nelze opomenout ani možnosti, které nabízejí moderní technologie. Pomocí počítače můžeme modelovat situace, jejichž reprezentace užitím tradičních didaktických pomůcek není možná. Při výběru metody je třeba zohlednit nejen dovednosti žáků a materiální zajištění, ale též posoudit vhodnost modelu pro reprezentaci daného geometrického objektu nebo situace.

LITERATURA

[1] ROUBÍČEK, F. Geometrické konstrukce z pohledu různých didaktických prostředí. In Krátká, M. (ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let (Sborník příspěvků)*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006, s. 187–195.

[2] SÝKORA, V., ROUBÍČEK, F., PŘIBYL, J. Geometrické modelování jako příležitost k aktivnímu učení. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – Studijní materiály k projektu CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006. [CDROM].

MATEMATICKÁ SOUTĚŽ TURNAJ MĚST, ŽÁKOVSKÁ ŘEŠENÍ ÚLOH[1]

LUCIE RŮŽIČKOVÁ, JAROSLAV ZHOUF[2]

O SOUTĚŽI

Turnaj měst je celosvětová soutěž v řešení matematických úloh, kterou založil v roce 1979 význačný ruský matematik a pedagog Nikolaj Konstantinov. Později nad soutěží převzala záštitu ruská Akademie věd. Konstantinov chtěl vytvořit matematickou soutěž, která by byla úplně jiná než všechny ostatní. V tomto duchu je hlavním záměrem Turnaje měst poskytnout širšímu okruhu studentů příležitost zúčastnit se matematické soutěže světového formátu. To neumožňuje například soutěžní systém Matematické olympiády, kde do dalšího kola postoupí vždy jen ti nejlepší řešitelé z kola předchozího. Turnaj měst je jiný právě v tom, že je to soutěž otevřená všem, protože kdokoli se může zúčastnit kteréhokoli kola. Dalším cílem je pak poskytnout učitelům na lokální úrovni kvalitní matematické úlohy a další materiály.

Turnaj měst je určen především pro studenty na úrovni naší SŠ. Soutěžící jsou rozděleni do dvou kategorií, kategorie Junior je určena studentům 2. ročníku SŠ a mladším, kategorie Senior studentům 3. a 4. ročníku SŠ. Turnaj měst se v každém školním roce pořádá ve dvou kolech: na podzim a na jaře. Každé kolo má pak přípravnou a hlavní část, které se konají v odstupu dvou týdnů. Každá část obsahuje 5, resp. 7 úloh na výběr, soutěžícímu se započítávají pouze 3 úlohy, z nichž získal nejvyšší počet bodů. Řešitelé pak mají na vybrané 3 úlohy časový limit 4 hodiny v přípravné části a 5 hodin v hlavní části.

[1]Článek byl podpořen Výzkumným záměrem MSM 0021620862 – Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání.

[2]Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Lucie_Ruzickova@seznam.cz, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Úlohy Turnaje měst jsou otevřené, nevyžadují žádné speciální znalosti nebo zvláštní počtářské dovednosti, ale spíš představivost a nápad. Úlohy přípravné varianty jsou méně náročné, za jejich vyřešení však studenti obdrží méně bodů. Bodové hodnocení za úlohy hlavní varianty je někdy i třikrát vyšší než za úlohy varianty přípravné, jsou to ale úlohy složitější, některé z nich obtížností odpovídají úlohám Mezinárodní matematické olympiády, nejnáročnější z nich často vyřeší jen několik účastníků, nicméně zkusit si to můžou všichni.

Turnaj měst má tedy v daném školním roce dohromady čtyři části, soutěžící se může zúčastnit všech nebo třeba jen jedné z nich, přitom má pořád šanci dosáhnout dobrého výsledku. Celkové skóre v Turnaji měst je totiž dáno maximálním bodovým výsledkem dosaženým v jedné z těch čtyř částí, takže vlastně stačí účast v jediné z nich. Bodový výsledek je u každého studenta násoben speciálním vyrovnávacím koeficientem v závislosti na tom, ve kterém ročníku studuje, aby se eliminovalo znevýhodnění mladších studentů.

Jako uznání obdrží jednotliví soutěžící, kteří dosáhnou stanoveného minimálního počtu bodů, diplom od ruské Akademie věd. Nejúspěšnější řešitelé jsou pak každoročně zváni do Ruska na společné letní soustředění.

Turnaj měst je ovšem nejen soutěží jednotlivců, ale i soutěží měst. Celkové skóre města se určí z průměru výsledků jeho několika nejlepších soutěžících, v závislosti na počtu obyvatel daného města. U menších měst se pak ještě výsledné skóre upraví vyrovnávacím handikepovým koeficientem. V současnosti se Turnaje měst každoročně účastní studenti ze 120 měst z 25 zemí světa: např. z Ruska, Ukrajiny, Bulharska, Austrálie, Kanady, Kolumbie, Argentiny, Brazílie, Německa, Francie, Švédska, Rakouska, Lucemburska, Izraele, Nového Zélandu, USA, Taiwanu.

Na podzim 2006 se poprvé zúčastnila také dvě města z České republiky: Praha a Bílovec. Další informace o soutěži i kompletní zadání úloh ze všech předchozích ročníků je možno získat na uvedených webových stránkách. Do budoucna se připravují i webové stránky českého Turnaje měst.

UKÁZKA JEDNÉ ÚLOHY S MALÝM KOMENTÁŘEM K ŽÁKOVSKÝM ŘEŠENÍM

Na podzim roku 2006 byla v hlavní části soutěže mimo jiné zadána tato úloha:

Obálkou čtvercového výkresu 1×1 nazveme pravoúhelníkový list papíru o obsahu 2, pomocí něhož lze (bez rozřezání) úplně obalit tento výkres z obou stran. Je zřejmé, že pravoúhelník 2×1 a čtverec o straně $\sqrt{2}$ jsou obálky tohoto výkresu.
a) Ukažte, že existují i jiné obálky tohoto výkresu. (3 body)
b) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho takových obálek. (4 body)

V Praze se rozhodlo řešit úlohu 40 z 63 účastníků. V části a) byla odevzdána 3 úplně správná řešení, v části b) nebylo úplně správné žádné z odevzdaných řešení. Nejvýše bylo uděleno 5 bodů a ty získal jeden řešitel.

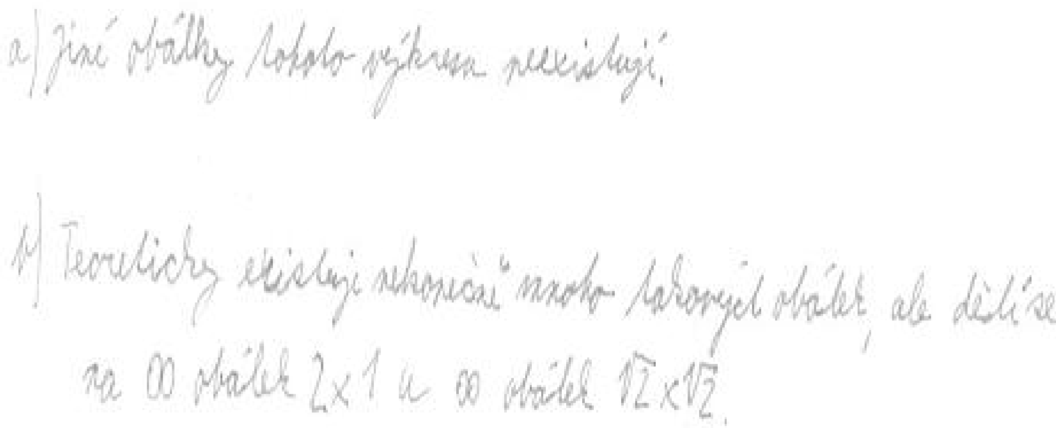
Při řešení úlohy se ukázaly jako nejvíce problematické tyto jevy: *definice pravoúhelníku* (často se objevuje chápání pravoúhelníku jako jakéhokoli mnohoúhelníku s pravými úhly u vrcholů – ať už vnitřními nebo vnějšími), *porozumění otázce*, *představivost*.

V žákovských řešeních se vyskytly i tyto nepochopitelné odpovědi: „Vůbec to nejde.“, „Obsah nemusí být 2.“, „Obsah 2 je postačující podmínka.“, „Mnohoúhelník, který má u každého vrcholu pravý úhel vnitřní nebo vnější, je pravoúhelníkem.“.

NĚKTERÁ ŽÁKOVSKÁ ŘEŠENÍ

Na závěr uveďme několik žákovských řešení. Každé řešení reprezentuje celou skupinu řešení obdobného typu a je ilustrováno autentickým obrázkem. Texty řešení byly většinou natolik nečitelné, že bylo nutné je přepsat, jsou však přepsány přesně doslova, tj. včetně chyb všeho druhu. Žádný komentář k úlohám nedoplňujeme, neboť se domníváme, že obrázky a žákovské komentáře jsou dostatečně výmluvné.

Řešení č. 1


a) Jiné obálky tohoto výkresu neexistují.

b) Teoreticky existuje nekonečně mnoho takových obálek, ale dělí se na ∞ obálek 2×1 a ∞ obálek $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.

Řešení č. 2 (přepis)

„Jelikož není zadáno jinak, budeme se řídit tím, že může zbýt jakkoli velká část papíru.

a) Pokud zvětšíme stranu obálky o libovolnou velikost, stále obalí celý výkres bez rozřezání.

b) Ať jakkoli zvětšíme obálku, vždycky bude zakrývat výkres z obou stran a můžeme obálku zvětšovat do nekonečna (teoreticky). Existuje tedy nekonečně mnoho obálek.“

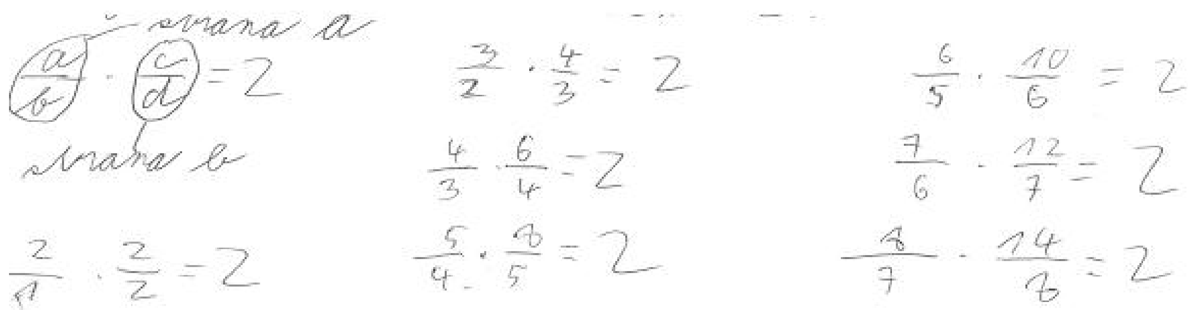
Řešení č. 3 (přepis)

„a) i b) Dodržíme-li podmínku že vždy bude každá strana obálky větší než 1 a obsah obálky bude právě 2, můžeme sestavit nekonečně mnoho takovýchto obálek, např. $1{,}25 \cdot 1{,}6 = 2$ a obě strany jsou větší než 1. Popis jak bude obalení vypadat je na obrázku. Podstata věci je v tom že obálka má takový obsah že obalí výkres, za určitých podmínek (výše) může tedy vzniknout libovolné množství obálek.“

Řešení č. 4 (přepis)

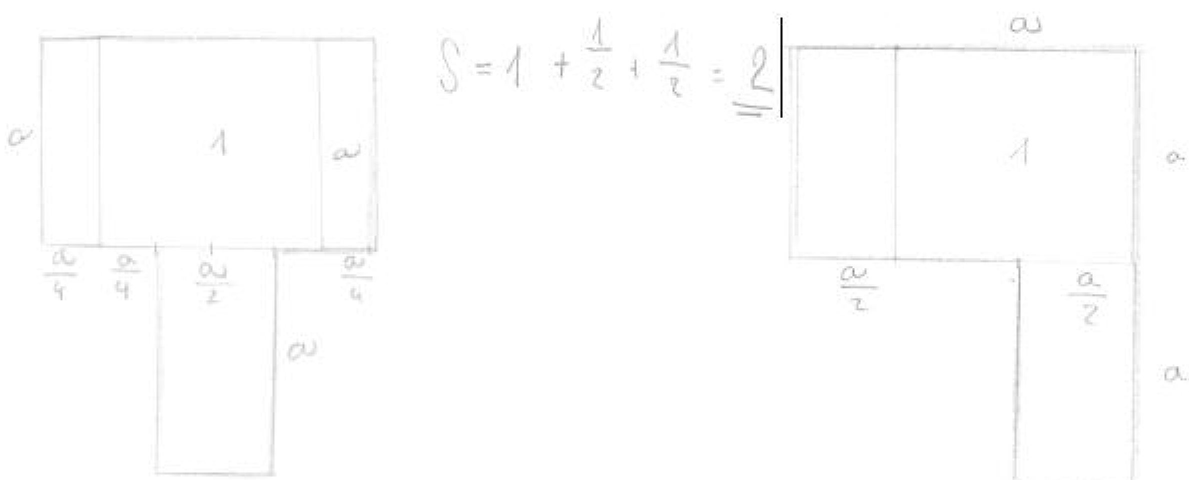
„Pravoúhelník je čtverec nebo obdélník. Když obsah musí být 2, tak čtverec bude jen jeden a to již známý se stranou $\sqrt{2}$. Čili obálka musí být obdélník s obsahem 2.

Existuje nekonečně mnoho rozměrů dané obálky, v každém kroku se hodnoty a, b, d zvětší o 1. Hodnota c roste o 2 v každém kroku. Pokud existuje nekonečně mnoho řešení existuje i jiné než je v zadání.“



Řešení č. 5 (přepis)

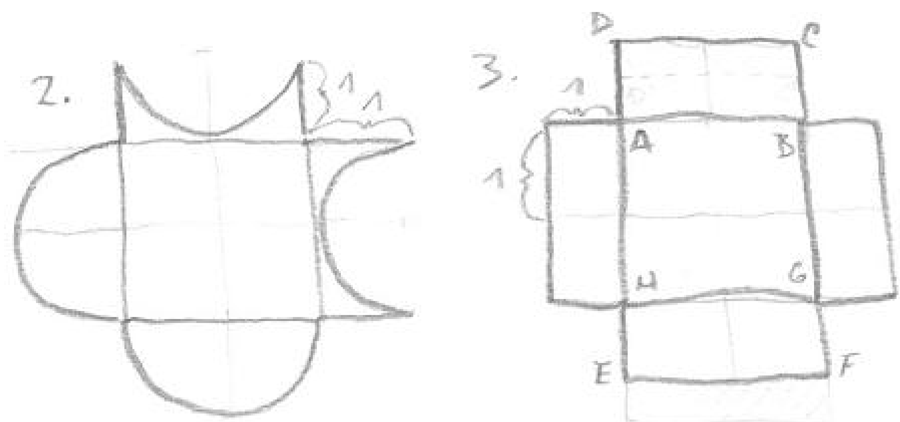
„b) Základem každé obálky bude čtverec 1×1, další dva obdélníky budou mít delší stranu rovnou 1 a kratší strany budou dohromady dávat 1. ⇒ Existuje nekonečně mnoho řešení.“



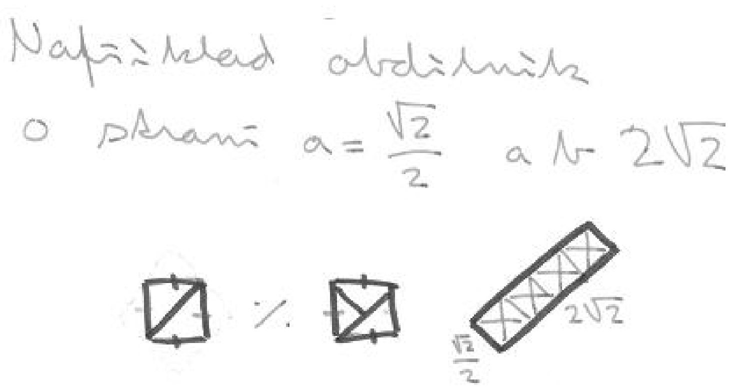
Řešení č. 6 (přepis)

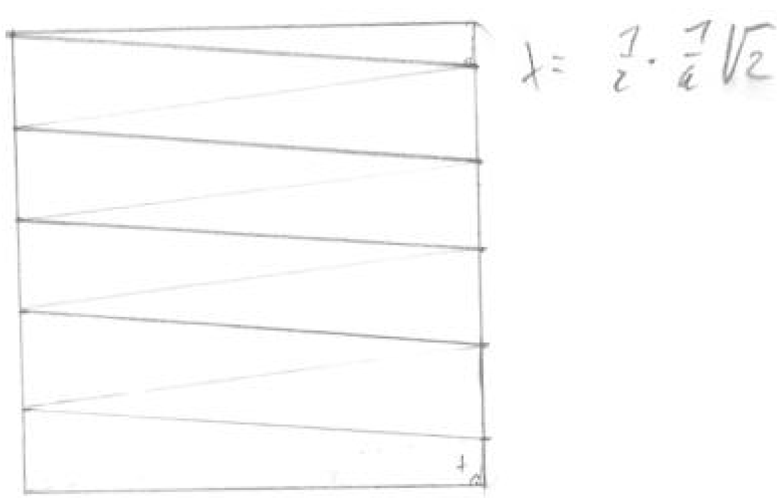
„a) Existují např. takovéhle obálky výkresu:

b) Nekonečně mnoho obálek na takový výkres existuje, protože například ve tvaru obálky 3. se může nekonečně mnohokrát měnit obsah obdélníku $ABCD$. Pokud se změní obdélník $ABCD$ na obdélník $ABC'D'$, pak se obdélník $D'C'CD$ „přemístí“ na druhou stranu a z obdélníku $EFGH$ vznikne obdélník $D'C'GH$.“



Řešení č. 7:





Řešení č. 8 (přepis, obr. vlevo)

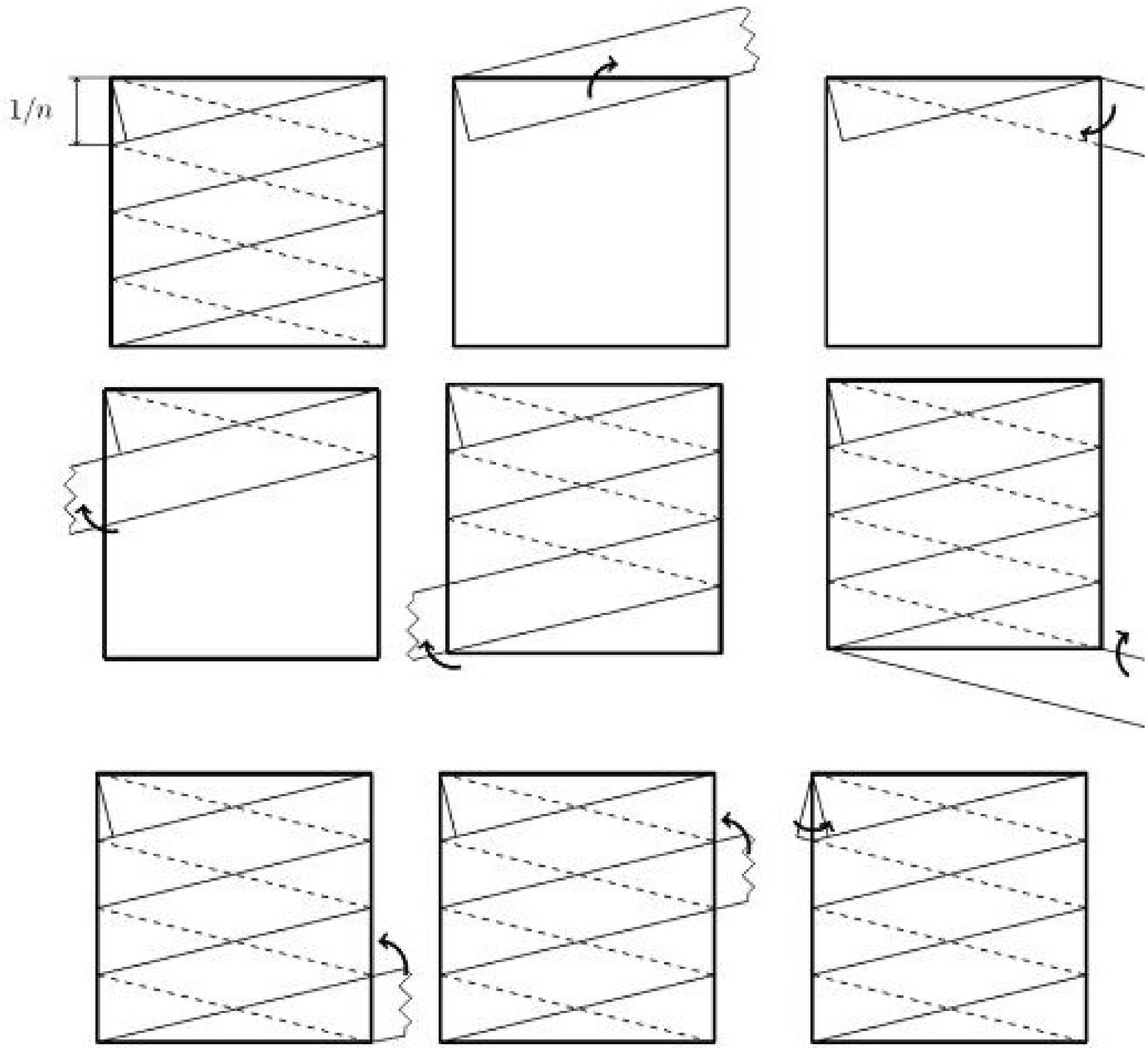
„a) i b) se dokáže společně, protože platí-li b) musí platit též i a)

Řešením jsou obdélníky s obsahem 2, strany musí být v poměru $a\sqrt{2} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$ kde $a \in \mathbf{N}$.

A pokud existuje nekonečno $\mathbf{N}$, pak i počet řešení je nekonečný.“

Vzorové řešení

Uvažujme množinu pravoúhelníků se stranami $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $2\sqrt{n^2+1}$.



Literatura

[1] http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/ (stránky University of Toronto, v angličtině)

[2] http://www.turgor.ru/ (oficiální stránky Turnaje měst, v ruštině)

METODA OBMĚŇOVÁNÍ

ZDENĚK ŠÍMA[1]

Často i dosud probíhá v hodinách matematiky procvičování probraného učiva tak, že se řeší úlohy z učebnice jedna za druhou. Je-li jedna úloha vyřešena, přechází se na další úlohu, bez ohledu na to, kolik žáků úlohu vyřešilo samostatně a kolik ji jen opsalo do sešitu z tabule. K získání jisté rutiny při počítání zpravidla postačí, jestliže i žáci, kteří si jen řešení opsali, si doma úlohu v klidu vyřeší. Problém se zpravidla objeví, když potřebujeme při probírání dalšího učiva poznatky z látky, která byla probrána a „procvičena" o měsíc a více dříve. Praxe ukázala, že tímto způsobem osvojené poznatky nemají dlouhého trvání a jen s obtížemi si je pouze někteří žáci dokáží znovu vybavit. Docházíme proto k závěru, že pouhé vypracovávání úloh nestačí k zabudování nových poznatků do dříve osvojených a že je nutné přistoupit ke skutečnému se zabývání úlohami. Žák musí mít možnost se úlohou aktivně zabývat. Jen v tomto případě můžeme žádat od žáků odpovědi na otázky (Baptist, 1998):

– Co je jádrem problému, úlohy?
– Které strategie jsme při výpočtu sledovali?
– Jak lze shrnout poznatky, docílené výsledky úlohy?
– Jaký význam a jaké důsledky má pro nás dosažený výsledek?
– Jak lze úlohu zařadit do našich stávajících vědomostí?
– Co bychom si měli zapamatovat?
– Existují další alternativní způsoby řešení?
– Jak lze zadání úlohy rozšířit, zobecnit, obměnit?
– Kde poznatky využijeme v praxi, v životě?

Zaměřme se pouze na otázku týkající se obměny zadání úlohy. Osvědčená strategie k osvojení nových matematických poznatků je dodržet zásadu: vyjít ze známých, dříve osvojených poznatků, ty obměňovat a pozorovat, zda v pozměněné podobě nevyplynou další důležité skutečnosti.

Strategií je celá řada, metodě obměňování odpovídá přeformulování či transformace problému, úlohy (Kopka, 1999). Uveďme si několik příkladů obměňování.

PŘÍKLAD 1

Určete množinu bodů, které mají od dané přímky p vzdálenost 2 cm.

Obměňování úlohy:

a) vyznačte všechny body, které mají od dané úsečky vzdálenost 2 cm;
b) . . . daného bodu A vzdálenost 2 cm;
c) . . . dané kružnice $k(S; 3\,\mathrm{cm})$ vzdálenost 2 cm;

[1] *Gymnázium Aš, zdenek.sima@gymsos.com*

d) . . . daného čtverce, $a = 4$ cm vzdálenost 2 cm;

e) . . . dvou rovnoběžek a, b vzdálenost 2 cm;

f) . . . dvou různých bodů K, L vzdálenost 2 cm;

g) . . . dvou přímek vzdálenost 2 cm;

h) . . . lomené čáry vzdálenost 2 cm;

i) . . . sinusoidy $y_0 = 3$ cm vzdálenost 2 cm;

j) vyznačte všechny přímky, které mají od dvou různých bodů stejnou vzdálenost;

k) . . . roviny v prostoru, které mají od tří různých bodů . . . ;

l) . . . kružnice . . . dvou . . . ;

m) Určete všechny body v prostoru, které mají od dané přímky vzdálenost 2 cm;

n) . . . krychle . . .

Naznačené úlohy lze libovolně dlouho obměňovat do doby, než všichni pochopí smysl a podstatu množin bodů dané vlastnosti. Tímto způsobem lze získat u žáků zájem o práci, každý dokáže být úspěšný, úlohy si obměňuje sám či ve dvojici. V principu se jedná o propracování úlohy do doby, než žák získá zcela jasnou představu o problematice a naučí se různé otázky samostatně promýšlet.

Příklad 2

Vypočítejte $3,25 - 4,5 + 2,5 - 5$.

Obměňování: Učitel začne otázkou a žáci pokračují samostatně, či ve dvojicích.

a) Změní se výsledek, zařazením závorek? Jak?

b) Kolik různých druhů závorek lze použít, kolik různých výsledků obdržíme?

c) Jak je třeba změnit první, druhý, třetí, čtvrtý člen, aby nám vyšlo 0?

d) Co se stane, když vynecháme zlomky v úloze?

e) Co se stane, když vynecháme celá čísla v úloze?

f) Co se stane záměnou dvou cifer?

g) Jak lze úlohu zjednodušit, zkomplikovat?

h) Co se stane, když výchozí úlohu zjednodušíme zaokrouhlením čísel?

i) Uveďte další čtyři čísla tak, aby součet byl stejný.

j) Jak se změní hodnota součtu, jestliže znaménko před číslem 2,5 nahradíme násobením, dělením?

k) Napiš povídku, pohádku kde využiješ zadání úlohy.

Problém 1: Rozdělte $\frac{3}{4}$ čtverce na čtyři shodné obrazce.

Problém 2: Dokažte, že pro každé prvočíslo $p > 3$ je výraz $p^2 - 1$ dělitelný 24.

Zde je zcela jasně vidět, že pouhé řešení úloh nestačí. Pouhé řešení úloh musíme nahradit termínem aktivním řešením úlohy a k tomu nám pomůže metoda obměňování úloh.

Co rozumíme obměňováním?

Jde o schopnost dokázat každý nosný údaj aplikovat v podobné úloze v pozměněné formě. Zde se od každého žáka vyžaduje představivost, fantazie, vědomí, schopnost správné matematizace úlohy, zobecnění poznatků, schopnost uspořádat ideje, dokázat je rozlišit podle důležitosti, významu pro danou situaci a nenásilně nové poznatky zařadit do soustavy dříve osvojených vědomostí. Smysluplný průběh zajistí vyučovací hodina teprve tehdy, jsou-li žáci schopni zvolit správnou strategii řešení a jsou-li schopni svými slovy problematiku zhodnotit. Schupp (1999) doporučuje pro metodu obměňování následující postup:

- Stanovení výchozí úlohy,
- Vyřešení úlohy, pokud možno najít více způsobů řešení úlohy,
- Vybídnutí žáků k obměňování úlohy,
- Vědomé shromažďování návrhů („brainstorming“), nápady zaznamenávat na tabuli,
- Společné vyhodnocení námětů, strukturace a uspořádání návrhů,
- Pokusy o vyřešení navržených úloh,
- Prezentace úspěšných řešení,
- Případné další obměňování úlohy,
- Vyhodnocení všech řešení, pokusů o řešení.

Formy práce se dá využít i při práci metodou trojkroku.

Při použití této metody vytváříme nový, někdy zcela jiný problém, který je snadnější k řešení, a řešení úlohy, problému podstatně přiblíží. Žák odhalí jádro problematiky, podrobně se zabývá úlohou a žáci skutečně samostatně vyvozují souvislosti. Jedná se o intenzivní, objevující formu práce. Např. využití Zlatého řezu při konstrukci pravidelného pětiúhelníku.

Zcela na závěr uvedu ještě jednu úlohu, jejíž řešení jsem sledoval v osmém ročníku jedné školy v Bayreuthu, a jedné úlohy zadané mnou v primě.

Příklad 3

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Veďte přímku p tak, aby rozdělila daný trojúhelník na dva rovnostranné trojúhelníky.

Nikdo z žáků se nespokojil se závěrem, že úloha nemá řešení, a více se s ní nezabýval. Při diskusi o úloze vytvořili žáci 9 obměn úlohy.

Příklad 4

Zadal jsem matematickou pohádku O Červené Karkulce podle Skopala (2003).

Žáci vytvořili šest obměn úlohy.

Nikdo z žáků nebyl v hodině pasivní, každý se samostatně dopracoval k poznatkům podle svých schopností.

Literatura

[1] Kopka, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*, UJEP Ústí n. L. 1999.

[2] Baptist, P. *Mathematikunterricht im Wandel*, Buchners Verlag, Bamberg 2000.

[3] Schupp, H. *Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2002.

[4] Spiegel, H. *Kinder und Mathematik*, Kallmeyer, Seelze 2003.

[5] Ulm, V. *Mathematikunterricht*, Seelze-Velber 2004.

[6] http://skopal.webz.cz/pohadky/matematika/karkulka.html

Popularizace matematiky – výzva i příležitost[1]

Radka Skalková, Bohumil Novák[2]

Mezi učiteli matematiky i širší veřejností se často hovoří o naléhavé potřebě popularizace matematiky. Na matematiku jako školní předmět pohlížejí lidé různě. Málokdy se však těší u žáků oblibě, mnohdy se jí žáci spíše bojí. Jak ukazuje Hejný (2004), problém netkví v matematice samé, ale v osobní reflexi zážitků z vyučovacích hodin matematiky, v tom, jakou matematiku učitelé žákům ukáží a umějí zprostředkovat.

Je mnohokrát potvrzenou skutečností, že příležitostí ke změně pohledu na matematiku, ke změně postoje k matematice jako školnímu předmětu se mohou stát řešení nestandardních úloh, hry, projekty a další motivační činnosti. Uvedené aktivity však mohou mít formativní vliv na žáka pouze tehdy, když učitel zná žákovu osobnost, když vytvoří prostředí pro učební činnosti tak, aby si žák sám mohl práci organizovat, aby se mohl sám aktivně podílet na vyučování, aby vnímal matematické vyučování jako řešení zajímavých problémů (Fulier, Šedivý, 2001).

[1]Příspěvek byl zpracován s podporou projektu MŠMT NPV II č. 2E06029.

[2]Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP v Olomouci, radka.skalkova@upol.cz, bohumil.novak@upol.cz

Možnosti pro uplatnění efektivních instrumentů matematického vyučování poskytuje projekt Národního programu výzkumu II MŠMT - Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže zaměřených na motivaci pro vědeckovýzkumnou činnost v oblasti přírodních věd, obzvláště v oborech matematických, fyzikálních a chemických. V rámci řešení jednoho z dílčích úkolů projektu (S 006, řešitel B. Novák, s pracovním názvem „Hrátky s matematikou") jsme se nechali inspirovat uvedenými myšlenkami a pokusili se je konfrontovat s konkrétní praxí na základních školách. Náš pokus je zaměřen na vytváření, podporu a výzkum edukační účinnosti matematických aktivit různého typu: školní matematické soutěže, projekty, akce pro rodiče a veřejnost. Je směrován na různé cílové skupiny žáků základních škol: na matematicky nadané žáky, ale i k rozvoji zájmu „průměrných" žáků o matematiku, případně pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami (http://souteze.upol.cz).

Smyslem dosud realizovaných akcí na fakultních základních školách olomouckého regionu bylo poskytnout příležitost

- žákům ve věku 10–15 let k získání nových zážitků z matematiky, aby ji poznali jinak než jako nudný, nezáživný předmět, ale jako prostředí pro osobnostní rozvoj nejen v kognitivní oblasti, v němž mohou zažít pocit radosti a úspěchu, nebo dokonce aby se „předvedli", aby prezentovali spolužákům ze školy to, co poznali a naučili se v hodinách matematiky a dalších předmětů,

- učitelům matematiky ke změně pojetí, forem a metod vyučování matematice, aby dokázali matematiku učit tvořivým a poutavým způsobem, stali se spolutvůrci změněného klimatu, nositeli výzev pro žáky i pro sebe samé,

- rodičům ukázat alespoň část z toho, co umí jejich děti – jak může vypadat konstruktivisticky orientované vyučování matematice založené na předmětové integraci („otevřené hodiny"),

- studentům učitelství matematiky na Pedagogické fakultě UP, diplomantům a doktorandům využít zkušeností získaných v oborově zaměřené a didaktické komponentě vysokoškolského studia při přípravě a realizaci jednotlivých akcí v roli supervizorů.

Základní principy těchto akcí přiblížíme na první z nich, která proběhla v listopadu 2006 na ZŠ v Uničově – projektový den nesl název Matematika hravě. Byla určena pro žáky 7. a 8. ročníku s rozšířenou výukou matematiky, s aktivní participací žáků 9. ročníku ze tříd se stejným zaměřením, kteří vystupovali v rolích rozhodčích při plnění zadaných úkolů. Celkem soutěžilo 12 čtyřčlenných družstvech, jejichž názvy si žáci sami volili (Bambini di Mathematico, Einstein's Childrens, Dream Team apod.). Jejich úkolem bylo absolvovat 12 stanovišť, s různými podobami netradičních aktivit, jejichž smyslem byla především motivace žáků pro matematiku (sudoku, tangramy, zápalkové hlavolamy, odhady množství, úlohy s detektivními příběhy, deskové logické hry, manipulace s geometrickými modely počítačové hry aj.). Zvítězilo samozřejmě to družstvo, které získalo nejvíce bodů.

Pro celou akci bylo charakteristické podnětné prostředí, které bylo adekvátním způsobem přizpůsobeno probíhajícím činnostem – od barevných označení jednotlivých stanovišť až po dresy jednotlivých týmů. Musíme zdůraznit, že toto vše bylo výsledkem vlastní činností žáků pod vedením učitelů matematiky.

Žáci se do řešení úkolů pustili s velkým nadšením a matematiku využívali jako nástroje při všech hrách a úlohách, aniž by si toho byli vlastně vědomi. Některé úkoly plnili sami, v jiných hráli proti rozhodčím nebo učitelkám matematiky. Neustálá komunikace probíhala na několika úrovních – mezi spoluhráči v týmu při řešení zadaných úkolů, mezi hráči a žáky staršími (rozhodčími) a mezi žáky a učiteli. Důraz byl kladen na rozvíjení kooperativního a tvořivého myšlení žáků, kteří dostali prostor pro zajímavé experimenty a objevování, při nichž a mohli zažít nedocenitelný pocit radosti a úspěchu.

Při náročné přípravě, která trvala přibližně dva měsíce, pomohly učitelům také inspirace z didaktických seminářů na katedře matematiky. Značnou měrou přispěli k přípravě i vlastní realizaci doktorandi. V neposlední řadě musíme zmínit také účast některých rodičů, kteří tak dostali možnost vidět alespoň část z toho, co již umí jejich děti a jakým způsobem přistupují k řešení matematických problémů. Účastí současně ukázali zájem o své děti, což pro ně mělo také nesporný pozitivní dopad.

Pro výzkum edukační účinnosti v rámci řešení projektu měla význam následná reflexe – žáci i rodiče mohli vyjádřit své autentické názory a dojmy na velkou tabuli, celkové zhodnocení a rozdání cen vítězům provedli učitelé matematiky s ředitelkou školy. Ze školy jsme odcházeli s pocitem smysluplně vykonané práce, obohacující účastníky ze školy i z fakulty, s pocitem jedné využité příležitosti.

Literatura

[1] HEJNÝ, M. Dominanty matematické přípravy budoucího učitele. In *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy*. Olomouc: UP, 2004. s. 112–118.

[2] FULIER, J., ŠEDIVÝ, O. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra, UKF, 2001.

[3] KUBÁTOVÁ, E., NOVÁK, B. Žáci, učitelé, rodiče a matematika. In *Matematika jako prostředí pro rozvoj žáka primární školy*. Acta Univ. Palack. Olomucensis, Fac. Paed., Mathematica V – 2006, Matematika 2. Ed. M. Uhlířová. Olomouc: Vydavatelství UP, 2006, s. 136–139.

Matematika jinak v projektových dnech

Anna Šlégrová[1]

Projektové vyučování

V dnešní době je projektové vyučování neustále se rozšiřující vyučovací formou. Tento způsob vyučování můžeme definovat jako činnost žáků, kteří za pomoci učitele řeší stanovený úkol komplexního charakteru – projekt, který vychází částečně nebo úplně z praktických potřeb (Kalhous, Obst, 2001). Přesněji bychom mohli projekt definovat jako úkol nebo sérii úkolů, které mají žáci splnit individuálně nebo ve skupině. Přitom si často mohou sami určit, v jakém sledu budou dané úkoly ke splnění projektu plnit.

Dalším podstatným znakem je propojení úkolů, které jsou obsaženy v projektu s konkrétními problémy v praktickém životě. Při zpracovávání projektu tak žáci mohou pomoci i svému okolí.

V tomto příspěvku budeme popisovat jeden uskutečněný projekt, který proběhl na ZŠ Hálkova v Olomouci na konci listopadu 2006. Jednalo se „uměle vytvořený problém“, ve kterém byla žákům zadána určitá situace spojená s realitou, kterou měli v daném čase řešit.

Projektový den „Stavíme město“

K uskutečnění projektu v rámci matematiky může být inspirací projektový den Stavíme město, který proběhl na fakultní základní škole Hálkova v Olomouci. Projekt byl určen žákům celého druhého stupně a byl připraven jako celodenní činnost všech tříd. Na přípravě a organizaci se podílel učitelský sbor a studenti z Pedagogické fakulty pod vedením Mgr. Šiřické a Mgr. Kasalové.

Cílem projektu bylo postavit město. Žáci měli podstoupit všechny potřebné činnosti, které jsou v běžném životě potřeba k postavení domu. Žáci z jednotlivých ročníků byli odlišeni různě barevnými tričky a byli rozděleni do menších skupinek – rodin. Úkolem každé rodiny pak bylo postavit si dům, což v praxi znamenalo vybrat si pozemek na katastrálním úřadu, sehnat si pracovní povolení na úřadu práce a vydělat si dostatek peněz k nákupu materiálu potřebného na stavbu domu.

Žáci se tedy museli domluvit a vzájemně spolu ve skupině spolupracovat tak, aby si za stanovenou dobu (2 hodiny) vydělali co nejvíce peněz. Potřebné finance mohli získat na nejrůznějších stanovištích (Katastrální úřad, Banka, Projektant, Redakce, Kasino, atd.), kde za splnění daného úkolu (výpočet úlohy, správný odhad, vyřešení detektivního úkolu,

[1]KMT, PdF, Univerzita Palackého v Olomouci, a.slegrova@centrum.cz

složení tangramu, atd.) získali určitý finanční obnos. Ten pak mohli uložit do Banky či zariskovat v Kasinu.

V druhé části, kdy měli žáci našetřené peníze, začali nakupovat potřebný stavební materiál a stavět vlastní dům. Celé město vznikalo v místní tělocvičně. Můžeme vidět, že během celého projektového dne se využívalo nejrůznějších schopností – matematickými počínaje a uměleckými konče. Akce se setkala s velkým nadšením nejen u žáků, ale i u učitelů a pomáhajících studentů.

Závěr

Projektové vyučování má hned několik kladů. Podporuje vzájemnou spolupráci žáků. Žáci si musí uvědomit, že práce jejich skupiny je závislá na každém členu a tudíž, že nikdo není nenahraditelný. Měla by to být motivace pro každého jednotlivce, aby řešený problém vzal za svůj. Projekty zároveň umožňují žákům uplatňovat nabyté teoretické poznatky v praxi a zároveň si vyzkoušet, co všechno realizace nějakého plánu obnáší. Mají možnost si uvědomit, že matematiku využívají v nejrůznějších činnostech i v takových, ve kterých by to ani nečekali. Projektový den tedy představuje jeden z nenásilných způsobů, jak přijmout matematiku za svou.

Literatura

[1] Petty, G. *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 1996.

[2] Kalhous, Z., Obst, O. a kol. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002.

[3] Solfronk, J. *Organizační formy vyučování*. Praha, 1991.

Příspěvek byl zpracován za podpory projektu STM-Morava: Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže zaměřených na motivaci pro vědecko výzkumnou činnost v oblasti přírodních věd, obzvláště v oborech matematických, fyzikálních a chemických, podúkolu S006 Hrátky s matematikou.

Pravděpodobnost a statistika ve škole a v životě

Milena Špinková[1]

Úvod

Občan žijící v dnešní „informační civilizaci“ je vystaven každodennímu tlaku nejrůznějších statistických dat. Čte o nich v novinách, slyší je v mediích, pracuje s nimi

[1]Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: milena.sp@centrum.cz

v zaměstnání a v neposlední řadě vyhodnocuje také své vlastní zkušenosti a zkušenosti lidí ze svého okolí. Měl by resp. často nevyhnutelně musí o ně opírat svá občasná i každodenní rozhodnutí. A to často navzdory jejich interpretacím, které jsou mu často vnucovány.

Uveďme alespoň nejběžnější příklady těchto informací: doporučení k nákupům, úpravám a změnám životního stylu, návody k udržení zdraví, prevence chorob i jejich samostatné léčení, podmínky a přednosti různých uložení úspor. Následují údaje o zločinnosti a dopravních nehodách, nemocnosti a epidemiích, nezaměstnanosti, rozvodovosti, populačních tendencích, politických preferencích, růstu ekonomiky atd.

Úlohou školy by mělo být seznámení studentů s metodami sběru, úpravou a interpretací dat, jejich grafickým znázorněním, testováním hypotéz a prezentací závěrů. Takovou výukou osvojené schopnosti nazýváme *statistickou gramotností.*

Pravděpodobnostní a statistické myšlení se odvíjí od modelování náhodných procesů, které se s různě silnou vzájemnou vazbou realizují v diskrétním nebo spojitém čase. Jeho zvládnutí nás vede jednak k potlačení přímočarého lpění na *kauzalitě,* jednak k nespoléhání na *štěstí.* Pravděpodobnostní a statistické myšlení je od občanů sice neustále požadováno, ale jak k němu vychovávat, jak mu učit, zatím zdaleka není jasné. Výuce pravděpodobnosti však u nás není věnována dostatečná pozornost, což je zřejmé jak z učebních plánů stručně naznačených v následujícím odstavci, tak z testů znalostí nejednodušších základních pojmů, které jsem provedla s vybranou skupinou dospělých studentů a jež jsou shrnuty v posledním odstavci.

Učební plány

Statistika je do osnov základní školy zařazena do osmého ročníku. Probírané učivo zahrnuje následující pojmy: statistický soubor, statistické šetření, jednotka, znak, četnost, aritmetický průměr, medián, modus a diagramy.

Na většině středních škol je kombinatorika, pravděpodobnost a statistika vyučována v rámci předmětu matematika. Prohlubují se znalosti ze základní školy, zavádí se pravděpodobnost sjednocení dvou náhodných jevů; nezávislé jevy.

Rozsah výuky na školách je velmi různý; často se omezuje pouze na návody k formálnímu zpracování datových souborů a provedení testů nejjednodušších hypotéz.

Výsledky testů

Ve své studii jsem se zaměřila na porozumění základním statistickým pojmům a jejich interpretaci. Testováno bylo 18 studentů jedné třídy druhého ročníku vyšší odborné školy ve věku 20-25 let a 60 studentů dálkového studia soukromé vysoké školy zaměřené na ekonomiku; věkové rozložení této skupiny bylo od 19 do 50 let. Tito studenti tedy prošli kurzem statistiky na základní škole a v jisté, ovšem hodně odlišné podobě absolvovali také kurz kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky na střední škole. Zaměřila jsem se na základní statistické pojmy *průměrný, vzorek, náhoda a proměnlivost.* V druhé části

testu jsem zjišťovala, jak studenti dokáží pracovat se *statistickým souborem,* odečítat hodnoty z *grafu,* určovat a interpretovat *aritmetický průměr.*
Studenti odpovídali celkem na 13 otázek typu: *Když někdo řekne, že jste „průměrný“, co tím myslí? Když dostanete „vzorek“, co máte? Uveďte příklad něčeho, co se děje náhodou. Co znamená „proměnlivost“? Uveďte příklad něčeho, co se proměňuje. Co je to průměr? Umíte odhadnout průměrnou životnost každé značky baterií z těchto grafů? Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?*

Ukázalo se, že studenti *průměrnou osobu* vnímají jako člověka nevyčnívajícího z davu, vůbec nehodnotili jeho fyzické znaky ani nepřipouštěli, že by mohl v něčem vynikat a v jiném zaostávat. Na otázku *Co je to průměr?* vymýšleli složité, šroubované a leckdy chybné definice, jako kdyby nikdy nepočítali průměrnou známku z předmětu na vysvědčení. Největším „oříškem“ pro studenty byla otázka *Co znamená, že průměrná velikost rodiny je 2,5?* Nejčastější vysvětlení bylo dva dospělí a malé dítě. Naproti tomu odečítání hodnot z *grafu* a odtud výpočet průměrné hodnoty studentům nečinilo potíže.

Náhodná jsou zásadně setkání a *náhodou* se dějí katastrofy, nehody a zázraky. *Počasí* má náhodný charakter, ale *nic se neděje náhodou.* Projevuje se tak kauzální výchova. Za *náhodný jev* studenti považují pouze jev, jehož výsledek je překvapí, sice jej nezapříčinili, ale příčinu má (opět kauzalita). Studenti zaměňují pojmy *proměnlivost,* jako vlastnost a *proměna,* jako určitý děj. Nejproměnlivější je *počasí* a hned potom *nálada.* Zcela výjimečně se podle nich proměňujeme my, fyzicky i psychicky. *Vzorek* většinou spojují s malým množstvím kosmetiky nebo jídla „na vyzkoušení“. Zde se projevuje vliv reklamy kosmetických firem, které v minibalení rozdávají vzorky svých výrobků.

Své výsledky jsem porovnala s pracemi australských a nizozemských autorů [1, 2], kteří rovněž došli k závěru, že současné školní vzdělání nezlepšuje statistickou gramotnost žáků. Přitom pravděpodobnostní a statistické myšlení bude od žáků požadováno celý život. Jeho výuka by proto bez ohledu na osnovy měla být průběžnou snahou všech učitelů matematiky od první třídy. Měli by se zaměřit na úlohy z běžného života, nikoliv jenom na *mince* a *kostky,* a respektovat, že se děti s náhodou a rizikem setkávají již v předškolním věku – v rodině, v dětském kolektivu i při hrách. Proto se u nich vyvíjí intuitivní chápání nejistoty některých dějů, jistoty či naopak nemožnosti dějů jiných. Rozvoj tohoto intuitivního myšlení je třeba včas správným způsobem ovlivňovat vhodným výkladem, ukazujícím žákům, že se s pravděpodobností a statistikou setkávají v každodenním životě, při dopravě, navazování známostí, utváření vztahů mezi lidmi atd. Už to, že se narodili takoví, jací jsou, je výsledek náhodného procesu.

Zamysleme se nad tím, kolik odpovědnosti jako učitelé máme při nedostatečné výuce pravděpodobnosti a statistiky za dopravní nehody, fronty před vytunelovanými bankami, nevhodné reklamou vyvolané nákupy, vysokou rozvodovost, životní zklamání a deprese, za rodiny zničené neuváženými půjčkami, za jedince propadlé hazardním hrám atd.

Literatura

[1] Watson, J. M., Kelly, B. A. The Vocabulary of Statistical Literacy. *AARE 2003 Conference Papers*, Internat. Education Res. Conf. Auckland, New Zealand, EJ, 2003.

[2] Akker, A. *Design research in statistics education: on symbolizing and computer tools*. Thesis. Center for Science and Math. Education, Utrecht Univ., Freudenthal Inst, 2004.

Neekvivalentní úpravy rovnic – grafické řešení jako nástroj pro vhled a zkoušku

Lenka Tejkalová[1]

Výchozím impulsem pro tento příspěvek byla následující úloha:

Dokažte, že rovnice $\sqrt{3x+10} = 1 - \sqrt{x+11}$ nemá řešení.

Po dvojím správném umocnění získáme kvadratickou rovnici, jejímž řešením je $x_1 = -2$, $x_2 = 5$. Ani jeden z těchto výsledků však nevyhovuje zadání, úloha tedy nemá řešení. Pravděpodobné problémy v žákovském řešení této úlohy jsou nesprávné umocnění dvojčlenu a absence zkoušky.

Důvody, proč žáci nedělají zkoušku, mohou být různé – většinou se ale vztahují k tomu, že žáci považují zkoušku za zbytečnou formalitu a neuvědomují si, že umocnění je neekvivalentní úprava rovnice a zkouška je nezbytná.

Grafické řešení může být nástrojem, který žáky názorně přesvědčí o nutnosti zkoušky; zároveň se může stát platným způsobem, jak zkoušku provést, případně jak tuto úlohu řešit bez nutnosti počítat. Navíc použití grafického řešení provazuje oblasti matematiky, které jsou často vnímané jako samostatné a nezávislé, a učí žáky využívat různých možností řešení, vybírat nejvhodnější metodu a aplikovat celou šíři svých poznatků.

Pro grafické řešení uvažujeme levou a pravou stranu rovnice jako dvě samostatné funkce a hledáme jejich průsečíky. Názorně tak můžeme ilustrovat, jak se mění situace po prvním a druhém umocnění.

K používání různých přístupů můžeme žáky vést například uspořádáním soutěže, kdy část bude ne/řešitelnost úlohy demonstrovat početně a část graficky: kdo dříve dojde ke správnému závěru? Další možností je nechat žáky sestavit si vlastní podobnou

[1]Studentka PedF UK v Praze, lenka.tejkalova@gmail.com

úlohu a načrtnout její grafické řešení; soused v lavici pak úlohu vyřeší početně: žáci tak mají možnost své řešení konfrontovat s autorem zadání a společně najít případné chyby a problémy.

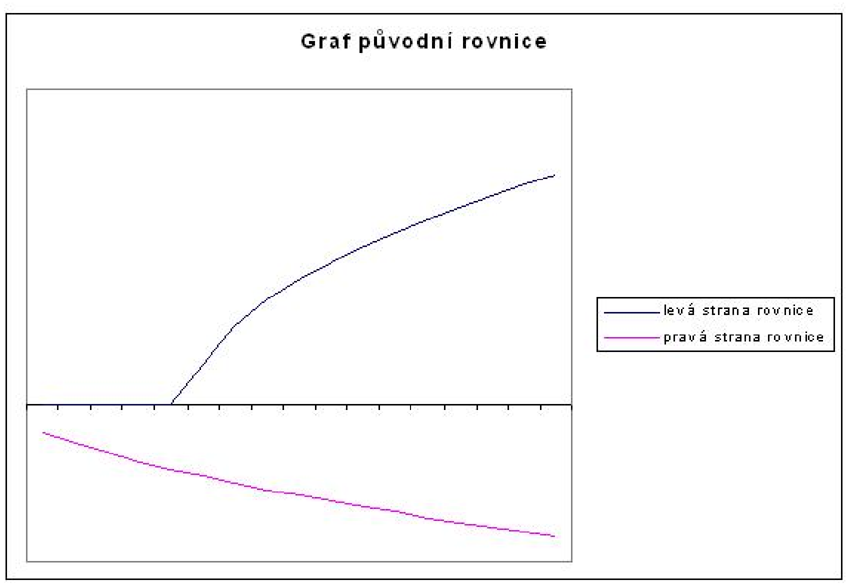
Přestože by žáci měli být schopni příslušný graf načrtnout sami, považuji za užitečné využití výpočetní techniky. Jednak se tak podporují mezipředmětové vztahy MA a IT a rozvíjejí se společně dovednosti v obou předmětech, jednak jde o prostředí žákům blízké; navíc je počítačem vykreslené řešení pro žáky důvěryhodnější.

Pro hledání grafických řešení jsem původně použila program Derive. Protože však tento program nemají žáci běžně k dispozici, zvolila jsem MS Excel. V Excelu je spojnicový graf funkcí hledán pro konkrétní hodnoty x, oblast dat pro graf pak tvoří hodnoty levé a pravé strany rovnice pro danou hodnotu.

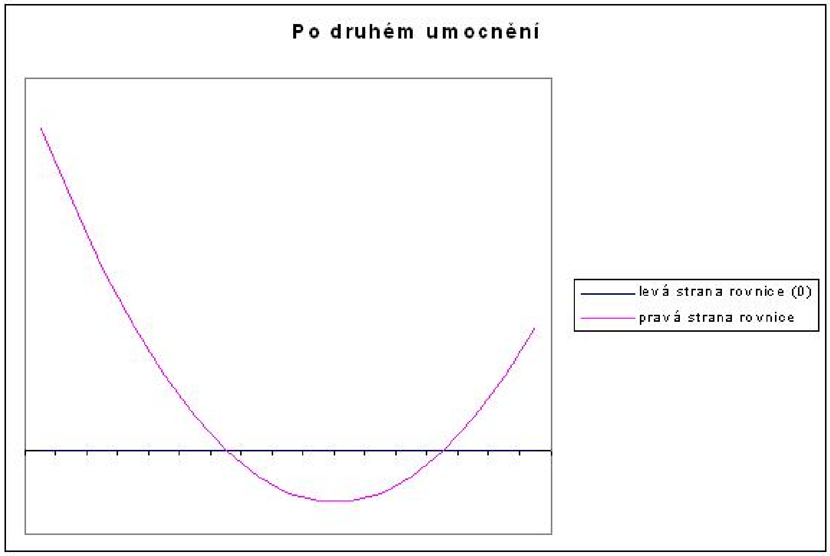
Excel zároveň nabízí žákům hlubší vhled do úlohy. Tím, že okamžitě upozorňuje na neplatné operace (např. v ukázce hodnota #NUM! pro druhou odmocninu ze záporného čísla) upozorňuje žáky na vlastnosti odmocniny a nutnost stanovit v této úloze definiční obor pro x. Díky tomu, že si žáci sami volí, pro které hodnoty x se bude graf vykreslovat, učí se předvídat a odhadovat a postupně své odhady zpřesňovat; mohou volit jak samotný interval, tak jeho jemnější nebo hrubší dělení: díky interaktivnosti grafů v Excelu mohou přímo pozorovat důsledky změn, které provedou.

Ukázka zadání grafů v Excelu pro původní úlohu a pro kvadratickou funkci vzniklou dvojím umocnění je na obrázku dole.

	levá strana	**pravá strana**
x	√(3x+10)	1-√(x+11)
-8	#NUM!	-0,732050808
-7	#NUM!	-1
-6	#NUM!	-1,236067977
-5	#NUM!	-1,449489743
-4	#NUM!	-1,645751311
-3	1	-1,828427125
-2	2	-2
-1	2,645751311	-2,16227766
0	3,16227766	-2,31662479
1	3,605551275	-2,464101615
2	4	-2,605551275
3	4,358898944	-2,741657387
4	4,69041576	-2,872983346
5	5	-3
6	5,291502622	-3,123105626
7	5,567764363	-3,242640687
8	5,830951895	-3,358898944



	0	$x^2 - 3x - 10$
-8	0	78
-7	0	60
-6	0	44
-5	0	30
-4	0	18
-3	0	8
-2	0	0
-1	0	-6
0	0	-10
1	0	-12
2	0	-12
3	0	-10
4	0	-6
5	0	0
6	0	8
7	0	18
8	0	30



Možnost a schopnost používat různé metody řešení považuji v matematice za jeden z klíčových prvků. Je podle mě důležité tuto možnost nabízet a rozvíjet schopnost žáků různé přístupy k řešení hledat a používat, seznamovat je s nimi, protože každému studijnímu typu může vyhovovat jiný postup.

Cílem tohoto příspěvku není prezentovat jediný správný a univerzálně použitelný přístup; naopak by se měl stát impulsem pro hledání nových možností. Nestandardní hodina, ať by již šlo o soutěž, vytváření vlastního zadání nebo práci s počítači, představuje pro žáky určitý emocionální prožitek. Ten zvyšuje efektivitu učení, tedy v tomto případě pravděpodobnost, že si zapamatují, že umocnění je neekvivalentní úprava rovnice, směruje jejich pozornost k důležitosti zkoušky, která se jinak často stává opomíjenou formalitou, a také je více motivující než běžná výkladová hodina.

FORMY A METODY PRÁCE S CABRI VE VÝUCE[1]

JIŘÍ VANÍČEK[2]

Tento článek představuje přehled aktivit, které lze použít jako výukový software interaktivní geometrie Cabri při výuce, dokumentovaný vzorovými úlohami. Z nich si může učitel udělat představu, jak pestré typy aktivit lze v geometrii řešit pomocí počítače a jak rozmanitý přístup k výuce může zvolit. Podle těchto vzorových příkladů může učitel vytvářet analogické úlohy pro jiná vhodná témata.

Článek je členěn nikoliv podle probírané látky nebo matematické disciplíny, ale podle druhu vykonávaných činností, a je seřazen od forem relativně tradičních po ty, jejichž nasazení se vymyká dosud převládající výuce matematiky. Každá forma dává jiné možnosti, jak matematiku pomocí počítače vyučovat. Právě níže vypsané formy a metody kladou větší důraz na vlastní aktivitu žáka, na objevování, experiment a projektovou výuku.

V rámci projektu ESF „Podíl učitele matematiky 2. stupně ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu“ byly připraveny materiály pro školení učitelů v práci s programem Cabri jak pro začátečníky, tak pro učitele, kteří jsou již s Cabri obeznámeni a potřebují spíše metodické vedení a náměty do výuky. Materiály obsahují velké množství konkrétních úloh, připravených přímo pro výuku jako Cabri obrázky a webové stránky s interaktivními aplety.

Formy práce podle míry aktivity žáka při přístupu k vlastnímu učení i podle nároků na řízení výuky učitelem lze členit následovně:

POMŮCKA PRO RYCHLÉ A PŘESNÉ RÝSOVÁNÍ

Žáci používají prostředí počítače jako pomůcku pro rychlé rýsování. Nezabývají se technikou rýsování (jak sestrojit kolmici, rovnoběžku), zajímají se o vytvoření správného postupu, pracují analogicky jako při rýsování na papír. Jako typové příklady uveďme tradiční konstrukční úlohy polohové či nepolohové (se zadanými údaji na nákresně) nebo konstrukce podle daného postupu (umožňující žákům sledovat postup konstrukce).

NÁZORNÁ POMŮCKA UČITELE

Další tradiční metoda. Učitel může pro projekci z počítače použít hotové soubory s geometrickými konstrukcemi jako názornou pomůcku při výkladu nebo při dokazování

---

[1] Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2] Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta vanicek@pf.jcu.cz

některého tvrzení. Druhou možností je postupné vytváření obrázku před zraky žáků za použití nástrojů počítače. Výhoda projekce jako podpory frontální výuky by neměla vytlačit žáky od počítačů. Při vlastní práci s programem Cabri se mohou žáci učit aktivněji.

Manipulace s hotovou konstrukcí

Žáci otevřou soubor s hotovou konstrukcí a manipulací s obrázkem (uchopením bodu nebo jiného objektu myší či jeho animací - nástroj *Pohyb objektu*) řeší úlohu. Soubor s konstrukcí si učitel předem připraví (stáhne z Internetu nebo sám vytvoří). Lze také využít webové aplety, které nevyžadují instalaci vlastního programu, např. pro domácí práci žáka.

Aktivity spojené s manipulací vycházejí z přesvědčení, že žákům nestačí nový poznatek sdělit; cennější je, když jej objeví sami. Manipulace tedy může sloužit jak k řešení konstrukční úlohy či k diskusi existence a počtu řešení, tak i k objevu nového poznatku. Manipulace využívají i typy úloh, v nichž žák odhalí chybu v hotové konstrukci a opraví ji (smazáním její části a opětovným zkonstruováním).

Ověřování žákovských hypotéz

Prostředí podporuje vytváření žákovských hypotéz tím, že žákovi nabízí geometrickou situaci a poskytuje mu zpětnou vazbu o tom, zda jeho hypotéza (návrh řešení úlohy, nalezené řešení, jeho vlastní představa některého pojmu) odpovídá skutečnosti nebo ne. Vytváření a ověřování žákovských hypotéz vyžaduje odlišnou formu vedení hodiny. Žáci musí dostat časový prostor pro vytvoření obrázku a především pro „hraní si s ním“, k experimentování. Velmi často tato aktivita ústí v diskusi ve třídě, při které se sjedotí názory, přijme společný postup a nakonec každý žák vyřeší úlohu na počítači individuálně. Jako typovou úlohu lze uvést např.: *Zjisti, po jaké křivce se pohybuje vrchol C čtverce, je-li vrchol A pevný a vrchol B se pohybuje po dané kružnici k.*

Zvláštní typy úloh

- Konstrukční úlohy s omezeným počtem nástrojů. Cabri umožňuje skrýt vybrané nástroje, žákovi lze pak zadat sestrojit konstrukci bez běžně dostupných nástrojů (např. sestroj kolmici z bodu k přímce, dokáže-li program pouze vytvářet nové přímky a kružnice, nic jiného).

- Úlohy z dynamické geometrie. Úlohy, v nichž pohyb nějakého objektu má zásadní vliv na řešení úlohy nebo vhled do situace (např. *Je dán trojúhelník ABC a osa o. Jakou část roviny vytvoří obrazy trojúhelníka v osové souměrnosti, budeme-li osu otáčet kolem nějakého jejího bodu?).*

- Úlohy s neúplným zadáním jsou úlohy, v nichž nekonečné množství řešení je nějakým způsobem parametrizováno (např. *sestroj kosočtverec ABCD, je-li daná úsečka AB jeho stranou).*

- Projekty jsou významným doplněním výuky nejen matematiky, trénují řadu dalších životních dovedností. Zaujmou žáky, kteří raději něco tvoří než řeší úlohy. Mohou se úspěšně zapojit i žáci, kteří mají dlouhodobě k matematice negativní postoj. Příkladem geometrických projektů může být „Návrh interaktivní sítě nepravidelného čtyřstěnu s vytištěním a slepením modelu“, „Dlaždicové výplně roviny“ nebo „Vytváření pohyblivých Cabri obrázků“.

Literatura

[1] Leischner, P. Konstrukční úlohy. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

[2] Vaníček, J. Konstrukční úlohy. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

[3] Vaníček, J. Typy úloh a žákovských aktivit. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

[4] Vaníček, J. Shodnost, osová a středová souměrnost. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

Matematika pre život a žiak primárnej školy

Veronika Zeľová[1]

Formovanie matematickej gramotnosti je celoživotný proces, v ktorom škola má svoju významnú úlohu. Medzinárodné výskumy (OECD/PISA a IEA/TIMMS) však ukazujú, že vyučovanie matematiky nedostatočne pripravuje žiakov na vysporiadanie sa s problémami každodenného života, na riešenie ktorých je potrebné použiť matematický aparát. Proces aktivizácie a formovania matematických kompetencií je dlhodobý a zložitý. Nami navrhovaný projekt „Matematika pre život “, ktorý realizujeme v tomto školskom roku so žiakmi 3. a 4. ročníka základnej školy, by mohol napomôcť pri prepojení školskej matematiky so životom.

Pre jednotlivca je dôležité nielen disponovať vedomosťami z matematiky, ale aj vedieť tieto vedomosti aktivizovať pri riešení problémov, s ktorými sa v živote stretne.

[1]Pedagogická fakulta Prešovskej univerzity v Prešove, Katedra matematickej edukácie, zelova@unipo.sk

Matematika by ho mala naučiť nielen „počítať s číslami“, ale mala by mu aj napomôcť pri logickom myslení, usudzovaní, zovšeobecňovaní, triedení dostupných informácií apod. Súhrn všetkých matematických schopností, ktoré by mal byť schopný jednotlivec používať v rôznych životných situáciách nazývame matematická kompetencia. V minulosti bol gramotný ten, kto vedel písať a čítať. V súčasnom svete nám však tieto zručnosti nestačia.

V septembri 2006 sme začali realizovať výskum, ktorého cieľom je:

1. Identifikovať a analyzovať úlohy zamerané na rozvíjanie matematických kompetencií žiakov primárnej školy v učebniciach, pracovných zošitoch a iných didaktických prostriedkoch určených pre primárny stupeň edukácie.

2. Analyzovať úroveň matematických kompetencií žiakov 3. a 4. ročníka základnej školy.

    - Vytvoriť testy merajúce úroveň matematických kompetencií žiakov 3. a 4. ročníka základnej školy.
    - Prostredníctvom navrhnutých testov zmerať úroveň matematických kompetencií žiakov na vybraných základných školách v 3. a 4. ročníku.

3. Vytvoriť zbierku pracovných listov a úloh na rozvoj matematických kompetencií žiakov 3. a 4. ročníka základnej školy.

    - Otestovať vytvorené úlohy a pracovné listy integrované do vyučovacieho procesu.
    - Zistiť vplyv aplikácie zbierky pracovných listov a úloh na úroveň matematických kompetencií žiakov 3. a 4. ročníka základnej školy.
    - Vypracovať metodické pokyny pre učiteľov 1. stupňa ZŠ zamerané na integráciu pracovných listov a úloh do vyučovacieho procesu.
    - Publikovať zbierku pracovných listov a úloh na rozvíjanie matematických kompetencií žiaka primárnej školy.

Do výskumu je v súčasnosti zapojených 7 plneorganizovaných mestských základných škôl Prešovského kraja. Na všetkých základných školách bolo realizované vstupné testovanie, cieľom ktorého bolo zistiť, akými matematickými kompetenciami disponujú žiaci v 3. a 4. ročníku a identifikovať problémové typy úloh z reálneho života. Zároveň sme pomocou špeciálne vytvorených úloh zisťovali vplyv úrovne zvládnutia obsahu matematického učiva žiakmi na ich matematickú gramotnosť. Samotného vstupného testovania sa zúčastnilo 304 žiakov 3. ročníka a 321 žiakov 4. ročníka. Do hlavného experimentu sme na základe vstupného testovania vybrali 148 žiakov 3. ročníka a 166 žiakov 4. ročníka (experimentálna skupina). Zvyšní žiaci, ktorí neboli vybraní do experimentálnej skupiny, tvoria v tomto experimente kontrolnú skupinu.

V tomto školskom roku realizujeme v experimentálnych triedach projekt „Matematika pre život“, v rámci ktorého pracujeme na hodinách matematiky so súborom úloh, ktoré by mohli napomôcť prepojiť školskú matematiku s reálnym životom. V rámci tohto projektu sme pripravili pracovné listy, ktoré obsahujú úlohy z reálneho života, s ktorými pracujeme počas jednej vyučovacej hodiny raz za dva týždne s experimentálnymi triedami. Pracovné listy sa venujú témam, ktoré sú žiakom známe z reálneho života a načrtávajú zadania, s ktorými sa potenciálne žiak 3. resp. 4. ročníka môže stretnúť: V reštaurácii, Cestujeme, O čase, Teplota, atď. Počas vyučovacej hodiny využívame metódy a formy práce, ktoré rozvíjajú u žiakov schopnosť analýzy a syntézy, vedú žiakov k čítaniu zadaní úloh s porozumením, učia ich pracovať individuálne i skupinovo na riešení problémových úloh, zdôvodňovať svoje rozhodnutia.

Od začiatku realizácie projektu „Matematika pre život“ sa stretávame na školách zo strany žiakov aj učiteľov s pozitívnymi ohlasmi. U väčšiny žiakov pozorujeme silnú motiváciu k riešeniu daných úloh. Žiakom umožňujeme pracovať nielen individuálne ale aj skupinovo, čo obohacuje ich schopnosť argumentovať svoje názory pred ostatnými spolužiakmi. Učitelia vítajú možnosť získať ďalšie materiály, ktoré môžu obohatiť edukačný proces.

Pri riešení problémov reálneho sveta je potrebné použiť získané vedomosti a zručnosti v situáciách, kde pokyny nie sú až také jasné a treba rozhodnúť, ktoré vedomosti by mohli byť relevantné a ako ich možno úspešne zužitkovať. Edukačný proces, podľa nášho názoru, využíva nedostatočné množstvo úloh z reálneho života, kde je potrebné použiť aj vedomosti z matematiky. Predpokladáme, že práve preto by zbierka pracovných listov a úloh, ktoré rozvíjajú matematickú kompetenciu žiakov 1. stupňa základnej školy, mohla byť nielen pre žiakov ale aj pre učiteľov v praxi prínosom. Učiteľom však budeme už v priebehu realizácie projektu poskytovať na stránke www.matematickapointa.sk v sekcii Edukačné stratégie v matematike materiál, s ktorým by mohli pracovať na rozvoji matematickej gramotnosti svojich žiakov, a ktorým by mohli obohatiť vyučovanie na 1. stupni základnej školy o množstvo úloh z reálneho života.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu „Moderné informačno-komunikačné technológie ako prostriedok ďalšieho vzdelávania učiteľov-elementaristov v matematike “ MŠ SR KEGA 3/3027/05

LITERATURA

[1] KUBÁČEK, Z. a kol. *Matematická gramotnosť – správa 2003*. Bratislava: ŠPÚ, 2004.

[2] TOMÁŠEK, V, a kol. *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávaní*. Praha: UIV, 1998.

Pracovní dílny

PODNĚTNÁ PROSTŘEDÍ VE VÝUCE – CESTA K ROZVÍJENÍ MATEMATIKY V MYSLI DÍTĚTE[2]

JANA CACHOVÁ[3]

Cílem dílny bylo představit účastníkům konference modul B 04: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe (z projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP). Dílna seznámila účastníky s myšlenkami konstruktivizmu a se základními tezemi podnětné výuky, která z těchto myšlenek vyrůstá. Byla zde rovněž předvedena typická práce v modulu – společný rozbor videonahrávky z hodiny matematiky.

„. . . Člověk není pasivním příjemcem podnětů,
přicházejících z vnějšího světa, ale ve zcela konkrétním
smyslu tvoří svůj svět. . .
L. von Bertalanffy, 1964"

PŘÍBĚH JEDNOHO HLAVOLAMU

Moji synové dostali přibližně před třemi lety kuličkový hlavolam – viz obr. 1. Hlavolam se skládá z desky a jednotlivých barevných dílků různých tvarů, které jsou tvořeny spojenými kuličkami jedné barvy. Smyslem hlavolamu je porovnat dílky tak, aby pokryly desku. Hlavolam však tehdy děti nezaujal, byl na ně příliš obtížný. Pouze několikrát složily dílky podle návodu, který je přiložen, a pak už jen ležel na poličce.

Počátkem letošního roku se k němu chlapci (8, 7 a 5 let) opět vrátili. Zkoušeli jej skládat a zjistili, že se jejich řešení navzájem liší a že se neshodují s návodem. Začali se navzájem předhánět, kdo přijde na více různých řešení. Tatínek jim nejprve pomáhal řešení zakreslovat na papír. Postupně přišli na to, že stačí, když jim předkreslí jen síť teček, protože do ní už dokáží řešení zanést samostatně (nejprve dodržovali barvy, po nějaké době poznali, že jsou pro zápis zbytečné – viz obr. 2). Činnost všechny tři zabavila na několik týdnů, opakovaně se k hlavolamu vraceli, hledali a zaznamenávali nová řešení.

[2]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[3]Katedra matematiky PdF UHK, jana.cachova@uhk.cz

Obr. 1

Obr. 2

Hlavolam je zaujal, soutěžili spolu a pečlivě kontrolovali, zda nalezené řešení opravdu ještě nikdo z nich nemá zapsané. Každé zakreslené schéma označili iniciálou autora.

Posun nastal, když zjistili, že je možné najít řešení, která lze jednoduše přesunem dvou dílků převést na další nové řešení (na obr. 1 např. žlutooranžový trojúhelník v pravém dolním rohu hlavolamu). Řešení pojmenovali „dva v jednom“ a pokoušeli se hledat právě taková řešení. Po nějaké době objevili, že existují řešení, která v sobě obsahují více elementů, zvyšujících počet řešení (na obr. 1 je možné navzájem přemístit také bleděmodrý a fialový dílek). Domnívali se, že se počet řešení určí jako $2 + 2$. Brzy ale našli řešení, které v sobě obsahovalo i tři nebo čtyři takové segmenty (některé z nich bylo možné obměnit více než dvěma způsoby). Stále si mysleli, že celkový počet možných obměn jednoho řešení určí jako součet obměn jednotlivých segmentů. Snažila jsem se je dovést k tomu, že nemají pravdu. Hádali se, že to tak je. Až když z jednoho takového řešení skutečně postupně poskládali všechny jeho možné varianty, pochopili a začali dílčí obměny navzájem násobit (měli radost, že jich je tolik).

Osobně se domnívám, že hlavolam rozvíjí nejen tvořivost dětí a jejich kombinační schopnosti, ale i představu o shodných zobrazeních (otočení, posunutí, osové i středové souměrnosti).

Vyučování může probíhat různě

Proč jsem dílnu pro učitele 2. stupně ZŠ uváděla domácí hrou malých dětí s hlavolamem? Chtěla jsem na tomto příkladu ukázat, jak se děti skutečně učí a že i školní vyučování může probíhat různě. Myslím, že příběh s hlavolamem dobře ilustruje úvodní citát L. von Bertalanffyho a že tento hlavolam byl (a stále ještě je) pro mé děti podnětným prostředím, které pomáhá rozvíjet jejich vnitřní svět. Vyučování skutečně může probíhat různě, záleží na učiteli samotném, ale i na dalších podmínkách. Nás bude zajímat z pohledu rozvíjení matematiky v mysli dítěte. Vyučování tak může být uskutečňováno:

TRANSMISÍ	INSTRUKCÍ	KONSTRUKCÍ
Přenos části hotové matematiky žákům.	Žáci dostávají návod, jak obstát (bez hlubšího porozumění).	Rozvíjí aktivní tvořivé myšlení žáka a jeho zájem o matematiku.

Jednotlivé vyučovací přístupy jsme doložili ilustracemi z textu k modulu Stehlíková, Cachová (2006), sice ilustrací 5.1: Thaletova kružnice (pozorování studentky učitelství, str. 30), ilustrací 2.3: Otáčení o 90 stupňů (str. 13) a ilustracemi 2.4 a) a b) (str. 14–15) Součet úhlů v mnohoúhelníku. Příběhy doplnila videonahrávka z japonské hodiny matematiky, ve které žáci samostatně tvořili vlastní úlohy o úhlech (TIMSS VideoStudy 1999). Ukázka z japonské hodiny matematiky navodila diskuzi o tom, co je konstruktivizmus a jak jej realizovat v praxi.

CO JE TO KONSTRUKTIVISMUS?[4]

Konstruktivizmus je široký proud filozoficko – pedagogických teorií, který se dále dělí na různé směry – radikální, kognitivní, sociální atd.

> Konstruktivizmus v psychologických a sociálních vědách je směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností. (Hartl, Hartlová, 2000, s. 271)

Pro potřeby didaktiky matematiky formuloval tzv. Desatero didaktického konstruktivizmu F. Kuřina (blíže v Hejný, Kuřina, 2001). Později tyto myšlenky upravil v tzv. realistickém konstruktivizmu:

> Při řešení … problému můžeme přirozeně sdělovat žáku všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na poznatky v příručkách a encyklopediích, ale vše ve službách rodící se matematiky v duševním světě žáka. Konstruktivní vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh. (Kuřina, 2002)

Realizací konstruktivizmu v praxi je tzv. podnětné vyučování. Vyrůstá z *Investigative teaching* B. Jaworski (1994). Podnětnou výuku chápeme jako „individuální konstrukt“ učitele. Lze ji vymezit několika principy.

PRINCIPY PODNĚTNÉ VÝUKY (STEHLÍKOVÁ, CACHOVÁ, 2006)

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.

[4]Podrobněji v Stehlíková, Cachová (2006, str. 4–5).

2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.
3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.
4. Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení.
5. Učitel podporuje diskuse mezi žáky o matematické podstatě problémů
6. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
7. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

ZÁVĚR

Vytváření podnětných prostředí ve výuce je důležitým předpokladem rozvíjení matematiky v mysli žáka. Školní vyučování se ale bohužel častěji orientuje spíše na reprodukci učiva bez hlubšího porozumění. Pokud se učitel rozhodne vyzkoušet principy podnětné výuky ve školní praxi, je třeba, aby dopředu počítal s tím, že se nemusí ihned dostavit okamžitý účinek. Jedná se totiž o dlouhodobou záležitost – žáci přivyklí tradičnímu vyučování, se musí stejně jako učitel nejprve naučit pracovat jiným způsobem, než na jaký byli doposud zvyklí. Je především nutné, aby se učili více spoléhat sami na sebe. Pokud učitel i žáci ve svém úsilí vytrvají, časem se jistě efekt dostaví. Tvořivé činnosti jsou nejlepším předpokladem pro rozvoj osobnosti dítěte a pěstování jeho matematického světa.

LITERATURA

[1] HARTL, P.; HARTLOVÁ, H. *Psychologický slovník*. Praha: Portál, 2000.

[2] HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

[3] JAWORSKI, B. *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London: Falmery Press, 1994.

[4] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*. Praha: JČMF, 2006.

EXPERIMENTY VE VÝUCE MATEMATIKY NA STŘEDNÍ ŠKOLE[1]

PETR EISENMANN[2]

Cílem tohoto příspěvku je popsat jeden experiment z výuky matematiky na střední škole. Jeho prezentace je vhodná při probírání tématu Diferenciální a integrální počet.

Výchozí situací budiž pokus, který učitel se studenty provede. Do plechového hrnečku nalije asi 0,3 l vroucí vody. Hrneček nechť je tepelně co nejlépe izolován od podložky, například může stát na třech úzkých dřevěných špalíčcích. Do laboratorního stojanu si upevní teploměr, zaznamená teplotu vzduchu v místnosti (T0) a teploměr po asi 5 minutách zanoří do vody v hrnečku. Po ustálení rtuti v teploměru zaznamená v čase $t = 0$ naměřenou teplotu. Tuto pak zaznamenává se studenty každé 4 minuty. Je velice vhodné výsledky zadávat hned do počítače, a to v programu Excel. Výsledky z našeho experimentu jsou v tabulce 1.

Čas	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
Teplota	72	69,5	64	59,5	56	53	50	47,5	45,5	43,5	42	40,5	39	38	37	35,5

Tab. 1

Mezi zaznamenáváním výsledků učitel se studenty sestaví příslušný matematický model. Motivací může být snaha předpovědět teplotu vody na konci experimentu, tj. po jedné hodině.

Má-li nějaká látka teplotu větší, než je teplota jejího okolí, začne se ochlazovat. Budeme předpokládat, že hrneček se po zmíněných pěti minutách ohřál na stejnou teplotu jako voda a okolním prostředím tedy budeme rozumět vzduch v místnosti. Náš model předpokládá, že okamžitá rychlost ochlazování vody je přímo úměrná rozdílu mezi její aktuální teplotou a teplotou jejího okolí. To vyjadřuje diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \tag{1}$$

kde k je číselná konstanta menší než 0, neboť změna teploty látky vyjádřená levou stranou rovnice (derivace teploty podle času) je záporná, látka se ochlazuje.

Řešení lineární diferenciální rovnice (1) zde uvedu pouze velice stručně. Nejprve se separací proměnných vyřeší příslušná homogenní rovnice

$$\frac{dT}{dt} = kT.$$

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GAČR 406/07/1026.

[2]Přírodovědecká fakulta UJEP Ústí nad Labem, eisenmannp@sci.ujep.cz

Její obecné řešení

$$T = Ce^{kt}$$

se posléze metodou variace konstanty změní v obecné řešení rovnice (1)

$$T = T_0 + Ce^{kt}.$$

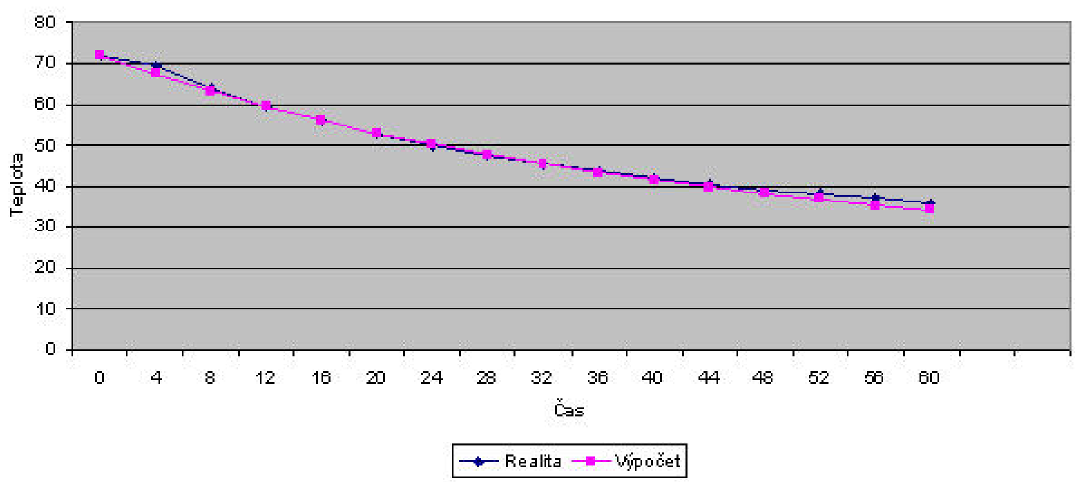
Nyní je třeba určit neznámé konstanty C a k. Z počáteční podmínky $T(0) = 72$ (viz tab. 1) plyne (teplota okolního vzduchu byla při našem experimentu 23° C) hodnota $C = 49$.

Pro určení konstanty k jsme vzhledem k časovému průběhu experimentu vybrali teplotu vody ve dvanácté minutě měření, tedy $T(12) = 59,5$. Hodnota konstanty k potom vyjde přibližně $-0,02454$.

Partikulární řešení rovnice (1) odpovídající podmínkám $T(0) = 72$ a $T(12) = 59,5$, tedy hledaná závislost teploty vody na čase má předpis

$$T = 23 + 49e^{-0,002454}. \tag{2}$$

Je vhodné nyní pomocí Excelu vypočtené hodnoty této funkce zobrazit do jedné tabulky vedle těch naměřených a vše ještě doprovodit obrázkem grafů obou závislostí (obr.1).



Obr. 1

V tab. 2 je v prvním řádku uveden čas v minutách, ve druhém řádku naměřená teplota vody ve stupních Celsia a ve třetím řádku funkční hodnoty funkce (2) zaokrouhlené na jedno desetinné místo.

0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
72	69,5	64	59,5	56	53	50	47,5	45,5	43,5	42	40,5	39	38	37	35,5
72	67,5	63,3	59,5	56,1	53	50,2	47,6	45,3	43,2	41,4	39,6	38,1	36,7	35,4	34,2

Tab. 2

Při závěrečné diskusi se studenty o souladu naměřených hodnot s funkčními hodnotami funkce (2) je vhodné upozornit i na jednu nedokonalost použitého modelu. Zatímco ve skutečnosti se po určité době teplota vody vyrovná teplotě okolí, v použitém matematickém modelu je tomu tak až v limitním případu

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = 23.$$

OPISOVAČKY, SKLÁDAČKY, . . . NESMYSLY NEBO VZDĚLÁVACÍ STRATEGIE?

MIROSLAV HRICZ[1]

Každý učitel hledá stále nové možnosti, jak žáky motivovat k touze po poznání. Uvědomuji si, že některé metody, formy práce, tematické zaměření projektů a způsoby komunikace, které žáci ještě před pár lety akceptovali, jsou dnes „zastaralé“ a je nutné je přinejmenším modifikovat. Dílna se zaměřila na prezentaci mých inovačních pokusů, ale také na výměnu zkušeností všech zúčastněných.

OPISOVAČKY

Žáci obdrželi zadávací list s úlohami na procvičování početních operací se zlomky. Po třídě byly rozvěšeny lístečky s jednotlivými kroky řešení daných úloh. Úkolem žáků je neřešit úlohy, nýbrž najít správné řešení na lístečcích, zapamatovat si jej (zadávací list leží stále na lavici) a zapsat řešení. Vypočítat úlohy bez hledání řešení na lístečcích bylo zakázáno.

Zadáno bylo například $\frac{7}{12} + \frac{6}{16}$.

Na lístečcích se pak objevily zápisy, které byly vybrány z písemných prací žáků dané třídy (viz tab. dole). Žádný způsob řešení nesměl chybět (v paralelních třídách bylo různé).

Žáci aktivitu hodnotili takto (přesná citace): „Bylo to hrozné / moc lístečků.“ „100krát těžší než to jenom počítat.“ „Stejně jsme to museli počítat, a pak lítat jak paka a hledat lísteček.“ „Makačka na paměť.“ „Bylo málo času.“ „Bylo to zmatený.“ „Všechno se mi pletlo.“ „Špatně jsem si něco zapamatovala a už to bylo v háji.“ „Mě to bavilo, nebylo to nudný jako některý hodiny matiky.“ „Bylo to jako kolo štěstí.“ „Někdo znal řešení a nenašel na lístečkách ten zápis.“

Problémem při řešení se ukázalo velké množství lístečků. Nadále využívám tento způsob výuky pouze jako nápovědu pro ty, kteří nevědí, jak začít (případně nevědí, jak

[1]Fakultní základní škola, Táborská 45, Praha 4 – Nusle, www.zstaborska.cz, miroslav.hricz@centrum.cz

dál). Jedná se tedy o nabídku pomoci. Neosvědčilo se mi v takovýchto případech uvádět chybná řešení. Metoda je použitelná jak pro samostatnou práci žáků, tak pro skupinové vyučování.

$\frac{7\cdot 4}{48}+\frac{6\cdot 3}{48}$	$\frac{7\cdot 4+6\cdot 3}{48}$	$\frac{7\cdot 2}{24}+\frac{3\cdot 3}{24}$
$\frac{7}{12}+\frac{3}{8}$	$\frac{28}{48}+\frac{18}{48}$	$\frac{46}{48}$
$12=2\cdot 2\cdot 3$ $16=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ $\mathrm{n}(12,16)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=48$	$12=2\cdot 2\cdot 3$ $16=2\cdot 2\cdot 2$ $\mathrm{n}(12,16)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$	$\frac{56}{96}+\frac{36}{96}$
$\frac{28+18}{48}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{7\cdot 2+3\cdot 3}{24}$
$\frac{14+9}{24}$	$\frac{56+36}{96}$	$\frac{14}{24}+\frac{9}{24}$
	$\frac{92}{96}$	

SKLÁDAČKY

Jedná se o obdobnou metodu jako v předchozím případě. Žáci mají v obálce lístečky, na kterých jsou jednotlivé kroky řešení dané úlohy. Úkolem je složit správné řešení. Zde se mi osvědčila skupinová práce, stejně jako ponechání chybných řešení či nadbytečných lístečků. Při práci ve třídě skupina složí řešení úlohy, řešení se vyfotí a promítá při prezentaci práce skupin. Z hlediska komunikativních dovedností se jedná o velmi účinnou metodu učení.

LITERATURA

[1] Hricz, M., Kubínová, M. (2006). Žákovské projekty – jedna z možných cest, jak rozvíjet klíčové kompetence ve ŠVP. In *Studijní materiál k projektu Podíl učitele ZŠ na tvorbě ŠVP*. JČMF Praha 2006. [CDROM].

[2] Kubínová, M.(2002). *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha: PedF UK.

HISTORIE MATEMATIKY PRO UČITELE[1]

MAGDALENA HYKŠOVÁ[2]

ÚVOD

V pracovní dílně se zájemci mohli blíže seznámit s materiály pro kurz ESF věnovaný historii matematiky a jejímu využití ve výuce na základní škole. Podívali jsme se na kořeny aritmetiky, zkusili jsme si počítat v různých pozičních a nepozičních číselných soustavách a s různými pomůckami a dále jsme se zaměřili na kořeny některých základních geometrických pojmů. Cílem zmíněného kurzu je ukázat, že znalost historie matematiky učitelům výrazně pomůže při motivaci žáků, propojí matematiku s dalšími předměty a pomůže jim přesvědčit žáky o tom, že matematika není jen souhrnem nudných vzorců a algoritmů, které je nutno nabiflovat. Vzhledem k rozsahu tohoto příspěvku se zde zaměříme jen na část týkající se aritmetiky.[3]

Jistě není třeba připomínat, že pro motivaci dětí k tomu, aby se učily počítat v poziční desítkové soustavě dnes obvyklým způsobem, je vhodné ukázat, že se nejedná o nic, co spadlo shůry či co si vymyslela paní učitelka, aby je trápila, ale o výsledek dlouhého vývoje pramenícího z praktických lidských potřeb. Žáci by si měli uvědomit, že čísla nás obklopují na každém kroku – a s tím i potřeba čísla znázorňovat a zaznamenávat, stejně jako s čísly počítat. Pokusme se proto přivést žáky k tomu, aby sami hledali odpovědi na otázky, které uvádíme jako nadpisy následujících podkapitol.

KDY POTŘEBUJEME VYJÁDŘIT POČET?

Děti jistě sami přijdou na mnoho situací, kdy je třeba nějakým způsobem vyjádřit počet. Začneme-li v dávné historii, pak nás snadno napadne, že naši prapředkové potřebovali vyjádřit například množství vyhlédnuté kořisti, potřebný počet lovců, množství ulovené kořisti, počet žen, potomků, příbuzných, obyvatel vesnice, počet chovaných zvířat, množství nasbíraných plodů, množství vypěstované úrody apod.

JAK ZNÁZORNIT POČET?

Nejčastější bylo vyjádření počtu pomocí prstů na rukou nebo na nohou. Pozůstatky tohoto vnímání čísel lze dodnes najít v řadě jazyků, kde jsou často příbuzná či dokonce totožná slova pro číslo 5 a ruku, pro číslo 10 a obě ruce, pro číslo 20 a celého člověka

[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2]FD ČVUT, hyksova@fd.cvut.cz

[3]Materiály, které byly v rámci dílny prezentovány a rozdávány, jsou k dispozici na následující internetové adrese: *http://euler.fd.cvut.cz/predmety/matematika/historie/*

(např. v italštině znamená slovo le dita jednak čísla do deseti, jednak prsty). Pro vyjádření vyšších čísel si můžeme pomoci například dřívky či kamínky, které lze dále srovnávat do hromádek, do řad, případně navlékat na provázky – tak se zrodila první počítadla. Poznamenejme, že například jihoafričtí domorodci přišli na zajímavý způsob vyjádření vysokých čísel pomocí prstů na rukou: jeden počítá na prstech své ruky jednotky, druhý desítky a třetí stovky.

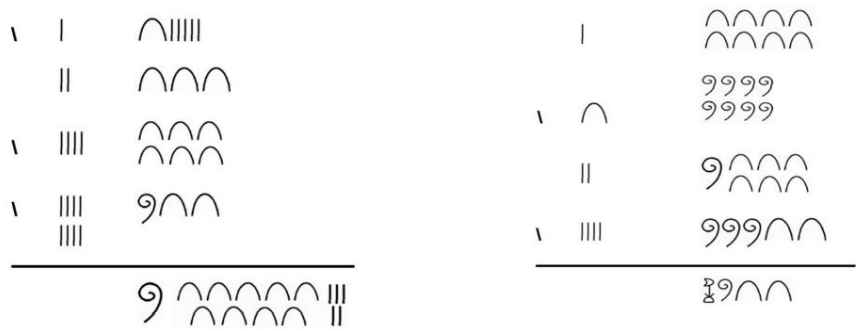
Jak zaznamenat počet?

Často je třeba číselný údaj na nějakou dobu zaznamenat. Nejjednoduššími zápisy čísel byly zářezy na kostech nebo dřevěných holích, tzv. vrubovkách. Uvědomme si, že se dodnes používají rčení: „Máš u mě vroubek.“, „Dej mi to na vrub.“ apod. Nejstarší známá vrubovka je stará asi 35 tisíc let; byla nalezena v pohoří Lebombo na hranicích afrického Svazijska a jedná se o část stehenní kosti paviána s 29 zářezy. Jiný způsob zápisu čísel, který používali například jihoameričtí Inkové, byl pomocí uzlů na provázcích. Čísla se zde vyjadřovala v desítkové soustavě a číselnou hodnotu uzlu udávalo to, kolikrát se provlékl provázek uzlem.

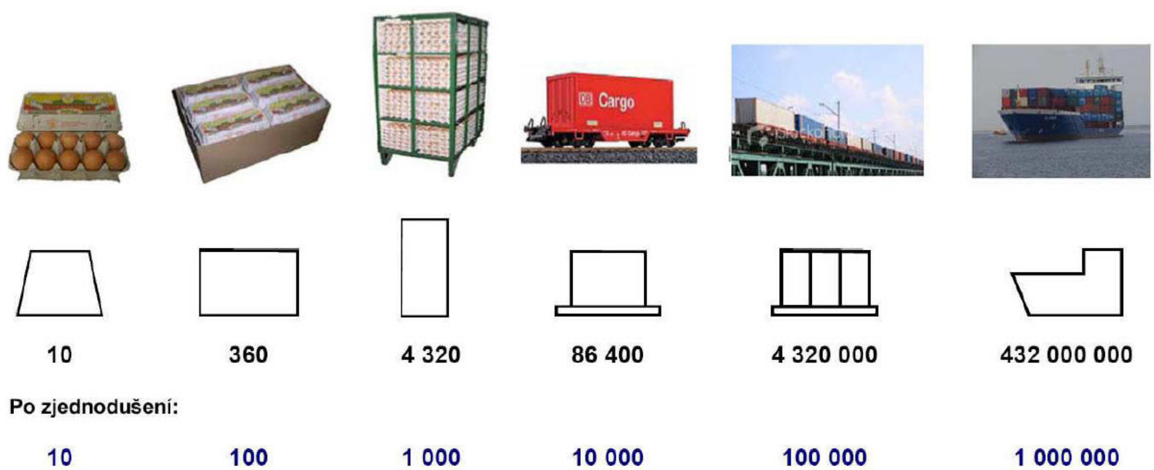
Jak vyjádřit velká čísla? Jak s čísly počítat?

Později člověk začal malovat např. na stěny jeskyní; postupným zjednodušováním a ustálením obrázků vzniklo cca před 5 tisíci lety hieroglyfické písmo. Podívejme se, jak pomocí hieroglyfů vyjadřovali čísla staří Egypťané. Používali nepoziční soustavu; měli zvláštní znak pro jednotku každého řádu od jednotek po miliony, tyto znaky pak jednoduše shromažďovali vedle sebe či pod sebe:

Sčítání a odčítání čísel vyjádřených hieroglyficky je snadné: pouze se shromažďují, resp. ubírají znaky pro jednotky jednotlivých řádů; jen je občas třeba nahradit 10 jednotek určitého řádu jednou jednotkou řádu vyššího (při sčítání) či naopak (při odčítání). Násobení staří Egypťané prováděli tak, že jeden činitel postupně zdvojnásobovali a vhodné násobky pak sečetli. Chceme-li například vypočítat $15 \cdot 13$, pak budeme číslo 15 zdvojnásobovat, takže obdržíme dvojnásobek 30, čtyřnásobek 60 a osminásobek 120; pak si uvědomíme, že $13 = 8+4+1$, proto $15 \cdot 13 = 15 \cdot (8+4+1) = 15 \cdot 8 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 1 = 120 + 60 + 15 = 195$. Při dělení podobně zdvojnásobovali dělitele; případně si pomáhali zdesetinásobováním. V hieroglyfickém zápisu by například výpočet součinu $15 \cdot 13$ a podílu $1\,120 : 80$ vypadal takto:



Děti si mohou vymyslet i vlastní hieroglyfy, a pak si s nimi zkusit počítat. Jako inspirace může posloužit například „vajíčková soustava“ (vajíčko, plato, krabice, regál, kontejner, vlak, loď), která by po schematizaci a zjednodušení mohla vypadat takto:

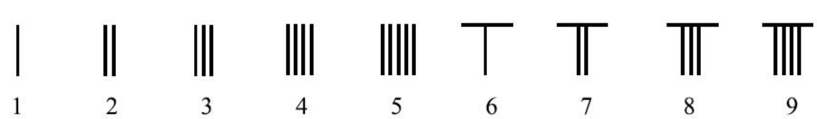


Vraťme se nyní zpět do Egypta. Hieroglyfy byly postupně zjednodušovány, až vzniklo hieratické, později démotické písmo. Psaní však stále bylo poměrně pracné, provádění početních operací zdlouhavé, papyrus byl cenný; přirozeně tedy vyvstává otázka:

NELZE POČÍTÁNÍ USNADNIT?

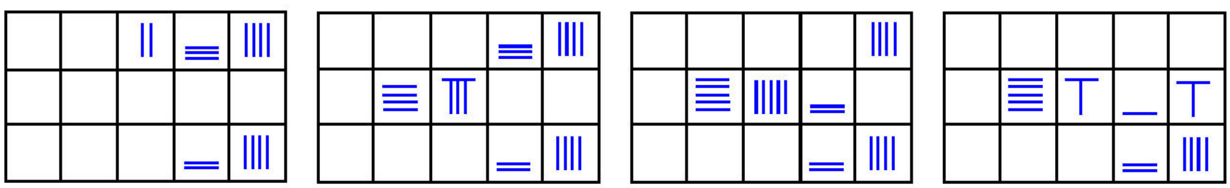
Počítací desky

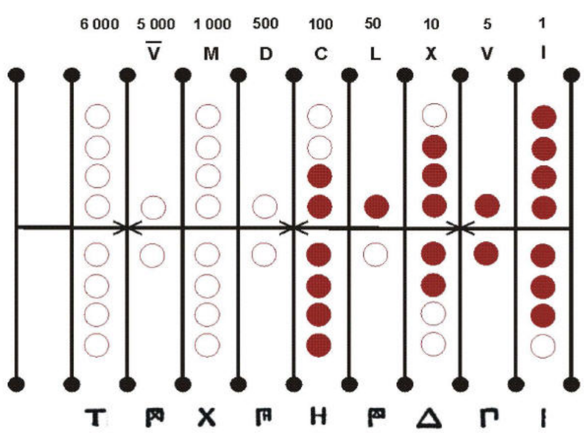
Jedním z nejjednodušších způsobů je vyžití počítacích desek, na nichž se čísla vyjadřují například pomocí oblázků či dřevěných tyčinek. Z praktických důvodů je nejvhodnější používat jen jeden druh předmětů a místo odlišného symbolu vyjádřit řád pomocí pozice oblázků či tyčinek na počítací desce opatřené jistými políčky. Odtud je již jen krůček k naší poziční číselné soustavě. Například v Číně (4. stol. př.n.l.) používali tyčinky, které kladli vodorovně a svisle na počítací desku:



Pokud čísla od 1 do 9 používali na místě desítek a tisíců, zapsali je obráceně:

Na internetové stránce uvedené v pozn. 1 je možné si stáhnout a vytisknout mj. čínskou „počítací desku“; místo tyčinek mohou posloužit například zápalky a pak už nám nic nebrání v počítání. Součet, resp. rozdíl dvou čísel je snadný: Číňané postupovali od nejvyšších řádů k nejnižším a tyčinky znázorňující jedno z čísel přidávali k tyčinkám odpovídajících řádů čísla druhého, resp. tyčinky odebírali. Při součinu posupně násobili jednoho z činitelů jednotlivými číslicemi z druhého činitele (opět od nejvyšších řádů); podle toho, na které pozici příslušná číslice stála, znázornili výsledek násobení o příslušný počet políček vlevo – viz následující příklad, který ukazuje součin $234 \cdot 24 = 5\,616$.





Přibližně ve stejném období používali staří řekové desku, na niž mohly být kladeny mince či oblázky; princip byl stejný, jen místo tyčinek v kolmém směru se použilo sousední políčko vyjadřující 5 jednotek daného řádu. Na obrázku vlevo jsou znázorněna čísla 289 a 428, která mají být sečtena.

Místo předmětů kladených na desku můžeme dále začít navlékat kuličky na provázky či tyčinky; tak vznikl například čínský či japonský abakus nebo ruský sčot (více viz pozn. 1).

Poziční číselná soustava

Podívejme se například na čínskou počítací desku. Učiníme-li poslední krůček a nahradíme-li v každém políčku skupinu tyčinek odpovídající číslicí, obdržíme vyjádření čísla v desítkové poziční soustavě.

Připomeňme, že ve starověké Mezopotámii byla již ve třetím tisíciletí př.n.l. používána šedesátková poziční soustava. Spolu s žáky se můžeme pokusit najít důvody, proč dnes používáme právě soustavu desítkovou. Vodítkem nám mohou být následující otázky: Kde se setkáváme s násobky 10? Kolik je třeba číslic v desítkové soustavě? Jak je velká malá násobilka? Kolik je třeba číslic v šedesátkové soustavě? Jak je velká „malá násobilka“ pro šedesátkovou soustavu? V čem je naopak výhodnější soustava šedesátková? Jak se vyjádří např. 99 nebo 999 v šedesátkové soustavě? Kolik je třeba číslic např. ve dvojkové soustavě? Jak je velká malá násobilka pro dvojkovou soustavu? Jak se vyjádří např. 99 nebo 999 ve dvojkové soustavě?

Literatura

[1] Bečvář, J.; Fuchs, E.(eds). *Historie matematiky I.* JČMF, Brno 1994.

[2] Bečvář, J.; Bečvářová, M.; Vymazalová, H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Prometheus, Praha 2003.

[3] Fuchs, E.; Hykšová, M. *Historický vývoj matematiky ve vyučování matematice v ZŠ.* UCMP, Praha 2006.

Krychlová tělesa jako prostředí pro rozvíjení prostorové představivosti v matematice na prvním stupni ZŠ[1]

Darina Jirotková[2]

Úvod

Cílem pracovní dílny bylo seznámit účastníky s geometrickým prostředím krychlových těles jako jednou oblastí 3D geometrie, která značně přispívá k rozvoji prostorové představivosti, ale též k poznávání geometrických objektů jak rovinných, tak prostorových již od prvního ročníku základní školy. Porozumění geometrickým objektům a vztahům mezi nimi přispívá i výjimečná možnost objekty reprezentovat několika různými jazyky, a to jak konceptuálními, tak procesuálními. Účastníci dílny byli seznámeni, jak je toto prostředí didakticky zpracováno v nově vznikající řadě učebnic matematiky v nakladatelství Fraus autorů Hejný, Jirotková, Slezáková (2007).

Ústředním objektem tohoto prostředí je krychlová stavba – objekt, s nímž má dítě již předškolního věku mnohé zkušenosti ze svých her s kostkami. Předlohy pro své stavby

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2]PedF UK v Praze, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

žáci nacházejí v okolním světě, knížkách, televizi, ale též ve vlastní fantazii. Životní zkušenosti jsou východiskem pro otevírání 3D geometrického světa žákům na prvním stupni ZŠ a propojením tří aktivit ve škole postupně měníme žákovo poznání v činnostech na poznání ve slovech a na poznatky. Aktivity jsou následující:

MANIPULACE – SLOVNÍ POPIS USKUTEČŇOVANÉ ČINNOSTI –
– POUŽITÍ ZNAKOVÉHO JAZYKA

Z uvedeného je patrné, jak je důležité, aby učitel doprovázel veškeré manipulativní aktivity slovním komentářem. Je to způsob, jak se děti nejlépe seznámí s terminologií. Bohatost jazykových prostředků umožní i další rozvoj myšlenek.

Znakový jazyk umožní pomocí dohodnutých znaků jednoduše a srozumitelně popsat i složitější krychlové stavby, které by bylo obtížné popsat slovy. Umožní rovněž zaznamenat proces konstrukce stavby. Dříve než se seznámíme s různými způsoby, jak popsat krychlovou stavbu, tento pojem vymezíme. To znamená, že budeme používat slova běžného jazyka (položit, přilepit, přiložit, přesně, . . .) i některé termíny (krychle, stěna, hrana, vrchol) a budeme předpokládat, že jim všichni stejně rozumíme. Na krychlovou stavbu se můžeme dívat z hlediska procesu stavění, proto vymezíme pojem procesně, což nám dá návod, jak krychlovou stavbu postavit. Na stavbu se však také můžeme dívat jako na hotový objekt, proto vymezíme pojem i staticky, neboli konceptuálně. Toto vymezení nám umožní rozeznat, zda daný 3D objekt je či není krychlovou stavbou.

Tématem krychlová tělesa se zabývala J. Michnová při semináři Dva dny s didaktikou matematiky v roce 2006. Předvedla, jak toto téma didakticky zpracovala pro své žáky 5. ročníku základní školy. V článku (Michnová, 2007) autorka intuitivně zavedla pojem krychlové těleso, a sice staticky, konceptuálně, představila jeden ikonický jazyk konstrukce krychlového tělesa, kterým popsala jednotlivé díly krychlového hlavolamu, stručně představila další dva jazyky – plán (jednoduchý plán) a podlažní plán (úplný plán) a samozřejmě nejpoužívanější jazyk – portrét. Nakonec ukázala, jak na základě řešení úloh o krychlových tělesech diagnostikovala úroveň prostorové představivosti žáků.

V prvním ročníku ve zmíněných učebnicích matematiky začínáme nejdříve pracovat s krychlovými stavbami, proto zde tento pojem vymezíme. Dále vymezíme pojem krychlové těleso a pokusíme se i o preciznější matematické vymezení. To je uvedeno spíše jen pro možnost porovnání přístupu intuitivního a čistě matematického.

Vymezení pojmů krychlová stavby a krychlové těleso

1. Vymezení intuitivně procesní

Krychlovou stavbou rozumíme prostorový objekt postavený podle jistých pravidel z konečného počtu shodných krychlí. Pravidla pro stavbu krychlové stavby jsou jednoduchá:

1) začínáme položením jedné krychle na „podlahu“;

2) k ní přilepíme druhou krychli tak, že přesně přiložíme stěnu jedné krychle na stěnu krychle druhé;

3) tak pokračujeme lepením další a další krychle, vždy na jednu, nebo více krychlí již rozestavěné stavby, až vyčerpáme všechny připravené krychle.

2. Vymezení intuitivně statické (konceptuální)

Prostorový útvar vytvořený z konečného počtu shodných krychlí nazveme *krychlovou stavbou*, jestliže:

1) každé dvě krychle mají společnou buď jednu stěnu, nebo jednu hranu, nebo jeden vrchol, nebo nemají nic společného;

2) žádná krychle „nevisí ve vzduchu“;

3) stavba je z jednoho kusu tj. středy libovolných dvou krychlí stavby lze spojit čárou, která celá leží uvnitř stavby.

Pojem krychlová stavba je spjat s pojmy „svislý“ a „vodorovný“. To jsou vlastnosti, které se změní se změnou polohy objektu, a proto do čisté geometrie nepatří. Vnímáním krychlových staveb nezávisle na jejich poloze vůči okolí budujeme pojem krychlové těleso, který dále vymezíme. Použijeme precisní matematickou definici, ve které je krychlové těleso nahlíženo staticky.

3. Vymezení precisně statické

Krychli považujeme za *krychlové těleso*. Množinu n krychlí, kde $n \in \mathbf{N}$, nazveme krychlové těleso, jestliže

1) ke každé krychli existuje aspoň jedna k ní sousední taková, že tato dvojice krychlí tvoří hranol s rozměry $1 \times 1 \times 2$,

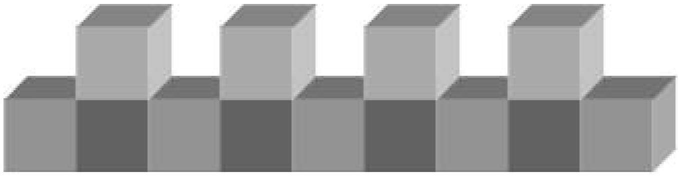
2) jsou-li X, Y dvě různé krychle krychlového tělesa, pak existuje posloupnost krychlí Z_1, Z_2, ... Z_k tak, že krychle X je sousední s krychlí Z_1, krychle Z_i je sousední se Z_{i+1} pro každé $i = 1, \ldots, k-1$, a krychle Z_k je sousední s krychlí Y.

DIDAKTICKÉ VYUŽITÍ PROSTŘEDÍ KRYCHLOVÝCH TĚLES

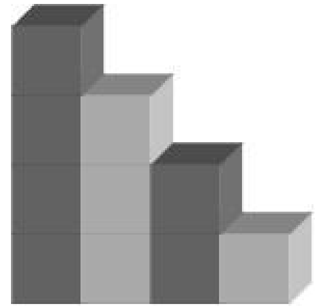
V prvním ročníku ZŠ začínáme nejdříve stavět „věže“ a „vláčky“. Při tom učitel komentuje činnost: „Přiložíme stěnu jedné krychle přesně na stěnu druhé krychle.“ a žáci se tak seznamují s termínem stěna. Při této činnosti hraje také roli počet krychlí, z nichž věž stavíme, a žáci získávají první zkušenosti s objemem tělesa. Dále střídáme barvy, a tím tuto látku propojujeme na v matematice tak důležité pravidelnosti, rytmy. Při stavbách cimbuří (obr. 1) nebo schodů (obr. 2) se prolíná rytmus geometrický s barevným.

Barevný rytmus přítomný u stavby schodů a počty rychlí v jednotlivých sloupcích dávají žákům zkušenosti z aritmetiky týkající se sudých a lichých čísel. Diskuse o tom, z kolika krychlí je stavba na obrázku 2 postavena, zda je tento počet jednoznačně určen, přispívá rozvoji prostorové představivosti.

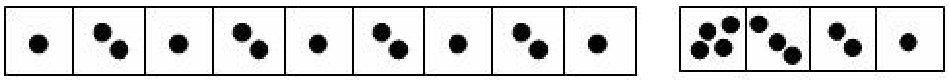
Kromě slovního popisu, fyzického modelu (konkrétní stavba) a portrétu (obrázky 1 a 2) používáme v prvním ročníku také znakový jazyk, a sice plán. Na rozdíl od toho, který uvedla J. Michnová (2007), nepoužíváme čísla, ale tečky. To umožní žákům pracovat s plány dříve, než se naučí psát číslice. Stavby na obrázku 1 a 2 zaznamenáme plánem tak, jak je na obrázku 3.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Prostorová představivost se velmi efektivně rozvíjí při „překladu“ z jazyka portrétů do jazyka plánů. Cílem je toto provádět přímo. Jak J. Michnová zmiňuje, rozvíjení prostorové představivosti nelze urychlit a příliš velké nároky kladené na žáky by mohly naopak tento rozvoj zabrzdit nebo dokonce zablokovat, a proto dokud je potřeba, musíme pracovat i s fyzickým modelem.

Při vlastní výuce, kdy jsem se žáky ve 2. ročníku pracovala s plány krychlových staveb, jsem se setkala s jedním závažným jevem. Někteří žáci při přenosu obrázku ze sešitu či papíru na podlaze, čili z horizontální polohy, na tabuli, čili do polohy vertikální, změnili pohled na těleso a kreslili nárys daného tělesa. V tomto případě je asi vhodné několikrát nakreslit plán tělesa na arch papíru na zemi a ten pak pověsit na tabuli, popřípadě ještě dané těleso vymodelovat.

J. Michnová pracovala se svými žáky s jazykem, který umožňuje zachytit proces konstrukce krychlového tělesa. Tento jazyk si připomeňme. Popis konstrukce používá šesti ikonických znaků:

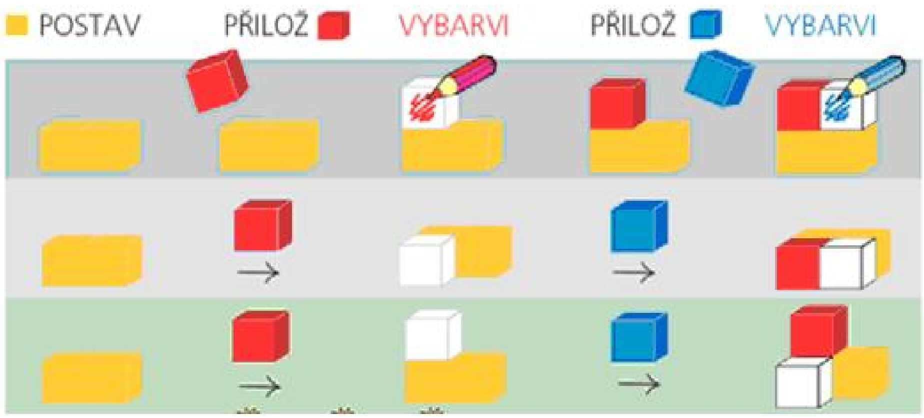
□ - polož krychli	→ - jdi na východ
≡ - jdi o 1 podlaží nahoru	↑ - jdi na sever
← - jdi na západ	↓ - jdi na jih.

Používání světových stran se nám osvědčilo více než používání slov doprava, doleva, dopředu, dozadu. Zejména slova dopředu a dozadu činívají problémy, neboť jejich význam není jednoznačný. Není zcela zřejmé, zda dopředu je směrem ke mně nebo ode mě, obdobně směrem dozadu. I slova doprava a doleva závisí na tom, odkud se na stavbu pozorovatel dívá.

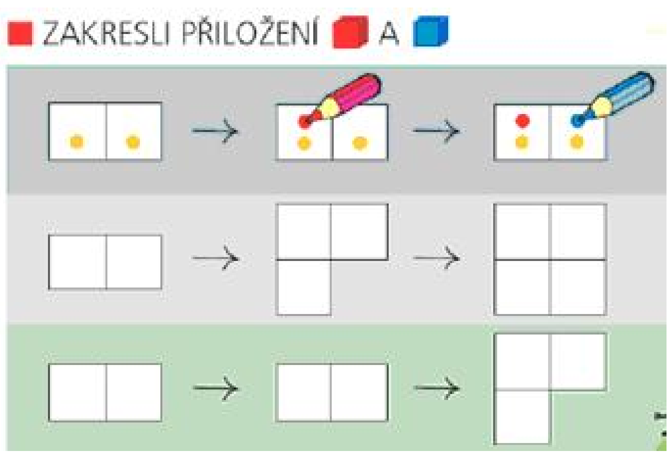
Úloha. Postup tvorby jisté stavby zapisujeme krok po kroku. Zapište jednotlivé kroky plánem. Kolik podlaží má tato stavba?

	Akce	Zápis konstrukce	Zápis plánem
1.	polož krychli	□	
2.	udělej krok na východ	□ →	
3.	polož krychli	□ → □	
4.	vystup o 1 podlaží nahoru	□ → □ ≡	
5.	polož krychli	□ → □ ≡ □	
6.	vystup o 1 podlaží nahoru	□ → □ ≡ □ ≡	
7.	polož krychli	□ → □ ≡ □ ≡ □	

Tento jazyk je pro první ročník příliš náročný. Proto pro procesuální přístup ke krychlovým stavbám používáme jakýsi „dynamický portrét“ (obr. 4), který též „překládáme“ do jazyka plánu (obr. 5). Uvedeme ilustraci ze zmiňované učebnice.



Obr. 4



Obr. 5

V učebnici je obrázek barevný. Začíná se stavět se dvěma žlutými kostkami, pak se přikládá červená a nakonec modrá. Barvy jsou použity i v plánech. V tomto případě se tedy rozlišuje, která tečka ve čtverci označuje kterou krychli - horní tečka označuje horní krychli.

Závěr

Závěrem dodejme, že používání pestré palety jazyků k popisu nějakých jevů v matematice je velice důležité. Otevírá to přístup k problematice mnoha žákům různých kognitivních typů, žákům s různými životními zkušenostmi.

Na konci pracovní dílny proběhla diskuse k těmto otázkám: Jsou žáci v prvním/druhém ročníku schopni porozumět plánu stavby? Co je pro žáky snazší – postavit stavbu podle plánu, nebo k dané stavbě vytvořit plán? Jsou žáci v prvním/druhém ročníku schopni porozumět zápisu stavby pomocí tří průmětů? Co je pro žáky snazší – postavit stavbu podle tří průmětů, nebo k dané stavbě vytvořit tři průměty? Jsou žáci v prvním/druhém ročníku schopni porozumět popisu konstrukce stavby? Co je pro žáky snazší – postavit stavbu podle popisu konstrukce, nebo k dané stavbě vytvořit popis její konstrukce?

Literatura

[1] Michnová, J. (2007). Krychlová tělesa a hlavolamy. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2006*. Sborník příspěvků. Karlova univerzita v Praze, Pedagogická fakulta, s. 90–95.

[2] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J. (2007). *Matematika*. Učebnice pro 1. ročník základních škol. Fraus, Plzeň.

Využití brambor ve výuce matematiky – poznávání těles, odkrývání vlastností, řezy na tělesech, shodnost, celek a jeho části

Michaela Kaslová[1]

Tato dílna si klade za cíl ukázat, že jednoduchý materiál může pomoci nejen oživit hodiny matematiky, ale i je účinným nástrojem pro zařazení specifických diagnostických, rozvíjejících i prohlubujících aktivit. V nabídce jsou zahrnuty aktivity vhodné jak pro mateřskou, tak základní, dokonce i střední školu.

[1]PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz; autor fotografií: M. Kaslová

Výchozí situace

• Žáci mají problém vidět z vnějšku těleso ze všech stran současně.
• Žáci mají ve škole omezený přístup k různým velikostem modelů jednotlivých typů těles tak, aby s nimi mohli manipulovat (např. trojboký, čtyřboký ... jehlan).
• Žáci mají obtíže s verbalizací toho, co vidí, s čím manipulují.
• Žáci se častěji setkávají již s hotovými modely, nebo jejich obrázky.
• Pokud žáci těleso „tvoří", je to z papíru, tedy tvoří jeho hranici.
• Některým žákům dělá problém odlišení geometrických útvarů 3D a 2D.

Teoretická východiska

• Již Komenský, Pestalozzi a další vyzdvihli význam manipulace vedle pozorování pro utváření představ (16. a 18. století).
• Montessori zdůraznila význam objevování v rámci experimentování (19. století).
• Kuřina upozornil na to, že vidět v obrázku je umění ..., tedy připouští obtíže (1993).
• Kaslová uvedla, že přechod ze světa reality do světa geometrie není tak přímý, jak se v učebnicích prezentuje (2007).
• Vývojová psychologie upozorňuje, že dekompozice je vývojově starší, a tím pro mladší žáky přirozenější než kompozice (větší pocit jistoty); u malých žáků ještě převládá celostní vnímání nad analyticko syntetickým (2006).

Pracovní dílna, která se soustředila na práci s bramborami s 5–11letými žáky a vysokoškolskými studenty, navazuje na předchozí pracovní dílny, v nichž se pracovalo se sádrou, ledem a modelínou (Kaslová 1997–2002).

Empirie (mateřské a základné školy, sondy)

Přínos použití brambor jako materiálu pro modelování byl sledován v praxi na různých úrovních během šesti let.

Byl sledován:
• Efekt u dětí s podprůměrnou či nerozvinutou představivostí (testováno i u pětiletých dětí).
• Efekt u studentů ve srovnání s cvičením na PC („co projde rukama, se zapisuje do skály").
• Efekt u žáků se specifickými poruchami učení (co vyžaduje vynaložení námahy včetně fyzické a je korunováno viditelným úspěchem, to je schopno transformace).

Efekt se projevil nejen ve zvýšení zájmu žáků/studentů o tělesa, v explozi činorodosti při experimentování, ve zvýšení koncentrace po dobu práce s tímto materiálem, ale oproti dosavadním typů aktivit (s výjimkou práce s molitanem) došlo k výrazně rychlejšímu:

a) rozlišení prostoru a roviny (užití obtiskování obarvovaných kousků brambor),
b) „vidění dopředu" (např. co se stane, až to odkrojím),

c) podnícení komunikace a navýšení poměru slov v komunikaci (ústup od ukazování) a redukci ukazovacích zájmen (ten, ta, to) a příslovcí (tam, tady),
d) pochopení smysluplnosti aktivity (např. objevení rovnoběžnosti protějších stěn krychle).

Pomůcky pro žáky

Tři až čtyři větší starší brambory (nikoli měkké, raději škrobovatější), lze obohatit o mrkev, „žlutá čtvrtka" nebo balicí papír (jiný s nehlazeným povrchem), nůžky, vodové barvy, malý nůž na krájení zeleniny, kus vlhkého molitanu místo štětce, podložka pro krájení (prkénko, podložku na Vv).

V mateřské škole dětem dáváme již různě nakrájené větší kousky brambor a 3–4 molitany namočené do různých barev a papíry již vystřižené (např. ve tvaru noční košile).

Úskalí využití brambor v základní škole

a) Bezpečnost práce s nožem lze ošetřit tak, že redukujeme počet nožů. Na tyto aktivity rozdělíme třídu do dvou či více skupin maximálně po 12 (další skupiny dělají něco jiného), na 1. stupni je ideální skupina o 6 žácích. Je vhodné pozvat asistenty z řad rodičů nebo pracovníků školní družiny, případně studenty, na 3 děti jeden dospělý, který jen napomáhá, nenapovídá. Bezpečnost lze zvýšit i rozsazením žáků v prostoru – ne blízko sebe. Nutná podmínka je, aby žák při krájení brambor seděl u stolku (v tomto případě nepracuje v sedě na koberci, jak je někdy zvykem). Doporučuji požádat o souhlas rodičů. Problém vyvstává při vyšším výskytu hypermobilních dětí nebo dětí se specifickými poruchami chování. Práce ve dvojicích se musí zvážit.
b) Bramborami neplýtváme, vybíráme klíčící brambory, ty již nelze použít v kuchyni.

V mateřské škole má již dítě brambory rozkrájené. Nové kousky může vytvářet dítě individuálně pouze u stolu učitelky pod jejím dozorem. Dítě pracuje především v objevování obtisků a hledání vztahu objekt a obtisk.

Organizace

Aktivity, které se dále objeví v nabídce, se nezařazují samozřejmě všechny naráz do jedné hodiny. Stačí při systému „přímá a nepřímá práce" pracovat s každou skupinou 15–20 minut, poté zapojit všechny do diskuse a pak se vrátit k tomu, co se dělo, a k tomu, co se bude dělat příště. Úvod a závěr je tedy vždy společný. Aktivity s bramborami v geometrii jsou vhodným námětem pro projekt a lze je zařadit i do pracovních činností nebo výtvarné výchovy. Doporučuji provádět fotodokumentaci a následně uspořádat výstavu nejen z produktů aktivit, ale i fotografií. Pokud brambory nebudeme barvit, lze výrobky naopak využít dále v kuchyni (polévka, salát), což je vhodné na škole v přírodě nebo na letním táboře.

Aktivity na ZŠ a SŠ

Aktivity nejsou nijak strukturovány, protože připouštějí různé kombinace. Jejich pořadí záleží nejen na stanoveném cíli, ale i na zařazení do kontextu (projekt *O smutné noční košilce* navazující na pohádku od Čapka bude jiný než projekt Brambory nebo „pouhé“ řezy na tělesech). Počet úkolů, aktivit není vyčerpán, jde o inspiraci pro vaši pedagogickou práci.

Aktivity jsou stimulovány úkoly, úlohami, výzvami, dotazy.

1. Vytvořte řezáním z brambor krychli.

2. Ověřte, zda je to model krychle (ověřování probíhá obtiskováním stěn na papír a porovnáváním obtisků, propojeno na opakovanou korekci) – vhodné i pro dvojice. Tuto aktivitu mohou dělat i děti mateřské školy zejména ve fázi identifikace.

3. Popište, jak jste postupovali

Popišme některé funkce této aktivity jako vzor pro další.

- **Funkce diagnostická**. Žák začínající řezem: A – dominance ve vnímání kolmosti, B – dominance v rovnoběžnosti stěn, C – žák začínající poměřováním se zaměřením na hrany.

- **Funkce rozvíjející**. Evaluace vhodnosti postupu při tvorbě krychle, ověřování vlastností, systematičnost ověřování, model nikdy není dokonalý, diskuse o přípustnosti a míře chyby, popis strategie.

- **Funkce prohlubující.** Objevování a využívání vlastností těles a jejich vztahů.

4. Které těleso mohlo způsobit následující otisk?

5. Kdyby nás zajímaly jen různé otisky, kolik otisků musíme udělat u: krychle, kvádru, trojbokého hranolu, pravidelného šestibokého jehlanu . . . ?

6. Co se myslí slovem různé v otázce 5?

7. U kterých těles nelze udělat otisk jen pouhým přitlačením k podložce?

Pracujte ve dvojici (vhodné pro talentované žáky a střední školy)

8. Rozděl krychli na dvě shodné části – na poloviny.

9. Popiš vzniklé části. Kdo z ostatních má totéž? (Žáci na sebe nevidí.)

10. Najdi co nejvíc řešení.

11. Porovnejte výsledky a stanovte podmínky pro jednotlivé typy řešení.

12. Co musí splňovat takový řez? Definujte. Lze definovat jinak?

13. Jak rozříznout krychli, abychom na řezu dostali: a) čtverec, b) obdélník, c) kosodélník, d) kosočtverec, e) lichoběžník, f) deltoid, g) kruh, h) ani jedno.

14. Model je nepřesný. Jak dokážete, že řez má tvar: a) obdélníka, b) čtverce, c) lichoběžníka, d) kosočtverce?

15. Jak dokážete, že tvar řezu není: kosodélník, kruh (na mrkvi), . . . ?

16. Rozděl kvádr na 2 (3, 4) stejné díly. Najdi co nejvíc možností.

17. Rozděl kvádr na 2 (3, 4) nestejné díly se stejným objemem, s různým objemem.

18. Rozřež kvádr tak, aby se pak řezem na 3 (4) části dala z těchto částí složit krychle.

19. Podaří se ti rozřezat kvádr tak, aby vznikl složením všech vzniklých částí jehlan?

20. Řezem kterého tělesa získáš (zde se již předpokládá vytvoření komunikačního konsensu): a) deltoid, b) obdélník, c) trojúhelník, d) kruh, e) pětiúhelník, f) šestiúhelník?

21. Najdeš těleso, které má každé dvě stěny různé? Zkoušej vyřezat a ověř.

22. Jde rozdělit těleso na dvě tak, aby byl jejich povrch aspoň tak velký, jako u původního celku? Dokaž.

23. Jde rozdělit těleso tak, aby obvod otisku jeho stěny byl menší než obvod nově vzniklých otisků plochy řezu?

24. Vytvoř z brambor (mrkve):
- Těleso s . . . stěnami.
- Těleso s . . . hranami.
- Těleso s pláštěm . . . Jak dokážeš, že je to plášť?
- Těleso, které je vidět ze všech světových stran stejně.
- Těleso, které je vidět shora,, zdola i ze všech 4 stran pokaždé jinak.

25. Zkus vytvořit válec z mrkve. Ověř, zda se ti to povedlo.

26. Rozřízněte válec na dvě části různými způsoby. Sledujte řezy a pojmenujte je. Kolik máte řešení?

27. Plochy řezu obarvěte a obtiskněte. Hledejte souvislosti s tím, co jste probírali v matematice.

28. Vytvoř dva shodné válce. Z jednoho vytvoř dva „půlválce“. Na druhém válci veď řez tak, aby jeho plocha byla větší než je řez, který vytvořil půlválce.

29. Vytvořte tři shodné kužele. Hledejte řezy na kuželech a postupujte podobně jako u předchozích úloh.

30. Najděte co nejvíc těles, kterých můžete využít pro vytvoření obtisku ve tvaru kruhu.

Aktivity pro děti 4–7 let

S drobnými kousky se dětem pracuje špatně, větší kusy jsou vhodnější jak k manipulaci, tak pozorování. Kusy pro menší děti musí být velikostí blízké krychli 25 mm krát 25 mm.

1. Vezmi si jakýkoli kousek bramboru. Potři ho na jedné straně barvou (houbičkou namočenou v barvě – musí být jen vlhká, otřená o kelímek vodové barvy) a obtiskni ho na papír. Pozoruj, co se stalo.

2. Udělej několik takových obtisků (každý jiné barvy, nebo jinak natočený)

3. Vyber si tři různé kousky a střídavě je obtiskuj na papír – „navlékej“ na šňůrku (linka na papíře), nebo zdob noční košilku. Vznikají rytmizace, závislosti tvarové, polohové, barevné (viz Kaslová 2002).

4. Najdi co nejvíc kousků, které udělají stejný obtisk (jde o tvar a velikost, nikoli o barvu), jako je na papíře.

5. Najdi všechny kousky brambor, které udělají obtisk stejného tvaru, ale bude větší, nebo menší než ten, co už tam je.

6. Sestav obrázek tak, že budeš obtiskovat různé kousky brambor.

7. Pro šikuly: Podívej se na obrázek – silueta světlé barvy. Víš, jak ho někdo (kocour) vytvořil? Bral si kousky brambor a obtiskoval jeden vedle druhého. Zkus to také. Cílem je kompozice tvarů k dosažení zadaného celku – pokrytím plochy (plochy brambor musí mít jinou – tmavší barvu) třeba modrou, která v kombinaci se žlutou dá zelenou. Přesahy budou modré, vhodné pro korekci.

8. Vezmi si který chceš kousek a z každé strany (jde o stěny těles, ale děti terminologii těles ještě nepoužívají) ho obarvi jinou – jednou barvou. Kolik barev jsi potřeboval? Dej k sobě kousky, které mají na sobě stejný počet barev.

9. Obarvený kousek rozkrojíme (učitelka, nebo dítě pod dozorem) a sledujeme řez.

10. Najdi takové dva kusy brambor, aby sis byl jist, že patří k sobě (původní celý brambor před rozkrojením). Je vhodné mít 6 až 8 dvojic (tedy 3–4 brambory rozdělené na 2 části, nelze však mluvit o polovinách).

Literatura

[1] Atkinsonová a kol. *Psychologie.* Victoria Publishing: Praha, 1995.

[2] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika.* Portál: Praha, 2001.

[3] Kaslová, M. Didaktika matematiky a příprava studentů na novou situaci – odlišné školní vzdělávací programy. In *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání*. JČMF, Srní 2007, s. 216–222.

[4] Kaslová, M. *Celek a jeho části* (nepublikovaný text pro studenty předškolní pedagogiky – 27 s., Praha, 2003).

[5] Kaslová, M. Rytmizace, pravidelnosti, závislosti. *Metodické listy pro 1. stupeň ZŠ RAABE*. Praha, 2002.

[6] Kaslová, M. : Fotografie ve vyučování matematice. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2001*. UK PedF: Praha, 2001, s. 36–40

[7] Kaslová, M. Pokusy v matematice. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2000*. UK PedF: Praha, 2000, s. 42–46.

[8] Kaslová, M. *Využití novin ve vyučování matematice*. Nepublikovaný text pro další vzdělávání učitelů, 2003.

[9] Kern, H. a kol. *Přehled psychologie*. Portál: Praha, 1999.

[10] Kuřina, F. *Umění vidět v matematice*. SPN: Praha, 1989.

[11] Sedláková, M. *Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie – mentální reprezentace a mentální modely*. Grada: Praha 2004.

Matematika nejen ve škole a nejen pro školu[1]

Alena Kopáčková[2]

Věnováno památce Marie Kubínové.

Jedním z cílů pracovní dílny s názvem *Podpora funkčního myšlení žáků ZŠ, SŠ* bylo přiblížit účastníkům Dvou dnů s didaktikou matematiky 2007 probíhající projekt *Podíl*

[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2]Fakulta pedagogická TU Liberec alena.kopackova@tul.cz

učitele matematiky ZŠ na tvorbě Školního vzdělávacího programu garantovaný Společností učitelů matematiky JČMF (SUMA). Na financování projektu CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137 se vedle státního rozpočtu ČR a rozpočtu hl. města Prahy podílí i Evropský sociální fond. Mezi studijními oporami vzniklými v rámci projektu je i text *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole* připravený autorskou dvojicí Eisenmann – Kopáčková.

Autorka příspěvku při svém vystoupení 16. 2. 2007 seznámila účastníky Dvou dnů se záměry, s nimiž uvedený text vznikal, připomněla *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* a zejména tématický okruh *Závislosti, vztahy a práce s daty*, jehož se uvedené téma a také program pracovní dílny nejvíce dotýká, a ve své prezentaci studijní text stručně přiblížila. Část pracovní dílny byla věnována práci s konkrétními úlohami z textu; účastníci měli nejen možnost úlohy sami řešit, ale na základě svých pedagogických zkušeností i predikovat reakce žáků základní a střední školy při jejich řešení. Některé z úloh byly oběma autory textu v minulých letech předloženy k řešení stovkám žáků na několika školách Libereckého a Ústeckého kraje, a bylo tedy možné porovnat odhady a predikce se zjištěnými výsledky. Domníváme se, že učitelova schopnost předpovídat reakce svých žáků a analyzovat jejich chyby při řešení úloh je nezbytným předpokladem úspěšného působení učitele (nejen) matematiky a to, do jaké míry se predikce a analýza shodují s realitou, odráží přímo i učitelovy schopnosti a zkušenosti. Oba autoři zmiňovaného textu přikládají práci s žákovskými řešeními a zejména analýze chyb velkou váhu a většina jejich úloh dokonce vznikla jako reakce na chyby a nesprávné úvahy žáků zjištěné v předchozích výzkumech a praxi; úlohy tak mohou být využity i k reedukaci nalezených nedostatků.

Vzhledem k tomu, že text *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole* je již několik měsíců používán v kurzech ESF pořádaných pro učitele matematiky na různých místech ČR a není problém se s ním v rámci těchto kurzů seznámit, nebudeme jej v tomto příspěvku rozebírat. Shrňme zde pouze to, co nás jako autory k textu a výběru úloh vedlo. Naše výzkumy funkčního myšlení českých žáků různého věku potvrdily, že žáci se často při řešení úloh rozhodují podle navyklých stereotypů a opírají se o známé školské úlohy a situace. Důležitým rysem žákovských řešení je tedy nápodoba, podobnost s něčím, s čím se žák ve škole již setkal. Viděli jsme však, že často šlo o podobnost povrchní, založenou na nápadných, ale matematicky nepodstatných znacích (např. kontext slovní úlohy, popř. jen shodné klíčové slovo, tvar křivky, poloha obrázku či umístění grafu apod.). Zjistili jsme také, že žáci bývají zaskočeni úlohami s reálným kontextem a s reálnými neidealizovanými daty. V souvislosti s funkcemi a funkčním myšlením jsme zjistili, že pojem funkce je u žáků (zejména základní školy) těsně spjat se vzorcem, s analytickým vyjádřením a mnozí se domnívají, že „bez vzorce není funkce“. K odstranění popsaných deformací jsme navrhli úlohy z reálného prostředí (se skutečnými daty), v nichž se propojují všechny druhy reprezentace funkce: vzorec, graf, tabulka i slovní vyjádření. Úlohy nevyžadují většinou složitý matematický aparát a mohou být předloženy různým věkovým skupinám žáků; v některých úlohách se dokonce o funkci ani nehovoří, vystačí se zde s pojmem závislost, a úlohy tak mohou být použity nezávisle na tom, zda se žáci s pojmem funkce již setkali. Chtěli jsme ukázat, že závislosti a funkce nás obklopují všude a že úlohy o funkcích zdaleka nepatří jen do hodin matematiky. Ukázali jsme také, že i na úrovni matematiky základní školy lze ilustrovat složitější fenomény spojené s pojmem funkce (např. nespojitost). Povšimneme si dále některých rysů funkčního a matematického myšlení českých žáků obecněji, a to jednak v souvislosti s kurikulárním dokumentem *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* a jednak na pozadí výsledků mezinárodního výzkumu matematické gramotnosti PISA.

Zavedení pojmu *funkční myšlení* v souvislosti s matematikou je přičítáno Felixu Kleinovi (1849–1925), který byl v roce 1905 na shromáždění německých přírodovědců v Meranu vůdčí osobností reformních snah ve středoškolské matematice a který kladl vedle prostorové představivosti důraz také na logické a funkční myšlení žáků. S pojmem funkční myšlení je možné se setkat v různých souvislostech i mimo matematiku; vymezit jej přesně definicí by bylo obtížné a podle našeho názoru by to nebylo ani účelné. Dohodněme se, že funkčním myšlením nebudeme rozumět pouze myšlení související s pojmem funkce, ale obecněji smysl pro kauzalitu, cit pro rozmanité závislosti, schopnost vnímat a popsat příčinnost dějů, rozlišovat, co je příčina a důsledek jevů. Funkční myšlení nesouvisí tedy pouze s tím, zda se jedinec již setkal s pojmem funkce a s její definicí, ale vyvíjí se již od předškolního věku, a to i v prostředí mimo matematiku i mimo školu, a je součástí logického myšlení. Také studium historie matematiky zcela jasně ukazuje, že důkladná práce s konkrétními modely závislostí a funkcí předcházela precizaci pojmu funkce a vyslovení definice funkce. Jsme přesvědčeni, že při vyučování matematice a při probírání témat věnovaných funkcím jde na základní škole daleko více o rozvoj funkčního myšlení žáků než o cílené a hluboké studium funkcí a základů matematické analýzy. V didaktice matematiky je funkčnímu myšlení nyní věnováno mnoho pozornosti a moderní konstruktivistické způsoby výuky je umožňují lépe rozvíjet než tradiční instruktivní vyučování. (O konstruktivistickém přístupu k vyučování viz např. [3]).

Rámcový vzdělávací program (RVP) pro základní vzdělávání (ZV) zdůrazňuje klíčové kompetence žáků, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. Jedním z cílů RVP je podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů. Mezi klíčové kompetence je i *kompetence k řešení problémů*, pomocí níž má žák na konci základního vzdělávání být schopen vnímat nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpoznat a pochopit problém, přemýšlet o nesrovnalostech a jejich příčinách a na základě vlastního úsudku a zkušeností navrhnout způsob řešení problému. Žák by měl umět nalézt při řešení problémů shodné, podobné a odlišné znaky a využívat přitom logické, matematické a empirické postupy a objevovat různé varianty řešení. Od žáka se očekává také to, že je schopen kriticky myslet a svůj postup řešení obhájit, že umí prakticky ověřit správnost zvoleného řešení problému a osvědčené postupy aplikovat při řešení obdobných nebo nových problémových situací ([4]).

Ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* je jedním ze čtyř tematických okruhů okruh *Závislosti, vztahy a práce s daty*. V tomto okruhu „. . . žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce." ([4], str. 29) Očekávanými výstupy u žáka 2. stupně základní školy jsou podle RVP ZV vyhledávání, vyhodnocování, zpracovávání a porovnávání souborů dat, určování vztahu přímé nebo nepřímé úměrnosti, vyjadřování funkčního vztahu tabulkou, rovnicí i grafem a matematizace jednoduchých reálných situací s využitím funkčních vztahů.

Kompetence a dovednosti vymezené v rámci RVP ZV způsobem výše uvedeným jsou zřetelným potvrzením toho, že vytýčený vzdělávací program klade velký důraz na funkční myšlení žáků a na jeho rozvoj.

Připomeňme mezinárodní testování matematické gramotnosti patnáctiletých žáků PISA (*Programme for International Student Assessment*) z roku 2003, v němž čeští žáci celkově dosáhli nadprůměrných výsledků (ze 40 zkoumaných zemí byli třináctí). Testování nevycházelo z učebních osnov matematiky jednotlivých zemí, ale z rámcových koncepcí hodnocených oblastí; testovací úlohy s reálným kontextem byly zaměřeny na klíčové dovednosti žáků a na jejich schopnost funkčně využívat získané znalosti, a to nejen při vyučování ve škole, ale i pro život.

Část testů matematické gramotnosti s názvem *Změna a vztahy* zjišťovala úroveň funkčního myšlení žáků; zásadní význam zde mělo používání různých vyjádření závislostí a převody mezi nimi. Povšimneme si zde jedné z úloh, při jejímž řešení dosahovali čeští žáci výrazně horších výsledků než žáci ostatních členských států OECD i dalších zúčastněných zemí. Úloha byla zadána grafem (viz obr. 1) a třemi úkoly (podle [2], str. 39–41):

1. Od roku 1980 se průměrná výška dvacetiletých dívek zvětšila o 2,3 cm na 170,6 cm. Jaká byla průměrná výška dvacetiletých dívek v roce 1980?

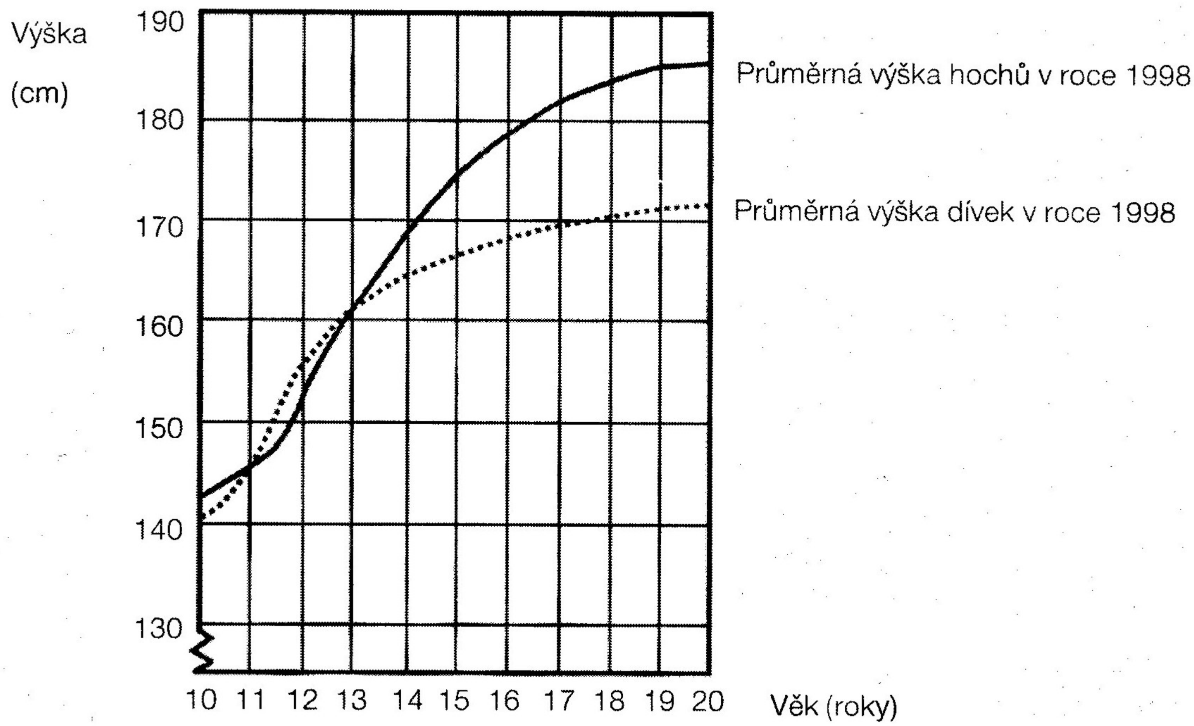
2. Vysvětli, jak je v grafu zachyceno, že po dovršení 12 let věku rychlost růstu dívek v průměru klesá.

3. Urči pomocí grafu, ve kterém věkovém období jsou dívky v průměru vyšší než stejně staří chlapci.

ÚLOHA 2: VÝŠKA LIDÍ

MLADÍ DORŮSTAJÍ VĚTŠÍ VÝŠKY

V grafu je zaznamenána průměrná výška mladých hochů a dívek v Nizozemsku v roce 1998.



Obr. 1: Výška lidí (převzato z [2], str. 39)

První úkol byl kalkulativní a jeho řešení nevyžadovalo provést jinou početní operaci, než určit rozdíl 170,6 – 2,3. Zde byli čeští žáci úspěšní v 74,8 %, zatímco průměrná úspěšnost žáků ze zemí OECD byla 67 %.

Vyřešit správně úkol 2 znamenalo prokázat schopnost orientovat se správně v zadaném grafu a být schopen jej interpretovat. (Pro tuto dovednost obvykle používáme termínu „čtení grafu“, popř. „čtení z grafu“.) Také formát zadané otázky byl odlišný od otázky v prvním úkolu; šlo zde o otevřenou otázku, zatímco první úkol obsahoval otázku uzavřenou. Ve druhém úkolu byli čeští žáci výrazně horší než jejich zahraniční kolegové: dosáhli průměrné úspěšnosti 34 %, zatímco úspěšnost žáků OECD byla v průměru 44,8 %. Při správném řešení se očekávalo, že si žáci povšimnou strmosti křivky vyjadřující průměrnou výšku dívek a budou schopni interpretovat její změnu. Neúspěšnost českých žáků lze vysvětlit zejména tím, že úloha se vymyká z rámce standardních úloh naší základní školy a že vnímání souřadného systému a grafu funkce je u českých žáků formální.

I ve třetím úkolu, který vyžadoval správně se v grafu orientovat, interpretovat jej a řešit pomocí něj zadaný úkol, byli čeští žáci méně úspěšní, než byla průměrná úspěšnost žáků ze zemí OECD (66,6 % ve srovnání s 68,8 %).

Výsledky zjištěné výzkumem PISA korespondují s našimi vlastními výzkumy funkčního myšlení českých žáků. I my jsme zjistili malou úspěšnost našich žáků při řešení komplexnějších matematických úloh s reálným kontextem, kde není možné se opřít o podobné modely a situace známé ze školy, přičemž jedním ze zjištěných výrazných nedostatků byla malá schopnost českých žáků využívat různé reprezentace funkce, zejména pracovat s grafem (zkonstruovat jej, orientovat se v něm a řešit graficky zadaný úkol). Viděli jsme, že žáci automaticky předpokládají, že s funkcí je spojen analytický výraz a zaskočí je, není-li k dispozici. (Viz např. ([5], [6].)

Z mezinárodního výzkumu TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) provedeného v r. 1995 plyne, že čeští žáci škol 2. a 3. stupně, ač jsou ve srovnání s ostatními zeměmi v testech matematické gramotnosti mimořádně úspěšní, řadí zároveň matematiku k nejméně oblíbeným školním předmětům (podle některých zdrojů dosahují čeští žáci v averzi k matematice dokonce světového prvenství - viz [8]), přičemž neoblíbenost matematiky se objevuje po počáteční oblibě na 1. stupni výrazně poprvé v 8. ročníku ZŠ a stoupá až do posledního ročníku střední školy (zdroj: ÚIV, semináře KMDM PedF UK). Je to při prvním pohledu kontroverzní zjištění, ale ten, kdo zná prostředí naší školy i její tradice, dovede pro tento zdánlivý rozpor nalézt několik vysvětlení. Na české škole převažuje instruktivní způsob vyučování, v hodinách matematiky je často kladen důraz na mechanické procvičování úloh z učebnice, přednost mají množství a výkon před žákovým porozuměním, výuka matematiky je nezajímavá. „Prvotní nadšení žáků prvního stupně základní školy pro svět čísel a tvarů se rychle mění v averzi k matematice jako takové. Konstruktivistické přístupy k vyučování uplatňované na prvním stupni základní školy jsou na vyšších stupních školy, až na výjimky, nahrazovány přístupy transmisívními a instruktivními.“ ([7], str. 1) Žáci se s matematikou setkávají převážně jen při hodinách matematiky a jelikož nejsou zvyklí matematiku používat i v rámci jiných školních předmětů a v běžných životních situacích, nevidí dostatečně její význam.

Negativnímu postoji k matematice pravděpodobně napomáhá i atmosféra ve společnosti; mnohé celebrity se bez jakýchkoliv rozpaků hrdě přiznávají k tomu, že jako žáci ve škole neměli matematiku rádi a mívali z ní špatné známky (představa, že by se člověk holedbal tím, že neprospíval v češtině nebo např. neumí zpívat, je absurdní). Zřejmě i dnešní způsob života naší společnosti zaměřený na rychlý (zejména finanční) úspěch, ale i obrovský rozvoj technologií vedou k tomu, že se lidé stávají povrchními uživateli a konzumenty pokroku, ale přestávají si klást otázky po podstatě a příčinách. Jsme svědky neuvěřitelného nadužívání slov na různých frontách, ať už je to v politice, médiích, v reklamě apod., kde už se nikdo ani nepídí po významu vyřčených slov a neočekává, že by vyslovená tvrzení byla někdy ověřována. Může se pak zdát, že matematika, v níž se považuje za pravdivé jen to, co lze dokázat, v tomto rychle pádícím povrchním světě nemá místo. A učitel matematiky, který se nespokojí s výsledkem (za nímž často není ani vlastní žákova práce), ale který klade důraz na pochopení a od žáka žádá zdůvodňování a vysvětlování jednotlivých kroků, je vnímán jako podivín a je nepochopený a obávaný.

Literatura

[1] Eisenmann, P., Kopáčková, A. Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole. In *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*, blok D-D01. Praha, JČMF 2006.

[2] Frýzková, M., Potužníková, E., Tomášek, V. *Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. Praha, ÚIV 2006.

[3] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha, Portál 2001.

[4] Jeřábek, J., Tupý, J. a kol. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha, VÚP 2004.

[5] Kopáčková, A. Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, číslo 2. Praha, Prometheus 2002. Str. 149–161.

[6] Kopáčková, A. Podpora funkčního myšlení žáků 1, 2. *Učitel matematiky*, číslo 3, 4. Praha, JČMF 2005, s. 174–179 (č. 3), 193–203 (č. 4).

[7] Kubínová, M. *Projekty (ve vyučování matematice) – cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha, PedF UK 2002. (Metodický portál www.rvp.cz/clanek/289/334).

[8] Machálková, J. České děti jasně vedou v nenávisti k matematice. *Deník Lidové noviny*, 6. 3.2007.

Funkce Mathematica CalcCenter ve výuce matematiky

Petr Kubín, Michal Krása[1]

Účastníci dílny byli seznámeni se základními funkcemi software *Mathematica CalcCenter*. Důraz byl kladen na procvičení funkcí vhodných k získání dovedností pro ovládání tohoto SW pro potřeby výuky matematiky na středních školách. Interaktivní prostředí *Mathematica CalcCenter* umožňuje triviální zadávání příkazů a jejich okamžitou vizualizaci bez nutnosti znalosti syntaxe prostředí. Z hlediska učitele střední školy dokáže poskytnout (díky svému objektovému jazyku) velmi jednoduchý a výhodný nástroj pro fázi přípravy výuky a pro fázi kontroly získaných výsledků v edukačním procesu. V rámci dílny byly probrány postupy na hromadnou tvorbu testů a domácích úloh, editaci matematických textů a ostatní aktivity, které může využít učitel střední školy právě

[1]ČVUT-FEL katedra elektroenergetiky, xkubin@fel.cvut.cz, Elkan, s.r.o, michal.krasa@elkan.cz

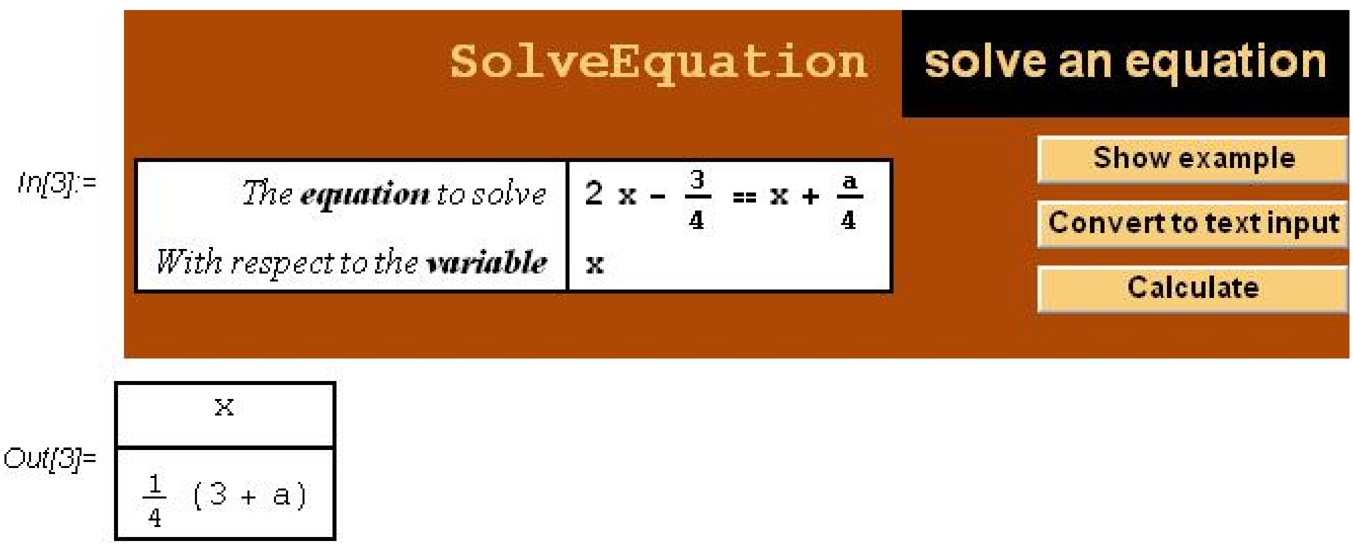
ve fázi přípravy. Procvičeny byly grafické možnosti systému – včetně tvorby matematických animací – umožňující interaktivní prezentaci probíraného učiva a příklady pro samostatnou práci studentů k prohloubení jejich matematických znalostí.

Jelikož *Mathematica CalcCenter* je značně robustní nástroj a v časově omezeném rozsahu pracovní dílny není možné účastníky seznámit se všemi možnostmi, které nabízí, bylo školení rozděleno na tři části reflektující pouze základy softwaru.

První část byla věnována krátkému seznámení se s prostředím a vysvětlení činnosti *Mathematica CalcCenter*: *Mathematica CalcCenter* pracuje na jádru softwaru *Mathematica*, což je jeden z nejmodernějších počítačových algebraických systémů (PAS). Oproti klasické Matematice však nese *Mathematica CalcCenter* jednu velkou výhodu, a tou je front-end, neboli uživatelské rozhraní. Ten je koncipován tak, že uživatel nemusí ze syntaxe programovacího jazyka *Mathematica* znát prakticky nic. Vše je zde řešeno pomocí tlačítek a palet, do kterých jsou jen vkládány hodnoty a funkce, které chcete zpracovávat.

PŘÍKLAD 1

Vypočteme rovnici $2x - \frac{3}{4} = x + \frac{a}{4}$.



Okno pro výpočet rovnic SolveEquation. Do prvního řádku je vkládána rovnice, kterou chceme počítat, a do druhého řádku proměnná, kterou chceme vyjádřit (v tomto obecném případě je nutné specifikovat, co je proměnná a co parametr).

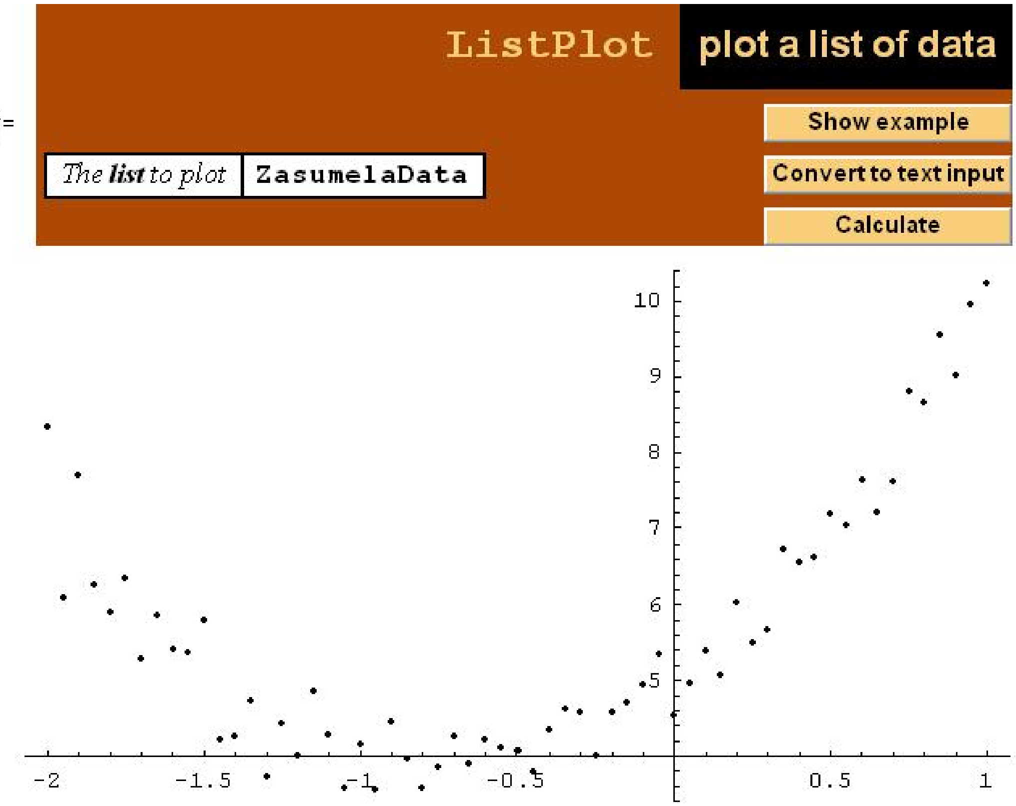
Ve druhé části dílny byly představeny další možnosti využití *Mathematica CalcCenter* v různých tématech, ale především jako: kalkulačky, editoru rovnic, textového editoru, programovacího jazyka.

Na příkladech středoškolského učiva byla naznačena jednotlivá témata a pomocí *Mathematica CalcCenter* byly dané úlohy řešeny. Z procvičovaných příkladů bylo zřejmé, že software je vhodný nejen pro výuku matematiky, ale též fyziky, výpočetní techniky, měření a dalších předmětů, ve kterých je třeba něco počítat, zobrazovat, programovat apod.

PŘÍKLAD 2

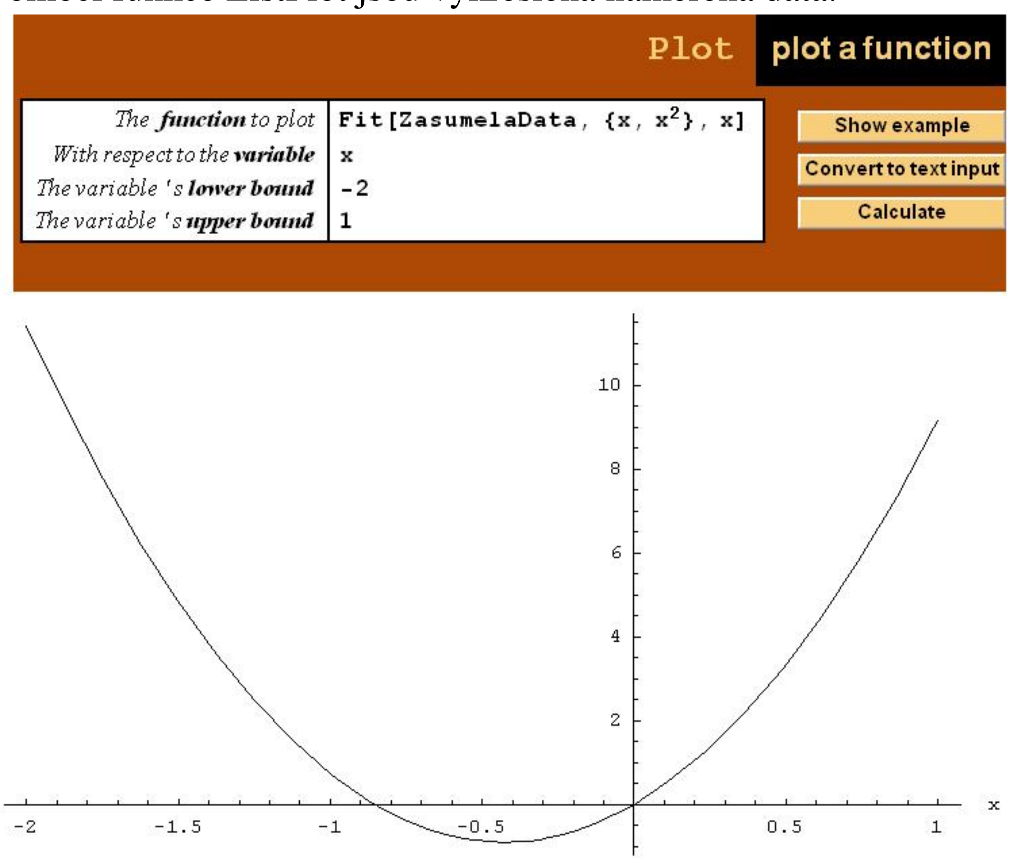
Proložení naměřených hodnot:

In[14]:=

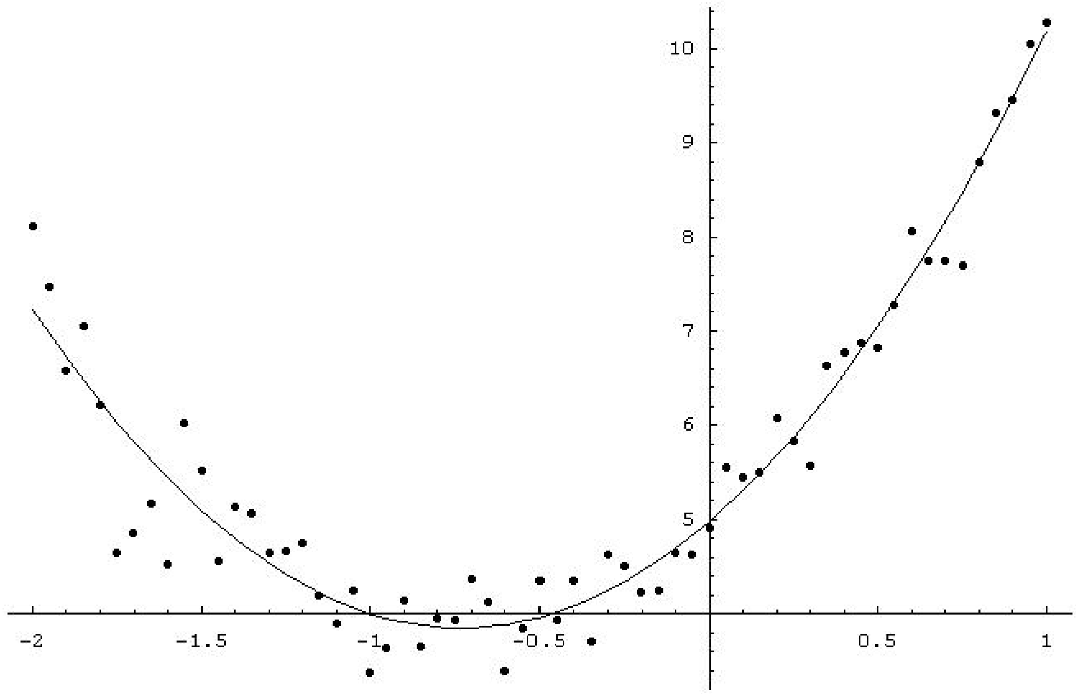


Pomocí funkce ListPlot jsou vykreslena naměřená data.

In[18]:=



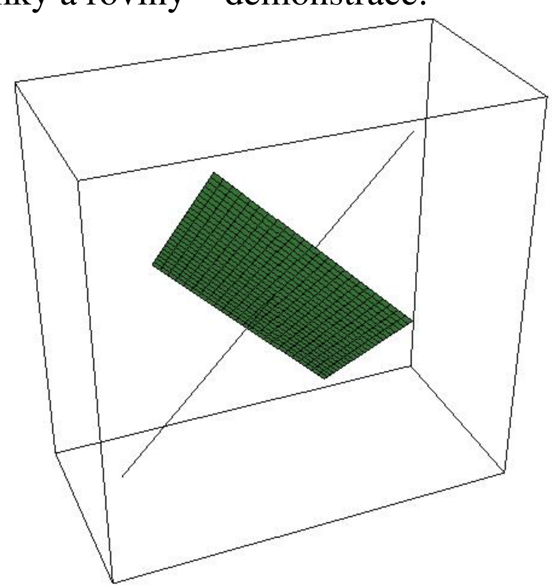
Pomocí funkce Fit jsou hodnoty proloženy námi zvolenými funkcemi, tj. x, x^2 (tato funkce je zapsána textovou formou, a to nejen kvůli úspoře místa, ale i jako příklad kombinace textového a paletového způsobu vkládání vnitřních funkcí). Pomocí funkce Plot je výsledné proložení zobrazeno.



Funkce Show umožňuje kombinaci více typů grafů.

PŘÍKLAD 3

Vzájemná poloha přímky a roviny – demonstrace:



V případě potřeby je možné graf natáčet myší.

Třetí a poslední část pracovní dílny byla věnována dotazům a řešení příkladů na přání účastníků. V této sekci byla pozornost zaměřena i na komplikovanější možnosti systému. A to především na ukázku postupů na hromadnou tvorbu testů a domácích úloh, vytvoření interaktivního dokumentu, kombinování grafických objektů, rozličné způsoby vizualizace úloh a zejména tvorbě matematických animací dle požadavků účastníků. Hlavním cílem bylo naznačit řešení zejména těch úloh, které může využít učitel střední školy právě ve fázi přípravy, při interaktivní prezentaci probíraného učiva, či pro samostatnou práci studentů.

VÝBĚROVÉ TESTY V MATEMATICE

FRANTIŠEK KUŘINA[1]

Dílna na téma uvedené v nadpisu se uskutečnila dne 16. 2. 2007 za účasti asi 30 zájemců. Diskuse v průběhu dílny i v jejím závěru ukázala, že problematika je aktuální a zajímavá. Testování se stále více prosazuje do praxe našich škol, snad proto, že je to nástroj „ekonomický“. Testovat žáky může i laik, oprava je rychlá a jednoduchá, protože je formální. To je hlavní přednost tohoto způsobu hodnocení z hlediska provozního, ale také zásadní nedostatek z hlediska vzdělávacího. Proces myšlení žáka, který odpovídá na testovací otázky, zůstává zcela utajen, možnost poučit se z chyb, které dělá, je prakticky nerealizovatelná. V dílně jsme se zaměřili na úlohy s jedinou správnou odpovědí, která se vybírá z několika nabídnutých alternativ. Někdy se úlohám tohoto typu říká *uzavřené úlohy z výběrového testu* (option test). Z hlediska žáka je důležitou psychologickou výhodou takovéhoto testování, že zkoušený nemůže odevzdat „bílý papír“. Neví-li si s otázku rady, volí náhodně některou z nabídnutých odpovědí. Konstrukce úloh do testu není ovšem jednoduchou záležitostí a test poskytuje zajímavou informaci jak o škole, která test provádí, tak i o autorovi testovacích úloh.

V dalším odstavci uvedeme čtyři ukázky trojic testových úloh, které byly zadány v didakticky odlišných podmínkách. Ukázky jsou autentické, jejich výběr je ovšem ovlivněn mými záměry. Čtenář tohoto příspěvku by si měl předložené úlohy samostatně vyřešit, pro kontrolu uvádím správná řešení, které ovšem testovaní žáci nemají. Testování se obvykle provádí v ostrém časovém limitu, který přirozeně ovlivňuje způsoby uvažování a řešení úlohy.

PŘÍKLADY ÚLOH

ÚLOHY POLICEJNÍ.

Zdrojem těchto úloh je české vydání anglické knihy *How to pass numeracy tests* [3]. Testy řešili uchazeči o práci v britském policejním sboru.

[1]PedF Univerzita Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz

P1. *Policejní stanice je 1180 m od knihovny. Supermarket je na půli cesty mezi policejní stanicí a knihovnou. Kolik metrů je supermarket od knihovny?*

(A) 2 360 (B) 1 200 (C) 590 (D) 600 (E) 1 800.

Správná odpověď (C).

P2. *Jedu-li rychlostí 30 km/h, za jak dlouho (v hodinách) ujedu 90 km?*

(A) 0,5 (B) 3 (C) 6 (D) 9 (E) 12.

Správná odpověď (B).

P3. *Pokud se policistky lidé zeptají na cestu v průměru třikrát za den, kolikrát se jí zeptají na cestu za sedm dní?*

(A) 4 (B) 10 (C) 17 (D) 21 (E) 27.

Správná odpověď (D).

Úlohy jistě nejsou přípravou na práci policisty v terénu. Stěží si lze představit situaci, že by příslušník policejního sboru používal při kontrole na silnici „tahák“ ve stylu testovací úlohy P2. Jsem přesvědčen, že i o úrovni „teoretických“ schopností uchazeče by více vypověděly úlohy bez nabídnutých odpovědí. Naštěstí britským úřadům nemusíme, a ani nemůžeme radit. Nicméně je zajímavé, že kniha, z níž citujeme, vyšla v českém překladu v témže roce jako anglický originál.

ÚLOHY Z PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY NA PRŮMYSLOVOU ŠKOLU.

V roce 2002 zkoušelo u přijímacího řízení na české střední školy, o níž podává informace brožura *Testy z matematiky 2003* [2], úlohy s výběrovými odpověďmi asi 17 % škol. Zde uvedeme ukázky tří úloh zadaných v Uherském Hradišti.

U1. *Vypočti:* $\frac{33}{100} + \frac{7}{100} =$

(A) $\frac{337}{100}$ (B) $\frac{42}{100}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $0,2$ (E) $\frac{4}{100}$.

Správná odpověď (C).

U2. *Urči, kolik přirozených čísel je řešením nerovnice:* $-2 \leq x < 6$

(A) 5 (B) 7 (C) 6 (D) 9 (E) 8.

Správná odpověď (A).

U3. *V místnosti je stůl a židle. Stůl má 3 nohy. Každá židle má 4 nohy. Když na každé židli sedí člověk, je celkový počet nohou 39. Kolik židlí je v místnosti?*

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7.

Správná odpověď (D).

Úlohami z přijímacích zkoušek se škola, ať chce nebo nechce, prezentuje i na veřejnosti. Co si má pomyslet otec – technik, o škole, která má vychovávat pro praxi, a napovídá, jak sečíst dva zlomky se stejným jmenovatelem (U1)?

Hodnota úlohy U2 snad spočívá jen v terminologickém „chytáku“, téměř pohádková realita na úrovni prvního stupně základní školy není rovněž vhodnou uzavřenou úlohou (U3). Policejní úlohy nebyly příliš vynalézavé, na rozdíl od úloh z průmyslové školy byly aspoň „od fochu“.

ÚLOHY TESTU SCIO.

S1. *Maminka chtěla vysadit tulipány do šesti, sedmi nebo osmi řádků. Kolik měla tulipánů, když jejich počet je nejmenší možné trojciferné číslo?*

(A) 100 (B) 168 (C) 158 (D) 148.

Správná odpověď (B).

S2. *Máme pytel ořechů. Můžeme je rovným dílem rozdělit mezi 2, 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dětí tak, že žádný nezbude. Kolik můžeme mít v pytli nejméně ořechů?*

(A) více než 69 a méně než 90 (B) více než 89 a méně než 110

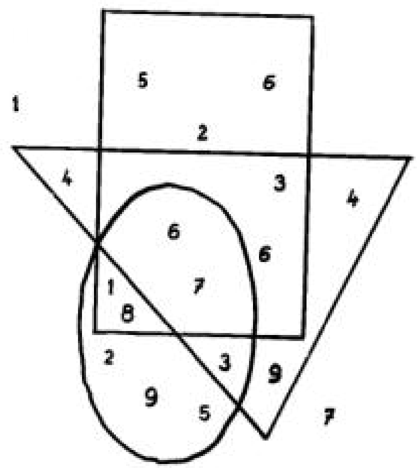
(C) více než 109 a méně než 130 (D) více než 129.

Správná odpověď (C).

S3. úlohy vztahující se k obrázku.

•*O kolika číslicích platí, že se nacházejí uvnitř vždy jen jednoho z obrazců?*

(A) o třech (B) o pěti (C) o šesti (D) o osmi (E) o devíti .



Správná odpověď (E).

• *Jaký je součet všech číslic, které se nacházejí ve všech třech obrazcích najednou?*

(A) 9 (B) 13 (C) 18 (D) 24 (E) 31 .

Správná odpověď je (B).

Úlohy S1 a S2 jsou převzaty z publikace [3], úloha S3 z testu [4].

V první a druhé části jsem uváděl řešení úloh, ačkoliv byla zřejmá. V třetí části tomu tak není. Všimněme si jednotlivých úloh.

Co když v úloze S1 uvažuje řešitel následujícím způsobem?

Protože maminka může vysadit tulipány jen do jednoho určitého počtu řádků z požadovaných šesti, sedmi nebo osmi, ne však zároveň do všech, stačí jí 105 tulipánů. V tomto případě sází tulipány do 7 řádků; sází-li do 8 řádků, zbude jí 1 tulipán, sází-li do 6 řádků, zbudou 3. Tento správný výsledek Scio vůbec neuvádí.

Hodnotíme-li odpověď našeho hypotetického žáka jako nesprávnou, pěstujeme u něho přesvědčení, že se má podřídit autoritě a nepřemýšlet samostatně. Z navržených odpovědí ovšem pozná, jak měl textu rozumět. To však nepokládám za správné.

V úloze S2 si patrně žák uvědomí, že počet ořechů je nejmenší číslo dělitelné číslem $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot .2$, tedy 120. Tato odpověď však v uváděných alternativách není. Má-li být správná odpověď C), znamená to, že v pytli může být např. 110, 111, …, 129 ořechů. Mezi nimi se ovšem číslo 120 vyskytuje. V textu publikace [3] se přitom uvádí, že u každé úlohy je „jediná správná odpověď“. Snad bychom měli vést žáky k tomu, aby rozlišovali věty: „správná odpověď je …“ a „správná odpověď není v rozporu s …“.

Úloze S3 může snad žák rozumět i takto: Číslice 5 a 2 jsou v obdélníku a uvnitř elipsy, nejsou tedy jen v jednom z obrazců, číslice 9 je v trojúhelníku a uvnitř elipsy, není tedy rovněž uvnitř jen jednoho obrazce … Teprve podle toho, že správná odpověď má být 9, poznáme, co měli autoři na mysli textem úlohy! Profesionálové by snad měli rozlišovat mezi pojmy číslo a číslice a vědět, že se číslice nesčítají, jak požadují v druhé části úlohy.

Každý autor dělá chyby, to je věc zcela přirozená. Skutečnost, že zmíněné testy řešilo 32 000 uchazečů na 302 školách v republice a nikdo na uvedené nepřesnosti neupozornil (jinak by to snad bylo v publikaci [3] připomenuto), je známkou odcizenosti testovací mašinérie od školy, žáka a vzdělávací reality. Tento fakt je podle mého názoru závažný.

Přípravné úlohy na matematickou olympiádu

Úlohy v této části mají zcela odlišný charakter. Jsou převzaty z publikace [5] a byly použity v přípravě na matematickou olympiádu ve Spojených státech. Jsou to tedy úlohy podstatně náročnější než úlohy v předcházejících částech.

O1. *Číslo:* $N = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ *je rovno*

(A) 1 (B) $2\sqrt{2}-1$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (E) není rovno žádnému z těchto čísel.

Správná odpověď (A).

O2. *Počet reálných řešení rovnice:* $\frac{x}{100} = \sin x$ *je*

(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64 (E) 65.

Správná odpověď (C).

O3. *Jsou-li p, q a M kladná čísla, q 100, pak číslo, které získáme vzrůstem M o p % a poklesem výsledku o q %, převyšuje M tehdy a jen tehdy, jestliže*

(A) $p > q$ (B) $p > \frac{q}{100-q}$ (C) $p > \frac{q}{1-q}$ (D) $p > \frac{100q}{100+q}$ (E) $p > \frac{100q}{100-q}$.

Správná odpověď (E).

Podle mého názoru lze zde stěží nalézt uspokojivé motivy pro nalezení správné odpovědi, aniž bychom řešili úlohy „od začátku do konce“. V úloze (O1) je výhodné určit nejdříve druhou mocninu zlomku, neboť lze odhadnout, že se iracionality „zjednoduší“, k dokončení úlohy je třeba si uvědomit, že $3 - 2\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2$. Student, který nemá dobrý vhled „do aritmetických struktur“, patrně nemá šanci úlohu vyřešit.

V úloze O2 je účelné představit si grafické řešení rovnice, z něhož je vidět, že počet jejích řešení je lichý; které z lichých čísel uvedených ve výsledcích je správné, asi musíme detailně vypočítat.

Úloha O3 není myšlenkově náročná. Text je nutno převést do algebraické symboliky, a pak řešit příslušnou nerovnici. Nápověda $p > q$ v části (A) je svůdná pro studenta, který si neuvědomí, že při počítání s procenty je základní informace o základu.

PRO A PROTI

Závažným problémem úloh s výběrovými odpověďmi je skutečnost, že může odvádět řešitele od studia dané situace, o výsledku nerozhoduje jenom struktura poznatků, ale i to, jak bude výsledek přijat. S trochou nadsázky snad lze říci, že kritérium logické je nahrazeno kritériem pragmatickým. Z druhé strany je nutno přiznat, že takovéto tendence jsou bližší realitě života, v němž často logické argumenty nelze uplatnit, prostě proto, že výchozí situace není dostatečně přesně popsána a někdy nejsou známy ani zákonitosti jejího vývoje. Uzavřené úlohy někdy nepřispívají ke kultivaci logického myšlení a nerozvíjejí ani kulturu vyjadřování, neboť struktura úloh bývá podřízena zvláštnímu jazyku, který je odlišný od jazyka obecného i od vyjadřování matematického.

V matematice je téměř vždy důležitější cesta k výsledku než výsledek sám. Je tomu tak zejména v matematice školní, kdy jsou úlohy zpravidla konstruovány za účelem aplikace pravidla, postupu, algoritmu, ... a „kolik vyjde“ bývá vedlejší. V uzavřených úlohách je ovšem prakticky jediným kritériem správnosti výsledek. Tyto úlohy mají tedy blíže k aplikacím matematiky, což je opět jejich klad. S tím souvisí i problematika chyby. V matematice bývá chyba důležitým zdrojem poznání a hraje mnohdy kladnou roli; lze to doložit příklady z historie i z didaktické praxe. V testech znamená chyba ztrátu bodů a hraje snad výhradně roli negativní. Důležité typy úloh, kde jde o nalezení postupu, nemohou být testovány výběrovými otázkami. Zde mám na mysli např. úlohy důkazové a úlohy konstruktivní. Ve výběrových testech jde spíše o soubor otázek než o soubor problémů k řešení.

Bezesporu kladným rysem diskutovaného testování je mechanický způsob vyhodnocování výsledků a příznivá psychologická atmosféra: „test nelze neudělat“. Kladem je i skutečnost, že testy mohou posilovat intuici, cit pro řešení problému, orientaci v nepřehledné situaci. Testy vyhovují i atraktivním trendům typu: úspěch za každou cenu (nezáleží, jak žák přišel k výsledku, ale pouze na tom, že má výsledek správně) a účel světí prostředky.

ZÁVĚRY

Vycházíme-li ze skutečnosti, že poznávací proces nikdy nekončí, nemáme žádné právo hodnotit výsledky vzdělávání. Ovšem škola je instituce společenská a potřeba vzdělat v relativně krátké době celou mladou generaci vyžaduje organizační stupně, jejich ukončování a pokračování. Škola by však měla respektovat celé panorama hodnocení žáků. Slovní hodnocení umožňuje zcela konkrétně upozornit na problémy v postupu, formulovat pobídky k další práci, ... prakticky však neumožňuje srovnávání žáků, tříd a škol. Osobní kontakt učitele s žákem je základem objektivního a kvalitního hodnocení, je to ovšem způsob časově náročný a mnohdy v praxi nerealizovatelný. Písemné práce žáků skýtají možnost objektivního hodnocení, v žádném případě bychom se však neměli omezit na testování s výběrovými odpověďmi. Rozbor žákova přístupu k řešení problémů je nejdůležitějším zdrojem informací o úrovni zvládnutí matematiky a není důležité, zda je realizován osobním kontaktem učitele a žáka, záznamem pomocí moderní techniky nebo studiem písemného řešení problému. O tuto možnost nás uzavřené úlohy zcela ochuzují. Zařazovat bychom je ovšem měli.

Podrobnější rozbor problematiky je připraven do tisku v časopise Matematika, fyzika, informatika [6].

LITERATURA

[1] TOLLEY, H., THOMAS, K.: *Numerické testy.* Praha : Ikar, 2002.

[2] *Testy z matematiky.* Brno : Didaktis, 2002.

[3] *Testy z matematiky.* Brno : Didaktis, 2006.

[4] Test obecných studijních předpokladů pro přijímací zkoušky na SŠ. *Lidové noviny.* 15. 1. 2007, scio.cz.

[5] *The Contest Problem Book IV.* Washington : The Mathematical Association of America, 1983.

[6] KUŘINA, F. Tvorba nebo volba. *Matematika, fyzika, informatika*, 2006–2007, roč. 17.

MATEMATIKA MIMO ŠKOLU[1]

GRAHAM LITTLER, DARINA JIROTKOVÁ[2]

V pracovní dílně byli účastníci seznámeni s úlohami, které vyžadují od žáků, aby zkoumali jistý jev a rozvíjeli tak své schopnosti experimentovat a využívat své matematické vědomosti v běžném životě. To, že matematika, která se učí ve škole, nemá s reálným životem nic společného, je velice častý názor žáků. Je tedy na nás, učitelích, abychom svým žákům více předkládali problémy a úlohy, které vycházejí z reálných situací a které jsou pro běžný život smysluplné.

Dále uvedeme několik problémových situací, které se nám velice osvědčili pro investigativní činnost žáků. Problémové úlohy zaměřené na zkoumání, experimentování by měly být žákům předkládány na různých úrovních. Například sedmiletým dětem lze

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2]University of Derby, grahamlittler@msn.com; UK v Praze, PedF, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

předložit úlohu, aby sestrojovaly z daného kartonu různé krabičky a pak vyšetřily, která z krabiček má největší objem. Sestrojené krabičky mohou plnit různým materiálem jako pískem, rýží apod. a množství porovnávat. Později mohou pomocí měření rozměrů krabiček vyvodit vztah mezi objemem a rozměry krabičky, sestrojit graf závislosti objemu a rozměrů a najít vzorec pro objem čtyřbokého hranolu.

ÚLOHA 1.

Ze čtvercového plátu plechu o straně délky 50 cm se má vyrobit nádržka na vodu ve tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu. Nádrž se vyrábí tak, že se z každého rohu vyřízne čtverec a okraje se pak ohnou a spojí. Označme délku strany čtvercového dna nádrže l cm.

Vyjádřete objem nádrže V pomocí l.

Nakreslete graf závislosti délky l a objemu nádrže V a popište, jak se objem mění s měnící se délkou l.

Jaké největší množství vody se vejde do nádrže?

Porovnejte toto množství s objemem válcové nádrže, kterou by bylo možné z daného kusu plechu vyrobit.

Druhé zkoumání souvisí s požadavkem britské pošty týkajícím se maximálních rozměrů balíku, který lze poslat pozemní poštou. Žáci zkoumají, jaký tvar má mít jedna stěna balíku (hranolu), aby měla co největší obsah a co nejmenší obvod. Žáci mohou zkoumat obvody různých obrazců pokrytých pevným počtem čtvercových dlaždic. Ačkoliv je tento problém vztažen na balíky tvaru čtyřbokého hranolu, lze pro vyspělejší žáky rozšířit zadání úlohy na jakýkoliv tvar.

ÚLOHA 2.

Anglické pošty omezují velikost balíku, který můžete poslat pozemní poštou, takto: délka nesmí přesáhnout 1,5 m a obvod (délka provázku okolo balíku) nesmí přesáhnout 1 m. Jaký je největší možný objem balíku, který můžete poslat poštou. Předpokládáme, že balík má tvar čtyřbokého hranolu.

Třetí zkoumání opět propojuje obsah a obvod obrazce. Jsou to pojmy, které mnoho žáků zaměňuje. Tentokrát je obvod konstantní a hledá se obrazec s největším obsahem. Podle vyspělosti žáků může učitel omezit tvar obrazců, pro nejmladší žáky například pouze na pravoúhelníky. Pro vyspělejší žáky může být problém formulován tak, že úkolem je najít maximální počet ovcí na pozemku ohraničeném jistou délkou plotu, jestliže jedna ovce musí mít k dispozici aspoň 1 m^2. Tato úloha obvykle vyvolává diskuse o ekonomických aspektech, které mohou vyústit v návrh tvaru pozemku pro farmáře, jestliže chce umístit maximální počet ovcí a pozemek oplotit co nejkratším plotem. Třídní diskuse o těchto ekonomických faktorech bývá užitečná pro běžný život.

Úloha 3.

Farmář má oplotit co nejjednodušeji pozemek pro ovce. Má 100 m materiálu na plot. Pozemek může mít jakýkoliv tvar, ale musí být splněny tyto podmínky:

a) Každá ovce potřebuje alespoň 1 m^2 plochy, aby jejich chov byl efektivní.

b) Plocha oploceného pozemku má být maximální.

Jaký je optimální tvar pozemku a jaké jsou jeho rozměry? Své řešení zdůvodněte.

Další, čtvrté zkoumání přivádí předchozí úlohu zpět do třídy a požaduje zdůvodnění, proč jisté obrazce mají různé obsahy při stejném obvodu. Žáci musí rovněž uvažovat o tom, jak by mohli zjištěná data zobrazit, jaké vztahy mohou z dat a grafů vyčíst a zda vizuální prezentace dat poskytuje o situacích více informací než pouhý soubor čísel.

Úloha 4.

Máme provázek dlouhý 20 cm. Provázek spojte a vyznačte s ním obdélník. Kolik různých pravoúhelníků s celočíselnými délkami stran můžete vyznačit? Zaevidujte délky stran těchto pravoúhelníků do tabulky. Můžete vidět nějakou závislost mezi v tabulce zaznamenanými údaji? Nakreslete graf závislosti délky a šířky pravoúhelníku. Co zjišťujete z grafu?

Nyní přidejte do tabulky třetí sloupec (resp. řádek) s označením obsah. Spočítejte obsah každého nalezeného pravoúhelníku. Mají všechny pravoúhelníky stejný obsah? Pokud ne, který z nich má obsah největší? Nyní nakreslete graf závislosti mezi délkou jedné strany a obsahem pravoúhelníku. Již jste tento tvar někdy viděli?

Zkoumání páté je obdobné předchozímu. Tentokráte je konstantní obsah obrazce a s daty lze provádět stejné činnosti jako ve čtvrté úloze. Při jedné realizaci této úlohy ve třídě žáci navrhli, abychom všech 36 dlaždic, kterými jsme pokrývali obrazec co největšího obvodu, rozpůlili a tvořili jsme obrazec z obdélníků. Dostali jsme obdélník $72 \times \frac{1}{2}$. To iniciovalo ostatní děti, aby navrhly další a další dělení, až se nakonec řešila otázka, zda ty dlaždice po nekonečném dělení úplně zmizí. Řešila se tedy otázka limitních procesů a nekonečně malých veličin.

Úloha 5.

Vezměte 36 čtverečků. Vytvořte co nejvíce možných pravoúhelníků, tak abyste vždy použili všech 36 čtverečků. Své výsledky zaznamenejte do tabulky se záhlavím „šířka“, „délka“. Vidíte nějaký vztah mezi čísla zaznamenanými v tabulce? Tento vztah popište. Nakreslete graf závislosti mezi délkou a šířkou. Použijte graf k nalezení délky pravoúhelníku, jehož šířka je 3,5 cm. Opět přidejte třetí sloupec tabulky a ke každému obdélníku doplňte jeho obvod. Mají všechny pravoúhelníky obvod stejný? Pokud ne, jaký má tvar pravoúhelník s nejmenším obvodem? Co mají všechny pravoúhelníky společného?

Úloha pro šesté zkoumání je ze skutečného života. Návrhář je požádán, aby navrhnul obaly na zboží tak, aby se v nich zboží dalo dobře poskládat do větších krabic na přepravu do skladů. Obvykle tato úloha vyvolá mnoho smysluplných diskusí ve třídě dříve, než žáci začnou problém řešit. Jestliže učitel v úloze omezí spotřebu materiálu, který se pro tvorbu obalů může spotřebovat, zadá i jeho cenu, žáci získají představu o tom, kolik peněz se na odpadu prohospodaří. Jako materiál pro řešení úlohy postačí papír a lepidlo.

Úloha 6.

Navrhněte kartonový obal tvaru čtyřbokého hranolu, jehož objem je 3 000 cm^3 a jehož výrobní náklady jsou co nejmenší. Jaké budou rozměry obalu? Pamatujte, že do ceny obalu musíte započítat i cenu odpadu a že obal nesmí být propustný, nesmí mít žádné díry.

Věříme, že vaši žáci budou mít radost z objevování matematiky a také že uvidí smysluplnost školské matematiky pro praktický život.

Literatura

[1] Littler, G. (2004). Using Childrens' Experiences in and out of School. In Kubínová, M., Littler, G. (Eds.), *Empowering mathematics teachers for the improvement of school mathematics*, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha.

Sítě krychle ve výuce matematice na prvním stupni ZŠ[1]

Jitka Michnová[2]

V jedné z pracovních dílen realizovaných na konferenci Dva dny didaktikou matematiky v roce 2005 byl představen mezinárodní projekt IIATM, Socrates-Comenius a byla předvedena realizace mnoha myšlenek z projektu v přímé výuce na základní škole (Kročáková & Michnová, 2005; Kročáková, 2005). V průběhu tohoto projektu jsem úzce spolupracovala s pracovníky KMDM Pedagogické fakulty v Praze, kteří byli řešitelé a koordinátoři projektu. Naší společnou snahou bylo připravit a odzkoušet takové úlohy z prostředí 3D geometrie, které by vedly k objevování, experimentování, třídění a vyhodnocování vlastních poznatků a navíc byly pro děti zábavné (Hejný & Jirotková, 2006, 2007).

V článku (Wollring, 2005) autor uvádí, jak k navržené problematice sítě krychle přistoupili němečtí kolegové na universitě v Kasselu a jak ji zpracovali jednak v přípravě

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2]ZŠ Školní, Neratovice, michnova@email.cz

učitelů, a jednak pro žáky ve 3. ročníku ZŠ. Zde uvedu dvě nové myšlenky z projektu IIATM, které byly realizovány na naší základní škole v Neratovicích a které si již našly stálé místo v aktivitách se žáky. Tyto myšlenky byly prezentovány i na didaktickém semináři KMDM PedF UK a inspirovaly kolegy z jiných fakult, kteří je zařadili do svých aktivit se studenty i učiteli (například kolega J. Perný z Pedagogické fakulty v Liberci). Myšlenku jsem nazvala „pokojíčky“ a „střihy na šaty pro Krychli“.

POKOJÍČKY

Jedná se o sérii úloh, které vydatně přispívají k rozvoji prostorové představivosti žáků. Žáci zároveň objevují různé části sítí krychle a seznamují se s nimi. Prostřednictvím těchto úloh můžeme již u žáků mladšího školního věku (1. ročník) postupně naplňovat některé z klíčových kompetencí Rámcového vzdělávacího programu, například kompetence k řešení problému a kompetence pracovní.

V rovině školské matematiky přispívají tyto úlohy nejen k rozvoji prostorové představivosti žáků, ale zároveň rozvíjí i jejich kombinatorické myšlení, logické myšlení a krátkodobou paměť. Samotné poznávání sítě krychle se pak stává jakýmsi druhořadým, neméně však důležitým produktem činnosti. Sítě krychle vlastně vytvoří jakési geometrické prostředí, které umožňuje rozvíjet mnoho žákových kompetencí. Vše se odehrává především na základě manipulace, proto je vhodné obdobné úlohy zařazovat již od 1. ročníku základní školy. Při realizaci úloh se doslova nabízí využít mezipředmětové vztahy a propojit tak matematiku s praktickými činnostmi, výtvarnou výchovou, případně ve vyšších ročnících s českým jazykem.

Zadání úloh: Vytvoř svůj pokoj.

Komentář k úloze: Žáci dostanou pracovní list s některým zadáním „střihu“ pokojíku z obrázku 1. Učitel může elektronickou verzi použít k vytvoření pracovních listů pro své žáky. Úkolem žáků je vytvořit svůj pokoj, to znamená vybavit jej nábytkem, kobercem, lampou, pověsit obrázek na stěnu a podobně, ale vše pokud možno v tomto rozloženém stavu, ve 2D. Podle věku žáků, jejich zkušeností a jejich schopností vybereme pracovní list různé náročnosti. Tak můžeme diferencovat zadání úlohy v rámci jedné třídy. V místech označených křížkem lze protáhnout provázek. „Pokojíček“ se tak po zatažení provázku složí a vytvoří trojrozměrný model. Žáci tak mohou zkontrolovat, zda lampa skutečně visí na stropě, koberec je na zemi apod. Tato „mechanizace pokojíčku“ působí na žáky silně motivačně.

Náročnost úlohy u žáků staršího školního věku stupňujeme také tím, že mají povinnost vyzkoumat, kudy provázek povede, aby se pokojíček složil. Žáci tak dostávají prostor k experimentování. Úlohu lze různě modifikovat:

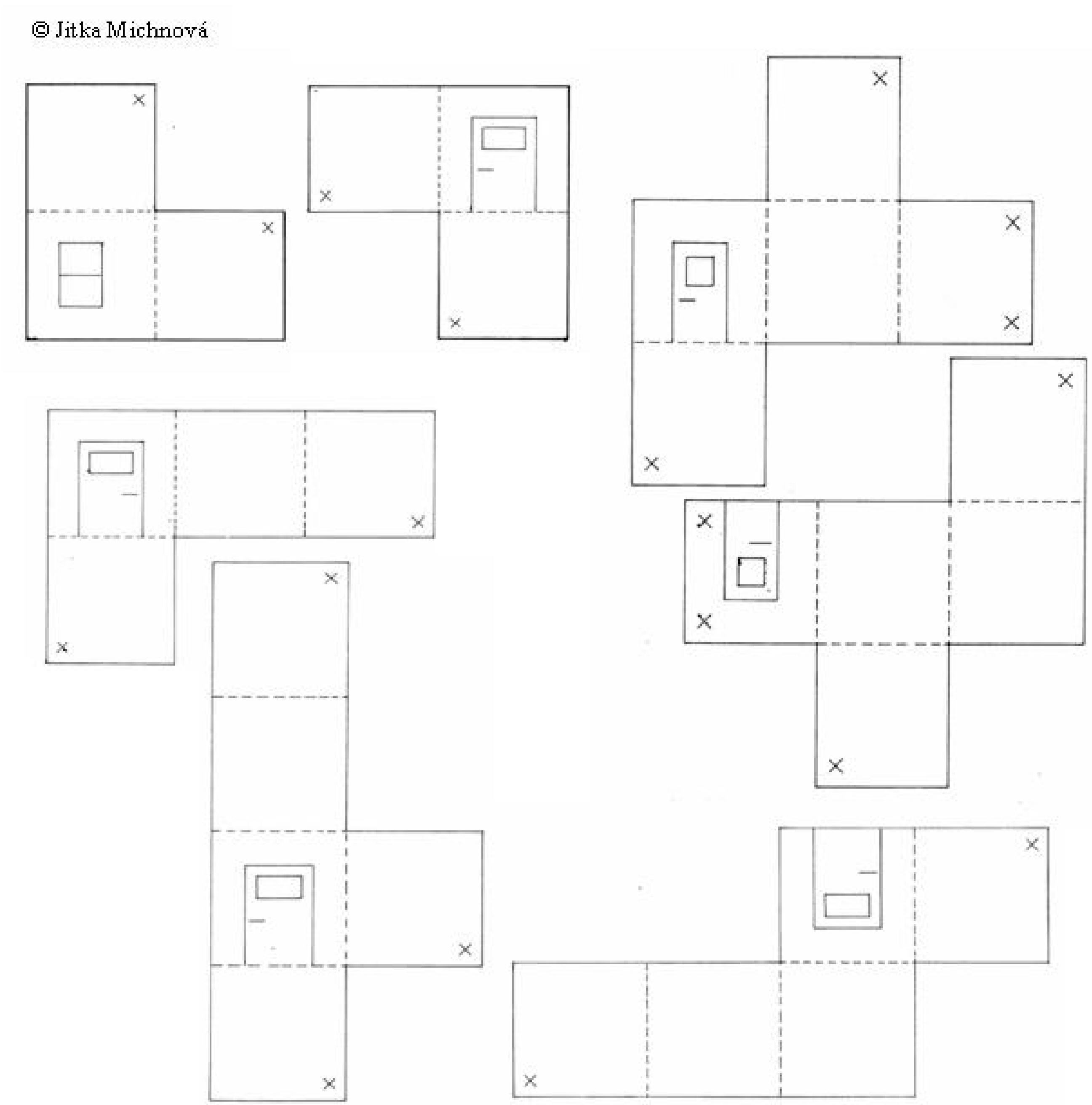
- Zakreslujeme části pokoje podle zadání, například na stropě visí modrý lustr, police je na levé stěně od dveří apod.

- Nekreslíme, ale vyrábíme nábytek z papíru, modelíny, kartonu, textilu apod.

- Namísto pracovních listů rozdáme šablony a s jejich pomocí žáci vyrábí svůj pokojíček z kartonu.

- K danému fragmentu pokojíčku žáci „přilepují“ další stěnu. (Rozšiřují si tak představu o síti krychle; řeší problémovou situaci – Kam stěnu napojit? Kudy povede provázek?)

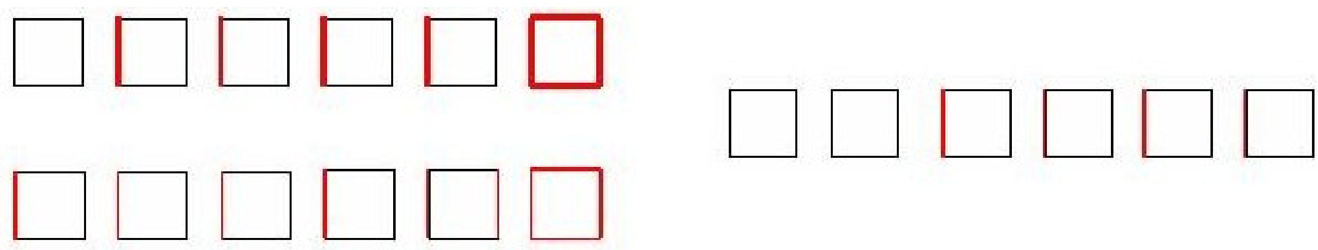
Apod. Fantazii se meze nekladou.



Obr. 1

Hrany krychle

Zadání úlohy: Je dána krychle a šest čtverců se stranami obarvenými tak, jak je vyznačeno na obrázku 2. Obarvi 12 hran krychle tak, že bude možné čtverce přilepit na krychli tak, že barvy stran čtverců a barvy hran krychle si budou odpovídat. Viz např. obr. 2.



Obr. 2

Komentář k úloze: Na první pohled se zdá, že se jedná o složitou úlohu, vhodnou pro druhý stupeň ZŠ. Nicméně i tuto úlohu lze variovat pro žáky prvního stupně. V tomto případě je vhodné dát dětem nastříhané čtverce s obarvenými stranami. Při realizaci ve třídě, byly pro děti připravené i krychle, které měly obarvené hrany. Tedy jakýsi „klíč" řešení. Tento „klíč" byl schován pod ubrouskem, kam měli možnost nahlédnout ti žáci, kteří už „obalili" svou krychli. Mohli si takto zkontrolovat, zda jejich řešení je správné.

Průběh dílny

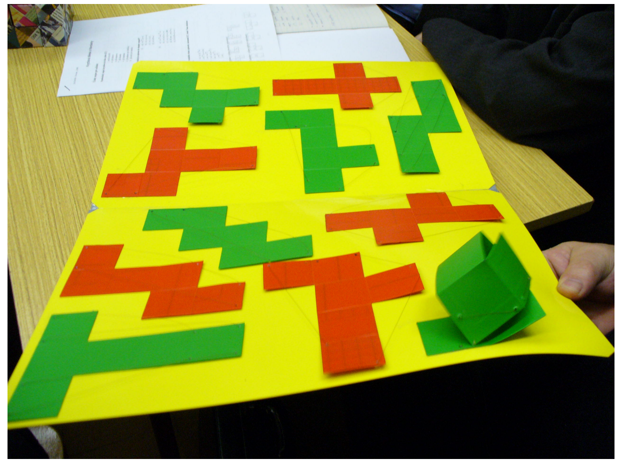
Učitelé při pracovní dílně řešili postupně obě úlohy. Začali jsme úlohou první. Učitelé obdrželi pracovní listy, nůžky, provázek a fixy a následně plnili úlohy stejně, jako by ji plnil žák. Panovala příjemná, uvolněná nálada. Někteří učitelé překvapili sami sebe, když i jim se podařilo namalovat koberec na stěnu. Mazaně pak koberec vydávali za obraz. Na rozdíl od žáků však učitelé neměli na svých pracovních listech značku, která prozrazovala, kudy má vést provázek. V momentě, kdy řešili problém, kudy provázek protáhnout, bylo v učebně až překvapivé ticho. Zdá se, že se nejedná o nikterak snadný úkol. Svá řešení měli učitelé možnost porovnat s pracemi žáků pátých tříd – viz obrázek 3. Žáci měli úlohu zjednodušenou značkami. O to více pozornosti věnovali vlastní výrobě pokojíčku. Žákovská řešení učitelé velice příjemně komentovali.

Odměnou pro učitele byla ukázka pomůcky se všemi známými sítěmi krychle – viz obrázek 4. Tyto sítě krychle se s pomocí provázku „samy složí". Pomůcka u učitelů sklidila velký ohlas. Nejeden z učitelů se rozhodoval pro vlastní výrobu zmíněné pomůcky. Návod na vlastní výrobu „provázkových sítí" přikládám na konci článku.

Pokračovali jsme prací na úloze 2. Učitelé obdrželi pracovní list, na kterém bylo zadání úlohy i kresby krychlí, aby měli kam zakreslovat svá řešení. Pro méně zdatné řešitele byly připravené čtverce s obarvenými hranami i krychle – „klíč" schovaný pod ubrouskem.

Tuto úlohu řešili učitelé samostatně a převážně z hlavy. Po nějaké době se přece jen našla odvážná učitelka, která se se smíchem uchýlila k manipulaci se čtverci. Následovali ji další. Většina učitelů řešila úlohy z hlavy, nicméně mezi zadanou sérií úloh se občas objevila taková, ke které i učitelé využili nabízené pomůcky. Nálada byla opět příjemná a učitelé měli oprávněně radost ze svých správných řešení.

Obr. 3



Obr. 4

Literatura

[1] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. (2006). Cube nets – Comparison of work in different countries, the result of EU Socrates project. In J. NOVOTNÁ, H. MORAOVÁ, M. KRÁTKÁ, N. STEHLÍKOVÁ (eds.) *Proceedings of PME 30*, Praha: Charles University in Prague, Faculty of Education, 2006, Vol. 1, s. 1-394.

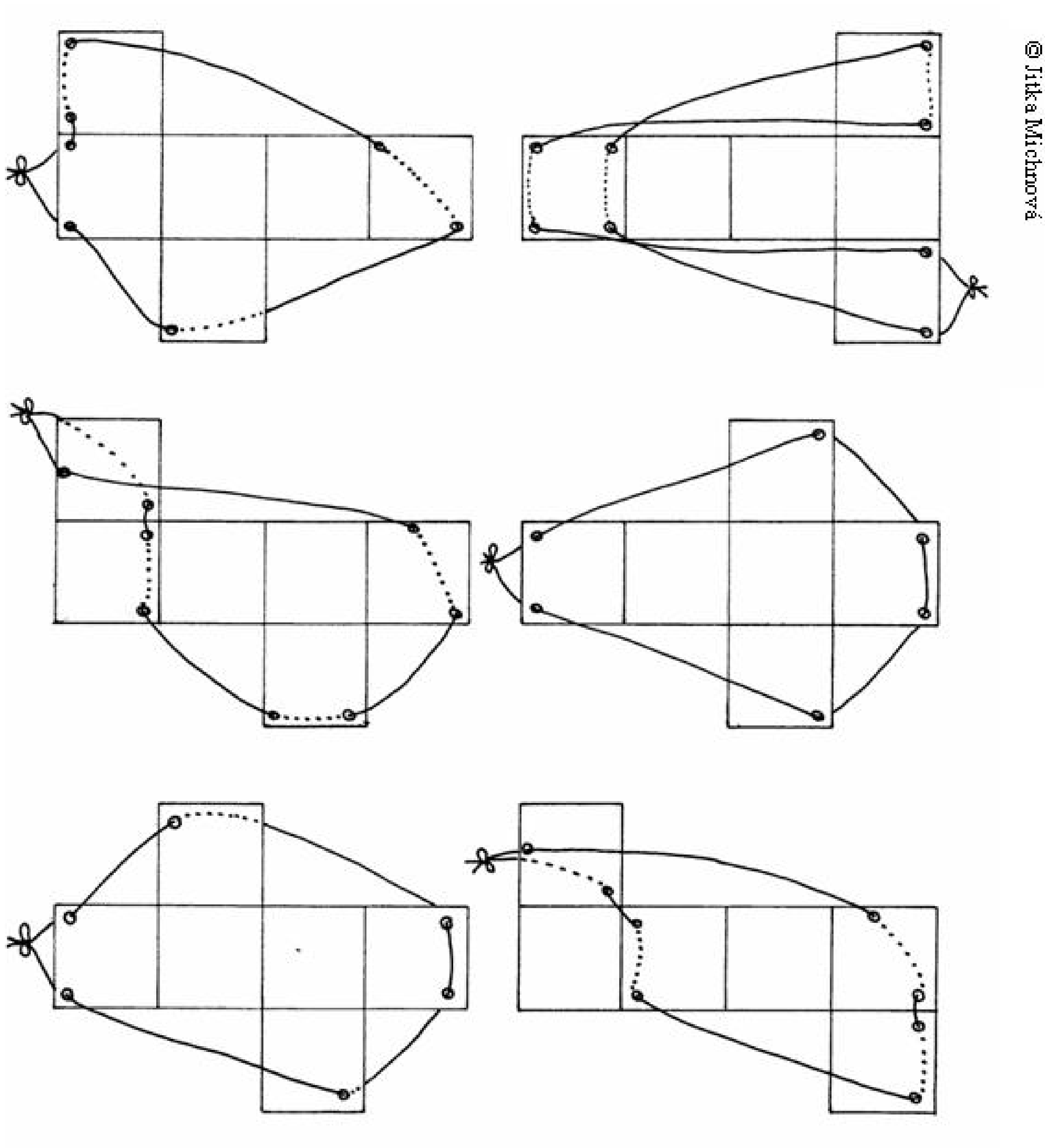
[2] HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. (2007). 3D geometry – Solids. In *Creative Teaching in Mathematics*. Charles University in Prague, Faculty of Education, 2006, s. 99–157.

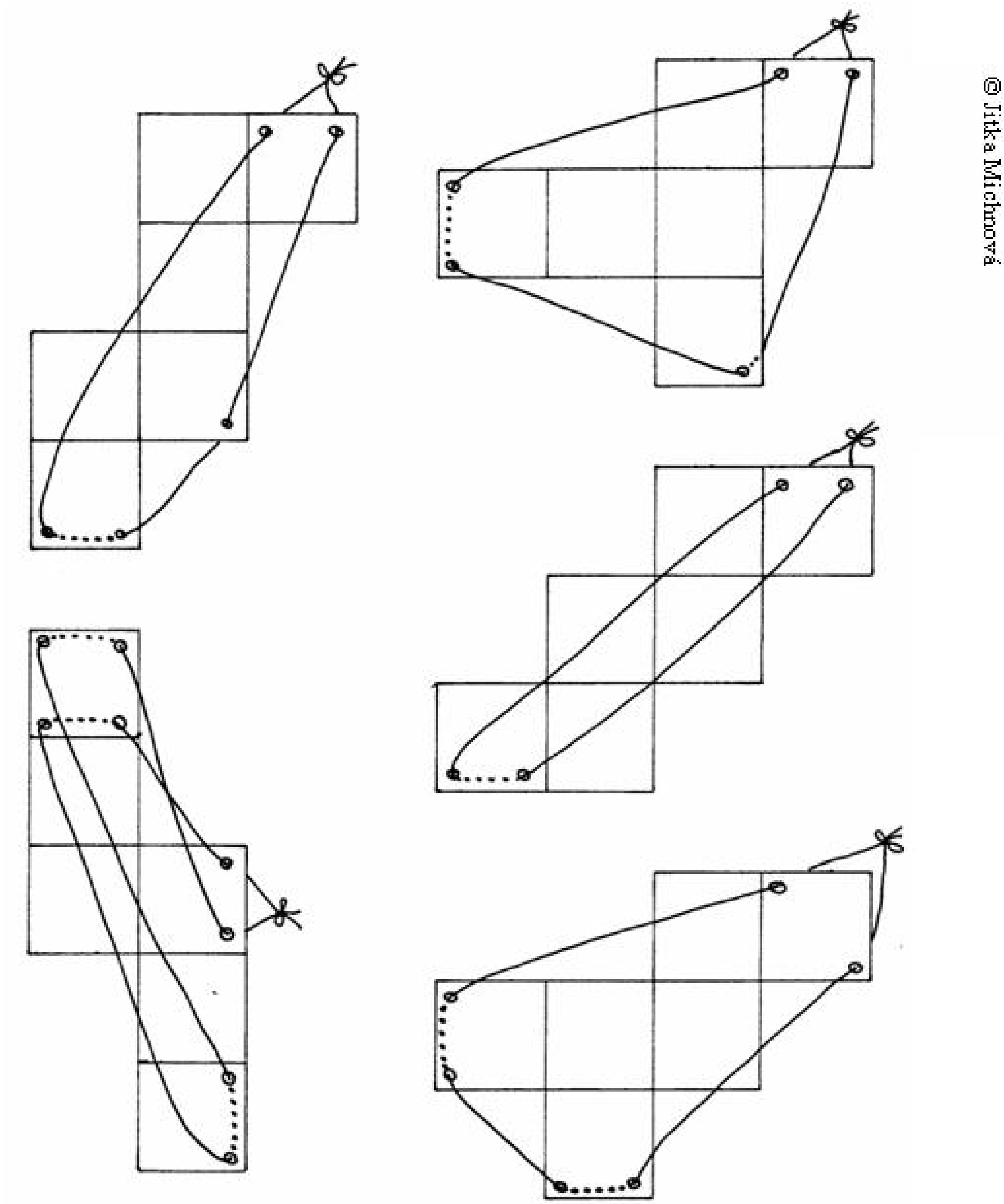
[3] KROČÁKOVÁ, I., MICHNOVÁ, J. (2005). Zapojení učitelů 1. stupně ZŠ do mezinárodního projektu IIATM. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, Sborník příspěvků*, PedF UK, Praha, s. 33–34.

[4] KROČÁKOVÁ I. (2005) Sítě krychle. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, Sborník příspěvků*, PedF UK, Praha, s. 77–81.

[5] WOLLRING, B. (2005) Konstrukce a klasifikace sítí krychle: Užití myšlenkových map ve vyučovacích experimentech na ZŠ. In JIROTKOVÁ, D., STEHLÍKOVÁ, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, Sborník příspěvků*, PedF UK, Praha, s. 101–111.

KLÍČ K VYTVOŘENÍ POMŮCKY




© Jitka Michnová

PŘÍPRAVA A ANALÝZA DIDAKTICKÝCH SITUACÍ[1]

JARMILA NOVOTNÁ, MAGDALENA KRÁTKÁ[2]

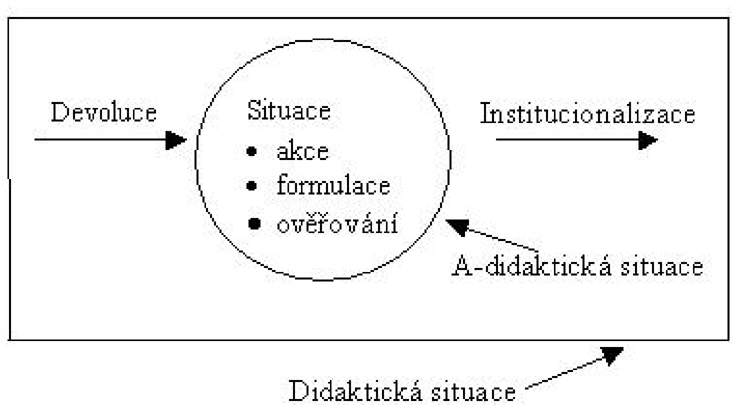
ÚVOD

Vyučovací proces můžeme obecně charakterizovat jako posloupnost situací (přirozených nebo didaktických), které vedou k modifikacím v chování žáků typickým pro získání nových znalostí. Pracovní dílna byla věnována přípravě didaktických situací, tedy situací ve třídě, kdy cílem je žáky něco naučit; stručně lze říci, situací, které slouží pro didaktickou potřebu. Pozornost byla věnována hlavně přípravě takových situací, při nichž učitel předává žákům část zodpovědnosti za vyučovací proces, tedy část svých pravomocí. Žáci něco zjišťují a objevují sami, vytvářejí model a kontrolují jeho správnost a užitečnost, případně vytvářejí jiný model, který považují za vhodnější apod., bez přímých vnějších zásahů učitele. Jejich činnost je řízena pouze prostředím a jejich znalostmi, nikoli didaktickou činností učitele. Žák se stává zodpovědným za získání požadovaných výsledků. Úkolem učitele je jednak připravit takovou situaci, jednak institucionalizovat získané informace. Tyto znalosti jsou pak učitelem dále využívány a rozvíjeny.[3]

Text je věnován typům didaktických situací, analýze a priori didaktické situace a překážkám v kognitivním vývoji. Základním textem, z něhož vycházíme, je kniha (Brousseau, 1997). V češtině je TDS zpracována např. v pracích (Pelantová, Novotná, 2004), (Hrabáková, 2005), (Složil, 2005). Další ilustrace a podrobnější informace lze najít např. v (Novotná a kol., 2006).

DIDAKTICKÉ SITUACE

Situací budeme rozumět systém, do něhož vstupuje učitel, žák, prostředí, pravidla a omezení potřebná pro vytvoření daného matematického poznatku. Posláním *didaktické situace* je „někoho něco naučit“. Učitel organizuje plán činností, jejichž cílem je modifikovat nebo vytvořit žákovu znalost.



[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2]Univerzita Karlova v Praze, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz, kratka@sci.ujep.cz

[3]Kdo z čtenářů se již setkal s Teorií didaktických situací v matematice (dále budeme stručně psát TDS), ví, že zde používáme právě tuto teorii. Teorii, která byla vytvořena ve Francii již před více než třiceti lety a od té doby je stále živá a stále ji její autor Guy Brousseau a jeho spolupracovníci a žáci rozvíjejí a doplňují. Teorie didaktických situací poskytuje učiteli velké množství cenných informací. Umožňuje komplexně popsat, co se děje při procesu vyučování: z pohledu žáka, učitele, vzhledem k okolnímu prostředí a vzhledem k činnosti, kterou se účastníci vyučovacího procesu zabývají.

V dalším výkladu se budeme věnovat *a-didaktickým*. Jejich cílem je umožnit žákovi získávat poznatky samostatně, bez explicitních zásahů učitele. Učitel předává žákovi zodpovědnost za akt učení (*devoluce*). A-didaktická situace se skládá ze tří etap (viz obrázek): *Akce* – výsledkem je předpokládaný (implicitní) model, strategie, počáteční taktika; *formulace* – zformulování podmínek, ve kterých bude strategie fungovat; *ověření* (*validace*) – ověření platnosti strategie (funguje, nefunguje).

Jednotlivé etapy a-didaktických situací si přiblížíme na příkladu *Hry na 20*: Hraje se ve dvojicích. Každý hráč se snaží říci „20“ přičtením 1 nebo 2 k číslu, které řekl soupeř v předcházejícím kroku. Jeden z hráčů začne číslem „1“ nebo „2“; druhý pokračuje přičtením 1 nebo 2, nahlas řekne výsledek; první hráč pokračuje přičtením 1 nebo 2 k výsledku; atd.

Typ a-didaktické situace	**Realizace ve Hře na 20**
Situace akce Obecně vychází strategie intuitivně nebo racionálně z dřívějších strategií. Žák volí novou strategii jako výsledek experimentování. Přijímá ji nebo zavrhuje na základě následného úspěchu nebo neúspěchu. Toto hodnocení může být i intuitivní. Žák si vytváří *implicitní model*, soubor vztahů nebo pravidel, na jejichž základě se žák rozhoduje, aniž si je uvědomuje a formuluje. Posloupnost situací akcí tvoří proces, pomocí něhož žák tvoří strategie, tj. „učí se sám“ metody řešení úloh.	*Hraní Jeden proti jednomu* Třída se rozdělí do dvojic, žáci ve dvojici hrají proti sobě. Výsledky píší na papír, rozdělený svislou čarou na dvě části, vlevo a vpravo od čáry. Každý žák je v situaci, kdy zná čísla, se kterými už bylo hráno. Jestliže partner odehraje, žák se musí rozhodnout a reagovat na situaci tak, že navrhne sám další číslo (po analýze situace a na základě informací, které z ní získá). Tato fáze by měla mít asi 4 kola a neměla by trvat déle než 10 minut. Na začátku se zdají žákovi všechna čísla stejně důležitá. Na konci se postupně dopracuje k objevení výhodných strategií, např. že s číslem 17 vyhraje, zatímco jiná čísla (18 nebo 19) se nezdají pro hru vhodná. Skupina vztahů „Jestliže zahraji 14 nebo 17, mohu vyhrát“ může zůstat pouze na implicitní úrovni; žák hraje s touto strategií implicitně, aniž je schopen ji formulovat.

Situace formulace K tomu, aby skupina vyhrála, nestačí, aby jeden věděl, jak má hrát (tj. implicitní model), žák musí také naznačit svým spoluhráčům ze skupiny, kterou strategii navrhuje. Tak je každý žák veden k tomu, aby předvídal. Jediným prostředkem, který žák má, je formulovat strategii. Má dvě zpětné vazby: – okamžitou od žáků ve své skupině, kteří rozumějí nebo nerozumějí jeho výkladu, – zpětnou vazbu z prostředí při hraní následujícího kola, zda formulovaná a použitá strategie je vítězná nebo ne.	*Hraní Skupina proti skupině* Žáci jsou rozděleni do dvou (pokud možno stejně početných) skupin. Pro každé kolo stanoví učitel (náhodně) v každé skupině jednoho žáka, aby hrál za svou skupinu u tabule; jestliže vyhraje, skupina získá bod. Žáci rychle zjistí, že je nutno ve skupině společně plánovat a diskutovat strategie. Někteří budou už od začátku vědět, že „Musíš říci 17“. Pro tuto fázi se doporučuje 6 až 8 kol, 15–20 minut. Kdokoli je u tabule, je v a-didaktické situaci akce.

Žáci si postupně vytvářejí jazyk, kterému budou všichni rozumět, který zahrne všechny objekty a důležité vztahy situace přiměřeným způsobem (tj. argumentací a přiměřenými akcemi). V každém okamžiku je tvořen jazyk, který je ověřován z pohledu srozumitelnosti, snadnosti jeho konstrukce a délky zpráv, které může předávat.

Typ a-didaktické situace	**Realizace ve Hře na 20**
Situace ověřování Žák pracuje se vztahem mezi „reálnou“ situací, konkrétní nebo nekonkrétní, a jedním nebo více tvrzeními o předmětu situace. Ověřování motivuje žáky, aby diskutovali o situaci, a podporuje formulování jejich implicitních ověření. Jejich odůvodňování je však často nedostatečné, nesprávné, neobratné. Nutí je, aby na tvrzení pohlíželi z několika úhlů pohledu: zda je podobné jinému tvrzení, zda se s jeho pomocí dá vysvětlit nějaká situace, zda není v přímém rozporu s jiným tvrzením atd.	*Hraní Skupina proti skupině* Hraje se ve stejných skupinách jako v předchozí etapě. Skupiny střídavě navrhují „pravdivá“ tvrzení, jejichž pravdivostí si jsou jisti. Nejprve vysloví tvrzení, které označí jako „domněnku“. Až ji všichni přijmou, stane se větou. Jestliže jedna skupina navrhne domněnku, druhá skupina se stává oponentem a musí rozhodnout: – zda je návrh pravdivý; v tom případě vyhrává bod navrhující družstvo a získává bod, – zda je návrh nepravdivý; v tom případě se tato skupina stane navrhovatelem opačné domněnky a ve hře jsou už body dva,

Žákům musí být dána možnost odhalit vlastní chyby. To je nutné k vybudování nové znalosti.	– může také pouze říci, že o domněnce pochybuje. Oponent může: – žádat, aby navrhovatel odehrál 5 kol hry, v nichž bude používat navržené pravidlo. Oponent může žádat, aby navrhovatel hrál hru tak dlouho, až jeden z nich stáhne svůj návrh. Druhý pak získává body. – žádat od navrhovatele přesvědčivý matematický důkaz, V tomto případě získává 5 bodů ta skupina, která druhou přesvědčila, „přesvědčený“ získává body dva.

Institucionalizací rozumíme přechod žákovy znalosti z role prostředku pro řešení jedné určité situace do nové role reference pro individuální nebo kolektivní použití v situacích dalších. Institucionalizace může nastat i v situaci spontánního učení, ve většině případů je však svázána s didaktickými procesy řízenými učitelem.

Příprava situace – analýza a priori a překážky

Na závěr bychom chtěli upozornit na důležité složky přípravy situací učitelem. Do *analýzy a priori* patří vše, co je třeba si rozmyslet a připravit před realizací navržené didaktické situace, chceme-li, aby situace byla úspěšná, aby žáci získali vědomosti, které jsme plánovali, abychom byli co nejlépe připraveni na to, co se může ve třídě odehrát (i když asi nikdy nemůžeme být připraveni na všechny eventuality, které mohou nastat, čím podrobnější je naše příprava, tím snáze budeme čelit i nepředpokládaným událostem). Analýza a priori má tedy pro učitele velkou informační hodnotu: Poukazuje na případná úskalí hodiny, na možné obtíže žáků při řešení úlohy.

Analýzu a priori provádí učitel před samotnou realizací výukové jednotky. Na základě popisu jednotky se snaží nejen připravit plán aktivit, ale také odhadnout vlastní průběh: navrhnout rozdělení hodiny do jednotlivých fází, zamyslet se nad možnými reakcemi a postoji žáků a rozmyslet si možné vlastní reakce (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy), zamyslet se nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými), rozmyslet si, jaké vědomosti a poznatky jsou pro danou strategii nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat. V pracovní dílně jsme se věnovali analýze a priori u úlohy Puzzle. Podrobněji se čtenář může s postupy analýzy a priori seznámit např. v (Hrabáková, 2005).

Jedním ze stěžejních úkolů učitele je rozpoznat obtíže, na něž mohou žáci při získávání nových znalostí narazit. Ty mohou být různého charakteru a původu. V TDS používáme termín překážka. *Překážku* můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stálé a opakují se u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. „děti obvykle dělají tuto chybu“), a také v historii.

Překážkou je znalost, neboť existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěšně použít. Tato oblast je obvykle velice dobře jedinci známa a znalost je ověřena mnoha zkušenostmi. V novém kontextu však tato znalost selhává a dává špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření „lepší" znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem, kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Znalost jakožto překážka má tendenci se lokálně přizpůsobit tomu, že ona sama je měněna, jak nejméně je to možné. Důvodem je to, že překážka je znalost vztahující se k nějakému pojmu, tj. k matematickému pojmu, který souvisí s celou množinou situací, kde tato znalost dává smysl, a s celou skupinou významů, které jedinec může spojovat s tímto pojmem, a s mnoha nástroji, tvrzeními a algoritmy, které jedinec může používat při práci s tímto pojmem. Blíže se může čtenář s problematikou překážek seznámit např. v (Krátká, 2006).

Závěr

Pracovní dílna (i tento text) měl její účastníky seznámit s klíčovými myšlenkami a postupy teorie didaktických situací. Kladli jsme si za cíl podrobněji prozkoumat jeden typ didaktické situace, tzv. situaci a-didaktickou, a zamyslet se nad činnostmi, které musí v učitelově práci předcházet úspěšné realizaci a-didaktické situace. V průběhu dílny byly všechny uvedené pojmy ilustrovány na konkrétních situacích, a to Hra na 20, Puzzle a geometrických úlohách. Podrobněji, s množstvím dalších ilustrací, se čtenář může s problematikou TDS seznámit v (Novotná a kol., 2006).

Literatura

[1] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Dordrecht,/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

[2] Hrabáková, H. (2005). *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF.

[3] Krátká, M. (2007). Porozumění nekonečnu. In Stehlíková, N., Jirotková, D. (Eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2006*. UK, PedF – SUMA JČMF Praha, 2007, s. 52–57.

[4] Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H., Krátká M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. In *Studijní materiál k projektu Podíl učitele ZŠ na tvorbě ŠVP*. Blok D02. JČMF Praha 2006. 33 stran. [CDROM].

[5] Pelantová, A., Novotná, J. (2004). Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh? In M. Ausbergerová, J. Novotná (Eds.), *IX. Setkání učitelů matematiky ze všech typů škol*. JČMF – ZU Plzeň, 2004, s. 229–235.

[6] Složil, J. (2005). *Teorie didaktických situací v české škole: Dělitelnost přirozených čísel v 6. ročníku ZŠ*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF.

Pět námětů pro výuku algebry[1]

Filip Roubíček[2]

Úvod

Algebra obecně patří k obtížným partiím učiva matematiky na základní škole. Jedním z důvodů je vysoká úroveň abstrakce algebraických objektů a operací s nimi. Učivo prezentované bez vazeb na reálné problémy je pro žáky kvůli absenci vlastních zkušeností obtížně uchopitelné. Zvládnutí algebraického učiva vyžaduje čas, proto je vhodné, aby propedeutice algebry byla věnována náležitá pozornost již na prvním stupni základní školy, a to postupným seznamováním žáků s pojmy *proměnná*, *neznámá*, *výraz*, *rovnice*, *nerovnice* ve vazbě na konkrétní matematické problémy. V propedeutice algebry na druhém stupni pak můžeme snáze navázat úpravami výrazů (nejen číselných), rovnic a nerovnic, například v rámci probírání učiva o číselných oborech.

Cílem článku však není popsat propedeutiku algebry na základní škole, ale seznámit čtenáře s několika náměty pro výuku algebry v 8. a 9. ročníku základní školy. Algebra je pro žáky nejen obtížná, ale často i nezáživná, neboť žáci postrádají její smysl. Bohužel najít pro ně přijatelné vysvětlení je nesnadné, neboť smysluplné využití algebry v životě žáků základní školy v podstatě neexistuje. Možnosti, jak žáky motivovat, je tedy třeba hledat jinde, například v atraktivnosti reprezentací algebraického učiva. Zdrojem mohou být různé hry, například domino, pexeso, loto, kvarteto apod.

Vytýkání před závorku – Algebraické domino

Rozklad mnohočlenu na součin patří ke klíčovým úpravám složitějších (zejména lomených) algebraických výrazů. Důležitým předpokladem pro rozložení mnohočlenu na součin pomocí vytýkání jsou dovednosti násobit a dělit výrazy, určovat společného dělitele a pracovat s mocninami. Procvičovat tyto dovednosti můžeme prostřednictvím úloh, které jsou založeny na hledání dvojic výrazů, tedy na podobném principu jako známá hra domino.

[1] Článek vznikl za podpory grantu GA ČR č. 406/05/2444 a výzkumného záměru AV0Z10190503.

[2] Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Praha, roubicek@math.cas.cz

Na obrázku 1 je znázorněno 28 dvojic výrazů vytvořených ze sedmi různých dvojčlenů a jejich obměn. Rozdělení výrazů do dvojic odpovídá klasickým dominovým kostkám. Hrát domino s takto upravenými kostkami je pro žáky, kteří se s vytýkáním právě seznámili, značně obtížné. Z tohoto důvodu předchází hře průpravné aktivity:

1) žáci sestavují dvojice na sebe navazujících kostek;

2) žáci hledají všechny kostky, které mohou k dané kostce přiřadit;

3) žáci sestavují řadu na sebe navazujících kostek, přičemž se snaží upotřebit jich co nejvíce.

Po důkladném seznámení se s jednotlivými výrazy a jejich rozklady je možné přistoupit k vlastní hře. U žáků, kteří jsou v této hře úspěšní, lze předpokládat, že porozuměli základním pravidlům vytýkání a zvládnou i složité případy vytýkání.

$-(2xy-2y^2)$	$2y(y-x)$	$2y^2-2xy$	$3(y+2y^2)$
$3y+6y^2$	$3y(2y+1)$	$6y^2+3y$	$-3(y^2-2xy)$
$-(3y^2-6xy)$	$3y(2x-y)$	$6xy-3y^2$	$3(2x+xy)$
$6x+3xy$	$3x(y+2)$	$3xy+6x$	$-2(2x-3x^2)$
$-(4x-6x^2)$	$2x(3x-2)$	$6x^2-4x$	$2(3y+2y^2)$
$6y+4y^2$	$2y(2y+3)$	$4y^2+6y$	$-2(3x-x^2)$
$-(6x-2x^2)$	$2x(x-3)$	$2(y^2-xy)$	$-y(3y-6x)$
$2(y^2-xy)$	$3x(2+y)$	$3(2y^2+y)$	$x(6+3y)$
$y(6y+3)$	$-2x(2-3x)$	$3(2xy-y^2)$	$-x(4-6x)$
$y(6x-3y)$	$2y(3+2y)$	$3(xy+2x)$	$y(6+4y)$
$x(3y+6)$	$-2x(3-x)$	$2(3x^2-2x)$	$-x(6-2x)$
$-2y(x-y)$	$x(6x-4)$	$-y(2x-2y)$	$2(2y^2+3y)$
$3y(1+2y)$	$y(4y+6)$	$3y(1+2y)$	$2(x^2-3x)$
$-3y(y-2x)$	$x(2x-6)$	$-2(xy-y^2)$	$2x^2-6x$

Obr. 1: Algebraické domino

ROZKLAD NA SOUČIN POMOCÍ VZORCŮ A SOUČIN DVOJČLENŮ – ALGEBRAICKÉ PEXESO

Další postup pro rozklad mnohočlenu, který je vyučován na základní škole, spočívá v použití algebraických vzorců: druhé mocniny součtu, druhé mocniny rozdílu a rozdílu druhých mocnin. Zvládnutí této dovednosti předpokládá, že žák zná vzorce zpaměti a rozpozná je ve tvaru trojčlenu nebo dvojčlenu. Pro nácvik je důležité nejen mnohočleny rozkládat, ale též je získávat násobením dvojčlenů, a zároveň se seznamovat s případy, kdy nelze vzorec použít. Pro oživení takových cvičení můžeme vytvořit sadu kartiček (viz obr. 2) a hrát s nimi pexeso. Počet kartiček nemusí být nutně 64; raději volíme menší počet karet a soustředíme se na problémové jevy.

Na obrázku 2 je 42 kartiček obsahující zmíněné vzorce a dále součiny dvojčlenů, jejichž trojčleny po roznásobení připomínají vzorec. Pro snazší použití ve výuce je vhodné kartičky s výrazy zapsanými ve tvaru součinu dvojčlenů nebo druhé mocniny dvojčlenu (horní polovina kartiček na obr. 2) barevně odlišit od kartiček s trojčleny a dvojčleny. Barevné rozlišení karet usnadňuje též vlastní hru, neboť dvojice kartiček netvoří stejně zapsané výrazy jako je tomu v případě klasického pexesa.

$(a+1)^2$	$(a+2)^2$	$(a+3)^2$
$(a-1)^2$	$(a-2)^2$	$(a-3)^2$
$(a+1)\cdot(a-1)$	$(a+2)\cdot(a-2)$	$(a+3)\cdot(a-3)$
$(a+1)\cdot(a+2)$	$(a+1)\cdot(a+3)$	$(a+2)\cdot(a+3)$
$(a-1)\cdot(a-2)$	$(a-1)\cdot(a-3)$	$(a-2)\cdot(a-3)$
$(a+1)\cdot(a-2)$	$(a+1)\cdot(a-3)$	$(a+2)\cdot(a-3)$
$(a-1)\cdot(a+2)$	$(a-1)\cdot(a+3)$	$(a-2)\cdot(a+3)$
a^2+2a+1	a^2+4a+4	a^2+6a+9
a^2-2a+1	a^2-4a+4	a^2-6a+9
a^2-1	a^2-4	a^2-9
a^2+3a+2	a^2+4a+3	a^2+5a+6
a^2-3a+2	a^2-4a+3	a^2-5a+6
a^2-a-2	a^2-2a-3	a^2-a-6
a^2+a-2	a^2+2a-3	a^2+a-6

Obr. 2: Algebraické pexeso

Obdobně jako u algebraického domina je nutné žáky na hru připravit. Průpravné aktivity spočívají v tom, že

1) žáci sestavují dvojice kartiček na základě rovnosti výrazů, přičemž všechny kartičky mají otočeny výrazem nahoru;

2) žáci přiřazují k dané kartičce s výrazem zapsaným ve tvaru součinu dvojčlenů nebo druhé mocniny dvojčlenu (tu vybírají s hromádky kartiček otočených výrazem dolů), kartičku s trojčlenem nebo dvojčlenem (tu hledají mezi kartičkami otočenými výrazem nahoru);

3) žáci přiřazují k dané kartičce s trojčlenem nebo dvojčlenem kartičku s výrazem zapsaným ve tvaru součinu dvojčlenů nebo druhé mocniny dvojčlenu.

Po té, co se žáci seznámí s jednotlivými dvojicemi výrazů a vymyslí strategie pro jejich určování, je možné přistoupit k vlastní hře, například formou třídního turnaje. Žáci buď hrají podle pravidel klasického pexesa, kdy jsou všechny kartičky otočeny výrazy dolů, nebo v upravené podobě popsané výše v bodě 3. Pro uskutečnění turnaje během jedné vyučovací hodiny je nezbytné stanovit časový limit pro přiřazení kartičky.

Alternativou algebraického pexesa je hra Černý Petr, kdy použijeme menší počet výrazů a jako „Černého Petra" zařadíme kartu například s dvojčlenem a^2+1, který nelze v $\mathbf{R}$ rozložit.

ŘEŠENÍ ROVNIC A SOUSTAV ROVNIC – ROVNICOVÝ MARATÓN

Rovnice představují jednu z partií učiva matematiky základní školy, které jsou úzce provázány s úpravami algebraických výrazů, proto žákům, kteří zvládli základní úpravy výrazů, řešení rovnic většinou nečiní větší problémy. Ve většině případů řešení rovnic žáci používají pouze základní operace s jednočleny, použití složitějších úprav (například rozkladu na součin) je spíše výjimkou. Řešení rovnic je oproti upravování výrazů specifické tím, že v mnohem větší míře závisí na aritmetických dovednostech. Jednou z možností, jak žáky motivovat k procvičování řešení rovnic, je uspořádat soutěž.

Pro soutěž připravíme soubor několika rovnic, jejichž obtížnost je stupňována. Počet rovnic a jejich obtížnost volíme podle aktuálních dovedností žáků tak, že zařazujeme úlohy snadné i takové, které vyžadují úpravy, v nichž žáci často chybují. Motivačním prvkem v soutěži je připodobnění řešení rovnic běžeckému závodu, případně i lákavá odměna pro vítěze. Níže uvedený soubor devíti rovnic (pro soutěž plánovanou na 90 minut) je rozvržen do třech základních etap (rozběh, půlmaratón, maratón) a jedné prémiové etapy pro velmi úspěšné řešitele.

Etapa závodu		Počet bodů	Rovnice
Rozběh	A	0-3	$3a+7=2a-2$
	C	4-6	$0{,}9c-3{,}7=2{,}3-1{,}1c$
	H	7-10	$\frac{2h}{5}+\frac{h}{10}=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}$
Půlmaratón	M	11-15	$2\cdot(5m-6)+4m=2m+2\cdot(4-4m)$
	R	16-21	$4r+\frac{1}{2}=3-2\cdot(r-1)$
Maratón	T	22-27	$2{,}7t-2\cdot(1{,}8-1{,}2t)=3\cdot(1-0{,}5t)$
	V	28-34	$1{,}2\cdot(v+2)-0{,}7\cdot(3-2v)=0{,}5\cdot(4-1{,}6v)$
	Y	35-42	$\frac{y}{2}-\left(\frac{3y}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4y}{3}-\frac{8}{6}\right)$
Super Maratón	X	43-50	$[3x-(4+2x)]+3\cdot(x+5)=5x-3\cdot[x-(4+2x)]$

Obr. 3: Rovnicový maratón

První etapa (tzv. rozběh), která je sestavena z jednoduchých rovnic, bývá hodnocena zvlášť. Žák, který zvládne rozběh bez problémů, má předpoklad uspět při řešení následujících rovnic. Další dvě etapy pak představují výkonnostní diferenciaci: žáci, kteří řeší rovnice pomalu nebo často chybují, běží tzv. půlmaratón, ostatní běží celý závod, tzn.

řeší celkem osm rovnic. Do další etapy může postoupit pouze ten, kdo správně vyřešil rovnici a provedl zkoušku. Pro kontrolu dodržování tohoto pravidla je vhodné zadávat rovnice postupně. Body za jednotlivé rovnice slouží pro stanovení výsledného pořadí; při shodnosti bodů rozhoduje čas odevzdání řešení.

Místo rovnic mohou žáci řešit také soustavy rovnic. Alternativou maratónu je tzv. překážkový běh, kdy žák řeší postupně zadané úlohy a za chybná řešení získává trestné body. Tato varianta je vhodná například pro úpravy lomených výrazů, kdy žák běžně neprovádí zkoušku (pomocí výpočtu hodnoty výrazu dosazením za proměnné), takže případnou chybu neodhalí.

Úpravy lomených výrazů – Algebraické loto

Jinou formou procvičování úprav algebraických výrazů je algebraické loto. Hra je opět založena na sestavování dvojic; žáci přiřazují k daným výrazům podmínky, kdy mají smysl, nebo jejich zkrácený tvar nebo výsledek dané operace apod. Vylosované kartičky se pokládají na příslušná pole hrací karty, která obsahuje devět výrazů. Na obrázku 4 je ukázka hrací karty a kartiček pro procvičování krácení lomených výrazů.

$\frac{4n^2}{6n}$	$\frac{2n+4}{6n}$	$\frac{2n^2+4n}{6n}$
$\frac{2-n}{3n-6}$	$\frac{2n-4}{3n-6}$	$\frac{n^2-4}{3n-6}$
$\frac{n^2-2n+4}{n^2-4}$	$\frac{n^2-2n}{n^2-4}$	$\frac{n^2+2n+4}{n^2-4}$

$\frac{n-2}{n+2}$ $\frac{n+2}{3n}$ $\frac{n-2}{3}$

Obr. 4: Algebraické loto

Vyjádření neznámé ze vzorce – Algebraické kvarteto

Při úpravách vzorců, které představují jednu z důležitých aplikací algebry zejména ve fyzice, se využívají úpravy výrazů i ekvivalentní úpravy rovnic. Úlohy tohoto typu prověřují algebraické dovednosti žáků; ukazují, jak učivu porozuměli a na kolik zvládli „řemeslo“. S jednoduššími vzorci, v nichž se vyskytují tři proměnné, se seznamují již v šesté třídě, ale málokdy se zabývají jejich upravováním, přestože obměny vzorců při řešení úloh používají. Se základními úpravami vzorců se většinou seznamují mnohem později, proto úpravy složitějších vzorců s více proměnnými nebo lomennými výrazy mnozí žáci nezvládají.

Jednu z možností, jak procvičovat zmíněné dovednosti, nabízí algebraické kvarteto (viz obr. 5). Sadu karet tvoří osm vzorců s proměnnými A, B, C, D, které zahrnují základní kombinace dvou početních operací. Každá karta obsahuje jeden z uvedených vzorců a menším písmem zapsané vzorce, které tvoří danou čtveřici. V obtížnější variantě je možné nápovědu v podobě trojice vzorců vynechat. Při hře se dodržují běžná pravidla. Vzhledem k tomu, že rozdíly v zápisech vzorců jsou někdy málo zřetelné, je třeba předem seznámit žáky se správným čtením jednotlivých vzorců.

$A = B + C \cdot D$	$B = A - C \cdot D$	$C = \dfrac{A - B}{D}$	$D = \dfrac{A - B}{C}$
		$C = \dfrac{B - A}{D}$	$D = \dfrac{B - A}{C}$
$A = (B + C) \cdot D$	$B = \dfrac{A}{D} - C$	$C = \dfrac{A}{D} - B$	$D = \dfrac{A}{B + C}$
$A = (B - C) \cdot D$	$B = \dfrac{A}{D} + C$	$C = B - \dfrac{A}{D}$	$D = \dfrac{A}{B - C}$
$A = B + \dfrac{C}{D}$	$B = A - \dfrac{C}{D}$	$C = \dfrac{A - B}{D}$	$D = \dfrac{C}{A - B}$
$A = B - \dfrac{C}{D}$	$B = A + \dfrac{C}{D}$	$C = \dfrac{B - A}{D}$	$D = \dfrac{C}{B - A}$
$A = \dfrac{B + C}{D}$	$B = A \cdot D - C$	$C = A \cdot D - B$	$D = \dfrac{B + C}{A}$
$A = \dfrac{B - C}{D}$	$B = A \cdot D + C$	$C = B - A \cdot D$	$D = \dfrac{B - C}{A}$

Obr. 5: Algebraické kvarteto

ZÁVĚR

Uvedené aktivity zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti užití her ve výuce algebry. Jistě lze najít nebo vytvořit řadu dalších variant. Ale vždy bychom měli mít na zřeteli didaktické uplatnění vybrané hry, zejména její zacílenost na matematické dovednosti, které chceme u žáků rozvíjet. Je vhodné, aby hra měla jednoduchá pravidla a umožňovala volit různé úrovně obtížnosti. Příliš snadná nebo naopak příliš obtížná hra žáky neoslovuje.

Přestože matematický obsah popsaných her je totožný s tím, co obsahují cvičení v učebnici, neobvyklou prezentací se stává pro žáky zajímavějším. Novost a zábavnost žáky motivuje, do řešení úloh se pouštějí i žáci, pro které je matematika obtížným a nezajímavým předmětem. Pravidelné zařazování uvedených aktivit vede žáky k osvojení si algebraického „řemesla“ a též k sebehodnocení. Na druhou stranu mohou častým opakováním zevšednět a stát se stejně nudnými jako tradiční formy procvičování, proto je třeba aktivity obměňovat a tím dávat žákům stále nové podněty k rozvoji jejich dovedností.

Rozvoj prostorové představivosti na víceletém gymnáziu[1]

Jana Slezáková[2]

Prostorová představivost je pojem, který intuitivně chápe každý z nás. Představa o obsahu a rozsahu pojmu bude různá, neboť závisí na našich zkušenostech, profesním zaměření a citovém vztahu k dané problematice.

Prostorová představivost se rozvíjí v souvislosti s rozvojem některých dovedností jako jsou grafická komunikace, používání didaktických pomůcek, práce s matematickými pojmy, aplikace matematických poznatků, objevování a konstruktivní učení.

Různí autoři uvádějí různé definice pojmu prostorová představivost. Molnár (2004) ji definuje jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. Jirotková (1990) ji specifikuje jako schopnost – dovednost

- poznávat geometrické útvary a jejich vlastnosti,
- abstrahovat z konkrétních objektů jejich geometrické vlastnosti a vidět v nich geometrické útvary a jejich vlastnosti,
- na základě rovinných obrazů si představit geometrické útvary v nejrůznějších vzájemných vztazích.

Podle Duška (1970) představivost vypěstovaná v jednom oboru není vždy zárukou žádoucí úrovně této schopnosti v oboru jiném, proto nehovoří o prostorové představivosti, ale užívá pojem geometrická představivost, tj. věnuje se rozvoji představivosti s geometrickým obsahem. Kuřina (1987) geometrickou představivostí rozumí tu složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti si geometrické útvary a vlastnosti vybavovat.

S rozvíjením prostorové představivosti je potřeba začínat co nejdříve, a to už v předškolní výchově. Je dobré využívat prostorových stavebnic a dalších her, při kterých se děti učí pojmenovávat základní geometrická tělesa. Na základní škole a nižším stupni víceletých gymnázií je jedním z hlavních úkolů rozvoj schopností reprodukovat a anticipovat správné představy.

V současné době se stále více projevují některé příčiny nízké úrovně prostorové představivosti, a to:

---

[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2]Slovanské gymnázium Olomouc, Tř. Jiřího z Poděbrad 13, slezakov@seznam.cz

- celková doba, kterou je ve vyučování možno věnovat rozvíjení prostorové představivosti, je nedostatečná,
- na rozvíjení prostorové představivosti nejsou dostatečně připraveni učitelé matematiky,
- žáci nejsou dostatečně motivováni svými učiteli,
- při výuce prostorové představivosti se nevyužívají grafické programy,
- podceňuje se význam prostorové představivosti pro praxi.

PRACOVNÍ DÍLNA

Cílem pracovní dílny bylo poskytnout a ukázat posluchačům některé zajímavé úlohy, které umožňují lépe pochopit a rozvíjet prostorovou představivost.

Jednou z možností jak rozvíjet prostorovou představivost jsou manipulativní činnosti jak v rovině, tak v prostoru. Je to jakási aktivita, při které přichází dítě do styku s geometrickými objekty. Mezi velmi oblíbené manipulativní činnosti v rovině patří tangram. Tangram je čtverec, který je rozdělen na 7 částí, z nichž lze sestavovat různé geometrické obrazce, lidské postavy a zvířata v charakteristických postaveních. Posluchači měli možnost sami si vyzkoušet libovolnou sestavu, podle zadané předlohy. Dále byli seznámeni se zjednodušenou podobou tangramu, a to rozstříhaný čtverec podél úhlopříček na čtyři shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. Posluchačům byl předveden model geoboardu, na který se znázorňují geometrické tvary pomocí gumiček. Byly řešeny následující úlohy:

1. úloha:

Kolik různých tvarů trojúhelníků můžeš vyznačit na geoboardu? (celkem 8)

2. úloha:

Kolik různých tvarů čtyřúhelníků můžeš vyznačit na geoboardu? (celkem 16)

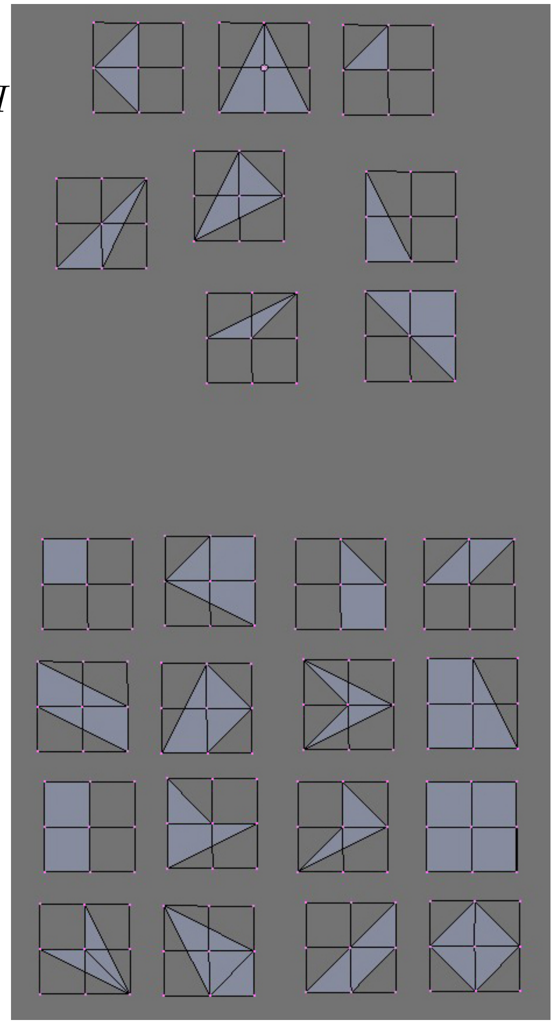
3. úloha:

Kolik různých útvarů s rovnoběžnými stranami můžeme vyznačit na geoboardu? (Při řešení posluchači správně určili rozdělení na skupiny s jednou dvojicí rovnoběžných stran – 4 možnosti, se dvěma dvojicemi rovnoběžných stran – 6 možností a se třemi dvojicemi rovnoběžných stran – 1 možnost.)

Dále byla předvedena učební pomůcka „krybox“, která je založena na manipulaci s trojrozměrnými předměty, a to krychlemi. Cílem učební pomůcky je vytváření seskupení krychlí v boxu podle předložených karet, tj. umístění krychlí v boxu podle předem daných sdružených průmětů, či zakreslování situace v boxu v pravoúhlé projekci na tři průmětny do připravených záznamových karet.

Na závěr byli posluchači seznámeni se dvěma úlohovými situacemi: „Procházky po krychli“ a „Odvalování hrací kostky“. Obě úlohové situace se týkaly krychle. V prvním případě byl úkol „chodit“ po hranách a úhlopříčkách povrchu krychle od vrcholu k vrcholu podle daných pokynů a krychli si pouze ve své mysli představovat.

Než však proběhne vlastní řešení úloh, je nutné řešitele seznámit s dohodnutou terminologií. Při klasickém označení vrcholů krychle $ABCDEFGH$ přední stěnou rozumíme stěnu určenou vrcholy $ABFE$, dolní stěnu reprezentují vrcholy $ABCD$, pravou stěnu vrcholy $BCGF$, směr dozadu je např. určen úsečkou BC apod.



Úlohy typu A:

Chodíme od výchozího bodu podle pokynů a zapisujeme koncový bod cesty.

1. úloha:

Začínáme v E – dozadu – doprava – napříč pravou stěnou – jaký je koncový bod?

2. úloha:

Začínáme v F – napříč pravou stěnou – doleva – dopředu – nahoru – napříč horní stěnou – jaký je koncový bod?

3. úloha:

Začínáme v A – nahoru – napříč přední stěnou – napříč dolní stěnou – doprava – dopředu – napříč pravou stěnou – dolů – jaký je koncový bod?

4. úloha:

Začínám v F – dozadu – doleva napříč stěnou – jaký je koncový bod?

5. úloha:

Začínáme v D – doprava – nahoru napříč stěnou – jaký je koncový bod?

Řešení: $1B$; $2G$; $3C$; $4E$,D; $5F$,H

Úlohy typu B:

V těchto úlohách jsou naopak zadány pokyny pro cestu a zapisujeme výchozí a koncový bod cesty.

1. úloha:

Z těchto tří kroků najdi výchozí a koncový bod: dolů – dozadu – doleva.

2. úloha:

Z těchto tří kroků najdi výchozí a koncový bod: doleva – nahoru – dopředu.

3. úloha:

Z těchto tří kroků najdi výchozí a koncový bod: napříč levou stěnou – nahoru – napříč zadní stěnou.

Řešení: $1F$,D; $2C$,E; $3E$,C

Při odvalování hrací kostky opět „převracíme" ve své mysli klasickou hrací kostku přes její hrany a sledujeme stěnu, na kterou se kostka právě položila. Máme zadánu řadu hodnot, na kterou se má kostka položit, a šipkami zaznamenáváme do plánu směr převracení. Hrací kostku přitom ponecháváme ve stabilní poloze a převracíme ji pouze ve své mysli. Ve všech polohách se kostka odvaluje ze základní polohy, tj. na dolní stěně je 6, na horní stěně 1, na pravé stěně 3, na levé stěně 4, atd.

1. úloha:

6 – 5 – 4 – 1

		6		

Řešení: číslo 6, šipka směrem na sever, dále na západ a nakonec opět na sever.

2. úloha:

6 – 3 – 2 – 1

		6		

Řešení: číslo 6, šipka na východ, na jih, nakonec na východ

Pracovní dílna nabídla úlohy, které mohou obohatit hodiny matematiky a současně rozvíjet u žáků prostorovou představivost. Většinu úloh je možné využít u dětí různých věkových kategorií, dají se různě obměňovat a každý učitel si je snadno může sám připravit.

Literatura

[1] Jirotková, D. Rozvoj prostorové představivosti žáků. *Komenský*, r. 114, č. 5, s. 278–281.

[2] Molnár, J., Perný, J., Stopenová, A. Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

[3] Molnár, J. K příčinám nízké úrovně prostorové představivosti našich žáků. In *3. setkání českých matematiků ze všech typů škol*, JČSMF, Mariánské Lázně, 1989.

[4] Molnár, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. UP, Olomouc, 2004.

[5] Perný, J. Krychle, pohyb a prostorová představivost II. *Učitel matematiky*, 12, 4(52), 2004, s. 221–230.

Učebnice matematiky pro 1. ročník ZŠ podporující tvořivý přístup učitele – prostředí Krokování[1]

Jana Slezáková[2]

Úvod[3]

Vstupní branou aritmetiky je aditivní triáda. Tradiční vyučování se zaměřuje na vnímání triády jako na algoritmický nácvik spojů typu $2 + 3 = 5$, resp. $5 - 3 = 2$, které jsou jenom částmi budování triády typu $(2, 3, 5)$. Tradičně je nácvik spojů, jehož cílem je automatizovat operaci sčítání jednomístných čísel, provázen úlohami, v nichž jsou tyto spoje vkládány do různých kontextů. Velikou variabilitu kontextů je možné různě třídit a klasifikovat, což najdeme u mnoha zahraničních autorů, např. Vergnaud, Bell, Cockburn, Schwarz, ale i našich (Hejný a kol., 1989, s. 65–67, Hejný & Stehlíková, 1999). Ve všech těchto studiích je ale na součet nahlíženo jako na proces, který dvěma číslům přiřadí číslo třetí – jejich součet, resp. jejich rozdíl.

Z našich experimentů vyplývá, že porozumění aritmetice je možné zvýšit větší péčí o budování aditivní triády jako schématu (Hejný, 2008). Toto zvýšení současně vede ke kultivaci aritmetických znalostí a schopností a projevuje se např. v efektivnějším zacházení s čísly v různých vazbách. Myšlenka budování schématu v jiné podobě je přítomna i v geometrii (Jirotková, 2008) a sehrává důležitou roli při tvorbě učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ pro nakladatelství Fraus autorskou trojicí M. Hejný, D. Jirotková a J. Slezáková. Bylo rozpracováno devatenáct podnětných prostředích, např. Součtové trojúhelníky, Sousedé (Hejný, 2008) a Krychlové stavby (Jirotková, 2008).

[1] Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, jana.slezakova@pedf.cuni.cz

[3] Výzkum byl realizován ve spolupráci s kolegy M. Hejným a D. Jirotkovou.

Prostředí Krokování

Původní myšlenka, zaměřená na didaktiku práce se sčítáním a odčítáním včetně závorek, byla objevena a didakticky zpracovávána již ve druhé polovině 80. let pod názvem „Tajná chodba“ a „Panáček“ (Hejný, Nôta, 1990). V posledních dvou letech byla tato prostředí nově rozpracována ve dvou vrstvách: procesuální – tu nazýváme Krokování a konceptuální – tu nazýváme Schody.

Výhodou prostředí Krokování je, že již v 1. ročníku ZŠ může být žákovi otevřeno náročné schéma s operátory změny a pak v dalším vyučování toto schéma může kultivovat nejen oblast operátorů změny, ale i další poznatky (např. absolutní hodnota). Pro ilustraci operátorové situace, ve které vystupují tři čísla jako operátory změny, uvedeme např. úlohu: Do kasičky tatínek Evě přidal 2 koruny a maminka přidala 3 koruny. Kolik korun do kasičky bylo Evě přidáno celkem? Záměrně jsme ukázali operátorovou situaci v jiném sémantickém prostředí než Krokování, abychom mohli zřetelněji poukázat na její náročnost. Žák se velmi často při řešení takovýchto úloh domáhá informace, kolik měla Eva v kasičce korun na začátku. Žák si neuvědomuje, že řešení této úlohy je nezávislé na jeho požadované informaci. Výzkum J. Ruppeldtové (2006) ukazuje, že úlohy tohoto typu dělají problémy žákům i vyššího ročníku. V prostředí Krokování byla nastíněna etapizace jeho zavádění v 1. ročníku s výhledem do dalších ročníků ZŠ. Ta byla odzkoušena v experimentálním vyučování a pak následně dopracována. V (Hejný, 2008) jsou jako ilustrace uvedeny čtyři etapy včetně písemného zápisu krokování, kompletní přehled čtrnácti etap je v (Slezáková, 2007).

Experimenty

Svou zkušenost „prostředí vs. žáci“ doložíme komentovanými experimenty, které se odehrály v roce 2006 a 2007 v pěti prvních ročnících. (Pro jejich rozlišení je označujeme A až E.) První dva experimenty se týkají etapy: Krokování podle povelů.

Experiment 1. Ve třídě A, když se žáci poprvé s prostředím Krokování seznámili, krokoval učitel a žáci v jeho rytmu počítali: Jedna, dvě, tři, ... Pak krokoval jeden, případně dva žáci podle povelu učitele a třída kroky rytmicky počítala. Někteří žáci počítali potichu, nebo vůbec ne. Když byli požádáni o hlasité počítání, ukázalo se, že ještě nemají vytvořen synchron mezi pohybem a slovním doprovodem pohybu.

Komentář 1. Žákům, kteří nemají vytvořen synchron kinestetiky a akustiky, je nutno věnovat zvláštní péči, například naučit je hry, kde je pohyb provázen říkánkou. Učitel může do vyučování zařazovat zaměstnání, kde společná aktivita celé třídy napomáhá budování synchronu u těch žáků, kteří jej nemají ještě vybudovaný.

Experiment 2. Ve třídě C došlo k zajímavému jevu. Učitelka udělala pět kroků a žáci měli říct, kolik kroků udělala. Většina žáků křičela správný výsledek: pět, ale Hana prohlásila: „Paní učitelka udělala šest kroků.“ Na to reagoval Dan, že to není pravda, že to bylo pět kroků. Pokus se opakoval a děti počítaly nahlas. Část třídy skončila své počítání vyřčením pětky, ale část řekla šest, když učitelka při pátém kroku přinožila. Ve třídě vznikl spor. Část žáků hájila tezi „pět kroků“ a část hájila tezi „šest kroků“. Dan řekl: „Ale to, co počítáte jako šest, není krok. Tím už se paní učitelka nedostane dopředu.“ Eva řekla: „No, jo.“ Tento argument žáci přijali a v dalším za korektní považovali pouze krokování s přinožením. Přesto i po půl roce se v této třídě stalo, že dva slabší žáci při větším počtu kroků přinožení započítali jako krok.

Experiment 3. O své zajímavé zkušenosti nám vypravovala učitelka ze třídy D. Řekla, že dvě dívky jí překvapily, když místo normální chůze krokovaly způsobem „jeden po druhém“. Každý jejich krok se skládá ze dvou pohybů, nakročení pravou nohou a přinožení levé. Když nám o tom vyprávěla, dodala, že se jedná o dívky matematicky velice slabé a způsob jejich krokování hodnotila jako méně vyspělý. Tato učitelka nás informovala o dvou zkušenostech, které s krokováním získala její kolegyně ve třídě E. Zde jedna žákyně na povel „Tři kroky, začni, teď!“ udělala pouze tři kroky a zůstala rozkročená. Jiný žák vůbec nedělal kroky, ale skákal snožmo. Tento způsob pohybu učitelka považovala spíše za rošťárnu nebo předvádění se žáka.

Experiment 4. S prostředím Krokování jsme seznámili vysokoškolské studenty – budoucí učitele prvního stupně ZŠ. I zde jedna studentka použila krokování „jeden po druhém“. Učitel dal tento způsob krokování k posouzení studentům a zejména slabší studenti jej podporovali s odůvodněním, že je to jistější než krokování s přinožením.

Komentář 2 ke třem posledním experimentům. Experimentální vyučování ukázalo, že povel „Dva kroky dopředu, jdi!“ je možné realizovat čtyřmi různými způsoby: 1. bez přinožení (figurant končí v rozkročeném postavení), 2. s přinožením jen u posledního kroku (které není počítáno jako krok), 3. jeden po druhém (krokem rozumíme dva pohyby – nakročení a přinožení), 4. skoky (figurant skáče snožmo).

V době, kdy bylo prostředí krokování koncipováno, jsme byli přesvědčeni, že všichni žáci budou používat pouze krokování s přinožením jen u posledního kroku. Jiné způsoby krokování, které se u experimentů objevily, se nám jevily jako nekorektní. Nicméně po dalším prozkoumání situace se ukázalo, že způsob „jeden po druhém“ nejen že má své přednosti, ale je z matematického hlediska korektnější a z didaktického hlediska účinnější než náš původní způsob. Tyto teze blíže rozvedeme.

A. Nedostatky způsobu bez přinožení jsou čtyři: 1. Proces krokování je neukončen. 2. Povel „Dva kroky, pak dva kroky, dopředu, jdi!“ má obě části odlišné. Neboť první dva kroky začínají ze stoje spatného, druhé dva kroky z rozkročení. 3. Po zavedení čísel jako adres není jasné, na které adrese vlastně krokující žák stojí (jedna jeho noha je na adrese n a druhá na $n + 1$). 4. Při krokování bez přinožení vzniká navíc nejasnost, když krokujeme i dozadu, například když krokováním modelujeme vztah $3 - 2 = 1$.

B. Nedostatky způsobu s přinožením: 1. Některé děti přinožení počítají jako krok (viz experiment 2). 2. Ty děti, které přinožení nepočítají jako krok, vidí, že poslední krok se liší od všech předcházejících, protože se skládá ze dvou pohybů. 3. „Model Dva kroky, pak tři kroky, dopředu, jdi!“ není de facto reprezentací rovnosti $2+3=5$, protože pohyb, který reprezentuje součet $2+3$, má dvě přinožení, zatímco pohyb, který reprezentuje výsledek 5, má jen jedno přinožení. 4. V zápisu $1+1+1=3$ jsou tři jedničky, z nichž by každá měla reprezentovat stejný objekt. Při krokování s přinožením je poslední krok jiný než dva kroky předchozí. Proto tento způsob není zcela matematicky korektní.

C. Způsob jeden po druhém je matematicky zcela korektní, protože v obou případech (jak krokování, tak matematiky) jasně platí, že $1+1=2$ nebo $2+3=5$. Skákání je sémanticky pochybné, protože příkaz, který figurant dostane, jasně mluví o krokování.

Experiment 5. Ve třídě B, kde již žáci dokáží krokovat podle povelů, stáli Adam a Eva vedle sebe. Eva odkrokovala povel „Tři kroky, začni, teď!“. Adam měl říci povel a realizovat jej, aby opět stál vedle Evy. Adam zopakoval stejný povel, ale tři kroky, které udělal, byly tak krátké, že se k Evě nedostal. Druhý den ve stejné situaci Adam na stejnou výzvu řekl: „Dva kroky, začni, teď!“ a udělal dva tak dlouhé kroky, že se dostal do pozice vedle Evy.

Komentář 5. Zvláštní počínání Adama může být způsobeno tím, že hoch nechápe pravidla hry, nebo i tím že záměrně chce hru trochu narušit. Popsaný problém je řešen etapou: Normování kroků (značky na podlaze stejně od sebe vzdálené).

Dva vybrané didaktické aspekty prostředí Krokování

A. **Kognitivní specifika operátorů.** Číslo, které je jedním z prvních objektů tvořícího se světa matematiky dítěte předškolního a raně školního věku, je budováno v první etapě v úzké vazbě na životní zkušenost žáka. Slovo tři má pro dítě smysl jenom tenkrát, když je sémanticky ukotveno: tři jablka, třetí židle, o tři bonbóny více. Tyto tři základní typy sémantického kotvení čísla nazýváme ve shodě s (Hejný, Stehlíková, 1999) stav (S), adresa (A) a operátor (O). Školská matematika, zejména v prvním ročníku, zdůrazňuje číslo jako stav. Číslo jako adresa nebo operátor se vyskytuje ojediněle, protože toto ukotvení je nahlíženo jako příliš náročné. V našich experimentech se ukázalo, že jak adresa, tak operátor je šestiletému dítěti dobře dostupná, jestliže tento typ čísla zavádíme ve shodě ze životní zkušeností dítěte. Prostředí, které je vhodné pro zavádění čísla jako adresy i operátoru, nazýváme Schody. Stručně řečeno fiktivní schodiště reprezentované číselnou osou položenou na podlahu ve třídě pracuje s číslem jako adresou (4. schod = schod číslo 4) a umožňuje reprezentaci obou typů operátoru: operátor porovnání – např. Mirek stojí o 3 shody výše než Eliška, operátor změny – Jana vystoupila o 3 schody.

B. **Krok jako nositel operátoru změny.** Krokování jako pohyb je běžnou součástí života dítěte. Krokování v rytmu písně nebo říkánky je něco, s čím se většina šestiletých dětí postupně seznamuje, a tak dochází k postupné synchronizaci kinestetické a akustické dimenze krokování. Pro dítě, u kterého k synchronu pohybu a zvuku dojde, se tři kroky provázané říkánkou Jedna, dvě, tři stávají součástí budovaného schématu pojmu tři. Na rozdíl od modelu tři jablka, který je 1. konceptuální a 2. permanentní, je model tři kroky: 1. procesuální a 2. pomíjivý. Tři jablka nakreslená na obrázku umožňují opakované vnímání, ale tři kroky po ukončení akce zanikají. Jsou to zřejmě právě tyto dvě charakteristiky operátoru změny, které později nepřipraveným žákům působí veliké (až nepřekonatelné) potíže při řešení úloh s operátorem změny. Jsme přesvědčeni, že žáci, kteří se s operátory změny seznámí již v prvních ročnících základní školy, budou lépe připraveni na řešení úloh s operátory ve vyšších ročnících. Didaktickou opodstatněnost těchto úloh potvrzuje i Vygotského teze, že žák je silně motivován těmi aktivitami, které spadají do jeho zóny nejbližšího vývoje (Vygotskij, 1976). Zkušenosti naše i spolupracujících učitelů ukazují, že prostředí Krokování má na žáky prvního a druhého ročníku silný motivační vliv.

Poznámka: Miroslava Lebedová (ZŠ Jakutská, Praha 10) se s prostředím Krokování seznámila na jednom semináři pro učitele a následující den nám napsala: „Dnes jsem s dětmi (2. ročník) zkusila krokovat a byly přímo nadšené. Teď odpoledne jsem na lino nalepila notičky – vzdálenost jednotlivých kroků – a už se těším na zítra, jak budeme pokračovat. Již dnes se děti mohly přetrhnout, abych je vyvolala opět zítra, dělaly si pořadník. Krokování je bezva nápad.“

Závěr

Výhodou prostředí Krokování je, že nabízí učiteli velký prostor pro tvorbu vlastních úloh (též kaskádovitých) nejen pro žáky 1. ročníku ZŠ, ale i pro žáky starší (v tomto prostředí lze řešit např. jednoduché rovnice, ale i soustavy rovnic, vektorové rovnice, pravděpodobnostní úlohy), což nám prostor článku neumožnil více ilustrovat.

Poznámka: Autorka bude zavázaná kolegům, kteří se již buď touto nebo podobnou problematikou zabývají nebo chystají zabývat, za jejich zkušenosti, které by poskytli.

Literatura

[1] HEJNÝ, M. aj. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN.

[2] HEJNÝ, M, NÔTA, S. (1990). Metodika záporných čísel na ZŠ. *Matematické Obzory*, 35, 43–54.

[3] HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: PedF UK.

[4] HEJNÝ, M. (2008). Proč žáci málo rozumí podstatě sčítání a odčítání a jaké to má důsledky. (zde ve sborníku)

[5] JIROTKOVÁ, D. (2008). Rozvíjení prostorové představivosti v nových učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ. (zde ve sborníku)

[6] RUPPELDTOVÁ, J. (2006). Interpretačná dominanta riešenia slovnej úlohy. In M. Uhlířová (Ed.) *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis*, Facultas Paedagogica Matematica V, Matematika 2 (212–217). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

[7] VYGOTSKIJ, L.S. (1971). *Myšlení a řeč*. Praha, SPN

[8] SLEZÁKOVÁ, J. (2007). Prostředí Krokování. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, M. Tichá, (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice (v tisku)

VIDEOZÁZNAMY VE VZDĚLÁVÁNÍ (BUDOUCÍCH) UČITELŮ MATEMATIKY[1]

NAĎA STEHLÍKOVÁ[2]

ÚVOD

Stejně jako se každý učitel zamýšlí nad tím, jak nejlépe učit různé předměty, i my se zamýšlíme, jak nejlépe připravovat budoucí učitele. V tomto článku se budeme věnovat vyučování didaktice matematiky. Je to předmět, který je více než jiné čistě matematické předměty ovlivněn osobností učitele, jeho zkušenostmi a jeho přesvědčením.

Na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy i v Praze (a jistě i na jiných fakultách připravujících učitele) řešíme problém, jak „nejlépe" učit didaktiku matematiky, resp. jak nejlépe učit budoucí učitele matematiky učit. Ponechme stranou teď otázku, co to vlastně znamená učit dobře. Spíše jde o to, jak co nejlépe připravit studenty pro potřeby jejich budoucí praxe. Je jisté, že fakulta nemůže vychovat již hotové učitele, ani nemůže připravit své studenty na všechny situace, s nimiž se v praxi setkají.

V minulém školním roce jedna ze studentek zpracovala seminární práci, v níž shrnula výsledky dotazníku týkajícího se očekávání, která studenti mají u předmětu didaktika matematiky. Ukázalo se, že tato očekávání jsou rozmanitá. Většinou však byla, z mého pohledu nerealistická. Studenti by si přáli, aby se „naučili učit", „poznali, jak správně reagovat na různá chování žáků", „zjistili, jak přesně vyučovat jednotlivá témata" apod. To samozřejmě není možné. Domnívám se, že studium na fakultě může započít celý proces „stávání se učitelem", který pokračuje dále v praxi a vlastně nikdy nekončí. Úkolem předmětu didaktika matematiky v tomto procesu je seznámit studenty s pojmotvorným procesem jednotlivých matematických pojmů ze základní a střední školy, s výukovými metodami vhodnými pro matematiku a zejména vést studenty k reflexi vlastní práce i práce ostatních učitelů. Tato reflexe jim umožní hluboce promýšlet celý výukový proces, poznávat lépe své žáky a jejich způsoby myšlení a poznávání, a tak, snad, neustále zlepšovat svou práci učitele.

---

[1] Tento příspěvek vznikl s podporou grantu MSM 0021620862.

[2] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

V poslední době řešíme otázku, jakým způsobem lze v rámci předmětu didaktika matematiky schopnost reflexe rozvíjet. Zkušenosti ukazují, že nestačí studentům předložit pedagogický dokument či učebnici. Podle mého názoru jsou nejefektivnější dva způsoby.

První z nich spočívá v *analýzách videozáznamů z výuky*. Analýza videí se v přípravě učitelů (i v dalším vzdělávání učitelů) v poslední době používá čím dál více (např. Moeller, 2005, Beck, King, Marshall, 2002, Santagata, Zannoni, Stigler, 2007). Záznam vyučování je poměrně realistický, i když samozřejmě nemůže zaznamenat výukovou hodinu v celé její komplexnosti. Na rozdíl od hospitací je možné se k zajímavému úseku hodiny opakovaně vracet a analyzovat ho z různých hledisek. No rozdíl od písemného popisu části výuky nechává videozáznam interpretaci na každém jedinci. Pokud zaznamenáváme hodinu písemně, už tím, na co se zaměřujeme a co vynecháváme, provádíme určitou interpretaci. Video je tedy autentičtější.[3]

Druhý způsob, časově náročnější, spočívá v tom, že skupina studentů společně připraví hodinu, kterou skutečně odučí.[4] Nejde však o vyučování v rámci pedagogické praxe, ale o jakýsi doplněk k běžné výuce didaktiky matematiky. Tedy jde o jednorázovou výuku, zato však pečlivě připravenou a následně hluboce reflektovanou. Nazvěme takovouto výuku *experimentální*.

Experimentální výuka studentů – organizace

Experimentální výuku studentů, budoucích učitelů matematiky, jsem zorganizovala v posledních dvou letech u celkem 9 studentů – dobrovolníků. Její příprava, realizace i následná reflexe byla organizována ve volném čase studentů, proto se přihlásili jen studenti skutečně motivovaní k učitelské práci. Jejich hlavní motivací bylo vyzkoušet si výuku před tím, než půjdou na výukovou praxi, a zejména získat podrobnou zpětnou vazbu od své vyučující i od ostatních studentů.[5]

Ve čtyřech případech se na přípravě podílela vždy skupina studentů, v pěti případech si výuku připravil vždy student, který následně učil. Téma hodiny i věk žáků byl dán možnostmi našich spolupracujících učitelů, kteří nám výuku ve své škole umožnili.[6] Přípravu si studenti udělali s pomocí učebnic a informací o žácích, které získali od učitele.

Vlastní hodinu vedl vždy jen jeden student. Ve třídě byli přítomni někteří další studenti, učitel a většinou i já. Celá hodina se nahrávala na video.[7] Kamera byla umístěna vpravo nebo vlevo vzadu ve třídě na stativu a zabírala pokud možno celou třídu. Kamera

---

[3] O některých technikách využitelných pro rozbory videonahrávek pojednává článek Stehlíková (2006).

[4] Určitou alternativou je tzv. mikrovyučování, v níž student předvede krátkou vyučovací etudu před svými spolužáky (např. Mazáčová, 2005/06.) Jedná se o časově úspornější alternativu, která umožní, aby se vystřídali všichni studenti, ovšem na druhé straně jde o neautentickou situaci. Žáky hrají ostatní studenti a mikrovyučování probíhá ve vysokoškolské učebně.

[5] Tuto zpětnou vazbu většinou u běžné výukové praxe tak podrobně nezískají (snad s výjimkou budoucích učitelů 1. stupně ZŠ a jejich souvislé výukové praxe).

[6] Šlo většinou o kol. Miroslava Hricze, nejdříve ze školy U Santošky a následně ZŠ Táborská. Třetí škola, na níž jsme experimentální výuku organizovali, byla ZŠ Campanus.

[7] K tomu jsme měli souhlas vedení školy a rodičů dětí.

se nepohybovala po třídě, obsluhující jen občas přiblížil nebo oddálil obraz, aby bylo vidět, co je napsáno na tabuli nebo co dělají žáci.[8] Naše počáteční obavy, že kamera a přítomnost několika dalších lidí na hodině výrazně naruší její chod, se nenaplnily. Žáci byli předem s touto skutečností seznámeni a navíc šlo o školy, v nichž jsou žáci zvyklí na návštěvy v hodinách.

Reflexe experimentální výuky a její výsledky

Okamžitě po skončení výuky byli všichni přítomní vyzváni, aby sepsali své první dojmy z hodiny. Tato první reflexe hodiny (v případě vyučujícího studenta sebereflexe) nebyla nijak strukturována. Většinou jsem si ji od studentů ihned vzala, aby ji nemohli později doplnit. Zajímaly mě jejich první ničím nezkreslené dojmy.

Poté bylo nutno okamžitě zpracovat videozáznam tak, aby ho každý účastník hodiny dostal na CD nebo DVD co nejdříve. Videozáznam se nijak nestříhal ani jinak neupravoval. Každý účastník hodiny byl vyzván, aby si hodinu prohlédl ještě jednou na počítači a v klidu napsal další reflexi. Před tím neprobíhala žádná společná diskuse, aby si každý mohl udělat vlastní úsudek. Pokyny k této druhé reflexi byly vždy poměrně vágní ve smyslu „napište cokoli, co vás v hodině zaujme, ať už negativně nebo pozitivně, co byste udělali jinak apod.“.[9]

Následná reflexe byla organizována vždy ve skupině studentů, kteří byli hodině přítomni. Je nutné zdůraznit, že je nezbytné, aby mezi studenty navzájem i s vyučujícím existovaly dobré vztahy. Při reflexi bylo nutno vytvořit přátelskou a otevřenou atmosféru, v níž jsou studenti schopni přijmout kritiku své práce i otevřeně kritizovat ostatní včetně vyučující.

Společná reflexe měla zhruba tuto podobu:[10] Vyučující student shrnul své pocity z výuky na základě své písemné druhé reflexe. Pak se k hodině vyjadřovali i ostatní studenti a nakonec vyučující, tedy já. Každý student mohl okomentovat aspekty hodiny podle svého výběru. Já jsem se snažila zdržet se hodnocení a spíše jsem vedla studenty otázkami ke zdůvodňování jejich stanovisek.

Pokud to bylo vhodné, ukázala se při reflexi část hodiny, která se diskutovala, přímo na videozáznamu. Nikdy se však nepřehrávala celá hodina. Nakonec vyučující student dostal písemné reflexe od ostatních studentů i vyučující (tedy ode mě). Moje reflexe hodiny byla vždy podrobná, prakticky ke každé minutě či části hodiny, kdy se něco dělo. Obsahovala jak kritické postřehy, tak ocenění a nakonec byly shrnuty určité tendence, které se u výuky studenta v této hodině objevily.[11] Samozřejmě jsem tuto příležitost

[8] Videozáznam na jednu statickou kameru se ukázal jako dostatečný. Ne všechny žáky sice bylo na videu slyšet, ale učitele a žáka u tabule vždy.

[9] Reflexe mohou být i strukturované. Studenti mohou dostat určité otázky nebo úkol analyzovat hodinu z nějakého hlediska.

[10] Celá reflexe byla se souhlasem studentů nahrávána.

[11] Např. „malá aktivizace žáků; řadu otázek, které řeší F. sám, by zvládli žáci (hodně se „nadře“ a dělá práci za ně); malá trpělivost v čekání na odpověď; pěkná úprav na tabuli, dobře artikuluje, je ho dobře slyšet, drobné chyby v češtině; z matematického hlediska v pořádku.“.

využila také k tomu, abych studenty upozornila na určité didakticko matematické jevy, které se mi jeví jako důležité. Zde je např. jeden takový zápis mé reflexe: „J: *Samozřejmě, že všechny cesty, které vedou ke správnému výsledku, jsou možné, ale protože dneska máme dělení desetinných čísel desetinným číslem, tak si ukážeme ještě, jak se to MĚLO počítat*. Co je toto za zdůvodnění? Proč se to MÁ takto počítat? Kdo to rozhodl? Jak mají žáci poznat, který způsob je ten nejlepší, za který budou oceněni?“ Na základě této části hodiny jsme pak diskutovali o řešitelských strategiích žáků. Podobně úvahu o tom, že se má klást důraz na matematické zdůvodňování, je možné provést u úryvku z výuky, k němuž jsem si napsala: „J. se ptá *Jak jsi na to přišel?*, což žák interpretuje tak, že to má špatně. To je častá reakce. Žáci si musí zvykat, že mají zdůvodňovat i správná řešení. J. správně reaguje *Já nevím, já to prostě nevidím*.“

Data získaná z experimentální výuky studentů (včetně následných reflexí) ještě nebyla podrobně analyzována. Uvedu tedy jen některé prvotní postřehy.

Okamžité reflexe náslechu

Všichni vyučující studenti měli okamžitě po výuce poměrně nepříjemný pocit a byli k sobě přehnaně kritičtí. Zdůrazňovali, že nestihli, co si připravili, a že to zřejmě bylo zmatené. Naopak přihlížející studenti měli tendenci vyzdvihovat spíše kladné stránky hodiny.

Těžiště okamžité reflexe bylo zpravidla v obecně pedagogických aspektech (vztah k žákům, výslovnost, hlasitost řeči, komunikace se žáky, pohyb po třídě, dynamičnost hodiny apod.). Matematická stránka byla jen zřídka zmíněna.

Studenti si (celkem pochopitelně) všímali spíše toho, jak byla hodina vedena jejich kolegou, než toho, co dělali žáci.

Obecně byly tyto reflexe spíše povrchní a nezmiňovaly žádné určité okamžiky z hodiny podrobněji.

Následná reflexe videozáznamu výuky a její porovnání s okamžitou reflexí po hodině

Následné písemné reflexe studentů měly rozdílnou úroveň. Některé byly velmi povrchní a bylo na nich vidět, že se jejich autor nad hodinou příliš nezamýšlel a jen popisoval, co se dělo. Na druhou stranu byly i reflexe, které se snažily o interpretaci toho, co hodina obsahovala, případně navrhovaly alternativy.

Studenti většinou zpočátku vyjadřovali názor, že stačí, když hodinu vidí ve skutečnosti a že se jejich názor přece nemůže lišit od toho, který si vytvoří na základě videozáznamu. To se ukázalo bez výjimky jako špatný předpoklad. Studenti (i já) byli překvapeni, jakých nových věcí si na videozáznamu všimli či jak jinak hodnotili situaci, když ji viděli přímo v hodině a když ji viděli na videozáznamu.

Téměř všichni studenti se v následné reflexi, na rozdíl od té okamžité, vyjadřovali i k matematické stránce, tedy zda byly dobře vybrány úlohy, zda byly poznatky dobře vysvětleny apod. Ke svým postřehům zpravidla psali i své zdůvodnění.

Téměř všichni vyučující studenti měli tendenci hodně práce udělat za žáky. Při řešení úloh je vedli krok po kroku, což si při vlastní výuce zpravidla neuvědomili. Někdy bylo nutno během společné reflexe projít určitou část videozáznamu opakovaně, aby k tomu došlo. V několika případech vyučující student doslova vnutil žákovi u tabule svou strategii, aniž by si toho byl vědom. Teprve při prohlížení videozáznamu si z reakcí žáka uvědomil, že žák tuto strategii nepochopil a že vlastně reaguje jen na dílčí otázky učitele.

Všichni studenti měli tendence formulovat žákovy myšlenky místo něho. Často jim stačilo „klíčové slovo“ od žáka, aby sami formulovali celou strategii, o níž se domnívali, že ji žák chce použít. Zde je role videozáznamu opět nezastupitelná. Těchto případů si učitel často není vědom (sama nejsem výjimkou) a bez záznamu není možné jej o tom přesvědčit. Například při zavádění operací se zápornými čísly se vyučující student zeptal poté, co zopakoval porovnávání zlomků, jak se budou porovnávat záporná čísla. Žák odpověděl „Úplně stejně.“ a student sám zformuloval celý postup.

Při hodině si vyučující studenti často nevšimli, že mají tendence urychlovat práci žáků. Např. studentka si teprve na videu uvědomila to, že při své výuce úprav mocnin čísel (sčítání mocnin se stejným základem) se opakovaně snažila vést žáky k tomu, aby vynechávali některé kroky, které podle ní byly zbytečné („My už to nebudeme v příštích příkladech takto rozepisovat, vytýkat, ale rovnou budeme sčítat.“ „Příště už budeme sčítat rovnou ty koeficienty.“, „Zkus to rovnou zpaměti.“). Pro žáky však toto bylo příliš rychlé.

Téměř všichni vyučující studenti uváděli, že teprve na videozáznamu si všimli, že např. žáci ve třídě nebyli zaměstnáni, protože pracovali většinou jen se žáky u tabule, nebo že pronášeli pokyny či vysvětlení do doby, kdy měli žáci pracovat sami, a tím je vlastně rušili.

Studenti (až na výjimky) při své výuce používali víceméně jen jednu formu práce (jeden žák u tabule, s nímž pracovali, a ostatní v lavicích) a neuvědomili si, že to začíná být pro žáky nudné a že by měli formu práce změnit. Teprve při pohledu na videozáznam byli schopni vidět hodinu také z pohledu žáka a většinou se vyjadřovali v tom smyslu, že mělo dojít k nějaké změně.

Samozřejmě si na videozáznamu studenti všímali svých nepřesných či nespisovných vyjádření, výplňkových slov apod., o nichž se v okamžité reflexi nezmiňovali.

Závěr

Závěrem je nutné zdůraznit, že cílem reflexí není ukázat, co udělal student „dobře“ či „špatně“, ale spíše využít konkrétní případy ke zvažování alternativ, tedy klást otázky typu „jak by tady mohla učitelka reagovat jinak a proč?“, „jaká měla tato reakce důsledky a jaké by asi měly důsledky jiné reakce?“, „Jaký jiný postup zde mohl být zvolen a jaké by asi měl důsledky?“. Učitel se při vlastní výuce musí rozhodovat v okamžiku, během krátké chvilky, a tedy nemůže zvažovat příliš alternativ. Rozhoduje se však na základě své zkušenosti, kterou získal v podobných situacích, a právě rozbor videozáznamů a okamžiků z vyučování může takové zkušenosti významně obohatit (a v případě budoucích učitelů matematiky neexistující zkušenosti doplnit).

Výhody využití videozáznamu ve výuce budoucích učitelů matematiky byly naznačeny nahoře. Samozřejmě lze najít i nevýhody. Tou největší je časová náročnost celého procesu, která prakticky neumožňuje jej provést v rámci běžné výuky didaktiky matematiky. Proto bude experimentální výuka studentů v příštím semestru organizována opět pro dobrovolníky v rámci jejich výukové praxe ve 4. ročníku.

Nutnou podmínkou použití videí je citlivé vedení následné diskuse. Nesmíme vytvořit dojem, že hodnotíme studenta jako budoucího učitele. Konečně, máme také k dispozici jedinou vyučovací hodinu a navíc ve třídě, jejíž žáky student nezná. Jde spíše o to, poskytnout studentovi konstruktivní zpětnou vazbu, jaké jsou tendence jeho tvořícího se vyučovacího stylu, na co si má dávat pozor, co by měl naopak posílit apod.

Analýzy vyučovacích hodin jak vlastních, tak hodin jiných učitelů přináší učiteli i budoucímu učiteli inspiraci pro jeho vlastní práci, ale zejména se jimi učí *reflexi vyučování a sebereflexi*, která by měla být nedílnou součástí každodenní praxe (např. Tichá, Hošpesová, 2005).

LITERATURA

[1] Beck, R. J., King, A., Marshall, S. K. Effects of videocase construction on preservice teachers' observations of teaching. *The Journal of Experimental Education*, 2002, 70(4), pp. 345–361.

[2] Mazáčová, N. Činnostní příprava studentů učitelství. *Učitelské listy 2005/2006,* č. 8, s. 4–5.

[3] Moeller, B. a kol. *Designing digital video case resources for mathematics teacher education*. March 2005, online: `http://www2.edc.org/cct/`

[4] Santagata, R., Zannoni, C., Stigler, J. W. The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2007, 10(2), pp. 123–140.

[5] Stehlíková, N. Využití videozáznamů v dalším vzdělávání učitelů matematiky. In Lávička, M., Bastl, B., Ausbergerová, M. *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. 1. vyd. Plzeň : Vydavatelský servis, 2006. s. 265–270.

[6] Stigler, J.W.; Hiebert, J. *Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom.* Free Press, 1999.

[7] Tichá, M., Hošpesová, A. Kolektivní reflexe, cesta ke zdokonalování kompetencí učitele. In *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005*. Bratislava: JSMF, EXAM, 2005.

SHODNÁ ZOBRAZENÍ POMOCÍ CABRI[1]

JIŘÍ VANÍČEK[2]

Hledání nových metod a organizace výuky matematiky, aby byla zaměřena na klíčové kompetence, otevírá nové možnosti pohledu na oblast počítačem podporované výuky v českých školách. V současné době je celá řada učitelů absolventy modulu školení „ICT ve výuce matematiky" v rámci SIPVZ či jiných odborných kurzů matematického software. Ti jsou seznámeni s možnostmi využití informačních technologií při výuce a potřebují vidět ukázkově zpracovanou výuku podporovanou počítačem. Stačí jim vidět alespoň některé zpracované celé tématické celky, aby si mohli udělat konkrétnější představu o vedení a organizaci výuky a aby byli schopni, zpočátku na základě analogie, po nabytí vlastních zkušeností tvořivým způsobem vlastní výuku připravovat a později i plánovat a promítnout do tvorby svých nebo školních vzdělávacích programů.

V rámci projektu ESF „Podíl učitele matematiky 2. stupně ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu" byly pro školicí modul Cabri pro mírně pokročilé vytvořeny materiály, které celistvým způsobem předkládají představu, jak lze celý konkrétní tématický celek učit buď za doplňující podpory počítače, nebo i z podstatné části založené na práci s počítačem. Takto byla zpracována a frekventantům kurzu jsou poskytována dvě témata: „Konstrukční úlohy" a „Shodnosti a osová souměrnost". Právě druhé zmiňované téma bylo předmětem pracovní dílny v rámci konference. Tento článek seznamuje s hlavními myšlenkami a obsahovou náplní pracovní dílny.

Následující výběr úloh je řazen chronologicky tak, jak by bylo možno vést výuku tématického celku. V textu jsou zmiňovány pouze ty úlohy, které představují určitou metodu nebo přístup, který není tradiční nebo bez počítače obtížně nebo zcela neřešitelný. Jinými slovy, nejsou zde uvedeny úlohy, které učitele matematiky po seznámení s Cabri automaticky napadnou, např. úlohy využívající Cabri jako pomůcku pro rychlé a přesné rýsování (místo rýsování na papír), nebo jako učitelovu demonstrační pomůcku (s připravenou hotovou konstrukcí, sloužící k výkladu nebo při dokazování některého tvrzení,

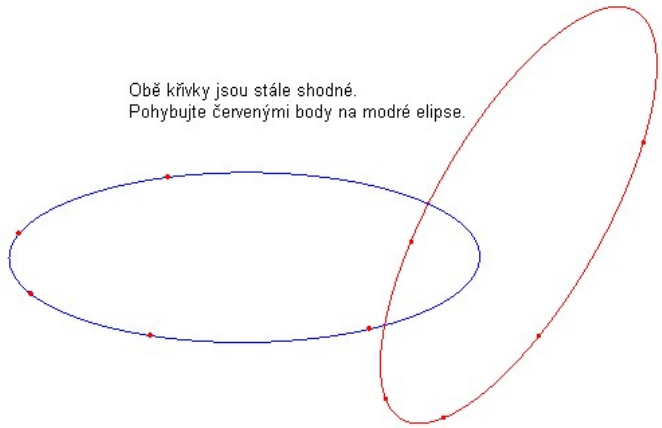
[1]Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2]Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta vanicek@pf.jcu.cz

případně s konstrukcí nehotovou, jejíž část učitel předvede před třídou na počítači místo rýsování na tabuli).

Shodná a neshodná zobrazení

Úloha: Vzor a obraz ve shodném zobrazení

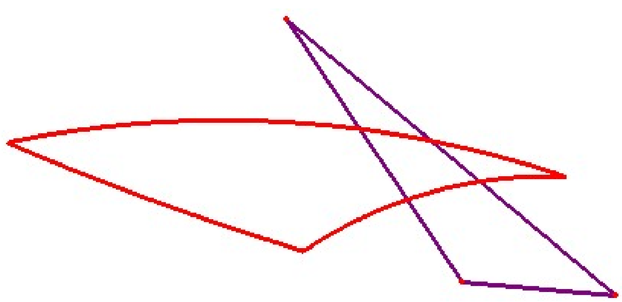


Obr. 1

Na obrázku jsou zkonstruovány dvě elipsy, jedna je obrazem druhé. Vzor lze libovolně měnit (přemísťovat, měnit tvar tažením za definiční body křivky, třeba i změnit na hyperbolu). Žák vidí, že ač se tvar křivky mění sebebizarněji, obraz je vždy shodný se vzorem.

Cílem úlohy je ukázat žákům, že i poměrně složité křivky, jako jsou kuželosečky, mohou být shodné, i když nejsou „rovnoběžné“. Dalším cílem je využít manipulace s hotovou konstrukcí k získání přesnější představy o pojmu shodnost. Úlohu lze zakončit experimentálním hledáním tvaru vzoru tak, aby obě křivky splynuly. Vzhledem k tomu, že se jedná o otočení o 60°, tvar vzoru bude muset být kružnicí. Cílem úlohy není určovat druh použitého zobrazení.

Neshodné zobrazení

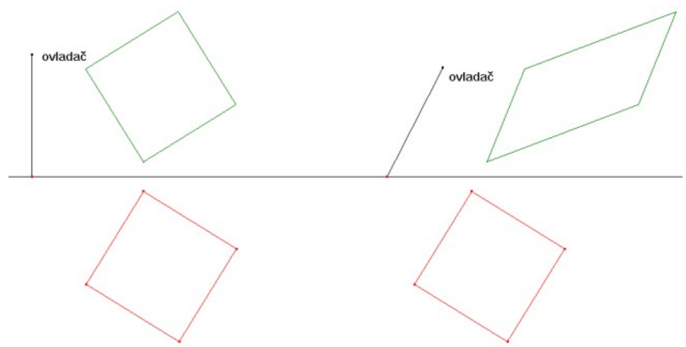


Obr. 2: Manipulace se vzorem a obrazem v neshodném zobrazení

Aby žák lépe chápal pojem shodné zobrazení, je třeba mu hned zpočátku ukázat nějakou „rozumně se chovající“ neshodnost. Dle našeho názoru nestačí ukázat např. podobnost, ale opravdu naprosto odlišné tvary vzoru a obrazu, aby bylo evidentní, že nejde o jeden a tentýž obrazec, jen přemístěný nebo přiblížený či oddálený. Žák dostává bezprostřední zkušenost, že zobrazení je vztah mezi dvěma objekty.

Žák si při manipulaci s trojúhelníkem všimne, že jeho obraz má také tři „vrcholy“ a tři „strany“ a může objevit topologické souvislosti. Může zjistit, že pohybuje-li vrcholem vzoru po jedné „straně“ obrazu, vrchol obrazu se bude pohybovat po straně trojúhelníka, žák tedy může vidět jakousi provázanost vzoru a obrazu. Přitom je zbytečné žákovi sdělovat jakékoliv informace o povaze tohoto konkrétního zobrazení.

Shodnost jako zvláštní případ neshodnosti



Obr. 3: Ovladač dokáže změnit směr osy a „zkosit“ původní osovou souměrnost

Na obrázku 3 je, zdá se, konstrukce obrazu čtverce v osové souměrnosti. Je možno manipulovat čtvercem - vzorem i osou, obraz je vždy shodný se vzorem. Ovšem potáhnutím za ovladač lze doposud kolmý směr osy k hlavnímu směru zobrazení změnit, takže osová souměrnost přechází v osovou afinitu. Žák se může pokusit vrátit ovladač do takové polohy, aby neshodnost opět přešla ve shodnost, a přemístit vzor tak, aby mohl vizuálně zkontrolovat, zda vzor a obraz jsou totožné či nikoliv.

Úloha ukazuje blízkost pojmu shodné a neshodné zobrazení a žákovi umožňuje v intuitivní podobě nahlédnout hranici, která tyto pojmy od sebe odděluje. Podobných úloh lze nalézt více i bez počítače (např. přechod zobrazení ve válcovém zrcadle v rovinnou souměrnost „rozbalením“ válce do roviny nebo experimenty se zobrazováním v mýdlové bláně v drátěném oku a na bublině), ovšem v reálných příkladech bývá velice obtížné se pokusem s neshodností limitně blížit ke shodnému zobrazení.

Osová souměrnost

Ověření shodnosti měřením

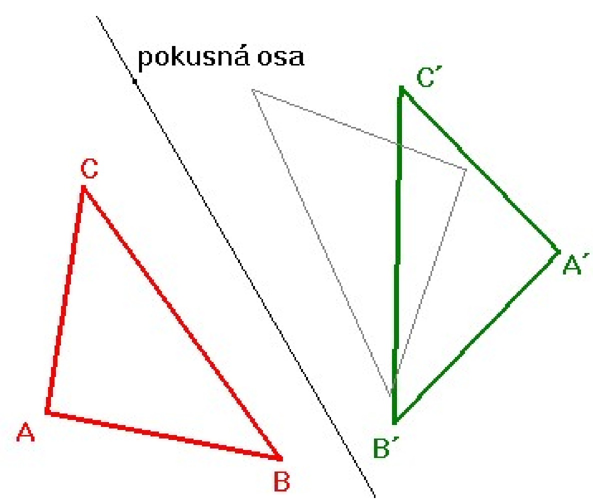
Praktické úlohy s ověřováním geometrických poznatků měřením mívají velké obtíže v některých příkladech hraničící až s neregulérností použitého postupu. Např. ověření součtu vnitřních úhlů trojúhelníka pomocí úhloměru je složeno ze tří měření, každé s chybou 0,5°, tedy celková chyba měření je 1,5°. Takové aktivity vnímavého žáka těžko přesvědčí. Počítač umí měřit přesně, ověření poznatků je průkazné, s konstrukcí je možno manipulovat, a tím potvrdit tvrzení pro mnohem více poloh objektů. Žák může nejen měřit a ověřovat, ale také objevovat pro něho nové postupy (konstrukce obrazu v osové souměrnosti mu nemusí být sdělena, může ji z hotové konstrukce vypozorovat a měřením ověřit).

Zdá se, že je nevýhodou, když Cabri umí sestrojit obraz v souměrnosti „kliknutím na tlačítko". Vypadá to, že žák pak nepotřebuje a tudíž se nenaučí algoritmus k sestrojení obrazu. Při vhodné výuce je ale naopak možné nechat žáky tento algoritmus objevovat a Cabri využít jako prostředí pro ověřování žákovských hypotéz. Mění se pak žádaným směrem cíle výuky matematiky obecně od učení se zvládnout algoritmus k objevování vztahů mezi objekty a k rozvíjení příslušných mentálních schopností jedince.

HLEDÁNÍ OSY SOUMĚRNOSTI

V hotové konstrukci jsou dány dva trojúhelníky, vzor a obraz v osové souměrnosti se skrytou osou, cílem je nalézt tuto osu. Protože obrázek je dynamický, je možno najít osu „překřížením" vzoru a obrazu a následně diskutovat o obecnosti takové konstrukce osy jako spojnice samodružných bodů – průsečíků vzoru a obrazu.

Úloha má větší účinek tehdy, když se žáci dosud neučili konstruovat obraz v osové souměrnosti a jsou stále ve stadiu průzkumu. Někteří z nich pak použijí experiment, tedy metodu, kterou učitel v této úloze nepoužije nikdy: sestrojí si novou libovolnou osu, sestrojí obraz v osové souměrnosti a následně manipuluje s osou do polohy, kdy nový a starý obraz splynou.



Obr. 4: Určení osy souměrnosti dvou trojúhelníků pokusem

POČET OS SOUMĚRNOSTI

Experimentální hledání počtu os souměrnosti u pravidelných mnohoúhelníků lze použít především u mladších žáků, kteří neznají vlastnosti osové souměrnosti. Otáčením osy se žák snaží ztotožnit vzor s obrazem. Podobným postupem může být řešena úloha, jak se bude pohybovat obraz, jestliže se osa otočí např. o 180°. Bez zkušeností a bez dynamického modelu je tato úloha obtížná i pro vysokoškoláka.

Vícenásobná osová souměrnost

Jednoduchá manipulace se vzorem (třeba pouhé táhnutí vzoru po přímce) ukáže chování obrazů podle různých os. Úloha může vyústit v úkol vytvořit další obrazy za podmínky, že je zakázáno rýsovat další osy.

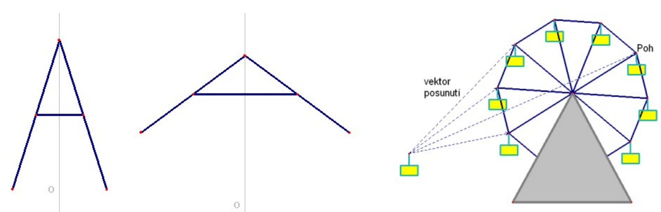
Konstrukce obrazu s omezenými nástroji

Cabri umožňuje omezit nabídky konstrukčních nástrojů, takže je možno např. odstranit nástroj Osová souměrnost. Při takto omezené nabídce (nebo ještě více omezené, kdy Cabri neobsahuje ani nástroj Kolmice) se úloha sestrojení obrazu provádí stejným (nebo i složitějším) postupem jako na papíře.

Projekty

Souměrná písmena

Zadání problémové úlohy zní: sestrojte pružné písmeno A (T, K, H, M apod.) tak, aby jej bylo možno různě natahovat a přitom zůstalo souměrné (viz obrázek).



Obr. 5: Projekty Souměrná písmena, Pohyblivý obrázek.

Pohyblivý obrázek. Použití shodného zobrazení jako konstrukčního kroku

Pro žáky pošilhávající po výpočetní technice mohou projekty založené na dynamických zákonitostech geometrické konstrukce být odrazovým můstkem k využití počítače nejen konzumním způsobem a k propojení matematiky s počítačovými aktivitami a praxí. Sestrojit ruské kolo na obrázku jako otáčivou kružnici není v Cabri nijak obtížné. Problematičtější je zajistit, aby gondoly kola visely stále ve svislém směru. Namísto opakovaných konstrukcí lze použít jednoduchý princip: gondoly sestrojit jako obrazy statické gondoly v posunutí. Vektory posunutí jsou přitom proměnlivé, jejich počáteční body jsou umístěny na pevné gondole a koncové body na odpovídajících místech kola.

Princip použití zobrazení jako konstrukčního kroku je bez počítače nerealizovatelný, protože při standardní konstrukci se musí nejprve rýsovat jednotlivé body a z jejich obrazů teprve obraz objektu vytvořit (a také řada počítačových aplikací nevytvoří obraz objektu v jednom kroku; v tom je Cabri nepřekonána).

Literatura

[1] Leischner, P. Konstrukční úlohy. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

[2] Vaníček, J. Modelování jednoduchých mechanismů v prostředí dynamické geometrie. In *Sborník 10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: JČMF, Vydavatelský servis, 2006. s. 301–306.

[3] Vaníček, J. Shodnost, osová a středová souměrnost. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

Jak tvořit úlohy[1]

Marta Volfová[2]

Úlohy na procvičování algoritmů

Tyto úlohy učitelé běžně při svých hodinách vytvářejí. Výhodnou pomůckou jsou různé tabulky (např. tabulka z učebnice E. Čecha pro 1. ročník gymnázií z r. 1946), v nichž jsou umístěna čísla (přirozená, celá, desetinná, zlomky, . . . aj.) nebo algebraické výrazy. Úlohy lze tvořit lehce zadáním např. dvou sloupců („Sečti čísla, která jsou umístěna v 3. a 4. sloupci v témže řádku; od prvního do posledního řádku“). Žáci odpovídají hned – buď na výzvu učitele nebo podle stanoveného pořadí. (Tabulku lze využít výhodně i za použití zpětného projektoru či dataprojektoru a „masek“, které dovolují promítnout jen několik cifer.)

Poznámka: Využití kartiček

Někdy děti nelibě nesou, když nejsou dostatečně často vyzvány odpovídat na úkoly, u nichž znají odpověď. Pomoci mohou kartičky s čísly, jimiž pak vytvářejí výsledek a zvednutím kartiček ho oznamují. (Pro učitele to představuje zároveň zpětnou vazbu, zda a jak žáci učivo ovládají.) Vhodné je, aby každý žák měl 2 soubory číslic od 0 do 9,

---

[1] Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

[2] PdF UHK, Marta.Volfova@uhk.cz

znak pro $+$, $-$, také kartičky ANO, NE a pro výběr nabízených výsledků kartičky A, B, C (ty by se měly barevně na líci lišit a rub mít stejný).

Např.: Vytvoř dvojciferné číslo dělitelné třemi, jehož poslední cifra je 7. Je číslo 12342 dělitelné třemi? Čtyřmi? Devíti?

Pro zaokrouhlování a další práci s čísly je vhodné využívat pokladních lístků (faktických nebo modelovaných na počítači) – např. u úloh typu: stačí na tento nákup 200 Kč? Kolik (asi) dostanu nazpět na 500 K4?

MOTIVAČNÍ ÚLOHY K ALGEBŘE

Vhodné jsou úlohy na nalezení nějaké pravidelnosti při operacích s čísly, kterou pak algebraicky prověříme (dokážeme).

Např.: Napiš tři po sobě jdoucí čísla, od druhé mocniny prostředního čísla odečti součin krajních čísel. Jaký je výsledek? Proveď totéž s jinou takovou trojicí. Co vychází? Je tomu tak vždy?

Př.: Čtyři po sobě jdoucí čísla, odečíst součiny krajních a prostředních čísel.

Př.: Pět po sobě jdoucích čísel; od druhé mocniny prostředního odečíst součin krajních čísel.

Jinou skupinu úloh tvoří hříčky „Uhodnu číslo“: Každý žák si myslí nějaké číslo, učitel dává příkazy, např. „vynásob své myšlené číslo dvěma, přičti 8, výsledek opět vynásob dvěma, vyděl výsledek čtyřmi a sděl mi, jaké číslo vyšlo – já řeknu, jaké bylo to myšlené.“

Veliký motivační úspěch má „Uhodnutí data narození.“ (Pořadové číslo dne vynásob dvěma, výsledek deseti, přičti 73, výsledek vynásob pěti a přičti pořadové číslo měsíce.)

Vhodnost algebry ukáží i úlohy, které řešené bez její pomoci jsou zdlouhavé:

Např.: Připíši-li za přirozené číslo určitou cifru, získám číslo, které je rovno součtu původního čísla, hledané cifry a součinu původního čísla s hledanou cifrou (např. 15; $159 = 15 + 9 + 15 \cdot 9$). (Kvant, 1980, č. 12).

Jiným příkladem jsou „rychlé způsoby násobení“ ($99 \cdot 101 = 100^2 - 1$ apod.) nebo umocňování ($25^2 = 2 \cdot 3 \cdot 10^2 + 25$)

NESTANDARDNÍ ÚLOHY (LOGICKÉ, ZEBRY APOD.)

Mnohé děti zaujaly úlohy typu ZEBRA. Lze je vytvářet opravdu „ze života“. Stačí se porozhlédnout po svém okolí, dětech, psech v sousedství, kolegyních, . . .

Zajímavé je též doplňování tabulky výsledků zápasů, kde známe jen některé výsledky (lze využít skutečných výsledků)

Př. (MO)

	Z	Č	M	H
Z	×	3 : 0		
Č		×		
M			×	
H				×

7 : 1 .... 3 výhry
2 : 3 .... 1 výhra, 1 remíza, 1 prohra
3 : 3 .... 1 výhra, 1 remíza, 1 prohra
1 : 6 .... 0 výher, 0 remíz, 3 prohry

Př. (MO) V utkání získalo 1. družstvo 7 bodů, 2. jen 5 bodů, 3. pak 3 body. (Hrálo se "každé s každým"; za výhru 2 body, za remízu 1 bod, za prohru 0 bodů.) Kolik bylo družstev a kolik bodů získalo poslední?

Úlohy s čísly, získanými měřením, vážením, zaokrouhlením

Tyto úlohy učitel běžně vytváří často ve spojení s praktickými činnostmi žáků. Je třeba vždy uvážit, jak přesný může být výsledek. Časté jsou chyby – např. u příkladu „Průměr kruhového záhonu má být 2,4 m. Určete, kolik dodat zeminy, aby byl vysoký 20 cm“, udala studentka výsledek 0,90432 m^3, jiná dokonce 0,9047786 m^3! Podobné chyby se ovšem vyskytují i v běžných sbírkách úloh i učebnicích.

Matematické úlohy a realita (a pohádky)

Často se uvádí, že by každé téma mělo začínat motivací a končit aplikací (která ovšem mívá sama velkou motivační sílu, pokud odpovídá realitě a chápání a zkušenostem dětí).

U aplikačních úloh je třeba vždy uvážit jejich reálnost. Uvedu zde 2 velice nevhodné úlohy.

„Pepík a Karel běhají na atletickém oválu. Karel oběhne jedno kolo za 6 minut, Pepíkovi to trvá 10 minut. Za jak dlouho se opět oba setkají na startu, jestliže oba vyběhli ve stejný okamžik? Kolik kol každý uběhne?“

Úloha jen žádá aplikovat nacvičený postup pro hledání nejmenšího společného násobku. S realitou nemá společného nic - vždyť se předpokládá, že hoši běží půl hodiny stále stejnou rovnoměrnou rychlostí (!). Kdybychom odhadli, že ovál má asi 1000 m, musel by Karel (žák 6. ročníku?) uběhnout do nového setkání na startu 5 km.

Podobně úloha: „Chlapci měli natáhnout mezi dvěma stromy drát. Ten, který použili, měřil 105,4 cm, ale byl o 0,432 m kratší, než bylo potřeba. . . “ Může žák pak považovat školní matematiku za smysluplnou, užitečnou a vyžadující myšlení? Úloha žádá mezi stromy natáhnout drát o 43 cm a 2 mm delší! – Úloha ovšem žákovi vlastně říká: nemysli, neuvažuj, převeď na stejné jednotky a sečti získaná desetinná čísla, jak jsi byl trénován.

Někdy se dá maskovat nereálnost úloh či nesmyslnost popisovaných činností využitím postav Hloupého Honzy či Mata a Pata (jak tomu bylo např. v úloze 55. MO-Z7-I-1).

Jiná je situace, kdy matematickou úlohu vložíme do pohádkového děje, aby získala pro děti větší přitažlivost. Tady děti chápou, že nejde o realitu, ale úloha je pro ně zajímavá.

Př. z úlohy MO 2000/01, Z5-I-1

Několik oblastí, nabízejících řadu zajímavých úloha:

Polyomina, šachovnice, kalendář, koza na provaze

Např.: Kolik existuje různých tvarů tetramin, pentamin, hexamin?

Která hexamina jsou sítěmi krychle?

Která pentamina jsou sítěmi „otevřené krabičky“ (krychle)?

Kterými tetraminy lze „vyložit“ šachovnici 4×4, 6×6?

Kolik čtverců (obdélníků) složených z celých čtvercových políček lze najít na šachovnici 5×5?

Může být rok, kde není ani jeden pátek 13.:

Je-li Nový rok v pondělí, na který den připadne 24. 12.?

Jak uvázat kozu, aby v trávníku spásla kruh, čtverec, obdélník?

AKTUÁLNÍ REÁLNÉ ÚLOHY

Úlohy vztahující se k oblastem:

– cestování (vlak, MHD, školní výlet; práce s mapou)
– poštovní služby
– telefonování (porovnání cen a výhod různých operátorů)
– dovolená (katalogy cestovém)
– péče o domácnost (malování, natírání, tapety; spotřeba plynu, vody, elektřiny aj.)
– péče o psa
– péče o zahradu
– vaření (kuchařské recepty)
– ekologie
– příroda (rekordy přírody)
– sportovní tématika
– finanční matematika (slevy zboží, půjčky, leasing, valuty,. . .)
– statistické průzkumy

Tyto úlohy mohou vytvářet žáci sami. Lze využívat statistické ročenky, reklamní materiály obchodních domů, bank, cestovek, jízdní řády, údaje z novin a časopisů aj.

Mnohé z úloh pak mohou být předstupněm – přípravnou fází – pro projekt, který lze v dalším období na škole uskutečnit.

Vytváření a řešení takových úloh je velmi potřebné – z různých mezinárodních průzkumů se ukazuje, že právě v řešení podobných praktických úloh „ze života“ jsou naši žáci často bezradní, zatímco při „sterilních“ matematických úlohách, kde je vše jasně dáno (a často jde jen o správné využití známého vzorce či algoritmu), jsou výborní.

Vhodné je vytvářet takové „životné" úlohy, kde žák navíc musí potřebné údaje sám dohledat v přiložených autentických materiálech. (Těmi mohou být různé reklamní materiály, záruční listy, jídelní lístky, cestovní řády aj.).

Sami autoři úloh mají dobře znát oblast, v níž úlohy tvoří – i žáci by s ní měli mít určité zkušenosti a úlohy by měly být pro ně (aspoň do určitého stupně) osobně významné.

LITERATURA

[1] Úlohy Matematické olympiády

[2] Volfová, M. *Metody řešení matematických úloh*. Gaudeamus, Hradec Králové 2000.

[3] Krejčová, E., Volfová, M. *Didaktické hry v matematice*. Gaudeamus, Hradec Králové 2001.

[4] Odvárko, O., Robová, H. Tvorba úloh. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP – studijní materiály k projektu č. CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137*. Praha: JČMF, 2006.

PRÁCE S MATEMATICKÝMI TALENTY JAKO SOUČÁST PROJEKTU ESF[1]

JAROSLAV ZHOUF, LUCIE RŮŽIČKOVÁ[2]

NÁPLŇ DÍLNY

V současné době je ve výuce matematiky kladen značný důraz na využití těch vyučovacích metod a postupů, které podporují rozvoj samostatného myšlení žáků, zejména na podnětnou práci s matematickými úlohami. Důležitou roli zde však hraje i matematická úloha samotná, která nadále zůstává základním materiálem a zároveň i pracovním nástrojem učitele matematiky. Pokud má učitel v zásobě dostatečný počet zajímavých matematických úloh, má možnost vhodně jimi obohacovat hodiny matematiky, a stimulovat tak rozvoj tvůrčího matematického potenciálu žáků.

Hlavním cílem této pracovní dílny je nabídka učitelům matematiky, jak by mohli rozšířit svou zásobu o několik takových zajímavých úloh a naznačit možnosti jejich využití v hodinách matematiky. Předkládané úlohy se můžou stát východiskem pro práci

[1] Článek je součástí řešení projektu ESF: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

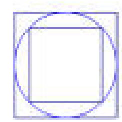
[2] Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz, Lucie_Ruzickova@seznam.cz

s talentovanými žáky v rámci výuky matematiky v běžné třídě nebo ve třídě se zaměřením na matematiku, při vhodném pedagogickém vedení však můžou sloužit ke zpestření hodin matematiky obecně v jakékoli třídě. Žádná z úloh nevyžaduje zdlouhavé výpočty ani využití specifických matematických znalostí, klíčem k nalezení řešení je vždy spíše schopnost podívat se na zadání s určitým nadhledem, proto se práce s těmito úlohami může stát například i součástí diagnostických činností směřující k identifikaci matematického talentu. Každá z úloh reprezentuje určitý typ, který nabízí celou řadu variant, a může se tedy pro učitele stát inspirací k obměňování.

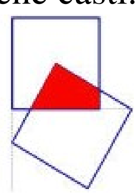
Několik zajímavých úloh

Všechny dále uvedené úlohy byly inspirovány publikací [1].

1 Je dán kus dřeva tvaru obdélníka s rozměry 8 cm a 18 cm. Třemi řezy rovnoběžnými se stranami obdélníka jej rozdělte tak, aby se ze vzniklých částí dal sestavit čtverec.

2 Obsah malého čtverce je 3 cm^2. Jaký je obsah velkého čtverce? 

3 Dva shodné jednotkové čtverce se překrývají, vrchol jednoho z nich je umístěn ve středu druhého. Určete obsah vybarvené části.



4 Která z racionálních čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{320}$ mají nekonečný desetinný rozvoj? Můžeme to rozhodnout, aniž bychom tento rozvoj určovali?

5 Deset žáků píše test. Sedí kolem kulatého stolu a opisují, takže můžeme předpokládat, že bodový výsledek každého z nich bude průměrem bodových výsledků jeho dvou sousedů. Kolik nejméně testů (a které) musí učitel opravit, aby mohl všechny žáky ohodnotit?

5*a n žáků píše test. Sedí kolem kulatého stolu a opisují, takže můžeme předpokládat, že bodový výsledek každého z nich bude průměrem bodových výsledků jeho dvou sousedů. Kolik nejméně testů (a které) musí učitel opravit, aby mohl všechny žáky ohodnotit?

5*b Deset žáků píše test. Sedí v řadě vedle sebe a opisují, takže bodový výsledek každého z nich bude průměrem bodových výsledků jeho sousedů. Jak budou vypadat bodové výsledky žáků?

5*c Sto žáků píše test. Sedí v deseti řadách po deseti a opisují, takže bodový výsledek každého z nich bude průměrem bodových výsledků všech jeho sousedů (sousedem je každý, kdo sedí vedle daného žáka, před ním, nebo za ním). Jak budou vypadat bodové výsledky žáků?

6 Najděte přirozené číslo, jehož první číslice je 1, aby platilo: přesuneme-li první číslici na konec daného čísla, získáme číslo třikrát větší než číslo původní. Kolik takových čísel je? Jak vypadají?

6* Najděte přirozené číslo, jehož první číslice je 2, aby platilo: přesuneme-li první číslici na konec daného čísla, získáme číslo třikrát větší než číslo původní. Kolik takových čísel je? Jak vypadají?

7 Čtyřčlenný zápis

n_0	n_1	n_2	n_3
2	0	2	0

má tu zajímavou vlastnost, že n_0 $(= 2)$ je rovno počtu nul ve spodním řádku, n_1 $(= 0)$ je rovno počtu jedniček, n_2 $(= 2)$ je rovno počtu dvojek, n_3 $(= 0)$ je rovno počtu trojek.

Najděte další takové čtyřčlenné zápisy. Podobně doplňte následující zápisy:

n_0

,

n_0	n_1

,

n_0	n_1	n_2

,

n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7

.

8a Jaký největší rovnostranný trojúhelník můžeme vepsat do pravidelného šestiúhelníku?

8b Jaký největší pravidelný šestiúhelník můžeme vepsat do rovnostranného trojúhelníku?

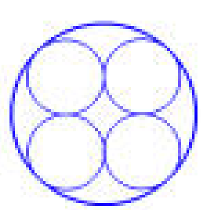
8*a Jaký největší rovnostranný trojúhelník můžeme vepsat do čtverce?

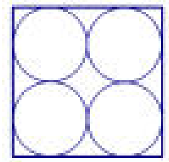
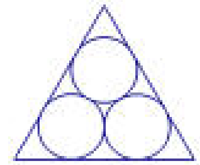
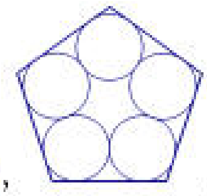
8*b Jaký největší rovnostranný trojúhelník můžeme vepsat do pravidelného pětiúhelníku?

8*c Jaký největší čtverec můžeme vepsat do rovnostranného trojúhelníku?

8*d Jaký největší čtverec můžeme vepsat do pravidelného šestiúhelníku?

9 Velká kružnice má poloměr 1, každá ze čtyř shodných malých kružnic se dotýká velké kružnice a dvou sousedních malých kružnic. Jaká největší kružnice se vejde do díry uprostřed?



9* Řešte stejnou úlohu pro následující obrázky.  ,  ,  .

10 Všechny hvězdičky označují stejné číslo. Doplňte: $\frac{*}{*} - \frac{*}{6} = \frac{*}{12}$.

Literatura

[1] Gardiner, A., *Mathematical Puzzling*. UK Mathematics Foundation, University of Birmingham, Birmingham, 1996.

Další příspěvky

PŘEHLED EVALUOVANÉHO VÝUKOVÉHO SOFTWARE DISTRIBUOVANÉHO FIRMOU ELKAN, SPOL. S R.O.

Mathematica představuje programový systém pro provádění numerických i symbolických výpočtů a vizualizaci dat. Silnou stránkou tohoto systému je vlastní programovací jazyk na bázi jazyků umělé inteligence. Díky tomu *Mathematica* nachází široké uplatnění v praxi zejména v oblastech vědecko-technických výpočtů, statistickém zpracování dat, finančním managementu atd. Jednotná koncepce systému umožňuje studovat závislost matematických modelů reálných systémů na parametrech jak symbolicky (parametry jsou reprezentovány např. písmeny) tak numericky (pro konkrétní číselné hodnoty parametrů). Tím se *Mathematica* stává nejen mocným nástrojem pro výzkum a vývoj, ale též názornou pomůckou pro výuku matematiky a fyziky na všech stupních škol.

Z hlediska učitele střední školy dokáže poskytnout podporu pro výklad obtížnějších partií, jako je například diskuse řešení rovnic a nerovnic závislých na parametru, rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami, logaritmické, exponenciální a lineární lomené funkce, rovnice a nerovnice, analytická geometrie, kombinatorika, úvod do diferenciálního a integrálního počtu a základy statistiky. Ve středoškolské fyzice lze například sledovat závislost trajektorie šikmého vrhu na úhlu a počáteční rychlosti, zobrazovat závislost rychlostí těles po srážce v závislosti na poměru jejich hmotností, prostřednictví animace lze také lépe vysvětlit kmitavý pohyb a další jevy.

Jednoduše modelovatelné jsou i aplikace v elektřině a magnetizmu. V rámci samostatné práce studenti mohou snadno statisticky vyhodnocovat výsledky svých měření z fyzikálního praktika. Vzhledem k tomu, že systém *Mathematica* podporuje následující programovací techniky: procedurální (jako např. C, FORTRAN, nebo Pascal), funkcionální (jako např. Lisp) a logické programování (jako např. Prolog), je také vhodný pro výuku programování. Úvodní kurz programování je veden v jazyce systému *Mathematica* např. na ETH v Curychu (Švýcarsko) a Illinoisské univerzitě v Champaign-Urbana (USA). Učitelé schopnosti a možnosti programování ocení zejména při vytváření hromadných zadání domácích úkolů a písemných prací (lze například generovat individuální zadání každému studentovi, aby se zabránilo opisování, a zároveň pro učitele generovat řešení pro snadnou opravu).

Jazyk systému *Mathematica* je navržen tak, že umožňuje velmi snadnou manipulaci s grafickými objekty. Využití možností grafického programování vede k lepší prezentaci probraného učiva. Lze velmi jednoduše vytvářet animace např. u funkčních závislostí grafu funkce a změny parametru.

Nad jádrem systému *Mathematica* existuje několik nadstaveb lišících se cílovou skupinou uživatelů a cenou. Každý z níže uvedených produktů zvyšuje efektivitu a pestrost výuky a je vhodný pro všechny typy škol. Vzhledem k tomu, že software *Mathematica* je přítomen na většině univerzit a vysokých škol v České republice (a samozřejmě též v řadě jiných podniků), uplatní vaši studenti získané zkušenosti s používáním tohoto software i při dalším studiu a v práci.

Stručný popis jednotlivých produktů

Mathematica for the Classroom

Software je určen k výuce matematiky, fyziky, chemie, ekonomie, základů programování a teorie počítačů, základů kybernetiky a mnoha dalších předmětů. Zvládá symbolické i numerické výpočty, dvou a trojrozměrnou vizualizaci dat a skýtá kompletní programovací prostředí. Stejně jako u softwaru *Mathematica* ji lze využít pro výklad obtížnějších partií středoškolské matematiky.

Software *Mathematica* lze také použít k vytváření strukturovaných dokumentů zvaných zápisníky (*The Mathematica Notebook*) obsahujících speciální matematické symboly a grafiku včetně animací. Protože systém *Mathematica* lze instalovat pod operačními systémy Windows, Linux, Unix, McIntosh atd., je struktura těchto dokumentů navržena tak, že tyto dokumenty jsou nezávislé na platformě a může je sdílet více studentů, učitelů či kolegů (např. dokument napsaný v *Mathematice* doma pod systémem Linux lze v práci otevřít a editovat v *Mathematice* pod systémem Windows a studenti si jej mohou doma otevřít a editovat třeba v *Mathematice* pod systémem McIntosh). Zápisníky se osvědčují při prezentaci seminářů, přednášek a názorných ukázek (animace). Protože zobrazují tradiční matematický zápis, hodí se dobře k sestavování sylabů, testů a úloh, které se mohou buď tisknout, promítat dataprojektorem nebo rozesílat e-mailem. Dále se tyto úlohy dají řešit a sbírat elektronicky. Pokud studenti doma nedisponují sw *Mathematica*, mohou použít prohlížeč zápisníků MathReader, který lze volně získat z webových stránek firmy Wolfram; tento prohlížeč umožňuje editaci textu a příkazů, ale neumožňuje tyto příkazy zpracovávat.

S *Mathematica for the Classroom* lze vizuálně zvýraznit důležité pojmy za pomoci barevné grafiky a interaktivních cvičení vytvářených pomocí palet. Palety představují intuitivní způsob vytváření dokumentů a seminářů.

Vzhledem k tomu, že program je plně interaktivní, vede k aktivnímu přístupu ke studiu. Budete-li mít *Mathematica for the Classroom* k dispozici ve vaší počítačové laboratoři, vaši studenti získají prostředek zkoumání v oblasti matematiky, fyziky a také technických a ekonomických předmětů. *Mathematica for the Classroom* prohlubuje proces výuky způsobem, jakým učebnice nedisponují. **Je to nejlépe obsáhlá verze software *Mathematica* určená středním školám**.

MATHEMATICA CALCCENTER

Je samostatný produkt určený učitelům i žákům. Je jakousi zjednodušenou verzí softwaru *Mathematica* (dal by se nazvat jakousi „Mathematicou Light"). Slouží jako numerická a částečně symbolická kalkulačka, jako soubor nástrojů pro provádění operací s vektory a maticemi, statistickou analýzu dat a grafického zobrazení průběhů funkcí a vizualizaci naměřených dat. Dále jej lze použít k psaní matematických a technických textů se speciálními matematickými symboly. Lze v něm omezeně programovat v rámci procedurálního a funkcionálního programování. Nejsilnější stránka softwaru *Mathematica*, což je logické programování a tzv. pattern-matching, je u tohoto produktu zablokována. Grafické možnosti jsou též částečně omezeny.

Mathematica CalcCenter je velmi snadno ovladatelný prostřednictvím palet (uživatel se naučí software ovládat během 10 minut), což ocení především počítačově méně zběhlí studenti a učitelé¶ Samozřejmě, že jisté matematické znalosti jsou podmínkou, nicméně znalost jazyka *Mathematica* podmínkou není. Celý produkt je dobře didakticky postaven.

Za zmínku stojí pěkně provedený převodník jednotek mezi systémem SI, britským a americkým systémem měr a různými historickými či exotickými měrovými systémy. Produkt je mimo jiné celkově vhodný pro výuku technických předmětů na učilištích a průmyslových školách. Nově je také k dispozici česká lokalizace (Czech language kit).

THE MATHEMATICAL EXPLORER

Je samostatný software pro ty, jimž je matematika koníčkem a zároveň fascinující vědou a výzvou.

Je to v podstatě interaktivní učebnice zabývající se do hloubky některými nejdůležitějšími matematickými pojmy a slučuje v sobě text, grafiku a vzorce ve formátu zápisník (*The Mathematica Notebook*, viz výše). Tato interaktivní učebnice je psána velmi poutavou formou a student v ní nalezne souvislosti mezi matematikou a běžným životem, jako například souvislost mezi teorií čísel a ochranou dat v internetu, čísly kreditních karet, ISBN (celosvětová identifikace knižních titulů) a VIN (celosvětová identifikace aut); mezi Hilbertovou křivkou beze zbytku vyplňující čtverec (na první pohled zcela neužitečná matematická konstrukce), problémem obchodního cestujícího a poštovní doručovací službou (nebo optimálním plánováním trasy na dovolenou); mezi matematikou a jinými vědami, jako například mezi diferenciálním počtem a archeologií.

Díky schopnostem jádra software *Mathematica*, *The Mathematical Explorer* umožňuje změnu parametrů v prezentovaných modelech, a tím vede k aktivnímu studiu. Implementované *Mathematica* jádro umožní také realizovat mnohé numerické a symbolické operace stejně jako u produktu *Mathematica for the Clasroom*. Dále umožňuje práci se zvukem (tvorba, editace a přehrávání), animovanými sekvencemi (tvorba animovaných grafů apod.). Jednotlivé lekce pokrývají širokou škálu témat a obsahují podrobné informace, včetně velmi pěkně zpracovaného historického úvodu k jednotlivým oblastem matematiky a biografie význačných matematiků. Vhodný pro samostatné studenty, ale i pro učitele a zájemce o netradiční pohled na matematiku. Software je kompletně přeložen do slovenštiny.

CALCULUS WIZ

Je samostatný produkt určený pedagogům i studentům. Obsahuje materiál pro standardní vyučování matematiky, semináře a cvičení, zejména vzorové příklady pro přípravu i řešení, která pokrývají většinu středoškolských témat; mimo jiné například: kuželosečky, polární souřadnice, parametrické rovnice, posloupnosti a řady, funkce jedné reálné proměnné a jejich grafy, limity, diferenciální a integrální počet, větu o střední hodnotě a její aplikace, nevlastní integrály, diferenciální rovnice (a mnoho dalších). Pro tato témata obsahuje nástroje umožňující automatický rozpis postupu řešení (jemnost rozpisu jednotlivých kroků závisí na tématu). Obsahuje také vzorové ukázky pro vyučující, jak tyto nástroje pro automatický rozpis řešení vytvářet. Podle těchto návodů si vyučující snadno vytvoří své vlastní nástroje pro generování postupu svých vlastních typových příkladů, případně si přizpůsobí míru detailů, do které chce v rozpise řešení zacházet.

Matematické koncepce oživuje trojrozměrnou grafikou a diagramy, které pomáhají lépe pochopit řešené problémy. Poskytuje pružná interaktivní řešení, která dovolují pouze zapsat problém a získat potřebnou odpověď po několika kliknutích, což umožňuje osvětlit i obtížnější problémy bez nutnosti provádět složité výpočty.

Student může program využívat jak pro opakování výkladu, tak i pro procvičování. Součástí programu je i sada úloh (dají se i editovat), které může student sám řešit a následně si nechat své řešení zkontrolovat počítačem. Obsahuje velice obsáhlou nápovědu, kde veškeré funkce jsou podrobně vysvětleny na řadě příkladů. Uživatel i s minimální jazykovou výbavou (angličtina) je schopen díky těmto ukázkám snadno pochopit ovládání programu. Celý produkt je dobře didakticky postaven.

MATHEMATICA FOR STUDENTS

Je určen pouze studentům pro použití na jejich osobním počítači. Nová tlačítka a palety příkazů systému poskytují rychlý přístup k tisícům funkcí, vzorců a matematických symbolů pouhým najetím kurzoru a kliknutím. *Mathematica for Students* je ideální při studiu jakéhokoli oboru, který vyžaduje numerické a symbolické výpočty. Škola nemůže pořídit tento software pro své studenty. Studenti si jej musí zaplatit ze svých prostředků.

SROVNÁNÍ PRODUKTŮ FIRMY WOLFRAM RESEARCH

	Mathematica	*CalcCenter*	*Calculus Wiz*	*Math. Explorer*
Proced. progr.	Ano	Ano	Ano	Ano
Funkcion. pro.	Ano	Ano	Ano	Ano
Deklar. pro.	Ano	Ne	Ano	Ano
Aritmetika	F, AP, Z, Q, Int	F, Z, Q (přichyt.)	F, AP, Z, Q, Int	F, AP, Z, Q, Int
Kontrola přes.	Ano	Ne	Ne	Ano
Řešení ric	Ano	Ano	Ano	Ano
Dif. počet	Ano	Ano	Ano	Ano
Int. počet	Ano	Ano	Ano	Ano
Dif. rice	Ano	Ano	Ano	Ano
Lin. algebra	Ano	Ano	Ne	Ano
Num. kvadrat.	Ano F, AP	Ano F	Ano F	Ano F, AP
Num. dif. rice	Ano F, AP	Ano F	Ne	Ano F, AP
Num. lin. alg.	Ano	Ano F	Ne	Ano
Num. řeš ric	Ano	Ano F	Ano kromě AP	Ano
Num. optimal.	Ano	Ano F	Ne	Ne
Disk. mat.	Ano	Ne	Ne	Ano – omezeně
Zprac. dat	Ano	Ano	m. nejm. čtverců	Ne
Statist.	Ano	Ano F	Ne	Ne

Vysvětlivky:

Procedurální programování je programovací styl jako v jazycích FORTRAN, Pascal, C.
Funkcionální programování je programovací styl jako v jazyce LISP.
Deklaratívní programovací styl je styl, v němž programátor nepíše program ve formě algoritmu, ale ve formě přepisovacích pravidel, která jsou aplikována na výrazy.
Tento způsob programování je vhodný pro realizaci symbolických výpočtů na počítači.
Příklad: zapíšeme-li v programu *Mathematica* tento program

```
f[x+y]+1+Sin[x+2y]/.Sin[a_+b_]:>Sin[a]Cos[b]+Cos[a]Sin[b]
```

dostaneme jako výsledek `f[x+y]+1+Sin[x]Cos[2 y]+Cos[x]Sin[2 y]`.

Použili jsme přepisovací pravidlo `Sin[a_+b_]:> Sin[a] Cos[b]+Cos[a]Sin[b]` na výraz `f[x+y]+1 + Sin[x + 2 y]`.

Zde `Sin[a_ +  b_]` je tzv. vzorek (Pattern), jemuž ve výraze vyhovuje podvýraz `Sin[x + 2 y]`, kde $a = x, b = 2y$, a dojde k přepisu tohoto podvýrazu výše uvedeným pravidlem. Tento způsob psaní programů je ideální prostředek pro provádění substitutic ve výrazech a úpravy výrazů. Shoda vzorku s podvýrazem je testována na základě syntaktické shody s přihlédnutím např. ke komutativitě sčítání. Kurz programování v systému *Mathematica* klade důraz na zvládnutí deklaratívního programovacího stylu.

Pojmem „přichytávání“ v programu CalcCenter rozumíme automatickou konverzi čísel dostatečně blízkých k nějaké matematické konstantě na symbol této konstanty, např. 3.141592653589793 se konvertuje na Pi. Totéž platí pro zlomky.

Aritmetika:

F	. . .	IEEE Floating Point Arithmetics, závisí na procesoru
AP	. . .	sw ošetřená aritmetika nezávislá na hw
Z	. . .	celá čísla
Q	. . .	racionální čísla
Int	. . .	intervalová aritmetika
Ano X	. . .	Operace jsou podporovány, ale pouze v aritmetice X z F, AP, Z, Q, Int.

Evaluace a akreditované vzdělávací kurzy

Všechny výše uvedené sw produkty úspěšně prošly procesem evaluace a jsou zařazeny a registrovány MŠMT ČR v Seznamu výukového a vzdělávacího software.

Na evaluovaný výukový software lze použít účelově vázané finanční prostředky MŠMT (SIPVZ). Ověření o evaluaci naleznete na stránkách MŠMT ČR web26.e-gram.cz.

Pro komplexnost naší nabídky evaluovaného software pořádáme také v rámci DVPP akreditované vzdělávací kurzy pro učitele matematiky na středních školách, které jsou zaměřeny na využití software *Mathematica* s ohledem na obsah učiva v předmětu matematika na různých typech středních škol.

Aktuální termíny kurzů se pravidelně zveřejňují na webové adrese

www.mathematica.cz/akce.php,

kde se lze přihlásit on-line. V současné době pořádáme tyto kurzy: ***Mathematica* – základy práce s programovým systémem:** Úvodní kurz; ***Mathematica* – programování v systému**: Předpokládá absolvování úvodního kurzu nebo znalost programového systému *Mathematica*; ***Mathematica* – grafické možnosti programového systému**: Předpokládá absolvování kurzu programování nebo dobrou znalost programování v systému *Mathematica*; **Využití sw *Mathematica* ve výuce:** Tento kurz je věnován pouze software *Mathematica CalcCenter*.

Dodavatel:

ELKAN

ELKAN, spol. s r.o.
V Tůních 12, 120 00 Praha 2
Tel.: 221 999 100
Fax: 224 999 101
E-mail: vzak@elkan.cz
www.elkan.cz

Výrobce:

WOLFRAMRESEARCH
www.wolfram.com

STRÁNKY (SUMA JČMF)

HUDBA: JAN NEDVĚD TEXT: JIŘÍ BUREŠ

1. Před monitorem zoufale sedí,
přemýšlí, na Sumu hledí,
učitel, co pro nápady neví kam jít.

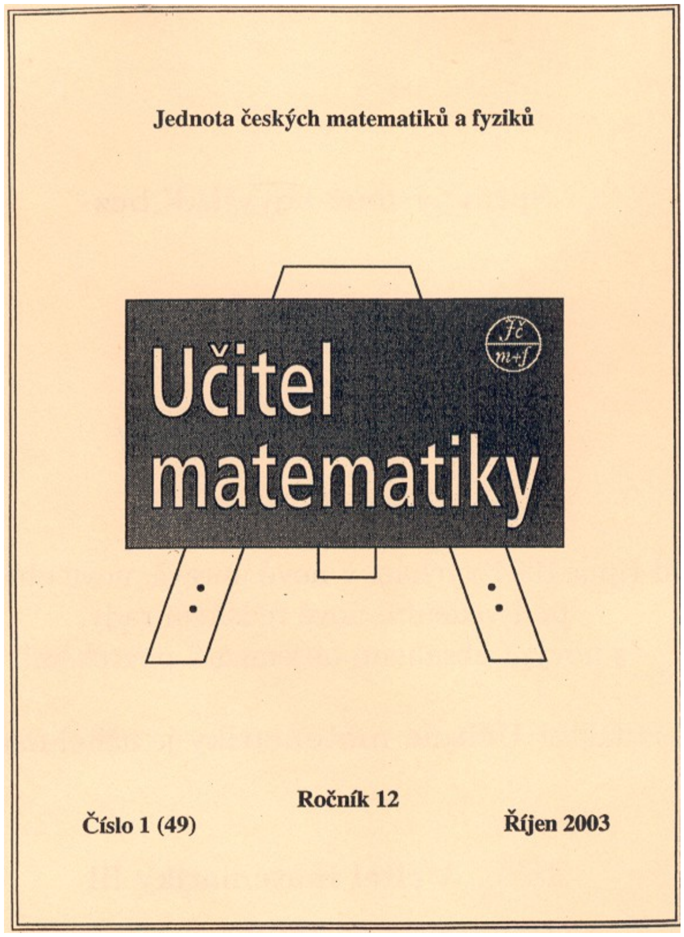
2. Kurzů ESF pár a také v únoru Dva dny,
nadšení měl, však nápadník prázdný,
cítil se sám, když kamarády pod heslem měl.

Refrén: Teď přichází den, kdy jméno své vloží,
heslo zadá, poplatek složí
a najednou se brána ráje otevírá.

3. Před monitorem nadšeně sedí,
články čte, na nápady hledí,
učitel, co členem Sumy se stal.

Refrén: A snad každý den, kdy volnou má chvíli,
mu Suma a web dodává síly,
kamarádi ho na diskuzích vídaj’ rádi.

Refrén: A nemine den, aby na stránky nešel,
žije jen tím, i z hospody sešel,
objevil ráj, kde vše, po čem touží, mu daj’.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 16. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Cena jednoho čísla je 30,- Kč, roční předplatné za čtyři čísla činí 110,- Kč.

Zájemci o odběr časopisu mohou napsat na adresu:

Redakce Učitele matematiky
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno

nebo poslat e-mail na adresu: ucmat@math.muni.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Sborník příspěvků semináře Dva dny s didaktikou matematiky

Praha, 15.–16. 2. 2007

Organizátor: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Organizační a programový výbor: Naďa Stehlíková
Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editoři: Naďa Stehlíková, Darina Jirotková
Sazba: Naďa Stehlíková, systémem LaTeX
Počet stran: 196
Vydala: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2008

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN 978-80-7290-345-0