DVA DNY S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2006

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 2.–3. 2. 2006

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Programový a organizační výbor:

Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editor:

Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)
Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)

Vydání sborníku bylo finančně podpořeno projektem ESF (viz str. 7).

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci semináře.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2007 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN 978-80-7290-286-6

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

dostáváte do rukou sborník z jubilejního 10. ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky*. Jsme moc rádi, že tato konference, kterou pořádá pro učitele matematiky katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy v Praze, Pedagogické fakulty ve spolupráci s MPS JČMF, má už svou tradici a mají o ni zájem i učitelé, kteří se předchozích ročníků nezúčastnili. Vede nás to k přesvědčení, že jsme dobře zvolili obsah a především formu konference. Proto se i v budoucnu budeme snažit uspořádat program tak, aby poskytoval co nejvíce možností pro aktivní podíl každého účastníka – tomu nejvíce vyhovují pracovní dílny a kulaté stoly k aktuálním problémům vyučování matematice a především samotná možnost setkávání se v diskusích nad problémy našeho současného vyučování matematice.

Vaše vystoupení na konferenci, rozhovory s Vámi a v neposlední řadě přístup zodpovědných orgánů k probíhající kurikulární reformě ukazují, že přišel čas změnit některé věci. Proto chceme Matematickou pedagogickou sekci JČMF transformovat na Společnost učitelů matematiky (SUMA), která bude bude více než dosud hájit profesní zájmy učitelů matematiky. S podporou Evropského sociálního fondu uvádíme do provozu portál SUMA (www.suma.jcmf.cz). Naší ambicí je ve spolupráci s učiteli ze škol vytvořit na tomto portálu prostor k předávání zkušeností i prostor k diskusím o problémech, které nás zajímají. Věříme, že právě účastníci konference *Dva dny s didaktikou matematiky* budou patřit k těm, kteří se na tom budou intenzívně podílet. Atmosféra konference i diskuse s jejími účastníky nám opakovaně potvrzují, že na našich školách pracují obětaví učitelé, kteří věnují vyučování matematice mnoho ze svého volného času a jsou ochotni se o své zkušenosti podělit se svými kolegy.

Všem účastníkům jubilejního ročníku konference přejeme, aby jim tento sborník připomněl příjemnou pracovní atmosféru, která podle našeho názoru i podle názoru mnoha účastníků konferenci provázela. A ostatním čtenářům přejeme, aby je náš sborník potěšil, aby v něm našli podněty pro svou vlastní práci a možná i pozvání na další ročník konference *Dny s didaktikou matematiky* nebo pozvání na portál SUMA.

Se všemi, kterým není lhostejný stav vyučování matematice na našich školách, se těším na shledanou v únoru 2007 na 11. ročníku konference *Dva dny s didaktikou matematiky*.

Marie Kubínová

předsedkyně programového výboru konference

Kurzy ESF pro učitele matematiky

Společnost učitelů matematiky JČMF získala prostředky z Evropského sociálního fondu (ESF) k realizaci projektu pro přípravu pražských učitelů matematiky 2. stupně ZŠ k tvorbě a následné realizaci školního vzdělávacího programu. Řešitelé projektu připravili vzdělávací akci (včetně studijních materiálů) určenou učitelům matematiky na základních školách a nižších třídách víceletých gymnázií. Jednotlivé semináře a dílny probíhají již od září 2006 na několika pražských školách a v mnoha regionálních centrech ČR.

Učitelé matematiky, kteří využijí naší nabídky, absolvují soubor pěti vzdělávacích modulů v rozsahu 30 hodin přímé výuky. Naprostou převahu mají semináře a dílny s aktivními činnostmi účastníků. Jeden z modulů je povinný (Modul A – *Vyučování matematice z hlediska cílů kurikulární reformy*), zbývající si účastníci mohou vybírat z následujících povinně volitelných seminářů a dílen (dále jen modulů; podrobnější popis najdete na `www.suma.jcmf.cz`):

- Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka
- Žákovské projekty – jedna z možností, jak rozvíjet žákovské kompetence
- Jak tvořit úlohy ze světa našich žáků
- Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe
- Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí
- Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji
- Počítačem podporovaná výuka matematiky: Cabri pro začátečníky
- Počítačem podporovaná výuka matematiky: Cabri pro mírně pokročilé
- Geometrické modelování jako příležitost k aktivnímu učení
- Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na ZŠ
- Příprava a analýza didaktických situací
- Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice
- Hry ve vyučování matematice jako významná strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáků
- Využití informačních a komunikačních technologií ve vyučování matematice na 2. stupni ZŠ
- Historický vývoj matematiky ve vyučování matematice na ZŠ
- Využití Excelu k řešení prakticky orientovaných matematických úloh
- ŠVP jako příležitost k zlepšení práce s talentovanými žáky v matematice

• ŠVP a možnosti podpory žáků se speciálními vzdělávacími potřebami v matematice

Účast na naší vzdělávací akci vede k získání certifikátu o připravenosti k práci na školním vzdělávacím programu a jeho realizaci. Nejde o rozšiřování či prohlubování odborně vědeckého matematického poznání. Vzdělávací akce je orientována na rozvoj profesních dovedností učitele matematiky.

O termínech jednotlivých setkání, registraci a dalších okolnostech účasti na akci se můžete informovat na internetových stránkách projektu (`www.suma.jcmf.cz`).

Veškeré náklady související s realizací této vzdělávací akce jsou hrazeny z prostředků ESF. Kurz je akreditován MŠMT jako akce dalšího vzdělávání učitelů. Všechny koncepční otázky jsou konzultovány s MŠMT a příslušnými rezortními pracovišti tak, aby účast na kurzu byla považována za příspěvek k naplňování cílů kurikulární reformy.

Účast je pro učitele zdarma, platí si jen cestovné. Každý účastník obdrží CD se studijními texty všech modulů, tedy i těch, kterých se nezúčastnili!

V Praze, dne 15.1.2007

RNDr. Václav Sýkora, CSc.
manažer projektu
tel. +420 777 837 588

Zvané přednášky

PERSPEKTIVA VE VÝTVARNÉM UMĚNÍ – CESTA K REALISTICKÉMU ZOBRAZENÍ PROSTORU

OLDŘICH HYKŠ[1]

ÚVOD

Sledujeme-li vývoj výtvarného umění v dějinách se zvláštním zřetelem k zobrazování prostoru, neubráníme se analogii s vývojem kreslířských a geometrických schopností člověka jako jedince od dětství až do dospělosti. Tuto analogii samozřejmě nelze brát doslova. Moderní antropologie dokázala, že mentální vývoj člověka byl v podstatě ukončen před tisíciletími a rozdíl mezi námi a našimi předky je dán pouze vlivem a možnostmi kultury, v níž se od dětství rozvíjíme. Přesto má vývoj společnosti a jedince mnohé paralely, které mohou usnadnit osvojení zobrazovacích metod: zvolíme-li při výuce cestu historického výkladu, bude se postupný rozvoj znalostí studenta dobře shodovat s jednotlivými etapami rozvoje geometrických znalostí v historii lidstva. Jako podklad pro takto pojatou výuku může posloužit autorova práce *Zrod a užití lineární perspektivy v malířství* [2] přístupná na `http://euler.fd.cvut.cz/predmety/geometrie/lp_malirstvi/`. Zde jsou jednotlivé teoretické poznatky vkládány do historického textu a tak se student postupně seznamuje s jednotlivými zobrazovacími metodami a s teorií perspektivy, přičemž jeho pozornost je stále udržována zajímavým tématem vývoje zobrazování v malířství od pravěku až do konce dvacátého století. Vlastní výklad této problematiky podstatně přesahuje možnosti tohoto příspěvku. Laskavého čtenáře proto zveme k prolistování uvedené práce, kterou zde jen rozšíříme o nástin dlouhé cesty, kterou lidstvo prošlo při zobrazování prostoru, než dospělo k pochopení a osvojení základních principů lineární perspektivy.

ZPŮSOBY ZOBRAZOVÁNÍ PROSTORU V KULTURNÍCH DĚJINÁCH ČLOVĚKA

V celém dlouhém předhistorickém období je zobrazení prostoru v uměleckých dílech jinak tak odlišných u různých národů v různých kulturách téměř stejné. Prostor je omezen na jednu rovinu, v malířské terminologii první plán. V ní jsou umístěny jednotlivé ob-

[1] *FD ČVUT, hyks@mokropsy.com*

jekty zcela volně, bez jasné vzájemné prostorové vazby, bez orientace k nějaké společné základně nebo alespoň směru. Figury jsou v nejtypičtější, snadno zobrazitelné poloze. Lidé zepředu nebo z profilu, zvířata výhradně z boku. Jsou to vlastně jednoduché kolmé průměty na kreslící rovinu. Pokud se výjimečně vyskytne postava ve složitější pozici, bývá to způsobeno nedostatkem místa nebo tvarem podkladu. Lidé, zvířata a bohové se jakoby vznášejí ve volném prostoru tvořeném přirozenou strukturou podkladu kamene, kosti či hlíny. Někdy o umístění objektu rozhodne příznivá modelace podkladu, například vypouklina ve skalní stěně, která příhodně zvýrazní prostorové vnímání figury. Je-li podkladem vodorovná plocha, například strop jeskyně, je pochopitelné, že není v kresbě nebo malbě určen jeden převládající směr. Někdy vzniká dojem prostorového zobrazení rozdílnou velikostí figur v jednom obraze; tento dojem je však mylný. Nejedná se o perspektivní zkrácení objektů různě vzdálených od průmětny; různá velikost vyjadřuje rozdílnou důležitost zobrazovaného nebo vztah mezi objekty, proto se tento jev nazývá *hierarchická perspektiva*.

Zobrazované figury jsou často pojednány velmi zjednodušeně, někdy přecházejí do pouhého symbolu (např. bojovník zastoupený pouze štítem a kopím). To spolu s jednoduchým zobrazováním prostoru vedlo v uměnovědě devatenáctého století k představám o primitivnosti původního člověka. Tato představa byla navíc podpořena objevy etnografů a antropologů, kteří objevovali život některých národů Afriky a Asie žijících tradičním životem lovců a sběračů s podobným uměleckým projevem. To vedlo k označení děl tohoto období jako *primitivní umění*. Zobrazení prostoru a figur v primitivním umění připomínalo často rané kreslířské projevy dětí. Z toho byla vyvozena teorie analogie mezi vývojem člověka jako jedince a vývojem společnosti a její kultury. Původní člověk byl představován jako *primitiv*, jedinec nezralé dětské inteligence s jednoduchou psychikou. Tuto všeobecně přijímanou představu však výrazně narušily objevy pravěkého jeskynního malířství v Pyrenejích na pomezí Španělska a Francie. Dokonalé realistické portréty koní, býků a jelenů bylo těžko možné připisovat primitivům s omezenými mentálními schopnostmi a zpočátku byly mnohými odborníky dokonce odmítány jako falza.

Dnes již víme, že mentální vývoj člověka byl v podstatě ukončen před tisíciletími a rozdíl mezi námi a našimi předky je dán pouze vlivem kultury, v níž se od dětství rozvíjíme. Volba realistického, stylizovaného nebo jen symbolického zobrazení osoby nebo zvířete byla proto dána požadavky a potřebami tehdejší společnosti a nikoliv omezenými mentálními schopnostmi našeho předka. Ostatně stylizace zobrazovaných objektů není pouze snahou o zjednodušené kreslení viděného, ale často vystihuje právě nejpodstatnější vlastnosti zobrazované věci nebo osoby a má velkou uměleckou hodnotu. Stejně tak symbolické zobrazení božstev, osob a zvířat často spolu se symbolickým znázorněním vztahů a hierarchie vede k vytváření složitých komplexních schémat fungování světa a vesmíru a je jedinečným lidským projevem.

Musíme se ovšem ptát: Byl-li člověk i v dávných dobách schopen pojednat různým způsobem schematicky, symbolicky a realisticky figury (osoby, zvířata) a vztahy mezi

nimi, proč nebyl téhož schopen i v zobrazení prostoru a zůstal u nejjednoduššího schematického vyjádření? Proč jedna ze složek, zobrazení prostoru, jako by svými možnostmi zaostala za ostatními dvěma složkami, zobrazením osob a vztahů mezi nimi? Je otázkou, nakolik pravěký tvůrce usiloval, cítil-li vůbec potřebu, o realistické prostorové zobrazování. Komunita, ve které žil, pro něj měla klíčový význam, byla mu vším, a proto i zachycení osob a vztahů v ní bylo pro umělce nejdůležitější. Naopak realistické znázornění prostoru je spojeno s jeho ovládnutím a proměňováním (vymezování hranic, urbanismus), ke kterému ještě nedochází.

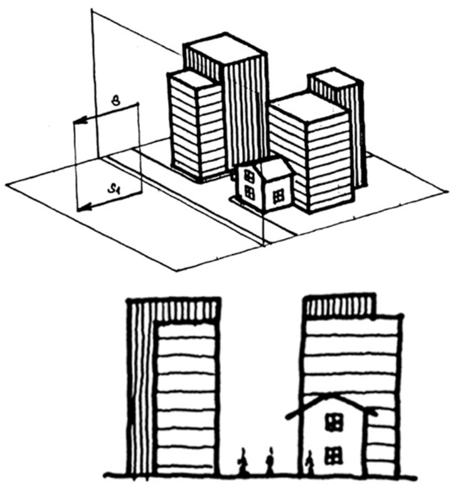
Znalost realistického zobrazení prostoru, tj. perspektivy jako geometrického zobrazení, které se nejvíce přibližuje vnímání prostoru prostřednictvím oka, bývá obvykle chápána v dnešní době a v našem kulturním okruhu jako nutný základ, jako úhelný kámen malířství. Přitom si neuvědomujeme, že perspektiva je pouze jednou ze složek výtvarného projevu, a to nikoli složkou, která musí být nutně použita. Pohlédneme-li zpět, po většinu historické doby a ve většině kultur jsou to jiné požadavky a potřeby než realistické vyjádření prostoru. Perspektivního zobrazení není ještě využito také pro jeho náročnost na geometrickou představivost. Uvědomme si, jak dlouho trvá dítěti osvojení si znalosti perspektivy oproti ostatním dvěma složkám výtvarného projevu.

K radikální změně společenských podmínek dochází až u takzvaných *potamických kultur* Mezopotámie a Starého Egypta. Tyto společnosti, nalézající se v pouštní oblasti, byly zcela závislé na periodicky se opakujících záplavách velkých řek Eufratu, Tigridu a Nilu. To vyžadovalo předvídání času záplav, stavbu zavlažovacích kanálů, opakované vyměřování polí a pozemků, organizaci velkého množství pracovních sil, atd. Tyto těžké podmínky vedly k rozvoji astronomie, geometrie, matematiky a byrokracie a přivedly tyto civilizace k prosperitě a kulturnímu rozvoji trvajícímu tisíciletí.

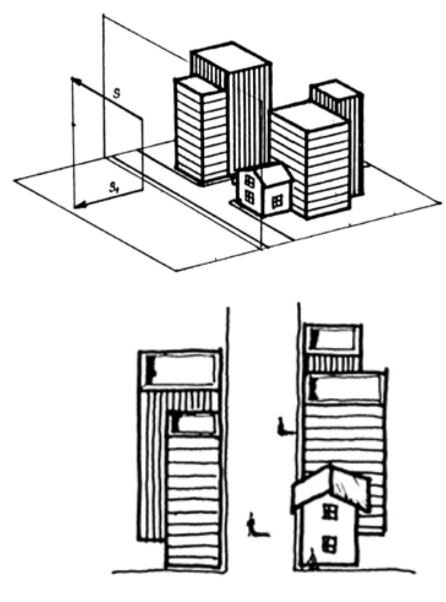
Jak se tyto veliké změny promítly do zobrazování prostoru a do zobrazování vůbec? Velkým překvapením jsou malířské výkony v Mezopotámii. Ve srovnání s uměním pravěku nenalézáme téměř žádný pokrok. Nejčastějším tématem je boj (samozřejmě vítězný), panujícího krále nad divokými šelmami, například lvem (to měl král doslova v popisu práce), anebo nad nepřáteli (král z vedlejšího města). Postavičky krále a bojovníků jsou velmi schematické a primitivní. Vlastně je tvoří jen hlava, která představuje čtvrtinu výšky postavy, a jakási halena, z níž koukají v náznaku ruce a plosky nohou. Pokud se na obrázku vyskytne žena (oslavná hostina po vyhrané bitvě), tak ji poznáme pouze podle většího množství vlasů.

Přesto je zde patrná jedna významná změna oproti pravěkému umění. Postavy a předměty jsou řazeny na řádce jako písmena nějakého textu. Linka netvoří pouze základnu, na níž jednotlivé figury stojí. Pod sebou řazené řádky tvoří pásy a každý takový pás vytváří další časovou rovinu takto vyprávěného příběhu. Vlastně se jedná o jakési starověké komiksy. To představuje novinku, zcela novou organizaci plochy pro zobrazování. Pouze se tu nejedná o zobrazení trojrozměrného prostoru do roviny, ale o projekci děje v plynutí času. Souvislost s obrázkovým písmem, z něhož později vznikly klínopisné znaky, je zřejmá. Princip řazení zobrazovaných událostí do pásu se stal oblíbeným a jeho použití najdeme v různých dobách a kulturách - například Trajánův sloup v Římě. Důvodem pro poměrně malý rozvoj zobrazování v Mezopotámii je, že tato civilizace byla trvale vystavena nájezdům bojovných národů z okolních pouští. Ty často ovládly nejen jednotlivá města, ale i celou říši a tito noví uchvatitelé si s obtížemi osvojovali kulturu poražených. Tím byl kulturní rozvoj vždy vržen zpět o celá staletí.

Nepoměrně příznivější situace byla ve starověkém Egyptě. Kromě období chaosu a válek, dělících období staré, střední a nové říše, se tu bez výraznějších otřesů kontinuálně rozvíjela civilizace po dobu, která nemá v lidských dějinách obdoby. Pro nás je příznivé, že Egypťané budovali rozsáhlá města mrtvých a vnitřní prostory hrobek zdobili freskami s výjevy z běžného života. To, společně s jejich až obsesním zvykem vést si o jakékoliv činnosti záznamy a účetnictví, nám dává téměř dokonalé informace o jejich životě a celé kultuře. Víme, že nashromáždili poměrně velké množství poznatků z oblasti matematiky a geometrie. Stavěli impozantní chrámy, mastaby a pyramidy. Běžně zakládali velká města nebo dělnická sídliště s pravoúhlou osnovou. Pracovali tedy s prostorem. Museli vypracovávat urbanistické plány, půdorysy budov a nákresy složitých architektonických detailů. Vzhledem k těmto okolnostem bychom očekávali brzký rozvoj realistického zobrazování prostoru, o zobrazení postav a vztahů mezi nimi nemluvě. Pohled na jakoukoli egyptskou fresku nám proto přinese jisté překvapení. Postavy jsou namalovány stylizovaně, ne však již prostými čarami. Jsou složeny ze dvou realistických pohledů, a to zepředu a z profilu. Každá část je malována tak, aby její zpracování i následná identifikace byly co nejsnazší, tedy oči, tělo a ruce čelně, hlava a chodidla z profilu. Kombinace několika realistických pohledů v jednom obraze objektu připomíná daleko pozdější metody analytického kubismu. Vztahy jsou opět vyznačeny velikostí postav, k tomu přibývá dokonale vypracovaný systém odznaků moci. Nezapomeňme, že se jedná o jednu z prvních a nejdokonalejších byrokracií. Co se týká prostoru, opět je vše v prvním plánu, hloubku může naznačit pouhé překrývání postav.



Teprve mnohem později se objevuje náznak prostorového zobrazení. Jde o šikmé rovnoběžné promítání ($\omega = 90°$). S rostoucí vzdáleností od průmětny se předměty nezmenšují, ale posouvají nahoru.



Takovéto jednoduché zobrazení prostoru se užívá především tam, kde je třeba zobrazit velké množství postav, například dělníků při stavebních pracích. V některých případech je pří zobrazení použito půdorysného průmětu, a to nejen v plánech měst a dispozicích domů. Existuje například takové zobrazení zahrady s bazénem, rákosím, stromy a zpěvným ptactvem. Aby však tyto nebyly v nadhledu a tudíž špatně identifikovatelné, jsou v nadhledu sklopeny do různých směrů tak, jak jsme zvyklí u sklopených řezů ve dnešních stavebních výkresech.

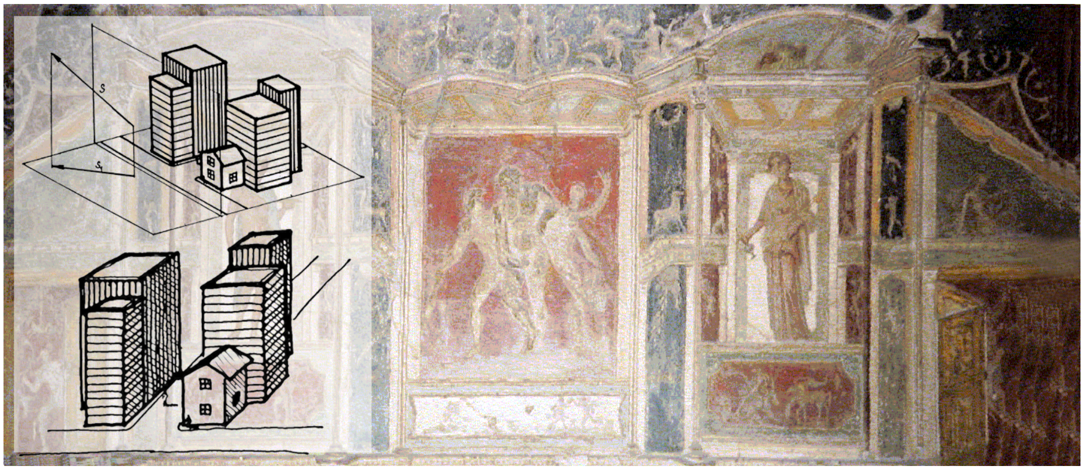
Musíme se ptát, co je příčinou takového rozporu mezi jedinečnými výkony egyptské civilizace na jedné straně a formálním až primitivním zobrazováním postav a především prostoru v egyptském malířství. Příčin je více. Jednou z nich je úzké sepětí malby a písma v egyptské kultuře. Egyptské písmo jako jedno z nejstarších bylo *hieroglyfické*, každý znak byl malou obrázkovou miniaturou. Později se znaky značně zjednodušily a vzniklo abstraktní *hieratické písmo*. Nakonec se z něj vyvinulo *démotické písmo* – lidové egyptské písmo, které se časem změnilo v písmo hláskové. Pro posvátné účely – a tím byla právě výzdoba hrobek a chrámů, z nichž pocházejí naše nálezy – se dále používalo původní klasické hieroglyfické obrázkové písmo. Užívání písma má samozřejmě svá pevně daná pravidla. Nejedná se o uměleckou činnost vhodnou pro experimentování. Funkce písaře byla v starověkém Egyptě vůbec nejdůležitější. Fresky na stěnách hrobky jsou vlastně jen nadmíru zvětšené znaky hieroglyfického písma a pevná formální pravidla pro písmo platí i zde. Jejich smyslem je co nejpečlivěji, podrobně a hlavně bezchybně popsat pozemský život obyvatel hrobky. Pokud by došlo k jakémukoliv pochybení, porušení pravidel či umělecké interpretaci, mělo by to pro další posmrtný život zadavatelů fatální důsledky. Například perspektivní zkrácení ruky zobrazené osoby by znamenalo její zmrzačení po celý zbytek jejího posmrtného života. Dalším důvodem pro tak formalizované malířské umění byl hluboký konzervatismus egyptské společnosti; jejím cílem bylo naopak cyklické, ničím nenarušené opakování přírodního řádu, jehož se cítili být součástí. Za zlatý věk byly považovány nejdávnější časy říše a cílem umění mělo být jen opakovat a donekonečna tříbit tyto osvědčené, téměř posvátné formy.

Je samozřejmé, že v takovýchto společenských podmínkách nemohlo dojít k nějakým převratným objevům v oblasti zobrazování prostoru a malířství vůbec. Jaký tvůrčí potenciál se však v egyptské společnosti skrýval, ukazuje krátká epizodická, ale o to významnější událost, tzv. El-Amarnská revoluce. Jejím původcem byl faraón Amenhotep IV, který ve snaze posílit svou moc proti příliš velké moci kněží hlavního boha Amona provedl velmi radikální náboženskou reformu, v níž zavedl monoteismus boha Atona odkazujícího k dřívějšímu starodávnému kultu Heliopole a všechny ostatní bohy zakázal. Taková radikální reforma nejspíš narazila nejen na odpor kněží, které začal pronásledovat, ale zřejmě i většiny obyvatelstva. Ve snaze ještě radikálněji se oprostit od původní náboženské tradice se přejmenoval na Achnatona a po šesti letech své vlády se přestěhoval z Théb do nově postaveného města Achetaton. Tam s sebou vzal i celý královský dvůr včetně malířů a sochařů a zakázal jim tvořit v původní egyptské náboženské tradici. Jako jediné vodítko od této chvíle mělo být kritérium pravdivosti. Ať už si o Achnatonových pohnutkách k radikální a zřejmě i násilné náboženské reformě myslíme cokoli, je pravdou, že v oblasti umění znamenala ohromný přínos. Egyptští umělci náhle vyvázaní z rigidních pravidel během krátké doby Achnatonova panování vytvořili velké množství nových děl, která se svým realistickým podáním postav zcela vymykají všemu, co bylo do té doby vytvořeno, a v tomto směru překonávají také vše, co bude kdy ve starověkém Egyptě vytvořeno potom. Můžeme se jen dohadovat, jakých výsledků by dosáhli v realistickém zobrazení prostoru, kdyby stávající poměry umělecké svobody přetrvaly. Achnaton však zemřel a po přechodném období se společnost vrátila k původnímu náboženství i původnímu uměleckému vyjadřování.

ANTIKA

Zatímco Egypťané pečlivě střeží svou tradici, v oblasti egejského moře se rozvíjí národy Dórů, Attičanů, Iónů a Aiolů. Ty mají s Egypťany čilé obchodní styky a přejímají jejich znalosti. Na rozdíl od Egypťanů však nepodléhají rigidní kulturní tradici. Vše, s čím se seznamují, podrobují kritickému zkoumání a diskusi. Stojí na počátku geometrie, matematiky a fyziky jako vědy. Demokratická tradice, podnikavost a hloubavý duch vedou ke kulturní expanzi, kterou později evropské národy nazvou *řeckým zázrakem*. Je paradoxem, že kultura, od které odvozujeme i svou kulturní identitu, nám nezanechala téměř žádná malířská a grafická díla. Je to způsobeno tím, že Řekové nepěstovali žádný kult mrtvých. Nestavěli hrobky, které by opatřovali malířskou výzdobou. Malířská výzdoba na stěnách antických chrámů, byla-li vůbec nějaká, se nezachovala. Řecké chrámy nemají kromě malé cely žádný vnitřní prostor a vnějšek vystavený povětrnostním vlivům není pro malířskou výzdobu vhodný. Můžeme proto jen odhadovat, jakých výsledků původní Řekové dosáhli. Řecké domy byly poměrně skromné (i Atény byly kromě Akropole a veřejných staveb vlastně jen velikou vesnicí) a ani bohatí občané je nejspíš neopatřovali výzdobou. Život se odehrával venku na agoře. Důležitá byla veřejná sféra, ne soukromá. Jediná grafická díla, která se nám zachovala, pocházejí s výzdoby řecké keramiky. To ale není tehdejší vrcholné umění, ale běžná řemeslná práce, která nedává přílišný prostor k prostorově zobrazovacím experimentům.

Naštěstí se nám ale výsledky řecké kultury zachovaly zprostředkovaně. Po vítězné expanzi Alexandra Velikého se řecká kultura rozšířila do celého tehdy známého světa. Nástupnické helénské říše byly v poměrně krátké době ovládnuty malým bezvýznamným královstvím na apeninském poloostrově. Italikové vytvořili největší antickou civilizaci. Sami však vynikali především ve vojenství, stavitelství, v rozvíjení právního řádu a organizace. Kulturu ponechávali „Řekáčkům“, jak sami nazývali národ, jemuž vděčili za svou kulturu. Proto můžeme většinu uměleckých děl z období starověkého Říma považovat za pokračování řecké kulturní tradice. Jedná se obvykle o kopie nebo o kreativnější převyprávění klasických řeckých děl. V římských dílnách většinou pracovali původní Řekové nebo aspoň helenizovaní levantinci, případně Egypťané. Navíc bohatší římští občané vytěsňovaní z veřejného života stále nedemokratičtějšími poměry se věnovali raději soukromé sféře a nechávali své domovy nebo letní rezidence zdobit uměleckými díly řeckých řemeslníků. Shodou okolností (pro Římany ne moc šťastných) se nám zachovaly ve vynikajícím stavu nástěnné fresky z vil v Pompejích, Herkulaneu i v samotném Římě (Neronova vila).



Tématem jsou výjevy z běžného života, idylické umělé pastorální krajinky s drobnou architekturou, atd. Je zde vidět maximální snaha o realismus postav a prostředí. Dochází k prvním pokusům o realistické perspektivní zobrazení prostoru. Starověký umělec zde již vypozoroval, že obrazy předmětů se zmenšují s rostoucí vzdáleností od průmětny a že obrazy rovnoběžných přímek kolmých na průmětnu se sbíhají v jednom nebo více alespoň blízkých úběžnících. Některé předměty jsou znázorněny spíše ve volném rovnoběžném promítání. Případné nápadné nesrovnalosti jsou maskovány předměty a osobami. První definici perspektivy nacházíme právě u starověkých Římanů, a to ve Vitruviových *Deseti knihách o architektuře*. Nepříliš přesná definice říká, že se sokly sloupů u zobrazovaných staveb stáčí opačným směrem než hlavice. Jak jinak, podle Vitruvia (1. stol. př. n. l.) jsou původci perspektivy Řekové Demokritos a Anaxagoras.

Další oblast, v níž Římané využili těchto poznatků, bylo malování divadelních kulis. První dvě složky, znázornění osob a vztahů, přebírají beze zbytku herci; malované kulisy mají vytvořit dokonalou iluzi prostoru. Dále je perspektivního zobrazování využíváno k iluzivní výzdobě interiérů. Jak ukazuje poměrně volná Vitruviova definice perspektivního zobrazení, umělci postrádající jasný návod či pravidla postupovali spíše intuitivně.

Antická společnost měla výborné předpoklady pro další rozvoj v této oblasti, a to jak znalosti (rozvoj geometrie a matematiky), tak i společenské klima (podpora umění, svoboda jednotlivce, náboženská tolerance, otevřenost k vnějším vlivům). Bohužel, římské impérium zaniká a s ním i naděje na rozvoj perspektivy.

Následuje dlouhé období úpadku, kdy jedinými nositeli kultury jsou paradoxně křesťané, kteří se svým způsobem podíleli na zániku říše. Jejich vztah k malířství je ovšem nejednoznačný a rozporný. Už v době, kdy bylo křesťanství v Římské říši pronásledováno, si první křesťané zdobili své tajné svatyně a katakomby freskami, jejichž témata kombinovala události z Nového a Starého zákona s tradičními tématy pohanských kultů (např. téma dobrého pastýře s beránkem). Autoři obrazů byli většinou nábožensky zanícení výtvarní amatéři. Naivita jejich děl však nebyla chápána jako nedostatek, ale naopak jako odklon od všeho světského, povrchního a vnějškově efektního k upřímnosti a opravdovosti náboženského prožitku. Figury jsou zobrazeny čelně s rozepjatými pažemi. Tito takzvaní oranti na nás hledí velikýma široce otevřenýma očima. Malířství se zde intuitivně vrací k očím jako k nejzákladnějšímu komunikačnímu prostředku, který předcházel i vývoji řeči a který užívají všichni primáti. Tento návrat k nejzákladnější lidské komunikaci má nejspíš vyjádřit nesdělitelnost tajemství nové náboženské konfese, důraz na důvěru a intuici. Ostatní problémy jako pojednání postav nebo dokonce prostoru jsou nedůležité. Takový postoj spolu s celkovým civilizačním úpadkem hlavně v západní části rozdělené říše vedl k tomu, že během několika generací byly ztraceny veškeré poznatky antické kultury. Ve Východořímské říši církev po krátkém období obrazoborectví přijímá malířství, ale jen slouží-li věci křesťanství. Jsou znázorňovány pouze výjevy ze života svatých a i to má svá přísná pravidla, jež určovat přináleží pouze otcům. Malíř je zde pouhým vykonavatelem vůle boží. Osoby svatých jsou vyvedeny pomocí stínů a světla velmi přesvědčivě a plasticky. Jejich pozadí tvoří jednolitá, převážně zlatá plocha, která symbolizuje bezrozměrný mimosvětský prostor, v němž přebývají svatí. Ke geometrickému znázornění prostoru nedochází. Dokonce není při konstrukci obrazu nijak zohledňováno ani konečné umístění obrazu, ani předpokládaná poloha jeho pozorovatele. Obraz je stále stejný, ať je umístěn v úrovni diváka nebo vysoko nad ním, takže při pohledu zdola se musí jevit nutně zkreslený. Žádných korekcí není použito u obrazů namalovaných na zborcených plochách, např. na valených klenbách. Díky masivní kontrole církve vývoj v Byzanci na dlouhá staletí ustrne. Zároveň ale přesné návody na obrazy různých křesťanských témat uchovají na tisíciletí znalosti antického malířství, z nichž pak čerpá obrozující se evropská kultura.

Postoj římskokatolické církve působící v původně pohanské Evropě, na území bývalé Západořímské říše, je ještě komplikovanější. Na jedné straně se obává sochařského, ale i obrazového ztvárnění svatých, aby nedocházelo prostými lidmi k jejich záměně s postavami pohanských bohů. Na straně druhé je to jediná možnost, jak působit na masy negramotného obyvatelstva. Nakonec je zde ale situace pro rozvoj malířství příznivější, aby postupným vývojem přes *období otonské, karolínské a románské* vyvrcholil v *gotice*, která obnovuje staré znalosti realistického ztvárnění postav a jejich správných proporcí. V poslední fázi dochází i k pokusům o realistické vystižení prostoru. Tím je připravena půda pro navázání na odkaz antické kultury.

RENESANCE

Malíři objevují nebo znovuobjevují realistickou malbu, která není již tak svázaná náboženskou symbolikou a jejími kánony. Samozřejmě, že náboženská tematika je stále hlavním námětem, ale je zpracována světským realistickým způsobem, jako by se zobrazovaly výjevy z běžného života. Většinou tomu tak opravdu je; náboženská symbolika jen celé dílo posvěcuje. Někdy vznikají díla plně světská, např. je-li zadavatelem bohatý měšťan nebo samo město.

Šíří se nová optimistická víra v možnosti člověka a poznatelnost světa. Tento nový životní názor vzniká v Itálii, kde jsou také nejlepší podmínky k navázání na antický historický odkaz. Jeho název je příznačný: *renesance*. Nejlépe ho charakterizuje nová architektura, která použitím jednoduchých geometrických tvarů a symetrie usiluje o jasné definování a ovládnutí prostoru. O totéž se v zobrazení prostoru pokouší také malířství. Od prvních nesmělých pokusů se během krátké doby jednoho století podařilo převážně florentským malířům nalézt všechny důležité zákonitosti *lineární perspektivy*, jejichž použití jim umožnilo malovat zcela bezchybné perspektivní obrazy. Přitom toto hledání nemohlo stavět na stávajících znalostech matematiky a geometrie. Bylo převážně intuitivní, odvozené od přímého pozorování a stálých pokusů. Úspěch tohoto hledání se stal symbolem nové doby. Schopnost namalovat obraz, který jako zrcadlo odráží reálný svět nebo dokonce vytváří dokonalou iluzi reálného světa, který se však ve skutečnosti nalézá pouze v hlavě svého tvůrce, jako by člověku umožňovala svět pochopit, měnit nebo jej dokonce tvořit. To ho naplňovalo velikou nadějí do budoucna.

LITERATURA

[1] Hykš, O. *Zrod a užití lineární perspektivy v malířství – motivace výuky geometrie.* TUL, Liberec 2006.

[2] Hykš, O. *Zrod a užití lineární perspektivy v malířství* [výukový materiál], Praha 2004 [`http://euler.fd.cvut.cz/predmety/geometrie/lp_malirstvi/`.

[3] Kadeřávek, F. *Perspektiva, Jan Štenc*, Praha 1922.

[4] Kadeřávek, F.; Kepr, B. *Prostorová perspektiva a reliefy,* ČSAV, Praha 1954.

[5] Kadeřávek, F. *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk,* ČSAV, Praha 1954.

[6] Šarounová, A. Geometrie a malířství. In *Historie matematiky I*, JČMF, Brno 1994, 191–213.

ZAMYŠLENÍ NAD VÝUKOU GEOMETRIE NA ZÁKLADNÍCH ŠKOLÁCH – JAZYK GEOMETRIE[2]

DARINA JIROTKOVÁ[3]

ÚVOD

Cílem přednášky bylo a také cílem tohoto článku je vyprovokovat hlubší zamyšlení se nad vlastní výukou geometrie, nad tím, co bychom mohli a měli změnit. Chci nabídnout naši vizi, jak by se mělo ke geometrii přistupovat. Zájmenem „naši“ myslím většinu členů KMDM na Pedagogické fakultě UK v Praze, kteří zajišťují výuku budoucích učitelů prvního stupně ZŠ.

K zamyšlení se nad stavem výuky geometrie na našich školách mě přivedla po mnoho let pozorovaná skutečnost, že geometrie jako předmět je nejen mnohými praktikujícími učiteli, ale i mnohými studenty méně oblíbená než aritmetika. Studenti se při svých praxích často snaží vyhnout geometrickým hodinám a setkala jsem se již i s případy, že někteří učitelé dokonce geometrii ze své výuky zcela vynechávají. Další početná skupina učitelů pojímá geometrii jako rýsování a pravítko, měřítko a dobře ořezanou tužku považují za nástroje, jimiž se svět geometrie otevírá a jimiž se geometrické pojmy budují. Podle písemných odpovědí na otázku: Co od kurzu geometrie očekáváte? při zahájení kurzu lze soudit, že studenti si zmíněné pojetí geometrie přináší ze středních či základních škol. Je tedy zřejmé, že přístup ke geometrii našich studentů či žáků do značné míry zrcadlí přístup jejich učitelů. (Na tuto problematiku byla zaměřena pracovní dílna H. Liškové [Lišková 2007].) Další fakta jsou, že úroveň porozumění geometrii studentů přicházejících na fakultu je o něco nižší než úroveň porozumění aritmetice. Příčina je pravděpodobně v tom, že klíčem ke geometrii je pro ně pouze spousta vzorců, bez jejichž znalosti se geometrie nedá „dělat“, a zapomenout vzorec znamená neumět geometrii. To je důvodem, proč se cítí bezpečněji, když mohou mít při ruce přehled geometrických vzorečků.

OBTÍŽNOST POPISU GEOMETRICKÉHO OBJEKTU

Zvolte si nějaké těleso (např. pětiboký nekonvexní hranol) a pokuste se jej popsat někomu například do telefonu, aniž byste použili jméno tělesa. Všimněte si, jak je to složité, jak je jazyk geometrie na jedné straně bohatý, ale na druhé straně zrádný, pokud se nepoužívá přesně. Zkuste to udělat se svými dětmi a pozorujte, jaké mentální procesy

[2]Tento článek vznikl za podpory grantu GA ČR 406/05/2444.

[3]*PedF UK v Praze, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

musí aktivizovat, aby byly schopny to těleso popsat tak dobře, aby jej ten „na druhém konci telefonu“ správně vymodeloval, nakreslil nebo identifikoval.

Navrhněte nějaký aritmetický objekt na úrovni základní školy, jehož popis by dal tolik práce a který by vyžadoval tolik zkoumání daného objektu k tomu, aby jej bylo možné jednoznačně popsat. Domnívám se, že se vám to nepovede. Všimněte si, že jazyk aritmetiky je mnohem střízlivější a jednoznačnější.

POROVNÁNÍ ARITMETIKY A GEOMETRIE Z HLEDISKA OBJEKTŮ, NÁSTROJŮ, EDUKAČNÍCH STRATEGIÍ

Odpovědi na otázky: Proč se mnozí učitelé cítí bezpečněji v aritmetice než v geometrii? V čem je geometrie a její výuka tolik jiná než aritmetika? můžeme najít v porovnání těchto dvou disciplín.

Shrnu a velice zestručním to, co jsme s M. Hejným rozpracovali v článku Svět aritmetiky a svět geometrie v (Hejný, Jirotková, 2004).

Aritmetika a geometrie, jak známo, tradičně představují dva základní pilíře školské matematiky. Z hlediska historie matematiky byly tyto dvě oblasti až do nástupu diferenciálního počtu jediné části matematiky. Avšak vztah aritmetiky a geometrie je nejen co do počtu hodin té které disciplíně věnovaný ve školské matematice výrazně nerovnovážný.

Aritmetika je opřená o pevnou strukturu čísel a jeví se jako stabilní disciplína. Společenství základních aritmetických objektů – přirozených čísel – je silně vnitřně provázáno. Každý jedinec tohoto společenství je charakterizován a vymezen právě svým postavením a vztahem k dalším číslům. Tuto strukturu aritmetiky nacházíme ve výuce již po několik století bez vážnější změny.

Situace v geometrii je odlišná. Společenství geometrických objektů nemá, na rozdíl od aritmetiky přirozených čísel, ostré hranice. Geometrie nemá nástroj, kterým by bylo možné vytvořit všechny geometrické objekty. Neexistuje žádné univerzální pouto, kterým jsou kterékoli dva takové objekty navzájem propojeny. Svět geometrie se jeví jako svět pozoruhodných individualit. Je pravda, že některé z těchto objektů tvoří jakési rodiny, které jsou lépe organizované. Příkladem mohou být konvexní mnohoúhelníky nebo pravidelné mnohoúhelníky či mnohostěny apod. Jejich organizovanost se však vztahuje jen k části celého společenství geometrických objektů.

Tato skutečnost je příčinou toho, že výuka geometrie značně podléhala a podléhá převládajícím pedagogickým a didaktickým názorům příslušné doby, a tak vyučování geometrie doznalo jenom v posledním století několika výrazných změn.

Líbí se mi přirovnání, které vyslovil M. Hejný při jedné z mnoha našich debat:

> Porovnání světů aritmetiky a geometrie lze metaforicky přirovnat ke společenství starověké Sparty a Athén. První, společenství Sparty (světa aritmetiky), je totalitní, jasně organizováno, vojensky sevřeno a řízeno neměnnými zákony. Druhé je demokratické, organizováno spíše svým vnitřním zápalem tvůrců a hledáním hodnot pravdy a krásna.

KULTIVACE MYŠLENÍ V GEOMETRII

Ve společnosti převládá názor, že pro praktický život člověka jsou důležitější aritmetické znalosti než znalosti geometrické: „Je přece důležité umět si spočítat útratu v obchodě, úroky z půjčky, daně.“ Geometrie však nabízí dítěti větší a velice pestrou paletu možností kultivace jeho intelektu. To, že geometrie přispívá ke kultivaci myšlení přinejmenším stejnou měrou jako aritmetika, potvrzuje i historie.

Je celkem přirozené se ptát, zda a eventuelně do jaké míry tento rozvojový potenciál geometrie využíváme. Otázka je aktuální zejména v současnosti, neboť se zde otevírá skvělý prostor pro jednotlivé učitele, pro jednotlivé školy v souvislosti s tvorbou školních vzdělávacích programů.

Co to však znamená kultivovat myšlení? Co by se mělo kultivovat?

VIZE, JAK PŘISTUPOVAT KE GEOMETRII

Náš pohled na to, jak bychom měli geometrii vnímat, je podložen přístupem P. Vopěnky. Ten za základní objekty považuje ty, které nazývá osobnostmi. Jejich prostřednictvím se otevírá svět geometrie. Pojem osobnost vymezuje následujícím způsobem:

> Osobností nějakého jevu je to, co z nějakého jevu činí samostatného jedince, co jej osamostatňuje a zároveň sjednocuje tím způsobem, že si ho přisvojuje - a již nic více. (Odvozeno od slov „osobný“ – osamělý, „osobiti si“ – přisvojiti si.) Nemůžeme se o osobnosti jevu přesvědčit, můžeme ji jevu pouze přiznat.
>
> (Vopěnka 1989, s. 19, 20.)

Toto vymezení je poměrně náročné na porozumění, a tak pro účely didaktiky geometrie používáme toto vymezení pojmu osobnost:

Osobnost je takový geometrický jev, který si umíme vybavit, zkonstruovat, vymodelovat na základě jeho slovního popisu, jména. Umíme ho vyčlenit ze souboru jiných jevů, jiných geometrických objektů a umíme též k němu přiřadit soubor objektů s ním příbuzných.

Jednou z prvních takových osobností je obvykle jev čtverce. Nejprve dítě tento objekt v různých situacích vidí a slyší jeho jméno. Někdy později je vyzváno, aby například ze sirek čtverec vytvořilo. Jestliže žák tuto úlohu dobře vyřeší, aniž by nějaký čtverec ve svém okolí viděl, pak představa čtverce, kterou realizuje pomocí sirek, přichází z jeho vědomí. Řekneme, že pro daného žáka je pojem čtverec již osobností.

Každou osobnost lze charakterizovat pomocí jevů průvodních. Průvodní jevy čtverce jsou například: vrcholy, strany – jevy viditelné, úhlopříčka, střed, osa souměrnosti – jevy neviditelné.

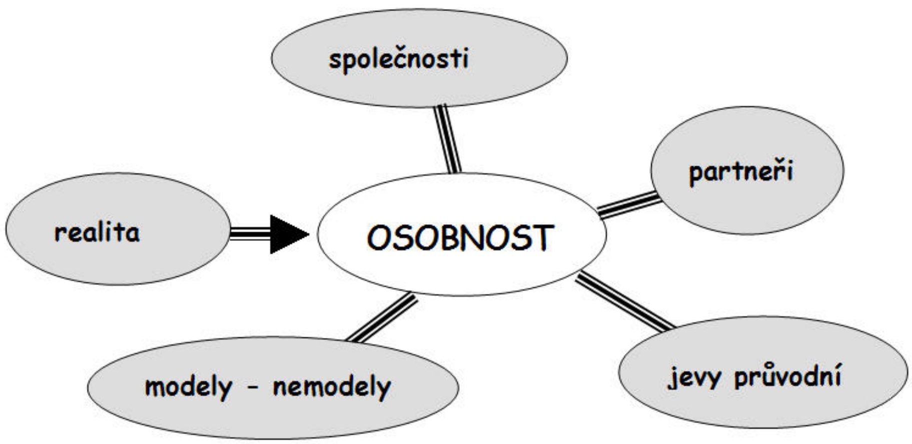
Při studiu a rozvíjení geometrických představ žáků pracujeme s vazbou

OSOBNOST $\leftrightarrow$ JEJÍ JEVY PRŮVODNÍ.

Každá osobnost je reprezentována a vyjasňována pomocí MODELŮ, ale také pomocí NEMODELŮ. S osobnostmi jsou svázáni příbuzenskými pouty jejich PARTNEŘI – např. čtverec má za partnera kružnici opsanou. Jeden z krásných partnerských vztahů je dualita mezi Platónskými tělesy – krychlí a osmistěnem, dvanácti a dvacetistěnem.

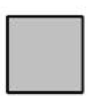
Osobnosti jsou členy různých SPOLEČNOSTÍ – čtverec patří do společnosti pravoúhelníků, pravidelných mnohoúhelníků, konvexních mnohoúhelníků, atd. Silný vliv na osobnost má samozřejmě realita, reálný svět.

Kultivovat myšlení, porozumění geometrickým jevům znamená rozšiřovat, upřesňovat vazby uvnitř tohoto schématu.

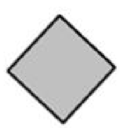


UKÁZKY

UKÁZKA 1



Obr. 1a

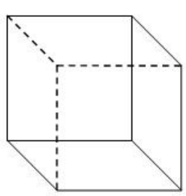


Obr. 1b

Jistě jste se setkali s tím, že dítě nebo i dospělý řekne, že útvar na obrázku 1a je čtverec a na obrázku 1b kosočtverec. Někdy žáci připustí, že to může být čtverec, ale nakoso. Co to znamená? Naše vysvětlení je, že ve zkušenostech dítěte je málo modelů.

UKÁZKA 2

Nakreslete krychli.



Obr. 2

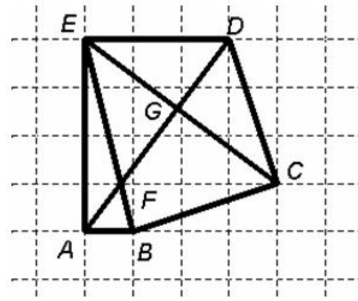
Kdo z vás namaloval krychli tak, jak je na obrázku 2? Asi málokdo. Obvykle se kreslí krychle v nadhledu zprava. Proč? – Je to standard. Máme velice omezenou zásobu modelů, kterou danou osobnost prezentujeme.

UKÁZKA 3

Dáme si malý test. Na obrázku 3 je na čtverečkovaném papíru nakreslen mřížový trojúhelník s obsahem $\frac{1}{2}$. Nakreslete další trojúhelníky mřížové, které mají stejný obsah s daným trojúhelníkem, ale jsou tvarově různé.

Podle mých poměrně bohatých zkušeností dělá tato úloha značné potíže. Proč? Nemáme takové trojúhelníky v souboru našich modelů. Jinými slovy – osobnost trojúhelník není dostatečně kultivována.

Obr. 3



Obr. 4

UKÁZKA 4

Zkuste si takovýto test s vašimi žáky. Na obrázku 4 najděte aspoň jeden trojúhelník ostroúhlý, aspoň jeden pravoúhlý, aspoň jeden tupoúhlý.

Proč je tato úloha tak obtížná?

Jednotlivé trojúhelníky jsou vloženy do obrázku a navíc je obrázek v prostředí čtverečkovaného papíru, se kterým obvykle nemáme bohaté zkušenosti. Není tedy lehké izolovat osobnost například ostroúhlý trojúhelník.

Pojďme se podívat na vazbu OSOBNOST – JEJÍ JEVY PRŮVODNÍ.

UKÁZKA 5

Jeden z účinných nástrojů pojmotvorného procesu v geometrii je hra SOVA (neboli ANO-NE). Hra je podrobně popsána v článku (Jirotková, 2004). Uvedeme fragment záznamu této hry, kterou hráli studenti v rámci kurzu geometrie pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ.

Student: „Má to pět vrcholů?“

Dívka: „Ano.“

Následovala diskuse, ve které napadli studenti dívku, že ten útvar má přece 10 vrcholů.

Dívka: „Jo ty myslíš jako přívěsek. “

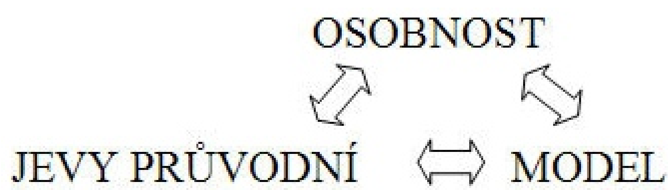
Co pro dívku znamená pojem *vrchol*? Tento jev přichází z reality a je to pro ni něco, o co se dá píchnout, co způsobí intenzivní hmatový vjem. Pokud daný útvar není z drátu, tak vrcholy nekonvexních úhlů žádný hmatový vjem nezpůsobí. Často žáci a mnohdy i studenti považují za vrchol, zejména u těles, něco, co je „na vrchu“.

S vazbou OSOBNOST – JEVY PRŮVODNÍ je potřeba pracovat v obou směrech. O tom je úloha v 6. ukázce.

UKÁZKA 6

Existuje mnohoúhelník, ve kterém a) jedna (dvě, tři či více) jeho strana je částí jedné jeho úhlopříčky? b) úhlopříčka je částí strany?

Toto je poměrně náročná úloha. A právě to, co proběhlo nebo proběhne ve vašich myslích při jejím řešení, to chceme po našich žácích. Chceme, aby začali o objektech hlouběji přemýšlet. Vše se odehrává v rámci trojúhelníkového schématu na obr. 6.



Obr. 6

Vrátíme se ke hře SOVA a k různým modifikacím této hry, které vedou k prohlubování vazeb v rámci daného trojúhelníku.

UKÁZKA 7

Hra SOVA je zaměřená na klasifikaci objektů. Hrála jsem ji se žáky 10–11letými, ale tak, že bylo vyloučeno zrakové vnímání. Jednou činností, která tuto hru předcházela, byla klasifikace souboru 13 těles na dvě skupiny. Jedna věc je, jak to žák poznává, co vnímá, jaké představy si vytvoří. Druhá věc je, jak uchopit do slov vnímané či poznané jevy a jakou roli v procesu poznávání hraje jazyk.

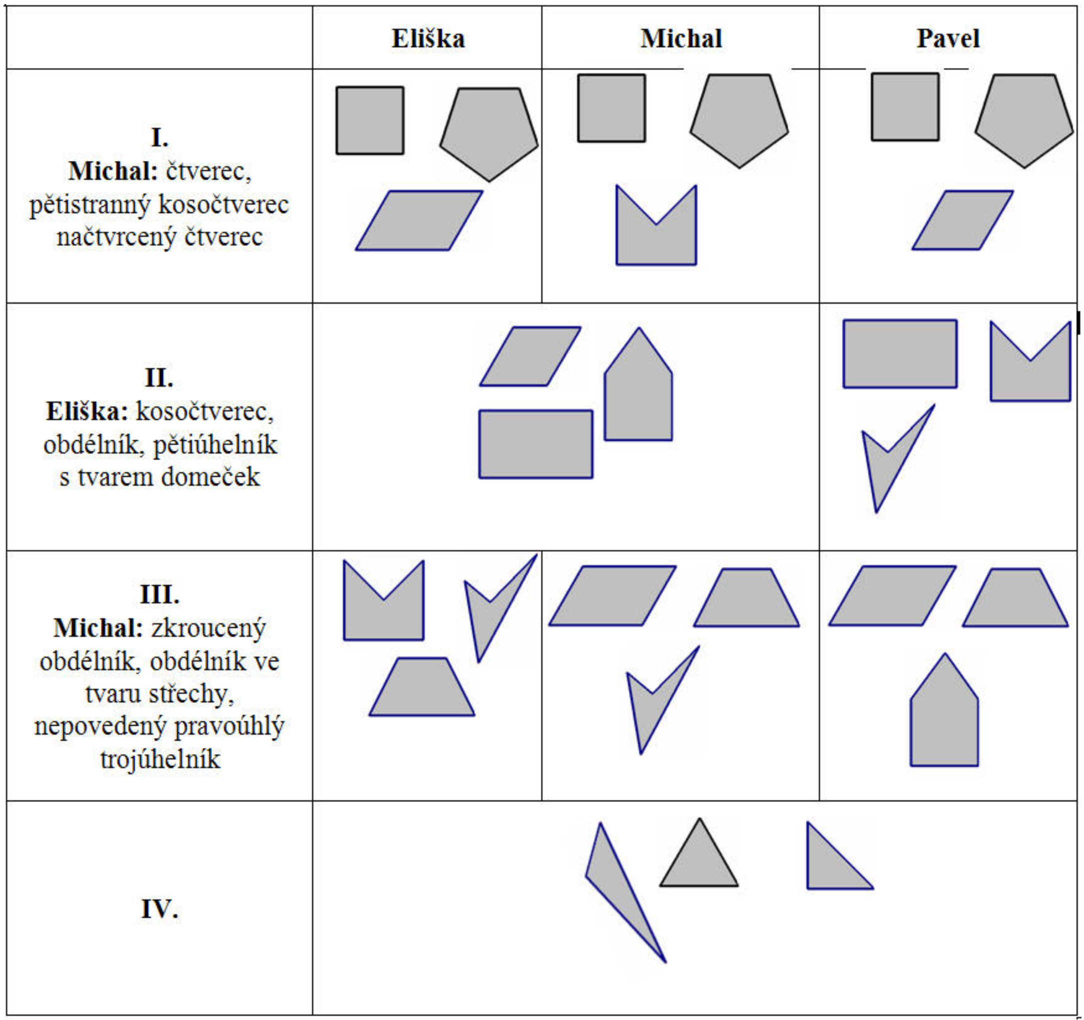
Žák Adam nazval nekonvexní pětiboký jehlan jako *nepovedený* jehlan. O čem to svědčí? Evidentně se setkal s nekonvexním jehlanem poprvé. Ze svého rejstříku těles k němu najde takové těleso, které je již pro něj osobností, najde mu partnera – jehlan.

UKÁZKA 8

Úloha, opět zaměřená na klasifikaci, byla zadána třem žákům, kteří byli učitelkou vybráni jako ti šikovnější. Úkolem bylo, rozdělit sadu 12 mnohoúhelníků do čtyř skupin po třech. To, že do jedné skupiny budou dány trojúhelníky, to jsme předpokládali. Byli jsme zvědavi, jak budou žáci klasifikovat útvary méně známé a jak budou skupiny obrazců pojmenovávat.

Zajímavé bylo řešení Elišky. Ta nejdříve rozdělila obrazce do skupin zcela náhodně. Po tom, co byli žáci vyzváni, aby své skupiny nějak popsali, si uvědomila, že by popis jejích skupin byl velice obtížný, a tak začala řešit úlohu znovu. Je patrné, že nutnost komunikace o objektech vede k jejich hlubšímu zkoumání, ke hledání společných a odlišných průvodních jevů jednotlivých skupin objektů.

Podívejme se, jak tuto úlohu naši tři žáci řešili. V levém sloupci následující tabulky jsou některé zajímavé slovní popisy jednotlivých skupin. Je uvedeno jméno autora daného vyjádření. Řešení je na obrázku 7.



Obr. 7

Výzvy k danému řešení:

Pokuste se najít vlastnosti, které spojují jednotlivé obrazce v jednotlivých skupinách každého dítěte.

Pokuste se najít obrazce, které jsou pro jednotlivé žáky již osobnostmi.

Popište Michalovu představu o pojmu kosočtverec a obdélník.

Je pro Michal pojem trojúhelník již osobností?

ZÁVĚREM

Geometrie ovšem není pouze poznávání tvarů, osobností a jejich jevů průvodních. Podstatu geometrie tvoří vztahy, které mezi těmito objekty platí. Například poznání, že v každém trojúhelníku je součet jeho vnitřních úhlů úhlem přímým, nebo že trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na kružnici sestrojené nad úsečkou AB jako průměrem, je pravoúhlý, jsou hluboké pravdy geometrického světa. Právě odhalování těchto pravd, jejich zdůvodňování, vzájemné provazování a využívání (např. u geometrických konstrukcí) tvoří první podstatu školní geometrie. Druhou podstatu tvoří jevy míry, které provazují svět geometrie se světem aritmetiky. Nejedná se zde samozřejmě o měření jednotlivostí, jak je tomu třeba v zeměměřičství, ale o hledání měřičských procedur univerzálně platných pro celou třídu geometrických jevů.

Uvedené provázání světů geometrie a aritmetiky však není jediné. Hlubší vazba obou těchto disciplín je dána skutečností, že obě jsou součástí matematiky. V obou se pracuje s přesně vymezenými pojmy, s velice podobnými objevitelskými procesy, s obecně platnými pravdami, které jsou dokazovány stejnými principy logiky.

Dodejme, že v tomto směru byla geometrie první disciplínou vůbec, která již 300 let př.n.l. dosáhla vysoký stupeň strukturovanosti a logické sevřenosti.

Autorka uvítá jakékoliv reakce od čtenářů, zejména jejich zkušenosti z učitelské praxe.

LITERATURA

[1] Hejný, M., Jirotková, D. (2004). Svět aritmetiky a svět geometrie In M. Hejný, J. Novotná, N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, s. 125–135, 1. sv.

[2] Jirotková, D. (2004) Hra SOVA a její využití v přípravě učitelů 1. stupně základní školy. In M. Hejný, J. Novotná, N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, s. 247–268. 2. sv.

[3] Lišková, H. (2007). Můžeme ovlivnit postoje žáků k matematice? In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky*, Praha, PedF UK, s. 113–119.

[4] Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*. Panorama, Praha.

DIDAKTICKÉ POLARITY A UČITEL MATEMATIKY

FRANTIŠEK KUŘINA[4]

Cílem tohoto příspěvku je dát podnět k zamyšlení nad problémy naší současné školy z několika polárně vyhraněných pozic.

ÚVOD

Lidová moudrost praví: „Když chceme, aby se nám povedla krajka, nesmíme pořád měnit vzor. Stačí jen zlepšit to, co už jsme udělali dobře“ ([1], s. 129). My ve školství pořád měníme vzor. Nehodnotíme, nezlepšujeme. Jakoby nám nešlo o lepší, ale o nové. Naše školská politika se neřídí lidovou moudrostí, ale „vědou“. Nikoliv ovšem v tom smyslu, který je pro vědu charakteristický – na základě zhodnocení současného stavu formulovat problémy a pokoušet se o jejich řešení. Reformy naší školy jsou dlouhodobě ovlivňovány tím, co se zdá být v pedagogické „vědě“ zrovna pokrokové. Připomeňme jen pro ilustraci snahy po polytechnické škole podle sovětského vzoru v padesátých létech, hnutí za modernizaci vyučování založené na studiu základních struktur (v matematice množin a logiky), vlnu programovaného vyučování ovlivněnou idejemi kybernetiky atp. Rozbor těchto otázek by jistě stál za podrobnější studii. Současná reforma podnícená *Bílou knihou* [2] nevychází ani nyní z hodnocení tradic naší školy, jejích problémů a výsledků, ale opět začínáme nově, tentokrát proti naší tradici závazných učebních plánů pro jednotlivé stupně a typy škol, které i nadále existují např. v Rakousku a Francii ([3], s. 149), se inspirujeme v anglosaských zemích, kde ovšem školství bylo tradičně vytvářeno zdola, „snahou jednotlivých obcí o vzdělávání svých členů“ ([3], s. 150). Rámcové vzdělávací programy jsou ovšem realitou naší školy: je třeba v jejich „rámci“ usilovat o dosahování co nejlepších výsledků.

„Naše myšlení a vnímání světa, zejména ve své západní variantě, je svou povahou polární, tj. není schopno vnímat nějakou věc ‚panoramaticky‘, jedním pohledem, ale rozpadá se mu do párových protikladů, mezi nimiž je možný jen náhlý přechod. To se týká vztahů ke všem věcem, které jsou emočně ‚silné‘ a kde to ‚stojí za to‘.“ ([4], s. 11)

O několik takovýchto polárních pohledů na školu se pokusíme v tomto příspěvku.

PŘÍKLADY POLARIT

TEORIE – PRAXE

Podle Bílé knihy „úroveň vzdělání, kvalita i výkonnost vzdělávacího systému a pře-

[4] *PdF Univerzita Hradec Králové, Frantisek.Kurina@uhk.cz*

devším míra toho, jak společnost dokáže využít tvůrčího potenciálu všech svých členů, se staly rozhodujícím činitelem dalšího vývoje společnosti i ekonomiky“ ([2], s. 15). „Poskytnout příležitost k rozvinutí všech schopností každému členu společnosti se stalo základním požadavkem společenským, etickým i politickým, a to v celé šíři politického spektra“ ([2], s. 16).

Praxe však je např. takováto: „S aktivním vstupem do školství je to zřejmě podobné jako s aktivním vstupem do politiky. Kontury problémů, které ještě nedávno byly zcela zřetelné, se začínají rozplývat v návalu nutností a nezbytných kompromisů. Je stále obtížnější nahlédnout systém v potřebném odstupu a případně se proti němu postavit. Ti z učitelů, pro které není práce ve školství životní epizodou, ale skutečným povoláním, navíc sledují zejména svou práci, jejíž chyby se ihned zřetelně projeví na duších dětí. Pocit zodpovědnosti je postupně vede ke ztrátě imunity vůči stále hrubším zásahům z okolí. Je pro ně těžké argumentovat, když jsou nařčeni z neschopnosti – vždyť schopnost a úspěšnost je dnes měřena výší příjmu. A tak dál polykají urážky veřejnosti a učí za podmínek, které jsou jim k dispozici. … Do školy jsem před rokem nastupoval s jasnými, snad poněkud nezralými představami. Po roce práce si odnáším jen nejasný pocit ohrožení. Mám obavy o vzdělání svých dosud nenarozených dětí i o osud učitelů, kteří se je navzdory podmínkám budou snažit vychovávat.“ ([5])

Bílá kniha zdůrazňuje, podle mého názoru nerealisticky, že strategickou linií rozvoje vzdělávání v České republice je mimo jiné: „Dosahovat vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání tvorbou nových vzdělávacích a studijních programů, které budou odpovídat požadavkům informační a znalostní společnosti, udržitelného rozvoje, zaměstnanosti a potřebám aktivní účasti na životě demokratické společnosti v integrované Evropě a které budou zároveň respektovat individuální odlišnosti a životní podmínky účastníků vzdělávání“ ([2], s. 18). Na jiném místě ovšem tento dokument správně zdůrazňuje: „Škola musí usilovat o to, aby vzdělání mělo pro všechny žáky smysl a osobní význam. To vyžaduje nejen změnu obsahu vzdělávání, metod a forem výuky, ale i změnu klimatu a prostředí školy“ … ([2], s. 18). Copak lze změnit prostředí a klima školy *„v střednědobém horizontu“*? Lze si sice idealisticky představovat, že „žáci budou nejen objektem pedagogického působení, ale stále víc se budou proměňovat v jeho aktivní účastníky. Budou hledat, bádat, objevovat, osvojovat si poznatky, komunikovat, spolupracovat s ostatními“ (citováno podle článku [6]), ale cesta k tomuto ideálu od skutečnosti dokumentované následujícími názory z praxe bude neobyčejně klopotná, zdlouhavá a je otázka, zda je vůbec možná.

„Procesu vyučování musí být účastny dvě strany. Ten, co látku přednáší a vysvětluje, a ten, co naslouchá a učivo přijímá,“ píše učitel druhého stupně základní školy ([7]). V publikovaném *Deníku učitele* se můžeme dočíst o tomto příběhu: „Popisuji dvakrát tabuli a cítím, že to, co se dospělý naučí za chvíli, bude tady dlouhá práce. Pak přijde šok. Při odměňování jedné milé dívenky plusem za aktivitu jsem nazván debilem, protože jsem začal psát do nového čtvrtletí, a tudíž nepočítal třetinu pomocné jedničky. Na svou obranu plačící prostořeká žákyně uvedla, že si to o přestávce myslí většina. Opravdu pedagogicky zapeklitá situace. Vysvětluji dětem, že pokud si o učitelích myslí, že jsou debilové, protože se snaží něco naučit, je to ubohé. Nebo jinak: myslet si to sice můžou, ale nemůžou to říci. . . . Zítra to vyřeším, pomyslím si a prchám domů. Bohužel na cestě procházím kolem žáka 8.B, který velmi vulgárním způsobem hovoří ke své spolužačce a chlubí se tím, že ví, že to pan učitel slyší.“ ([8])

Těžko si dokáži představit, jak bude v praxi uspěchaného školního provozu deformována např. krásná idea slovního hodnocení žáků.

Nemá nakonec i dnes pravdu autor „Přírodopisné studie“ z třicátých let minulého století *Jaroslav Žák*? Připomeňme si jeho slova: „Mezi neinformovaným občanstvem převládá od nepaměti bludný názor, že školství, zejména pak školství střední, je blahodárná instituce, kde zástupy mládeže toužící po vědění a vzdělání jsou poučovány a vychovávány obětavými muži a ženami. Z tohoto mylného předpokladu vycházejí všichni reformátoři a bojovníci za novou střední školu, pročež jejich úsilí končí nezdarem. Neboť střední škola je ve skutečnosti kolbiště, kde utlačovaný lid studentský, čili študáci, vede nesmiřitelný boj proti panující kastě prófů neboli kantorů.“ ([9], s. 7)

ZÁMĚRY – VÝSLEDKY

Bílá kniha je uvedena citátem z *Komenského Obecné porady o nápravě věcí lidských*:

Přejeme si by „celé lidské pokolení bylo vzdělané po všech věkových stupních, stavech, pohlaví a národech . . . Aby každý člověk byl celistvě vzdělán a správně vycvičen nikoli jen v nějaké jediné věci nebo v několika málo nebo v mnohých, nýbrž ve všech, které dovršují podstatu lidství.“ ([2], s. 13)

A její autoři to myslí vážně, neboť kladou otázku: Jak umožníme, aby každý žák byl úspěšný? ([2], s. 19)

Všimněme si nejdříve reality školy ze vzdáleného pohledu.

Americké školství ovlivňovaly takové autority jako *John Dewey, William Kilpatrick, Jerome Bruner* a přece v roce 2000 vidí *Philip Roth* americké univerzitní vzdělání takto: „Tady v Americe pošetilosti narůstají hodinu od hodiny. Všechny vysoké školy rozjely doplňovací programy, aby děti naučily, co mají umět v deváté třídě. . . Dneska studenti prosazují svou nedostatečnost jako výsadu. Nedokážu se to naučit, takže je s tím něco v nepořádku. A také je především něco v nepořádku s tím nemožným učitelem, který to chce učit . . . Naši studenti (na univerzitě) jsou propastně zabednění. Dostalo se jim neuvěřitelně mizerného vzdělání. Jejich životy jsou intelektuálně jalové. Přicházejí sem a neznají nic, a většina z nich tak i odchází.“ ([10], s. 261 a 155)

Při přednášce v Praze na tato slova reagovala jedna kolegyně z pléna: „Na naší univerzitě je to také tak, co mám dělat?“ Neuměl jsem jí poradit. Jako perličku však poznamenávám, že jeden z uživatelů hodnotí americkou učebnici lineární algebry slovy „for handicapped students“ ([11], s. 12).

A jak je to u nás? V zemi Komenského, kde již v r. 1885 psal *Gustav Adolf Lindner*:

„Každodenní zkušenost nás může o tom poučiti, že výsledky, jakých se namnoze dodělááváme ve školách, nikterak neodpovídají onomu ohromnému aparátu, s jakým se tam pracuje a jehožto rozsáhlost a složitost se jeví v učebních osnovách příslušných škol. My chceme vypěstovati obry a vychováváme trpaslíky." ([12], s. 164) . . . „Náprava neleží ve výběru látky, tj. v osnově učební, nýbrž, a to hlavně, ve způsobu, jakou se učivo učňovi podává, tj. v metodě vyučování." ([12], s. 170)

Ivan Klíma hodnotí naši školu podobně jako *P. Roth*: „Mladí lidé vycházejí ze školy pro život málo připraveni: neumějí se chovat, mluvit, myslet, nacházet mezi množstvím fakt souvislosti, natož hierarchii, vědí jen málo o smyslu svého konání, málo tuší o nějaké stupnici hodnot, nerozeznají umění od spotřebního braku, jsou nepřipraveni pro společenský stejně jako pro manželský život, pro rodičovství." ([13])

Vyřeší tyto problémy škola orientovaná na kompetence? Bude-li současná reforma úspěšná, pak ano, neboť je, např. podle RVPG ([14], s. 13–15), na učení pro život, řešení problémů, komunikaci a tvořivost zaměřena.

Emotivní hodnocení *P. Rotha* a *I. Klímy* korigujme výsledky mezinárodního výzkumu OECD z roku 2003. V matematické gramotnosti se zde Česká republika umístila na 13. místě (za Hongkongem, Finskem, Koreou, Nizozemskem, Lichtenštejnskem, Japonskem, Kanadou, Belgií, Macaem, Švýcarskem, Austrálií a Novým Zélandem, před Dánskem, Francií, Švédskem, Rakouskem a Německem, daleko před USA a Ruskem (citováno podle článku [15]).

TRANSMISE – KONSTRUKCE

Již v r. 1967 napsal americký učitel *John Holt*: „My učitelé, možná všechny lidské bytosti – jsme v zajetí pozoruhodné iluze. Myslíme si, že můžeme vzít obrázek, konstrukci, fungující představu čehosi vybudovanou v naší hlavě na základě dlouhé zkušenosti a znalosti a přeměnou této představy do posloupnosti slov ji přenést celou do hlavy někoho jiného. Snad v jenom případě z tisíce, je-li vysvětlení mimořádně dobré a posluchač mimořádně zkušený a dovedný v přeměně posloupností slov do skutečnosti slovy nepopsané a sdílejí-li vysvětlující a posluchač mnoho zkušeností, o kterých se hovoří, může tento způsob fungovat a nějaký skutečný smysl může být sdělen. Ve většině případů ale vysvětlování nezlepšuje pochopení a může je dokonce zhoršovat." ([16], s. 159)

Jean Piaget zdůrazňuje v r. 1979: „Padesát let experimentování nás poučilo, že neexistuje žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného a jež by nebylo strukturováno aktivitou subjektu." (citováno podle knihy [17], s. 65)

Yves Bertrand vysvětluje: „Chápat neznamená být divákem, ale konstruovat si reprezentace . . . Aby žáci problém pochopili, znásobují často učitelé své úsilí. Vysvětlují, používají ještě více slov, dělají ještě více nákresů. Požadují po žácích, aby byli pozorní, aby se snažili chápat; a vysvětlování, které už jednou ztroskotalo, ztroskotává často znovu." ([17, s. 85)

Nahrazení pouhé transmise poznatků konstruováním poznatkových struktur na základě nejrůznějších podnětů, např. pod heslem „Vše vlastní a ustavičnou praxí žáků" ([18], s. 104), požaduje ovšem již J. A Komenský. Naši školu bohužel ovlivnil učitel národů spíše heslem „Aby s žádným samým učitel nikdy nepracowal w ničemž . . . Aby w jednu a touž hodinu wždycky wšickni w škole jedno a též dělali, a žádnému jiného nic ani psáti ani čísti ani míti se nedopauštělo" ([19], s. 195), které rovněž můžeme v jeho díle nalézt.

Jsem přesvědčen, že realizace konstruktivních přístupů ve školní praxi může výrazně přispět ke kultivaci kompetencí žáků. Podrobnější informace o této problematice je možné nalézt v naší knize [20] nebo v disertační práci *Jany Cachové* [21].

Vzdělávání orientované na získání určitého konkrétního souboru poznatků, při nichž nejde o porozumění, může mít instruktivní charakter (jak vyřešit soustavu rovnic, jak nastartovat automobil, . . .).

PAMĚŤ – POROZUMĚNÍ

Současná doba s nepřebernými zdroji informací (encyklopedie, databáze, internet, . . .) přispívá k vytváření iluze, že vzdělaný člověk si nemusí nic pamatovat. Je jen třeba, aby se naučil pracovat s informačními zdroji. Tato iluze je škodlivá. „Člověk je do určité míry určen tím, co má ve své paměti k dispozici. Paměť je totiž dispozicí naší mysli, zakládá možnosti řeči i způsob vnímání, vnitřního zakoušení a dokonce i smyslového vnímání" ([22], s. 144). Pro studium matematiky je nezbytné porozumění, porozumění je nemyslitelné bez paměti: „Porozumění je propojení paměti se schopností vhledu . . . Moderní školství zdánlivě omezilo roli paměti při vyučování, zdánlivě ve prospěch vhledu, pochopení. Žáci se toho údajně učí méně nazpaměť a více toho mají nahlédnout, pochopit a „umět" s tím pracovat. V praxi to má ale řadu háčků, z nichž si všimneme dvou: malé odpovědnosti vůči formování paměti a malé schopnosti skutečně zažehnout náhled . . . Právě to je ovšem největší úskalí moderního školství. Mnoho z toho, co je vydáváno za záležitost náhledu, se děti v praxi učí zpaměti." ([22], s. 145)

Učení orientované na paměť – bez porozumění – se označuje jako biflování. *Petr Špína* rozděluje „žáky na tři skupiny. První preferuje jazyky a pamětní učení, obvykle se vyhýbá matematice a fyzice. Druhá má technické, přírodovědné a matematické skony; pravopisem se moc netrápí. Třetí nechce dělat nic, nic je nebaví" (reakce na článek [23]). Jak získat tuto třetí skupinu pro školní práci? Lze i tyto žáky „naučit vše?" Někteří učitelé uvádějí, že mají takovýchto žáků ve svých třídách až 40%. To cosi vypovídá o naší škole: nejen o žácích a učitelích, ale i o společnosti.

UČIVO – KOMPETENCE

Učivo a kompetence jsou dva póly současné reformy, které budou podle mého názoru klíčové pro posouzení jejího úspěchu či neúspěchu. Učivo je „základním prostředkem pro dosahování očekávaných a klíčových kompetencí ", otázka, jak se to bude realizovat, není v předložených materiálech řešena, nebude patrně vyřešena ani vytvořením školních vzdělávacích programů, neboť by to musely být teoreticky podložené studie, na jejichž vypracování nebude na školách ani čas a mnohde ani nutné podmínky. Břemeno tohoto nejobtížnějšího úkolu spočívá tedy na učiteli. Možnost modifikace vzdělávacích obsahů, kontrola dosahovaných výstupů na jednotlivých úrovních škol a prakticky nekontrolovatelné osvojování si kompetencí žákem, obtížnost práce učitele ještě zesilují. „Učivo, které učitel při vyučování zprostředkuje, není zkrácený, zhuštěný, ani zjednodušený výtah vědecké disciplíny. Na učiteli zůstává ... jak vybrat to nejpodstatnější, co je základním a rozšiřujícím učivem, jak se budou rozvíjet určité obecné principy, ideje, dovednosti, ... Jak dosahovat, aby učivo nebylo chápáno pouze z hlediska kognitivního, ale aby se uplatnila i hlediska hodnotová ... Teprve za těchto podmínek se látka přetváří v učivo v plném smyslu.“ ([3], s. 152) Nástin, jak realizovat cestu od učiva ke kompetencím, v publikovaných dokumentech chybí.

Skutečnost, že tzv. očekávané výstupy, které představují závazné a ověřitelné výsledky, jsou v některých částech formulovány příliš „velkoryse“, je zdrojem mých obav, aby se škola místo školy práce nestala školou předstírání.

Můžeme brát vážně např. následující *závazné* a *ověřitelné výsledy* gymnaziálního vzdělávání?

- Žák tvořivě využívá informací z odborné literatury, internetu, tisku a z dalších zdrojů, kriticky je třídí a vyhodnocuje ([14], s. 21).
- Žák volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku) ([14], s. 25).
- Žák uplatňuje odpovědné a etické přístupy k sexualitě ([14], s. 54)...

O tyto cíle škola má nejen usilovat, ale tyto výsledky má *každý* absolvent gymnázia mít, a to ne slovně, reprodukčně, ale *fakticky*. Nemohu uvěřit, že autoři reformy dnes, v 21. století, takto idealisticky přeceňují možnosti školy, bez ohledu na ekonomické, společenské a jiné vlivy, které na žáky, ale i na učitele, působí.

BEZCHYBNÝ VÝKON – CHYBO, BUDIŽ VÍTÁNA

Historicky významná role matematiky tkví v jejich aplikacích v přírodních, technických, ale i společenských vědách. Matematika je v nejrůznějších oborech lidské činnosti úspěšná, protože je spolehlivá, „je metodou předpovídání pomocí formálních kalkulů“ (Vopěnka, [24]). Má-li škola připravovat pro praxi, pro užití matematiky, musí dbát o spolehlivé zvládnutí základních dovedností, postupů a metod řešení úloh. Jejich stanovení by mělo být v péči orgánů státu a didaktiky matematiky, přenechání „iniciativy“ v tomto směru jednotlivým učitelům nepovažuji za rozumné. Jestliže jsme v praxi svědky toho, že získané výsledky nevyjdou tak, jak jsme očekávali, je to zpravidla neadekvátním modelováním příslušné přírodní nebo společenské reality. Může se ovšem vyskytnout i „trapná“ chyba: v roce 1998 shořela po 9 ? měsíci letu americká sonda Mars Climate

Orbiter, protože údaje odeslané ze sondy v mílích pokládala NASA za údaje v kilometrech (škoda 125 000 000 USD!). Uvědomíme-li si, že absolventi jakéhokoli typu škol absolvují přijímací zkoušky, kde jde zpravidla pouze o procenta správných odpovědí, a nikoho nezajímá, jak k nim uchazeči přišli, nemůžeme se divit, že škola je ovládána „kultem správných odpovědí“ . Tato snaha mít školu bez chyb je projevem nesprávného chápání vzdělávacího procesu. Ve škole, v níž žáci za pomoci učitele docházejí k matematickým poznatkům, škola, v níž žáci matematiku vytvářejí, se bez chyb neobejde. Každá nesprávná odpověď, každá chyba je informací o aktuální úrovni poznání žáka, je důležitou a nezastupitelnou složkou každého přirozeného poznávacího procesu. A vzdělávací proces bychom za poznávací proces považovat měli. Z tohoto hlediska jsou chyby vítány. Chyby hrají důležitou pozitivní roli v jakémkoli poznávacím procesu (přirozeně i v „opravdové“ vědě), hrají negativní roli v procesech aplikačních a evaluačních. Proces tvorby je bez chyb nemyslitelný. Vzdělávání je tvorba myšlenkového světa dětí.

ŠKOLA – SPOLEČNOST

Paní učitelce na prvním stupni se většinou daří budovat školské akvárium s atmosférou dobře odizolovanou od vnějšího světa. Žáci se při troše taktu a určitých zkušenostech pedagoga režimu školy bez větších potíží přizpůsobí. Na konci základní školy a na škole střední se to již obvykle nedaří. Na rozdíl od idejí, které jsou pro pěstování matematiky významné, totiž rozvíjení racionální argumentace a originálního myšlení, je podle *Stanislava Komárka* realita škola takováto: „Školní vzdělání, zejména pak jeho nepovinné stupně. . . , výrazně selektuje ani ne tak na inteligenci, jako . . . na schopnosti sebeovládání. Neprosazovat se ihned a . . . násilím, ale pomalu a oklikou. Učit se věcem nepovažovaným za zajímavé, příjemné a namnoze ani užitečné. Potlačit své mínění a přijmout, alespoň na oko, cizí, v kontextu pokládané za správné. Nedat nadřízeným osobám najevo pochybnosti o jejich kompetenci . . . byť by takové byly nabíledni. . . Neklást odpor ani při evidentní újmě, není-li z poměru sil zřetelné, že vítězství je pravděpodobné. . . “ ([25], s. 129) V podobném duchu píše *Jiří Tůma*: Škola „postupně odnaučuje používat vlastní rozum k pochopení látky a vede děti k tomu, aby ho užily tam, kde je to více potřeba: ke zjištění toho, co vlastně učitel očekává jako správnou odpověď.“ ([26])

Ani původnost není podle *S. Komárka* v naší škole rozvíjena: „Originalita v myšlení je obecně podporována jen ve velmi úzkém rámci a ve velmi malých dávkách, které v tom kterém systému neuvádějí nic v pochybnost. V množství jen nepatrně větším se stává prudkou selekční nevýhodou, ženoucí svého nositele do obtíží a nezřídka i do záhuby.“ ([25], s. 117)

Milan Kundera vidí velmi kriticky celou naši společnost: „. . . je možno představit si budoucnost bez třídního boje nebo bez psychoanalýzy, nikoli však bez nezadržitelného vzestupu přejatých myšlenek, které vepsány do computerů, propagovány masovými médii, mohou se stát brzy silou, která rozdrtí veškeré originální a individuální myšlení, a udusí tak samu podstatu evropské kultury novověku.“ ([27], s. 43)

Těžko mohu posoudit oprávněnost názorů, které jsem právě citoval. Zdá se mi však, že charakterizují náš svět realističtěji než *Bílá kniha*. Rád připomínám, že její autoři považují svůj spis za „otevřený dokument, který by měl být v pravidelných intervalech kriticky zkoumán a v souladu se změnami společenské situace revidován a obnovován.“ ([2], s. 7) Pokud vím, k žádné revizi nedošlo, problém je však v tom, že Bílá kniha nehodnotí kriticky ani situaci v době svého vzniku.

Otázky spjaté se vzděláváním jsou do jisté míry podobné v celém civilizovaném světě. Z hlediska přístupů k edukaci se mi jeví jako zajímavý sociologický rozbor americké společnosti provedený v r. 1997 Paulem Rayem. Tento autor dochází na základě studia postojů, chování a uznávání hodnot ku třem společenským kategoriím: 29% americké společnosti jsou „tradicionalisté“ (konzervativní lidé s tradičními náboženskými hodnotami). Téměř 50% Američanů náleží kategorii „modernistů“, kteří oceňují osobní úspěch, technologický pokrok a klasickou spotřební společnost. 24% obyvatel Spojených států jsou „kulturní tvořivci“. Tato skupina vyznává hodnoty typické pro společnost založenou na znalostech, má zájem o rozvoj osobnosti (citováno podle knihy [28], s. 150). Se silnou mírou zjednodušení lze říci, že z vrstvy tradicionalistů se budou rekrutovat ti žáci, kteří nemají o nic zájem, modernisté pak budou požadovat rychlé získání aplikovatelných poznatků, budou tedy mít sklon ke vzdělávání instruktivního typu a pouze tvořivá část společnosti by patrně uvítala konstruktivistické pojetí vzdělávání.

ZÁVĚR

V tomto subjektivně laděném příspěvku jsem formuloval názory, s nimiž nemusíte souhlasit, ale které by Vás měly vyprovokovat k utvoření si svého vlastního názoru na problémy naší současné školy.

Jsem přesvědčen, že je správné, aby se škola snažila rozvíjet každého žáka podle jeho schopností, je však třeba přiznat, že realitou školy je, že nemůže být každý žák úspěšný.

Souhlasím s tím, že reformou se „otevírá prostor pro další rozvoj autonomie škol, pro uplatnění jejich potenciálu, pro větší flexibilitu vzdělávacího systému i pro vyšší efektivitu vzdělání“ ([2], s. 38). Obávám se však, že reforma dává i příležitost k snižování úrovně naší vzdělanosti. Může to nastat na těch školách, které nevytvoří dobré předpoklady k neformálnímu rozvíjení kompetencí na dobře organizované práci školy ve všech disciplínách.

Plně se ztotožňuji s *Václavem Jamkem*: „Škola není místo, kde by dítě mělo získat co nejvíce vědomostí a přitom se pokud možno vůbec nenamáhat. Koncept škola hrou spíše žádá, aby škola využívala spontánní objevovaní schopnosti dítěte a tak je k námaze motivovala, ne však, aby je veškeré námahy ušetřila. Škola bez námahy a píle není žádoucí: především ve škole si dítě může vštípit základní kulturu úsilí, která je v naší civilizaci potřebná. Požadovat výkon - a to výkon smysluplný – je jednou ze základních funkcí školy.“ ([29], s. 184)

LITERATURA

[1] Bédard, J. *Komenský*. Jota. Brno 2005.

[2] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* MŠMT, Praha 2001.

[3] Skalková, J. *Pedagogika a výzvy nové doby*. Paido, Brno 2004.

[4] Komárek, S. *Spasení těla.* MF, Praha 2005.

[5] Malijevský, I. Zpráva o neúspěšné misi. *Literární noviny*, 29, 2000.

[6] Houska, J. K realizaci Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání v matematice. *Matematika – fyzika – informatika*, č. 7, roč. 15, 2006.

[7] Pardubský, O. Základní škola by měla končit závěrečnou zkouškou. *Lidové noviny,* 19. 5. 2000.

[8] Deník učitele základní školy. *Lidové noviny*, 27. 4. 2001.

[9] Žák, J. *Študáci a kantoři*. Beta, Praha 2005.

[10] Roth, P. *Lidská skvrna.* Volvox Globator, Praha 2005.

[11] Motl, L., Zahradník, M. *Pěstujeme lineární algebru.* Karolinum, Praha, 2002.

[12] Lindner, G. A. *Výbor z díla.* SPN, Praha 1983.

[13] Klíma, I. Sinus šedesáti stupňů. *Lidové noviny*, 29. 6. 1996.

[14] *Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání.* VÚP, Praha 2004.

[15] Kvačková, R. Matematika by měla být víc holčičí. *Lidové noviny*, 10. 12. 2004.

[16] Holt, J. *Jak se děti učí.* Strom, Praha 1995.

[17] Bertrand, I. *Soudobé teorie vzdělávání.* Portál, Praha 1998.

[18] Komenský, J. A. *Didaktika analytická.* Samcovo nakladatelství, Praha 1946.

[19] Komenský, J. A. Nawržení krátké o obnowení škol w Králowství českém. In *Didaktika.* U Řivnáče, Praha 1849.

[20] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

[21] Cachová, J. *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice.* PF UK, Praha.

[22] Kratochvíl, Z. *Výchova, zřejmost, vědomí.* Herrman a synové. Praha 1955.

[23] Feřtek, T. Co je to vlastně biflování. *Reflex*, 41, roč. 2004.

[24] Vopěnka, P. Poznámky o současné matematice. *Filosofický časopis*, 1971.

[25] Komárek, S. *Sto esejů o přírodě a společnosti.* Vesmír, Praha 1995.

[26] Tůma, J. Skryté osnovy. *Respekt,* 15, 1995.

[27] Kundera, M. *Zneuznané dědictví Cervantesovo.* Atlantis, Brno 2005.

[28] Cílek, V. *Makom.* Dokořán, Praha 2004.

[29] Jamek, V. *O patřičnosti v jazyce.* Nakladatelství Franze Kafky, Praha 1998.

Jednání v sekcích

MATĚJ – KATALOG PRACÍ K VÝUCE MATEMATICE NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍHO VZDĚLÁVÁNÍ

JANA CACHOVÁ[1]

Mezi tím, jak se děti skutečně učí a jak se učí (jsou vzděláváni) žáci ve škole, je mnohdy značný rozdíl. Dokladem jsou i následující myšlenky:

> „. . . Člověk není pasivním příjemcem podnětů, přicházejících z vnějšího světa, ale ve zcela konkrétním smyslu tvoří svůj svět. . . “ (L. von Bertalanffy, 1964)

> „. . . tradiční autokratický styl práce učitele, převážně hromadný způsob výuky, strach ze známkování utlumují žákovu zvídavost, spolupráci a spolutvořivost, snahu z chyb se učit a těšit se z výsledků práce. . . “ (J. Kozlík, 2003)

Stává se, že školní vyučování, místo aby děti vedlo k poznávání okolního světa a jeho zákonitostí, učí žáky reprodukovat informace, kterým mnohdy ani dobře nerozumějí. Místo aby je pobízelo k aktivním činnostem a tvořivému hledání, navádí je k pasivitě. Tak se často stane, že i přirozeně zvídavé děti postupně ztrácejí zájem o školní práci, protože vidí nesourodost mezi skutečným životem a školou.

Naopak podnětné vyučování (viz blíže Stehlíková, Cachová, 2006), které vyrůstá z principů konstruktivizmu, si klade za cíl (v souladu s výše uvedeným citátem Bertalanffyho) rozvíjet prostřednictvím nejrůznějších matematických činností vnitřní matematický svět žáka - tedy volně řečeno vytvářet matematiku v mysli dítěte. Učitel se při tom záměrně soustředí na žákovy představy o pojmech, na jeho chápání souvislostí, porozumění pojmům, postupům a na to, jak tyto poznatky žák dokáže používat a pracovat s nimi. Sám hledá a postupně vnáší do vyučování takové podněty, které žákovi pomohou vytvářet si skutečně správné představy o studovaných pojmech a jevech, napomohou porozumět souvislostem a postupům tak, aby je dokázal vhodně aplikovat. Z tohoto stručného vymezení podnětné výuky je patrné, že rozvíjí a podporuje tvořivost žáků, ale rovněž klade nároky i na tvořivost učitele.

Záměrem elektronického katalogu MATěj, který touto cestou představujeme a který je na adrese: `http://lide.uhk.cz/home/pdf/ucitel/cachoja1/www/Matej.htm`, je

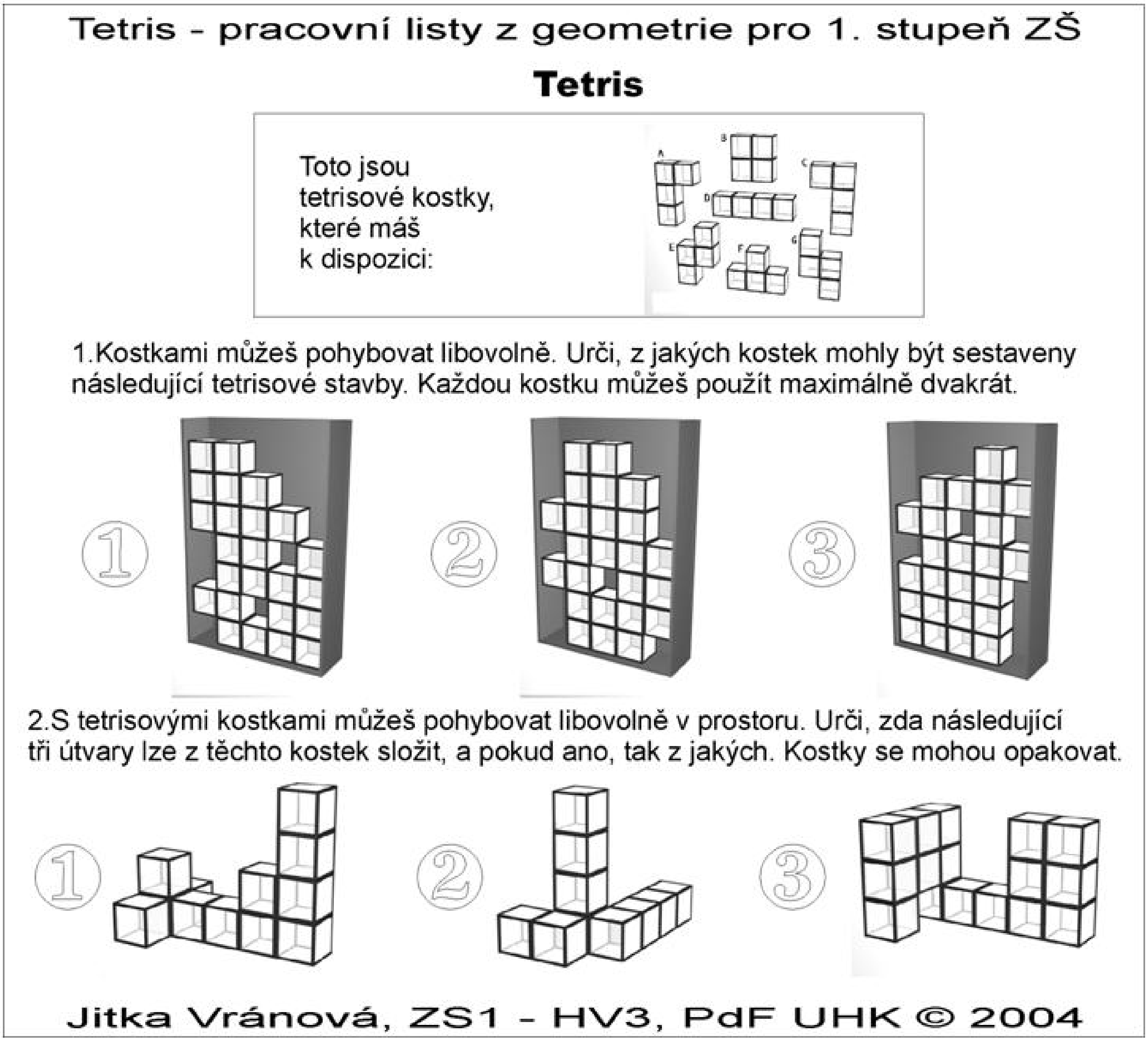
[1] *Katedra matematiky PdF UHK, jana.cachova@uhk.cz*

alespoň částečně přispět k širšímu uplatňování tvořivých činností v matematice primární školy a k rozvíjení tvořivosti žáka i učitele.

Podkladem pro vznik katalogu se staly seminární práce studentů primárního vzdělávání PdF UHK v Hradci Králové. Sami studenti přicházeli s návrhy, aby materiály z didaktiky matematiky, kterým věnovali čas, úsilí a vlastní nápady, byly dále využívány.

Cílem katalogu je tak ukázat přínos studentských prací pro školní praxi – a to nejen pro ostatní studenty učitelství pro první stupeň, ale i pro zájemce z řad učitelů.

UKÁZKA PRACOVNÍHO LISTU



Katalog MATěj obsahuje následující materiály k podpoře výuky matematice na 1. stupni základního školství:

- Didaktické hry (ukázky návrhů didaktických her v matematice).

- Modely (návrhy pomůcek a modelů, podporujících utváření správných představ nejen v geometrii, ale i v aritmetice, při řešení slovních úloh atd., a náměty pro činnosti s nimi).
- Problémové úlohy (ukázky úloh a problémů, kterými je možné vést žáky k hledání vlastních nápadů, k aktivitě a samostatnosti, k tvorbě hypotéz a jejich ověřování).
- Projekty (návrhy možných projektů jako konkrétní inspirace pro učitele „jak na to“).
- Pracovní listy (k samotné podpoře školní výuky – lze je snadno vytisknout a uplatnit ve vyučování – formou samostatné práce žáků, práce ve skupinkách nebo při společných aktivitách celé třídy; mohou posloužit k opakování a procvičování učiva, k diferenciaci práce žáků podle jejich individuálních potřeb, za domácí cvičení apod.).

Jsme teprve na samém začátku, ale průběžně budeme katalog doplňovat o další podnětné práce. Věříme, že tak můžeme přispět k tomu, aby se žáci ve škole skutečně učili matematice prostřednictvím podnětných činností.

LITERATURA

[1] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. s. 1–31. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

SLOVNÉ ÚLOHY S RÔZNYM VÝKLADOM[1]

MATÚŠ HARMINC[2]

S problematikou, ktorej je venovaný tento príspevok, sa väčšina z nás stretla. V matematike a pri vyučovaní matematiky sa s ňou stretávame na každom kroku. Je však omnoho širšou, týka sa oblastí komunikácie, vyjadrovania a myslenia.

Začneme krátkym vtipom, vystihujúcim čiastočne podstatu fenoménu, ktorý tu hrá hlavnú úlohu. Stretnú sa dvaja a ten jeden hovorí: Ty, Jano, požičaj tisícku. Druhý na to: Hm, dobre, ale od koho? Smiech nás prejde, keď si uvedomíme, že ten istý fenomén vystupuje v kauzách, ktorých riešenie je náplňou práce ústavného súdu. S nejednoznačnosťou výkladu formulovaných viet, ktorá je podstatou množstva vtipov i súdnych procesov, zápasia nielen tvoriví učitelia základných škôl, ktorí si sami pripravujú zadania úloh, ale aj tvorcovia maturitných úloh, úloh v matematických korešpondenčných seminároch,

[1]Príspevok bol pripravený a realizovaný s podporou Grantu č. 3/3009/05 KEGA.
[2]*Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice, matus.harminc@upjs.sk*

v matematickej olympiáde. Nehovoriac o pravidlách súťaží, dopravných a bezpečnostných predpisoch, obchodných zmluvách i zákonoch. Nás k tejto problematike, o ktorej píšeme nižšie, priviedla prednáška profesora M. Hejného na Letnej škole z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005 a príspevok [2] publikovaný v zborníku z nej.

Častými prekážkami úspešného vyriešenia slovnej úlohy bývajú nepochopenie alebo neúplné pochopenie kontextu úlohy a šum alebo úplný neúspech pri získavaní informácií o štruktúre úlohy z jej zadania (viď [3], str. 368). Tieto prekážky vyplývajú jednak zo subjektívnych príčin daných najmä nedostatočnými vedomosťami, zručnosťami a malou osobnou skúsenosťou riešiteľa, nepozornosťou, jednak z príčin, ktoré od riešiteľa nezávisia. Objektívnym dôvodom stavu neistoty v priebehu procesu interpretácie zadania úlohy môže byť neúplnosť zadania úlohy, chýbajúci číselný údaj, nejednoznačnosť zadania vzťahov a väzieb medzi objektmi úlohy, vplyv kontextu, prostredia, časovej následnosti alebo časového stresu.

Jednou zo schopností, ktorej pestovanie by sme nemali zanedbávať, je kritické čítanie textu zadania slovnej úlohy s následným rozhodnutím, či je jednoznačne interpretovateľná a v prípade, že nie je, zostavením zoznamu obhájiteľných výkladov zadania. Túto schopnosť môžeme vďaka náhode a chybám v uvažovaní žiakov trénovať aj na úlohách, ktoré majú jednoznačný výklad. Programovo to môžeme robiť zaraďovaním úloh, ktorých zadanie je možné vysvetliť si viacerými spôsobmi, pričom každý z nich je zmysluplný a zadaním tolerovaný. Takéto slovné úlohy nazývame v ďalšom difúznymi.

V rámci klubu učiteľov matematiky, v ktorom sa na našej fakulte približne raz za mesiac stretáva asi dvadsať učiteľov matematiky zo stredných a základných škôl, bol vykonaný prieskum reakcií na difúzne úlohy. Samotné úlohy boli vybrané spomedzi úloh, s ktorými sa učitelia stretli v svojej pedagogickej praxi a predložili nám ich ako difúzne, pričom niektoré zadania vyžadovali úpravu. Učiteľky, ktoré boli ochotné spolupracovať, dostali zadania nasledujúcich troch úloh:

I. Koľko kvádrov vieš poskladať z dvanástich rovnakých kociek?

II. Z kocky s hranou 5 cm utvor čo najvyšší kváder s podstavou 3 cm $\times$ 4 cm. Aká bude jeho výška?

III. Záhradka pre kuriatka je 5 m dlhá a 3 m široká. Z troch strán je pletivo, pri štvrtej je kurín. Aby kuriatka nepodliezali pletivo, je nutné záhradku obložiť. Máš na to štyri 2-metrové dosky, jednu 3-metrovú a jednu 5-metrovú dosku. Ako sa to dá urobiť? Nakresli možnosti obloženia.

Úlohy mali predložiť žiakom svojich tried (od 5. ročníka základnej školy až po 1. ročník strednej školy) v písomnej forme, bez hlasného čítania. Intonácia alebo rôzna hlasitosť, či dôraz na niektoré slovo, by žiakov mohli usmerniť pri uchopovaní úlohy.

Zároveň sme učiteľov požiadali, aby upozornili žiakov, že žiadne otázky k úlohám nemôžu klásť a že vysvetlenie nejasností musia samostatne hľadať v zadaní úloh. Učiteľky nesmeli prípadné nejasnosti vysvetľovať a v žiadnom prípade nesmeli upresňovať texty zadaní. Chceli sme tým zabrániť akémukoľvek ovplyvneniu žiakov učiteľkou, ako i vzájomnému vplyvu medzi žiakmi, ktorý môže vzniknúť už vypočutím si otázky položenej učiteľke spolužiakom.

Ďalšou požiadavkou bolo aspoň približne rovnomerné rozdelenie vymedzeného času medzi riešenie predložených troch úloh. Chceli sme, aby všetci riešitelia riešili všetky tri úlohy, každú zhruba rovnako dlho. Celková odporúčaná doba na prácu žiakov bola jedna 45-minútová vyučovacia hodina.

Napokon sme chceli, aby učiteľky požiadali žiakov aj o zachytenie riešiteľského myšlienkového postupu, aby sa dali presnejšie analyzovať odovzdané riešenia. O forme či jazyku tohto zachytenia sa nemali zmieňovať. Tým sme chceli zaručiť každému žiakovi slobodu zvoliť si, kedy sa akým spôsobom vyjadrí (slovami, obrázkami, a pod.) a tiež možnosť ľahšie a v plnšej miere pochopiť pri analýze jeho riešenie.

Aj pomocné výpočty a náčrty sme požadovali robiť na odovzdávaný materiál s riešeniami.

Materiály, ktoré sme získali od vyše dvesto riešiteľov, sme čiastočne analyzovali a niektoré výsledky sú pripravené na publikovanie [1, 4].

Zaradenie difúznych úloh do výučby prináša ťažkosti. Je to nielen časová náročnosť na prípravu úloh, ale aj vyhodnotenie a rozbor žiackych riešení s celou triedou, zlučiteľnosť hodnotení riešení pri rôznych výkladoch zadania. Napriek tomu, môže byť riešenie difúznych úloh a následná diskusia o ich výkladoch a riešeniach prínosom z viacerých hľadísk. Ide o rozvoj schopnosti kriticky čítať, kriticky aj sebakriticky myslieť, rozvoj tvorivosti, samostatnosti a argumentácie.

Občas sa stáva, že pri riešení nejakej úlohy sa zabudne na nejakú možnosť (dotyk kružníc sa vyloží len ako vonkajší dotyk kružníc, uvažuje sa len kladné riešenie rovnice $x^2 = 196$, a podobne). Domnievame sa, že riešenie difúznych úloh má vplyv aj na návyk hľadať všetky riešenia úloh, ktoré nie sú difúzne a ich zadanie je jednoznačne interpretovateľné. Veríme, že ďalším výskumom sa potvrdí nielen táto domnienku, ale aj celková užitočnosť riešenia difúznych úloh.

Na záver chcem poďakovať kolegyniam učiteľkám, ktoré nám prispeli nápadmi pri výbere úloh a hlavne pri získavaní bohatého materiálu od svojich žiakov. Vďaka patrí aj kolegom doktorandom, ktorí analýzu riešení a prvé spracovanie týchto materiálov vykonali.

LITERATÚRA

[1] Harminc, M., Sekerák, J. *Difúzne úlohy a žiacke prístupy k nim I.* (pripravené na publikovanie)

[2] Hejný, M. Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu. In *Zborník príspevkov, Letná škola z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS* 2005, 19–31.

[3] Novotná, J. Zpracování informací při řešení slovních úloh. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Praha 2004, 367–378.

[4] Kovárová, I., Molnár, J. *Difúzne úlohy a žiacke prístupy k nim II.* (pripravené na publikovanie)

VYUŽITÍ VIDEOTECHNIKY VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A JEHO EVALUACI

MIROSLAV HRICZ[1]

Úlohou učitele je nejen své žáky naučit, ale též pozitivně přispět k rozvoji jejich osobností, ke správnému sebehodnocení, ke schopnosti autoevaluace. Ve vědecké terminologii má evaluace obecný význam hodnocení.

Pedagogická evaluace je podle [5] „zjišťování, porovnávání a vysvětlování dat charakterizující stav, kvalitu, efektivnost vzdělávací soustavy". Poskytuje nejen žákům, ale i učiteli důležitou zpětnou vazbu. Ta je (podle [5]) „jeden z nejdůležitějších prvků řízení různých systémů". Žák získává informaci o svém učení od učitele, od spolužáků, učitel získává zpětnou vazbu z žákovských dotazů, reakcí, výsledků. Může následně přizpůsobit svůj výklad, volit vhodné metody a formy práce. Je velmi důležité a žádoucí, aby se zpětná vazba zaměřovala na činnost nebo chování žáků, nikoliv na hodnocení žákovské osobnosti - její kvality a zápory, na hodnocení žákových vlastností. Zpětná vazba musí být charakteristická svou věcností, měla by obsahovat i ocenění, uznání za např. vynaložené úsilí (což vyjadřuje pozitivní vztah mezi zúčastněnými), a to bez ohledu na to, zda je zpětná vazba pozitivní či negativní. O pedagogické zpětné vazbě se pojednává v [4, s. 95–105]. Otázkami hodnocení práce žáků (evaluace) a práce učitele (autoevaluace) pojednává příspěvek Sýkory a Kubínové v [6, s. 16–18].

Následující příspěvek pojednává o možnostech využití videonahrávek a fotografií jako evaluačního nástroje. Pořizovat videodokumentaci a fotodokumentaci jsem začal pro potřeby projektu IIATM[2]. Přišlo mi velmi užitečné z hlediska autoevaluace sledovat videozáznamy práce žáků, vnímat detaily na fotografiích zachycující průběh práce žáků

[1] *ZŠ a MŠ U Santošky 1/1007, Praha 5, www.santoska.cz, miroslav.hricz@santoska.cz*

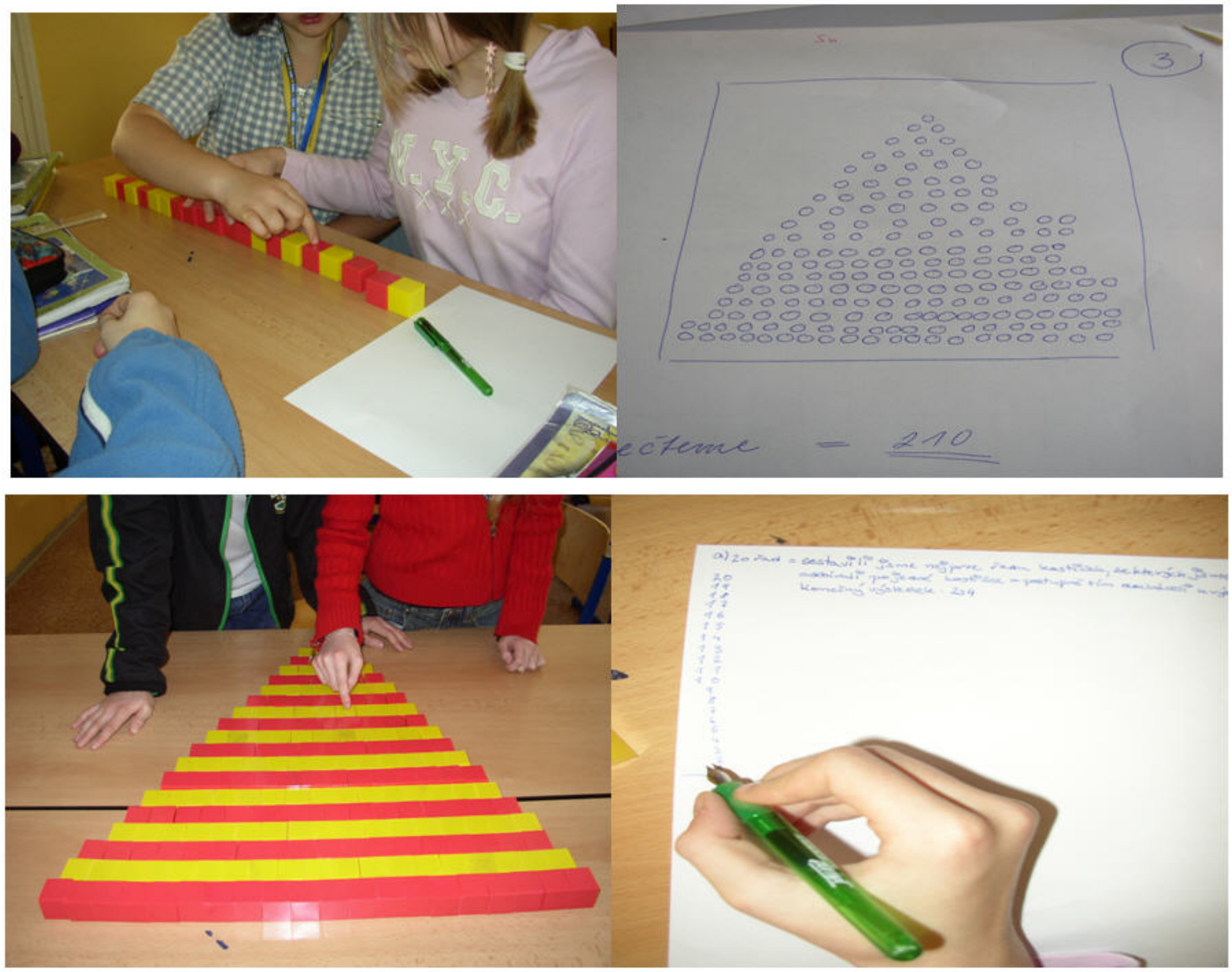
[2] realizováno v rámci projektu IIATM - Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Sokrates - Comenius 2.1, 112218-CP-1-2003-CZ-COMENIUS-C21.

a na fotografiích výsledků této práce. Napadlo mne, že by mohlo být užitečné poskytnout tento materiál i žákům. Můj předpoklad se potvrdil.

Ukáži to na dvou příkladech.

PŘÍKLAD 1 (6. ROČNÍK ZŠ)[3]

V biliáru se všechny barevné koule vkládají do plastového trojúhelníku, který má čtyři řady. Kolik je koulí celkem? Kolik koulí potřebujeme, když chceme vytvořit co nejmenší trojúhelník, který má 5 řad, který má 20 . . . 30, 40, 50, 60, 70, . . . řad?



Výše uvedené fotografie jsou ukázkou různých způsobů řešení žáky. Žáci viděli alternativní postupy, nepotřebovali žádný dlouhý komentář. Bylo velmi užitečné, že si řekli sami, jak bylo možné postupovat rychleji a efektivněji (a poskytli si tak zpětnou vazbu).

PŘÍKLAD 2 (6. ROČNÍK ZŠ)

Ze 40 krychliček poskládejte krychli a kvádr.

Popis videozáznamu: Děti pracují v tříčlenné skupince (dvě dívky – A a L, chlapec D).

[3]Úloha z projektu IIATM, UK modul.

Rozdělily krychličky na 2 hromádky po 20. A sestavuje krychli, D a L kvádr. A sestavila kvádr (rozměry $3 \times 3 \times 2$), 2 krychličky jí zbyly. D a L je ale nepotřebují - mají už kvádr sestaven ($2 \times 2 \times 5$). Následně přepočítávají počet krychliček v tělesech (ověřují, zda mají 40 krychliček). D dává 2 zbylé krychličky na kvádr.

Třída diskutovala, zda se jedná o spolupráci, když si rozdělili krychličky a A pracovala sama. Po chvíli se shodli na tom, že je-li to dohoda členů skupiny, o spolupráci se jedná.

A rozbořila své těleso, L několikrát přepočítávala krychličky.

Později říkala, že kontrolovala, jestli A sestavila krychli, ale pořád to bylo 3×3.

D je rozčilen z toho, co A udělala. Skupina začíná spolupracovat ve třech. A a L sestavily stejné těleso, které A postavila na začátku, D je sleduje. Pak se ptá: „Má to bejt 20 na 20?“ A rozbourala i „původní kvádr“. D se chytá za hlavu se slovy „Já se tady s tím stavím a ona ... “. Poté sestavili krychli ($2 \times 2 \times 2$) a 2 kvádry ($2 \times 2 \times 9$). Když jsou upozorněni, že mají mít jeden kvádr a jednu krychli, začnou stavět „krychli do výšky“. Práce je ukončena a tato skupina ji nestihla.

V následné diskusi A říká, že si uvědomila, že ničila něčí práci, aniž by se na tom skupina domluvila. Jiný žák ze třídy říká: „Vy už jste byli tak blízko, stačilo dát ty dva kvádry na sebe.“ D se opět chytá za hlavu se slovy: „Nojo, to nás, ale vůbec nenapadlo.“

Žáci byli vyzváni, aby zhodnotili užitečnost prezentací. Předpokládám, že v pozdějším období se objeví i negativní stanoviska. V tuto chvíli to bylo něco nového, s čím se ve vyučování dosud nesetkali. Někteří tuto záležitost vnímali především jako zpestření hodiny.

Uvádím příklady reakcí žáků: „poučíme se z chyb, které jsme udělali“, „po čase zpřesňujeme svá vysvětlení“, „můžeme k natočenému něco dodat“, „pochopil jsem učivo až z videa“, „rychle a jednoduše si připomeneme, co jsme dělali“, „je to legrace vidět se po delší době“, „je to dobré, ale nenapadá mě proč“, „vidíme, jak nám nějaké učivo šlo“, „vidíme práci ve skupinách, jak jsme se chovali“, „můžeme říct některé věci znovu líp než na videu“.

Rád bych zdůraznil důležitost vhodného výběru témat či úloh pro natáčení. Také příliš vysoká četnost využití není vhodná. Využití této dokumentace ve vyučování matematice je nutné považovat za doplňkovou.

Využití videonahrávek a fotografií považuji za velmi přínosné jak pro učitele, tak pro žáky. Domnívám se, že prezentace této dokumentace podněcuje žáky k lepším výkonům (tzv. podnětné vyučování [8, s. 2]) a zároveň přispívá k rozvoji všech klíčových kompetencí u žáků.

LITERATURA

[1] Hartl, P. (1994). *Psychologický slovník*. Praha: Budka. ISBN 80-901549-0-5

[2] Hejný, M. a kol.(1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN. ISBN 80-08-01344-3

[3] Kopřiva,P. a kol. (2005). *Respektovat a být respektován.* Kroměříž: Spirála. ISBN 80-901873-6-6

[4] Mareš, J., Křivohlavý, J. (1995). *Komunikace ve škole*. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-1070-3

[5] Průcha, J. a kol.(1995). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál. ISBN 80-7178-029-4

[6] Sýkora, V., Kubínová, M. (2005). Podíl učitele matematiky na tvorbě Školního vzdělávacího programu (zamyšlení nad probíhající kurikulární reformou). In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2005, sborník příspěvků.* Praha: UK – PedF. ISBN 80-7290-223-7

[7] Stehlíková, N. (2004). Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: PedF UK.

[8] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. s. 1-31. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

KOMUNIKACE S NADPRŮMĚRNÝMI ŽÁKY NA 1. ST. ZŠ

MICHAELA KASLOVÁ[1]

MOTTO:

„Jak to, Martine, že jsi nejlepší? V hodinách nic neděláš. Víte, je to takovej ten, co se pořád otáčí, nedává pozor, dělá, co ho napadne“, řekl třídní učitel přítomný experimentům v říjnu 1979.

„No, vono mi to baví“, odpověděl Matin, žák 4.ročníku v Praze 1.

VÝCHODISKA

Nadprůměrní žáci i podprůměrní žáci se dlouhodobě odchylují od průměru. K práci žáků se specifickými poruchami učení a sníženou úrovní některých schopností, kteří jsou často zařazováni ke skupině podprůměrných, existuje řada literatury nabízející různé výzkumem podložené strategie, avšak ke skupině nadprůměrných je literatura vzácná.

[1] *PedF UK v Praze, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz*

Jak je to ovšem s nadprůměrnými žáky? Podle testů zadaných 115 studentům KS (kombinovaného studia) panuje v povědomí učitelů představa, že postačí těmto žákům dávat případně více práce, nebo po nich vyžadovat vyšší rychlost práce a absolutní přesnost. To ve svém důsledku znamená, že je považují za jakési dokonalejší „stroje“, 82 z nich (72 %) se domnívá, že je potřeba na nadprůměrné žáky klást požadavky na nadprůměrný výkon ve všech předmětech. Odlišný výkon je takovým žákům některými učiteli dokonce vyčítán, častěji však rodiči.

SITUACE 1

U1 (1994) „Rychle počítat, to umíš, ale abys to taky napsal pěkně, to už se ti nechce.“
U2 (1997) „Nevím, proč nemůžeš mít jedničku z výtvarky a ze slohu, když jsi jedničkář. Musíš se víc snažit.“
Porada ve sborovně (1998) U3: „Přidej mu Marie, přece mu nezkazíš vysvědčení. Je chytrej.“
U4: „Jak k tomu přijdou ostatní?“ (2005)
U: „Je sice dobrej v matice, ale čeština je děs, rodiče mě tlačej do jedničky.“

Předpoklad: Prvním stupněm ZŠ chápu věkové období od 6 po 10 let, kdy je třeba dítě rozvíjet všestranně.

Metodologie: Příspěvek navazuje na články publikované ve sbornících *Ani jeden matematický talent nazmar* 2003, 2005. Vychází ze dvou typů aktivit:

a) pozorování nadprůměrných žáků v hodinách matematiky, při soutěžích (DHD, RMT) (nejméně 2 roky každého během10 let)

b) vlastní práce s nadprůměrnými žáky po dobu 15 let

Registrace situací: popis, audiozáznam, písemné práce žáků, rozhovory.

Sledované jevy: a) obsah komunikace, b) forma komunikace, c) motivační a sociální mechanismy komunikace.

NADPRŮMĚRNÝ ŽÁK PRVNÍHO STUPNĚ

Nadprůměrný žák v matematice v tomto příspěvku není chápán podle známek, kterými je hodnocen, avšak podle myšlenkových postupů, které uplatňuje především v řešení úloh, diskusi, argumentaci a v tvorbě úloh. Charakter dlouhodobosti u příslušnosti k poměrně hrubě charakterizované skupině nadprůměrných považuji za nutný především u žáků prvních a druhých ročníků (Kaslová 2004).

U podprůměrných žáků lze přepokládat různé skupiny se specifickými potřebami, podobné členění předpokládáme i u nadprůměrných žáků, proto také není snadné kvantifikovat vyskytující se specifika. Na rozdíl od žáků 2. stupně na prvním stupni nejde (až na výjimky) o výraznou vyhraněnost nadprůměrnosti. To neznamená, že k této profilaci u žáka nedojde a také to neznamená, že na prvním stupni jde o všestrannou nadprůměrnost. Je otázkou, do jaké míry připustit, že případný průměrný výkon či deficit běžné úrovně schopností je u takového dítěte predikován, či pouze projevem nezájmu nebo dokonce důsledkem zanedbání určitých postupů v procesu rozvíjení žáka. Komunikaci na prvním stupni chápu šířeji než pouhou výměnu informací, je i rozvíjejícím a kontrolním mechanismem. Komunikace je jak prostředkem učení, tak jeho cílem a má své postavení i v matematice (Millner 2005: hodnocení v matematice má probíhat ve třech oblastech – řešení úloh, komunikace a kooperace).

OCHOTA, VŮLE, ZÁJEM ÚLOHU ŘEŠIT

Již od prvního ročníku je zřetelný rozdíl v reakcích nadprůměrných na to, co je obsahem komunikace. Submisivnější typy se neodlišují od průměru významně v situacích, kdy jde o jednoslovnou či dvouslovnou ústní odpověď. Je-li otázka *příliš snadná*, poklesá u nadprůměrného žáka snaha odpověď deklarovat – a to s narůstajícím věkem. U těchto žáků dochází k vyčlenění dvou typů:

1. snazší úlohy řeší a nehlásí se, nebo je vůbec neřeší, hlásí se především na obtížnější úlohy (což souvisí s motivací, sebehodnocením),
2. hlásí se jen tehdy, pokud se nikdo či téměř nikdo nehlásí, nevýrazně častěji dávají chlapci současně najevo, jak byla otázka snadná – sociální kontext.

SITUACE 2 (2001)

U: $3+4$ (hlásí se většina třídy, Sára kouká na lavici) „Sáro! $3+4$? “
S: „Sedm“ (s intonací údivu ve významu „přece“).
U: (v reakci na tón odpovědi) „Měla bys dávat pozor.“

Jedná-li se o otázku či úkol *na úrovni průměru*, záleží na vztahu učitel-žák, na klimatu ve třídě a u slovních úloh především na neobvyklosti kontextu. U náročnějších úloh se všeobecně aktivita těchto žáků zvyšuje. Pokud ovšem mají zkušenost, že je učitel mezi prvními nevyvolá, u většiny z nich upadá brzy snaha se hlásit, což se dříve či později odráží v jejich hodnocení.

SITUACE 3 (1999)

U: „Dám mu dvojku.“
Matka: „Jak to?“
U: „On se vůbec nehlásí. I když to ví, tak někdy nepracuje. Do práce ho musím nutit.“
. . .
Matka: „Proč se ve škole nehlásíš?“
Žák-syn: „Stejně mě nevyvolá, tak co.“
Matka: „Paní učitelka říkala, že tě musí do práce nutit.“
Žák: „Hm.“
Matka: „To není odpověď.“
Žák: „Mě ty blbý úlohy nebavěj.“

U nadprůměrných žáků, výrazně častěji u chlapců než u dívek (v poměru 4:1), se vyskytují:

a) nechuť práci dokončit, pokud pochopí nebo zná princip řešení,

b) problém vůbec řešit, pokud cítí, že je pod jeho úroveň,

c) řešení prezentovat kvůli známce či pochvale, uspokojuje je samo vyřešení,

d) podřídit se zadané formě či metodě řešení, pokud dovedou proces ekonomizovat.

U nadprůměrných žáků na prvním stupni hraje roli i to, zda jde o *jedináčky nebo prvorozené*, či ostatní. U první skupiny žáci požívají doma řady zvýhodnění, jsou tolerováni v mnoha situacích, ve kterých si škola z nejrůznějších důvodů toleranci nemůže dovolit. Pocit privilegovanosti doma jim dává pocit, že si totéž mohou dovolit i jinde. Pokud takový žák není vyvolán ihned, jak se přihlásí (v tu dobu zatím ostatní často o úloze přemýšlejí, nebo ji teprve čtou) , urážejí se, komentují úlohu jako snadnou, srážejí pomalejší žáky, nebo dokonce všem řešení oznámí. Tito žáci si také poměrně část osobují právo úlohy – zadání kritizovat podobně jako práci učitele, pokud jim podobné chování umožní doma. Mají také schopnost poměrně rychle odhalit, na co dospělý „skočí“, projevuje se u nich tendence smlouvat.

SITUACE 4

Dan (1998): „To neřešte, to je lehký, je to 15.“
Petr (2003): „Já to vim, to vim, tak už mě vyvolejte.“
Honza (1995): „To bude mít víc řešení, protože tam nenapsali. . . “ (úloha měla směřovat k diskusi o podmínkách).

Pokud je úloha pro nadprůměrného žáka dostatečně obtížná, je pro něho ve zdravém klimatu třídy silným motivačním prvkem, u řady z nich funguje taková úloha jako odměna. Pokud je nadprůměrných žáků ve třídě více, vyskytují se (nikoli ojediněle), mají někteří z nich tendenci úlohu hodnotit i vzhledem ke „konkurenci“. Pokud takový nadprůměrný žák odhadne, že ji vyřeší někdo dříve, jeho úsilí o vyřešení opadává. Učitel musí situaci citlivě vyhodnotit.

Matematické soutěže samozřejmě předkládají pouze takové úlohy. To ovšem neznamená, že se všichni nadprůměrní žáci mají chuť soutěže zúčastnit. Nadprůměrný žák není nutně současně soutěživým typem. Ve třídách můžete objevit žáky, kteří se do matematické soutěže přihlásili právě proto, že nabízí obtížnější úlohy. Dítě je jimi fascinováno, řeší je, ale nedá řešení učiteli, poněvadž samo řešení již přineslo uspokojení. Ve třídě pak dochází k nedorozumění a takový žák je hodnocen jako nedbalý, nepořádný, nedůsledný, protože řešení neodevzdal. Jeho motivace však byla chybně vyhodnocena.

KOOPERACE, KOMUNIKACE SE ŽÁKY

Nadprůměrní žáci mají obtíže komunikovat o procesu řešení se *slabšími žáky* z mnoha důvodů i tehdy, kdy nejde o uzavřené typy:

a) žák řešil úlohu vhledem, takže si ani *nemůže uvědomit* proces řešení,

b) žák řešil úlohu příliš rychle a snadno, má tedy problém *vcítit* se do žáka, který má s řešením obtíže (existuje terapie – pokud učitel přistupuje k těmto žákům diferencovaně a chystá pro ně do každé hodiny aspoň jednu výrazně obtížnější úlohu, umožní tak nadprůměrnému pocítit obtíže při řešení),

c) žák řeší úlohu snadno, dobře si postup pamatuje a jeho slovní zásoba je velmi bohatá, při vysvětlování se *vyjadřuje složitěji* (někdy i než učitel), přes snahu je jeho práce neúspěšná, při opakování takové pomoci snaha o pomoc druhému upadá,

d) zvyk řešit úlohy rychle zbavuje nadprůměrné žáky *trpělivosti*, mají při vysvětlování problém čekat, opakovat, vysvětlení dokončit,

e) úsilí řešit úlohu efektivně, s vylepšením, ve skocích neumožňuje žákovi vysvětlovat slabšímu *postup v takových krocích, které je schopen přijmout*.

Celkově mají nadprůměrní žáci tendenci pracovat v mluvené podobě s náznakem, při váhání na druhé straně dělat odbočky typu „protože“. Tyto odbočky slabší matou, preferují vysvětlení typu „návod“. V mluvním projevu se vyskytuje překotnost, zadrhávání, vynechávání některých slov v závislosti na rychlosti myšlení a na sociálním tlaku, častěji u chlapců. Při *vysvětlování* nadprůměrní používají psanou komunikaci jen ojediněle, tedy pokud ano, pak se opírají o číslice či písmena, vyhýbají se modelům typu 2D i 3D. V krajní nouzi užívají „představ si. . . “ nebo „vzpomeň si. . . “, nebo použijí gestiku. Právě modely (obrázky, schémata, objekty) by mohly slabšímu pomoci, ale nadprůměrní těchto opor při samém řešení nevyužívají, respektive se jim někteří vyhýbají. Dominantní je tedy *vysvětlování na úrovni mluveného slova*. Poněkud lépe tuto roli zvládají dívky a ty děti, které žijí ve vícečetné rodině. Z titulu nadprůměrnosti jsou v takové rodině pověřováni vedoucí rolí nebo jsou řazeny do role facilitátora.

SITUACE 4

U o přestávce: „Terezko, tys to skvěle vysvětlila.“
T: „To mi neva.“
U: „Jak to neva?“
T: „Doma musím vysvětlovat bráchovi.“
U: „Myslela jsem, že je starší.“
T: „Jo, ale on nemůže chodit do školy. Do normální školy. Je retardovanej.“

Komunikace ve dvojici nebo ve skupině žáků podobné úrovně je specifická, výrazně *závislá na vztazích mezi žáky a na metodě a formě řešení*. Silně pozitivní vztahy blokují diskusi i schopnost korekce. U relativně neutrálních vztahů (příp. slabá sympatie či antipatie) hraje roli to, kdo z nich se ujme hlavního slova. Pokud žáci nesouhlasí s navrženým postupem, jsou spíše pasivní a myslí si své, nebo diskutují. Vážnější spory se vyskytují zřídka. Při opakování aktivity má skupina tendenci se dělit do dvojic a použít dělbu práce především tehdy, má-li řešit více úloh. U obou skupin je možné sledovat vytváření specifické komunikace směřující k úspoře slov a vytváření vlastních termínů. Zkušenosti jsou čerpány ze soutěží Dejte hlavy dohromady a z Rallye Mathématique Transalpin.

Pokud se vyskytne ve skupině aspoň jeden silně negativní vztah, záleží na povaze obou stran. U soupeřivých typů dochází ve skupině k vášnivým diskusím a často dospějí k originálnímu postupu, který je dobře kontrolován, vyjadřování se zpřesňuje (chytají se za slovo). Ve čtveřicích v takovém případě zůstává nejméně jeden v roli posluchače, někdy tlačen do role arbitra. Pokud o soupeření nejde, uchylují se členové takové skupiny k individuálnímu řešení, výstupy na závěr porovnají nebo se přou o to, které řešení má skupinu reprezentovat. Při opakování práce v téže skupině dochází dříve či později k úmluvě, skupina volí – pověřuje jednoho ze zájemců řešením a sama se zabývá něčím jiným, třeba řešením jiné úlohy. Specifickou roli určující reakce skupiny hraje (kromě jejího složení) zajetí postoje k zadané úloze (zajímavá – nezajímavá) i metoda řešení. Obojí ovlivňuje kooperaci i komunikaci ve skupině. Jsou úlohy, které vzbuzují zájem o řešení, avšak nabízející se či vyžadovaná metoda řešení tyto žáky odpuzuje. V homogenních skupinách se chovají odlišně od skupin slabších.

SITUACE 5

Sára: „Tuhle úlohu si vezmu já, ty si vem tuhle a vy si rozdělte zbytek.“
Tomáš: „Ale máme se o tom radit.“
Sára: „Tak si to každej vyřeší, pak mu to zkontrolujeme.“

KOMUNIKACE S UČITELEM, METODY A FORMY ŘEŠENÍ, HODNOCENÍ

Nadprůměrní žáci preferují jednu z forem komunikace: mluvená – psaná. Mluvené si cení výše a také někdy otevřeně po učiteli vyžadují zohlednit to při hodnocení.

SITUACE 6

Jan (1994): „Ale já na to přišel bez psaní a hned jsem to řek, tak proč to musim psát!“
Emil (1999): „Učitelka by mělo vzít v úvahu, že říct to nez napsání je těžší. Měla by podle toho známkovat a ne jestli někdo píše hezky.“

Vzhledem ke snadnosti, s jakou úlohy zpravidla řeší, *necítí potřebu psát*, natož vnášet do zápisků systém, využívat úpravy zápisu pro objevení nových zákonitostí. Estetiku matematiky nechápou možná i proto, že jim není umožněno pocítit jejích výhod a proniknout tak do nových rovin matematiky (učitelé úpravu zápisu sami chápou poněkud formálně). Snaha vyhýbat se psaní je ochuzuje o specifický druh zkušenosti, nemají tendenci práci s psanou informací zlepšovat. To je dáno i převahou pro ně snadných úloh a dobrou operační pamětí.

SITUACE 7

Matyáš (2002): „Tohle si psát nebudu.“
U: „Mně nejde o řešení jedné úlohy. Chci, abyste vyřešili celou řadu podobných úloh a vaším úkolem bude najít jeden postup vhodný pro řešení všech.“
M: „To si budu pamatovat.“

U: „Možná, že by ti pomohlo, kdybys zkoušel výsledky vypisovat.“
M: „Ne, já si to pamatuju.“

Kvalita písma je zpravidla slabší než u vrstevníků, rychlost až zbrklost zejména v psaní číslic vede k tomu, že někdy nelze dva znaky odlišit. Dobrá představivost u většiny z nich i představivost prostorová způsobuje, že nepotřebují pro řešení *vytvářet obrázek,* schéma, což například brzdí jejich práci ve skupině, schopnost vysvětlovat slabším. Průměrní žáci opírající se postupně o různé druhy obrázkových reprezentací mají s nimi větší zkušenosti, jejich škála (pokud mají tvořivého učitele) je v jistém smyslu pestřejší. Nadprůměrný žák dospěje často dříve k výsledku než učitel projde s ostatními rozborem situace s využitím obrazové reprezentace.Nadprůměrného žáka je v takovou chvíli obtížné udržet v pozornosti k tomu, co se ve třídě děje, poněvadž je s řešením hotov. Většina takových žáků (podle rozhovorů) považuje tvorbu obrázku, schématu za degradující, za něco, co potřebují ti slabší. V momentě, kdy se nacházejí v podobné situaci, mají kromě chybějících zkušeností i blok k takovému způsobu řešení (komunikace) přistoupit a to i tehdy, když si to sami tak představovali. Podobná situace nastává u rýsování či vytváření 3D modelů i z papíru. Rozvoj *jemné motoriky* je slabší u těch žáků, kteří nehrají počítačové hry s joystickem. Pokud na počítači píší či používají klávesy, nepracují se všemi 10 prsty a koordinace obou rukou je redukována na specifické pohyby. Terapeuticky působí práce se stavebnicí. Dlouhodobé každodenní používání počítače ve volném čase na prvním stupni naznačuje i u nadprůměrných některé nežádoucí projevy – oslabuje se *schopnost kontroly* vlastní práce – vyhledávání chyb a jejich korekce. V této proceduře projevují netrpělivost, nesoustavnost, pasivitu (vyžadují, aby jim chybu ukázal učitel). Nadprůměrní žáci odmítají (vnitřně a i navenek) řešit aritmetické úlohy algoritmického charakteru v momentě, kdy princip řešení pochopí. Tréninkové metody je odpuzují a nejsou často motivováni ani písemnou prací.

SITUACE 8

Toník (1999): „Dostal jsem z písemky dvojku.“
Exp: „Jak to?“
T: „Nebaví mi to.“
Exp.: „Z čeho to bylo?“
T: „Písemný násobení.“
Exp.: „Co jsi tam zkazil?“
T: „Asi sčítání.“ (částečných součinů)
Exp.: „A co by tě bavilo?“
T: „Kdyby tam dala násobení devíticiferného čísla dvanácticiferným“.
Exp.: ???
T: „No nejde to počítat na kalkulačce.“
Exp.: „Tak to zkus.“ (Spočítal bez chyby, učitelka přesto trvala na dvojce na vysvědčení.)

ZÁVĚR

Zaměříme-li se na podprůměrné i na nadprůměrné žáky, můžeme konstatovat, že u obou existuje řada specifik. Podle mého názoru vyžadují speciální studijní přípravu učitele oba typy žáků, jak ti se specifickými poruchami učení, tak ti „nadprůměrní“. Pokud bychom upravili charakteristiku práce s podprůměrnými žáky jako s *žáky se specifickými problémy v procesu učení*, můžeme stejným způsobem charakterizovat i skupinu nadprůměrných žáků v matematice, pravděpodobně i v jakémkoli jiném oboru. Do oblasti filozofie výchovy patří otázka, zda a jak na taková specifika reagovat ve výchovně vzdělávacím procesu, což je do jisté míry, dle současné legislativy, záležitostí každé školy, respektive učitele.

LITERATURA

[1] Kaslová, M. (2006). Developpment des constructions chez les enfants de 1 a 8 ans. In *CIEAEM58 – congress*. Plzeň: ZČU, s. 289–292

[2] Kaslová, M. (2005). L´utilisation quotidienne de l´ordinateur pendant les poisirs et la performance de l´eleve en classe. In *CIEAEM57 congress*. Piazza Armerina: Universita Palermo, s. 171–176.

[3] Kaslová, M. (2005). Cesta žáka P k písmenu a. In *Ani jeden matematický talent nazmar*. Hradec Králové: JČMF.

[4] Kaslová, M. (2004). Žák vstupující školy. In *Sborník 2 dny s didaktikou matematiky*. Praha: UK PedF, s. 101–104.

[5] Kaslová, M. (2003). Komunikace a talent. In *Ani jeden matematický talent nazmar*. Hradec Králové: JČMF, s. 49–59.

POROZUMĚNÍ NEKONEČNU. PŘEKÁŽKY, PARADOXY, ROZPORY.

MAGDALENA KRÁTKÁ[1]

ÚVOD

Nekonečno je velmi náročný a zároveň velmi důležitý matematický pojem. Díky vysoké míře abstrakce mají studenti různého věku (a mnohdy nejen studenti) nemalé

[1] *PřF UJEP v Ústí nad Labem; kratka@sci.ujep.cz*

problémy s jeho uchopením. Avšak z historie matematiky jako vědy je zřejmé, že právě formování názorů na nekonečno dokonale koresponduje s formováním samotné matematiky. Tedy že nekonečno je pro matematiku zásadní. Stejně tak je porozumění nekonečnu významné pro naše žáky a studenty. Domnívám se, společně např. s D. Jirotkovou (2003) nebo P. Eisenmannem (2002), že rozvíjení představ napomáhá rozvoji osobnosti žáka a že porozumění nekonečnu odpovídá jistým způsobem kognitivní úrovni jedince.

V následujících odstavcích se seznámíme s tím, jak lze poznávat a rozvíjet porozumění nekonečnu prostřednictvím identifikování překážek a jejich překonávání. Stručně vymezíme pojem překážky a epistemologické překážky, navrhneme postup pro jejich identifikaci a navrhneme možné další aktivity. Společně s teorií překážek můžeme totiž interpretovat porozumění matematice – a tedy i nekonečna – studenta jako posloupnost jednotlivých pojetí a překážek, které je nutné překonat. Didaktický akt by proto měl být zaměřen na vytváření a organizaci výukových situací postavených na základě pečlivě zvolených problémů, které by studenty vybízely k přehodnocení svých předešlých konceptů a umožňovaly tak překonat možné epistemologické překážky (Brousseau, 1997).

PŘEKÁŽKY, EPISTEMOLOGICKÉ PŘEKÁŽKY

Překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stálé a opakují se. K opakování dochází u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. „děti obvykle dělají tuto chybu“), a také v historii.

Překážkou je znalost, neboť existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěšně použít. Tato oblast je obvykle velice dobře jedinci známa a znalost je ověřena mnoha zkušenostmi. V novém kontextu však tato znalost selhává a dává špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření „lepší“ znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Znalost jakožto překážka má tendenci se lokálně přizpůsobit s tím, že ona sama je měněna, jak nejméně je to možné. Důvodem je to, že překážka je znalost vztahující se k nějakému pojmu, tj. k matematickému pojmu, který souvisí s celou množinou situací, kde tato znalost dává smysl, a s celou skupinou významů, které jedinec může spojovat s tímto pojmem, a s mnoha nástroji, tvrzeními a algoritmy, které jedinec může používat při práci s tímto pojmem (Brousseau, 1997). Podobně také v (Radford, 1997) nebo (Spagnolo a Čižmár, 2003).

Zajímavé pro nás jsou tzv. epistemologické překážky. Ty se vztahují k samotnému procesu nabývání znalostí. Jsou to překážky, kterých se nemůžeme a ani bychom se neměli vyvarovat, neboť mají fundamentální formativní funkci pro danou znalost. Právě tyto můžeme nalézt v historii samotného pojmu.

NEKONEČNO

Nekonečno má mnoho různých projevů. Například pokud uvažujeme o přímce, můžeme se zaměřit na její délku či šířku či počet bodů, které na ní leží. Ve všech případech je jev nekonečna přítomen, ale cítíme, že pokaždé jinak. Již v 17. století jezuitský kněz Rodrigo de Arriaga (1592–1667) ve svých úvahách o nekonečnu rozlišoval tři formy nekonečna. (Vopěnka, 2001):

- nekonečno co do velikosti
- nekonečno co do počtu
- nekonečno co do intenzity

V geometrickém světě se zcela jistě setkáváme s první a druhou formou nekonečna. Třetí formu de Arriaga uvažuje v souvislosti se schopnostmi Boha, neboť Boží láska či moudrost je nekonečná. Náš seznam zbývá ještě doplnit o další podobu nekonečna[2], se kterou se v matematice setkáváme, a to:

- nekonečně malé veličiny

HLEDÁNÍ PŘEKÁŽEK V POROZUMĚNÍ NEKONEČNU

Zamyslíme-li se, co může být největší překážkou pro pochopení nekonečna, pravděpodobně nás nepřekvapí, že je to znalost konečného. Právě s konečností máme mnoho zkušeností. Všechny děje, všechny objekty, všechny procesy, se kterými se v běžném životě setkáváme, jsou konečné. Mnohdy si ani neuvědomujeme, že využíváme právě znalosti o konečnosti. Například, některé vlastnosti konečných množin, jako ‚část je menší než celek‘, kterou postuloval i Eukleides ve svých *Základech*, chybně přenášíme na nekonečné množiny a odmítáme výsledky, které nekonečné množiny přinášejí. Znalost, že část je vždy menší než celek, je správná, pokud pracujeme s konečným množstvím, ale nesprávná, pokud pracujeme s množstvím nekonečným. Vystavení této znalosti kontextu nekonečných množin dovoluje nejen charakterizaci toho, co je nekonečná množina, ale také dovolí hlubšímu porozumění konečným množinám. Znalost konečného splňuje tedy všechny požadavky kladené na překážku v porozumění nekonečnu.

Podobně se v našich experimentech jevila role geometrického obrázku v uchopování abstraktních geometrických objektů. Zřetelně se to projevilo právě u otázek „o velikosti bodu“. Následující schematický záznam zaznamenaných odpovědí (ke kterým byli respondenti vyprovokování nekorektními otázkami) dobře dokládá předešlá tvrzení.[3]

[2]Známými pojmy pro různé přístupy k nekonečnu jsou ’pojetí potenciální’ a ’pojetí aktuální’. Zajímavé je pro nás srovnání těchto pojmů s tzv. procesem, konceptem a proceptem, jak je definuje Tall (Hejný, Stehlíková, 1999).

[3]Více o experimentech např. v (Krátká 2005).

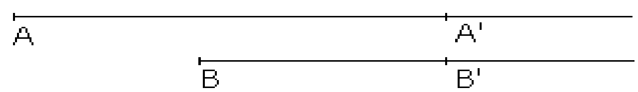
Tab. 1: Otázka: *Je delší přímka nebo polopřímka?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Přímka je delší než polopřímka.	Část je menší ne celek.
Nelze určit, která je delší.	Přímka i polopřímka jsou nekonečné. Část je menší než celek.
Obě jsou stejně dlouhé.	Přímka i polopřímka jsou nekonečné.

Se všemi z těchto odpovědí se setkáváme u žáků základních škol i u studentů středních škol. S odpovědí, že delší je polopřímka, jsme se nikdy nesetkali a ani ji nepředpokládáme.

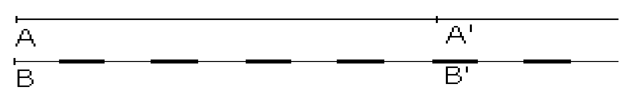
Z našeho hlediska je velmi důležitá druhá z odpovědí. Zde se jedinec do vnitřního konfliktu pravděpodobně již dostal. K navození rozporu i k jeho překonání lze pokračovat dalšími otázkami:

Která z polopřímek je delší?



Obr. 1

Máme dvě polopřímky. Jednu z nich rozdělíme na dílky (jak je naznačeno na obrázku 2) a každý druhý dílek obarvíme. Je delší polopřímka AA' nebo obarvená část polopřímky BB'?



Obr. 2

Třetí polopřímku opět rozdělíme, ale na menší dílky a obarvíme každý druhý. Opět se ptáme, zda je delší obarvená část polopřímky BB' nebo obarvená část třetí polopřímky.

Tyto úvahy můžeme rozvíjet a následně konfrontovat jednotlivé odpovědi. Jednotlivé otázky se snaží přivodit konflikt, který je výše zmíněn jako rozpor dvou znalostí:

přímka i polopřímka jsou nekonečně dlouhé $\cdots$ *část je menší než celek.*

Tab. 2: Otázka: *Máme úsečku AB o velikosti 5 cm. Představme si (v hlavě), že ji rozstřihneme na menší a větší část v poměru 2:3. Jaké geometrické objekty získáme? Pojmenujme je.*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Získáme dvě úsečky AC a CB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost I)
Získáme dvě úsečky AC a DB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost II)

S úsečkou jako rovnou čárou se dvěma krajními body pracuje už Eukleides a nepřipouští, že by krajní bod mohl chybět.

Tab. 3: Otázka ad I): *Jak to, že bod C existuje dvakrát? Jak to, že je na dvou různých místech?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Jeden bod C přejmenujeme na bod D.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení.
Bod C jsme rozstřihli.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.
Oba body C jsou jediným bodem, jen je pokaždé umístěn jinde.	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).

Tab. 4: Otázka ad II): *Kde byly body C a D původně na úsečce AB?*

Předpokládané odpovědi	Znalost
Body C a D byly těsně vedle sebe, úsečku jsme rozstřihli právě mezi nimi.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení. Body na úsečce lze jeden po druhém oddělovat.
Body C a D byly původně jediný bod na úsečce AB (překrývají se).	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).
Body C a D spojením vytvoří jediný bod na úsečce AB.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.

Otázky, předpokládané odpovědi a uvažované znalosti naznačují, že dítě, které řeší tento problém, se dostává na tenký led. Žák na ZŠ nemá prostředky pro řešení takových úloh, ale ani středoškolský student, který se setkal s otevřenými intervaly, často tuto zkušenost nepřenáší do geometrického kontextu úsečky. Žák je tak nucen pracovat se svými představami o úsečce a bodu. Některé jeho představy o objektech ho mohou dovést k takovým odpovědím, které budou pro něj samotného nepřijatelné, a tím motivovat snahu takové znalosti překonat.

Opět uvedeme možné navazující otázky, které problém dále rozvedou a zdůrazní rozpory.

Jestliže jsou body C a D těsně vedle sebe, ale jsou různé, existuje ještě něco mezi nimi? Pokud ne, existují tedy dva různé body, které nejde spojit úsečkou nebo neexistuje střed mezi nimi? Argumentace lze převést do aritmetiky, kdy úsečku nahradíme částí číselné osy a body čísly.

Jestliže se body překrývají, nepodařilo se úsečku rozstřihnout, protože dvě části, které vznikly, mají společný bod. Lze to udělat tak, aby byly rozstřižené?

Jestliže body C a D byly původně jediným bodem, který jsme rozstřihli, jak takový bod vypadá? A jak vypadá rozstřižením nově vzniklý bod?

Otázky mají navodit takový kontext, který by odhalil slabiny stávající znalosti – představě o bodu a úsečce, a tak nejen upozornil na možnou překážku, ale ukázal směr, jak ji překonat.

ZÁVĚR

Tento příspěvek měl přiblížit chápání nekonečna v geometrickém kontextu pomocí pojmu překážka. Pozornost byla věnována konkrétním znalostem žáků a studentů o bodu a přímce souvisejících s jevem nekonečna. Pokusili jsme se předpovědět, jaké znalosti by mohly hrát roli překážky, a formulovali jsme několik problémových otázek, které mohou posloužit jako diagnostický nástroj ijako prostředek k překonání překážek. Tyto otázky lze dále rozšiřovat a zasazovat do kontextu. Např. můžeme hledat umístění bodu X na straně CB čtverce $ABCD$ tak, aby obsah trojúhelníku ABX byl co nejmenší.

Na závěr zdůrazněme, že cílem těchto úloh není, aby žák uspokojivě odpovídal na dané otázky, ale aby konfrontoval své znalosti a představy. Tedy jediným cílem je, aby přemýšlel a tím se rozvíjel. Zcela by naše snažení pozbylo smyslu, kdybychom mu odpovědi prozradili. Pak by překážka nemohla být překonána, pravděpodobně by se projevila později znovu. Cílem učitele by mělo být připravení takových otázek, úloh či situací, které by žákovi pomáhaly odhalovat a překonávat překážky v jeho poznávacím procesu.

LITERATURA

[1] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Eds. Balacheff, N. et al. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[2] Euklides. (1907). *Základy (Elementa).* Překlad Servít, F. Praha: JČMF.

[3] Eisenmann, P. (2002) *Propedeutika infinitesimílního počtu.* Acta Universitatis Purkynianae. Ústí n. L.

[4] Hejný, M., Stehlíková, N. (1999) *Číselné představy dětí.* PedF UK, Praha.

[5] Jirotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 43, 4, 326–334.

[6] Krátká, M. (2005). A geometrical picture as an obstacle. In *Proceedings of SEMT '05*. Praha: UK PedF. s. 179–186.

[7] Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics 17, 1.* FLM Publishing Association, Vancouver. pp. 26–33

[8] Spagnolo, F., Čižmár, J. (2003). *Komunikácia v matematike na strednej škole.* Brno, Masarykova universita.

[9] Vopěnka, P. (2001). *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.* Praha: Práh.

ZKUŠENOSTI S NETRADIČNÍM MATEMATICKÝM PROSTŘEDÍM „DĚDA LESOŇ“[1]

KLÁRA NEJEDLÁ[2]

ÚVOD

Na Karlově Univerzitě v Praze – Pedagogické fakultě probíhá výzkum zaměřený na otevírání světa matematiky dětem. Na tomto výzkumu, který vede M. Hejný (2006), v poslední době spolupracují D. Jirotková a J. Slezáková. Výzkum je dělen na proud konceptuální (Jirotková, 2006) a proud procesuální (Slezáková, 2006). V těchto proudech jsou propracována matematická prostředí a s úlohami vytvořených v těchto prostředích je realizováno mnoho experimentů ve spolupráci s učiteli na 1. stupni ZŠ. Výsledky tohoto výzkumu jsou výše zmíněnými pedagogy implementovány do připravovaných učebnic matematiky pro 1.–5. ročník v nakladatelství Fraus.

Zde stručně uvedu jedno takové matematické prostředí vhodné pro rozvoj konceptuálního myšlení u žáků raně školního věku. Popíšu své zkušenosti, které jsem získala při zavádění tohoto prostředí do 1. ročníku ZŠ.

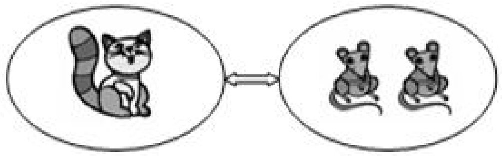
MATEMATICKÉ PROSTŘEDÍ „DĚDA LESOŇ“

Autor tohoto prostředí (M. Hejný) ho představuje dětem motivačním příběhem (viz též M. Hejný v tomto sborníku, str. 89): Děda Lesoň žije v lese a pečuje o zvířátka. Mimo jiné pro ně organizuje zábavu, tedy různé hry a soutěže. Jedna soutěž je přetahovaná. Na hřiště přiběhnou zvířátka a vzájemně se přetahují. Mohou se přetahovat jak jednotlivá zvířátka, tak i celé týmy. Děda Lesoň po nějaké době zjistil, že nejslabším zvířátkem je myš (M). Dále zjistil, že dvě myši jsou stejně silné jako jedna kočka (K). Jedna kočka s jednou myší jsou stejně silné jako jedna husa (H). Jedna husa s jednou myší jsou stejně silné jako jeden pes (P). Obdobně mohou být definována další zvířátka, o kterých se zde nebudu zmiňovat. Uvedené rovnosti, které definují sílu zvířátek, je možné žákům ukázat pomocí obrázků, nebo ikonek (Obr. 1a, b.).

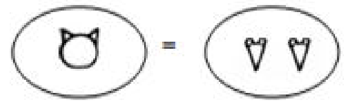
Obrázky autorům učebnic navrhla ilustrátorka D. Raunerová. Úloha pro žáka spočívá v a) rozhodnutí, které zvířátko, nebo tým je silnější; b) své tvrzení argumentovat; c) přidat ke slabšímu týmu zvířátko nebo zvířátka tak, aby obě skupiny byly stejně silné. Například uvedu úlohu: Na jednu stranu hřiště nastoupily dvě kočky a jedna husa a na druhou stranu

[1]Příspěvek vznikl s podporou grantu GAČR 406/05/2444.

[2]*Klára Nejedlá vyučuje na ZŠ s rozšířenou výukou Vv Vodičkova na Praze 1 a úzce spolupracuje s jednou z autorek připravovaných učebnic – J. Slezákovou. E-mail: K.Nejedla@seznam.cz*



Obr. 1a



Obr. 1b

pes a myš, tedy symbolicky je možné zapsat: $\{KKH\} \sim \{PM\}$. Je více způsobů, jak vyřešit tuto úlohu. Uveďme alespoň jeden.

Protože pes je stejně silný jako husa a myš, můžeme zapsat: $\{KKH\} \sim \{HMM\}$. Z této rovnosti vyplývá, že když z každé strany hřiště odejde husa, tak určitě dvě kočky jsou silnější než dvě myši. K tomu, aby oba týmy byly stejně silné, je nutné, aby na pravou stranu hřiště přišly ještě dvě myši. Podobných i náročnějších úloh je možné vytvořit celou řadu. Zpočátku žáci manipulují se žetony, na nichž jsou obrázky, později se jedná o žetony s ikonkami, nakonec pracují se symbolickým jazykem.

MÉ ZKUŠENOSTI

Při experimentálním zavádění tohoto prostředí v mé třídě (1. ročník ZŠ) jsem v jedné z prvních vyučovacích hodin zaměřených na toto prostředí seznámila žáky se zvířátky Dědy Lesoně. Žákům se obrázky od ilustrátorky líbili. Žáci je dostali nakreslené na pracovních listech. To byl obrázek s nakresleným rybníčkem, stromem, lavičkou a kopečkem. Všude kolem byla zvířátka – myši, kočky, psy, husy, berani a kozy. Úkolem žáků bylo počítat kolik a jakých zvířátek je u rybníčka, dále u stromu, lavičky a naposledy u kopečku. Žáci se tak seznámili se zvířátky. V další hodině žáci měli vymyslet samolepky, které budou sloužit jako značky skříněk pro zvířátka. Žáci bez problémů vymýšleli a kreslili ikonky pro zvířátka. Po jistém čase jsem do třídy přinesla ikonky navržené od autorů učebnice a ilustrátorky. Žáci je snadno rozpoznali a u pracovních listů, kde zjišťovali počty zvířátek, kreslili ikonky. Pro zavedení přetahované jsem příběh motivačně obměnila. Zvířátka se nepřetahovala na hřišti, ale nasedala do balónků a ten tým, co vylétl s balónkem výše, tak byl lehčí v porovnání s balónkem, který se do takové výše nevznesl. Žáci toto porovnávání hmotnosti zvířátek pochopili a hned po první úloze o třech myškách v jednom balónku a jedné kočce ve druhém balónku se dožadovali dalších úloh. Žáky hned od počátku úlohy o zvířátkách bavily.

ZÁVĚR

Toto prostředí považuji za velmi vhodné pro žáky raně školního věku. Žáci se v tomto prostředí setkávají s ikonickým jazykem a hlavně s nejrůznějšími řešitelskými strategiemi, kterými jsou: doplnění vhodného zvířátka, škrtání – tedy odstranění příslušného zvířátka, krácení – odstranění stejných zvířátek nebo stejně silných z obou stran, substituce, vhled, rozšíření – přidání stejného zvířátka na obě strany.

LITERATURA

[1] HEJNÝ, M. Prostředí, která otevírají svět čísel. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Plzeň, Vydavatelský servis, 2006, s. 115–120.

[2] JIROTKOVÁ, D. Budování konceptuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Plzeň, Vydavatelský servis, 2006, s. 143–149.

[3] SLEZÁKOVÁ, J. Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Plzeň, Vydavatelský servis, 2006, s. 253–258.

PROBLEMATIKA VIZUALIZÁCIE PRI RIEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH

HANA OMACHELOVÁ[1]

ÚVOD

Pre dieťa je už odmalička charakteristická prirodzená potreba kreslenia. Samo v určitom veku začína pociťovať potrebu nakresliť situácie, v ktorých sa nachádza. Každá matematická slovná úloha sa dá určitým spôsobom graficky znázorniť. Náčrt by vždy mal byť súčasťou riešenia slovnej úlohy, avšak v praxi učitelia často na tento krok zabúdajú, alebo ho z riešenia vypúšťajú.

VIZUALIZÁCIA V MATEMATIKE A VO VÝTVARNEJ VÝCHOVE

Pod vizualizáciou v matematike rozumieme schopnosť predstaviť si danú situáciu a následne ju vedieť graficky interpretovať. Je to zároveň schopnosť, ktorá sa dá rozvíjať. Grafický prejav je u mnohých žiakov problematický, ale precvičovať ho môžeme v matematike a zároveň aj vo výtvarnej výchove.

Vzťah matematiky a výtvarnej výchovy vyplýva už zo situácií každodenného života a z prostredia v ktorom sa pohybujeme. Príkladom prepojenia matematiky a výtvarnej výchovy môže byť napríklad poňatie učiva o typoch čiar. S čiarami sa stretávame prakticky všade okolo nás. Každý predmet sa dá nakresliť lineárne. Čiara väčšinou nie je osamotená, je v kompozícii s inými čiarami a navzájom môžu vytvárať aj plasticko-priestorové

[1] *Katedra matematiky PF UMB, Banská Bystrica, e-mail homachelova@pdf.umb.sk*

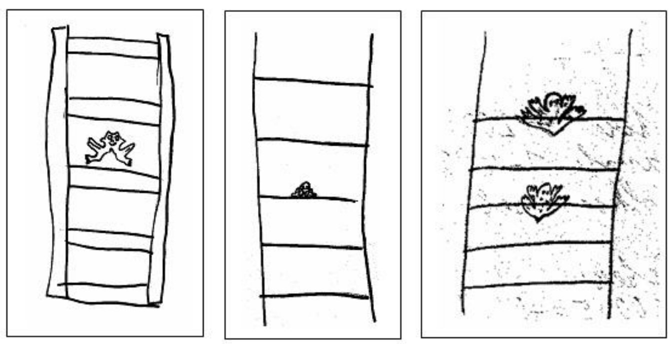
vzťahy. Hľadaním charakteristických vlastností a symboliky čiar rozvíjame pozorovacie a rozlišovacie schopnosti detí (o tejto problematike viac v [1] a [3]).

GRAFICKÉ RIEŠENIA NIEKTORÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

Ako sme už spomínali, každá matematická slovná úloha sa dá graficky znázorniť. Sú však úlohy, ktoré sami svojou formuláciou nabádajú žiaka, aby si ich zadanie, niekedy aj samotné riešenie nakreslil. „Formulácia úlohy vytvára vzťah k matematike a aj k materinskému jazyku a je priamo zodpovedná za vytváranie si predstavy o úlohe.“ [2].

Jednou z úloh, pri ktorej riešení žiaci vytvorili zaujímavé kresby, je piata úloha prvého kola 55. ročníka (škol. rok 2005/2006) matematickej olympiády v kategórii Z4 – Z4-I-5 [4]:

Žabka Rosnička stála na rebríku, ktorý mal 5 priečok, na tretej priečke. Urobila šesť skokov a zostala stáť na piatej priečke. Vypíš všetky možnosti, ako mohla Rosnička skákať, ak vždy skočila len o jednu priečku hore alebo o jednu priečku dole.

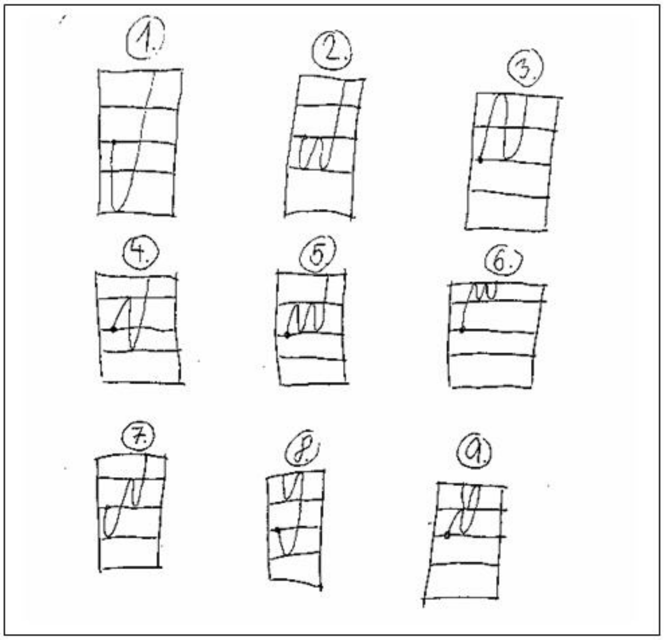


Obr.1: Náčrt zadania úlohy Z4-I-5 (55. ročník matematickej olympiády)

Niektorí žiaci si zakreslili len zadanie úlohy a riešili ju potom iným spôsobom ako graficky. V obrázku 1 uvádzame niekoľko žiackych kresieb. Žiaci sa neobmedzili len na zakreslenie matematických údajov v úlohe, ale pohrali sa aj s kresbami žabky. Vyskytli sa aj riešenia, kde žiaci nakreslili celé riešenie úlohy, teda všetky možnosti, ako mohla žabka skákať (Obr. 2).

ZÁVER

To, že učitelia náčrt úlohy z vyučovania vypúšťajú, má hneď niekoľko negatívnych stránok. Vynechávaním náčrtov sa matematika pre žiaka stáva veľmi zavčasu abstraktnou vedou. Jednoduchý náčrt u žiaka vytvára presnejšie predstavy o danej situácii, na základe obrázku mnohí žiaci pochopia problematiku lepšie, než len zo slovného výkladu. Správne nakreslený náčrt úlohy môže priamo poukázať na jej riešenie. Na druhej strane, prostredníctvom žiackych nákresov učiteľ získava spätnú väzbu. Keď žiak situáciu danú matematickou úlohou vie správne nakresliť, je predpoklad, že úlohu aj správne vyrieši.



Obr.2: Žiacke riešenie úlohy Z4-I-5 (55. ročník matematickej olympiády)

LITERATÚRA

[1] Bartko, O., Fila, R., Reištetterová, Z. *Výtvarná príprava pre 1. a 2. ročník strednej umeleckopriemyselnej školy.* SPN, Bratislava, 1986.

[2] Brincková, J. Implementácia učiva matematiky na 2. stupni ZŠ a pedagogický výskum v príprave učiteľov. In *Nové možnosti vzdělávání a pedagogický výzkum. Sborník Příspěvkú z IX. Celostátní konference ČAPV*. Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta, Ostrava, 2001.

[3] Koreňová, B. Poznávanie sveta pomocou činnosti rúk. In *Od činnosti k poznatku – sborník z konference s mezinárodní účastí*, Západočeská univerzita v Plzni, Srní, 2003, s. 146–151

[4] {http://matematika.webpark.sk/

DOMÁCÍ VZDĚLÁNÍ A MATEMATIKA[1]

DANA PRAŽÁKOVÁ[2]

Cílem mého vystoupení na semináři Dva dny s didaktikou matematiky byla snaha seznámit učitelskou veřejnost alespoň v krátkosti s realitou domácího (podle nového

[1]Tento článek vznikl za podpory grantu GA ČR 406/05/2444.

[2]*PedF UK v Praze, dana@dronte.cz*

Školského zákona individuálního) vzdělávání. Řada učitelů se může domnívat, že doma poskytované vzdělávání není tak komplexní jako to školní, že dítě trpí sociální izolací a rodič, pokud není sám učitel, nemá správné odborné znalosti. Jednou z cest, jak podobné obavy zmírnit, je i lepší informovanost odborné veřejnosti, a k tomu by snad mohl napomoci i tento příspěvek.

V letošním školním roce vzdělávám doma vlastní děti pátým rokem. Nejprve to byl ve čtvrtém a pátém ročníku nejstarší syn – nyní student osmiletého gymnázia – a další tři roky procházíme s prostřední dcerou postupně prvními třemi ročníky základního vzdělávání. Nejmladší dcera se chystá zahájit povinnou školní docházku v září letošního roku a ještě se plně nerozhodla, zda se bude učit doma nebo zda půjde do „normální“ (její vlastní charakteristika) školy.

Můj vztah k vyučování matematice (vystudovala jsem fakultu mezinárodních vztahů, nikoli pedagogickou) prošel různými etapami. Od nadšeného nakupování nejrůznějších učebnic a kopírování školního prostředí u kuchyňského stolu, přes období nejistoty a studia odborné pedagogické literatury a článků na internetových portálech věnovaných homeschoolingu (většinou britských a amerických), až po období získání určitého pedagogického i rodičovského sebevědomí, se kterým je možné zvládat v domácí škole období „tučná i hladová“.

Určitou dobu předtím, než dcera nastoupila do první třídy, jsem hodně přemýšlela o tom, kolik vědomostí je dítě schopno naučit se samo – spíše by se dalo říci za pochodu – běžným praktickým životem. Jeden čas jsem si dělala zápisky o otázkách, které děti v průběhu týdne pokládají, rozhovorech, kterých se zúčastní, a také o projektech, které vymyslí v rámci svého hraní. Byla jsem velmi překvapena šíří záběru. Postupně jsem zjistila, že takové poznámky jsou sice velice zajímavé, ale bohužel značně časově náročné. Proto jsem se později omezila na sledování projevů, které nějakým způsobem souvisejí s matematikou.

Před dvěma lety jsem se rozhodla vrátit se do školy a začala v rámci doktorandského studia studovat na katedře matematiky a didaktiky matematiky. Mé záznamy z pozorování vlastních dětí se snad stanou základem mé dizertační práce. Při zkoumání literatury jsem zjistila, že takových studií, které by podrobně mapovaly realitu domácího vzdělávání je velice poskrovnu, proto se pohybuji tak trochu na tenkém ledě mezi objektivitou vědeckého pracovníka a subjektivitou učitele a rodiče v jedné osobě.

Ve svém přístupu k matematice se cítím být silně ovlivněna knihou *Dítě, škola a matematika* profesorů Hejného a Kuřiny. Díky nim jsem se začala blíže zajímat o konstruktivistické přístupy k vyučování a rozhodla se, že matematiku nebudu své mladší děti vyučovat, ale spíše budu využívat jejich otázky a různé situace, které život přinese. Samozřejmě také používáme různé pracovní sešity, ale úlohy z nich zadávám až ve chvíli, kdy proběhla většina etap pojmotvorného procesu a je potřeba látku procvičit, utřídit a usadit (tedy ve fázi krystalizace).

Vystoupení na semináři jsem uzavřela ukázkou některých zajímavých projektů, které u nás doma vznikly a mohly by být inspirací i pro učitele v běžné škole. Jedním z nich byla výroba osmistěnu. Probírali jsme s dcerou anglické předložky a ona přišla s nápadem vyrobit si papírovou osmistěnnou kostku, na kterou by napsala jednotlivé předložky a ty si pak formou hry procvičovala. Vícestěnnou kostku znala od staršího bratra, který je používal ke hře Dračí doupě. Na internetu máme oblíbenou stránku `www.mathcats.com`, na které se nalézají nápady, týkající se různých matematických a hlavně geometrických oblastí. Na této stránce je i návod na narýsování sítě osmistěnu. Dcera pomocí pravítka a kružítka po několika nezdařilých pokusech skutečně síť narýsovala, správně k ní přikreslila potřebné záložky na slepení, napsala předložky, vystřihla a slepila. To vše zhruba na začátku třetí třídy, kdy neznala pojem kružnice, rovnostranný trojúhelník apod. Osobně jsem přesvědčená, že pokud mají děti dostatek příležitostí k provádění praktické matematiky, jsou schopny daleko přesáhnout učební osnovy i očekávání svých vzdělavatelů. To ostatně dokazují i zkušenosti konstruktivisticky přemýšlejících a pracujících učitelů.

LITERATURA

[1] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika.* Portál, Praha 2001.

ÚLOHY O MAGICKÝCH ŠTVORCOCH

INGRID SEMANIŠINOVÁ[1]

ÚVOD

S úlohami o magických štvorcoch, prípadne o iných magických útvaroch, sa môžeme stretnúť v učebniciach matematiky už od 1. ročníka základnej školy, v literatúre popularizujúcej matematiku aj v rôznych časopisoch na voľné chvíle. Vo väčšine prípadov ide o úlohy typu „doplňte čísla do tabuľky tak, aby čísla v tabuľke spĺňali dané pravidlá“. V príspevku ukážeme ďalšie možnosti využitia magických štvorcov vo vyučovaní matematiky, konkrétne pri realizácii skúmania na hodinách matematiky. Cieľom úloh je formulácia definície pojmu magický štvorec, vyslovovanie hypotéz o vlastnostiach definovaného pojmu, dokazovanie hypotéz a následná formulácia tvrdení. Riešenie úloh nevyžaduje špecifické vstupné vedomosti (často vystačíme zo základnými poznatkami z aritmetiky), ale vyžaduje sa uplatnenie vyšších poznávacích funkcií (induktívne a deduktívne myslenie). Skúmanie je určené pre žiakov stredných škôl.

[1] *Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice, ingrid.semanisinova@upjs.sk*

ÚLOHY O MAGICKÝCH ŠTVORCHOC[2]

Úloha 1. Doplňte čísla do chýbajúcich políčok na obrázku 1. Uveďte, na základe čoho ste sa rozhodli.

	2	3	
5	11	10	8
9	7	6	12
	14	15	

	16	9	22	
20		21		2
7	25	13	1	19
24		5		6
	4	17	10	

	29	2	4	13	
9		20	22		18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28		15	17		19
	24	33	35	8	

Obrázok 1: Doplňte čísla do chýbajúcich políčok

Komentár: Navrhujeme rozdeliť riešenie úlohy do troch častí:
1. Samostatné riešenie úlohy.
2. Spoločná diskusia o riešeniach. Žiaci prezentujú a odôvodňujú svoje riešenia.
3. Výber najlepšie odôvodneného a najkrajšieho riešenia.

Väčšina žiakov si v procese riešenia úlohy všimne, že v tabuľkách sú zhodné súčty vo vyplnených stĺpcoch a riadkoch, len zriedkavo kontrolujú aj súčty na diagonálach. Niekedy žiaci pri dopĺňaní do prvej štvorcovej tabuľky dopĺňajú čísla na základe parity alebo nájdu iné pravidlo, ale pri dopĺňaní čísel do druhej tabuľky poopravia svoje riešenie tak, aby dosiahli rovnaké súčty. Asi tretina žiakov v súvislosti s riešením úlohy spomína pojem magický štvorec a na základe toho odôvodní doplnenie chýbajúcich čísel. Toto riešenie je zvyčajne žiakmi triedy považované za najlepšie. Po vyriešení úlohy navrhujeme žiakov oboznámiť s históriou magických štvorcov.[3] Definíciu pojmu magický štvorec zatiaľ nevyslovujeme.

Úloha 2. Zostrojte magický štvorec 3×3.

Komentár: Podobne ako pri prvej úlohe aj teraz navrhujeme riešenie rozdeliť do troch častí. Keďže žiaci nemajú dosiaľ definovaný pojem magický štvorec môžu sa objaviť riešenia, v ktorých zhodné súčty budú len v riadkoch a v stĺpcoch a nie na diagonálach, prípadne do políčok tabuľky nebudú vpísané čísla od 1 do 9, ale iné. Počas diskusie o tom, ktorý magický štvorec je „najkrajší“, si žiaci zvyčajne vyberajú magické štvorce s číslom 5 v strede tabuľky. Najčastejšie odôvodnenia sú: „je tam najviac rovnakých súčtov“, prípadne „prostredné číslo z čísel od 1 do 9 je v strede tabuľky“.

Po vyriešení úlohy sformulujeme v spolupráci so žiakmi definíciu magického štvorca.

Úloha 3. Koľko je všetkých magických štvorcov rádu 3?

---

[2] Definícia. Magický štvorec rádu n je štvorcová tabuľka obsahujúca všetky čísla od 1 po n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký. Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva magické číslo.

[3] Bližšie informácie o histórii magických štvorcov nájde čitateľ v publikáciách [1], [3] a [4].

Komentár: Žiaci zvyčajne nájdu niekoľko riešení s číslom 5 v strede počas riešenia druhej úlohy. Viacerí si všimnú, že získané riešenia sú rovnaké („ak tú tabuľku otočíme, resp. preklopíme, dostaneme takú istú tabuľku ako už na tabuli máme“ – myšlienka symetrie štvorca). Na rozdiel od 2. úlohy, pri riešení tejto už žiaci nevystačia s metódou pokusov a omylov, ale musia hľadať logické argumenty pre svoje tvrdenie: „Ja už mám všetky!“ Tieto argumenty môžu byť zo začiatku nepresné napr. „číslo 5 musí byť v strede, lebo inak by to nevyšlo“ alebo „číslo 9 nemôže byť v rohovom políčku, lebo potom v jednom smere nemám, čo doplniť“. Počas vzájomnej diskusie sú žiaci nútení argumentovať presnejšie, aby ich argumenty ostatní žiaci aj učiteľ akceptovali. Niektorí žiaci počas riešenia objavia vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3. Spoločne so žiakmi potom môžeme dospieť napríklad k takémuto riešeniu:

Vieme, že súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach má byť rovnaký. Súčet všetkých čísel od 1 po 9 je 45. Ak má byť v každom riadku rovnaký súčet, tak magické číslo magického štvorca rádu 3 je $45 : 3 = 15$. Číslo 15 môžeme napísať ako súčet troch navzájom rôznych prirodzených čísel od 1 do 9 len jednou z nasledujúcich možností: $1 + 9 + 5$, $1 + 8 + 6$, $2 + 9 + 4$, $2 + 8 + 5$, $2 + 7 + 6$, $3 + 8 + 4$, $3 + 7 + 5$, $4 + 6 + 5$. V týchto súčtoch sa čísla 2, 4, 6, 8 vyskytujú trikrát, čísla 1, 3, 7, 9 – dvakrát a číslo 5 – štyrikrát. Teda číslo 5 musí byť v strede tabuľky a čísla 2, 4, 6, 8 v rohoch tabuľky. Dostávame osem správnych možností (obrázok 2). V skutočnosti ide o jeden magický štvorec, zvyšných 7 dostaneme z prvého, ak použijeme symetrie štvorca.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Obrázok 2: Magické štvorce rádu 3

Úloha 4. Môžu mať dva rôzne magické štvorce rovnakého rádu rôzne magické čísla?

Komentár: Prvá reakcia žiakov je zvyčajne: „Samozrejme, môžu.“ Táto reakcia je dosť prekvapujúca, pretože pri riešení 3. úlohy niektorí žiaci objavili vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3, ktoré nezávisí od usporiadania čísel v magickom štvorci. Aby sme žiakov motivovali k formulácii správnej hypotézy predložíme im niekoľko rôznych magických štvorcov rádu 4 (vhodné sú historicky známe magické štvorce rádu 4, pozri [3], [4]) a vyzveme ich, aby pre každý z nich zistili magické číslo. Zistenie, že viaceré rôzne magické štvorce rádu 4 majú rovnaké magické číslo, vnesie pochybnosti medzi žiakov a objaví sa hypotéza: „Všetky magické štvorce toho istého rádu majú rovnaké magické číslo.“ Zvyčajne ju ako prví sformulujú žiaci, ktorí už pri riešení

3. úlohy objavili vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3.

Stretli sme sa s dvoma spôsobmi odôvodnenia hypotézy:

1. spôsob: Keby dva rôzne magické štvorce toho istého rádu (označme ich rád n) mali rôzne magické čísla m_1 a m_2, tak by to znamenalo, že v prvom magickom štvorci je súčet čísel v každom riadku m_1 a v druhom magickom štvorci je súčet čísel v každom riadku m_2. Potom v prvom magickom štvorci je súčet všetkých čísel zapísaných do magického štvorca $1 + 2 + \cdots + (n^2 - 1) + n^2 = n \cdot m_1$ a v druhom magickom štvorci je súčet všetkých čísel zapísaných do magického štvorca $1 + 2 + ... + (n^2 - 1) + n^2 = n \cdot m_2$. A teda $n \cdot m_1 = n \cdot m_2$. Z toho vyplýva, že $m_1 = m_2$ a teda, že magické čísla obidvoch magických štvorcov sú rovnaké.

2. spôsob: Ak spočítame všetky čísla zapísané do magického štvorca rádu n, tak dostaneme číslo $1 + 2 + \cdots + (n^2 - 1) + n^2 = n^2(n^2 + 1)/2$. Keďže v každom riadku, resp. stĺpci má byť súčet čísel rovnaký a riadkov, resp. stĺpcov je n dostaneme výsledok $n(n^2 + 1)/2$, čo je magické číslo štvorca rádu n.

Za priaznivých okolností môžeme teda úlohu využiť na propedeutiku dôkazových metód. Navrhujeme, aby učiteľ žiakom pomohol s formálnym zápisom dôkazu na tabuľu.

ZÁVER

Myslíme si, že v článku formulované úlohy môžu byť úspešne využité pri propedeutike vyučovania matematických dôkazov. Pri formulovaní jednotlivých úloh sme pritom mali na zreteli, že dôkaz je iba jeden z krokov v procese učenia sa a objavovania nových matematických poznatkov. Matematik najskôr formuluje hypotézy, ktoré sú založené na pozorovaniach, potom hypotézu testuje a nakoniec pracuje na tom, aby hypotézu dokázal. Potom by malo nasledovať posúdenie „dôkazu“ ostatnými matematikmi (v našom prípade žiakmi triedy, prípadne učiteľom) a až nakoniec akceptovanie hypotézy ako pravdivého tvrdenia.

LITERATÚRA

[1] Karpenko, V. *Tajemství magických čtverců*. Půdorys, Praha 1997.

[2] Semanišinová, I. Objavovanie čara magických štvorcov. *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae*, Katolícka univerzita v Ružomberku 2002, roč. II, č. 4, s. 86–92.

[3] Semanišinová, I. ; Trenkler, M. O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 4/2000(29), s. 21–34.

[4] `http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html`

NĚKTERÉ METODY PRÁCE V HODINĚ MATEMATIKY

ZDENĚK ŠÍMA[1]

METODA TROJKROKU JÁ-TY-MY

Průkopníky metody jsou švýcarští učitelé jazyka a matematiky Gallin a Ruf. Chtěl bych se podělit o své zkušenosti s touto metodou. Jednotlivé fáze:

Já: Samostatná individuální práce, tzn. každý žák pracuje na problému, seznamuje se s ním, vyvozuje vztah ke svému já a hledá vlastní postup, cesty směřující k řešení.

Ty: Učení se spolužákem, tzn. výměna poznatků, vysvětlování vlastní ideje, porovnávání svého postupu s postupem spolužáka, a tím hlubší vnikání do problematiky, spolupráce v duchu snahy o společné vyřešení problému.

My: Komunikace s ostatními žáky třídy, tzn. prezentace výsledků práce jednotlivých dvojic až čtveřic ostatním, plodná diskuse, rozpracování poznatků a podložená argumentace.

PŘÍKLAD

Učivo čtyřúhelníky (motivujeme žáky např. otázkami):

Fáze já:

a) načrtni různé čtyřúhelníky (rozdám žákům milimetrový papír)

b) vyber z nich ty, které mají dvě strany rovnoběžné a dvě různoběžné

c) vymysli název, označení pro tento druh čtyřúhelníků

d) urči obsah těchto čtyřúhelníků

e) pokus se formulovat myšlenku, metodu, jak by se dal určit obecně obsah čtyřúhelníka (každý žák pracuje sám, doba asi 10 až 12 min)

Fáze ty:

a) seznam svého spolužáka se svými závěry (práce ve dvojicích, 10–12 min)

b) diskutujte společně o svých poznatcích (využívají MFCH tabulek)

c) uspořádejte poznatky tak, abyste byli schopni je přednést všem spolužákům

Fáze my:

a) prezentuj své závěry ostatním spolužákům (vždy jeden mluvčí)

b) zařaďte do svých poznatků a závěrů zjištění ostatních dvojic

Role učitele: partner, pozorovatel, rádce v duchu „poraď si sám“, hodnotitel, provede zobecnění a upřesnění poznatků včetně zavedení nutných vzorců, rozdá pracovní

[1] *Gymnázium Aš, zdenek.sima@gymsos.com*

listy, žáci řeší ve dvojicích (asi 15 min, jeden ze dvojice prezentuje poznatky ostatním spolužákům).

CO MUSÍ VĚDĚT ŽÁK

Fáze já: Musím si zvolit samostatně cestu k řešení. V prvé řadě nejde o to, zda bude správná či ne, ale jedná se o zcela osobní dialog s učivem. Nesmím spěchat, ukvapovat se a zabývat se problémem tak dlouho, až získám jistotu, kdo jsem já a co ode mne vyžaduje učivo (látka).

Fáze ty: K tomu abys dosáhl pokroku, potřebuješ spolupráci se spolužákem, spolužák není žádný jedinec, který to zná lépe, nýbrž člověk, který ti dokáže oponovat při chybném závěru a dokáže ti vyprávět o tom, jak přistoupil k řešení problému on. Při takovéto výměně názorů, rozšiřuješ svůj obzor, naučíš se porovnávat, poznáš, co je možné udělat např. zcela odlišně oproti své strategii (setkáváme se s holistickou, serialistickou, pružnostní).

Fáze my: Teprve v okamžiku, kdy jsi seznámen s řadou jiných postupů a přístupů k problematice, teprve když jsi porovnal své cesty ať správné či chybné při řešení, pak jsi schopen pochopit, proč je nutné postupovat právě tak, jak postupují skuteční znalci problematiky. Jedná se o lidi, kteří se dlouho a intenzivně zabývají toto problematikou. Práce žáků se zpravidla neboduje ani neznámkuje, hodnotí se pomocí jednoho až tří háčků.

Jeden háček: žák to zvládl nebo v nejbližší době zvládne. **Dva háčky:** je evidentní výkon, zajímavý nápad, zvolen postup slibující úspěch, odvážný pokus o řešení.

Tři háčky: poštěstilo se, jedná se o tři až čtyři žáky třídy (většinou stále stejní, ti, co jsou schopni řešit problémy).

Zcela na závěr: Jak by se měl chovat žák při promýšlení osvojovaného učiva?

Musí si uvědomit: co je obsahem např. poučky (např. trojúhelník, kde $a = b = c$), jaké poznatky vyjadřuje poučka, jaké důsledky má poučka, jaké problémy, úlohy lze užitím poučky řešit, pokusit se svými slovy formulovat poučku, pokusit se obsah poučky vyjádřit výstižným heslem, dát poučce odpovídající název.

JAK VYUŽÍVÁM METODY

a) přímo v hodině matematiky (poměrně zdlouhavé, náročné na čas)

b) uložím fázi Já za domácí úkol a ve škole přejdeme k fázi Ty a My

c) kombinuji metodu s pracovními listy (diferencovanými)

d) vymezím časy na jednotlivé fáze, na základě dřívějšího pozorování časové náročnosti studované partie učiva (efektivnější než a))

e) společný postup s žáky, opírající se o dřívější zkušenosti jedinců, aktivitu posuzuji ve vztahu ke spolupracujícím žákům

Zkušenost: V některých třídách se mi daří pracovat touto formou, zejména v nižších ročnících, velice dobře. Odstranil jsem návyk, s minimálním vlastním úsilím odhalovat nové poznatky. Lze dokladovat přehledem u jednotlivců „žádost o radu“.

Na konci každé vyučovací hodiny by měli žáci být schopni zodpovědět otázky: Jaké důležité poznatky jsem si v hodině osvojil? Které otázky, partie učiva jsou mi ještě nejasné?

Často uložím žákům za domácí cvičení napsat písemnou zprávu s využitím poučky (objevují se i pohádky, verše, zejména v primě).

CO JSEM VYPOZOROVAL DÍKY TÉTO METODĚ PRÁCE

Zlepšil se vztah ke spolužákům a vztah ke spolupráci. Vzrostla rozhodnost u jednotlivců vytrvalost při práci. Zlepšila se sebedůvěra a sebeovládání u jednotlivců. Došlo k nárůstu kolektivního cítění.

HODNOCENÍ PREZENTACE

A. Žák hovoří v celých větách.
B. Žák nemá trému při prezentaci výsledků skupiny.
C. Žák dokáže udržet pozornost spolužáků.
D. Žák využívá zvukových prostředků při prezentaci.

Jednotlivá kritéria hodnotím: 1 výborný, 2 dobrý, 3 slabý. Výsledku přiřazuji počet háčků.

METODA TŘÍFÁZOVÁ

Tato metoda se používá při práci ve skupinách čtyř až pěti žáků.

První fáze-fáze evokace: Žáci si vybaví, co v daném okamžiku vědí o tématu, vztahy uvnitř tématu a spojení tématu s vlastní životní zkušeností. Učitel se snaží o odhalení mezer, nejasností, a tím vyvolá potřebu u žáků doplnit si informace o další skutečnosti. Zde se jeví velice účinná forma třífázového rozhovoru. Vytvoříme čtveřice žáků třídy, každá tato skupina dostane otázku týkající se problematiky učiva, jež chceme rozvinout. Žák A zadá otázku žáku B, ten odpovídá a žák C zaznamenává rozhovor aniž by zasahoval do výpovědi žáka B. Tento systém opakujeme i pro žáky ostatní. Poté skupina shrne odpovědi A, B, C a doplní popřípadě o poznatky žáků D, E (ústně nebo písemně). Každá skupina má jinak položenu otázku, abychom pokryli celou problematiku. Z každé skupiny jeden mluvčí seznámí ostatní spolužáky se závěry své práce.

Druhá fáze-fáze uvědomění si významu: Navazujeme na závěry první fáze a učitel vede žáky tak, aby získali informace, zkušenosti, které zabudují do svých poznatkových struktur. Žáci v této fázi „ohledávají“ probírané z různých stran, uvědomují si mezery odhalené v evokaci, uvědomují si, jaký význam má pro jejich poznání každá jednotlivá informace. Jedná se o metodu aktivního učení – „poslední slovo patří mně“.

Třetí fáze-reflexe: Každý žák si samostatně formuluje svůj nový koncept daného tématu. Rekapituluje, co z původního konceptu se osvědčilo, zůstává v platnosti, co nového do svého poznání zabudoval, a ujasňuje si, co by ještě potřeboval vědět, ujasnit si. Zde se jedná o aplikaci práce s dílčími dovednostmi, které pak cvičíme s žáky v konkrétním zadání úloh. Velice rád používám v tomto okamžiku tzv. řetězené úlohy. Uvedl bych jediný příklad.

PŘÍKLAD

Po probrání tématu Pythagorova věta v osmém ročníku, kdy při osvojování pojmu využívám trojkroku, či trojfázové rozpravy, dostane každá skupina konkrétní úlohu. Inspiroval mne prof. Hejný.

Sestroj čtverec $ABCD$ o straně $a = 5$ cm. Na straně CD zvol bod E tak, že dělí délku strany v poměru $1 : 4$. Vypočti:
– obvod a obsah čtverce
– velikost úsečky AE
– obsah a obvod trojúhelníka AED
– popiš obrazec $ABCE$
– vypočti obvod a obsah obrazce $ABCE$
– urči v jakém poměru jsou obsahy čtverce, trojúhelníka ADE a čtyřúhelníka $ABCE$
– vypočti poloměr kružnice čtverci vepsané
– vypočti poloměr kružnice čtverci opsané
– v jakém poměru jsou obsahy kruhů vepsaných a opsaných čtverci
– odvoď obecný výraz pro výpočet úhlopříčky čtverce.

Podobné zadání dostane ještě nejméně jedna skupina žáků. Ostatní skupiny dostanou tabulku, kde musí doplňovat chybějící údaje. Znají vždy dva různé údaje a doplňují dalších osm. Velice dobré zkušenosti mám s touto metodou v primě při probírání krychle, kvádru.

Úkoly jsou vždy sestaveny tak, aby měly vzrůstající náročnost na dovednosti žáků.

Skupiny jsou heterogenní, takže má možnost každý z žáků se aktivně zapojit do práce.

Řadu úloh tohoto typu pak rozšiřuji o další úlohy, např.
– doplnit čtverec na krychli $ABCDEFGH$ v rovnoběžném promítání
– vypočítat délku tělesové úhlopříčky AH, stěnové úhlopříčky BH
– sestrojit řez krychle a roviny AEK, kdy bod K je S_{IH}
– vypočítat objem a povrch krychle
– vypočítat poloměr kružnice vepsané a opsané krychli
– vypočítat v jakém poměru jsou objemy krychle, vepsané a opsané koule
– za domácí cvičení zjistit, co rozumíme pod pojmem Archimedova věta.

Vyzkoušel jsem takto i pravděpodobnost, statistiku a další partie učiva.

Každá skupina odevzdá svoji práci a já provedu důkladný rozbor úspěšnosti. Hodnocení probíhá ve třech etapách:
– každý žák zhodnotí svoji práci sám (pěstování sebekritiky)
– vedoucí zhodnotí své spolupracovníky ve skupině
– celkové hodnocení jednotlivců a celé skupiny provedu já

Hodnotící stupnice: 1 vždy, 2 převážně, 3 občas, 4 zřídka.

A. Podíl na práci skupiny: a) Účastní se diskuse ve skupině.
b) Podílí se odpovídající měrou na práci skupiny.
c) Narušuje spolupráci ve skupině.
d) Účastní se skupinových aktivit.

B. Dodržení tématu: a) Sleduje co bylo řečeno, uděláno, aby mohl pokračovat.
b) Snaží se o to, aby se skupina neodklonila od tématu.
c) Mění téma, odchyluje se od problematiky.
d) Drží se přísně tématu.

C. Navrhování užitečných nápadů: a) Přichází s podnětnými nápady, myšlenkami.
b) Přichází s užitečnou kritikou, navrhuje jiný postup.
c) Ovlivňuje rozhodnutí skupiny (kladně, záporně).
d) Ovlivňuje strategii postupu skupiny.

D. Uznání: a) Vyjadřuje se pozitivně o členech skupiny.
b) Vyjadřuje spolupracovníkům uznání za nápady.
c) Vyjadřuje se negativně o členech skupiny.
d) Osobně se cítí nedoceněn ve skupině.

E. Zapojování do práce: a) Vybízí ke spolupráci ostatní členy skupiny.
b) Zajímá se na názor spolupracovníků.
c) Zabývá se nápady ostatních členů skupiny.
d) Klade otázky, aby zapojil ostatní členy skupiny do práce.

F. Komunikace: a) Mluví jasně a srozumitelně.
b) Vyjadřuje své myšlenky jasně a efektivně.
c) Komunikuje srozumitelně s ostatními.
d) Snaží se mít poslední slovo.

G. Přijímání kritiky: a) Kritiku zváží a přijme.
b) Kritiku přijímá s výhradami.
c) Kritika negativně stimuluje jeho další spolupráci ve skupině.
d) Nepřijímá kritiku.

H. Celkový dojem: a) Pracovní skupina mi pomohla k porozumění problému.
b) Pracovní skupina mi pomohla k odhalení způsobu řešení.
c) Práce ve skupině je pro mne příjemnou zkušeností.
d) Práci ve skupině upřednostňuji před jinými formami práce.

Získané poznatky všech tří etap , ve tvaru např. (H-b-1), vyhodnotím a jsou pro mne signálem pro nutné změny ve složení skupin (žáci označeni x_n, vedoucí skupiny v).

ZÁZNAMOVÝ ARCH – HODNOCENÍ SKUPINOVÉ PRÁCE

	x_1				x_2				x_3				v			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
A																
B																
C																
D																
E																
F																
G																
H																

Samostatně vyhodnocuji úspěšnost při práci s pracovními listy, kde sleduji způsoby řešení, správná a chybná, přístup procesuální a konceptuální. Jsou-li žáci ve skupině podle přístupu, mohu se jim lépe věnovat.

AKTIVITY OVERENÉ NA SÚSTREDENIACH

EMÍLIA VYSLOCKÁ[1]

Viacero korešpondenčných súťaží organizuje pre svojich najúspešnejších riešiteľov sústredenia. Riešitelia z celej krajiny majú možnosť stretnúť sa na jednom mieste a v priebehu niekoľkých dní sa prevažne hravou formou venovať matematike.

Ako možnú inšpiráciu ponúkam opis troch konkrétnych aktivít:

CESTA PO SLNEČNEJ SÚSTAVE (SÚŤAŽ V RIEŠENÍ ÚLOH)

Súťaž viacerých skupín v riešení matematických úloh. Skupina predstavuje posádku, ktorá sa snaží opustiť slnečnú sústavu. Štartuje sa z planéty Zem a úlohou posádky je dostať sa v časovom limite čo najďalej. Nutnou podmienkou je však zastavenie sa na každej z planét v presne určenom poradí.

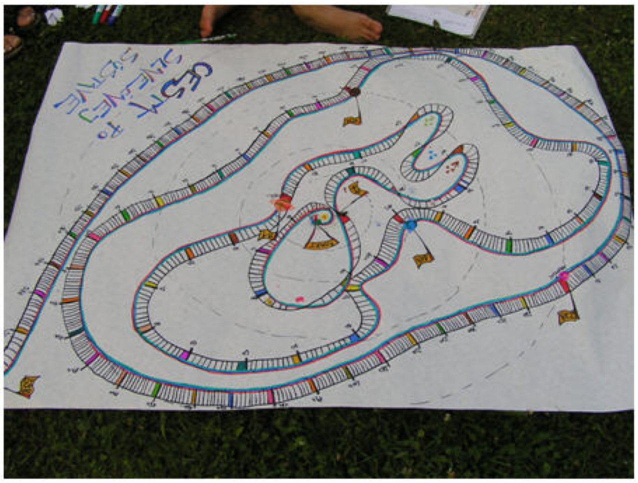
Na každej planéte získava skupina sadu 12 úloh a 15 kartičiek s označením POWER. Úlohy môže skupina riešiť od okamihu, keď ich dostala (navštívila danú planétu) až do konca hry. Podobne powery môže skupina využiť hocikedy od ich získania do konca hry.

Pohyb po slnečnej sústave je zabezpečený vďaka získavaniu bodov za správne vyriešené úlohy a rozumné využitie powerov. Vďaka powerom sa posádka pohybuje rýchlejšie, akoby na „extra pohon“, a to podľa nasledovného: Pri odovzdaní správne vyriešenej úlohy (ktorej bodová hodnota je X bodov) s Y kartičkami POWER sa posádka posunie o XY

[1] *KAGDM, FMFI UK Bratislava, kami@p-mat.sk*

políčok na hracom pláne. Na hracom pláne sa však nedá „ísť späť“, iba vpred!!! Niekedy (napr.: ak chceme posun o jedno políčko) je preto výhodné odovzdať úlohu samotnú bez kartičky power. S jednou úlohou je však možné odovzdať maximálne 3 kartičky power.

REALIZÁCIA



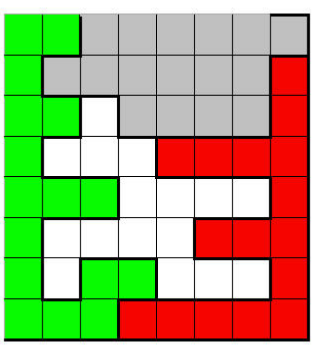
Súťaž bola overovaná v letnom tábore so žiakmi druhého stupňa ZŠ a príslušných tried OG. Súťažiaci boli rozdelení do šiestich skupín po 7 detí. Po oboznámení s pravidlami hry prebiehala súťaž 90 minút čistého času. V tomto čase jeden z organizátorov zaznamenával pohyb posádok na hracom pláne (viď foto), ostatní sa venovali opravovaniu úloh (Úloha sa pri pláne mohla odovzdať až po potvrdení kontrolórom, že ju súťažiaci vyriešil správne – podpis, pečiatka. . .).

Sada úloh na každej planéte obsahovala 5 úloh za 2 body, 5 úloh za 3 body a 2 úlohy za 5 bodov. Toto rozloženie bolo volené z dôvodu veľkého vekového rozptylu. Vzdialenosti medzi planétami boli potom určené nasledovne:

Zem – Mars 47; Mars – Jupiter 91; Jupiter – Saturn 113;
Saturn – Urán 159; Urán – Neptún 273; Neptún – Pluto 398.

LAP[2] (MATEMATICKÁ HRA ZŠ)

Hru hrá viacero hráčov naraz, jeden „vládca územia“ proti ostatným „prieskumníkom“. Každý si na štvorčekovom papieri označí pole 8×8 štvorčekov, vodorovne písmenami, zvisle číslami. (Je dôležité, aby označenie bolo jednotné).



Vládca územia si vlastné pole rozdelí vodorovnými a zvislými čiarami na štyri časti nepravidelného tvaru (časti ale musia byť súvislé, dotyk aspoň stranou!). V každej časti musí byť práve 16 štvorčekov. Jednotlivé časti označí názvami podľa svojho uváženia (lesy elfov, šedé močariská, biele hory, územie ohňov, . . .).

Každý z prieskumníkov má postupne po jednej strele (akoby sonde), ale pozor – nestrieľa do jedného štvorčeka, ale vždy hlási štvorec pozostávajúci zo štyroch malých štvorčekov. Tak napríklad možno hlásiť B1, B2, C1, C2 (viď obr.). Vládca územia odpovedá: Jeden zásah v lese elfov, tri zásahy v šedých močariskách. (Nekonkretizuje sa, o ktorý štvorček ide!) Strieľa sa, kým niektorý z prieskumníkov nesplní cieľ.

[2]Pozri *Malé Carlo*, spoločenské hry ze soutěže týdeníku *Mladý svět*, Mladá fronta, Praha 1968, autor hry je L. Pijanowski.

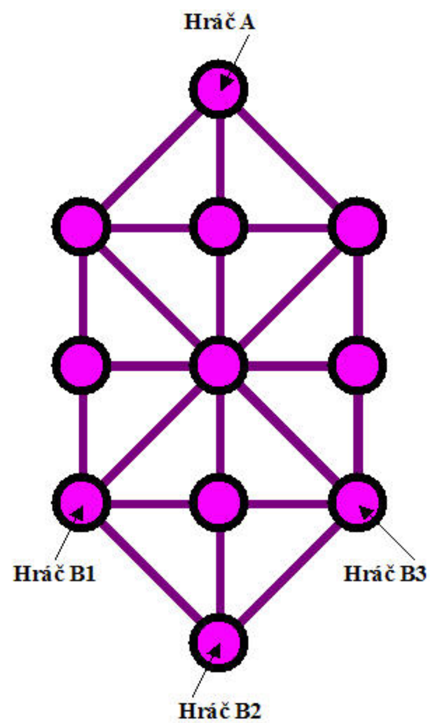
Cieľom každého z prieskumníkov je zistiť presne líniu jednotlivých častí v poli. Komu sa to podarí ako prvému, stáva sa v ďalšej hre vládcom územia.

REALIZÁCIA

Aktivita vhodná pre menší počet detí na druhom stupni ZŠ. Odporúča sa, aby organizátor pred strieľaním skontroloval, či pole vládcu územia spĺňa stanovené podmienky. Pole si môže odkresliť a v prípade, že si niektorý z prieskumníkov myslí, že zistil línie jednotlivých častí, tak sa to dá bez vyrušenia ostatných skontrolovať.

FRANCÚZSKA VOJNOVÁ HRA[3] (MATEMATICKÁ HRA SŠ)

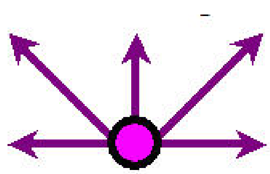
Hrajú štyria hráči: A a B1, B2, B3. Hrací plán má 11 políčok. Na obrázku je znázornené začiatočné postavenie hráčov. Hráč A má prvý ťah. Po ňom ide jeden z hráčov B, potom opäť ide hráč A, potom jeden z hráčov B atď. (striedajú sa vždy A a niekto z B).



Hráč A sa vo svojom ťahu môže premiestniť ľubovoľným smerom po vyznačených čiarach na susedné voľné políčko.

Hráč B sa môže po vyznačených čiarach presunúť vodorovne, zvisle hore alebo šikmo hore na voľné políčko. Nesmie ísť zvisle dole, ani šikmo dole.

Teda možné presuny hráča B sú na obrázku znázornené:



Ak môže hráč A spraviť svoj 16. ťah, tak vyhral. Inak vyhrali hráči B1, B2 a B3.

REALIZÁCIA

Aktivita vhodná pre žiakov SŠ. Uvedený popis prislúcha hre „naživo“ pre štyroch hráčov. Hrací plán môže byť znázornený na podlahe (nakreslený na papieri, vytvorený z pások papiera,. . .) a hráči sa budú pohybovať akoby boli figúrkami. Pri doskovej verzii hry hrajú iba dvaja hráči (hráč A má jednu, hráč B tri figúrky).

[3]Pozri GARDNER M., *Matematičeskije dosugi*, Mir, Moskva 1972

PROJEKT „POZNÁVÁNÍ S MATEMATIKOU“

HANA ŽIŠKOVÁ, BARBORA NOVOTNÁ[1]

V průběhu kurzu Metody řešení matematických úloh III na PedF UK v Praze jsme dostali za úkol vymyslet zajímavé úlohy nebo netradiční formu zpracování pro matematickou soutěž – Korespondenční seminář. Náš projekt původně opravdu vznikal pro potřeby Korespondenčního semináře. Jeho účastníci měli na základě řešení různých matematických úloh pomyslně cestovat po významných evropských městech a svoji cestu pečlivě zakreslovat do slepé mapy. Tímto způsobem bychom ušetřili práci organizátorům při opravování žákovských řešení, neboť by na základě zakreslené trasy přesně viděli, zda účastník řešil správně, případně v jakém „městě“ udělal chybu.

Během vlastní tvorby jsme ale dospěly k názoru, že by bylo přínosnější cestovat doopravdy, a tak jsme se rozhodly návrh rozpracovat ve formě projektu. Projekt „Poznávání s matematikou“ je určen zejména žákům prvního ročníku SŠ a spojuje netradiční výuku matematiky s cestováním po naší vlasti. Kromě matematických cílů má podpořit utváření kolektivu, skupinovou práci a kooperaci, mezipředmětové vztahy (M, Z, D, ČJ), schopnost žáků obhajovat vlastní názor a přijímat názory ostatních, schopnost třídit a zpracovávat informace, samostatnost žáků.

ORGANIZACE PROJEKTU

Projekt je volen jako pětidenní. Doporučujeme jej uskutečnit na konci školního roku (nejlépe na konci května, nebo na začátku června). Žáci budou na základě řešení matematických úloh cestovat po okolních městech. K úspěšnému řešení úlohy však budou muset uplatnit i své znalosti z ostatních předmětů, či prokázat schopnost získat potřebné informace jinou cestou (internet, informační centra, místní obyvatelé,. . .). Účastníci budou předem informováni o tom, že pojedou na pětidenní „výlet“, nebudou však vědět, kam přesně pojedou. Obdrží seznam věcí, které je nutné mít s sebou. Před zahájením projektu proběhne zvláštní setkání rodičů, kteří budou podrobně informováni o průběhu výletu, včetně trasy naší cesty, kterou však nesmí sdělit dětem.

HARMONOGRAM PROJEKTU

PROGRAM PRVNÍHO DNE

Žáci se sejdou v 8 hodin ve škole se všemi sbalenými věcmi. Na základě pečlivého uvážení budou rozděleni do skupin (přibližně čtyřčlenných až šestičlenných - dle celkového počtu dětí). Učitel - organizátor jim sdělí pravidla a organizaci pětidenní „hry“ a zadá první úlohu. Na vyřešení budou mít ve skupinkách přibližně 2 hodiny. Učitel

[1]*PedF UK Praha, Hananass@seznam.cz*

prochází mezi skupinkami, všímá si reakcí dětí, jejich navrhovaných řešení, rozdělení rolí a kompetencí ve skupinách. Po vyřešení a hromadné konzultaci dosažených výsledků (podle výsledku úlohy žáci zjistí, kam dále pojedou) přejedou všichni do města 2, kde se ubytují.

Učitel následně žáky informuje o plánu na další den a rozdá jim stručné vytištěné informace o navštíveném městu. Na večerní program má pro žáky připravené různé hry, hádanky, otázky a jiné aktivity.

Program druhého až čtvrtého dne

8:00 Zadání druhé úlohy – samostatné řešení ve skupinách na pokoji, v přírodě, ve společenské místnosti atd. (Učitel obchází skupiny, zaznamenává pozorovaná řešení, odpovídá přiměřeně na otázky.)

10:00 Výlet do města, návštěva památek, zajímavostí - prostor pro další předměty a pěstování mezipředmětových vztahů

12:00 Oběd

12:30 Polední pauza

14:00 Výlet do města, návštěva památek, sportovní vyžití dle nabídky města

16:00–17:00 Vyhodnocení ranního zadaného úkolu po skupinách, zjištění, kam se pojede (jistý nádech bojovnosti zvýší dynamiku a akčnost projektu)

17:30 Odjezd do dalšího města

Večeře, večerní program: (necháváme k uvážení organizátorům)

22:00 Večerka

Program pátého dne

Zadání a vyřešení posledního úkolu

Návštěva a poznávání posledního města

Zhodnocení projektu

Zadání dalších úkolů – domácí a navazující úlohy

Návrat do výchozího města (My jsme projekt připravovaly pro žáky prvního ročníku SŠ v Ústí nad Orlicí.)

Série úloh

Předkládáme sérii úloh, kterou jsme vytvořily pro daný projekt. Každá úloha se tématicky nebo svým řešením vztahuje k příštímu navštívenému městu. Při realizaci v jiné části České Republiky je vhodné přizpůsobit obsah úloh městům, které žáci v průběhu své cesty navštíví.

1. město: Ústí nad Orlicí

1. úloha: Výroková logika

Kdo mluví pravdu?

Adam, Petr a Martin vědí, kam dnes pojedeme. Každý z nich může mluvit pravdu, ale i lhát. Dále víme, že jestliže Petr mluvil pravdu, pak Martin lhal. Adam mluvil pravdu právě tehdy, když Petr mluvil pravdu. Pokud zjistíme, kdo z nich lhal, je možné jednoznačně určit, do jakého města máme namířeno.

A: V atlase jsem toto město našel v abecedním seznamu před Olomoucí.

P: Město, kam jedeme, neleží na řece Moravě.

M: Počet písmen v našem městě je menší, než osm.

Kam pojedeme?

Možnosti: Přerov, Blansko, Kroměříž, Olomouc, Vsetín

2. město: Olomouc
2. úloha: Řidič

Přemýšlivý řidič

Náš pan řidič jel minulý rok také z Olomouce do místa naší příští zastávky.

a) Když pohlédl ihned po nastartování vozu na ukazatel ujetých kilometrů, uviděl číslo 15 951. Řidič si všiml, že počet kilometrů, které vůz ujel, je vyjádřen symetrickým číslem, tj. takovým číslem, které zůstává stejné, ať je čteme zleva doprava, nebo zprava doleva.

„To je zajímavé!“ zabručel. „Za chvilku se jistě na ukazateli objeví jiné číslo, které bude mít stejnou vlastnost.“.

Ale teprve přesně za dvě hodiny spatřil na ukazateli takové číslo, které bylo možno číst zleva i zprava stejně.

Určete, jakou rychlostí jel řidič po tyto dvě hodiny.

b) Po cestě do cílového města musel jet řidič objížďkou, při které si prodloužil cestu o 20 km. Těsně před příjezdem do našeho města si všimnul dalšího následného čísla (v pořadí již druhého) uvedených vlastností. Do jakého z následujících měst náš řidič jel? Kam tedy pojedeme my?

Možnosti: Blansko, Havlíčkův Brod, Kutná Hora, Žďár nad Sázavou

Poznámka: K řešení této úlohy budou žáci potřebovat minimálně atlas. Doporučujeme však povolit využití internetu, či informačního centra v daném městě. Děti se tak jednak učí znalostem ze zeměpisu, fyziky a zároveň si zvyšují funkční gramotnost a schopnost poradit si se vzniklým problémem při omezených dostupných možnostech.

3. město: Kutná Hora
3. úloha: Magický čtverec

Magický čtverec

V podzemí stříbrných dolů jsme potkali Permoníka a několik pohádkových postav, které se na rozcestí nemohly dohodnout, kterou ze štol se mají vydat, aby se dostaly na povrch. Permoník za námi zasypal tunel, takže abychom navždy nezůstali v dolech, musíme se vydat s jednou z postav.

Permoník se nad námi slitoval a dal nám nápovědu: „Musíte rozřešit spor mezi Hejkalem, Rumcajsem a Vodníkem. Z tajemných chodeb vás vyvede ten, kdo má pravdu.“

Hejkal, Rumcajs, a Vodník se snaží vytvořit magický čtverec 3×3 tak, aby součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a na úhlopříčkách byl 51. Jediné co ví, je, že v prostředním políčku daného čtverce se nachází číslo 17.
Hejkal: „Takový čtverec neexistuje! Já půjdu levou cestou. Pokud se dostanu na povrch, pojedete se mnou do Čáslavi.“
Rumcajs: „Existuje více než jeden čtverec požadovaných vlastností! Já půjdu střední cestou. Pokud se dostanu na povrch, pojedete se mnou do Jičína.“
Vodník: „Existuje právě jeden takový čtverec. Já půjdu pravou cestou. Pokud se dostanu na povrch, pojedete se mnou do Hlinska.“

Řešení: Nalezli jsme alespoň dva požadované čtverce, pravdu má tedy Rumcajs.

14	**29**	**8**		**15**	**29**	**7**
11	**17**	**23**		**9**	**17**	**25**
26	**5**	**20**		**27**	**5**	**19**

4. město: Jičín
4. úloha: Sudoku (je možné zadat každé skupině jinou SUDOKU)

Sudoku

	2	7	8	1	9	3	4	6	5
	6	5	1	2	4	8	3	7	9
	3	4	9	6	5	7	2	8	1
Tajenka	5	2	6	3	1	4	7	9	8
	4	8	7	9	6	5	1	3	2
	9	1	3	7	8	2	6	5	4
	2	9	8	4	7	6	5	1	3
	7	3	5	8	2	1	9	4	6
	1	6	4	5	3	9	8	2	7

1 - U, 2 - A, 3 - D, 4 - B, 5 -P, 6 - R, 7 - I, 8 - E, 9 - C

Zadaná je křížovka SUDOKU přiměřené obtížnosti, kdy tajenkou je název města Pardubice. (Vhodný izomorfizmus čísel 1–9 a písmen P, A, R, D, U, B, I, C, E – tajenkou je příslušný vybraný řádek.)

Žáci mohou řešení odhadnout z přesmyčky zadaných písmen (učitel je k tomu nebude navádět, ale ani jim bránit), křížovku však stejně musí dořešit.

5. město: Pardubice
5. úloha: Pusťte osobní vlak

Pusťte osobní vlak

Na zastávce jednokolejné dráhy se zastavil vlak složený z lokomotivy a pěti vagónů. Přivezl skupinku dělníků, kteří budou stavět novou odbočku. Dosud je na zastávce jen kratičká slepá kolej, na kterou by se v případě potřeby sotva vešla lokomotiva se dvěma vagóny.

Hned za vlakem se stavební skupinkou přijel k této zastávce osobní vlak. Představte si, že jsme v osobním vlaku my a potřebujeme se dostat domů. Jak to zařídit, aby osobní vlak mohl pokračovat do Ústí nad Orlicí?

Řešení: Strojvůdce opravářského vlaku zaveze na slepou kolej tři zadní vozy svého vlaku, odpojí je a se zbylou částí vlaku odjede dopředu. Osobní vlak jede za ním, a když dorazí ke slepé koleji, připne si vzadu tři opravářské vozy, vrátí se s nimi na své původní místo a tam je odpojí. Zatím zajede na slepou kolej zbylá část opravářského vlaku, lokomotiva a dva vozy – a osobní vlak má cestu volnou!

Poznámka: Úloha nám připadala netradiční a třeba by děti vymyslely ještě jiné řešení. I když připouštíme, že zadání není zcela jednoznačné, myslíme, že je možné podnítit v žácích plodnou diskusi. Opět se snažíme zapojit rozvoj jiných důležitých vlastností. Dále chceme v dětech podporovat tvůrčí kritické myšlení a schopnost diskuse, kooperace, rétoriky atd. Tato úloha je vhodná na závěr cesty, kdy už všichni předem ví, kam se pojede.

REALIZACE PROJEKTU

Vzhledem ke skutečnosti, že zatím obě studujeme (a tudíž neučíme), nemohly jsme projekt vyzkoušet v praxi. Jsme si vědomy, že klade vysoké nároky na organizaci a čas pro učitele a jisté finanční nároky na rodiče žáků. (Lze to řešit prostřednictvím grantů, dotací, sponzorství apod.)

Domníváme se ale, že řešení matematických úloh „v terénu“ bude pro žáky příjemným zpestřením školního roku, bude je motivovat k práci a pomůže jim navzájem se lépe poznat, což je v prvním ročníku SŠ obzvlášť důležité.

LITERATURA

[1] Cirjak, M. *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematice)*. Essox, Prešov, 2000.

[2] Korděmskij, B. A. *Matematické prostocviky.* Mladá fronta, Praha, 1957.

[3] Kubínová, M. *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2002.

Pracovní dílny

GRADOVANÉ SÉRIE ÚLOH V MATEMATIKE ZŠ

JAROSLAVA BRINCKOVÁ[1]

ÚVOD

Mnoho písomných prác používaných v školskej praxi pri preverovaní vedomostí žiakov obsahuje úlohy, ktoré vyhovujú žiakom dosahujúcim priemerné učebné výsledky. Napríklad školské testy, polročné a výročné písomné práce. Pre žiaka sa slabšími učebnými výsledkami sa tieto úlohy môžu javiť ako náročné a opačne pre žiaka s veľmi dobrými učebnými výsledkami ako málo náročné. Ani jedna, ani druhá spomínaná skupina žiakov sa v takto zostavenej písomnej práci „nenájde“.

Naša práca je vlastne snahou výjsť v ústrety originalite jednotlivca a dať mu možnosť zažiť úspech vo vyučovaní matematiky. Podľa možnosti každému žiakovi. Tak žiakovi šikovnému, ktorý je nad priemerom triedy, ako aj slabšiemu žiakovi, ktorý pocíti, že niečo vie. Zvýšiť jeho sebavedomie a taktiež motiváciu ísť a snažiť sa ďalej, aby cítil, že zvýšené úsilie prinesie svoje ovocie. Viesť ho k zodpovednosti za svoje konanie.

Kľúčovou zložkou zodpovednosti *je sebaprijatie* – hlboké uvedomenie si svojho jedinečného talentu a *možnosti byť vynikajúci*. Ďalšou zložkou je *sebariadenie* – vedomie, že nikto iný nemôže urobiť nič za nás, že *kvalitu svojho života máme vo svojej moci*. Výchova žiakov k sebaprijatiu a sebariadeniu by mala predchádzať, podľa nášho názoru, vzdelávaniu. Takáto výchova by mala predchádzať aj nášmu výchovnému a vzdelávaciemu pôsobeniu na učiteľa matematiky. Prostredníctvom gradovaných sérií úloh a písomných prác je možné aj v matematike vplývať na žiaka uvedeným spôsobom.

VYMEDZENIE POJMU

V odbornej literatúre sme sa nestretli s jednoznačným vymedzením termínu *gradovaná séria úloh* pokúsili sme sa o vlastnú interpretáciu tohto spojenia s ohľadom na dostupnú literatúru a názory odborníkov.

Gradovaná séria úloh je skupina úloh precvičujúcich jednu oblasť matematického učiva so stupňovanou náročnosťou úloh v jednej sérii úloh, pričom každá úloha obsahuje tri rôzne náročné varianty. Nie sú označené stupnicou, ale ako *A, B, C – varianty*. Najľahšie

[1]*Katedra matematiky PFUMB Ružová 13, 97411 Banská Bystrica, SK, jbrinckova@pdf.umb.sk*

úlohy v sérii označujeme ako variant „A“, stredne ťažké ako variant „B“ a najťažšie ako variant „C“. Úlohy však môžu byť zadané aj formou príkladu, písomného precvičenia určitého algoritmu.

Gradované písomné práce sú zostavené z rôznych sérií úloh tak, že v každej sérii sú tri úlohy rôznej obtiažnosti. Žiaci si podľa svojich schopností vyberú z každej série vždy iba jednu úlohu. Žiak rieši toľko úloh, koľko je v písomnej práci sérií. Je hodnotený dvojvektorovou známkou, napr. [2;1]. Dvojku za výber skupiny úloh, ktorých bodové hodnotenie vo vzťahu k celej triede odpovedá náročnosti „2“ a jednotku za 100% úspešnosti riešenia vo svojej skupine.

Tvoriví učitelia sa snažia zostavovať vlastné písomné práce, v ktorých zohľadňujú odstupňované možnosti jednotlivých žiakov. Takéto písomné práce sa podľa Janouškovej (2) tiež nazývajú *gradované písomné práce*. Sú zostavené v troch stupňoch obtiažnosti ako celky a žiak si volí jednu z nich. Úlohy vybrané do týchto písomných prác sú zoradené so stúpajúcou náročnosťou na myšlienkové operácie a úroveň matematického poznania. Jednotlivé úlohy žiak rieši postupne podľa poradia. Písomné práce aj v takto gradovanej forme sú tiež progresívnou formou, ktorá prihliada na rozdielne schopnosti žiakov a robí ich zodpovednými za výber varianty A, B alebo C písomnej práce navrhnutej učiteľom matematiky.

Gradované série úloh a gradované písomné práce je vhodné použiť najmä v klasických triedach, v ktorých sa objavujú známky 1–4, 5. Ak si žiak slabšie prospievajúci vyberie všetky najľahšie úlohy (á-čka) a správne ich vypočíta, dostane trojku a jednotku. Ak si takýto žiak počíta v „klasickej písomnej práci“ postupne všetky príklady, čo dostane? Obyčajne takúto písomnú prácu zvládne na 4 alebo 5. V tomto spočíva vnútorná motivácia pre slabo prospievajúcich žiakov. Vedieme ich k poznaniu, že len 100% vykonaná práca človeka na každom poste, ktorý je primeraný jeho schopnostiam má zmysel. Taktiež je to motivácia pre vynikajúcich žiakov, ktorí môžu naozaj ukázať, že sú lepší.

Gradované písomné práce nemôžeme zadať žiakom bez predbežnej prípravy. V takomto prípade ju žiaci nezvládnu, nie je u nich vyvinutý až taký stupeň sebahodnotenia. *Treba ich to naučiť!* Výchova k sebahodnoteniu je proces dlhodobejší a nezaškolení žiaci nie sú schopní sa tak rýchlo adaptovať na nový systém písania gradovaných písomných prác. Trváme však na tom, že niekde začať treba. A tak sme začali s prípravou budúcich učiteľov matematiky.

AKO ZOSTAVIŤ GRADOVANÚ SÉRIU ÚLOH?

Skúmajme problémové situácie a z nich vyplývajúce školské úlohy vo svojom okolí. *Problémová situácia* je podľa M. Hejného (1) štruktúra, ktorá obsahuje niekoľko *parametrov* viazaných súborom väzieb. Ak niektoré z parametrov číselne určíme, je možné ostatné parametre vypočítať. Tak vznikajú z problémovej situácie školské matematické úlohy rôznej obtiažnosti. Napríklad úlohy o veku. Opíšme ju parametricky a formulujeme školské úlohy.

Opis problémovej situácie

Dnes má Ado a rokov a Braňo b rokov. O r rokov bude Braňo taký starý, ako je Ado dnes. Ado bude mať potom x rokov. Pred p rokmi mal Ado toľko rokov, ako má Braňo dnes. Braňo mal vtedy o y rokov menej, ako má Ado dnes.

Súbor parametrov

V danej problémovej situácii (PS) je šesť parametrov (P): a, b, x, y, p, r. Pýtame sa, aké hodnoty môžu nadobúdať? Čo môžeme z textu povedať o definičnom obore a obore hodnôt parametrov?

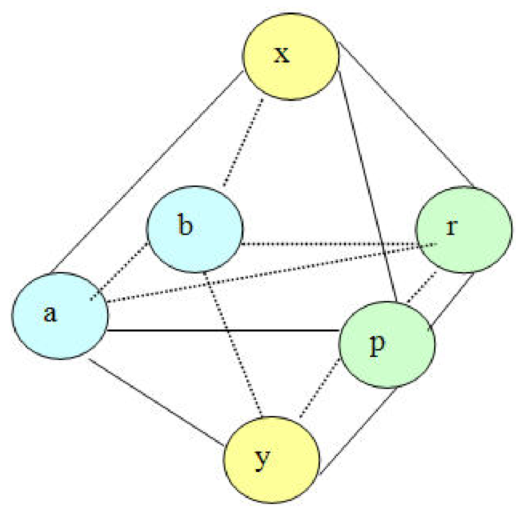
Vzťahy: Zo všetkých vzťahov sa usilujeme vybrať takú podskupinu – bázu vzťahov (BV), ktorá je úplná – každý ďalší člen PS sa z nej dá vyvodiť, a nezávislá – žiaden zo vzťahov tejto skupiny sa nedá vyvodiť zo zvyšných.

Z podmienok vyplývajú väzby:

$$b + r = a \ (1), \ \ a + r = x \ (2), \ \ a - p = b \ (3), b - p = a - y \ (4), p = r \ (5), \dots$$

V našom príklade sú úplné a nezávislé vzťahy (1) až (4).

Ak si predstavíme parametre ako vrcholy telesa, tak vzťahy medzi nimi môžeme prezentovať pomocou jeho hrán, kde každej číselnej trojici patrí práve jedna stena.



Stupne voľnost (SV) udávajú minimálny počet parametrov, ktoré v danej úlohe treba číselne zvoliť, aby z PS vznikla matematický úloha. Pritom platí (PP) – (BV) = (SV). V našom prípade $6 - 4 = 2$.

Obtiažnosť riešenia úlohy je diferencovaná voľbou dvojice. Ak sa zvolená dvojica vrcholov nachádza na spoločnej hrane, je riešenie úlohy jednoduchšie, ako keď ju volíme zo vzdialenejších vrcholov. Tu je potrebná substitúcia a vyjadrenie neznámej zo vzorca, pri ktorom sa využívajú vyššie konvergentné procesy (na úrovni 3 – analýza, syntéza, induktívne a 4 – deduktívne, či 5 – hodnotiace myslenie). Priame dosadenie číselnej dvojice do počtovej operácie, používa nižšie konvergentné procesy (1 – reprodukcia, 2 – porozumenie).

VÁŽENIE ÚLOH V SÉRIÁCH A PÍSOMNÝCH PRÁCACH

Úloha: Daný je štvorec so stranou dĺžky a, do ktorého je vpísaný štvrťkruh s polomerom $r = a$. Kružnicový oblúk rozdeľuje tento štvorec na dve časti: S_1 patrí len štvorcu a S_2 je štvrťkruh.

a) Vypočítajte obsah štvrťkruhu S_2.

b) Vypočítajte obsah časti S_1, ktorá patrí len štvorcu.

c) Vypočítajte obsah časti S_3 štvrťkruhu ohraničenej uhlopriečkou štvorca a kužnicovým oblúkom.

Tabuľka: Zadanie parametrov

úlohy	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
a	**5**						
u		**9**					
S			**16**				
T					**32**		
S_1				**20**			
S_2						**12,56**	
S_3							**7,74**
Kód úlohy:						(3,3,3,3,3,4)	

Legenda: a – strana štvorca, u – uhlopriečka štvorca, S – obsah štvorca, T – obsah trojuholníka

Podľa použitej úrovne myslenia pri výpočte jednotlivých neznámych pomocou zvoleného parametra vytvoríme postupne kódy obtiažnosti riešenia úlohy. Ich číselné hodnoty nám umožňujú diferencovať úlohy v tejto gradovanej sérii siedmich úloh na tri skupiny a, b, c. Z nich vybrať optimálnu trojicu pre písomnú prácu. V tvorivej dielni sme rozobrali niekoľko sérií úloh a ich diferenciáciu.

ZÁVER

Gradované písomné práce a ich jednotlivé úlohy môžeme zaradiť do kategórie *otvorených úloh so širokou odpoveďou neštrukturalizované*. Spĺňajú funkciu inventárnych testov – na zistenie úrovne určitých vedomostí a schopností, ktoré mali žiaci získať za dlhší čas. Z nášho pohľadu sú gradované písomné práce podľa funkcie skôr inventárne a podľa konštrukcie skalárne, avšak úlohy sú zoradené od najľahších po najťažšie v jednotlivých sériách, čo neznamená, že celá písomná práca je tak zoradená. Série už nemusia byť usporiadané zostupne podľa náročnosti. Gradované písomné práce by však nemali byť jedinou formou písomných prác. Mali by sa využívať aj iné formy, aby učiteľ nebol len jednosmerne orientovaný. Ale gradované série úloh na precvičenie učiva matematiky by mali byť prítomné v každej vyučovacej hodine.

LITERATÚRA

[1] Hejný, M. *Gradované série úloh*. Pracovný materiál. MC.B Bystrica 1996

[2] Janoušková, B. *Zbierka didaktických testov gradovaných písomných prác z matematiky.* Banská Bystrica: MC, 2000

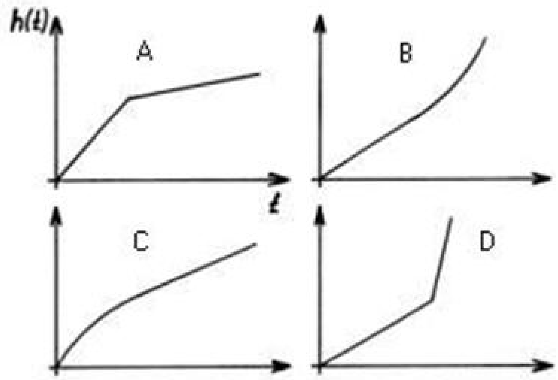
ÚLOHY Z GEOMETRIE VHODNÉ PRO ROZVOJ FUNKČNÍHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ

PETR EISENMANN[1]

V tomto příspěvku stručně popisuji průběh pracovní dílny věnované rozvoji funkčního myšlení žáků. Tentokrát jsme se věnovali úlohám, jejichž prezentace ve výuce matematiky na základní škole může zlepšit schopnost žáků vytvářet a popisovat grafy funkčních závislostí. Tento příspěvek obsahuje pouze jednu skupinu úloh, a to úlohy o naplňování nádob tvaru rotačních těles.

ÚVODNÍ ÚLOHA

Nádoba se v čase $t = 0$ začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Tato úloha pochází z dotazníkového šetření, které proběhlo v roce 2004 v severočeském regionu. Dotazník obsahující mimo jiné i tuto úlohu vyplnilo celkem 490 žáků základních škol (7., 8. a 9. třída) a 380 studentů různých typů středních škol s maturitou (3. a 4. ročník).

Správná odpověď je možnost C. Tabulka ukazuje souhrnné výsledky žáků základních a středních škol. Čísla vyjadřují četnost odpovědí v procentech.

	A	B	C	D	Neodpovědělo
ZŠ	12	27	27	33	1
SŠ	25	31	39	5	0

[1] *Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem, eisenmannp@sci.ujep.cz*

Na základní škole je nejčastější odpovědí možnost D. Důvod uvedení této varianty je zřejmý. Jde o možnost, ve které graf vyjadřující závislost nejvíce odpovídá příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci. Na základní škole je to pochopitelné. Zde se žáci s interpretací závislostí z praxe, vyjádřených grafem, setkávají spíše vzácně. Většina žáků ještě graf číst neumí, a tak volí odpověď podle podobnosti grafu funkce s obrázkem příslušné situace. Tento jev se objevil i u podobně koncipovaných úloh v tzv. PISA-studii (rozsáhlý výzkum matematických znalostí a dovedností žáků v mnoha zemích světa), viz [1]. Schopnost správně interpretovat graf funkce se rozvíjí tehdy, jsou-li žákům a studentům na všech stupních škol předkládány k řešení úlohy o závislostech s reálným kontextem, odpovídajícím jejich zkušenostem – viz [2].

Na střední škole je již nejčastější odpovědí správná možnost C.

DALŠÍ ÚLOHY

Pracovní listy jsou zařazeny na konci článku.

LIST 1

U nádob uvedených na tomto listu sestrojme s žáky grafy vyjadřující stejnou závislost jako v úvodní úloze, tedy závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t.

První dvě rotační tělesa (válec a kužel – jsou uvedeny nad čarou) vyřešme společně s žáky, u ostatních dvou nechme žáky nakreslit grafy samy.

Uvádím zde pouze list s řešeními, odpovídající pracovní list pro žáky (s prázdnými osovými kříži) je stejně jako mnohé další pracovní listy k dispozici na webové adrese `http://katmatprf.ujepurkyne.com/00_vyucujici.asp?ID=116`.

LIST 2

Zde je úloha opačná. Ke grafům nakresleným vlevo mají žáci za úkol nakreslit příslušné nádoby.

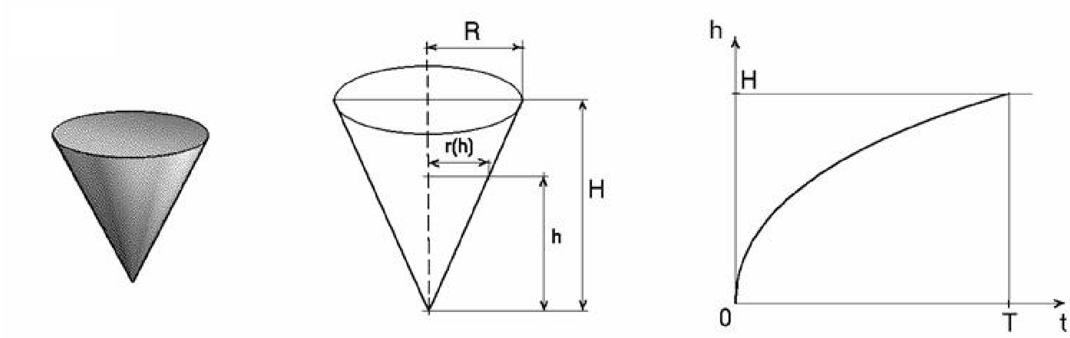
LIST 3

Úlohou žáků na tomto listu je nakreslit do jednoho obrázku (společného osového kříže) grafy funkcí vyjadřující závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase t pro nahoře nakreslený válec i kužel. Důležité je chování obou funkcí v krajních bodech příslušných definičních oborů. Tečny ke grafům obou funkcí v pravých krajních bodech definičních oborů musí být rovnoběžné! Obě nádoby mají totiž ve výšce H stejný poloměr. Žáci mají možnost si tak uvědomit, že rychlost přibývání hladiny (derivace naplňovací funkce) závisí pouze na poloměru tělesa v dané výšce, tedy možná překvapivé zjištění, že kruhová hladina daného poloměru přibývá stejně rychle v tělesech libovolných tvarů.

Jinak je tomu v levém krajním bodě definičního oboru, tedy v počátku. Zde je pravostranná tečna naplňovací funkce kužele totožná se svislou osou. Kužel zde na rozdíl od válce má špičku. Rychlost zvyšování hladiny je v této „nekonečně malé špičce“

nekonečně velká.

Pro úplnost uveďme ještě početní řešení. Jak bude vypadat průběh naplňování u kužele (viz obr. 3)? Jaká elementární funkce jej bude popisovat?



Obr. 3

Zřejmě platí

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(r(h))^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi(h \cdot \frac{R}{H})^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2} \cdot h^3.$$

Z rovnosti

$$V(h) = Q \cdot t$$

dostáváme hledanou funkci

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3H^2Q}{\pi R^2} \cdot t}$$

vyjadřující závislost výšky hladiny h na čase t. Zřejmě i ona vyhovuje okrajové podmínce $h(0) = 0$. Podle očekávání je to funkce rostoucí. Nemělo by nás překvapit ani to, že je konkávní – kužel takto na špičku postavený se přece s rostoucí výškou rozšiřuje a hladina tedy bude stoupat stále pomaleji.

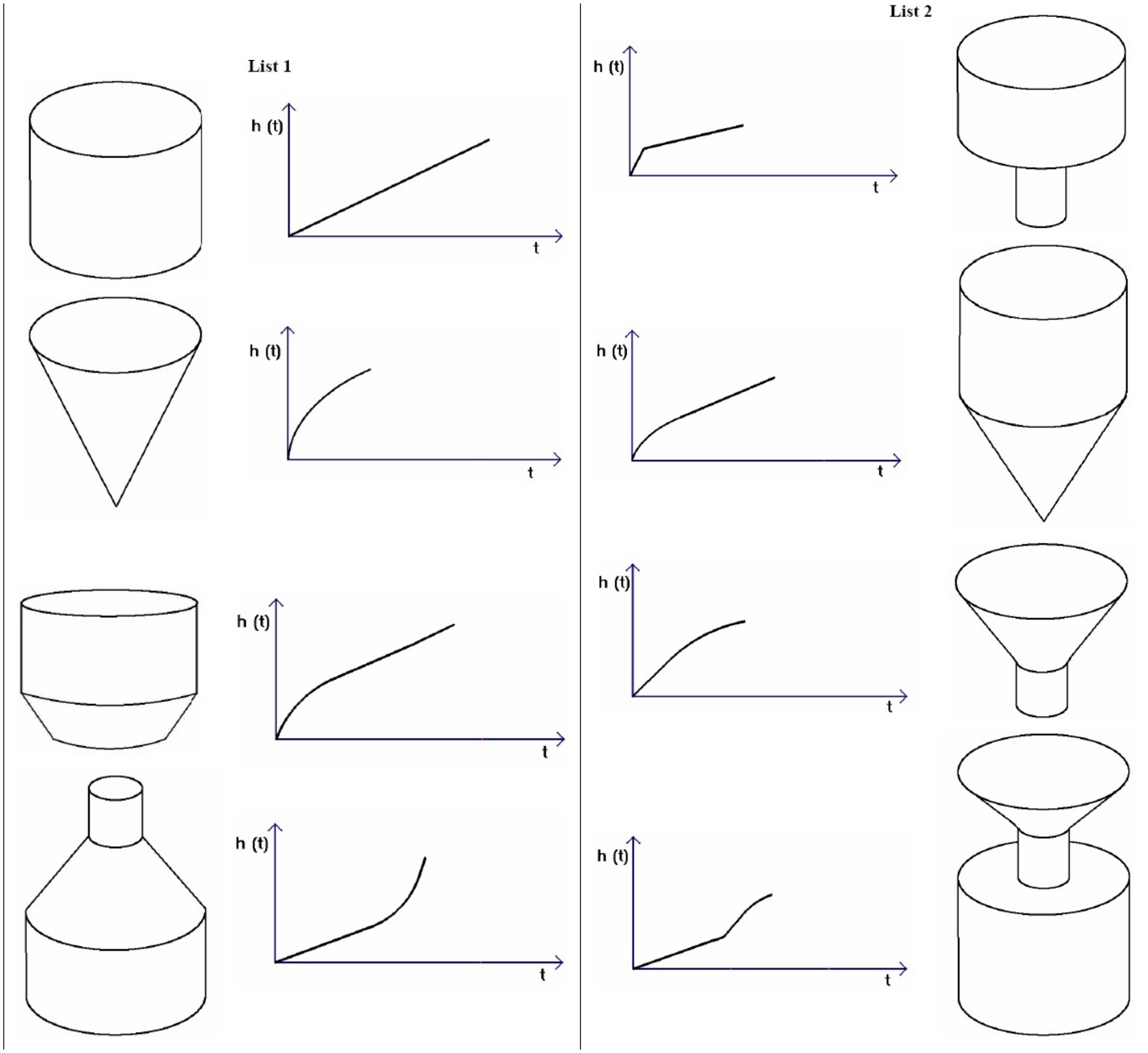
LITERATURA

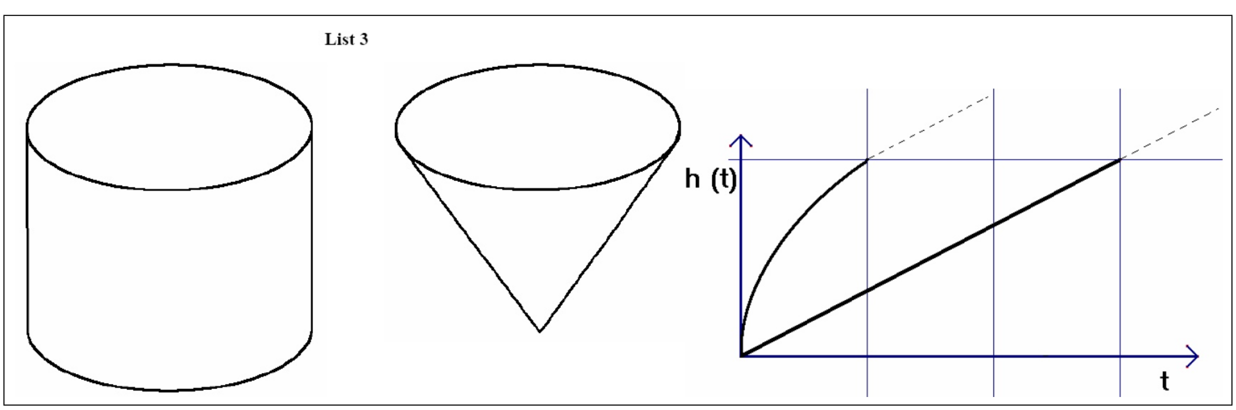
[1] Leuders, T., Prediger, S. Funktioniert's? – Denken in Funktionen, *Praxis der Mathematik in der Schule*, 2005, č. 2, Köln/Leipzig, 1–7

[2] Kopáčková, A. Podpora funkčního myšlení žáků, *Učitel matematiky*, 2005, č. 3, 174–179

PRACOVNÍ LISTY

Pracovní listy jsou zde uvedeny zmenšené. Autor na požádání zašle listy v původní velikosti e-mailem.





ROZVOJ KONCEPTUÁLNÍHO MYŠLENÍ V MATEMATICE[1]

MILAN HEJNÝ, DARINA JIROTKOVÁ, JANA SLEZÁKOVÁ[2]

ANOTACE DÍLNY

Dílna byla určena pro učitele 1. i 2. stupně ZŠ.

Všichni známe příběh, jak prý malý Karel Gauss, žák 3. ročníku, nečekaně rychle našel součet $1+2+3+\cdots+100$. Podstata jeho triku byla v tom, že nepočítal postupně $1+2=3$, $3+3=6$ atd., ale podíval se na součet jako celek. Otočil jej do tvaru $100+99+\cdots+1$, oba součty sčítal „po sloupcích" a dostal součet sta sčítanců $101+101+\cdots+101$. Tedy číslo 10 100. Z toho mladý Karel vyvodil, že 5 050, tj. polovina z 10 100, je hledaný součet.

Cílem dílny bylo předložit účastníkům více podobných úloh a situací, v nichž úvaha o celku vede k rychlejšímu řešení než běžné početní procesy. Úlohy se budou vztahovat k aritmetickým operacím, dělitelnosti, kombinatorice, rovnicím i geometrii. Různé řešitelské procesy účastníků budou analyzovány a komentovány.

ÚVOD

Dílna byla časově členěna do dvou částí.

První část byla věnována osvětlení klíčových pojmů dílny: konceptuální myšlení a procesuální myšlení. Pojmy jsou ilustrovány úlohami na úrovni 1. stupně i na úrovni 2. stupně ZŠ.

Druhá část, které bylo věnováno daleko více času, spočívala v práci ve skupinách. Účastníci dílny pracovali ve dvou skupinách. První skupina byla orientována na 1. stupeň ZŠ, druhá na 2. stupeň ZŠ. Účastníci řešili sérii úloh buď individuálně, nebo ve dvojicích, nebo ve větších skupinách. Ve vzájemných diskusích, do nichž se autoři dílny zapojili až na vyzvání účastníků, byly popisovány a komentovány myšlenkové procesy účastníků. Podle situace byla diskuse doplněna zkušenostmi autorů, o tom, jak jejich žáci některé úlohy nebo problémové situace řešili.

STRUČNÝ VÝKLAD KLÍČOVÝCH POJMŮ

Slova *proces* a *koncept* charakterizují dva způsoby, jimiž naše vědomí vnímá pojmy, vztahy, situace, jevy i události reálného světa, jimiž je ukládá do zkušenostního pole a jimiž s nimi zachází.

[1]Tento článek vznikl za podpory grantu GA ČR 406/05/2444.

[2]*PedF UK v Praze, milan.hejny@pedf.cuni.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz, jana.slezakova@pedf.cuni.cz*

Slovu *proces* odpovídá změna, pohyb, růst, pokles, tvorba, vznikání i zanikání, dělení i spojování,. . . Slovu *koncept* odpovídá stav, neměnnost, bytí, stálost.

Adjektivem *procesuální* označujeme ty obsahy, aktivity, či stavy vědomí, v nichž rozhodující roli hraje čas. Když učíme žáka algoritmus, učíme jej procesu.

Adjektivem *konceptuální* označujeme nadčasové obsahy, představy, či stavy vědomí. Když žáka učíme, co je čtverec nebo zlomek, snažíme se, aby se v jeho vědomí vytvořil koncept tohoto pojmu.

Posluchač hudby vnímá umění jako proces, návštěvník galerie vnímá umění jako koncept. U hudby je časová dimenze zásadní. Zde nelze takty přeskakovat, nebo dokonce hrát skladbu pozpátku. Hudba odezní a zůstává pouze ve vědomí posluchače. Obraz trvá a když od něj odejdu, mohu se k němu opět vrátit. Mohu sledovat jednotlivé části obrazu v tom pořadí, jak chci. Čas zde nehraje žádnou zásadní roli.

Na našich školách převládá procesuální vnímání matematiky, protože se nejvíce času věnuje nacvičování řešitelských procesů. Proto situace, které jsou lépe řešitelné konceptuálním přístupem, bývají pro žáky často problémové.

Ilustrace 1. Žák 4. ročníku řeší následující úlohu.

Najdi součet tří čísel ve vyznačených oknech:

$$\begin{aligned} 21 - 17 &= \boxed{??}, \\ 17 - 8 &= \boxed{??}, \\ 8 - 1 &= \boxed{??}. \end{aligned}$$

Žák, který si dříve, než se pustí do počítání, úlohy prohlédne, zjistí, že číslo 17, které se v první úloze odčítá, se ve druhé úloze přičítá, a podobně i číslo 8. Tedy stačí představit si, že hledané číslo lze psát jako $21 - 17 + 17 - 8 + 8 - 1$ a tedy výsledek úlohy je $21 - 1 = 20$.

Takto postupuje jen velice málo žáků. Převážná většina se pustí ihned do počítání, najde dílčí výsledky 4, 9 a 7 a jejich součtem získá číslo 20.

Ilustrace 2. V šestém ročníku začíná vyučující hodinu matematiky krátkou rozcvičkou na počítání zpaměti. Rozcvičku připravuje určený žák. Jednou u takové rozcvičky zazněla úloha: 28×25. Žák Leoš během 3 sekund zvedl ruku, že je jako hotov. Na vyzvání učitelky pak vysvětlil, jak to počítal: $28 \times 25 = 7 \times 4 \times 25 = 7 \times 100 = 700$. Podstata myšlenky Leoše byla v propojení dvou skutečností: když 25 vynásobím 4, dostanu 100, a číslo 4 se v čísle 28 nachází, a to 7krát. Většina žáků počítala úlohu rozkladem: $20 \times 25 = 500$, $8 \times 25 = 200$, $500 + 200 = 700$.

Ilustrace 3. V kvartě osmiletého gymnázia (zaměřeného na matematiku) řešili žáci na tabuli rovnici

$$\frac{1 + x^2}{1 + (1 + x)^2} = \frac{1}{2}.$$

Řešení mělo 6 kroků:

$(1+x)^2 = \frac{1}{2}\cdot[1+(1+x)^2]$; $2\cdot(1+x)^2 = 1+(1+x)^2$; $2(1+2x+x^2) = 1+1+2x+x^2$; $2+4x+2x^2 = 2+2x+x^2$; $2x+x^2 = 0$; $2+x = 0$; $x = -2$.

Třída pak upozornila žáka, který rovnici u tabule počítal, že při dělení nulou zapomněl, že též $x = 0$ je kořen. Tím byla úloha vyřešena.

Žák Tomáš řekl, že to se nemusí počítat, protože to je ihned vidět. Vysvětlil svůj postup: „Kolik je asi to $(1+x)^2$? Když si místo toho píši třeba y, vidím, že $y/(y+1) = \frac{1}{2}$, tedy $y = 1$. Takže vím, že $(1+x)^2 = 1$. Číslo $x = 0$ vidím hned a číslo $x = -2$, když si uvědomím, že $(-1)^2 = 1$.“

Klíčem k Tomášovu řešení bylo zjištění, že substituce $y = (1+x)^2$ rychle vede k řešení.

Ti žáci, kteří substituci použijí, nepostupují procesním způsobem, jejich řešitelská strategie je konceptuální: předloženou matematickou situaci vnímají jako celek, ten rozkládají na jednotlivé elementy a hledají vzájemné vazby mezi těmito elementy. V uvedené rovnici dominantním elementem je právě opakující se výraz $(1+x)^2$.

SOUBOR ÚLOH PRO PRVNÍ STUPEŇ ZŠ

Úlohy 01–20 se vztahují k prostředí Dědo Lesoň. Prostředí je žákům uvedeno pomocí pohádky o dědovi Lesoňovi, příteli, ochránci a léčiteli zvířat. Děda Lesoň organizuje pro zvířátka různé zábavy. Například přetahovanou. To se dva týmy zvířátek postaví proti sobě a přetahují se lanem. Při těchto hrách bylo zjištěno, že kočka (K) je stejně silná jako 2 myši (M), husa (H) je stejně silná jako kočka s myší, tedy $H = K + M$. Dále síla psa (P) je dána vztahem $P = H + M$, síla kozy (G, z anglického goat) je dána vztahem $G = P + M$, síla berana (B) je dána vztahem $B = G + M$, síla krávy (C, z anglického cow) je dána vztahem $C = K + K$.

V úlohách 01–10 máme zjistit, který z dvou soupeřících týmů je silnější, a buď doplnit slabší tým, nebo oslabit silnější tým, aby po změně byly oba týmy stejně silné.

Úlohu „porovnejte týmy $K + M$ a $M + M + M$“ zapisujeme $\{KM\} \sim \{MMM\}$.

Úloha 01. $\{K\} \sim \{H\}$	Úloha 06. $\{PH\} \sim \{HHMM\}$
Úloha 02. $\{KM\} \sim \{MMM\}$	Úloha 07. $\{GH\} \sim \{PPM\}$
Úloha 03. $\{KP\} \sim \{HHH\}$	Úloha 08. $\{BK\} \sim \{HHH\}$
Úloha 04. $\{HMM\} \sim \{PM\}$	Úloha 09. $\{BG\} \sim \{PPP\}$
Úloha 05. $\{PKM\} \sim \{HK\}$	Úloha 10. $\{CP\} \sim \{GGG\}$

Další úlohy 11–16 jsou protetikou rovnic. Zde víme, že oba soupeřící týmy jsou stejně silné, ale některá zvířátka jsou maskovaná. (Pohádkové ukotvení těchto masek lze udělat pomocí masopustních her, kdy některá zvířátka vystupují maskována.) Maskované zvířátko označujeme X. Je-li v jedné úloze více písmen X, představují všechna tato písmena stejná zvířátka. Úlohou řešitele je zjistit, jaké zvířátko se pod maskou ukrývá.

Úloha 11. $\{KX\} = \{MMMM\}$ Úloha 14. $\{GG\} = \{XXXM\}$
Úloha 12. $\{XP\} = \{HHH\}$ Úloha 15. $\{XXB\} = \{CMM\}$
Úloha 13. $\{XXP\} = \{C\}$ Úloha 16. $\{BK\} = \{HHH\}$

Úlohy 17–20 jsou protetikou diofantovských rovnic. V nich se vyskytují dva různé druhy maskovaných zvířátek, X a Y. Přitom všechna X představují stejná zvířátka a všechna Y též stejná zvířátka. Zvířátka X mohou, ale nemusí být jiná než zvířátka Y. V každé úloze máme dvě dvojice soupeřících týmů.

Úloha 17. $\{KX\} = \{MMMM\}$ a $\{XYP\} = \{HHH\}$.
Úloha 18. $\{KX\} = \{Y\}$ a $\{XY\} = \{GG\}$.
Úloha 19. $\{YYX\} = \{CM\}$ a $\{XX\} = \{B\}$.
Úloha 20. $\{XXY\} = \{KG\}$ a $\{XYY\} = \{PP\}$.

KOMENTÁŘE K ÚLOHÁM

A. Při řešení těchto úloh mají žáci k dispozici žetony s ikonkami zvířátek, tedy řešení dělají manipulativně. Žáci používají zejména tyto myšlenkové operace: vhled, substituci, krácení, rozšiřování, doplňování, škrtání a přesouvání. Ukážeme to na příkladech. Budeme řešit úlohy 01, 02, 03, 04 a 05.

B. $\{K\} \sim \{H\}$. Žák ihned vidí, že H (husa) je silnější než K (kočka), neboť $\{KM\} = \{H\}$, jak bylo zavedeno. Řešení tohoto typu označujeme slovem *vhled*. Přitom vztah $\{K\} \sim \{H\}$ někteří žáci vnímají jako narušení vztahu $\{KM\} = \{H\}$. Tedy nejprve zde byl vztah $\{KM\} = \{H\}$ a pak, jeho narušením, vznikl vztah $\{K\} \sim \{H\}$. Dítě se ptá, o jaké narušení zde šlo. Jedna myška utekla.

Jiní žáci se na vztah $\{K\} \sim \{H\}$ dívají jako na výzvu co s tím dělat, aby se nerovnost odstranila. Dítě si vybaví vztah $\{KM\} = \{H\}$ uložený v dlouhodobé paměti a porovnáním obou vidí „Musím přidat myšku“.

Pro nás se oba myšlenkové kroky jeví jako stejné, ale pro dítě, které se s porovnáváním teprve seznamuje, jsou to přístupy rozdílné.

C. Řešíme úlohu $\{HM\} \sim \{G\}$. Tento vztah upravíme *substitucí* $\{HM\} = \{P\}$ na vztah $\{P\} \sim \{G\}$. Protože levý tým je slabší, musí být posílen o M. *Doplněním* levého týmu o M dostaneme rovnost $\{PM\} = \{G\}$. Úlohu jsme vyřešili.

D. Řešíme úlohu $\{KM\} \sim \{MMM\}$. Výsledek přetahování se nezmění, když z obou týmů odejde jedna myš. Dostaneme tím $\{K\mathbf{M}\} \sim \{MM\mathbf{M}\}$, tedy $\{K\} = \{MM\}$; týmy jsou stejně silné. Úlohu jsme řešili krácením $\mathbf{M}$ (v zápise je tento fakt reprezentován tučným písmem).

E. Řešíme úlohu $\{KP\} \sim \{HHH\}$. Výsledek přetahování se nezmění, když k oběma týmům přibude jedna myš. Dostaneme tím $\{M + KP\} \sim \{M + HHH\}$, tj. $\{MKP\} \sim \{MHHH\}$. Dále v levém týmu uděláme substituci $MK = H$, dostaneme $\{HP\} \sim \{MHHH\}$. Teď můžeme krátit **H**. Bude $\{P\} \sim \{MHH\}$. Teď v pravém týmu uděláme substituci $MH = P$ a obdržíme $\{P\} \sim \{PH\}$. Vidíme, že pravý tým je silnější o H. Musíme tedy H v pravém týmu škrtnout. Pak budou oba týmy stejně silné. Při řešení jsme použili nejprve *rozšíření* o M, pak substituci $MK = H$, poté *krácení* **H**, pak ještě jednou *substituci MH = P* a nakonec *škrtnutí* **H** v pravém týmu.

F. Řešíme úlohu $\{KPM\} \sim \{HK\}$. *Krácením* K dostaneme $\{PM\} \sim \{H\}$. *Substitucí* $P = HM$ máme $\{HMM\} \sim \{H\}$. Můžeme ještě krátit H, ale to není nutné, neboť již teď je jasné, že levý tým je silnější, a rovnosti lze dosáhnout tak, že *přesuneme* M z levého do pravého týmu.

OBECNĚJŠÍ ÚVAHY O ROVNOSTI A ROVNICI

Rovnost je vztah zapsaný ve formě $A = B$, kde A a B jsou kvantity zapsané v jistém jazyce. Například $1 + 1 = 2$, nebo $15 - 3 = 2 \times 6$, nebo $1{,}5 = 3/2$, nebo $XI = 11$, nebo $\{K\} = \{MM\}$.

Jsou dva způsoby, jak rovnost vnímáme:

1) jako známý fakt, který je shodný s tím, co máme v dlouhodobé paměti,

2) jako hypotézu, která je výzvou k porovnání částí A a B.

Rovnost je základem pro tři druhy úloh: porovnávání, rovnicové situace a rovnice.

Porovnávání. Dány jsou kvantity A a B. Naším úkolem je zjistit, zda jsou stejné nebo různé. Když jsou různé, je třeba zjistit, která je větší. Otázka, kterou se ptáme v úlohách na porovnávání u dědy Lesoně, zní: „Který tým je silnější?“

Rovnicové situace. Dány jsou kvantity A a B, které jsou různé. Najděte kvantitu X případně Y tak, aby bylo $A + X = B$, nebo $A = B + Y$, nebo $A - X = B$, nebo $A = B - Y$, nebo dokonce $A \pm X = B \pm Y$. Otázka, kterou se ptáme v úlohách na rovnicovou situaci u dědy Lesoně, zní: „Jak to udělat, aby oba týmy byly stejně silné?“

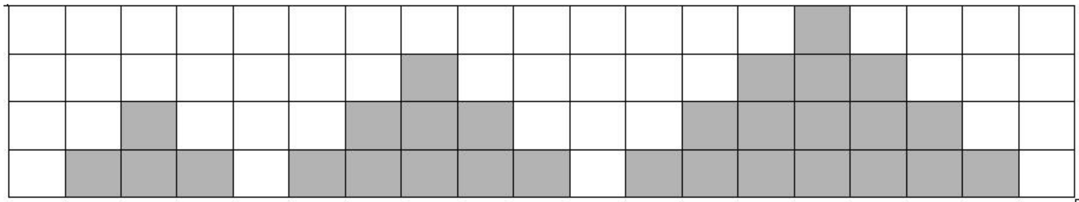
Rovnice. Dány jsou dvě stejné kvantity $A = B$. Přitom aspoň jedna z nich je vyjádřena i pomocí jisté neznámé kvantity X. Naším úkolem je zjistit hodnotu neznámé kvantity. Otázka, kterou se ptáme v rovnicích u dědy Lesoně, zní: „Jaké zvířátko se ukrývá pod maskou X?“

SOUBOR ÚLOH PRO DRUHÝ A TŘETÍ STUPEŇ

Úloha 21. Je dán čtvrtkruh SAB. Na kružnicovém oblouku AB je dán bod M, jehož kolmé průměty na úsečku SA, resp. SB označíme U, resp. V. Víme, že $SA = 6$ cm, $BV = 2$ cm. Najděte délku úsečky UV.

Úloha 22. Dána je posloupnost mřížových tvarů. První tři členy posloupnosti jsou na obrázku.

Zjistěte obvod a) stého, b) n-tého členu této posloupnosti.



Úloha 23. Dán je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na přeponě AB je dána posloupnost bodů U_1, U_2, U_3, ... a na odvěsně BC posloupnost bodů V_1, V_2, V_3, ... tak, že CU_1 je kolmé na AB, U_iV_i je kolmé na BC, pro každé i, a V_iU_{i+1} je kolmé na AB pro každé i. Známe délky odvěsen. Zjistěte součet délek všech úseček U_iV_i.

Úloha 24. Do půlkruhu vepište obdélník maximálního obsahu.

Úloha 25. Najděte číslo, které po vydělení a) kterýmkoliv z čísel 2, 3, 4, ..., 12, 13 dá zbytek 1, b) číslem k ($k = 2, 3, 4, \ldots, 12, 13$) dá zbytek $k - 1$.

Úloha 26. Najděte absolutní hodnotu komplexního čísla $(2 + i)/(1 - 2i)$.

Úloha 27. Na povrchu koule s poloměrem 1 je dán sférický trojúhelník s úhly a) $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$; b) $\alpha = 75°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 75°$; c) $\alpha = 90°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 60°$.

ZÁVĚR

Podotkněme, že to, jakou řešitelskou strategii řešitel volí, je uloženo nikoliv v kognitivní, ale v meta-kognitivní sféře. Za vyšší typ konceptuální strategie můžeme považovat takovou, v nichž se řešitel neomezí pouze na rozklad dané situace, ale hledá širší kontext, uvnitř kterého by daná situace byla z hlediska řešení jasnější a přehlednější. Příkladem může být výpočet objemu tetraedru, jehož hrana má délku a. Standardní přístup přes výpočet podstavy, pak výšky a nakonec objemu je poměrně dlouhý. Jestliže ale tetraedr vložím do krychle $ABCDEFGH$ o hraně b, pak lehce zjistíme, že objem tetraedru $ACFH$ je $2/3b^3$, tedy $a^3/\sqrt{18}$.

LITERATURA

[1] Hejný, M. (2006). Prostředí, která otevírají svět čísel. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Vydavatelský servis, Plzeň, s. 115–120.

[2] Jirotková, D. (2006). Budování konceptuálních představ čísla u dětí ve věku 5–8 let. In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Vydavatelský servis, Plzeň, s. 143–149.

[3] Slezáková, J. (2006). Budování procesuálních představ čísla u dítěte ve věku 5–8 let In M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (Eds.), *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Vydavatelský servis, Plzeň, s. 253–258.

VÝUKA PODPOROVANÁ INTERAKTIVNÍ TABULÍ

IVO HORÁČEK[1]

Motto: Používat interaktivní tabuli při výuce není cíl, ale prostředek.

Interaktivní tabule (dále jen IT) je moderní didaktická pomůcka. K jejímu provozu je třeba ještě PC (propojuje se pomocí USB kabelu) a dataprojektor. Na našem trhu se objevilo několik typů těchto tabulí, které nabízejí obdobné funkce, fungují však na jiném technickém principu. Jednoznačně nejrozšířenější IT ve školách v ČR je interaktivní tabule SmartBoard, proto se v tomto článku zaměřím na tento typ tabule. IT se nechá charakterizovat jako tabule dotyková, tzn. reaguje na tlak ruky na plochu tabule. Přitom naše ruka supluje funkci myši, takže např. dvojitým klepnutím prstu na ikonu na ploše tabule lze spustit aplikaci, stejně jako ji spouštíme dvojitým kliknutím myši na ploše monitoru.

Používání IT však představuje pro řadu učitelů problém - musí překonat strach z neznámého zařízení. Někdy jde i o pohodlnost, protože příprava vyučovací jednotky s podporou IT může být časově náročná. V první části článku se chci proto zaměřit na stručnou charakteristiku způsobů, jak lze IT při výuce využít. Používání IT ve výuce nemá být módní záležitostí, ale prostředkem, jak výuku zefektivnit.

ZPŮSOBY POUŽITÍ TABULE SMARTBOARD

IT je možno samozřejmě použít jako alternativu klasické „černé“ tabule. Je třeba přitom dodržovat určitá pravidla a respektovat i jistá omezení, která IT oproti klasické tabuli má (na IT může v danou chvíli psát pouze jeden člověk, problémy se stíněním). Na druhou stranu IT v tomto případě disponuje několika výhodami – čitelné psaní ve čtyřech barvách, možnost velice rychle smazat celou tabuli a zcela odpadá učitelům dobře známý problém s čekáním až smazaná tabule uschne.

IT se dá také velice jednoduše využít jako interaktivní projekční plocha. Nabízí se možnost vstupovat do promítání přímo u tabule a není tím pádem narušen kontakt se žáky, jako by tomu mohlo být v případě ovládání promítání od počítače. Podobně lze IT použít jako náhradu zpětného projektoru, přičemž odpadá problém s kopírováním fólií.

Výrobcem dodávaný software interaktivní tabule dokáže velmi dobře spolupracovat se známými aplikacemi MS Office (Word, Excel, PowerPoint), při práci s ním tedy můžete s malými úpravami využít téměř vše, co máte v těchto aplikacích již vytvořené. Do souborů s příponou .doc, .xls a .ppt pak lze ve formě obrázku vkládat veškerý ručně psaný text, který vzniká při výuce.

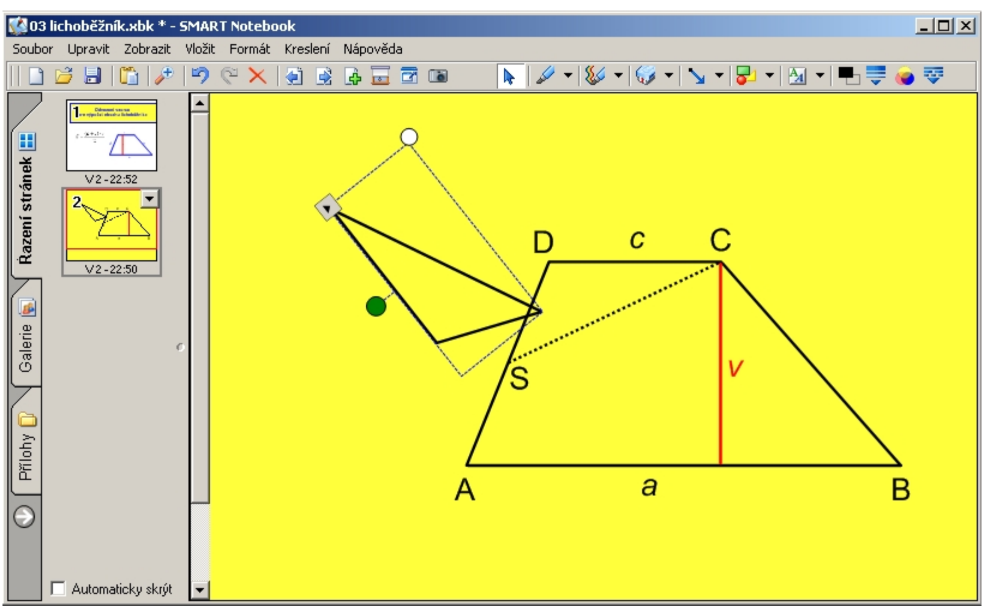
[1]*OA a VOŠE; T. G. Masaryka 14; Mladá Boleslav, horacek@oamb.cz*

Maximální využití všeho, co IT nabízí, lze docílit při práci se Smart Softwarem. Nejdůležitější aplikací tohoto balíku je Smart Notebook, který umožňuje interaktivní práci s objekty, a to jak textovými, tak grafickými. Objekty se dají rukou zvětšovat, přesouvat i otáčet. S použitím této aplikace se IT navíc chová obdobně jako flipchart, to znamená, že při popsání celé plochy tabule se nemusí tabule mazat, ale vloží se nová prázdná plocha. Ke každé „popsané tabuli" se pak lze jediným „kliknutím" kdykoli vrátit. Zásadní výhodou je možnost elektronického uložení veškerého dění na tabuli během výuky. Software např. také umožňuje zaznamenat vše do videosouboru ve formátu avi. Smart Software je dodáván spolu s IT a pokud škola tabuli vlastní, může ho používat každý zaměstnanec na libovolném počtu počítačů. Učitelé si tak např. mohou vytvářet přípravy doma a nejsou vázány na učebnu, kde je IT nainstalována. Od dubna 2005 je k dispozici lokalizovaná česká verze softwaru.

VYUŽITÍ INTERAKTIVNÍ TABULE SMARTBOARD PŘI VÝUCE MATEMATIKY

Použití IT je podle mého názoru vhodné při výuce libovolného tématického celku. Její výhody oceníte však nejvíce v situacích, kdy je třeba na tabuli opakovaně kreslit obdobné situace a často tabuli mazat. To se týká především tématických celků z oblasti geometrie a funkcí, ale i např. zobrazování na číselné ose. V této části článku předkládám několik nápadů, udělat s pomocí IT výuku matematiky zajímavější a názornější.

ODVOZENÍ VZORCE PRO OBSAH LICHOBĚŽNÍKU

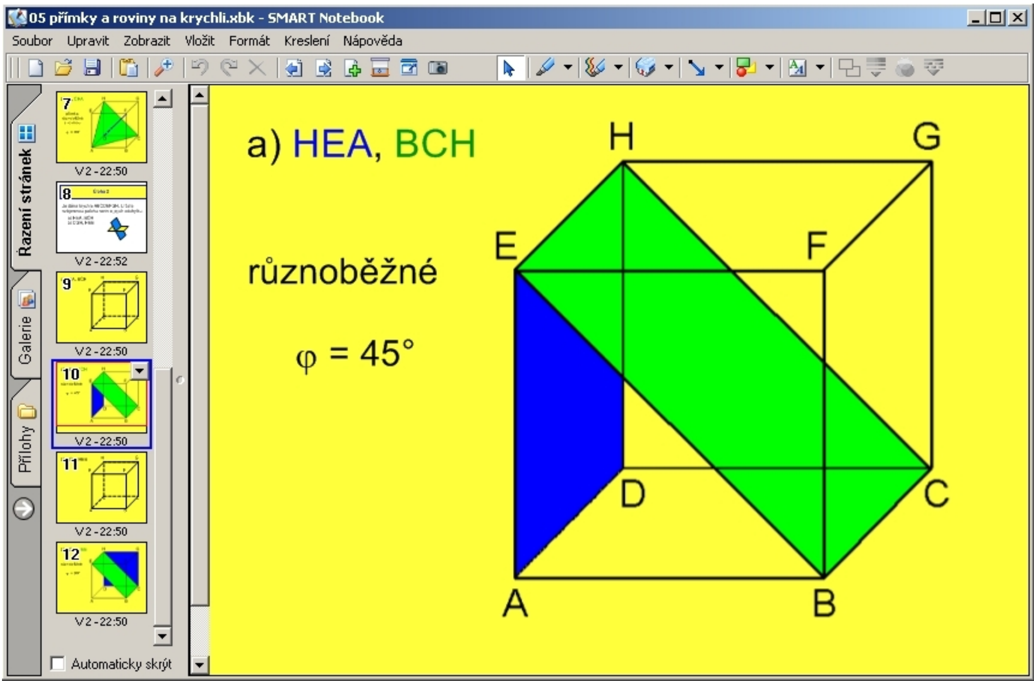


S pomocí aplikace Smart Notebook lze snadno demonstrovat „přeměnu" lichoběžníku na trojúhelník přesunutím a otočením trojúhelníku SCD s následnou diskusí o shodnosti úseček a úhlů.

SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Vzhledem k tomu, že aplikace Smart Notebook umožňuje posunutí a otáčení geometrických objektů, nabízí se využití v tématickém celku Shodná zobrazení (verze, která má být uvolněna v květnu 2006 je navíc implementována i osová souměrnost). „Fyzický" pohyb objektů po ploše tabule působí v tomto případě velice názorně.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK A ROVIN NA KRYCHLI



Při výuce tohoto tématu je velmi důležitá názornost obrázku na tabuli. Zatímco na klasické tabuli jsou obrázky z tohoto hlediska málokdy uspokojivé, IT nabízí téměř ideální řešení (přesný nákres, barevné odlišení).

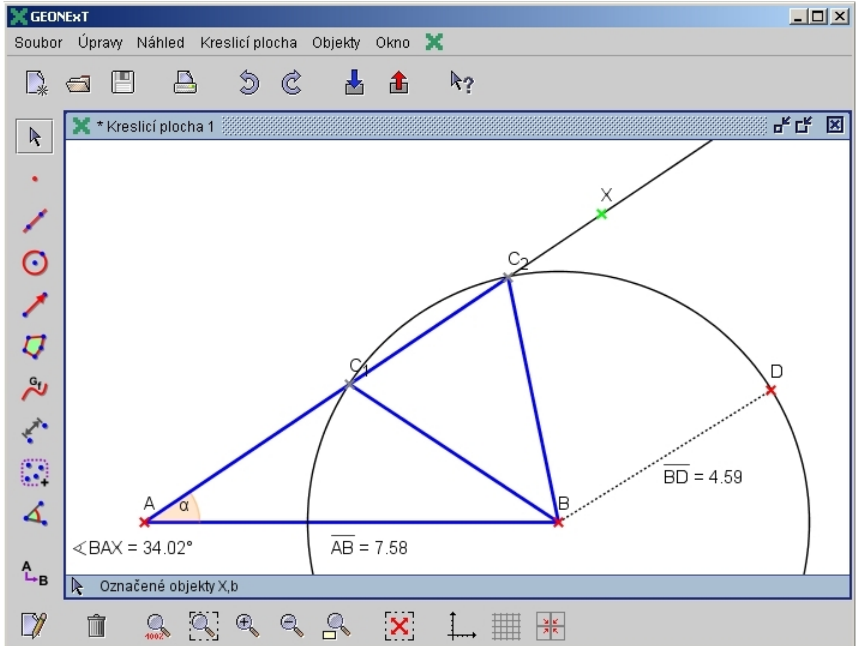
VYUŽITÍ APLIKACE GEONEXT

Geonext je dynamický geometrický software dostupný i v české verzi. Jedná se o obdobu kultovní Cabri Geometrie. Umožňuje vytvářet konstrukce se snadnou změnou jednotlivých vstupních parametrů, takže lze např. názorně ukázat, kolik průsečíků má přímka s kružnicí v závislosti na poloměru kružnice nebo na sklonu přímky. Narozdíl od Cabri Geometrie je však Geonext zcela zdarma a má kvalitněji provedenou grafiku.

Velice podobnou alternativou je program Geogebra (`www.geogebra.at`), který však není lokalizován.

ODKAZY

Na závěr uvádím několik odkazů na webové stránky, které se problematiky interaktivních tabulí úzce týkají.



`www.veskole.cz` – portál věnovaný používání interaktivní tabule při výuce, za jehož vznik vděčíme především ing. Hausnerovi, řediteli ZŠ Lupáčova, Praha. Na tomto portálu můžete mimo jiné zdarma získat řadu zpracovaných témat pro výuku s použitím interaktivní tabule.

`www.avmedia.cz` – stránky firmy AV Media, výhradního dovozce interaktivních tabulí SmartBoard do ČR. Na stránkách naleznete kromě jiného aktuální ceny zařízení (včetně slev pro školy), nabídku akcí týkajících se problematiky interaktivních tabulí nebo např. aktuální verze softwaru Smart.

`www.e-gram.cz` – stránky MŠMT věnované problematice ICT

`geonext.de` – domovská stránka aplikace Geonext home.pf.jcu.cz/ kubuda01/ - česká stránka věnovaná aplikaci Geonext

GEOMETRICKÁ PRAVDEPODOBNOSŤ OKOLO NÁS[1]

LUCIA ILUCOVÁ[2]

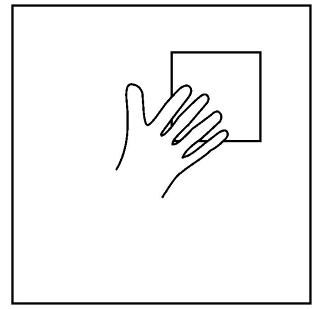
V porovnaní s klasickou pravdepodobnosťou sa *geometrická pravdepodobnosť* zdá byť zložitejšia (už nehádžeme len kockou alebo mincou), a preto aj ako menej dôležitá časť teórie pravdepodobnosti. Je to paradoxné, pretože organický a anorganický svet

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, ilucova@gmail.com*

okolo nás je plný pravdepodobnostných javov geometrického typu a práve geometrická pravdepodobnosť je hlavným prostriedkom pre ich popis a pochopenie. Napriek tomu sa táto téma zvyčajne nezaraďovala do učebných osnov matematiky základnej ani strednej školy[3].

Pri vstupe do tmavej miestnosti sa človek automaticky snaží rukou vyhľadať – „vysondovať“ – vypínač na svetlo, aby v miestnosti zasvietil. Podľa určitých predpisov sa vypínač musí nachádzať v určitej výške nad podlahou a v určitej vzdialenosti od dverí, a tak sme zvyknutí na časť steny, v ktorej sa vypínače obyčajne nachádzajú (obr. 1). Intuitívne chápeme, že pravdepodobnosť nájdenia vypínača je závislá od jeho obsahu a od obsahu časti steny, v ktorej ho hľadáme, resp. od ich pomeru. V podobnej situácii sa nachádzame takisto dennodenne – na chodníku sa snažíme vyhýbať ľuďom idúcim oproti nám, aby nedošlo k zrážke. Pravdepodobnosť zrážky závisí od telesných rozmerov chodcov a zvyšuje sa s rýchlosťou chôdze oboch míňajúcich sa chodcov, s ich nepozornosťou či vedľajšou činnosťou, ktorá chôdzu sprevádza (napr. telefonovanie). Do problematiky geometrickej pravdepodobnosti patrí napríklad aj blúdenie človeka v lese, hľadanie koristi predátorom v jeho teritóriu, hádzanie šípok na terč či strieľanie lopty (puku) do futbalovej (hokejovej) bránky. Všetky tieto situácie z reálneho života však v porovnaní s „matematickými“ problémami geometrickej pravdepodobnosti závisia od väčšieho množstva faktorov.



Obr. 1: Výsledkom interakcie ľudskej ruky (sonda) so stenou je nájdenie alebo nenájdenie vypínača.

Z historického hľadiska je geometrická pravdepodobnosť len o trošku mladšou „sestrou“ klasickej pravdepodobnosti. Za jej zakladateľa je považovaný francúzsky gróf *Buffon* (vlastným menom Georges-Louis Leclerc, 1707–1788), ktorý v svojej práci *Supplément á l'Histoire Naturelle* z roku 1777 predložil a riešil (hoci nie vždy správne) štyri problémy týkajúce sa hier založených na náhode. Okrem známej *úlohy o ihle* (*Buffonova úloha o ihle*), ktorá sa zaoberala pravdepodobnosťou, že ihla (v skutočnosti „nekonečne tenká“ tyč) dĺžky ℓ hodená na systém rovnobežných priamok vzdialených od seba vo vzdialenosti $d, d > \ell$, pretne jednu z priamok, tam bola zaradená aj *úloha o dlaždici* (alebo *úloha o štvorcoch*). V nej sa Buffon snažil riešiť šance hráčov (pravdepodobnosti výhier) v obľúbenej renesančnej hre šľachticov *franc carreau*; náčrt jej riešenia je uvedený ďalej v príspevku.

K ďalším zaujímavým úlohám z histórie geometrickej pravdepodobnosti určite patrí *Sylvestrov štvorbodový problém* (Aká je pravdepodobnosť, že štyri náhodne vybraté body vo vnútri konvexnej oblasti vytvoria konvexný štvoruholník?) a *Bertrandov paradox* (Aká je pravdepodobnosť, že náhodná tetiva v kruhu je dlhšia ako dĺžka strany rovnostranného trojuholníka vpísaného do kruhu?). Viac informácií o problematike geometrickej pravdepodobnosti je možné nájsť napr. v Saxl (2005).

[3]Geometrická pravdepodobnosť je v súčasnosti jednou z požiadavok na maturitnú skúšku z matematiky typu a na Slovensku.

Predkladám niekoľko jednoduchých úloh geometrickej pravdepodobnosti s riešeniami:

Úloha 1. Aká je pravdepodobnosť, že náhodný bod zasahujúci úsečku XY s dĺžkou 1 zasiahne jej časť ZY s dĺžkou 0,9?

Obr. 2

Pravdepodobnosť, že náhodný bod zasahujúci úsečku XY zasiahne jej časť ZY, závisí od pomeru dĺžok úsečiek XY a ZY. Podľa klasickej pravdepodobnosti by boli javy zasiahnutia úsečiek XZ a ZY (obr. 2) bodom rovnako pravdepodobné, pretože „počty" bodov oboch častí (množiny XZ a ZY sú nespočítateľné) sú rovnaké, a to rovné mohutnosti kontinua $2^{\aleph_0}$. Intuitívne však usudzujeme, že pravdepodobnosť oboch javov závisí od dĺžok jednotlivých úsečiek, a tak náhodný bod zasahujúci úsečku XY zasiahne v priemere 9-krát častejšie dlhšiu časť ZY ako kratšiu časť XZ, pretože časť ZY je 9-krát dlhšia ako časť XZ. Pravdepodobnosť javu zo zadania úlohy je $\ell(ZY)/\ell(XY) = 0{,}9$.

Geometrickú pravdepodobnosť javu, že sonda C zasahujúca množinu $A, A \subset \mathbf{R}^d$, zasiahne aj množinu B ($B \subset A$), potom môžeme definovať nasledovne:

$$P(C{\uparrow}B \mid C{\uparrow}A) = \frac{m(C{\uparrow}B)}{m(C{\uparrow}A)}$$

kde $m(C{\uparrow}B), m(C{\uparrow}A)$ sú miery (dĺžka, obsah, objem, ...) množiny priaznivých možností a množiny všetkých možností.

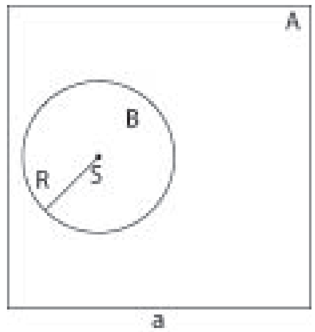
Úloha 2. V štvorci A so stranou a je obsiahnutý celý kruh B s polomerom $R \leq a/2$. Aká je pravdepodobnosť, že náhodný bod zasahujúci štvorec A, zasiahne aj kruh B (obr. 3)?

Pravdepodobnosť, že bod zasahujúci štvorec zasiahne aj kruh, závisí od pomeru ich obsahov. Uvažujme prípad $R = a/2$. Mierou všetkých možných polôh bodu zasahujúceho štvorec A je obsah štvorca $S(A) = a^2$, mierou polôh bodu zasahujúceho súčasne aj kruh B je obsah kruhu $S(B) = \pi a^2/4$. Potom pravdepodobnosť, že bod zasahujúci štvorec A zasiahne aj kruh B, je daná pomerom $S(B)$ a $S(A)$, t.j. $\pi/4$. (Pre $R < a/2$ je pravdepodobnosť menšia ako $\pi/4$.)

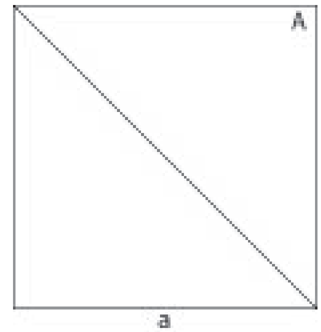
Miery príslušných množín však musia byť „rovnakého" typu, t.j. môžeme porovnávať napríklad dĺžku množiny s dĺžkou jej podmnožiny, obsah s obsahom, atď.; inak je pravdepodobnosť skúmaného javu nulová. Preto napríklad pravdepodobnosť, že náhodný bod zasahujúci štvorec A zasiahne tiež jeho tetivu alebo vrchol (obr. 4), je nulová.

Množina zasahujúca skúmané množiny A, B – sonda C – nemusí byť výlučne bodová.

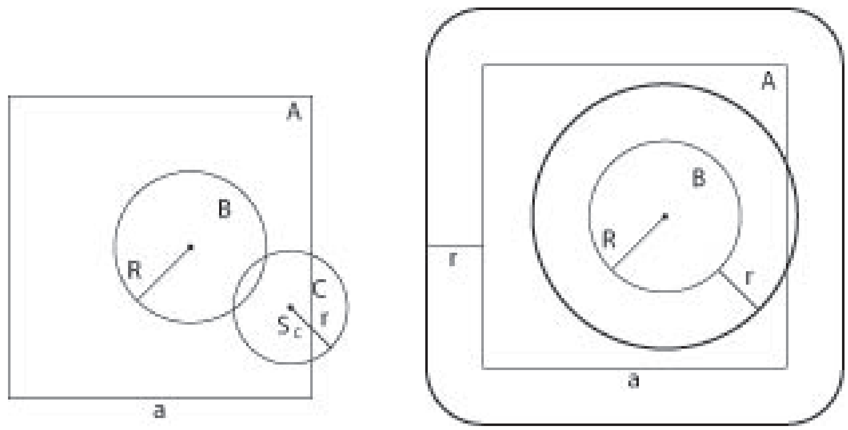
Úloha 3. V štvorci A so stranou a je celý kruh B s polomerom $R \leq a/2$. Aká je pravdepodobnosť, že kruh C s polomerom r zasahujúci štvorec A, zasiahne aj kruh B (obr. 5)?



Obr. 3



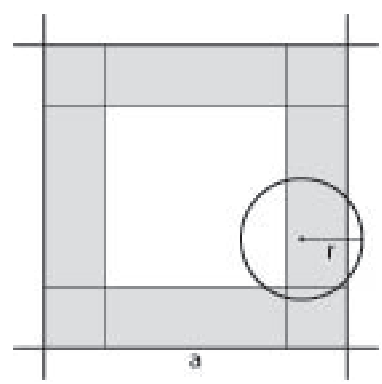
Obr. 4: Pravdepodobnosť, že bod zasahujúci štvorec zasiahne jeho uhlopriečku, je nulová.



Obr. 5

Pravdepodobnosť, že kruh zasahujúci štvorec zasiahne aj kruh, ktorý je podmnožinou štvorca, závisí od pomeru obsahov jednotlivých množín, v ktorých sa stred kruhu S_C môže nachádzať v oboch prípadoch.

Uvažujme prípad $R = a/2$. Aby kruh C zasahoval štvorec A, musí jeho stred S_C ležať v množine s obsahom $a^2 + 4ar + \pi r^2$ (obr. 5b); aby zasahoval aj kruh B, musí ležať stred S_C v množine s obsahom $\pi(R + r)^2$, t.j. $\pi(a/2+r)^2$. Pravdepodobnosť javu zo zadania je teda
$$\frac{\pi\,(a/2+r)^2}{a^2+4ar+\pi r^2}.$$



Obr. 6: Štvorec – dlaždica – rozdelený na časti prislúchajúce jednotlivým situáciám

Úloha 4. *Buffonova úloha o dlaždici* (*o štvorcoch*, *franc-carreau*): Hráči hádžu mincu s priemerom d na podlahu vydláždenú rovnakými štvorcovými[4] dlaždicami so stranou a. Prvý z nich tipuje, že po páde minca nepretne systém špár medzi dlaždicami, druhý, že minca pretne

[4] Štvorcové dlaždice môžeme nahradiť napríklad dlaždicami tvaru rovnostranného trojuholníka, pravidelného šesťuholníka alebo obdĺžnika.

systém špár. Ktorý tip je pravdepodobnejší? (Je táto hra spravodlivá?)

Z úlohy číslo 3 je zrejmé, že problém polohy mince vzhľadom k systému špár medzi dlaždicami sa redukuje na problém polohy stredu mince vzhľadom k hranici jednej dlaždice. Pravdepodobnosti jednotlivých situácií tejto úlohy (minca pretne alebo nepretne špáry medzi dlaždicami) je teda možné nájsť na základe obsahov útvarov, v ktorých sa stred mince v jednej dlaždici v jednotlivých situáciách nachádza. (Podrobnejšie je úloha riešená napr. v Ilucová (2005).)

Označme pomer priemeru mince d a strany štvorca a písmenom q; t.j. $q = r/a$. Rozlišujeme potom dve nasledujúce situácie (príslušné oblasti sú zakreslené v obr. 6):

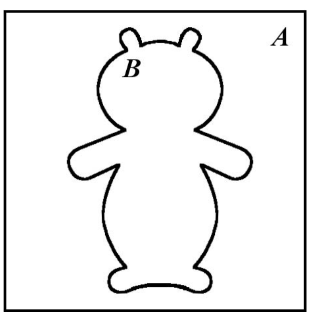
a) Minca sa nedotýka, ani nepretína hranicu dlaždice, ak jej stred je vo väčšej vzdialenosti od hranice dlaždice ako je $d/2$, teda že leží v „sústrednom" štvorci s obsahom $(a-d)^2$.

Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $P(0) = (a-d)^2/a^2 = (1-q)^2$.

b) Minca pretína hranicu dlaždice (t.j. aj systém špár medzi dlaždicami), ak jej stred leží v dlaždici mimo spomínaného „sústredného" štvorca, teda v sivo vyfarbenej oblasti s obsahom $d(2a-d)$.

Pravdepodobnosť tejto situácie je potom $1 - P(0) = d(2a-d)/a^2 = q(2-q)$.

Okrem priameho výpočtu pravdepodobnosti určitého geometrického javu môžeme výsledky použiť napríklad aj na odhad plochy (dĺžky, objemu) množiny.



Obr. 7

Majme množinu A známej miery $m(A)$ a jej podmnožinu B, ktorej mieru $m(B)$ nepoznáme. Nech z N náhodných[5] bodov zasahujúcich množinu A zasiahne n bodov množinu B. Potom pomer n/N je vhodným odhadom pomeru $m(B)/m(A)$, a teda $\frac{n}{N} \cdot m(A)$ je odhadom miery množiny B (obr. 7).

Obsah figúrky medveďa môžeme odhadnúť ako $\frac{n}{N} \cdot S(A)$ ($S(A)$ je obsah štvorca A, N je počet bodov zasahujúcich štvorec, n počet bodov zasahujúcich figúrku) (obr. 7).

LITERATÚRA

[1] Ilucová, L. (2005). Buffonova úloha o štvorci. In Gunčaga, J. (ed.), *Matematika v škole dnes a zajtra.* Zborník konferencie 2005. PedF Katolícka univerzita, Ružomberok, 101–106.

[2] Saxl, I. (2005). Geometrická pravděpodobnost. In Antoch, J., Hlubinka, D., Saxl, I. (ed.). *Pravděpodobnost a statistika na střední škole*. MATFYZPRES, Praha, 47–71.

[5] Množina bodov nemusí byť náhodná, môže to byť napríklad aj systém vrcholov štvorcovej mriežky.

DĚLITELNOST A ZBYTKOVÉ TŘÍDY VE HRÁCH[1]

ANTONÍN JANČAŘÍK[2]

Při studiu matematických her jsou často využívány nástroje teorie čísel. Cílem toho příspěvku je představit několik matematických her typu NIM, jejichž vítězné strategie využívají vlastnosti dělitelnosti a rozkladových tříd. Tyto hry jsou vhodnou propedeutikou k výkladu těchto témat v hodinách matematiky.

HRA PRVNÍ – NIM ČESKÁ VARIANTA

První uváděná hra je v České republice velice známá a rozšířená. Často je označení NIM (neprávem) ztotožňováno právě s touto hrou. Pravidla hry jsou velice jednoduchá: Hru hrají dva hráči, kteří střídavě odebírají z hromádky sirek jednu, dvě, nebo tři sirky. Hráč, který jako první nemůže žádnou sirku odebrat, prohrává.

Při hraní této hry žáci zpravidla brzy odhalí, že vítězná strategie spočívá v tom, docílit svým tahem počtu sirek dělitelného čtyřmi. Velice často žáci odhalí i fakt, že v případě modifikace hry, kdy hráči odebírají jednu až n-sirek, rozhoduje dělitelnost číslem $n + 1$.

HRA DRUHÁ – NIM TROCHU JINAK

Další modifikací hry NIM je hrát s tím omezením, že je možné odebírat jenom některé, předem dané, počty sirek. Například pouze jednu, dvě, čtyři, nebo pět sirek. V tomto konkrétním případě rozhoduje opět dělitelnost, a to číslem tři. Neboť v případě, kdy je počet sirek dělitelný třemi, musí hráč, který je na tahu, tuto vlastnost porušit a jeho protivník může opět svým tahem docílit počtu, který je násobkem čísla tři.

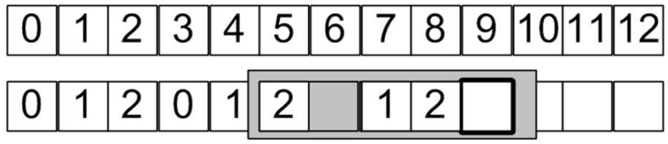
U této konkrétní hry se žáci seznamují kromě pojmu dělitelnosti i se zbytkovými třídami. Při řešení je rozhodující, že hráči mají k dispozici pouze čísla, která nejsou dělitelná číslem tři.

Poněkud složitější případ nastane, pokud hráči mohou odebírat pouze dvě, tři, čtyři nebo pět sirek. V tomto případě jsou kritická všechna čísla ve tvaru $7k$ a $7k + 1$. U této hry už zbytkové třídy hrají rozhodující roli, žáci zcela přirozeně objevují zákonitosti v opakování jednotlivých čísel. Velmi důležitou roli hraje i periodicita řešení, se kterou se žáci budou opakovaně setkávat jak u jiných NIMových her, tak i v jiných oblastech matematiky, například při práci se zlomky.

---

[1] Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

[2] *PedF UK Praha, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz*



NIM POSUVNÍK PRO HLEDÁNÍ PROHRANÝCH POZIC

Pokud chceme nalézt vyhrávající strategii pro hru předcházejícího typu, můžeme použít následující jednoduché pravidlo:

Pozice, která je prohraná, má hodnotu 0. Každá pozice má hodnotu, která odpovídá nejmenšímu přirozenému číslu (včetně nuly), které nelze najít mezi hodnotami pozic, do kterých se lze jedním tahem dostat. (Ve skutečnosti bychom vystačili jenom s čísly 0-prohraná pozice, 1-vyhraná pozice. Různé hodnoty vyhraných pozic lze použít při sčítání her, tzn. u her, které se hrají na několika hromádkách.) Pochopit tuto definici může být pro žáky obtížné, definice je abstraktní a využívá indukci – pozice je hodnocena na základě předchozích pozic.

Při hodnocení pozic nám může velmi pomoci měřítko, kterým pohybujeme po číselné ose s předchozími výsledky. V okénkách na měřítku jsou zobrazeny pouze ta políčka, která jsou pro hráče dostupná. Do posledního okénka hráč zapíše hodnotu, která odpovídá hromádce s daným počtem sirek.

Na obrázku vidíte měřítko-posuvník pro hru, při které lze odebírat jednu, dvě, nebo čtyři sirky. Hodnota hromádky s devíti sirkami je 0 a tato pozice je prohraná pro hráče, který je na tahu.

Tuto strategii je možné použít u všech NIMových her hraných s jednou hromádkou sirek. Každá hra má periodické řešení, to znamená, že se od určitého okamžiku začnou čísla opakovat. Stačí tedy doplňovat hodnoty pozic pouze do okamžiku odhalení periody.

NEDĚL

Hru Neděl hrají dva hráči s čísly od jedné do deseti (lze použít karty ze hry Ligretto), každý hráč dostane na počátku hry deset karet. Hráči postupně přidávají karty na hromádku. Hráč, který přidáním své karty dosáhne toho, že součet celé hromádky je dělitelný třemi, prohrává. Hráči si mohou kdykoli v průběhu hry prohlédnout celou hromádku již vyložených karet.

Tato hra není příliš zajímavá z pohledu vítězné strategie, protože je plně determinována a hráči (s výjimkou hrubé chyby) nemohou svými tahy konečný výsledek nijak ovlivnit.

Přesto tato hra není bez zajímavosti, hráči si zpravidla v prvních hrách neuvědomí, že hru nemohou nijak ovlivnit. Podmínky hry vyžadují neustálou soustředěnost na průběžný součet a učí žáky pracovat jak s pravidly dělitelnosti, tak se zbytkovými třídami po dělení třemi. Po několika hrách si žáci zpravidla uvědomí, že si hru mohou usnadnit tím, že budou pracovat jen s ciferným součtem, nebo dokonce pouze se zbytky po dělení třemi.

ZÁVĚR

Všechny uvedené hry lze vhodně využít k rozvoji matematických dovedností v rámci seznamování žáků se vztahy mezi čísly, dělitelností a budování pojmu zbytkových tříd. Uvedená tématika není určena pro výklad, ale pro samostatnou práci žáků. Cílem je předložit žákům problémy, které mohou zkoumat, odhalovat nové skutečnosti a učit se objevovat vlastním úsilím. Tento proces je základem konstruktivistického přístupu k výuce matematiky a při budování matematických představ jej nelze obejít ani zkrátit.

LITERATURA

[1] BERLEKAMP, E.R., CONWAY J.H., GUY, R.K., *Winning ways for your mathematical plays*, vol. 1, Natick : A. K Peters, 2001, ISBN 1-56881-130-6

INDUKTIVNÍ DAKTYLOLOGIE[1]

ANTONÍN JANČAŘÍK, KATEŘINA JANČAŘÍKOVÁ[2]

Jestli nevíte, co pod termínem induktivní daktylologie skrývá, nezoufejte, název článku: Induktivní daktylologii jsme si propůjčili z jedné detektivní povídky. Autor tohoto pojmu si jej pravděpodobně vymyslel. Induktivní daktylologie je logické odvozování za pomoci prstů, neboli *počítání na prstech*.

Mezi módní trendy ve výuce matematiky patří používání moderních pomůcek, včetně dnes již běžných počítačů a dalších prostředků ICT. Cílem tohoto příspěvku a příslušné pracovní dílny je ukázat, jak velké možnosti nám nabízí tak snadno dostupná a „obyčejná“ pomůcka, jako jsou naše ruce.

Počítání na prstech provází každé dítě při objevování světa čísel a při budování základních číselných představ. Prsty hrají roli jak konkrétního i abstraktního modelu prvních dětmi objevovaných čísel i roli nezbytného pomocníka při zvládáních základních číselných operací – sčítání a odčítání.

Prsty, resp. jejich počet nepochybně ovlivnil vývoj matematiky – desítková soustava. Kdybychom měli na rukách po třech prstech, pravděpodobně bychom počítali v šestkové soustavě. Kdybychom měli na rukách šest prstů, jako bibličtí obrové z Gátu, pravděpodobně bychom počítali v soustavě dvanáctkové. (Zkuste si takové počítání. Nebo zapomeňte na palce a počítejte v osmičkové soustavě.)

[1]Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

[2]*PedF UK v Praze, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz*

NÁSOBENÍ NA PRSTECH

Dan je dítě s těžkou resp. hlubokou dyslexií. Jako každé dítě se specifickými poruchami učení musí denně zápolit s tím, že jeho mozek pracuje jinak, než mozky většiny lidí. Například násobilku se není schopen naučit zpaměti. Respektive, naučil se jí zpaměti již nejméně pětkrát, ale stačí menší stres, někde v jeho hlavě se přehodí páčka, a na otázku: „Kolik je 5 krát 5?“ odpovídá 36 nebo 49 nebo dokonce 81. Jeho mozek není schopen udržet příklady a výsledky pohromadě. Spojuje po jiných liniích než „normální“ mozky.

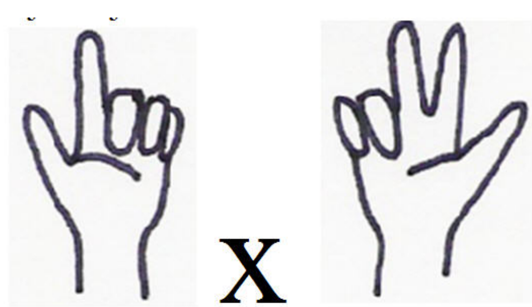
Násobení na prstech Danovi pomáhá rychle překontrolovat správnost výsledků násobení. Kromě toho mu přináší radost a pocit uspokojení, protože umí něco, co ostatní nejen neumí, ale většinou ani nedokáží pochopit.

JAK SE NA PRSTECH NÁSOBÍ

Základní násobení na prstech (takové jako používá Dan) je určeno pro násobení celých čísel z rozmezí 6 až 10. Dan větší čísla násobí písemně a u menších si pomůže opakovaným sčítáním. Jak tedy takové násobení probíhá, nejprve pomocí prstů ukážete, jaká čísla chcete násobit. Abyste to mohli udělat, ukazujete pouze o kolik je dané číslo větší než 5:

Součin pak spočítáte tak, že vynásobíte součet zvednutých prstů deseti a přičtete součin prstů, které jsou dole (viz [1]).

Příklad: Zkuste spočítat na prstech nejtěžší příklad malé násobilky – kolik je sedmkrát osm. Na jedné ruce zvednete dva prsty (reprezentace čísla sedm) a na druhé ruce tři prsty (reprezentace čísla osm). Součet zvednutých prstů je pět a součin prstů nechaných dole je šest (dva krát tři). Zjistili jste, že $7 \cdot 8 = 5 \cdot 10 + 6 = 56$.



ROZŠÍŘENÍ VÝUKY – JINÉ ČÍSELNÉ SOUSTAVY

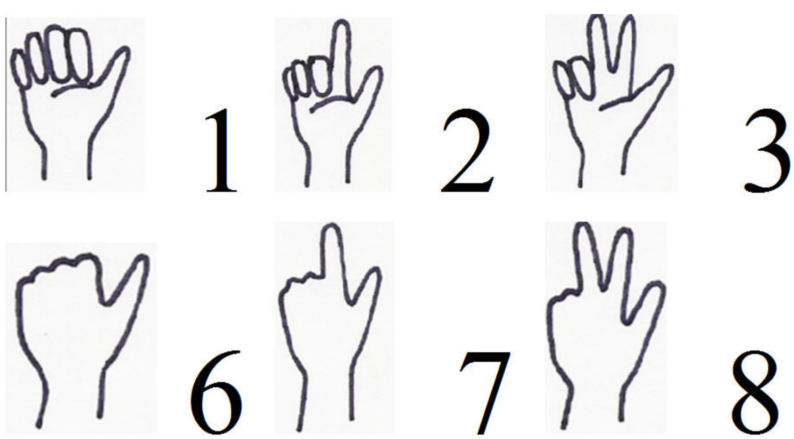
Násobení na prstech však není pomůckou pouze pro žáky s dyslexií. Lze jej použít i jako rozšíření učební látky pro nadané žáky, a to třeba následujícím způsobem.

Postup pro násobení je platný i pro jiné číselné soustavy. Například na chvilku zapomeňte na palce a zkuste spočítat v osmičkové soustavě příklad $6 \cdot 6$. Protože máte jen čtyři prsty, ukazujete na každé ruce, o kolik je násobené číslo větší než čtyři – v našem případě zvednete dva prsty na obou rukách – počet „desítek“ je tedy dva plus dva a počet jednotek dva krát dva. Pomocí prstů jste tak spočítali, že v osmičkové soustavě platí $6 \cdot 6 = 44$.

DVACÍTKOVÁ SOUSTAVA A VELKÁ NÁSOBILKA

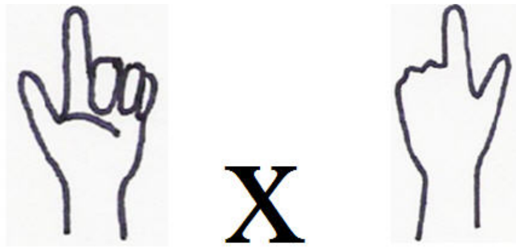
Uznáváme, že umět počítat na prstech v osmičkové soustavě je sice krásné, ale v životě málo potřebné. Navrhujeme proto něco praktičtějšího. Zkuste násobit na prstech ve dvacítkové soustavě. Pokud toto zvládnete, můžete pomocí prstů snadno násobit příklady typu 17 krát 12, či 16 krát osmnáct.

Nejprve je nutné vyřešit problém, jak na prstech jedné ruky ukázat čísla od jedné do deseti. Můžete si samozřejmě vypomoci prsty na noze, mnohem elegantnější je zavést konvenci, že pokud je ruka obrácena dlaní k vám, ukazuje čísla od jedné do pěti a pokud dlaní od vás, ukazuje čísla do 6 do 10.



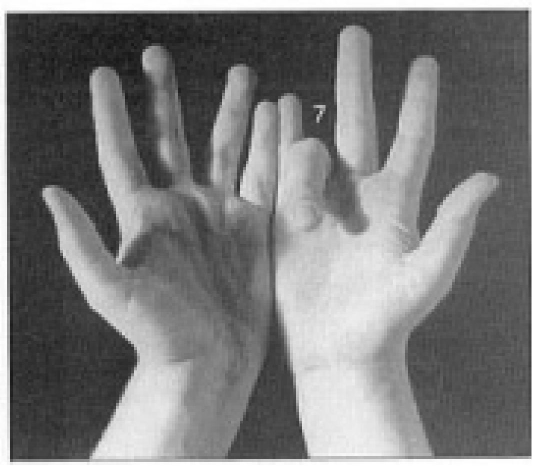
Po zavedení této úmluvy již stačí ukázat, o kolik je násobené číslo větší než deset, součet „zvednutých“ prstů vynásobit dvaceti (otočení ruky tak představuje přičtení sta) a přičíst součin prstů, které jsou „dole“.

Příklad: Chcete spočítat, kolik je dvanáct krát sedmnáct. Na obou rukách zvednete dva prsty, jednou však otočíte ruku dlaní k sobě (reprezentace čísla dvanáct) a podruhé dlaní od sebe (reprezentace čísla sedmnáct). Počet prstů nahoře je devět $(2+2+5)$ a počet prstů dole je osm (5+3) a tři. Výsledkem je, že $12 \cdot 17 = 9 \cdot 20 + 8 \cdot 3 = 204$.



Ještě jiné násobení

Uvedené příklady však možnosti počítání na prstech ani zdaleka nevyčerpávají. Další tip, jak používat prsty, je návod, jak na prstech násobit jednoduše devíti. Dejte si všech deset prstů před sebe, odpočítejte zleva, kolikrát chcete devítku vynásobit a příslušný prst ohněte. Prsty vlevo od ohnutého prstu představují počet desítek ve výsledku a prsty vpravo počet jednotek. Na obrázku je ukázáno, jak spočítat sedmkrát devět.



Závěr

Doporučujeme násobení chvilku procvičovat. Pokud začnete prsty při násobení používat, zjistíte, že je to mnohem rychlejší, než hledat kalkulačku, nebo násobit čísla na papíře. Navíc je to dobrý nástroj pro rozvoj početních dovedností a logického uvažování. Tato dovednost, na první pohled skoro kouzelnický trik, pokud si ji učitel osvojí, oživí hodiny matematiky. V žácích může pozitivně modelovat jejich vztah k matematice.

Literatura

[1] `http://www.kritickemysleni.cz/redakce/soubory/PrstoveNasobeni.JPG`

O NĚKTERÝCH AKTIVIZUJÍCÍCH PŘÍSTUPECH VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

EVA KREJČOVÁ[1]

Motto 1.: „Co děti dělají, má pro ně mnohem větší význam než to, co vidí a slyší.“ J. Kašová

Motto 2.: „Učit děti spoluprací znamená dát jim klíč k mnoha zámkům.“ H. Kasíková

Motto 3.: „Představivost je důležitější než znalost.“ A. Einstein

Hlavní myšlenky a s nimi spojené konkrétní náměty vycházejí z úvodních sentencí. Jedná se spíše o činnosti nespecifické, které nacházejí uplatnění především v hodinách matematiky primární školy.

První oblast nabízených témat se váže k činnostnímu vyučování, „v němž mají žáci dostatek příležitostí aktivně se podílet na vlastním vzdělávání, samostatně se projevovat, získávat nové vědomosti svojí činností, řešit úkoly, navozené situace i přirozené situace ze života mimo školu“[2]. U nás v současné době je tento didaktický přístup jednou ze stěžejních metod programu Tvořivá škola. K jeho principům náleží zařazování takových činností, kdy žák na základě manipulace s didaktickým materiálem, pozorování a experimentování dospívá k objevování nových poznatků a zákonitostí.[3]

Zejména pro žáky mladšího školního věku se činnostní přístup ukazuje nejen jako výrazně motivující, ale stává se vítanou příležitostí aktivně se podílet na vlastním vzdělávání. Zkušenosti naznačující, že takto pojatá procesuální stránka a dosažené vzdělávací výsledky se zvyšují s realizací kooperativních forem vyučování.

NÁMĚT 1

Cíl: Procvičování pamětného sčítání a odčítání, nácvik numerace, pravolevá orientace, vzájemná spolupráce aj. Žáci pracují ve dvojících. Na stůl si připraví dva papírové modely košilek: červenou a modrou – červenou vpravo, modrou vlevo a knoflíky.

Úloha 1: Na červenou košilku přišijte 2 knoflíky, na modrou 3. Znázorněte.
Otázky: Kolik knoflíků jste přišili celkem? Jak jste to vypočítali? Šlo by úlohu řešit i jinak?

Úloha 2: Na červenou košilku přišijte 6 knoflíků. Dva se utrhly. Znázorněte.

[1] *Katedra matematiky PdF UHK, eva.krejcova@uhk.cz*

[2] Podle Průcha, J. a kol.: *Pedagogický slovník*. Praha, Portál 2003.

[3] Více viz Rosecká, Z. a kol.: *Malá didaktika činnostního učení*. Brno, Tvořivá škola 2003.

Otázky: Kolik knoflíků na červené košilce zůstalo? Jak jste to vypočítali? Kolik knoflíků by se muselo utrhnout, aby na košilce zůstaly jen dva (problémová úloha)?

Úloha 3: Uspořádejte do řady (vedle sebe) košilky v tomto pořadí: první zelená, druhá žlutá, třetí modrá, čtvrtá hnědá, pátá červená, šestá fialová. Na zelenou přišijte 5 knoflíků, na žlutou 4, na modrou 6, na hnědou 2, na červenou 1 a na fialovou 3. Uspořádejte nyní košilky podle počtu přišitých knoflíků tak, aby první v řadě byla ta, na které je jich nejmenší počet a na poslední největší počet.
Otázky: Která košilka je první? Proč? Která je poslední? Která je hned před červenou?

NÁMĚT 2

Cíl: Zavedení násobení jako opakovaného sčítání.

Úloha 4: Párová výuka (dyády). Každá dvojice si připraví na stůl čtyři košilky – vedle sebe. Na každou z nich přišije 2 knoflíky.
Otázky: Kolik knoflíků jste celkem přišili? Jaký bude příklad – jak jste to vypočítali? Šlo by to řešit i jinak (prostor pro různé způsoby řešení – zápisy na tabuli, porovnávání, diskuse o tom, který záznam je nejkratší, . . .)? Obměny.

NÁMĚT 3

Cíl: Zavedení dělení jako: „dělení po částech“, „dělení na stejné části“.

Úloha 5: Máme 15 knoflíků a přišíváme je na košilky po pěti (vždy na jednu košilku 5 knoflíků). Znázorněte.
Otázky: Na kolik košilek jste přišili knoflíky? Jak jste knoflíky přišívali (vysvětlit postup)? Jak jste to vypočítali?

Úloha 6: Máme 5 košilek a 20 knoflíků. Chceme je přišít tak, aby jich byl na každé košilce stejný počet a žádný knoflík nám nezbyl. Znázorněte.
Otázky: Kolik knoflíků jste přišili na jednu košilku? Jak jste knoflíky přišívali (postup)? Jaký bude příklad?

Tato jednoduchá didaktická pomůcka má řadu dalších didaktických možností využití: např. ve 3. ročníku při zavádění dělení se zbytkem, ve 4. ročníku lze pomocí košilek modelovat různé úlohy na přímou úměrnost.

Podobně široké uplatnění při činnostním učení mají papírové čtverečky (osvědčují se čtverce z tužšího papíru o straně 2 cm). Tuto nenáročnou pomůcku doporučuje k práci se svými učebními texty Z. Rosecká.[4]

Předností čtverečků je mj. příležitost manipulovat, kombinovat, experimentovat, tvořit, a to bez škrtání, gumování, přepisování. Proto se osvědčují při porovnávání řady čísel, hledání násobků, tvoření čísel, sestavování „Početních rodinek“.[5]

[4]Více viz učební texty nakladatelství Nová škola.

[5]ČERNEK, P. Sčitacie (a odčitacie) rodinky. In *Matematika a učitelé 1. stupně základní školy*. Hradec Králové, Gaudeamus, 1998.

NÁMĚT 4

Cíl: Procvičování pamětného sčítání a odčítání v probíraných číselných oborech, rozvíjení schopnosti tvořivě pracovat s čísly, experimentovat a kombinovat.

Úloha 7: Vezměte si 15 čtverečků a napište na ně čísla 22, 27, 10, 17, 3, 6, 25, 3, 5, 17, 4, 30, 40, 8, 21. Sestavte z nich co nejvíce početních rodinek na sčítání. Každé číslo na čtverečku můžete použít jen jednou. (Početní rodinku tvoří např. čísla 5, 22 a 27, protože $5 + 22 = 27$.)
Otázky: Kolik početních rodinek jste sestavili? Zbylo vám nějaké číslo (čísla)? Dokážete sami vytvořit početní rodinku? . . .

Úloha 8: Vezměte si 9 čtverečků a napište na ně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sestavte z nich magický čtverec.

V obou případech jde o problémové úlohy, které nabízejí více řešení. Vhodné je pracovat ve dvojicích. Práce se čtverečky nabízí široké možnosti využití, a to nejen v aritmetice, ale také v geometrii.[6]

Druhá část námětů se zaměřuje na možnost uplatnění kooperativních forem v hodinách matematiky (v předchozích činnostech šlo často z tohoto pohledu o propedeutiku skupinového vyučování – práci ve dvojicích). Jde o jeden z nejúčinnějších modelů k podpoření aktivního učení, využití a rozvíjení vzájemné spolupráce a komunikace mezi žáky ve skupině i mezi skupinami navzájem k získávání a osvojování požadovaných kompetencí.[7]

Významným a přínosným propojením z hlediska efektivity vyučovacího procesu, ale i s ohledem na motivační účinek, je zařazování didaktických her pro heterogenní nebo homogenní skupiny. Často vyžadují znalosti i z jiných předmětů (český jazyk, přírodověda, pracovní vyučování aj.), a tím umožňují žádoucí propojení vědomostí a dovedností. Upřednostňujeme spíše hry nespecifické, a to takové, které mají jednoduchá pravidla, zaměstnávají více smyslů a co nejvíce žáků, dávají šanci být úspěšný i méně zdatným počtářům (hry s prvky náhody), je u nich zajištěna průběžná a závěrečná kontrola.

NÁMĚT 5: MATEMATICKÉ LOTO, POKRYJ DESTIČKU, JÍZDENKY, POČETNÍ PIŠKVORKY, TVOŘÍME ŘADU, MATEMATICKÝ RYBOLOV, MATEMATICKÁ KULIČKIÁDA

Matematické loto učitelé znají, jeho využití však nemusí být omezováno (zkušenosti aut.) jen na sčítání popř. odčítání v nejnižších oborech přirozených čísel. Zaujme i žáky vyšších ročníků; např. při počítání se zlomky nebo desetinnými čísly, převádění jedno-

[6] Více viz KREJČOVÁ, E. Jak nás inspirovaly čtverečky (v aritmetice). Náměty do matematiky na 1. stupni ZŠ. *Moderní vyučování*, č. 6, 2003. KREJČOVÁ, E. Jak nás inspirovaly čtverečky (v geometrii). Náměty do matematiky na 1. stupni ZŠ. *Moderní vyučování*, č. 7, 2003.

[7] Srv. KASÍKOVÁ, H. *Kooperativní učení a vyučování*. Karolinium, Praha 2004.

tek, zápisech čísel římskými číslicemi apod. Podobně široké uplatnění má hra Pokryj destičku.[8]

Závěrečná část dílny se váže k poněkud opomíjené oblasti našeho vzdělávání – k podněcování a rozvíjení představivosti.[9] Příčiny, proč je tato pro život důležitá stránka zanedbávána, lze spatřovat také v nedostatku v učebních textech prezentovaných inspirujících činností. (Významnou roli zde hraje fakt, že představivost se dá obtížně měřit – učitelé se soustřeďují spíše na formální stránku vyučování, v učebních cílech je deklarována příliš obecně, sami učitelé se necítí v tomto ohledu vždy docela jisti.) Pomineme-li dnes již přece jen alespoň některými učiteli využívané skládanky (Tangram, Evereto, Pentamino, Kolumbovo vejce aj.), setkáváme se s dalšími náměty spíše výjimečně.

Podnětným zdrojem ve školské praxi ověřených činností je kniha R. Rougiera Rozvíjíme logické a kombinační myšlení. Autor, sám učitel, do ní zařadil velice originální a inspirativní aktivity nejen pro rozvíjení logického a kombinačního myšlení (viz nepřesný překlad názvu z originálu), ale také (početně výrazně) úlohy, které posilují představivost. Často mají problémový nebo herní charakter. Setkávají se se značnou oblibou nejen u našich žáků 1. stupně základní školy, ale také u studentů učitelství primární školy (zkušenosti aut. z didaktického semináře). Mají mj. tu výhodu, že se dají různě obměňovat podle požadované obtížnosti.

NÁMĚT 6: BAREVNÉ SKLÁDÁNÍ, TVARY, SOUSEDSTVÍ[10]

K pěstování představivosti a schopnosti „umění vidět“, popř. jako propedeutika shodnosti, zobrazení je přínosná hra DIGIMAT.[11] Jedná se o, pro účely školního vyučování upravenou, verzi společenské hry DIGIT autora G. Kodyse.

NÁMĚT 7: DIGIMAT

Přítomní učitelé (převážně 2. stupně ZŠ) měli příležitost se s touto hrou blíže seznámit, ověřit si její pravidla.

ZÁVĚR

Domníváme se, že třebaže účastníci dílny tvořili z profesního pohledu výrazně heterogenní skupinu, našli si v nabídce prezentovaných námětu ten (popř. ty), které přenesou do svých tříd. Snažili jsme se v každé ze tří zmiňovaných oblastí poukázat na ve školské praxi přínosné a dostupně akceptovatelné činnosti, které inspirují k dalším originálním nápadům.

[8] Více viz KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice*. Skriptum. 3. upravené vydání, Hradec Králové, Gaudeamus 2001.

[9] Tuto skutečnost potvrzuje řada šetření a výzkumů. Např. MOLNÁR, J. Z ankety k prostorové představivosti žáků. *MFI*, 1992–1993, č. 2.

[10] Více viz ROUGIER, R. *Rozvíjíme logické a kombinační myšlení*. Praha, Portál 1996.

[11] Blíže KREJČOVÁ, E. *Digimat in KAFOMET pro I. a II. stupeň*, 1. vyd. Stařeč, INFRA, s. r. o. 2005, 20. aktualizace, M-085.3. ISBN 80-902814-0-0.

LITERATURA

[1] ČERNEK, P. Sčitacie (a odčitacie) rodinky. In *Matematika a učitelé 1. stupně základní školy*. Hradec Králové, Gaudeamus, 1998

[2] KASÍKOVÁ, H. *Kooperativní učení a vyučování*. Karolinium, Praha 2004.

[3] KREJČOVÁ, E. Jak nás inspirovaly čtverečky (v aritmetice). Náměty do matematiky na 1. stupni ZŠ. *Moderní vyučování*, č. 6, 2003.

[4] KREJČOVÁ, E. Jak nás inspirovaly čtverečky (v geometrii). Náměty do matematiky na 1. stupni ZŠ. *Moderní vyučování*, č. 7, 2003

[5] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry v matematice*. Skriptum. 3. upravené vydání, Hradec Králové, Gaudeamus 2001.

[6] KREJČOVÁ, E. *Digimat in KAFOMET pro I. a II. stupeň*, 1. vyd. Stařeč, INFRA, s. r. o. 2005, 20. aktualizace, M-085.3. ISBN 80-902814-0-0.

[7] MOLNÁR, J. Z ankety k prostorové představivosti žáků. *MFI*, 1992–1993, č. 2.

[8] PRŮCHA, J. a kol. *Pedagogický slovník*. Praha, Portál 2003.

[9] ROSECKÁ, Z. a kol. *Malá didaktika činnostního učení*. Brno, Tvořivá škola 2003.

[10] ROUGIER, R. *Rozvíjíme logické a kombinační myšlení*. Praha, Portál 1996.

MŮŽEME OVLIVNIT POSTOJE ŽÁKŮ K MATEMATICE?

HANA LIŠKOVÁ[1]

ÚVOD

V průběhu své dvacetileté pedagogické praxe jsem se mnohokrát přesvědčila, že pro výuku matematiky jsou zásadní vytvořené postoje žáků k učení a k matematice jako předmětu. V období současných změn a tvorby vzdělávacích programů škol je podle mého názoru potřebné myslet mimo jiné i na možné změny v postojích žáků k výuce, vzdělávání a tedy jmenovitě i na možné změny v postojích k matematice. V Rámcovém vzdělávacím programu jsou postoje, vedle vědomostí a dovedností, chápány jako součást žákových kompetencí. Z hlediska aktivní práce ve škole i z hlediska uplatnění v životě jsou postoje žáků zcela zásadní.

[1] *VOŠP a SPgŠ, Litomyšl, liskova@lit.cz*

V rámci dílny jsem informovala o stavu zjištěných postojů k matematice u studentů VOŠP – absolventů různých typů středních škol. Mé postřehy jsou velmi podobné zkušenostem, které popsala E. Zapotilová v kapitole *Postoje studentů k matematice a možnosti jejich změn* [1]. Hlavním cílem dílny bylo nabídnout náměty pro vyučování matematice metodami, které mohou postoje k matematice u žáků zlepšit. Všechny náměty (v příspěvku uvádím dva náměty) byly komentovány na základě vlastních zkušeností.

POSTOJE ŽÁKŮ K MATEMATICE

Pokusila jsem se o orientační „minisondu“ u svých studentů Vyšší odborné školy pedagogické, absolventů různých typů středních škol (gymnázií, středních odborných škol technického i netechnického zaměření). 28 studentů písemně odpovídalo na tři otázky:

– Jaký máte postoj k matematice?

– Kdo a co ovlivnilo váš postoj k matematice?

– Co by mohlo změnit váš postoj k matematice?

Z výpovědí studentů bylo zřejmé, že v průběhu svého vzdělávání své postoje mění, a to v závislosti na mnoha faktorech. Kromě vlivu rodiny, společnosti a dispozic žáků téměř ve všech sděleních figurovala osobnost učitele, jeho odbornost, osobnostní rysy, vztah k oboru, vztah k dětem, ale především metody jeho práce. Ještě podstatnější (i když předpokládané) bylo zjištění, že učitel je v těchto výpovědích hlavním faktorem, který ovlivňuje změnu postojů žáků k matematice. Změny postojů (pozitivní i negativní) má tedy učitelská veřejnost ve svých rukou.

To je zjištění optimistické a znamená to, že můžeme mnoho věcí ovlivnit. Je tedy užitečné, ne-li nezbytně nutné, právě v tomto období, kdy o své práci debatujeme při vytváření školních vzdělávacích programů, hovořit i o našich možnostech zlepšit naše metody práce při vyučování matematice. Mějme však na paměti, že není žádoucí změna za každou cenu, ale jen taková, která opravdu vede ke zlepšení vzdělávání. Máme totiž velkou odpovědnost nejen za vědomosti žáků, ale i za jejich postoje, se kterými budou odcházet do života. Je zřejmé, že vhodně volené metody práce umožňují pochopení učiva, což je v matematice podstatné.

V následující tabulce je zachycena skutečnost, že u tázaných studentů bohužel učitelé častěji změnili postoje v negativním směru.

Změnu postoje k matematice dle dotázaných studentů lze ovlivnit především osobnostními rysy učitele a jeho metodami výkladu a práce. Uvádím výpis z výpovědí, týkajících se osobnostních charakteristik a vzdělávacích metod učitelů, které podle tázaných studentů vedou ke zlepšení postojů k matematice.

Osobnostní charakteristiky učitele	**Vyučovací metody**	
Žádoucí projevy	**Žádoucí jevy a metody**	**Nežádoucí metody**
porozumění, úcta	motivace	dril
trpělivost, pochopení	práce s chybou	
snaha pomoci	učení hrou	
vlídný přístup, laskavost	zábavná forma	
individuální přístup	jednoduché vysvětlení	
postoj učitele		
pečlivá příprava		

Ve výpovědích zaznělo vážné varování: *neponižovat, nevysmívat se, neodrazovat!*

AUTENTICKÉ VÝPOVĚDI STUDENTŮ

Pro konkrétní představu uvádím některé autentické výpovědi či jejich části.

„V 6.třídě jsme dostali nového učitele, bral to i trochu hravě, takže mě začala matika bavit.“

„Myslím si, že můj kladný vztah k matematice jsem si vybudovala sama, ale asi mi i hodně pomohl individuální přístup učitelů na ZŠ, kteří mi dávali úkoly navíc a já se při hodinách nikdy nenudila.“

„Postoj byl ovlivněn hodně učiteli. . . . Taky můj postoj ovlivnili spolužáci, hlavně na ZŠ. Většina třídy byla složena z kluků a těm matematika šla moc dobře. Tak jsem se vždy snažila mít správný výsledek dřív než oni.“

„. . . můj vztah k matematice ovlivnila p.uč., . . . dokáže to lépe vysvětlit a také nedrží se pořád matematiky, ale dokáže ji zpestřit a tím mi to leze lépe do hlavy. . . “

„. . . nesmí si říkat: „Ach bože, zase matika.“ Ale nechat se překvapit, že učitel udělá něco formou hry, nebo za určitý úkol dá nějaké body.“

„Na SŠ jsem zjistila, že matika tak hrozná není, že je docela hezká, ale škoda, že jsem to nezjistila dřív. Učit se věci v šestnácti znovu je horší než se je naučit v době, kdy se na látku přirozeně naváže.“

„Můj záporný vztah změnila profesorka na SŠ, protože dala šanci každému, aby si vyzkoušel své schopnosti (např. hodnotila postupy, i když výsledek nebyl správný). . . “

„. . . už od „mala“ mi všichni vtloukali do hlavy, že na to prostě buňky nemám, že se mám třeba zaměřit na češtinu.“

„Těžké učivo, měli jsme ve třídě chytré studenty na matiku, připadala jsem si mezi nimi hloupá.“

„Především učitel na ZŠ a pak SŠ, neustále jsem slyšela: „Ty jsi na tu matiku vážně blbá.““

„. . . puberta – jedna hodina prokoukaná z okna se pak těžko dohání. . . “

„. . . A mít ochotu jim vysvětlit, co je špatně a co správně.“

„Já osobně matematiku moc nemusím, ale uznávám, že je to důležitý předmět pro život. . . “

„. . . kdyby mi lidé nedávali najevo, jak jsem hloupá, když něco vypočítám špatně.“

„. . . Navíc se naše profesorka věnovala těm nejlepším a co my ostatní?“

„Můj vztah by byl více pozitivní, kdyby mi někdo vysvětloval matiku z praktické stránky. . . . Jsem už trochu jinde a věci, které nechápu se pochopit snažím, pídím se po řešení. Kdežto, když jsem byla mladší, tak tam tento přístup nebyl. Spíš jsem „věci“ házela za hlavu.“

„Nikdy jsem neměla hlavu na vzorečky, ale uměla jsem je používat. Na ZŠ probíhaly všechny písemky formou spolupráce se sousedkou, která se nabiflovala vzorečky a já to vypočítala. Dodnes mám radši logické úlohy.“

Jak je vidět, postoje k matematice jsou zásadně ovlivňovány metodami práce učitele. Používejme proto raději metody, které vedou k lepšímu pochopení, využívají vlastní poznání žáků a vytvářejí podmínky pro vznik pozitivního postoje k matematice.

JAK OVLIVNIT POSTOJE ŽÁKŮ K MATEMATICE?

Dva z námětů, které uvádím, podle mých zkušeností vedou k vytváření pozitivních postojů žáků k matematice. Jde především o způsob práce ve vyučovací hodině, kdy žáci pod vedením učitele sami objevují neznámé jevy, vztahy a souvislosti, popřípadě je použita manipulativní činnost, a tak se vytváří u žáků přesnější představy a pevnější poznatky.

ČÍSELNÉ ŠACHOVNICE [2]

Pomocí deskové hry na číselných šachovnicích (varianta A, B) se úspěšně daří automatizace násobilky, a to bez pocitu drilu. Ten je vystřídán alternativní hrou dvojice žáků, kteří při hře mohou využít znalosti násobilky a strategického myšlení. Bez použití známých spojů násobilky žák nemůže s úspěchem hru hrát, což žáky motivuje k lepší znalosti násobilky.

POPIS ČINNOSTI

Hru hrají dva hráči na předem připravené číselné šachovnici. Obě číselné šachovnice jsou symetrické, tedy pro oba hráče rovnocenné, frekvence čísel je dána pravděpodobností možných součinů (šachovnice A předpokládá tři klasické hrací kostky, šachovnice B předpokládá dvě klasické hrací kostky a jednu ve formě dvanáctistěnu). Tímto způsobem lze připravit různé obměny číselných šachovnic a vytvořit si jejich gradovaný soubor. Tuto hru lze aplikovat v široké věkové a dovednostní škále.

PRAVIDLA HRY

Na políčko „Start“ (S) si každý ze dvou hráčů umístí svou figurku (žetony odlišné barvy, apod.) Hráči se střídají v tahu, cílem je dostat se co nejdříve na protilehlou vyznačenou oblast v okolí políčka „Cíl“ (C). Jeden tah znamená vhodit třemi hracími kostkami (pro variantu B volíme jednu hrací kostku ve tvaru dvacetistěnu). Ze tří možných součinů volíme ten, který je strategicky nejvýhodnější a táhneme figurkou na sousední políčko se vzniklým výsledkem (sousední políčka jsou políčka sousedící stranou či vrcholem). Například, padne-li na kostkách 2, 3, 5, vznikají součiny 6 (tj. $2 \cdot 3$), 10 (tj. $2 \cdot 5$) a 15 (tj. $3 \cdot 5$). Pohybu figurkou se může hráč vzdát, pokud by byl posun figurkou strategicky nevýhodný. Vyhrává hráč, který jako první obsadí oblast ohraničenou kolem jeho cíle.

Číselná šachovnice – varianta A

S	6	9	4	16	16	4	9	6	S
12	10	8	5	3	3	5	8	10	12
3	1	30	2	18	18	2	30	1	3
9	4	10	24	15	15	24	10	4	9
20	16	18	5	1	1	5	18	16	20
1	3	20	4	8	8	4	20	3	1
24	6	15	12	2	2	12	15	6	24
2	4	9	24	6	6	24	9	4	2
36	18	1	5	10	10	5	1	18	36
C	12	20	15	25	25	15	20	12	C

Číselná šachovnice – varianta B

S	12	21	4	66	66	4	21	12	S
27	10	48	15	3	3	15	48	10	27
30	16	11	2	35	35	2	11	16	30
9	4	45	24	60	60	24	45	4	9
42	7	18	32	1	1	32	18	7	42
55	40	44	54	8	8	54	44	40	55
36	33	14	12	20	20	12	14	33	36

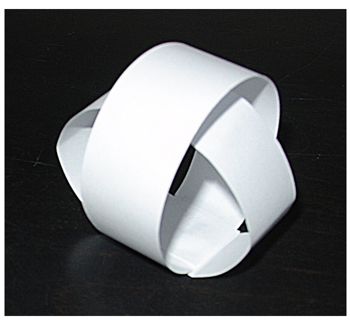
Geometrické modelování

Prostřednictvím geometrického modelování žáci objeví překvapivé vztahy mezi geometrickými útvary, v tomto případě konkrétně mezi kruhem (válcovou plochou) a čtvercem. Celá činnost je pojatá jako „kouzlo“, jelikož výsledek je pro žáky překvapivý. Je vhodné předčasně výsledek nekomentovat a vést žáky k odhadu: „Co se nám podaří vykouzlit?“

Velmi užitečná je analýza celého procesu po zdařilém „kouzlení“. Ptejme se: „Proč vznikl daný útvar?“ „Jaký je obvod daného útvaru?“ „Jaké vznikly úhly a proč?“ Žáci tak mají možnost vysvětlit postupně nečekaný výsledek a uvědomit si důležité jevy a vztahy.

POPIS ČINNOSTI

Připravíme si dva proužky papíru stejné délky (odstřihneme proužky na šířku formátu A4, zhruba 3cm široké). Slepíme nejprve jeden proužek tak, aby vznikl kroužek, druhý proužek provlékneme a opět slepíme do kroužku. (Máme dvě očka jako na vánoční řetěz). Vzniklé kroužky důkladně slepíme v místě původního lepení kolmo k sobě (Obr. 1), takže vznikne vícevrstvá ploška ve tvaru čtverce (na obrázku 1 je ve spodní části, na obrázku 2 je v přední části). Po zaschnutí budeme oba kroužky opatrně rozstřihávat podélně prostředkem (Obr. 2). Nejprve podélně prostředkem rozstřihneme první kroužek (celý kolem dokola), obdobně i druhý kroužek (proužek) rozstřihneme podélně po celé délce. Pokud bylo slepení dokonalé a nerozpadne se objekt v průběhu „kouzla“, vzniká nečekaný geometrický útvar.



Obr. 1

Obr. 2

ZKUŠENOSTI

Žáci jsou tímto modelováním a zároveň kouzlením fascinováni. Nejprve jsou zaskočeni a velmi ochotně hledají pro „kouzlo“ vysvětlení. Zjišťují, že se vyplatí pracovat důkladně, protože v opačném případě se objekt rozpadne předčasně. Geometrické modelování zde hraje roli objevitelskou, doprovázenou přiměřeným napětím.

ZÁVĚR

Z výpovědí studentů je zřejmé, že oceňují metody výuky, které vedou k lepšímu pochopení učiva a uvědomění si důležitých vztahů, které umožňují prožitek a potlačují formalismus. To jsou zároveň předpoklady pro vznik pozitivních postojů k matematice. Věřím, že předložené náměty mohou být inspirací pro práci v hodinách matematiky i vhodným tématem pro diskusi.

LITERATURA

[1] Zapotilová, E. Postoje studentů k matematice a možnosti jejích změn. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2004, s. 159–180. ISBN 80-7290-189-3.

[2] Lišková, H. Tvořivá matematika. In Autorský kolektiv: *RAAbík – náměty pro tvořivé vyučování na I. stupni ZŠ*. Praha: Raabe, nahlížet – nacházet, 1998. ISBN 80-902189-6-2.

[3] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

[4] Kárová, V. *Počítání bez obav*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-050-2.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (2004). Dostupné na WWW: `http://www.vuppraha.cz`

PRAVIDELNOSTI V MATEMATICE

GRAHAM LITTLER, DARINA JIROTKOVÁ[1]

ÚVOD

Terminologická poznámka: Slovo pravidelnost je zde použito jako překlad anglického slova pattern. V češtině nemáme jeho přesný ekvivalent. Anglicko-český slovník uvádí tyto překlady: 1. vzor, obraz, model, schéma; 2. vzorek, desén, 3. předloha, šablona, střih, model. Nám se nejvíce pro potřeby tohoto článku zamlouvá slovo pravidelnost někdy zákonitost.

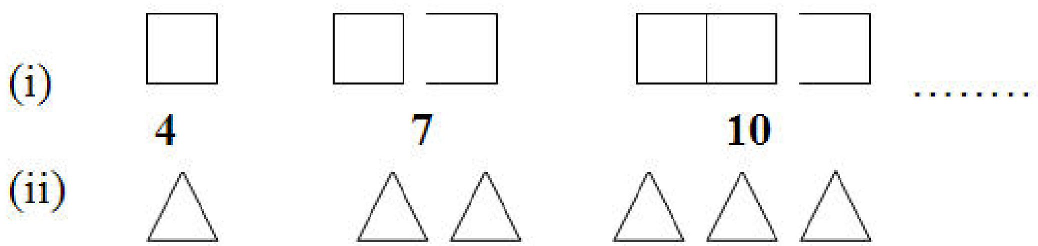
Pracovní dílna byla ukázkou toho, jak práce s pravidelnostmi, závislostmi pomáhá rozvíjet schopnost zobecňovat a jak v jedné dané pravidelnosti mohou různí lidé najít různou závislost.

Například: Na stole je rozloženo pět skupin zápalek. Jsou rozmístěny náhodně. Otázkou bylo, kolik zápalek bude v další skupině.

Účastníci dílny tvrdili, že je nutné zápalky v jednotlivých skupinách nejdříve spočítat. Zjistili, že počty zápalek ve skupinách jsou 4, 7, 10, 13 a 16. Pak celkem rychle uměli odpovědět, že v další skupině bude 19 zápalek , dále 22 atd.

Další otázkou bylo, kolik zápalek bude ve 20., 50. a n-té skupině. Úkolem bylo uspořádat zápalky ve skupinách a skupiny samotné tak, aby z toho byla závislost patrná, a předvést to ostatním kolegům. Nejčastější řešení úkolu jsou na obr. 1.

[1] *University of Derby, UK, grahamlittler@msn.com, PedF UK v Praze, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*



Obr. 1

Vyskytlo se mnoho dalších forem těchto způsobů uspořádání, například v uspořádání (ii) byly trojice zápalek jednoduše položeny vedle sebe, nikoliv do trojúhelníků a jedna zápalka byla oddělená. Bylo zajímavé, že jakmile se utvořilo uspořádání zápalek, ihned účastníci začali hledat obecnou závislost a nikoliv dvacátý a padesátý člen. Podle uspořádání zápalek již nebylo obtížné formulovat n-tý člen. Shodli jsme se na těchto formulacích: pro uspořádání (i) to je $[4 + 3(n - 1)]$, a pro uspořádání (ii) to je $(3n + 1)$. Ukázat, že tyto dva výrazy jsou jedno a totéž, je docela hezké cvičení pro žáky 7. tříd. Odpověď na otázku, kolik zápalek je ve dvacáté a padesáté hromádce, byla nalezena z obecného vzorce.

Hlavním záměrem tohoto úvodního cvičení bylo ukázat, že žáci mohou pracovat myšlenkou zobecňování již od nižších ročníků, například od 3. třídy. Z našich zkušeností víme, že takováto práce vede celkem rychle k používání symbolů zastupujících různé číselné hodnoty, a tak se otevírá žákům algebra.

ÚLOHY

Následující úlohy byly nabídnuty účastníkům pracovní dílny pro práci ve skupinách.

ÚLOHA 1A,B

Pro tuto úlohu použijte kostky, které do sebe zapadají. Požádejte žáky, aby položili na lavici jednu kostku a zaznamenali, kolik stěn mohou vidět, když se na ni dívají ze všech stran (nesmí zdvihnout kostku nad stůl). Pak k první kostce připojí druhou a spočítají a opět zaznamenají počet stěn, které mohou vidět. Žáci pokračují v přidávání kostek - postupně tvoří dlouhou řadu (staví kostky pouze na stůl jako do hada, ne na sebe do věže) – a při připojení každé další kostky vždy zaznamenají, kolik stěn právě mohou vidět. Kolik stěn vidí, mají-li 5, 10, 20, 100, n kostek.

Úlohu lze obměnit například tak, že budeme stavět kostky na sebe do věže.

Komentář. Tato úloha byla odzkoušena v jedné základní škole v Derby, UK, ve třídě o 30 žácích ve věku od 9 do 10 let. Všichni žáci měli k dispozici kostky, které do sebe zapadaly (např. lego). Učitel vyzval žáky, aby si připravili tabulku a podle zadání do tabulky zaznamenávali údaje. Úkolem bylo najít počet stěn, které vidí, mají-li zapojeno 15, 25, n kostek.

Počet kostek	Počet viditelných stěn
1	5
2	5
...	...

Tabulka 1

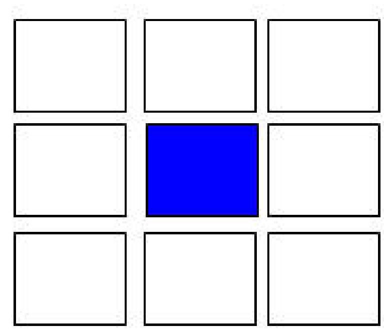
Žáci vesměs reagovali na tyto úlohy s nadšením, stejně jako reagují na většinu nestandardních úloh. Několik žáků se speciálními vzdělávacími potřebami vyžadovalo pomoc. Bylo možné pozorovat, jak tito žáci počítají viditelné stěny po jedné. Způsob, jakým stěny počítali, jim ale nepomohl k nalezení zákonitosti. Došli k číslům 5, 8, 11, 14... Zjistili, že mezi každými dvěma následujícími členy je rozdíl 3. Několik dětí zjišťovalo počet stěn způsobem, který jim pomohl najít obecné řešení. Dvě dívky řekly: „Spočítej kostky, jsou tam tři řady stěn viditelných na všech kostkách a pak dvě stěny na koncích.“

Učitelka zavolala tyto dívky k tabuli, aby vysvětlily, co řekly. Dívky šly ve svých úvahách dál. Poté, co své pozorování zapsaly jako $1 \times 3 + 2, 2 \times 3 + 2, 3 \times 3 + 2$, a pokračovaly dál a napsaly, že počet stěn, které mohou být vidět, se dostane tak, když se n kostek spojí za sebou do řady, je $n \times 3 + 2$.

Žáci se pak zabývali obměněnou úlohou o stvabě do věže. Poté, co se seznámili se způsobem, jak „chytře“ počítat viditelné stěny, napsali někteří žáci po manipulaci s jednou, dvěma a třemi kostkami obecný vztah pro n na sebe napojených kostek. Napsali: $1 \times 4 + 1, 2 \times 4 + 1, 3 \times 4 + 1$ a konečně $n \times 4 + 1$. Některým žákům trvalo nalezení vztahu déle; potřebovali 5 až 6 kostek k nalezení pravidla. Žáků své zobecnění spíše vyslovili: „Násob počet kostek čtyřmi a přičti jednu.“ To odpovídá výsledkům výzkumů o tom, jak se rozvíjí schopnost dětí zobecňovat.

ÚLOHA 2

Obchodní společnost prodává stavebnicová zahradní jezírka, na jejichž obrubu jsou potřeba různé počty dlažebních kamenů v závislosti na velikosti jezírka. Velikost č. 1 vyžaduje 8 dlažebních kamenů, pro velikost č. 2 je třeba 10 dlažebních kamenů. Viz obrázek 2, v němž modré čtverce znamenají jezírko J a bílé čtverce znamenají dlažební kameny D.



Obr. 2

Vytvořte tabulku o dvou sloupcích, kde v prvním sloupci uvedete velikost jezírka (číslo J) a ve druhém potřebný počet dlažebních kamenů D. Určete počet dlažebních kamenů pro jezírko o velikosti č. 5, 10, a velikosti č. n.

Velikost jezírka (J)	Počet dlažebních kamenů (D)
1	8
2	10
5	16
10	26
n	$2n + 6$

Šířka jezírka tohoto typu je vždy jeden dlažební kámen. Alternativou k této úloze je požadavek, aby jezírko mělo vždy minimální obvod a skládalo se ze čtverců téže velikosti jako dlažební kameny.

Komentář. Tato úloha byla ozkoušena v téže třídě jako úloha 1. Dokonce i žáci, které považujeme za méně schopné, dokázali sledovat zákonitost v tabulce 3 a uvědomit si, jak pokračuje. Zobecnění bylo obtížné pro všechny žáky kromě jedné dívky. Tato dívka zapsala jako poslední velikost jezírka písmeno n a počet dlažebních kamenů $6 + 2n$. Ostatní žáci měli potíže s porozuměním tohoto zápisu.

Při jednom experimentu v základní škole v řecké Soluni, učitelka dala každé skupině žáků 4 modré kartičky a 14 bílých čtvercových lístků a vyzvala žáky, aby situaci modelovali. Všechny skupiny vymodelovali toto „jezírko“ na obr. 2.

Možnost modelování byla pro řešení úlohy velice přínosná.

ÚLOHA 3

Číselná dvojčata jsou dvě dvojciferná čísla, pro která platí: Jestliže je sečteme, dostaneme takové číslo, které bude rovněž součtem takových dvou dvouciferných čísel, které dostaneme z daných čísel záměnou pořadí cifer. Například dvojice čísel 31 a 57 jsou číselná dvojčata, protože $31 + 57 = 88 = 13 + 75$.

Najděte řadu číselných dvojčat a vyznačte jejich součet na „stovkový čtverec“ (čtverec 10×10 s čísly od 1 do 100). Popište pravidelnost, kterou vidíte.

Nyní vyznačte ve stovkovém čtverci čtyři dvouciferná čísla, která jsou dvěma páry číselných dvojčat se zaměněným pořadím cifer. Vidíte něco zajímavého na jejich pozici?

Udělejte to samé s jinou čtveřici čísel. Platí vaše domněnka i pro tato čísla?

Úlohu obměňte pro číselná trojčata.

ÚLOHA 4

Použijte „geometrické proužky“ – proužky z tvrdého papíru (nebo díly stavebnice Merkur nebo jí obdobné) k sestavení mnohoúhelníků o 3, 4, 5, 6, 7, 8. . . stranách. Každý z nich napíchněte špendíkem a zdvihněte nad desku stolu a nechte volně viset. Všechny mnohoúhelníky se zhroutí, kromě jednoho. Který z nich to je? Nyní použijte tento poznatek zajistěte, aby za použití minimálního počtu proužků i všechny ostatní mnohoúhelníky byly pevné a nezdeformovaly se. Zapište do tabulky následující údaje: a) počet proužků, které tvoří mnohoúhelník, b) kolik trojúhelníků obsahuje mnohoúhelník, když je pevný, a c) součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka. Zjistěte součet úhlů pro dvacetistranný mnohoúhelník, 100-stranný mnohoúhelník a n-stranný mnohoúhelník.

Poznámka. Než zadáte vašim žákům tuto úlohu, nechte je objevit, že součet velikostí všech vnitřních úhlů jakéhokoli trojúhelníka je 180°. Za tím účelem nechte žáky nakreslit jakýkoli trojúhelník pomocí pravítka, vystřihnout ho a vybarvit jeho tři „rohy" (části úhlů) různými barvami. Žáci by pak měli tyto tři rohy odtrhnout nebo odstřihnout a přiložit je k sobě, jinými slovy utvořit grafický součet úhlů. Požadovaný jev se ukáže, jakmile jsou všechny tři ústřižky umístěny do požaadované polohy.

Úloha je založena na faktu, že jediným vnitřně pevným útvarem je trojúhelník, což je používáno při konstrukcích staveb. Další mnohoúhelníky mohou být zpevněny umístěním výztuh jdoucích z jednoho vrcholu do vrcholu jiného tak, aby se mnohoúhelníky skládaly z trojúhelníků.

Úloha může být zadána žákům 10-11 letým v závislosti na tom, co již z geometrie znají, nicméně autoři ji použili pro žáky desetileté.

ÚLOHA 5

Tato úloha pomůže žákům pochopit rozdíl mezi obvodem a obsahem. Potřebujete provázek dlouhý 20 jednotek a čtverečkovaný (jednotka by měla vyhovovat velikosti strany čtverce čtverečkovaného papíru, nejméně však 1 cm). Úkolem je vyrobit co nejvíce pravoúhelníků se stranami celočíselné délky a o obvodu 20 jednotek. (Provázek musí být při tvorbě pravoúhelníku napjatý). Zaznamenejte do tabulky délku, šířku a obsah každého pravoúhelníku. Podívejte se na údaje, které jste do tabulky zaznamenali. Vidíte vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníků? Dokážete vyjádřit povahu toho vztahu slovy? Nakreslete graf znázorňující vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníka. Můžete z grafu určit šířku pravoúhelníka, jehož délka je 7,5 jednotek? Nyní nakreslete graf závislosti obsahu a délky. Má pravoúhelník s největší plochou nějaké zvláštní jméno? Dokážete si představit nějaký objekt, který vypadá podobně jako graf, který jste právě nakreslili?

Komentář. Promyslete, jak budete reagovat, když se žák ve třídě zeptá, má-li v tabulce uvést i dvojici (10,0) a (0,10)? Podívejte se, jak je přesně úloha formulována; splňuje návrh podmínky zadání úlohy?

ÚLOHA 6

Farmář má 100 m plotu, ze kterého chce udělat oplocení pro ovce tak, že všechny ovce budou společně v jedné ohradě. Tvar oploceného pozemku může být jakýkoliv. Musí být ale splněn následující požadavek. Každá ovce musí mít pro sebe 1 m^2 pozemku.

Farmář se snaží o to, aby mohl umístit do ohrady maximální počet ovcí. Jaký je tento počet ovcí? Řešte experimentováním.

ÚLOHA 7

Sestavte krychle o hraně délky $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. pomocí krychliček jednotkové velikosti. Představte si, že všechny sestavené krychle obarvíte. Zaznamenejte do tabulky počet malých krychlí ve větších krychlích, které mají nabarveno $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ stěn. Podívejte se na vaši tabulku. Můžete pro krychli o hraně n zobecnit, kolik malých krychliček ji tvořících má nabarveno 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 stěn?

ÚLOHA 8

Kolik čtverců můžeme najít na šachovnici, která má 8×8 polí? Ukažte žákům, že začnou-li se šachovnicí 2×2 a budou postupovat směrem k šachovnici 8×8, budou si moci všimnout pravidelnosti, která jim dá odpověď pro šachovnici 8×8 a následně i zobecnění pro šachovnici $n \times n$.

ÚLOHA 9

Nádoba na vodu, která je čtvercové základny, má být vyrobena ze čtvercového plátu plechu o straně délky 50 cm. Jestliže délka strany čtvercové základny je l cm, najděte maximální objem plechové nádoby. Najděte vztah mezi objemem V a délkou strany základny l a tento vztah popište.

Nakreslete graf této závislosti. Jaký je největší možný objem? Jeden student prohlásil, že objem je největší tehdy, když se obsah základny rovná součtu obsahů stěn nádoby. Je toto tvrzení pravdivé? Porovnejte tento poslední výsledek s objemem válcové nádoby, kterou lze vyrobit ze stejného plechového plátu.

Pracovní dílna i článek vznikly s podporou projektu IIATM (Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics) č. 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21, programu Socrates-Comenius 2.1.

LITERATURA

[1] Littler, G., Benson, D. (V tisku.) Pravidelnosti vedoucí k algebře. Kapitola v knize *Pět podnětných pro učitele matematiky*, Praha, PedF UK.

BURZA NÁPADŮ – POPIS ZKUŠENOSTÍ UČITELE ZŠ

JANA PLÍŠKOVÁ[1]

ÚVOD

Jsem učitelkou matematiky na druhém stupni základní školy. Mojí snahou je zpřístupnit matematiku žákům formami, které jsou pro ně příjemné a které žáci vnímají jako hru a ne učení. Samozřejmě je důležitá vyváženost hodiny a herní formy je nutno volit citlivě, ve vhodnou dobu, je nutné zvážit věkovou skupinu, pro kterou tu, či onu hru volím.

Moje zkušenost je taková, že pokud jsou žáci zvyklí procovat určitým stylem již od nižších ročníků, pak jim nepřipadá forma hry zvláštní ani ve vyšších ročnících.

Úkolem dílny vedené na Dvou dnech s didaktikou matematiky bylo nejen předat osobní zkušenosti, ale vytvořit podmínky pro diskuzi, při které se navzájem podělíme o nápady, jakým způsobem je možné žáky vést k přesvědčení, že matematika je věda krásná a zábavná.

V tomto příspěvku popíšu několik osvědčených nápadů na činnosti, které žáci vítají. Popisovat zkušenosti ostatních, které byly v dílně předloženy mi nepřísluší.

HRY V HODINÁCH MATEMATIKY A JEJICH PŘÍNOS PRO DĚTI

Hra je forma činnosti, při které děti nevnímají proces získávání vědomostí a dovedností jako proces učení. Hra je mnohdy v osvojení poznatků mnohem úspěšnější. Uvedu jako příklad hru Pexeso, při které je malé dítě schopno se rychle naučit jména zvířat, plemena psů, hrady a zámky atd.

Jako další přínos her považuji fakt, že se děti učí komunikovat, spolupracovat, brát si příklad z jednání druhého, podřizovat se druhým, rychle se rozhodovat.

Hra umožňuje být úspěšným i dětem, které mají výukové obtíže, naopak učí přijímat porážku dětem příliš sebejistým.

V neposlední řadě vnímám hru jako prostředek odbourávání strachu z matematiky, z učitele, který může být při hrách partnerem, z omylu, který se při hře objeví, z neúspěchu.

DOMINO

Tato hra je velice známá snad ve všech rodinách, proto není třeba dětem příliš dlouho popisovat její pravidla. Ta je možno pro zatraktivnění hry obměňovat. Jedná se zpočátku o hru motivační, kdy se děti snaží splnit úkol – vyhrát, být první, porazit spolužáka. Při jejím dalším používání však děti začínají vnímat i přínos této hry – učení. Proto si dovoluji

[1] *ZŠ Pardubice; Josefa Ressla 2258, pliskova.jana@seznam.cz*

tuto hru považovat za didaktickou. Pro žáky není tato hra přínosem jen pro zapamatování si probírané látky. Učí se také komunikovat, podřizovat druhému, vysvětlovat a obhajovat volbu, rychle se rozhodovat. Nesetkala jsem se s odmítnutím této hry, s nevolí hru hrát, přestože obsah kartiček byl žáky považován za obtížné učivo.

Témata, která používám pro hru Domino:

- převody jednotek
- algebraické vzorce
- geometrické vzorce s názvy útvarů, s obrázky útvarů, tělesy, sítěmi těles
- převody zlomků na desetinná čísla, smíšená čísla, základní tvar
- vyjádření částí dne, hodiny, jednotek desetinným číslem a zlomkem

Různá pravidla pro hru Domino:

- klasické Domino
- hra skupiny, dvojic – která skupina, dvojice rychle sestaví z kartiček čtverec
- hra dvojic – všechny kartičky otočené lícem, hráči se musí v pokládání střídat a sestavit uzavřený obrazec

HRY S OBDOBNÝM VYUŽITÍM I PRAVIDLY

Magický čtverec – čtverec rozstříhaný na 9 čtvercových kartiček. Jednotlivé kartičky jsou rozděleny úhlopříčkami na 4 trojúhelníky. Do trojúhelníků jsou vepsány zápisy tak, aby při složení čtverce k sobě přiléhaly strany kartiček stejného významu jako u domina.

Pexeso – známá hra, u které je možno využít poznatků z domina – obrázky nejsou identické, ale vyjadřují stejný výraz, stejnou vlastnost, mají stejný význam.

Pexeso je možné hrát s obměnami, které urychlí a zatraktivní hru:

- všechny obrázky otočené lícem a dvojice jen vyhledávat
- všichni hledají najednou
- hráči se ve dvojicích střídají do té doby, než se jeden hráč zmýlí
- kartičky rozmístěné po třídě a děti hledají dvojice

Kartičky ANO – NE: Každý žák si vyrobí z jakéhokoli čistého kartonu 2 kartičky velikosti A5. Na jednu napíše A či celé slovo ANO, na druhou N nebo celé slovo NE. Učitel se ptá, celá třída (jednotlivci) po stanoveném limitu odpovídá zvednutím správné kartičky. Učitel vyjmenuje žáky, kteří se zmýlili a případně vysvětlí. Žáci si chyby počítají. Pro učitele je to přehledná forma zjištění znalostí, děti tuto formu vnímají jako hru, obzvlášť, pokud jsou na závěr pochváleni či ohodnoceni razítkem, známkou. Na žáky, kteří chybovali, nepůsobí tato forma „zkoušení“ negativně. Aby hru hráli všichni do konce, je možné stanovit určitou možnost omylu. Žáci často „kartičky“ vyžadují.

Doplnění: Pro otázky mám připravené svoje karty. Obsahují např. vzorce, geometrické symboly, převody jednotek. Zpočátku se ptám, zda je zápis správný, poté přidám slovní komentář, při kterém musí děti skloubit to, co vidí na kartičce a co slyší ode mne.

Příklad: ukazuji správný vzorec na výpočet obsahu čtverce a ptám se, zda je to správný vzorec na výpočet obsahu obdélníka.

ČÍSELNÁ OSA

Žáci si přinesou nastříhané čtverečky o velikosti 1×1 cm, učitel má na papíře formátu A4 připravené číselné osy s různými měřítky a s popisem pouze některých bodů. Nejdříve učitel se všemi žáky na jeden čtvereček napíše číslo, které je možné umístit na první číselnou osu a vysvětlí její správné umístění a polohu rohem k ose. Postupně společně popíší např. 5 čtverečků a umístí.

Následuje hra:

Žáci si vezmou všechny již popsané čtverečky do dlaně, zamíchají a na povel rozmisťují.

Různé obtížnosti:

- rozmisťování na jednu osu
- rozmisťování na celý papír
- osy s desetinnými čísly
- osy se zlomky

ŠIFROVÁNÍ, ANEB ŽÁCI RÁDI POČÍTAJÍ

Učitel má pro žáky připravené kartičky, na kterých je zaznamenaná šifra. Šifra převádí čísla do písmen. Žáci si pak kartičku se šifrou nosí stále u sebe. Žákům je zadáno asi 5 příkladů, jejichž výsledky tvoří zašifrované slovo. Slovo umožňuje učiteli rychlou kontrolu a je možné tak sledovat celou třídu.

Použití v jednotlivých ročnících:

- 6. ročník – šifra s desetinnými čísly
- 7. ročník – zlomky a záporná čísla
- 8. ročník – hodnota algebraického výrazu apod.

Doplnění

Sama mám se šifrováním velice dobré zkušenosti. Abych omezila domýšlení si slov, zadávám nejprve slova, pak slova pozpátku, přesmyčky, či slova, která žáci neznají, a to mi umožňuje v návaznosti na šifru vysvětlovat zajímavou problematiku či touto formou navodit cíl hodiny.

ZÁVĚR

Mým velkým přáním je, aby všechny děti měly rády matematiku alespoň v takové míře, že na hodiny strávené ve školních lavicích budou vzpomínat v dobrém, přestože hodnocení na vysvědčení, které jim musím udělit mnohdy není příliš lichotivé. Budu ráda, když mi jako reakci na tento příspěvek kolegové napíší svoje zkušenosti a nápady.

METODY ŘEŠENÍ LOGICKÝCH ÚLOH

JARMILA ROBOVÁ[1]

ÚVOD

Logické úlohy a jejich řešení představují nedílnou součást školské matematiky, neboť napomáhají rozvíjení srozumitelného vyjadřování a formulování myšlenek včetně logicky správného zdůvodňování řešení problémů. Logické úlohy lze v hodinách matematiky využít pro:

– oživení výuky (úlohy z rekreační matematiky),

– propedeutiku a rozvíjení množinově-logických vztahů mezi matematickými objekty.

Metody, které lze využívat při řešení logických úloh, souvisí s věkem a zkušenostmi žáků. Mezi základní metody patří metoda úsudku a rozboru všech možností, které jsou vhodné především v jednodušších logických úlohách. Dále lze využívat grafické metody jako je metoda Vennových a šipkových diagramů. Tyto uvedené metody lze zařazovat do výuky již na druhém stupni základní školy či nižším gymnáziu. Metody výrokové logiky (tzv. algebra pravdivostních hodnot) a Booleovy algebry se využívají v hodinách matematiky na čtyřleté střední škole, případně v matematickém semináři.

PRŮBĚH PRACOVNÍ DÍLNY

Pracovní dílna, která byla věnována metodám řešení logických úloh, navazovala na příspěvek o grafických metodách řešení logických úloh [3]; příspěvek byl prezentován na *Dvou dnech s didaktikou matematiky* v roce 2005.

Účastníci dílny se nejdříve seznámili s postavením logických úloh ve školské matematice a dále se prostřednictvím příkladů obeznámili s tím, co je a co není logická úloha. Za logické úlohy nepovažujeme ty, které využívají nejednoznačnosti slovních formulací či jazykového kontextu v běžné řeči.

Po úvodním seznámení s problematikou logických úloh byly řešeny jednoduché úlohy s využitím metody úsudku a rozboru všech možností. V tomto případě využíváme při řešení základní logické zákony (zákon sporu, princip vyloučení třetího a logické vyplývání):

– zákon sporu $p \wedge \neg p \equiv 0$,

– zákon vyloučení třetího $p \vee \neg p \equiv 1$,

– logické vyplývání $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

[1] *MFF UK v Praze, Jarmila.Robova@mff.cuni.cz*

PŘÍKLAD 1

Při výslechu si vyšetřující zapsal: A říká, že B lže, B tvrdí, že C lže, C vypovídá, že A a B oba lžou. Kdo tedy mluví pravdu?

Řešení: B mluví pravdu, A i C lžou.

PŘÍKLAD 2

Piráti vždy lžou, lodníci mluví vždy pravdu. K ostrovu, na kterém žijí piráti, dorazila loď na záchranu ztroskotaných lodníků. Posádka lodi vidí na břehu moře stát tři muže a zeptá se: „Kdo je pirát a kdo lodník?“. První muž odpoví, ale jeho odpověď přehluší moře. Druhý muž: „Říká vám, že je lodník, já jsem také lodník.“. Třetí muž: „Jsou to oba piráti, já jsem lodník.“. Kdo je pirát a kdo je lodník?

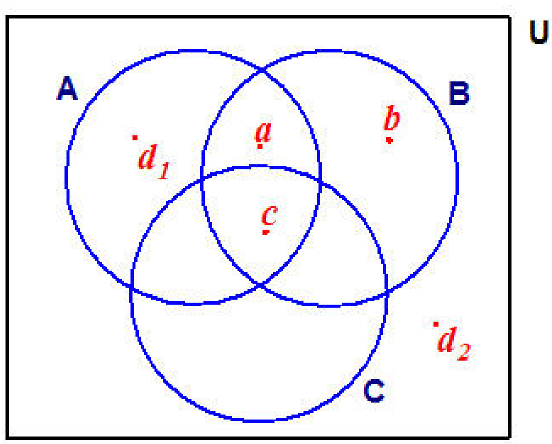
Řešení: První a druhý muž jsou lodníci, třetí muž je pirát.

Dále se během dílny řešily úlohy, ve kterých lze využívat grafické metody. Nejdříve byly probírány Vennovy diagramy a jejich využití ke klasifikaci matematických objektů a ujasnění vztahů mezi těmito matematickými objekty.

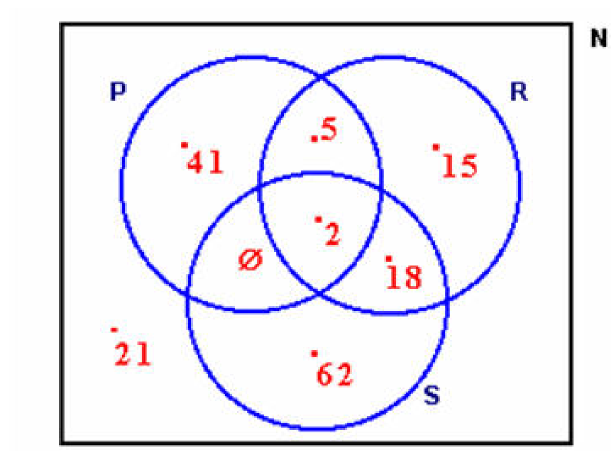
PŘÍKLAD 3

Do diagramu pro tři podmnožiny A, B, C množiny U zakreslete následující prvky a, b, c, pro které platí:
$a \in U$, a leží současně v A i B, ale neleží v C, $b \in U$, b leží v B, ale neleží ani v A ani v C, $c \in U$, c leží v A i B i C, $d \in U$, d neleží ani v B ani v C.

Řešení: Obr. 1, prvek d lze zakreslit do dvou oblastí jako d_1 a d_2.



Obr. 1



Obr. 2

PŘÍKLAD 4

Sestrojte Vennův diagram pro tři podmnožiny P, R, S množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$.

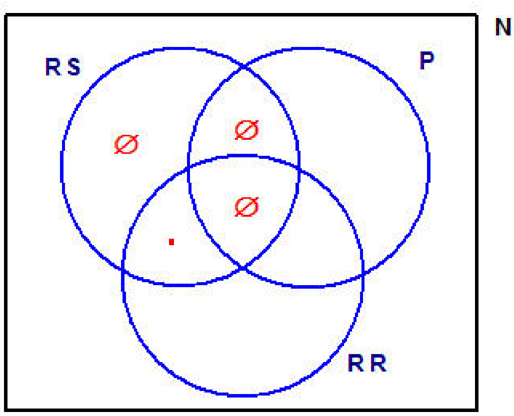
P ... množina všech prvočísel
R ... množina všech přirozených čísel menších než 20
S ... množina všech sudých přirozených čísel
Zakreslete do každé oblasti v diagramu aspoň jedno přirozené číslo, které v této oblasti leží pokud takové číslo neexistuje, použijte symbol $\emptyset$.

Řešení: Například diagram na obr. 2.

Jak již bylo zmíněno, Vennovy diagramy lze využívat nejen ke znázornění množinových vztahů, ale také k posuzování pravdivosti jednoduchých úsudků, kterými můžeme v hodinách matematiky například procvičovat třídění matematických objektů do skupin.

PŘÍKLAD 5

Žádný rovnostranný trojúhelník není pravoúhlý.
Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný.
Některé trojúhelníky jsou rovnostranné.
Rozhodněte na základě platnosti uvedených třech tvrzení, které z následujících úsudků jsou správné:
a) Žádný rovnoramenný trojúhelník není pravoúhlý.
b) Některý rovnoramenný trojúhelník není pravoúhlý.
c) Některý rovnoramenný trojúhelník je pravoúhlý.



Obr. 3

Řešení: Některý rovnoramenný trojúhelník není pravoúhlý. Rozbor situace je na obr. 3.

Dále byly řešeny úlohy s využitím metody šipkových diagramů. Metoda je vhodná pro řešení logických úloh, které obsahují složené výroky – implikace. Princip této metody byl již objasněn v [3]. Následující úloha je převzata od L. Carolla.

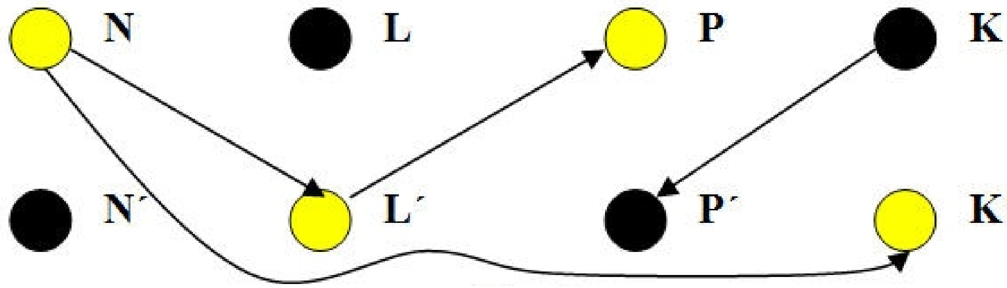
PŘÍKLAD 6

Nemluvňata jsou nelogická.
Nepohrdáme nikým, kdo ovládá krokodýla.
Pohrdáme nelogickými osobami.
Určete, zda na základě těchto tří pravdivých tvrzení platí závěr, že nemluvňata nedovedou ovládat krokodýla.

Řešení: Závěr platí, viz obr. 4.

ZÁVĚR

Cílem pracovní dílny bylo seznámit učitele se základními typy jednoduchých logických úloh, s metodami jejich řešení i s oblastmi využití těchto úloh ve školské matematice.



Obr. 4

LITERATURA

[1] Mráz, V. *Logika pro pedagogy*. SPN, Praha 1983

[2] Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha 1997, 6.vydání

[3] Robová, J. Grafické řešení logických úloh. In. Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky*, Pedagogická fakulta UK, Praha 2005

[4] Robová, J. *Množiny.* Webové stránky VÚP Praha, 2006 (připravuje se)

HODINA MATEMATIKY VE ŠVÝCARSKU[1]

NAĎA STEHLÍKOVÁ[2]

ÚVOD

V rámci konference *Dva dny s didaktikou matematiky* jsou mimo jiné organizovány i hojně navštěvované otevřené hodiny. Téměř každý učitel se zajímá o to, jak vyučují ostatní, rád se nechá inspirovat a poučit právě tímto praktickým způsobem. Organizace otevřených hodin však není jednoduchá. Ne každý učitel je ochoten otevřenou hodinu zorganizovat a přítomnost více učitelů na hodině může vyučování významně negativně ovlivnit. Další neméně důležitá nevýhoda spočívá v tom, že viděné nelze „vrátit“. Při následné diskusi mezi učiteli nezřídka dojde k tomu, že stejný okamžik je nejen různě interpretován, ale také různě popisován. V tomto ohledu je lépe využít videonahrávky hodin.

[1]Tento článek vznikl za podpory grantu GA ČR 406/05/2444.

[2]*PedF UK v Praze, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

Analýza videí z výuky je běžně využívána v dalším vzdělávání učitelů i v přípravě učitelů v mnoha zemích (např. [1], [5]) i u nás ([4], [7]). Záznam vyučování je realistický a na rozdíl od hospitací je možné se k zajímavému úseku hodiny opakovaně vracet a analyzovat ho z různých hledisek. Konkrétní ukázky z reálné výuky mohou překlenout propast, která většinou zeje mezi obecně formulovanými zásadami a jejich aplikací v praxi. S mnohými zásadami se učitel proklamativně ztotožní, avšak v praxi je neuplatňuje, nebo neví, jak je uplatnit. Ilustrace mu pomůže uvědomit si právě toto praktické uplatnění. Jedna ilustrace může vyjádřit víc než celé stránky obecných výkladů.

Video zaznamenává vyučovací jednotku komplexněji a na rozdíl od popisu výuky nechává interpretaci na každém jedinci. Pokud zaznamenáváme hodinu písemně, už tím, na co se zaměřujeme a co vynecháváme, provádíme určitou interpretaci. Video je tedy autentičtější.

Získat vhodné videonahrávky k analýze je obtížná záležitost. Kromě nahrávek učitelů – dobrovolníků je jediná další možnost, o níž vím, využít videa, která byla pořízena v rámci TIMSS 1999 Video Study. Jedná se vždy o čtyři vyučovací hodiny matematiky ze sedmi zemí (včetně ČR), které jsou opatřeny titulky a komentáři učitele a výzkumníka. Komentáře poskytnou důležitý kontext, v němž se hodina odehrává, tj. jaké znalosti žáci mají, jaký byl úmysl učitele, proč použil právě tuto metodu a jak daná hodina zapadá do „běžných“ hodin matematiky v dané zemi. V rámci konference byla účastníkům formou dílny nabídnuta jedna švýcarská hodina matematiky.

Švýcarská hodina

Na rozdíl od dílny, v níž účastníci viděli téměř celou vyučovací hodinu, zde se musím uchýlit k určité interpretaci, protože mohu čtenáře seznámit jen s některými částmi hodiny, které osobně považuji za klíčové. Při jejich interpetaci se pokusím využít poznatků a komentářů, s nimiž přišli účastníci dílny.

Popis hodiny – Pythagorova věta v prostoru

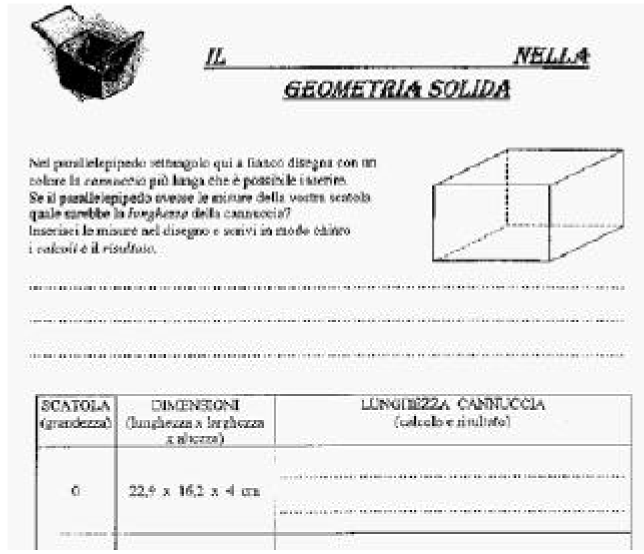
Jedná se o hodinu matematiky v délce 50 minut v 8. třídě (nahrána je jedna vyučovací hodina, ale vlastní výuka matematiky pokračuje ještě jednou hodinou). Přítomno je celkem 17 žáků.

Žáci již znali Pythagorovu větu u rovinných útvarů a měli objevit její použití v prostoru. Učitelka přinesla krabice různých velikostí, které se používají pro posílání balíčků poštou (jsou běžně k dostání na švýcarských poštách). Děti pracovaly ve skupinách. Každá skupina dostala kromě krabice též několik dlouhých brček reprezentujících předmět, který děti chtějí poslat poštou. Učitelka uvedla práci takto:

„Představte si, že chcete poslat kamarádovi dárek. Dárek, který má hodně dlouhý a úzký tvar. Pošta má šest různých druhů krabic. Jsou tady na stole, krabice 1, 1, 2, 3, 4 a 5. Pracujte ve skupinách po třech, jedna skupina bude po dvou. Každá skupina dostane krabici. Prohlédněte si ji. Dám vám taky společné instrukce. Podívejte se na to, jaké je číslo vaší krabice a jaké má rozměry. Vezměte si jedno z těchto brček a zkuste najít takovou polohu, v níž se do krabice vejde nejdelší brčko.“

Úkolem žáků bylo najít nejdelší objekt, který se vejde do jejich krabice (z matematického hlediska tedy zjistit, že nejdelší úhlopříčka je tělesová), změřit jej a své měření ověřit výpočtem na pracovním listu (část je na obr. 1).

Učitelka prochází třídou a reaguje na dotazy. Sama o tom v reflexi hodiny (kterou psala po shlédnutí videozáznamu) píše: „Když si uvědomím, že žáci něco právě objevují, nechávám je v tomto důležitém okamžiku vždy samotné.“



IL NELLA
GEOMETRIA SOLIDA

Nel parallelepipedo rettangolo qui a fianco disegna con un colore la *cannuccia* più lunga che è possibile inserire.
Se il parallelepipedo avesse le misure della vostra scatola quale sarebbe la *lunghezza* della cannuccia?
Inserisci le misure nel disegno e scrivi in modo chiaro i *calcoli* e il *risultato*.

SCATOLA (grandezza)	DIMENSIONI (lunghezza x larghezza x altezza)	LUNGHEZZA CANNUCCIA (calcolo e risultato)
6	22,9 x 16,2 x 4 cm	

Obr. 1

Učitelka ve svých odpovědích téměř nic neprozradila. Např. skupině, která brčko ustřihla ve velikosti stěnové úhlopříčky, řekla: „Záleží pak na tom, jak vysokou máme krabici? Nestačila by pak nějaká mělčí?“ Tím naznačila, že mají vzít v úvahu také třetí rozměr krabice, což skupina po dalším experimentování udělala. Učitelka o tom píše: „Teď jsem dala jen stručnou odpověď, protože žáci čekali, že jim to prozradím, aniž by si to vyzkoušeli sami. Vím, že tato skupina je schopna řešení najít sama, ale že si nevěří.“

Po několika minutách práce se třída značně rozvrstvila. Některé skupiny již přemýšlely nad výpočtem, jiné ještě experimentovaly s brčkem, další si modelovaly brčky pravoúhlý trojúhelník, který vzniká z hrany a tělesové a stěnové úhlopříčky (což je už přirozeně navedlo na Pythagorovou větu). Když některé skupiny udělaly výpočet délky tělesové úhlopříčky, učitelka je požádala, aby přemýšlely nad tím, jak to celé napsat jediným výpočtem. Ostatní zatím zůstaly na úrovni postupného výpočtu – nejprve stěnové a pak tělesové úhlopříčky.

Učitelka nechala skupiny zapsat své výpočty na fólii s pracovním listem (obr. 1) a výsledky pak prezentovala pomocí zpětného projektoru. Pak nechala vysvětlit jednu žákyni způsob, v němž počítala délku tělesové úhlopříčky v jednom kroku (obr. 2). Zdůraznila ale, že děti mohou stále používat dva postupné výpočty. Posledních asi 10 minut je věnováno procvičování používání Pythagorovy věty v prostoru. Žáci pracují s pracovními listem tentokrát ve dvojicích a sami si kontrolují výsledky. Učitelka pomáhá těm, kteří to potřebují.

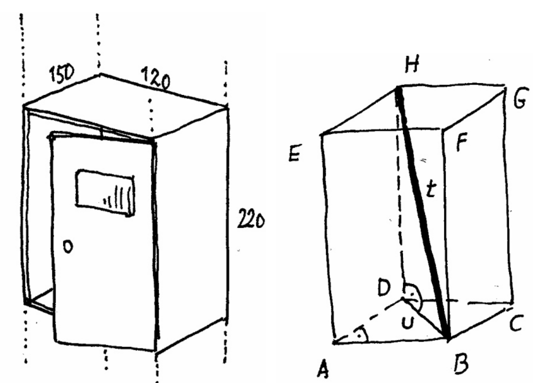
$$\sqrt{\sqrt{(22.9^2+14.7^2)}^2+9.5^2} =$$
$$\sqrt{(22.9^2+14.7^2)+9.5^2} \cong 28.8 \text{ cm}$$

Obr. 2

KOMENTÁŘ

Učitelka zařadila do hodiny jak manipulaci s konkrétním materiálem (krabice, brčka), tak výpočet na pracovním listu. Objev, že nejdelší úhlopříčka je tělesová, je učiněn nejprve konkrétním experimentováním a teprve pak je přenesen v podobě nákresu na papír. Žáci mají zakreslit nejdelší úhlopříčku do obrázku kvádru a tím si reprezentují to, co předtím viděli přímo v 3D prostoru. Doba, kterou žáci potřebovali k tomu, aby na tento poznatek, který je běžně považován za triviální, přišli, ukazuje, že tato fáze poznávacího procesu je nezastupitelná a neměla by být urychlována. Podle mého názoru je nevhodné, pokud učitel nakreslí přímo tělesovou úhlopříčku do nákresu kvádru, prohlásí ji za nejdelší a nechá žáky počítat. Kdo ví, zda jsou žáci skutečně přesvědčeni, že právě tato úhlopříčka je nejdelší, a která úhlopříčka to vlastně je v modelu kvádru?

Výhoda modelu krabice je dále v tom, že umožňuje žákům namodelovat si pomocí brček přímo v 3D prostoru onen pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je tělesová úhlopříčka. Na videozáznamu je vidět, že některé děti to dělaly spontánně a jiné k tomu učitelka vedla. To odlišuje model „dlouhý předmět v krabici“ od běžně užívaného modelu „tyče ve výtahu“ (obr. 3), kde se musejí od začátku spolehnout spíše na představu.



Obr. 3: Jak dlouhá tyč se vejde do výtahu, který má tvar kvádru? (obrázky [3])

Je důležité zdůraznit, že učitelka nedává žádnou nápovědu, že k výpočtu by měla být použita Pythagorova věta. Nadpis na pracovním listu si děti doplní až při závěrečné prezentaci. Tedy i to, že tělesová úhlopříčka je současně přeponou pravoúhlého trojúhelníka, je vlastním objevem dětí, který učitelka v průběhu jejich práce nikdy nevysloví. Podobně sami musí dojít k tomu, že je nutné použít Pythagorovu větu dvakrát a ve správném pořadí.

Jeden z nejvýraznějších rysů vyučování, které podporuje vlastní objevování žáků, je to, že tempo práce žáků je značně indiviudální. Z videonahrávky je vidět značná různorodost rychlosti postupu. Učitelka si s tímto problémem poradila dobře. Práci skupin nijak neurychlovala, klíčový objev, pokud mohu soudit z nahrávky, nikomu neprozradila. Rychlejším skupinám dala další práci, pomalejším pouze poradila.

Z videozáznamu je vidět, že žáci jsou na skupinovou práci zvyklí. V komentáři k hodině se píše, že učitelé matematiky jsou k využívání skupinové práce vedeni už při své profesní přípravě.

S učiteli i posluchači učitelství jsem vyzkoušela tuto hodinu již několikrát a opakovaně se ukázalo, že je pro rozbor vhodná. Posluchači si všímají zejména reakcí učitelky a jejího nenásilného vedení hodiny. Učitelka se snaží v žácích vyvolat představu, že pochopení matematiky si vytvářejí do určité míry sami. Zařazuje i objevitelské aktivity, ale nepodceňuje ani procvičování.

ŠVÝCARSKO V TIMSS 1999 VIDEO STUDY

Podívejme se na některé charakteristiky švýcarských hodin v kontrastu s českými hodinami, které zkoumala TIMSS 1999 Video Study [2] prostřednictvím analýzy nahrávek cca 100 vyučovacích hodin v obou zemích.

Švýc.	ČR	Charakteristika
25%	14%	individuální práce je věnováno úlohám, v nichž žáci něco objevují
62%	84%	individuální práce je věnováno úlohám, v nichž žáci aplikují předem známé procedury
26%	8%	práce v hodině, kdy učitel nevyučoval frontálně, je ve skupinách
20%	10%	hodin obsahuje objekty z reálného světa
13%	11%	hodin matematiky obsahovalo shrnutí probrané látky
24%	16%	hodin matematiky obsahovalo aspoň jednu úlohu, u které bylo prezentováno více způsobu řešení

ZÁVĚR

Domnívám se, že práce s videozáznamem hodiny může významně přispět k přípravě budoucích učitelů i ke vzdělávání učitelů z praxe. Jeho společná reflexe vede posluchače k tomu, aby si uvědomovali různé charakteristiky své výuky a přirozeně ji srovnávali s výukou jiných učitelů. Zprostředkovaně získávají další zkušenosti s výukou, k nimž by jinak neměli přístup, a obohacují jimi svou vlastní výuku. To vše se děje praktickou formou.

Výsledky TIMSS 1999 Video Study jsou cenným zdrojem informací i pro české učitele. Zprávy z této studie jsou zdarma ke stažení na adrese `http://nces.ed.gov/timss`, kde lze také najít videokázky z hodin v několika zemích. Některé charakteristiky jsou prezentovány v tomto článku, ale studie zkoumala řadu dalších, které mohou být pro učitele zajímavé, i kdyby jen pro to, aby konfrontoval způsob své výuky s převládajícím způsobem v jiných zemích.

LITERATURA

[1] BECK, R. J., KING, A., MARSHALL, S. K. Effects of videocase construction on preservice teachers' observations of teaching. *The Journal of Experimental Education*, 2002, 70(4), 345–361.

[2] HIEBERT, J. et al. *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study*. National Center for Education Statistics, 2003.

[3] KUŘINA, F. Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

[4] MAZÁČOVÁ, N. Činnostní příprava studentů učitelství. *Učitelské listy 2005/2006,* č. 8, s. 4–5.

[5] MOELLER, B. a kol. *Designing digital video case resources for mathematics teacher education*. March 2005, online: `http://www2.edc.org/cct/`

[6] STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. s. 1-31. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

[7] TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. Kolektivní reflexe, cesta ke zdokonalování kompetencí učitele. In *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005*. Bratislava: JSMF, EXAM, 2005.

PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY: ÚLOHY, UČEBNÍ PROSTŘEDÍ A HRY S KARTAMI SE SYMBOLY[1]

BERND WOLLRING[2]

ÚVOD

Geometrie je řečí forem a tvarů. V článku jsou popsány úlohy, učební prostředí a hry pro geometrii na základní škole a principy, podle kterých jsou vytvořeny.

Tyto úlohy a učební prostředí, které jsou součástí výstupů projektu IIATM, programu Sokrates-Comenius 2.1, na kterém spolupracují odborníci čtyř evropských zemí, vychází z konstruktivistického přesvědčení. Žáci jsou především pokládáni za osoby, pro které je výuka autonomní proces, a učitel je osobou, která tuto vlastní aktivitu podle možností dobře iniciuje, moderuje a podporuje. Tato základní pozice vyžaduje od učitelů kromě znalosti oboru i schopnost tvořit vhodné úlohy a dobře diagnostikovat práci žáků. Tento příspěvek pojednává o tvorbě úloh a učebního prostředí. Bude představeno několik úloh

[1]Pracovní dílna i článek vznikly s podporou projektu IIATM (Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics) č. 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21, programu Socrates-Comenius 2.1. Z německého originálu přeložil Vladimír Bonhard.

[2]*Universita v Kasselu, Německo, wollring@mathematik.uni-kassel.de*

k jednomu geometrickému tématu. Úlohy jsou určeny žákům základní školy a jsou nastavitelné na různé stupně obtížnosti. Jsou tak pro učitele dobrým základem k navrhování vlastních úloh a snad i učebních prostředí.

TÉMATICKÝ CELEK „PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY“

Pravidelné mnohoúhelníky představují bohaté geometrické prostředí, které již na základní škole umožňuje vyučovat geometrické struktury. Všímáme si pouze pravidelných mnohoúhelníků s počtem vrcholů od tří do dvanácti, protože jsou dobře rozeznatelné podle tvaru a mají mnohé důležité vlastnosti platné pro všechny pravidelné mnohoúhelníky. Rozeznáváme dva typy úloh:

Úlohy konstrukční. To jsou úlohy, ve kterých se podle určitých pravidel tvoří, mění nebo doplňují pravidelné mnohoúhelníky daných vlastností.

Úlohy výzkumné. To jsou úlohy, ve kterých se zkoumají a popisují pravidelné mnohoúhelníky a ve kterých žák může uplatnit a dále rozvíjet své geometrické znalosti. Zde se budeme zabývat pouze úlohami výzkumnými. V projektu Sokrates IIATM jsou obsaženy také konstrukční úlohy pravidelných mnohoúhelníků pro základní školy.

VÝZKUMNÉ ÚLOHY

V současné německé matematicko-didaktické diskuzi hraje podstatnou roli rozlišování mezi automatizujícími a tvořivými úlohami. *Automatizující úloha* má zajišťovat rychlé vybavování jistých vědomostních elementů, *tvořivá úloha* má podporovat poznávání a používání matematických struktur. Kontext tvořivých úloh má být volen tak, aby podporoval *aktivně objevné a sociální učení*. V tomto smyslu zde nelze představené úlohy chápat jen jako automatizující cvičení. Jsou spíše myšleny tak, aby časem získaly charakter tvořivých úloh, při řešení kterých žák hlouběji proniká do problému. Ne vše nalezené má přitom charakter velkých objevů. Mnohem více jde o prozkoumávání, které přispěje k důvěrnému seznámení se s problémem. Pro tento charakter našich úloh, jejich „být na cestě“ od automatizující k tvořivé úloze, nazýváme „výzkumné úlohy“.

ŽÁCI SE VYJADŘUJÍ JEDNÁNÍM, ČINNOSTMI A ŘEČÍ

Výzkumné úlohy jsou tedy v podstatě myšleny k nalezení souvislostí a k vytváření podnětů k rozvoji jazyka. Jsme toho názoru, že kompetence k jazykové artikulaci více méně následuje a nikoliv předchází kompetenci k jednající artikulaci. Proto naše úlohy podporují vždy dvojí artikulaci výsledků:

Činnosti. Soubor použitých karet se symboly je výsledkem snahy dát řád a systém do existujícího materiálu. Tím jsou například myšlenkové mapy z karet se symboly, ve kterých jsou pomocí specifické polohy karet se symboly zobrazeny vztahy mezi jednotlivými objekty. Tato prvotní artikulace dává příležitost k matematickým aktivitám i těm dětem, jejichž mateřská řeč není na začátku řešení úlohy dostatečně silná, aby vyjádřily vlastní myšlenky slovy.

Řeč. Zde nejde v první řadě o to, co nejrychleji ve standardizující formě zavést odborné výrazy, nýbrž spíše v úzkém kruhu partnerské spolupráce nebo práce v malých skupinách a posléze možná i v celé třídě vzbudit jistou citlivost na skutečnost, že porozumění matematickým jevům je nutné a nápomocné pro společnou práci. Formování řeči by proto mělo kromě individuálního pojmenovávání vést posléze i ke standardní terminologii.

Naše úlohy jsou proto formulovány tak, že v první řadě vyžadují činnosti a požadavky na řeč redukují nebo je vůbec nemají. Ve vlastní režii může učitel požadavky na činnosti spojit se stoupajícími požadavky na řeč a také na psaní.

ÚLOHY OBSAHUJÍCÍ AKTIVITY A MATERIÁL

Všechny následující úlohy jsou charakterizovány dvěma parametry:

– požadovanou aktivitou a

– nabízeným materiálem.

V obou oblastech jsou možné velké diferenciace.

Požadované aktivity se vztahují v téměř všech případech k sociálním formám a partnerské práci. Jen s omezením je lze použít pro individuelní práci, avšak autonomní vývoj řeči se může odehrát jen jako práce společná.

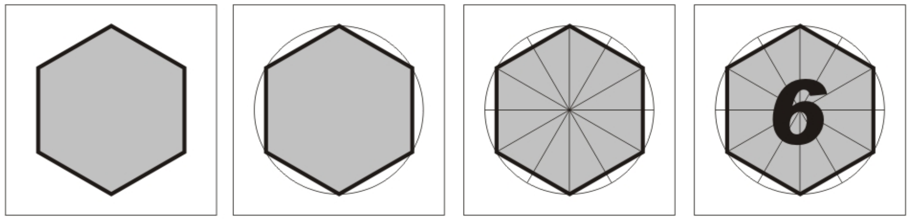
Naše návrhy na výběru materiálu považujeme za východisko pro individualizování úloh. Odstupňované podpory mohou vzniknout nejen obměňováním aktivit, nýbrž také pomocí odpovídajícího odstupňovaného výběru materiálu.

ÚROVNĚ POŽADAVKŮ

Problém spočívá v tom, přiřadit úlohy a priori tématům, která v současnosti v některých evropských zemích hrají významnou roli při formulování vzdělanostních standardů. Neboť zde představené úlohy se částečně vyznačují jistou otevřeností a dovolují odlišně formulovaná řešení. Přesto je možné, ve smyslu úrovní požadavků standardů, řešení dětí popsat následovně: 1. reprodukce, 2. souvislosti, 3. zobecnění.

Jistě je možné rozlišovat, jestli dítě během řešení úloh pouze reprodukuje nebo jestli nad to dokáže nalézt vztahy a je schopno zobecňovaní. Cílem samozřejmě je, aby se děti na těchto úrovních požadavků dostaly co nejvýše.

Všechny zde představené výzkumné úlohy se zabývají pravidelnými mnohoúhelníky, které jsou nakresleny na kartách. Karet je 40. Na každé je nakreslen jeden pravidelný mnohoúhelník od 3-úhelníku po 12-úhelník a případně ještě něco navíc. Každý z uvedených mnohoúhelníků je na 4 kartách, které jsou čtyř různých druhů, jak ukazuje obr. 1: karta A – pouze mnohoúhelník, karta B – mnohoúhelník s kružnicí opsanou, karta C – mnohoúhelník s kružnicí opsanou a všemi osami souměrnosti, karta N – mnohoúhelník s kružnicí opsanou, všemi osami souměrnosti a uvedeným počtem vrcholů.



Obr. 1: Čtyři druhy karet se symboly

ÚLOHY PRO ŽÁKY A UČITELE

Ještě před tím, než budou aktivity spolu s odpovídajícím materiálem a z toho odvozené úlohy konkrétně představeny, je nutno upozornit na skutečnost, že tyto aktivity jsou vhodné i pro trénink učitelů. Tím je míněno nejen to, že by tyto úlohy měly být řešeny i učiteli, kteří by tak mohli odhadnout, jaké nároky budou kladeny na žáky. Je tím i míněno, že tyto úlohy vedou k *meta-úlohám*, ve kterých jde v podstatě o diferencující rozvržení úloh, tedy o to, k představené aktivitě přiřadit odpovídající výběr karet nebo představenou aktivitu smysluplně pozměnit.

Následující úlohy vytvořili a rozpracovali pracovníci Univerzity Kassel společně s učiteli a studenty. Úlohy byly testovány na základních školách i ve školkách. Jsou rozděleny do čtyř okruhů: určit, zařadit, poznat a zapamatovat si.

OKRUH ÚLOH 1: USPOŘÁDAT (ARANŽOVAT, ORGANIZOVAT, ŘADIT, KLASIFIKOVAT)

Některé úlohy jsou záměrně formulovány vágně. Děti mají být dovedeny k tomu, aby samy texty úloh upřesnily. Během pokusů pozorujeme, že žáci uspořádávají karty do dvojdimenzionálních polí, do jedné řady, do sloupců nebo skupin, které mohou být různě spojovány, nebo podle příbuzných typů mnohoúhelníků.

Příklady úloh okruhu 1: U všech úloh má žák k dispozici buď všech 30 karet typů A, B a C, nebo jen určitou učitelem vybranou podmnožinu.

Úloha 1.1. Seřaď tyto karty do jednoho pole.

Úloha 1.2. Vyber si 8 karet a seřaď je.

Úloha 1.3. Vyhledej čtyřúhelníky a osmiúhelníky.

Úloha 1.4. Rozděl všechny karty na ty, na nichž je počet vrcholů sudý, a ty, na nichž je počet vrcholů lichý. Každou skupinu vybraných karet uspořádej.

Úloha 1.5. Rozděl všechny karty na ty, na nichž je počet vrcholů větší než 6, a na ty ostatní. Každou skupinu vybraných karet uspořádej.

Úloha 1.6. Někdo tyto karty seřadil. Jak?

Úloha 1.7. Karty jsou seřazeny jako ve stromě. Co je z toho lze poznat?

Úloha 1.8. Hra „vrcholový závodník“.

Pravidla hry: Všech 10 karet sady A i všech 10 karet sady C leží rozházených na stole, obrázky nahoru. Hru hrají dva hráči. Jeden pracuje se sadou A, druhý se sadou C. Na povel start každý hráč vybírá mnohoúhelníky své sady a tvoří z nich řadu uspořádánu vzestupně od 3-úhelníka po 12-úhelník. Vyhrává ten, který nejrychleji správně seřadil své karty.

Poznámka: Hra probíhá velmi rychle. Doporučuje se používat sady A a C, nikoliv A a B, protože u těch je větší nebezpečí záměny.

Obr. 2 a Obr. 3: Řazení karet se symboly

Okruh úloh 2: Dotvořit (doplnit vzor)

V těchto úlohách jsou některé karty seřazeny do určitého obrazce nebo do strukturované pracovní plochy na stole. Chybějící karty se mají doplnit. Přitom se mají rozpoznat a zachovat pravidla a struktury, podle kterých jsou již položené karty seřazeny. Tyto úlohy se dají kvantitativně odlišit podle velikosti polí a počtu karet, které se mají položit, kvalitativně se dají odlišit podle typu karet, které se mají položit. Formát úlohy je velmi mnohostranný a může být použit i v rámci vlastního organizovaného učení. Například mohou být žáci požádáni, aby takové formáty úloh odvodili ze způsobu řazení, které použili v okruhu úloh Uspořádat. Dalšího rozlišení může být dosaženo pomocí počtu a druhu karet, které jsou k dispozici, zejména mohou být karty pokládány takovým způsobem, že budou muset být položeny všechny, nebo tak, že některé zbydou.

Úloha 2.1. Zde jsou karty seřazeny do jistého vzoru. Některé karty leží vedle. Doplň je do vzoru.

Materiál: Seřazení karet do čtyřúhelníkového či kruhového vzoru, do diagramu nebo do jiných schémat.

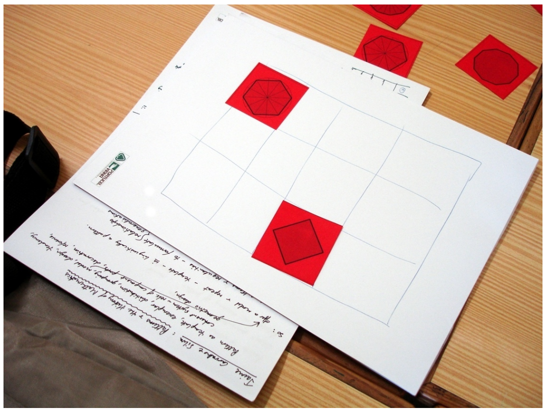
Úloha 2.2. Zde jsou některé karty již položeny. Které karty chybí? Kam patří? Zařaď chybějící karty.

Materiál: Karty se symboly A, B a C, plocha s 3×4 poli pro karty

Úloha 2.3. Zde jsou karty seřazeny do vzoru. Dvě karty leží chybně. Které to jsou?

Materiál: Seřazení karet do čtyřúhelníkového vzoru, do kruhového schématu, do diagramu nebo do jiných schémat.

Úloha 2.4. Hra „Had“
Materiál: Karty se symboly A.
Pravidla hry pro dva hráče: Jeden z vás dvou seřadí sadu karet do hada. Začne s mnohoúhelníkem s nejmenším počtem vrcholů a skončí s největším počtem vrcholů. Druhý hráč se chvilku dívá na hada až bude od prvního vyzván, aby zavřel oči. Pak vezme tři karty z hada a posune hada zase dohromady, takže mezery už nejsou vidět. Druhý hráč otevře oči a zařadí tři karty opět na správná místa do hada. Oba zkontrolují výsledek a vystřídají se při hře. Za každou správně zařazenou kartu obdrží bod. Kdo má po čtyřech kolech více bodů, vyhrává.



Obr. 4: Otevřená úloha k zařazení karet se symboly (vytvořena A. Watson a P. Palharesem)

OKRUH ÚLOH 3: POZNAT (STRATEGIE POZNÁVÁNÍ, ŘEŠENÍ NA ČAS)

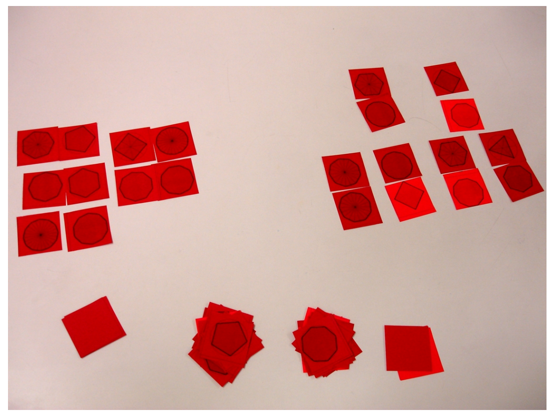
Úlohy tohoto typu navazují na hry, ve kterých jde o to, vyhrát karty tak, že člověk co nejrychleji rozezná přímo určité karty nebo určité podobnosti mezi nimi. Jeden způsob může být ten, že dva hráči organizují hru následovně: hráč a ukazuje jednotlivé karty po jistou dobu (počítá „jednadvacet, dvaadvacet, třiadvacet“), takže je hráč B po jistou dobu může vidět. Poté je karta položena obrázkem dolů. Pozná-li hráč B kartu, náleží jemu, jinak náleží hráči A. Zvláštní požadavky kladou hry, které spojují určité typy karet s určitými aktivitami, např. při rozpoznání šestiúhelníku šestkrát zatleskat, nebo při rozpoznání osmiúhelníku osmkrát cvrnknout prstem a podobně.

Úloha 3.1. Hra: „Lusknout-chytit“ („Schnipp-Schnapp“)
Materiál: 70 karet se symboly s pravidelnými mnohoúhelníky.
Pravidla hry: Tuto hru hrajte ve dvou. Před začátkem hry se karty musí zamíchat. Poté karty mezi vás rovnoměrně rozdělíte. Před každým hráčem musí ležet hromádka karet rubem nahoru. Oba hráči sejmou současně horní kartu z hromádky a položí jí před sebe lícem nahoru. Mají-li oba mnohoúhelníky sudý počet vrcholů, musí hráč, který to poznal, klepnout rukou do stolu. Tím mu náleží obě karty. Cílem hry je sbírat dvojice karet se sudým počtem vrcholů. Otočí-li jeden hráč kartu se sudým počtem vrcholů a druhý

s lichým počtem vrcholů, otáčí hráči další kartu. V případě, že se hráč při zaklepání spletl, patří dvojice karet protihráči. Konec hry nastane, když jsou všechny karty spotřebovány. Vyhrává ten, který má nejvíce dvojic.
Herní variace: Při této hře se sbírají dvojice s lichým počtem vrcholů. Hra může být napínavější a komplikovanější, jestliže se budou hledat mnohoúhelníky, u kterých jeden mnohoúhelník „pasuje“ do druhého. Tím rozumíme, že počet vrcholů jednoho je násobkem počtu vrcholů druhého, např. trojúhelník „pasuje“ do šestiúhelníku.

Zvláštnost těchto aktivit spočívá v tom, že pro mnohoúhelníky, které člověk rozezná na první pohled (většinou s počtem vrcholů do pěti nebo šesti), vyvine si žák zvláštní strategie k jejich rychlejšímu rozpoznání. Takovéto strategie lze pomocí specielních forem her cíleně trénovat, např. tím, že se neptáme na počet vrcholů, nýbrž na to, jestli je počet sudý nebo lichý.

Obr. 5: Rozpoznávání karet se symboly



Obr. 6: Hra „Schnipp-Schnapp“

Úloha 3.2. Hra „Kdo si vzpomene?“
Materiál: Karty sady C, jako podpora případně i sady N.
Pravidla hry: Hrajte ve dvou a vezměte sadu C a karty zamíchejte. Jeden z vás vezme čtyři karty a položí je na stůl, zatímco druhý má zavřené oči. Ten na povel otevře oči a první začne pomalu počítat od 21 do 26. Poté se karty otočí a hráč si musí na karty vzpomenout a vyjmenovat počty vrcholů. Každá správně jmenovaná karta znamená bod.
Poznámky: Pro děti s malými zkušenostmi s mnohoúhelníky je těžké v krátké době rozeznat rozdílné mnohoúhelníky. Během krátké doby se počty vrcholů spíše odhadují než počítají. Podporu může přinést sada N. Po několika kolech je odhad snazší a častěji také správný.

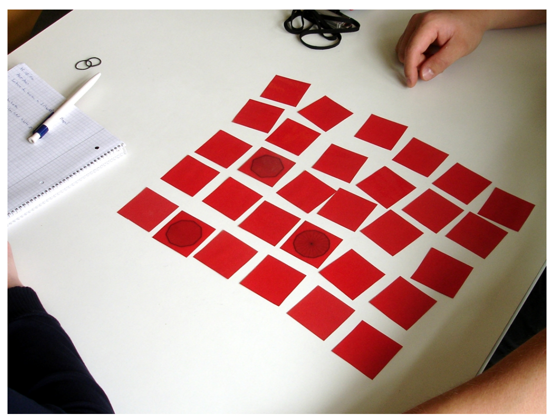
OKRUH ÚLOH 4: MNOHOÚHELNÍKOVÉ PEXESO

Karty leží obrázkem dolů. Otočí-li hráč dvě stejné karty, může si dvojici ponechat. Toto pravidlo je východisko pro mnoho rozdílných variant. Rozšířené pravidlo dovoluje, že „dvě k sobě patřící karty“ tvoří povolenou dvojici. Co „povolená“ v konkrétně znamená, může být určeno, např. tak, že karty zobrazují stejné mnohoúhelníky. Případně může být toto pravidlo určeno dětmi. Vlastní cíl je souhrn pravidel povolování, která popisují vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků nebo zachycují shodnosti různých pravidelných mnohoúhelníků. Dále je možné používat různé sady karet, např. tři nebo čtyři a místo dvojic jako povolené uznat i trojice nebo čtveřice.

Úloha 4.1. „Bodová paměť“
Materiál: Karty sady B a C.
Pravidla hry: Polož karty na stůl obrázky dolů. Zkus obrátit vždy dvě karty se stejným počtem vrcholů. Pokud najdeš dvojici, obdržíš tolik bodů, kolik je vrcholů. Zapiš je na papír. Vytáhni ještě jednou, pokud jsi našel správnou dvojici. Vyhrává ten, kdo má nejvíce bodů.

Úloha 4.2. „Memory 3“
Materiál: Karty sady A, B a C.
Pravidla hry: Vezmi sady karet A, B a C, zamíchej je a polož je na stůl obrázky dolů. Cíl této hry je, vybrat tři karty, které ukazují stejné mnohoúhelníky. První hráč vybere tři karty a ohlásí, co vidí. Zobrazují-li všechny tři karty stejný mnohoúhelník, hráč je vyhrál a smí vybrat další tři karty. Nejsou-li karty stejné, přijde na řadu druhý hráč. Vyhrává hráč s nejvíce kartami.
Poznámky: Hra je jednodušší, pokud se karty uspořádají do čtverce. Tak je snadnější si tolik pozic zapamatovat. Oproti klasickém Memory (Pexeso) trvá déle než člověk vyhraje první karty.

Obr. 7: Memory s kartami se symboly


Obr. 8: Memory 3

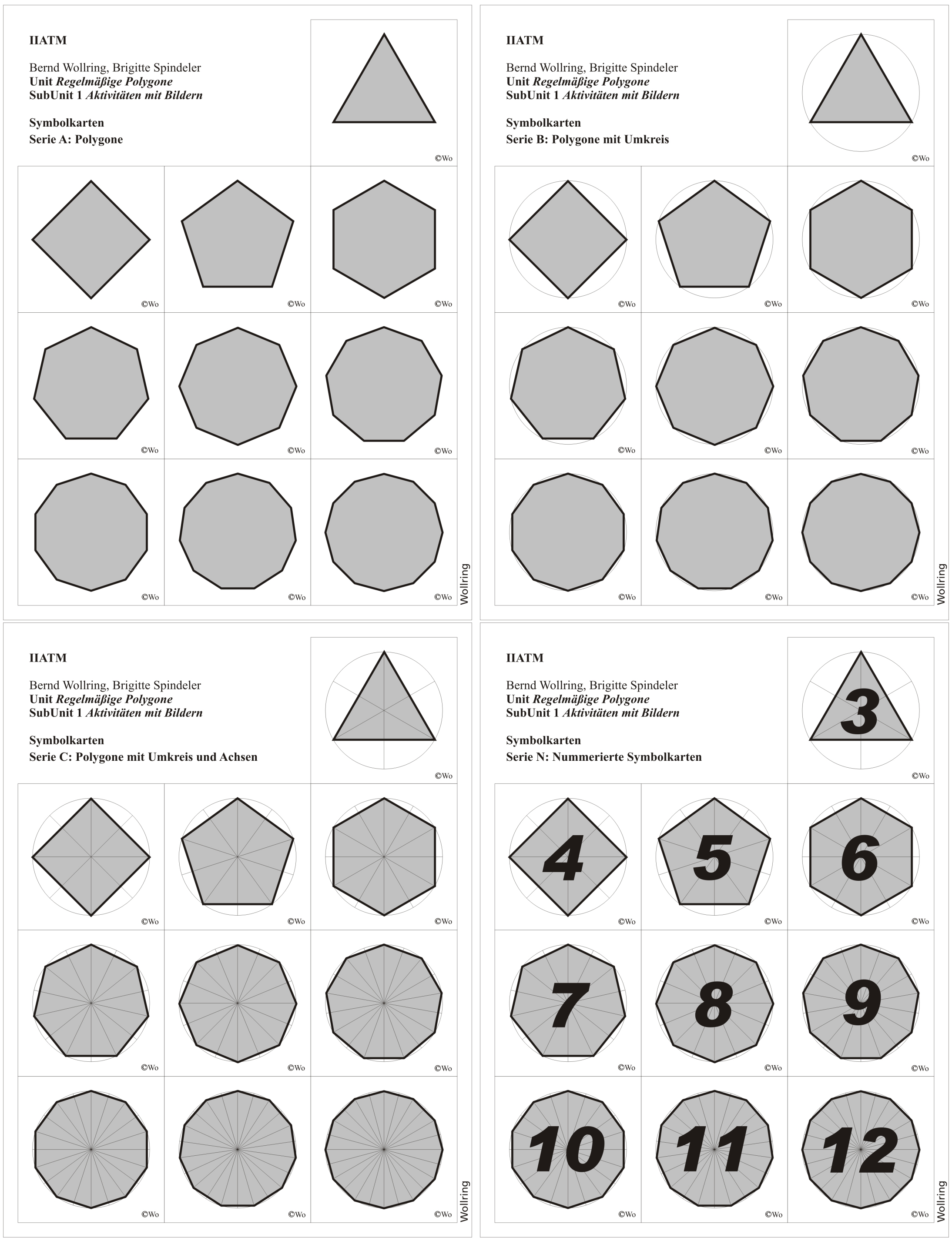
ZÁVĚR

Aktivity s kartami se symboly jsou náročné a produktivní úlohy, nejen pro žáky ve věku základní školy, nýbrž i pro starší žáky a dospělé. Tak jak je zde předvedeno, týkají se pouze pravidelných mnohoúhelníků v abstraktní podobě. Další, v projektu IIATM představené aktivity s obrazy, se týkají následně i úloh s fotografiemi reálních předmětů. Tím se teprve naplní požadavky vytvářet souvislosti a zobecňovat. a potom jsou matematické aktivity tak integrovány, jak to je v základní škole smysluplné: Matematika je tak propojena s rozvojem řeči a komunikativních dovedností na jedné straně a s odborným výkladem vztaženým k živému světu na straně druhé.

LITERATURA

[1] Spindeler, B., Wollring B. Regular polygons. In *Creative teaching in mathematics*. 1st edition. Praha : Charles University in Prague, Faculty of Education, s. 35–97. ISBN 80-7290-280-6.

PŘÍLOHY



KONSTRUKCE MNOHOÚHELNÍKŮ SE SHODNÝMI VNITŘNÍMI ÚHLY[1]

JAROSLAV ZHOUF[2]

ÚVOD

V učebnicích a jiné školské literatuře se můžeme setkat většinou pouze s úlohou sestrojit nějaký pravidelný mnohoúhelník. V tomto příspěvku se pokusíme o malé zobecnění tohoto problému.

ZADÁNÍ ÚLOHY

Chceme konstruovat mnohoúhelníky se sudým počtem stran, které mají všechny vnitřní úhly shodné a které mají délky svých stran rovné patřičnému počtu po sobě jdoucích členů nějaké aritmetické posloupnosti.

Jelikož je možné prodloužit či zkrátit všechny strany mnohoúhelníku o stejnou délku a jeho úhly se tím nezmění, budeme uvažovat, že délky stran takového mnohoúhelníku jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Pak je možné opět strany zkrátit nebo prodloužit do původní délky.

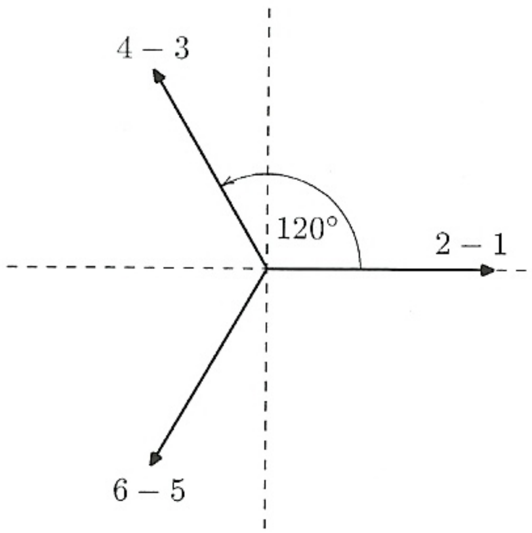
Ve složitější podobě byla zadána tato úloha na Mezinárodní matematické olympiádě v Japonsku v roce 1990 (viz [1]). Podrobněji o jejím řešení je možné se dočíst v [2]. Myšlenka řešení této složitější úlohy je použita i v úloze, kterou jsme si vytyčili v tomto článku.

KONSTRUKCE KONKRÉTNÍCH MNOHOÚHELNÍKŮ

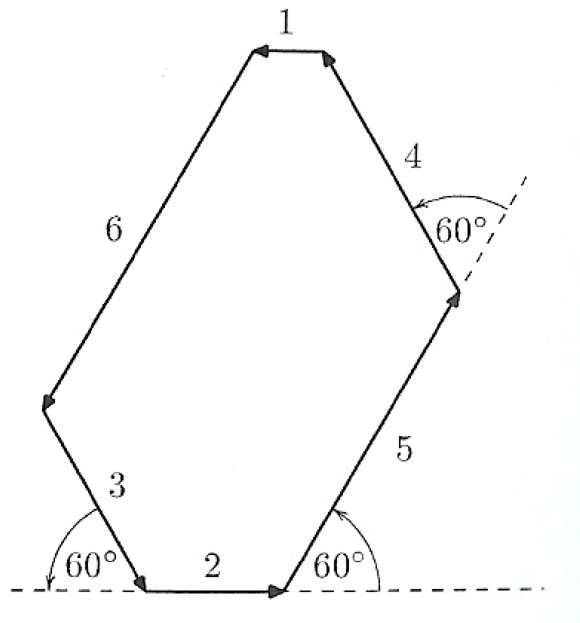
Čtyřúhelník požadovaných vlastností sestrojit nelze, neboť čtyřúhelníky se všemi pravými úhly jsou buď čtverec nebo obdélník, ale ty nemohou mit všechny strany vzájemně různě dlouhé. Šestiúhelník požadovaných vlastností existuje. Na obr. 1 jsou znázorněny směry stran šestiúhelníku a k nim jsou připsány délky příslušných jeho stran. Ve směru šipky se vždy nanáší vektor strany se sudou délkou a v opačném směru vektor strany s lichou délkou. Na obr. 2 je pak zakreslen hledaný šestiúhelník.

[1] Příspěvek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2] *PedF UK, Praha, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*



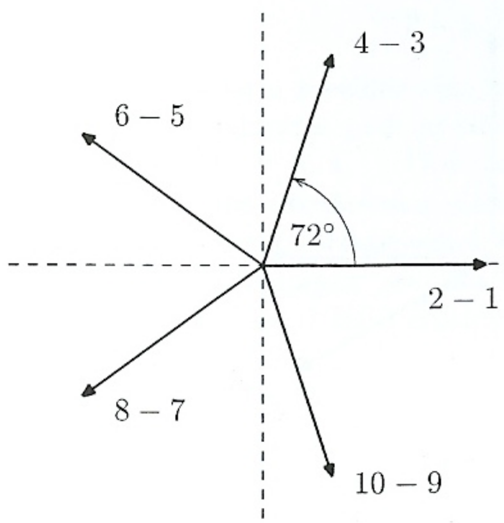
Obr. 1



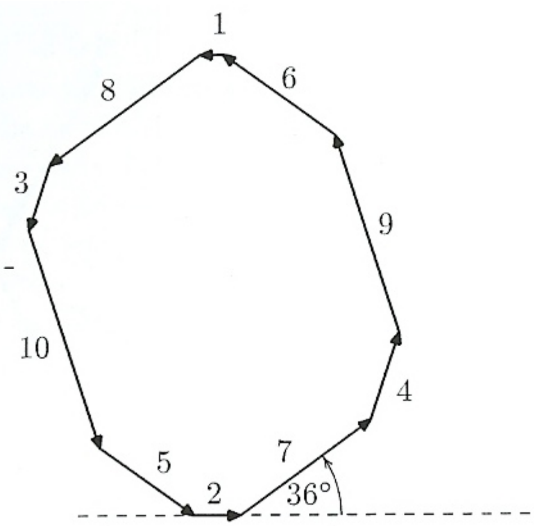
Obr. 2

Další typ takového šestiúhelníku je ten, že k jednotlivým šipkám na obr. 1 připíšeme hodnoty 3-1, 4-2, 6-3. Konstrukce je už pak stejná jako na obr. 2.

Osmiúhelník požadovaných vlastností, který by se konstruoval stejně, jak je uvedeno v řešení úlohy z MMO, sestrojit nelze. Zdůvodnění tohoto tvrzení nechávám na čtenáři.



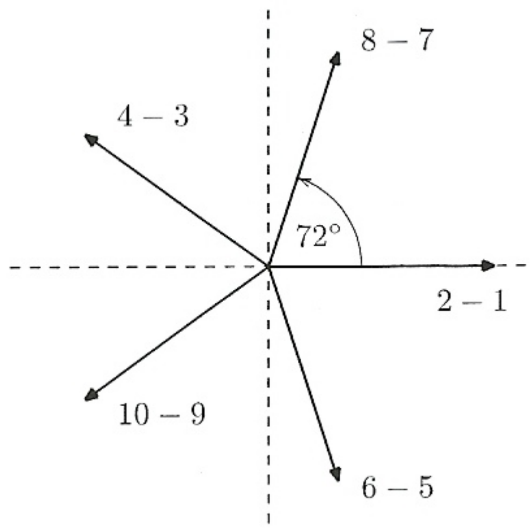
Obr. 3



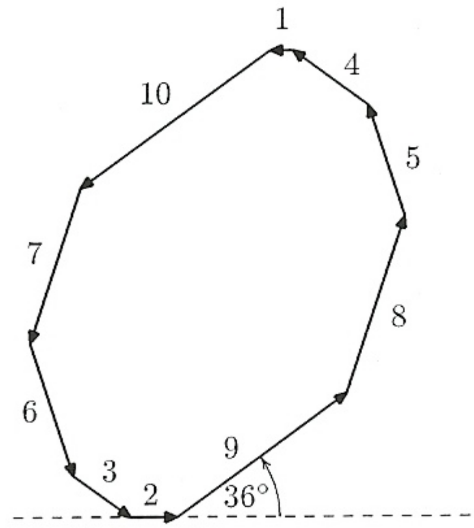
Obr. 4

Konstrukce desetiúhelníku požadovaných vlastností je patrná z obr. 3 a obr. 4. Druhá taková konstrukce je patrná z obr. 5 a obr. 6. Celkem lze setrojit dvanáct různých desetiúhelníků požadovaných vlastností.

Konstrukce dvanáctiúhelníku požadovaných vlastností je patrná z obr. 7 a obr. 8. Celkem lze setrojit 240 různých dvanáctiúhelníků požadovaných vlastností.

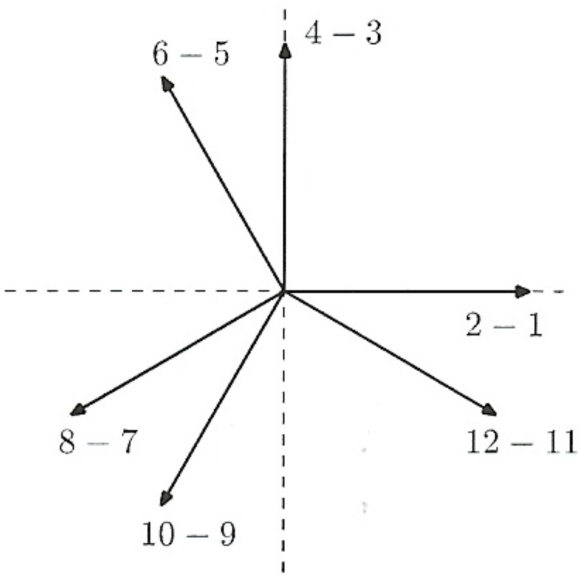


Obr. 5

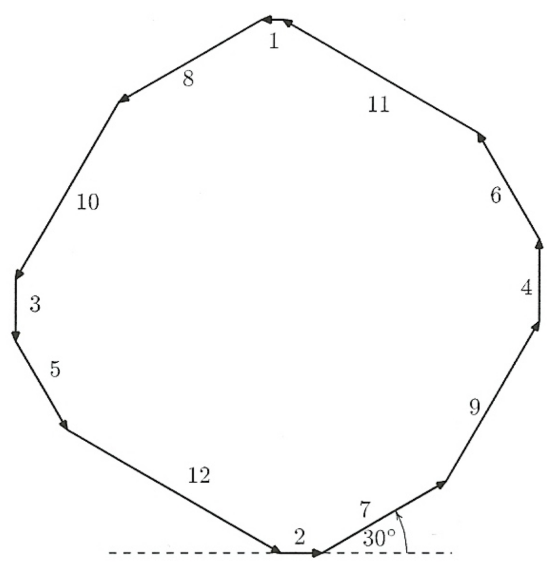


Obr. 6

Konstrukce dalších mnohoúhelníků požadovaných vlastností by se prováděla obdobně, jak je uvedeno na těchto několika příkladech.



Obr. 7



Obr. 8

ZÁVĚR

Ukázali jsme si zde jedno zobecnění školního problému. Jistě nás při této příležitosti napadne celá řada dalších problémů s ním souvisejících, přinejmenším jak by to bylo v případě mnohúhelníků s lichým počtem stran. Zajímavý by byl i duální problém: sestrojit mnohoúhelník se shodnými stranami, velikosti jehož vnitřních úhlů tvoří nějakou aritmetickou posloupnost.

LITERATURA

[1] Boček, L. a kol. *39. ročník matematické olympiády na středních školách (1989/90)*. SPN, Praha, 1992.

[2] Zhouf, J. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů v úlohách MMO. In Zhouf, J. (ed.), *MAKOS 04, Sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty v matematice*, JČMF a UTB, Zlín, 2005.

Další příspěvky

ZMĚNIT VÝUKU MATEMATIKY – VYŽADOVAT POROZUMĚNÍ[1]

PETER BAPTIST, VOLKER ULM[2]

Dosud převládající způsob vyučování matematice má charakter poučovací, vzdělávání žáků se redukuje na předávání základních vědomostí a jistých znalostí. „Vědomosti jsou učitelem servírovány, žákem absorbovány, stráveny a zapomenuty," říká až příliš optimisticky o běžném vyučovacím procesu H. Klippert. S největší pravděpodobností totiž ke „strávení" poznatků často vůbec nedojde. Vědomosti jsou učitelem žákům pouze přeloženy (tzn. podle osnov a vydaných standardů) a žáci často, aniž by si nové poznatky uložili v paměti, je opět rychle zapomenou.

DILEMA VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Rozpor ve výuce spočívá v předkládání látky žákům učitelem. Jde o dobře míněnou, pracovně náročnou činnost, ale většinou bez očekávaného výsledku. Vyučující matematiky plánuje, organizuje, vysvětluje, klade otázky, opravuje, člení, zobrazuje, zadává problémy, řeší problémy, přebírá zodpovědnost atd.

Učitelé, kteří se nemohou spolehnout na žáky a jejich přístup k učivu, se nakonec cítí zcela osamoceni a celkově přetíženi. Současně vyučování, kde výhradní vůdčí postavou je učitel, odepírá žákům aktivní zapojení, schopnost argumentace, kooperativní spolupráce i schopnost pracovat samostatně.

Protože učení je aktivní, konstruktivní proces orientovaný na vytyčený cíl, musíme se co nejrychleji rozloučit s poučovacím typem vyučovacích hodin. Škola musí změnit svůj trend a přejít z pozice poučovací na pozici aktivního učení.

Obzvláště kritickou se stane situace, kdy před sebou stále vidíme kritéria, podle kterých je posuzována kvalita vyučování. Stále ještě platí: Jestliže dostatečně velký počet úloh známého typu je vyřešen dostatečně velkým počtem žáků, pak se výuka považuje za úspěšnou. Pouze zřídka zajímá někoho, jak smysluplné a stabilní jsou nové vědomosti žáků, jak je navázali na dříve získané poznatky, s jakou suverenitou umí využívat nových metod, umí používat pojmy a pravidla při praktickém řešení úloh a s jakou flexibilitou jsou schopni naučené poznatky používat při řešení skutečných problémových úloh.

[1] Článek z německého originálu „Mathematikunterricht verändern – Verständnis fördern", *Praxis Schule 5–10*, sešit 4, 2002, přeložil Zdeněk Šíma a upravila Petra Švrčková.

[2] *Universität Bayreuth, Pädagogische Hochschule Karlsruhe, DE, Peter.Baptist@uni-bayreuth.de, ulm@ph-karlsruhe.de*

Jak se dá nutných změn ve výuce dosáhnout? Určitě ne tak, že zakořeněný způsob výuky paušálně odsoudíme a budeme vyžadovat zcela jiný druh. V tomto případě bychom mohli souhlasit s výrokem Hartmuta von Hentigs: „Kroky mohou být malé, jestliže jsou ideje dostatečně velké.“ Růstu efektivity vyučování samozřejmě ale nelze dosáhnout či ovlivnit jen pomocí hesel a senzačních nadpisů v článcích časopisů. Musí se to stát společným dílem všech, co mají co do činění s životem školy. Jde o společnou, konkrétní a detailní práci všech učitelů a institucí. Jen takto může změna proběhnout.

Články předloženého časopisu *Praxis Schule 5–10* by měly mít v tomto směru jeden z hlavních významů pro učitele, protože zde budou postupně seznamováni s výsledky dosaženými v modelových situacích. Tyto výsledky by měly plnit funkci podnětů a popudů k vlastní práci každého učitele. Garantem je komise věnující se výzkumu (BLK) – „Růst efektivity matematicko-přírodovědeckého vyučování“.

VYŽADOVAT SCHOPNOST SAMOSTATNĚ ŘEŠIT PROBLÉMY

Použijme několik základních myšlenek:

Nejlepší způsob, jak se učit, je v případě potřeby se zeptat, a pak to sám udělat.

Nejlepší způsob jak vyučovat, je přimět studenty, aby se ptali.

Nepřednášejte fakta – veďte k aktivitě.

Tento apel amerického matematika Paula Halmose se neobrací proti vyučování vedenému učitelem, ale proti vyučování, které odsuzuje žáky k pasivitě. Vyučování, kde náročná a komplexní problematika je prezentována krátkými otázkami a primitivními odpověďmi, a žákům jsou předávány nové poznatky po částech, omezuje flexibilitu, samostatnost žáků, a tím znemožňuje individuální výstavbu propojených vědomostí.

Důraz se klade na procesové řešení problémů, a tím schopnost samostatně řešit,zkoumat, pracovat. Tyto pozitivní formulace se často anulují díky skutečnosti, že nastolené problémové situace řešíme rychle s užitím hotových postupů nebo zpracovaných vzorových řešení. Zřídka dáváme žákům možnost vyzkoušet si svobodně vlastní cestu a propracovat se k řešení.

Krátkozrakou argumentací „musíme předepsanou látku stačit probrat“, se blokují různé smysluplné návrhy. Ale redukce učebních plánů mnoho nepomůže, když se nezmění způsob a forma práce v hodině. Zahájit musíme změnou postupu v hodině, to je nejdůležitější moment. Vyučovací proces se nesmí skládat jen z poučování a nacvičování dovedností na základě rutiny, nýbrž žáci musí co nejčastěji dostat v hodině možnost zabývat se úlohami a problémy tak, aby je samy úlohy přivedly k požadovaným cílům hodiny. To samozřejmě není žádný kardinálně nový poznatek, ale měli bychom si stále připomínat fakt, že „Opravdová hodnota vyučovacího procesu nespočívá v množství probrané látky, nýbrž ve skutečnosti, jak se k cílům dostaneme“.

Důležitější než kompletnost vědomostí, které jsou přiměřené vydaným učebním osnovám (jež se ale nepodaří většinou zcela splnit) a množství jednotlivých faktů, je přístup k pochopení, porozumění, což je charakteristický způsob myšlení a řešení problémových situací v matematice. K dosažení této úrovně musíme volit věrohodné, reprezentativní příklady a pečlivě a přesvědčivě je zpracovávat.

Jisté podněty pro tuto činnost nám dává tato úloha: *Představ si, že existují jen mince 3 Eura a 5 Euro, dále 3 centy a 5 centů. Stačilo by to k zaplacení různých nákupů?*

Průběh vyučovací hodiny by si bylo možné představit následovně:

- Nejprve seznamování se s úlohou, nesystematické zkoušení
- Navazuje systematické zkoušení. Po podrobném a dokonalém zkoušení se dostavuje domněnka: Bude to stačit!
- Další způsob postupu určí jistou strategii: redukce podmínek. Aplikací na vytyčený úkol se nabízí otázka: Je možné pomocí 3 a 5 euro mincí zaplatit každý celočíselný obnos? V jakém případě dostaneme peníze nazpět?
- Další redukce podmínek: Dejme tomu, že skutečně máme k dispozici jen jeden druh uvedených mincí. Jaké pak můžeme zaplatit obnosy? Opakované počítání a dokonce dělení se zbytkem. Jaké zbytky můžeme dostat?
- Konečné řešení následuje po nejvhodnějším rozdělování. Přitom se ukazuje, že s uvedenými dvěma druhy centů lze zaplatit každý obnos v centech, když lze pomocí euro mincí zaplatit každý celočíselný obnos.

Bezprostředně jsme u tématu dělitelnost, dospěli jsme k všeobecně platnému poznání a procvičujeme „zcela mimochodem“ současně zručnost v počítání. Vhodné, potřebné poznatky pro řešení nebudou prezentovány, nýbrž musí být postupně žáky vlastní úvahou odhaleny. Ve středu pozornosti je situace, která přetrvá v průběhu celého problému řešení. Pro další rozvinutí diskuse se nabízejí otázky:

- Je diskutovaný výběr mincí praktický?
- Stačily by výhradně mince 3 a 5 centů?
- Porovnej s jinými měnami (např. Švýcarsko, USA)
- Jaká jsou možná kritéria ovlivňující volbu mincí?

Tento příklad ukazuje, že k podpoře samostatného myšlení a samostatné intenzivní práce s odpovídajícími postoji žáků k úloze se nic podstatného neudělá. Výrazně však souvisí úspěch s povzbudivým klimatem v hodině. Jako opěrné body pro odpovídající koncepci vyučování mohou zhruba sloužit následující aspekty:

- Problémy nejen zadávat, ale rozvíjet je z kontextů, vyprodukovat je, aktivovat.
- Dávat možnosti k volnému experimentování a pobízet k vyslovování domněnek.
- Pomoc při hledání řešení poskytovat co nejmenší, dávat návody otevřené, méně napovídat a více podporovat samostatnou práci žáků.

- Pečovat o správné učební klima, být zdrženliví pokud jde o hodnocení výkonu žáků, odbourávat nesmělost v případě netradičních řešení.
- Nastolovat vědomě heuristické strategie a při odpovídajících situacích mluvit o myšlení, vyjadřování, zobrazování, vybavování, zapomínání, chybování a cvičení.

NETRADIČNÍ ŘEŠENÍ ÚLOH

Při změnách v učení a učení se myslí člověk předně na skutečnost, jak zavést nové obsahy učiva do školní praxe. Toto přání potlačuje ovšem vlastní problémovou situaci při vyučování. Kvalita vyučování není v první řadě závislá na učební látce, vyučovaném učivu, nýbrž na metodě a formě. Důležitější než nové obsahy učiva jsou ty změny vyučování, které pomohou žákům k větší samostatnosti při řešení úloh. Již malé změny v běžném vyučování mohou zahájit naplňování cílů, jichž chceme dosáhnout. Zaměřit bychom se měli na porozumění a pochopení problematiky. Jak již bylo naznačeno, to předpokládá změnu ve způsobu zacházení s úlohami.

Pouhé řešení úloh by mělo být nahrazeno zaměstnávání se úlohami. Ve vyučování přitom mohou být rozlišovány následující fáze, přičemž mezi jednotlivými fázemi existuje poměrně silná interakce:

- Fáze orientační: cílem je úloze porozumět, přezkoušet, zda jsou zadány veškeré potřebné údaje.
- Tvůrčí fáze zpracování: doplnit eventuální chybějící údaje, posoudit obdobné úlohy, vypracovat vůdčí ideu a stanovit strategii postupu, rozpracovat zvolenou ideu řešení
- Přímá fáze řešení: realizovat ideu řešení a najít výsledné řešení.
- Vyhodnocovací fáze: promyslet celý proces řešení situace. Uvědomit si jaké nové poznatky úloha přinesla. Jednalo se o známou strategii řešení? Existují další možnosti řešení?
- Fáze rozšíření a propojení: propojit nové zkušenosti s dříve poznanými podobnými úlohami a uložit si fakta v paměti. Provést zobecnění, vyzkoušet různé obměny úlohy.

V rámci posledních dvou fází musí být žáci vedeni tak, aby si uvědomili význam poznaného, přemýšleli o tom a svými slovy dokázali jev popsat, vyjádřit. Tento proces samozřejmě nevznikne sám od sebe. Je na učiteli, aby vhodnými otázkami tento proces nastartoval. V této souvislosti by se mohlo jednat např. o otázky:

- Co bylo jádrem problému v úloze?
- Jakou strategii jsme při řešení úlohy sledovali?
- Jak se dá shrnout dosažený výsledek řešení?
- Jaký význam a jaké důsledky má náš poznatek?

- Jak se dá zařadit nový poznatek mezi dříve nabyté vědomosti?
- Co bychom si měli pamatovat?
- Existují alternativní způsoby řešení?
- Jak lze zadání úlohy rozšířit, zobecnit, obměnit?

OBMĚNY ÚLOH

Osvědčenou strategií k získání nových matematických poznatků je vycházet ze strategií známých, ty obměňovat a přezkušovat, zda se nalézají v nové situaci zajímavé aspekty, analogie.

Příklad:

1. Pozoruj obdélníky se stálým obvodem (např. $o = 18$ cm). Jak souvisí obsah obdélníka s rozměry obdélníka? Existuje obdélník s maximálním obsahem?

2. Obměňuj své úvahy úlohy č. 1.

Možnosti obměn jsou rozličné a hojné:

– Existuje při stálém obvodu obdélníka obdélník s nejmenším možným obsahem?

– Jak souvisí délka úhlopříčky obdélníka s rozměry obdélníka?

– Zkoumej obdélníky téhož obsahu – jak souvisí obvod s obsahem?

– Místo obdélníků můžeme takto zkoumat trojúhelníky, rovnoběžníky, n-úhelníky, kvádry, jehlany, kužele, válce a další.

Po důkladném zpracování předběžné úlohy, lze jednotlivé nosné pojmy dané úlohy obměňovat. V tomto směru se vytváří nenásilnou formou další rozmanité problémové situace, které v podstatě „vyrůstají“ z původních úloh, a tím nás vedou dál.

Jestliže žáci poznávají úlohu z více stran, pronikají do podstaty, objasňují si rozličné pohledy na problém, má to vliv na rozvoj jejich vědomí, učí se matematicky uvažovat a zacházet kreativně s matematikou.

VYUČOVÁNÍ PROBLÉMOVĚ ORIENTOVANÉ

Matematické věty a algoritmy mají původ v matematickém resp. v matematicky srozumitelném formulování problémů. Takovéto problémy se nevyskytují ve výzkumu a v praxi izolovaně, ale vždy v problémových kontextech, tzn. v situacích souborných. Také při výuce matematiky bychom se měli proto více zaměřit na ucelené problémy.

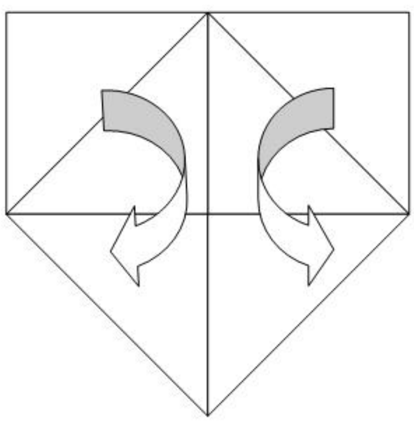
V žádném případě nesmí stát v centru zájmu vyučovacího procesu „hotová“ matematika, nýbrž problémy, které vedou k rozvoji matematiky. Každá teorie vychází z praxe právě tak, jako skutečnost, že ze strany teorie mohou být předkládány nová fakta praxi. Tato platná oboustranná transpozice se může být využita i při vyučování.

PŘÍKLAD

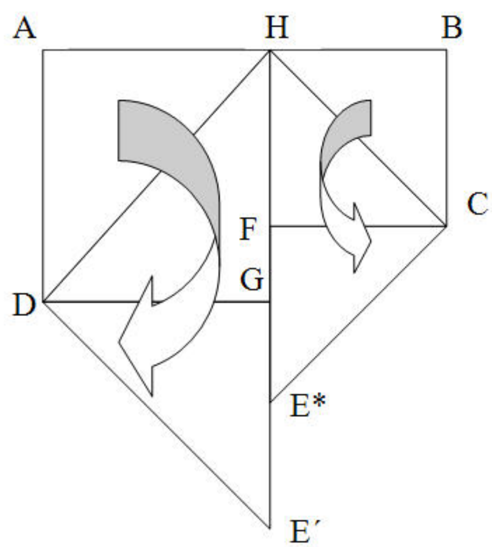
Pythagorova věta – po stopách Alexise – Claude Clairanta Pythagorova věta má dlouhou tradici ve školní praxi. V dnešní době se zachází s touto „zlatou měřicí" (citováno J. Keplerem (1571–1630)) většinou pouze v rámci podobnostní geometrie. Díky tomu zůstává ukryta skutečnost, že se jedná o větu o plochách. Proto by měl být volen jiný přístup, který by posunul do středu pozornosti přeměnu obsahů, a tím se přiblížil k učebnici geometrie orientované na didaktiku francouzského matematika Alexise Claude Clairanta (1713–1765) kde nalezneme: Ze dvou čtverců se má zhotovit čtverec o stejném obsahu.

Sledujme následující strategii: pozoruj nejprve speciální případ. Jsou dány dva shodné čtverce. Tyto rozložíme pomocí úhlopříčky na shodné trojúhelníky. Vhodným složením získáme nový čtverec o straně $a\sqrt{2}$.

Nastává problém zobecnění této ideje. Zvolíme dva různé čtverce. Pokračujeme-li v tomto duchu, využitím metody použité pro speciální případ, získáme obrazec, který není uzavřen. Musíme proto naši strategii modifikovat.



Obr. 1



Obr. 2

K dosažení uzavřeného obrazce analogického speciálního případu, musíme se pokusit na AB najít bod H tak, že při otočení trojúhelníku DHA resp. HCB o $90°$ kolem D resp. C (proti směru otáčení hodinových ručiček) dojde na prodloužené společné čtvercové straně ke splynutí bodu E' a $E*$.

Popsaný přístup k Pythagorově větě, který zde může být pouze stručně nastíněn, požaduje právě experimentální matematika. Nabízí se využít dynamické geometrie (software Geonext) a multimediální studijní prostředí lze použít u této tematiky obzvlášť účinně. „Dynamický Pythagoras" je vhodný k demonstraci při vyučování, k individuální práci a k samostatnému opakování.

PROGRAM BLK

Změny při učení a učení se jsou nutné. V žádném případě nemohou takové změny přicházet nařízením shora, nýbrž musí se rozvíjet v každé jednotlivé škole jak u učitelů, tak žáků. Program BLK „Růst efektivity matematicko – přírodovědného vyučování" je krokem ve správném směru.

Na tomto modelu se podílí 180 škol, které jsou rozčleněny do 30 regionů. Program započal v roce 1998/99 a je rozložen na pět let. Cílem práce škol je rozvinout matematicko - přírodovědné vyučování. V duchu rozvoje „zevnitř – ven" je očekávána vlastní iniciativa a vlastní odpovědnost škol, ale zároveň je stanovena povinnost intenzivní komunikace a kooperace s dalšími účastníky programu.

Odborně didaktická a organizační péče je zajištěna zřizovatelem programu, kterými jsou Institut pedagogiky na přírodovědecké fakultě v Kielu, Katedra matematiky a didaktiky na Univerzitě v Bayreuthu a Státní institut školní pedagogiky a výzkumu vzdělání v Mnichově. Pro možnou soustavnou komunikaci 180 škol zapojených do programu byla na serveru Univerzity v Bayreuthu zřízena adresa `http://blk.mat.uni-bayreuth.de`, která je přístupná i veřejnosti a najdete zde mimo jiné i mnoho materiálů pro matematicko - přírodovědné vyučování. Návštěva této adresy se vyplatí (potvrzuje i příspěvek Wilhelma Rittera s. 10).

V rámci snahy o rozčlenění modelových pokusů a jejich strukturalizaci bylo formulováno 11 „modulů" jako body hlavního významu. Jednotlivé školy si zvolily několik z těchto modulů a vzaly je jako hlavní těžiště své činnosti.

Zde je jejich stručný přehled s několika důležitými hesly:

- Další rozvoj kultury úloh – otevřené zadávání otázek, smysluplné kontexty úloh, úlohy s možnostmi rozličného přístupu při řešení problémů.
- Přírodovědecká práce – otázky vztahující se k experimentování, vypracovat přírodovědecké pracovní postupy, experimentální práce v hodině matematiky.
- Učit se z chyb – chyby považovat za příležitost k učení, rozloučit se se situacemi zaměřenými jen na učení či jen na zjišťování vědomostí.
- Zajištění základních vědomostí – učit se s porozuměním podle individuálních schopností – výstavba matematicko – přírodovědeckého poznání založeném na pochopení podstaty a osvojení si základních vědomostí. Diferencované, individuální bádání založené na různých úrovních pochopení.
- Růst kompetencí – celkové učení, propojení dřívějšího aktuálního a budoucího objemu učiva, systematické opakování, výstavba vědomostní sítě.
- Zprůchodnit hranice mezi předměty – v práci využívat mezipředmětové vazby, na jednotlivé jevy a problémy pohlížet z různých odborných perspektiv a rozdíly ve výkonu odstraňovat jak vhodnými otázkami, tak příklady použití nebo pracovními formami.

- Kooperace žáků – učit v sociálním prostředí, vybudovat sociální kompetence, vyžadovat vzájemnou komunikaci mezi žáky.
- Posílit zodpovědnost za vlastní učení – zajistit volný prostor pro zodpovědnost za vlastní, samostatně organizované učení.
- Zkoušení, shromažďování a potvrzování růstu kompetencí – další rozvoj úloh pro zkoušení, odborné chápání, flexibilní použití vědomostí, stejně důležité je také evidovat individuální pokroky v učení.
- Zajištění kvality a její rozvoj – interní školní evidence výkonu žáků, uvědomění si kvality přesahující rámec školy.

Tato modulární struktura redukuje průběh dějů na jednotlivých školách na přehledné oblasti. Zároveň umožňuje zúčastněným učitelům v dílčích oblastech jejich práce docílit inovací a pokroků, aniž by museli ihned koncept vyučování měnit, a tím ohrozit svoji rutinní jistotu v jednání.

Dlouhodobý cíl programu BLK je důsledná změna vyučovacího procesu na širokém základě. Ideje, koncepty a poznatky nemají zůstat jen izolovány na školách podílejících se na modelových pokusech, nýbrž mají působit plošně i na další školy.

Doufáme a z toho též vycházíme, že těžištěm problematiky předloženého sešitu Praxis Schule 5 - 10 je být přínosem všem. Jednotlivé články ukazují možné cesty, jak změny při učení a učení se, mohou ovlivnit vyučování a jak se popsané Moduly programu BLK dají přeměnit konkrétně při výuce matematiky, kdy je důraz všeobecně kladen na činorodou práci.

Stále však musíme mít na mysli základní skutečnost formulovanou Hilbertem Meyerem: „Rozvoj školy není samoúčelný. Jedinou oprávněností je skutečnost, že učení, učení se a život na škole se snažíme učinit laskavější, a tak úspěšnější.“

LITERATURA

[1] Baptist. P. *Gedanken zum Mathematikunterricht*. Berlin, 2000.

[2] Baptist. P. *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS*. Berlin, 2000.

[3] Baptist, P. *Pythagoras und kei Ende?* Stuttgart, 1997.

[4] Baptist, P. *Veränderungen im Lehren und Lernen.* München, 2000.

[5] Polya, G. *Schule des Denkens.* München, 1980.

[6] Schupp, H. *Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Zentraler BLK-Modellversuch-Server.

[7] Winter, H. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht.* Braunschweig, 1989.

[8] Wittenberg, A. *Bildung und Mathematik*. Stuttgart, 1990.

PROCESNÍ JAZYK V GEOMETRII NA 1. STUPNI ZŠ[1]

MILAN HEJNÝ, DARINA JIROTKOVÁ[2]

Vyučuje: Milan Hejný
Místo: ZŠ Chlupova (ředitelka Dr. Blanka Janovská), 5. B tř. (učitelka Michaela Patočková)
Čas: čtvrtek 2.2.2006 druhá vyučovací hodina 8.55–9.40.
Organizace práce: Žáci sedí po 4 kolem jednoho stolu
Materiál: Na každém stole je asi 10 krychlí
Poznámka: M. Hejný ve třídě učí geometrii již druhým rokem, jednou týdně.

Přítomno bylo 13 učitelů. Po hodině proběhla ve sborovně diskuse. Před hodinou dostali účastníci krátkou informaci o obsahu a zaměření hodiny.

Úvodem hodiny byli hosté – učitelé seznámeni jedním žákem se symbolikou zápisu konstrukce i plánu.

Symbolický zápis krychlových těles (dále KT):

□ polož krychli	↑ jdi dozadu
← jdi na západ	↓ jdi dopředu
→ jdi na východ	≡ jdi nahoru (po žebříku)

Poznámka: Znak pro pohyb „jdi dolů“ se nezavedl.
V průběhu hodiny se společně řeší následující úlohy.

ÚLOHA 1

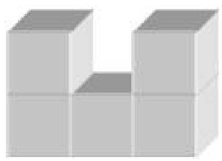
a) Nakresli plán KT daného konstrukcí □→□→□≡□←←□.
b) Zjisti, kolik krychlí má těleso v prvním podlaží, kolik ve druhém, kolik ve třetím.
c) Polož těleso tak, aby mělo všech 5 krychlí v 1. podlaží.
d) Zapiš toto těleso plánem.
e) Zapiš toto těleso konstrukcí.
f) Polož těleso tak, aby mělo aspoň jednu krychli ve 3. podlaží.
g) Zapiš toto těleso plánem.
h) Zapiš toto těleso konstrukcí.

Řešení.
a) Jedná se o krychlové těleso na obrázku 1a. Jeho plán je na obrázku 1b.

[1] Otevřená hodina v rámci konference Dva dny s matematikou. Diseminace výsledků výzkumu uskutečněného v rámci grantu GAČR 406/05/2444

[2] *PedF UK v Praze, milan.hejny@pedf.cuni.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

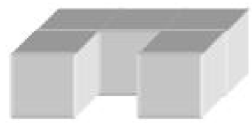
b) V prvním podlaží 3 krychle, ve druhém 2, ve třetím 0.
c) Řešení je na obrázku 1c.
e) Zápis konstrukce je následující: □↑□→□→□↓□
f) Těleso je nyní umístěno, jak ukazuje obrázek 1d.
g) Řešení je snadné.
h) Konstrukční zápis těles na obrázku 1d je následující: □←□↑□↑□→□



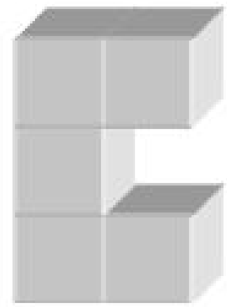
Obr. 1a

2	1	2

Obr. 1b



Obr. 1c



Obr. 1d

Po společném řešení úlohy každý žák dostal lístek s trojicí úloh podobné úloze 1. Jednu z nich volí podle vlastního uvážení. Kolegové měli možnost si přisednout k žákům. Byli požádáni, aby evidovali zajímavé jevy, ale do práce žáků nezasahovali.

ÚLOHA 2A (LEHKÁ)

a) Ze 3 krychlí postav těleso které lze položit tak, že má všechny krychle v prvním podlaží, ale i tak, že má aspoň jednu krychli ve druhém podlaží.
b) Zapiš obě polohy tělesa plánem.
c) Zapiš obě polohy tělesa konstrukcí.
d) Porovnej svoje řešení se spolužákem.

ÚLOHA 2B (STŘEDNĚ NÁROČNÁ)

a) Ze 4 krychlí postav těleso které má v každé své poloze vždy aspoň jednu krychli ve druhém podlaží. (Je takových těles více?)
b) Zapiš těleso plánem.
c) Zapiš těleso konstrukcí.
d) Porovnej svoje řešení se spolužákem.

ÚLOHA 2C (NÁROČNÁ)

a) Z 5 krychlí postav těleso které se nedá položit tak, aby mělo všechny krychle v 1. podlaží, ale dá se položit tak, že má aspoň jednu krychli ve 3. podlaží.
b) Zapiš těleso plánem.
c) Zapiš těleso konstrukcí.
d) Zjisti, kolik takových těles existuje.

e) Porovnej svoje řešení se spolužákem.

M. Hejný vyzval žáky, aby svá řešení předvedli kolegům učitelům. Ti se žáky diskutovali o případných chybách. Forma diskuse ze strany učitele je spíše tázání, předstírání nepochopení, údiv. Důležité je, nedávat žádné rady, neupozorňovat na chyby. K poznání chyby žáka přivést pouze vhodně volenou otázku nebo žádostí, aby se jiný žák k řešení vyjádřil.

Nakonec žáci předvedli na tabuli řešení jednotlivých úloh. Diskuse se od stolků přenesla na tabuli.

Následující seznam úloh byl připraven pro vyplnění volného času eventuelně pro zájemce za domácí úkol.

Úloha 3. Z n krychlí postav těleso, které má v každé poloze aspoň jednu krychli ve 2. podlaží a žádnou krychli ve 3. podlaží. Řeš pro $n = 5$, 6, 7, 8, 9, 10.

Úloha 4A. a) Z kolika nejméně krychlí se dá postavit těleso, které v každé své poloze má aspoň jednu krychli ve 2. podlaží? b) Kolik takových krychlí existuje?

Úloha 4B. a) Z kolika nejméně krychlí se dá postavit těleso, které v každé své poloze má aspoň jednu krychli ve 2. podlaží a v jedné poloze má krychli i ve 3. podlaží? b) Kolik takových krychlí existuje?

Úloha 4C. a) Z kolika nejméně krychlí se dá postavit těleso, které v každé své poloze má aspoň jednu krychli ve 3. podlaží? b) Kolik takových krychlí existuje?

Úloha 5A. a) Ze 7 krychlí postav těleso, které v žádné své poloze nemá krychli ve 3. podlaží. b) Kolik takových těles existuje?

Úloha 5B. a) Ze 6 krychlí postav těleso, které v žádné své poloze nemá krychli ve 3. podlaží. b) Kolik takových těles existuje?

Úloha 5C. a) Ze 25 krychlí postav těleso, které v žádné své poloze nemá krychli ve 4. podlaží. b) Kolik takových těles existuje?

Úloha 6A. Ze 4 krychlí postav těleso, které má ve 3. podlaží dvě krychle a jehož konstrukci lze zapsat s použitím znaků $\rightarrow\rightarrow\equiv$.

Úloha 6B. Kolik různých těles se dá postavit z 5 krychlí tak, že konstrukce tělesa je zapsána vždy pomocí čtyř pohybových znaků: $\rightarrow\rightarrow\uparrow\equiv$

Úloha 6C. Kolik různých těles se dá postavit ze 6 krychlí tak, že konstrukce tělesa je zapsána vždy pomocí šesti pohybových znaků: $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\equiv$

Úloha 7A. Pomocí konstrukce zapište těleso dané plánem a) A, b) B, c) C.

Úloha 7B. Pomocí konstrukce zapište těleso dané plánem a) C, b) D, c) E.

Úloha 7C. Bez krychlového modelu konstrukcí zapište těleso dané plánem a) D, b) E.

1		
1		
1	1,2	

A

1,2	1	
1		
1,2		

B

1-3	
1	
1,2	

C

1		1-4
1-3		1
1	1	1

D

1-3	1,3	1-3
1,3		1,3
1-3	1,3	1-3

E

NETRADIČNÍ ÚLOHY V 1. ROČNÍKU[1]

JANA KRATOCHVÍLOVÁ-SLEZÁKOVÁ[2]

Učí Jana Slezáková-Kratochvílová.
Místo: ZŠ s rozšířenou výukou Vv, Vodičkova 22, Praha 1 (ředitelka PaedDr. Jana Králová), 1. B třída (učitelka Mgr. Klára Nejedlá) – 18 žáků; Kratochvílová ve třídě učí jednou týdně od počátku školního roku, s paní učitelkou spolupracuje již druhým rokem, v minulém školním roce učila též jednou týdně v 5. třídě u této paní učitelky.
Čas: čtvrtek 2.2.2006, druhá vyučovací hodina 8.55–9.40.

Přítomno bylo 5 učitelů. Po hodině proběhla diskuse v hudebně školy a před hodinou krátká informace pro učitele o obsahu a zaměření hodiny.

Žáci seděli v lavicích uspořádaných do tvaru písmene U.
Hlavní cíle hodiny: Budování procesuálních představ čísla u žáka, rozvoj schopnosti evidence a rozvoj prostorové představivosti.

Náplň hodiny je rozdělena do tří částí, z nichž každá je stručně popsána úlohami připravenými pro žáky.

1. TLESKÁNÍ (T) A KROKOVÁNÍ (K)

A. Nejdříve učitel předvádí a žáci ústně evidují počty tlesknutí a kroků.
1. 3T, 2. 2K, 3. 4T, 4. 5K, 5. 2K+1T

B. Žáci evidují do tabulky:
1. 3T+1K, 2. 5T+5K, 3. 1K+2T, 4. 7T+2K. 5. 3K+1T

Tlesknutí					
Kroky					

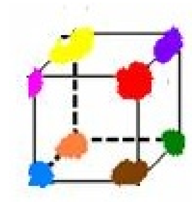
[1]Otevřená hodina v rámci konference Dva dny s matematikou. Diseminace výsledků výzkumu uskutečněného v rámci grantu GAČR 406/05/2444.

[2]*PedF UK v Praze, jana.slezakova@pedf.cuni.cz*

Žák se při této činnosti setkává s procesním vnímáním čísla. Na rozdíl od např. počítání pomerančů v misce (ty jsou při počítání stále přítomny, jedná se o statickou situaci) kroky nebo tleskání jsou časově pomíjivé. Aby žák zjistil počet v těchto případech, je nucen si danou situaci zapamatovat či evidovat. Zaevidováním vzniká z pomíjivé situace statická, např. viz tabulka, kde mají žáci zaznamenávat pomocí čárek počet tlesknutí a kroků.

2. LEPENÍ STĚN NA KRYCHLI

Nápad byl převzat od kolegů M. Hejného a D. Jirotkové z materiálů mezinárodního sokratovského projektu IIATM [2]. Každý z žáků již před měsícem dostal krychli a obálku se šesti čtverci o velikosti stěny krychle (viz obr. 1 – převzat z uvedených materiálů).



Obr. 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Její vrcholy jsou obarveny každý jinou barvou následujícím způsobem: A – **m**odrý, B – **h**nědý, C – **z**elený, D – **o**ranžový, E – **r**ůžový, F – **č**ervený, G – **f**ialový, H – **ž**lutý. Zde je šest čtverců s obarvenými vrcholy (na obrázku jsou uvedena počáteční písmena barev).

m	o	r	ž	ž	f	h	č	z	f	r	č
h	z	m	o	o	z	m	r	h	č	ž	f

Každý čtverec měl obarvené vrcholy tak, že po vhodném složení čtverců vrcholy k sobě podle barev vznikla síť krychle. (K takovému obarvení potřebujeme osm barev.) Úkolem žáků bylo připravit si a nalepit čtverce na krychli tak, aby krychle měla každý vrchol obarven jinou barvou. Všichni žáci (někteří s pomocí učitelky) činnost zvládli.

V této hodině se jedná o podobnou činnost. Žáci dostanou místo šesti čtverců osm čtverců opět s vrcholy obarvenými osmi barvami. Žáci mají za úkol najít pouze šest čtverců, které lze nalepit na krychli tak, aby krychle měla osm různě barevných vrcholů.

3. KLASIFIKAČNÍ HRA: NA CO MYSLÍM

Na tabuli je nakresleno 7 objektů: 1. trojúhelník a uvnitř kruh, 2. obdélník a uvnitř kruh s hvězdičkou, 3. trojúhelník a uvnitř písmeno A s hvězdičkou, 4. obdélník a uvnitř kruh, 5. obdélník a uvnitř písmeno A s hvězdičkou, 6. trojúhelník a uvnitř písmeno A, 7. trojúhelník. Učitel si vybere jeden útvar, na který myslí, a formuluje jeho vlastnosti. Úkolem žáků je uhodnout, na který útvar učitel myslí. Zde jsou uvedeny čtyři příklady:

A. Útvar, na který myslím, je trojúhelník a má kolečko (používám takovou terminologii, co používají děti).

B. Je to obdélník a má písmeno A.

C. Útvar má kolečko. Útvar má hvězdičku.

D. Útvar má písmeno A a nemá hvězdičku.

Tato činnost má rozvíjet schopnost klasifikace a připravovat žáky na sofistikovanější klasifikační hru – „Sova“ (Jirotková, 2004).

LITERATURA

[1] Jirotková, D. (2004). Hra SOVA a její využití v přípravě učitelů 1. stupně základní školy. In M. Hejný, J. Novotná, N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, s. 247–268. ISBN 80-7290-189-3 (2. sv.)

[2] Hejný, M., Jirotková, D. (V tisku). 3D geometrie – tělesa. Kapitola v knize *Pět podnětných pro učitele matematiky*, Praha, PedF UK.

MIMOVÝUKOVÉ MATEMATICKÉ AKTIVITY JAKO NÁSTROJ HLEDÁNÍ CEST KE KONSTRUKTIVISTICKÉMU PŘÍSTUPU K VYUČOVÁNÍ

IRENA MATALOVÁ[1]

V tomto článku bych se chtěla podělit se čtenáři o svých zkušenostech s mimovýukovými matematickými aktivitami, při kterých jsem získala mnoho nových poznatků, měla možnost poznat svůj edukační styl a pod vedením zkušených pedagogů na něm pracovat. Tyto mimovýukové aktivity byly východiskem mého diplomového úkolu, a tedy i podkladem pro mou diplomovou práci, kterou jsem pod vedením D. Jirotkové zpracovávala v letech 2004–2006 a v květnu 2006 ji úspěšně obhájila.

Na počátku všeho byla má spolupráce na projektu IIATM (*Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics*) v rámci EU programu Socrates-Comenius 2.1. – Evropské projekty zaměřené na vzdělávání pedagogických pracovníků v letech 2004-2006, k němuž mne přizvali jeho koordinátoři a řešitelé (M. Hejný a D. Jirotková z KMDM PedF UK). Tento projekt byl zaměřen na podporu konstruktivistického přístupu k učení matematice, na ovlivnění postojů učitelů směrem ke konstruktivismu.

V projektu jsem dostala roli „spolupracující student“ a mým úkolem bylo pracovat ve dvojici se „spolupracujícím učitelem“. Spolupracovala jsem s Jitkou Michnovou, zkušenou učitelkou ZŠ Školní v Neratovicích. Spolu jsme se zabývaly problematikou mimovýukové matematické aktivity Ematika. Nejdříve vysvětlím, co je to Ematika, resp. jaká je historie vzniku Ematiky? Dovoluji si ocitovat část článku od J. Kratochvílové,

[1] *irena.matalova@centrum.cz*

uvedený ve sborníku *Dvacet pět kapitol didaktiky matematiky* a pojednávající o vzniku Ematiky (s. 301):

> Idea této soutěže se zrodila v roce 1976, kdy byly o prázdninách organizovány dva tábory (Tábory mladých matematiků), první celoslovenský v Tatranských Mlynčekoch (vedl M. Hejný), druhý východoslovenský ve Spišské Nové Vsi (vedl L. Gavalec). Významnou společnou akcí byly dvě jednodenní vzájemné návštěvy dětí z táborů, kdy bylo v průběhu jednoho dne organizováno množství různých sportovních, výtvarných a kulturních soutěží. Matematická soutěž dvou pětičlenných družstev měla však tvrdý soutěživý charakter. Žáci si vzájemně dávali úkoly a řešili je. Východoslovenské děti měly ve svém logu káčátko Mat, které v soutěži dávalo úkoly za jejich družstvo. Děti z tábora v Tatranských Mlynčekoch v reakci na tuto výzvu okamžitě vytvořily vlastní logo – opičku vykukující ze sudu nazvanou Ematika. Sympatické bylo, že tímto rozkladem slova mat-ematika přispěly ke klimatu spolupráce v celé soutěži. Po návratu do třídy v září 1976 děti naléhaly na učitele, aby vytvořil celoroční soutěž, v níž opička Ematika bude každý týden dávat několik úloh pro dobrovolníky. Tuto soutěž pak M. Hejný ve svém experimentálním vyučování vedl až do roku 1989.

Konkrétními mimovýukovými matematickými aktivitami, kterými jsem se zabývala, byly nejdříve obdoba zmíněné nástěnkové matematické soutěže a potom zájmový matematický kroužek.

NÁSTĚNKOVÁ MATEMATICKÁ SOUTĚŽ A ZÁJMOVÝ KROUŽEK

Nástěnková matematická soutěž je aktivita, při níž učitel nabízí dětem různé matematické úlohy prostřednictvím nástěnky. Pokud úloha děti zaujme, mohou ji v daném časovém termínu samostatně řešit. Svá řešení odevzdávají učiteli. Podle dohodnutého hodnotícího systému učitel dětem přiděluje body za správné řešení.

V zájmovém kroužku matematiky nabízí učitel úlohy osobně, a to buď ústně nebo i písemně. Děti mohou řešit zvolené úlohy buď individuálně, nebo i ve skupinách. V případě, že se objeví několik různých řešení, je vhodné, aby učitel otevřel diskusi, kterou pouze usměrňuje. Hodnotící systém jsem zatím nevypracovala a ani od nikoho nepřevzala. Domnívám se, že je vhodné, aby učitel děti hodnotil pouze slovně.

Jaké jsou výhody a nevýhody každé z nich?

Nástěnková Ematika byla nejprve vedena třídní učitelkou, což byl původní záměr autora celé myšlenky M. Hejného. Nicméně třídní učitelka zjistila, že není v jejích silách plnohodnotně reagovat na všechny potřeby a impulzy dětí plynoucí z této aktivity. Děti odevzdávaly řešení v průběhu celého dne, dožadovaly se ihned správného řešení, potřebovaly poradit, proto jsem převzala vedení této aktivity. Analyzovala jsem stávajícího způsob zadávání úloh, organizaci činnosti, hodnocení výsledků a vytvořila nová pravidla s ohledem na reakce dětí.

Úlohy byly stále vyvěšeny na nástěnce a děti měly čas je řešit v daném časovém intervalu. Jednou za týden se však konala také tzv. hodina Ematiky, kdy jsem představovala nové úlohy na nástěnce, děti řešily nové i starší úlohy a úspěšní řešitelé poskytovali rady těm méně úspěšným. Hodiny Ematiky byly dobrovolné, a tak se struktura Ematiky příliš nezměnila. Stále se soutěžilo v rámci třídy a na konci školního roku byli vyhodnoceni ti nejúspěšnější.

Zkušenosti s nástěnkovou Ematikou mne vedly k založení zájmového kroužku Matika na škole, kde jsem v následujícím roce působila. Na vedení kroužku mne lákalo vyzkoušet si vést žáky v duchu konstruktivismu, tzn. poskytnout žákovi radu či formulovat výzvu, diskutovat s ním o problému, prožívat s ním radost z nového objevu v momentě, kdy to žák potřebuje či očekává. Jako nezkušená učitelka bych si tento přístup v plné míře asi netroufla aplikovat rovnou při řádné výuce.

Při vedení nové nástěnkové Ematiky a posléze i zájmového kroužku Ematiky jsem sledovala vliv počtu žáků, výběru úloh, způsobu organizace a hodnocení na zájem dětí o tyto mimovýukové aktivity. Ve své diplomové práci uvádím konkrétní úlohy, zdůvodnění jejich výběru, očekávaná řešení, průběh hodiny s dětmi a komentář (hodin a konkrétních řešení).

Ať se rozhodnete zvolit aktivitu nástěnkové Ematiky nebo odpoledního kroužku, v obou případech považuji za nejdůležitější:

- Výběr vhodných úloh, s čímž souvisí mnohé další. Na úspěšném výběru úloh závisí úspěch Ematiky (jakékoli její varianty). Učitel musí vybírat úlohy s jistým záměrem, ať již se snahou diagnostikovat znalosti žáků, reedukovat jejich formálně nabyté poznatky, motivovat, vzdělat (naučit nové poznatky). Úlohy nestandardní slouží jako úlohy diagnostické, učitel má možnost s jejich pomocí zjistit, zda nabyté znalosti dětí jsou formálního charakteru či nikoli a pokud ano, prostřednictvím vhodné gradace úloh může dětem poznatky opětovně zprostředkovat jinou neformální cestou. Také jsou důležité zdroje – dnes je na trhu mnoho kvalitní, ale i nekvalitní literatury, a tak by měl učitel vybírat spolehlivé zdroje nestandardních úloh.

- Vždy mít připravenu gradovanou sérii úloh. Nestačí žákům předložit jednu úlohu a očekávat, že ji bez problémů vyřeší. Je potřeba být připraven na situaci, že některý žák neví jak úlohu uchopit. V tom případě je nutné mu nabídnout úlohu v sérii snazší. Nebo naopak, pokud žák úlohu bez problému vyřeší, nabídnout úlohu v sérii obtížnější. Gradovaná série úloh umožňuje učiteli začít středně těžkou úlohou a nabídnout poté dětem další úlohu přesně takovou, která bude odpovídat jejich schopnostem – lehčí či obtížnější.

Jednu ukázku z gradovaných sérií úloh zde uvedu.

GRADOVANÁ SÉRIE ÚLOH

Problém: Trojúhelníková nerovnost (vhodné pro žáky 4. ročníku ZŠ)

V čem spočívá gradace úloh? Podívejme se na úlohy:

Úloha 1: Rozhodněte, zda je možné sestrojit trojúhelník s délkami stran: $a = 9$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm. Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 2: Rozhodněte, zda je možné sestrojit trojúhelník s délkami stran: $a = 7,2$ cm, $b = 4,3$ cm, $c = 2,1$ cm. Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha 3: Rozhodněte, zda je možné sestrojit trojúhelník s délkami stran: $a = 300$ km, $b = 80000$ cm, $c = 253$ m. Svou odpověď zdůvodněte.

Úloha první je nejjednodušší. Strany trojúhelníku je možné vymodelovat a je možné trojúhelník zkonstruovat manipulativně. Druhá úloha je obtížnější použitím desetinných čísel. Jestliže žáci chtějí použít vztahu trojúhelníková nerovnost, může se úloha zkomplikovat počítáním s desetinnými čísly. Třetí úloha je komplikovaná růzností jednotek a nemožností trojúhelník modelovat či rýsovat.

V zadání úloh se objevují dva parametry – čísla a jednotky. Jednotky (J) mohou být shodné (s) a různé (r), přiměřené (adekvátní) (p) a nepřiměřené (neadekvátní) (n). Přiměřenost a nepřiměřenost jednotek zde chápeme jako možnost rýsovat zadané délky na papír velikosti sešitu, tj. zda jsou přiměřené papíru. V případě nepřiměřených jednotek je totiž nutné uvažovat v představách. Čísla mohou být malá přirozená (mN), velká přirozená (vN) nebo desetinná čísla (D). Pro přehlednost jsem vytvořila tabulku možných kombinací parametrů, která umožní gradovat obtížnost zadání. Každá ze série tří úloh je v tabulce umístěna.

	mN	vN	D
Jsp	Úloha 1		Úloha 2
Jrp		Úloha X	
Jsn			
Jrn		Úloha 3	

Vysvětlivky k tabulce: mN – malá přirozená čísla, vN – velká přirozená čísla, D – desetinná čísla, Jsp – jednotky shodné přiměřené, Jrp – jednotky různé přiměřené, Jsn – jednotky shodné nepřiměřené, Jrn – jednotky různé nepřiměřené.

V tabulce je patrné, že úloha 1 je skutečně v této sérii nejjednodušší, úloha 2 je odlišná pouze jiným oborem čísel, úloha třetí je téměř nejtěžší variantou celé možné gradace. Obtížnost v tabulce stoupá zhruba diagonálně.

Učiteli, který chce vytvořit gradovanou sérii úloh, může být taková tabulka velmi nápomocná.

Pokud bych např. chtěla vytvořit úlohu na úrovni Úlohy X, musela by splňovat toto: velká přirozená čísla, jednotky různé a přiměřené. Příklad takové úlohy by vypadal takto: Lze sestrojit trojúhelník se stranami o délkách $a = 102$ mm, $b = 1$ dm, $c = 128$ mm?

Gradovaná série úloh také umožňuje jít o „krok níž“ a o „krok výš“. Učitel může vybrat jakoukoli úlohu ze série a zjistit, jak na ni děti reagují, jaké problémy se při řešení úlohy objeví. Na základě analýzy řešení dětí pak učitel vybere jinou úlohu z gradované série. Jedná se o metodu práce, kdy učitel nedává žákům přímé rady, ale dovede je k řešení prostřednictvím řešení dalších úloh, které jsou buď jednodušší či obtížnější.

K vytvoření podobné tabulky pro jiné úlohy (série) je vždy nutné najít parametry, které se v úlohách objevují.

HODNOCENÍ PRÁCE ŽÁKŮ

Ať již učitel zvolí hodnocení formou vývěsky na nástěnce, osobní průkazky, či jiný způsob, domnívám se, že vždy musí být hodnocení doplněno hodnocením slovním. Nestačí přidělit pouze body, žák by měl vědět, v čem se může dále zlepšovat a co mu jde naopak velmi dobře, a to se dozví ze slovního hodnocení. Při práci v kroužku děti diskutují, dívají se navzájem do sešitů a samy komentují vlastní i spolužákovu práci. Učitel funguje jako usměrňovatel diskusí, během nichž se žáci mnohé dozví a naučí. Samozřejmě, že má učitel možnost působit i jako nositel všeho poznání a hodnocení, tuto možnost však využít nemusí, což je pro děti mnohem přínosnější.

Jedním z důvodů, proč jsem já osobně upřednostnila zájmový kroužek před nástěnkovou Ematikou, byla artikulace nalezených řešení. Pro děti na prvním stupni není většinou tak obtížné úlohu vypočítat jako artikulovat výpočet. Protože jsem již u dětí v Neratovicích požadovala artikulaci, resp. zdůvodnění výsledků, zjistila jsem, že písemná artikulace je mnohem obtížnější než artikulace slovní. Při zájmovém kroužku má učitel možnost se této problematice věnovat a já osobně jsem u dětí zaznamenala veliký pokrok ve schopnosti vyjádření se a ochoty sdílet nejen výsledek, ale i svůj způsob řešení s ostatními, tzn. kroužek Ematiky je přínosnější pro žáky v tom smyslu, že učitel může lépe sledovat rozvoj jejich schopností.

Na matematickém kroužku jsem také nechala děti, aby přinášely úlohy, které jsme posléze řešily. Většinou se jednalo o úlohy jednodušší, a tak pro mne nebyl problém vymyslet při hodině gradačně obtížnější varianty úlohy, pokud by ale děti přinášely úlohy složitější, považuji za vhodnou spolupráci učitele se žákem ještě před kroužkem.

Cílem nošení vlastních úloh bylo 1. naučit děti vyhledávat zajímavé úlohy a pracovat s doplňkovou literaturou, 2. přenést část zodpovědnosti za program a za vlastní učení se na samotné účastníky kroužku (tím jsem se samozřejmě tohoto úkolu sama nezřekla), 3. zjistit tímto způsobem oblast zájmu dětí a jim dostupné zdroje.

Vzhledem k tomu, že děti, které jsem vedla na kroužku Ematiky, jsem měla také možnost učit v rámci souvislé pedagogické praxe, mohu prohlásit, že práce v kroužku se velmi odrazila v práci dětí v celém třídním kolektivu. Změny nejsou v celém třídním kolektivu tak patrné jako v malé skupince na kroužku, ale pomalu se projevují, což považuji za obrovský úspěch. Děti se staly sebevědomější, ale nesnažily se být středem pozornosti, v klidu vyslechli i ostatní názory, dokázaly často svůj názor obhájit a zdůvodnit, neodsuzovaly chybná řešení, ta chápaly jako součást odhalování řešení správného.

Snad pod tlakem dnešní doby, kdy děti tráví mnoho času u monitorů počítačů, dochází k tomu, že děti nejsou schopny samy si najít volnou chvíli na řešení matematických úloh. Proto při nástěnkové Ematice posléze děti upřednostnily řešit úlohy při hodině Ematiky a při zájmovém kroužku se málokdy stalo, že by někdo vyřešil nabídnutou úlohu ve volném čase, a to mohla být úloha sebevíce zajímavá a motivující. I to je dalším důvodem pro mou volbu kroužku a nikoli nástěnkové Ematiky.

Jeden z možných problémů, které se mohou vyskytnout, je přílišná soutěživost ve skupině. Mně se ji podařilo potlačit formou účasti v matematických dopisových soutěžích, např. pikomat. Děti se tak snaží obstát nejen ve skupince kamarádů, ale ve skupině cizích dětí a podporují se posléze navzájem.

V závěru mojí diplomové práce nastiňuji další možnosti, které nabízí mimovýukové matematické aktivity, např. propojení matematiky s turistikou či vlastivědou, matematický tábor apod., čímž se jakoby vracím ke kořenům celé aktivity, která na táboře začala, a snad i proto mne práce s dětmi vede impulsivně opět tam, kde vše začalo. Na táboře mají totiž děti ještě větší šanci než na zájmovém kroužku sdílet spolu svoje úspěšné a neúspěšné výpočty, vymýšlet úlohy apod. A že je na táboře přílišná soutěživost? Ta bude při těchto aktivitách vždy, jen jde o to, jakou formou necháme děti soutěžit, tzn. jaké úlohy jim nabídneme; jakým způsobem jim pomůžeme řešit; jakým způsobem je budeme hodnotit.

LITERATURA

[1] Kratochvílová, J. Jak Klára měnila své pedagogické přesvědčení. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Praha 2004, 299–310.

ODVOZENÍ ANALYTICKÉHO VYJÁDŘENÍ OSOVÉ SOUMĚRNOSTI[1]

NAĎA STEHLÍKOVÁ[2]

ÚVOD

Kurz „Geometrické transformace, analytický přístup“ zaujímá v rámci přípravy budoucích učitelů 2. stupně základní školy a střední školy specifické místo tím, že se

[1] Tento článek vznikl za podpory grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2] *PedF UK v Praze, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

snaží využívat konstruktivistických přístupů k výuce. Studenti sami si mají prostřednictvím vhodně volených gradovaných úloh vyvodit řadu poznatků, které jsou v tradičním vyučování předány jako hotové. Tyto poznatky jsou dále rozpracovány na seminářích, formulovány jako věty a dokázány. Kurz byl podrobněji popsán v [2], [3], [4], [5].

Popsaný způsob vyučování vede mimo jiné k mnoha různým způsobům řešení úloh, které se často od autorských (a tedy těch, které jsou většinou na přednáškách předvedeny) velmi liší. Dobře je to vidět např. na tom, jak studenti řešili úlohy vedoucí k vyvození analytického vyjádření osové souměrnosti, které je předmětem tohoto článku. Nejdříve bude uvedena posloupnost úloh a autorské řešení a následně několik různých řešení studentů.

POSLOUPNOST ÚLOH

Studenti postupně řeší posloupnost úloh, pomocí nichž mají objevit analytické vyjádření všech shodností, přičemž se postupuje od konkrétních shodností k obecným. Zde úlohy uvedeme bez komentáře, se studenty jsou samozřejmě řešeny a diskutovány postupně. Nejdříve jsou shodnosti popisovány pomocí rovnic, později maticemi třetího řádu. Studenti si mohou vybrat, jaké analytické vyjádření je jim bližší. Z důvodů snazší manipulovatelnosti s maticemi (transformace se dají jednodušeji skládat a hledat jejich inverzní transformace) si zpravidla vybírají matice.

- Najděte analytické vyjádření otočení $r_{\frac{\pi}{2}}$, tj. otočení o 90° kolem bodu O.
- Najděte analytické vyjádření otočení $r_{\frac{\pi}{4}}$, tj. otočení o 45° kolem bodu O.
- Najděte analytické vyjádření otočení r_β, tj. otočení o úhel β kolem bodu O.
- Najděte analytické vyjádření posunutí $t_{\vec{u}}$: $\underline{E}^2 \to \underline{E}^2$ o vektor $\vec{u}\,(u; v)$.
- Najděte analytické vyjádření otočení $r_{M,\alpha}$ kolem bodu $M[u; v]$ o úhel α.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_x kolem osy x.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_y kolem osy y.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_u kolem osy u prvního a třetího kvadrantu.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_o kolem přímky o. Přímka o prochází počátkem a svírá s kladnou částí osy x úhel α.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_o kolem obecné přímky o. Přímka o svírá s kladnou částí osy x úhel α.
- Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti s_o kolem přímky o, která je dána rovnicí $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) \neq (0, 0)$.

Daná posloupnost představuje stav, který předjímá vyučující; od skutečného průběhu vyučování se však podstatně liší. Vždy záleží na tom, jakou strategii studenti použijí a jak probíhá diskuse. Řada studentů také vynechává hledání analytického vyjádření konkrétních shodností a zaměřuje se ihned na obecné řešení. Podle toho také vyučující formuluje úlohy, některé vynechává, některé přidává. Jádrem tohoto příspěvku bude různorodost hledání analytického vyjádření osové souměrnosti na obecně danou výzvu „Najděte analytické vyjádření osové souměrnosti“.

ODHALOVÁNÍ ANALYTICKÉHO VYJÁDŘENÍ OSOVÝCH SOUMĚRNOSTÍ

V době, kdy byla úloha zadána, studenti znali analytické vyjádření obecné rotace a posunutí a uměli skládat shodnosti pomocí násobení jejich matic. Z kurzu geometrie měli znát i skládání shodností a jejich rozklad na osové souměrnosti syntetickým způsobem. Skripta z analytické geomerie k dispozici neměli.

AUTORSKÉ ŘEŠENÍ PRO OSU, KTERÁ JE DÁNA BODEM A SMĚRNICÍ

Na ose o zvolíme libovolný bod $M[u;v]$. Pak $s_o = t_{\vec{u}} \circ s_{o'} \circ t_{-\vec{u}}$, kde o' je přímka rovnoběžná s osou o a procházející počátkem a $o' = t_{-\vec{u}}(o)$ a vektor $\vec{u}(u;v)$ (v pořadí $t_{-\vec{u}}$, $s_{o'}$, $t_{\vec{u}}$).

Označme matici osové souměrnosti podle osy, která prochází bodem $[u;v]$ a má směrový vektor $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, jako $\mathbf{S}(u,v;\alpha)$. Převedeme-li výše uvedenou rovnost do maticového vyjádření, dostaneme $\mathbf{S}(u,v;\alpha) = \mathbf{T}(\vec{u}) \cdot \mathbf{S}(0,0;\alpha) \cdot \mathbf{T}(-\vec{u})$. To už je jen kalkulace. Výsledek:

$$\mathbf{S}(u,v;\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & u(1-\cos 2\alpha) - v\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & v(1+\cos 2\alpha) - u\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTORSKÉ ŘEŠENÍ PRO OSU, KTERÁ JE DÁNA OBECNOU ROVNICÍ (VIZ TAKÉ [1])

Nechť je dána osa o obecnou rovnicí $ax+by+c=0$, kde $(a,b)\neq(0,0)$. Označíme $X[x;y]$ a jeho obraz v osové souměrnosti $X'[x';y']$. Protože vektor $\overrightarrow{XX'}$ je kolmý na osu o, platí $\overrightarrow{XX'} = k\cdot(a;b)$, kde $k\in\mathbf{R}-\{0\}$. Tedy $x' = x+ka$, $y'=y+kb$.

Dále musíme najít číslo k. Nechť $S = X - \bullet - Y$. Bod S má souřadnice

$$\left[\frac{2x+ka}{2};\frac{2y+kb}{2}\right].$$

Protože $S\in o$, platí

$$\frac{2x+ka}{2}\cdot a + \frac{2y+kb}{2}\cdot b + c = 0.$$

Z této rovnosti vyjádříme k a dosadíme do rovnic pro x' a y'. Dostáváme

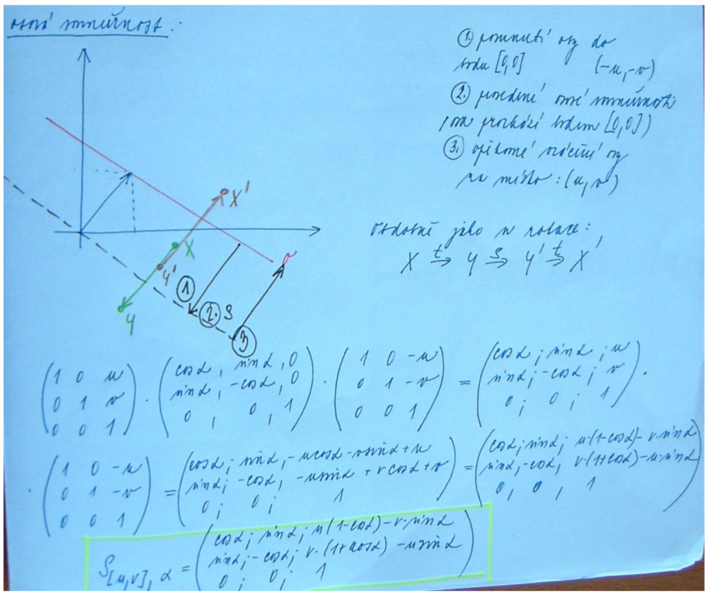
$$x' = x - \frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2}, \qquad y' = y - \frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2}.$$

Zde není účelné převádět vyjádření rovnicemi do vyjádření maticí.

STUDENTSKÁ ŘEŠENÍ

Studenti použili různá vyjádření osy a podle toho se pak lišily jejich výsledky. Všechny druhy analytického popisu, které našli, byly v hodině prezentovány a studenti pak měli za domácí úkol zjistit, zda jsou ekvivalentní. Důkaz byl náplní poslední hodiny.

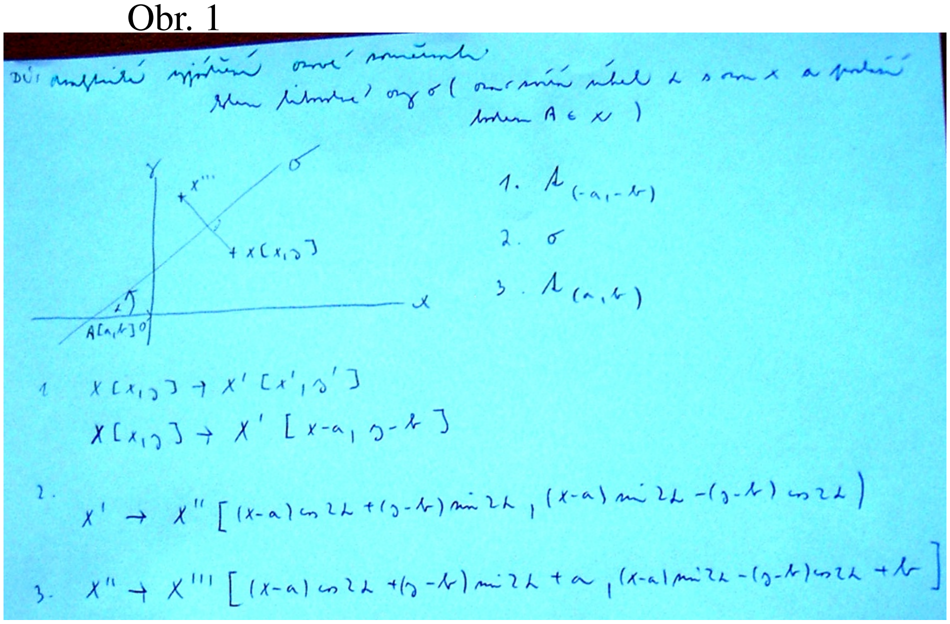
Řešení, která jsou zde prezentována, jsou výsledkem samostatné práce studentů před hodinou, kdy se o jejich řešení diskutovalo. Tedy nedostali od vyučující žádné nápovědy.



Obr. 1

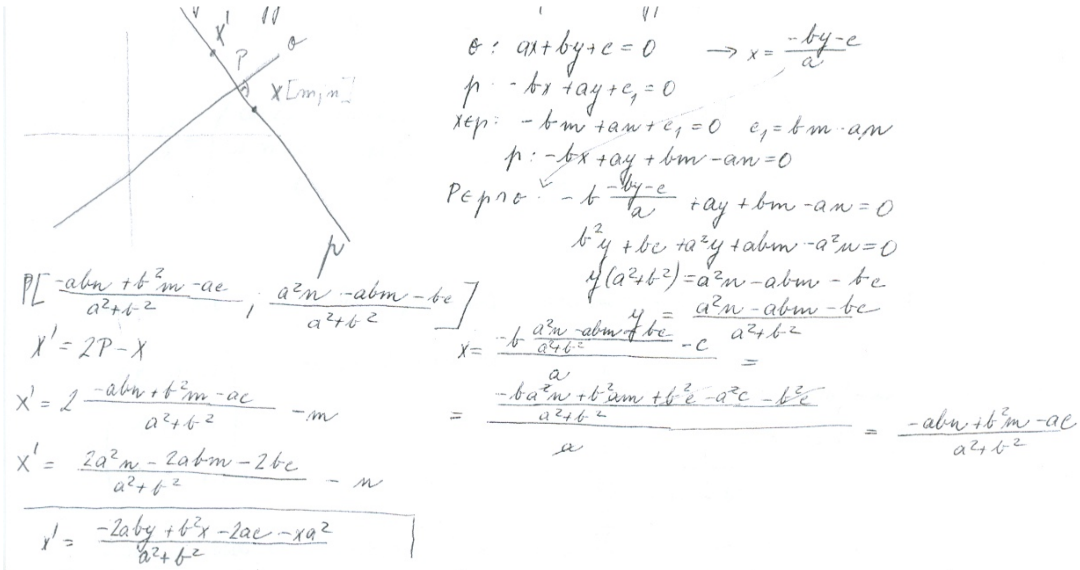
Na obrázku 1 je řešení, které v podstatě odpovídá prvnímu autorskému řešení, jenom je odchylka osy o osové souměrnosti od osy x označena jako $\frac{\alpha}{2}$.

Na obrázku 2 je řešení odpovídající autorskému, ale v rovnicích. Stačí malá úprava a vyjde stejné analytické vyjádření jako autorské. V zápise je nepřesnost v tom, že studentka nedělala obraz bodu X' kolem osy o, ale kolem osy o', která vznikne posunutím osy o do počátku o vektor $(-a; -b)$.



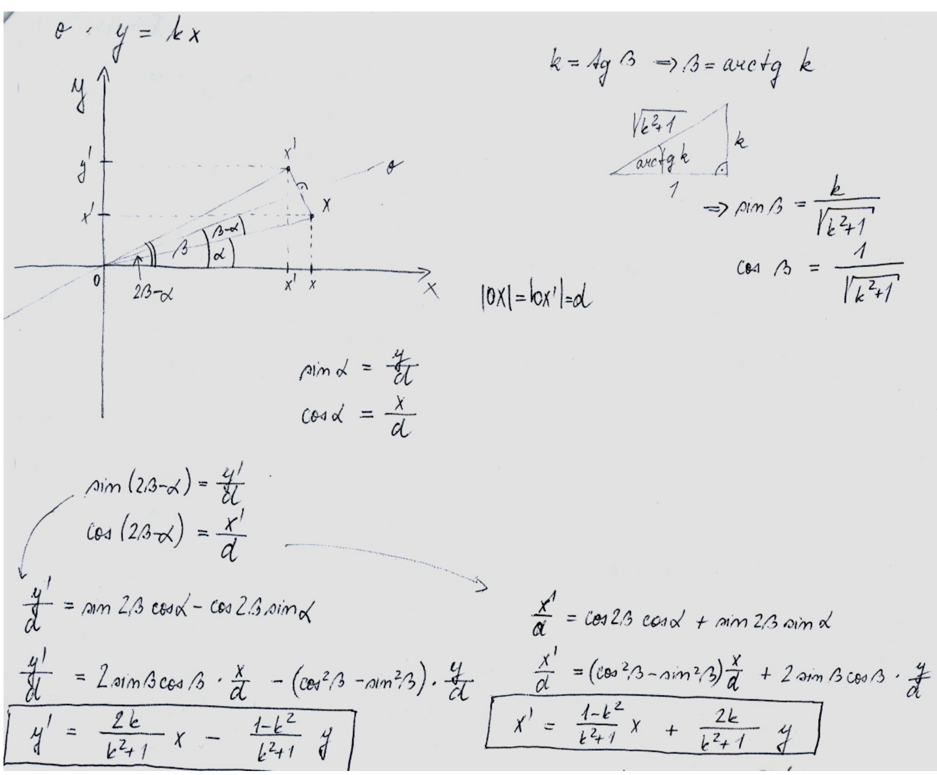
Obr. 2

Na obrázku 3 je odvození analytického vyjádření osové souměrnosti, pokud je osa dána obecnou rovnicí. Oproti autorskému řešení je trochu těžkopádnější, ale správné. Po malé úpravě vyjde stejné vyjádření jako autorské.



Obr. 3

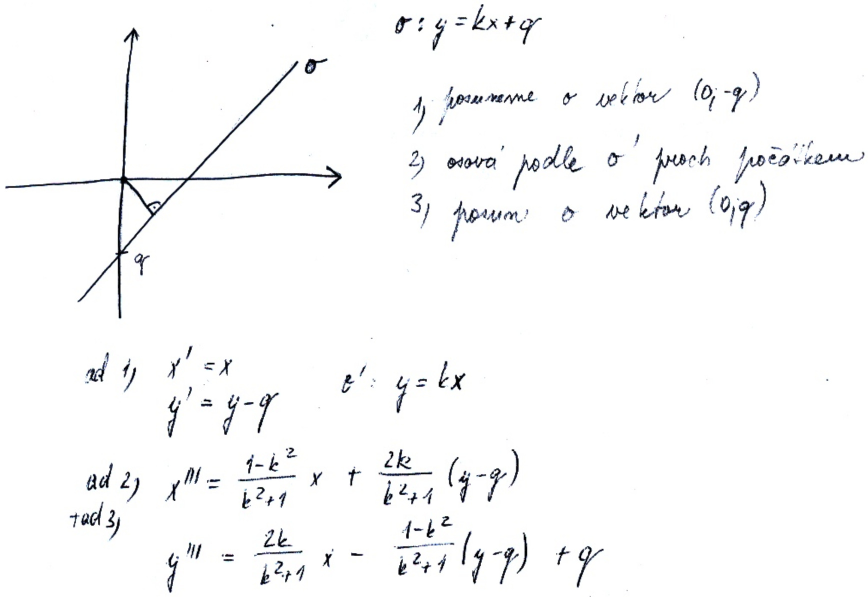
Na obrázku 4 je řešení pro osu o, která prochází počátkem O. Zde studentka využívá směrnice přímky $k = \operatorname{tg}\beta$. Řešení je správné (o tom se přesvědčíme například tak, že dosadíme za $k = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, nebo že zkusíme najít samodružné body – vyjde nám osa), ovšem řešitelka zapomněla diskutovat případ, kdy $\operatorname{tg}\beta$ neexistuje, tj. když je osa o kolmá na osu x.



Obr. 4

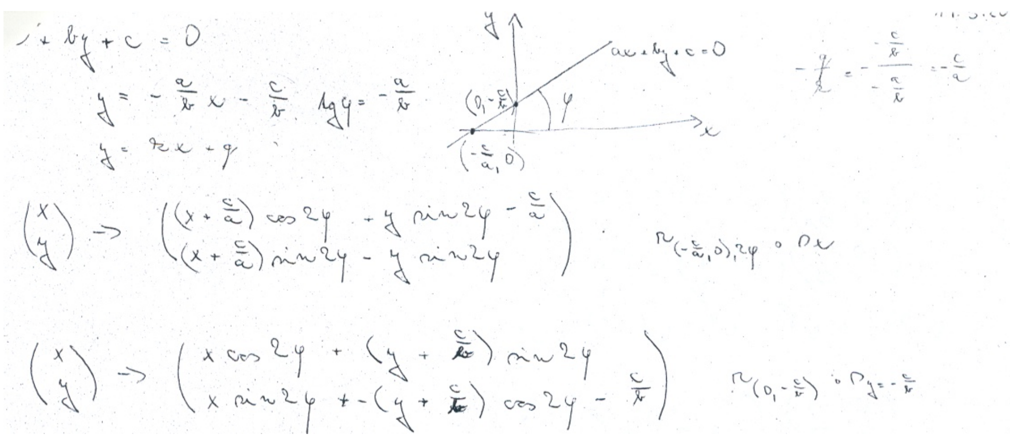
Na obrázku 5 je řešení pro osu o danou směrnicovým tvarem rovnice $y = kx + q$

od stejné autorky jako řešení na obr. 4. Řešení je opět správné, ovšem řešitelka opět zapomněla diskutovat případ, kdy směrnicový tvar rovnice přímky neexistuje, tj. když je osa o kolmá na osu x.



Obr. 5

Řešení na obrázku 6 je děláno zprvu pro osu danou obecnou rovnicí, která je však přepsána do směrnicového tvaru, aniž by byl diskutován případ $b = 0$ zvlášť.



Obr. 6

ZÁVĚR

Podaří-li se navodit tu správnou „objevitelskou“ atmosféru, studenti nacházejí různá řešení a dospívají k různým analytickým vyjádřením. Jsou pak (většinou) dobře motivovaní k poměrně komplexním výpočtům při zjišťování, zda jsou tato vyjádření ekvivalentní, a k důkazům. Navíc získávají přímou zkušenost s tím, že analyticky lze stejnou transformaci vyjádřit více způsoby, mezi nimiž mohou vybírat podle charakteru úlohy, kterou řeší.

Dají-li se studenti zdravě vyprovokovat, mají sami potřebu problémy řešit, aniž by vyžadovali přesný návod řešení. Samozřejmě tomu tak není vždy. Zůstává řada studentů, jimž by lépe vyhovovalo, kdyby jim někdo předložil již hotový a vyprecizovaný poznatek, který by se mohli jenom „naučit". To však není přístup k výuce a učení se, který bychom chtěli u budoucích učitelů nějak výrazně podporovat.

LITERATURA

[1] Kuřina, F. *10 geometrických transformací.* Praha: Prometheus, 2002.

[2] Stehlíková, N. (2002). Geometrické transformace – konstruktivistický přístup. In Ausbergerová, M., Novotná, J. a Sýkora, V. (Eds.), *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Praha: JČMF, s. 281–287.

[3] Stehlíková, N. (2003). Ilustrace konstruktivistických přístupů k vyučování na vysoké škole. In Burjan, V., Hejný, M. a Jány, Š. (Eds.), *Zborník príspevkou z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras*. Bratislava: EXAM, s. 83–88.

[4] Stehlíková, N. (2004). Geometrické transformace analyticky. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK, s. 279–298.

[5] Stehlíková, N. (2004). Odvození analytického vyjádření podobného zobrazení. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky*. Praha: PedF UK, s. 115–120.

GRAFY FUNKCÍ[1]

MICHAELA ULRYCHOVÁ[2]

Funkční myšlení žáků je důležitou součástí výuky matematiky na základní i střední škole. V rámci projektu IIATM (*Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics*, Sokrates-Comenius 2.1) byly rozpracovány určité reálné a netradiční úlohy z praxe, které by žáky více motivovaly a aktivizovaly a vedly k vlastnímu objevování. V tomto článku stručně popíši jednu sadu úloh spolu s tím, jaké výsledky přinesly.

Úlohy byly vyzkoušeny v tercii osmiletého gymnázia v běžných hodinách matematiky s 31–33 žáky. Dané téma není nad rámec učiva, je součástí kurikula, a tak bylo možné úlohy bez problémů do výuky zařadit.

[1] Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

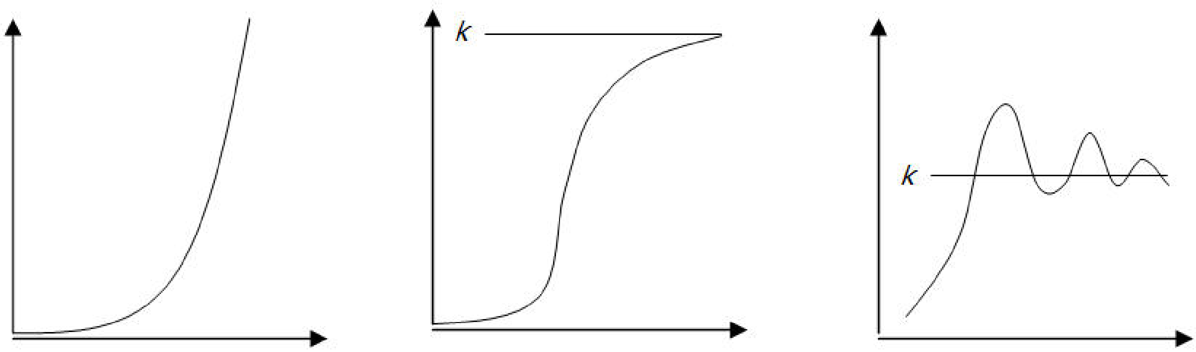
[2] *KG Kozinova 1000, Praha 10, ulrychova.michaela@centrum.cz*

Celý proces lze rozdělit do čtyř etap:

1. etapa: Růstové křivky populace
2. etapa: Grafy reálných dějů
3. etapa: Vlastnosti funkcí
4. etapa: Co popisuje tento graf?

1. ETAPA: RŮSTOVÉ KŘIVKY POPULACE

Úloha: Co podle vás představují grafy na obrázcích? Popište dané grafy.



Téma a název úlohy byl převzat z biologie. Jedná se o úlohu otevřenou. Záměrně nejsou označeny osy, aby měli žáci možnost kreativně tvořit a vymýšlet různé nápady.

Žáci pracovali individuálně. Úloha jim nečinila žádné obtíže, naopak je aktivizovalo netradiční pojetí úlohy, se kterým se zatím nesetkali. Dosud pouze sestrojovali ve fyzice grafy závislosti se zadanými parametry.

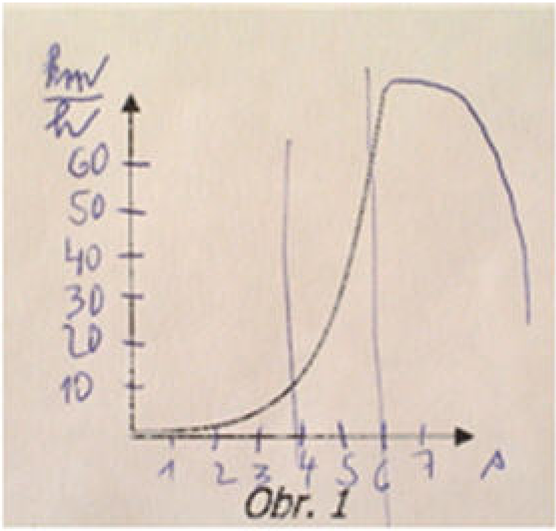
Žáci podali velké množství řešení. Až na několik málo výjimek žáci nenabízeli žádné výklady inspirované pouze tvarem křivky bez analýzy funkčního vztahu (jak to popisuje např. Eisenmann v [1]). Tento fenomén se často vyskytuje při řešení obdobných úloh v konstruktivisticky orientované výuce. Je to zřejmě typická vlastnost žáků víceletého gymnázia, kdy se každý žák snaží vymyslet své vlastní originální řešení.

Žáci se seznámili s příklady různých grafů funkcí a tato úloha (jako i úlohy následující) přispěla k rozvoji tvořivého myšlení, rozvoji vnímání funkční závislosti, rozvoji komunikace a formulování vlastních názorů a argumentace. Učiteli navíc úloha umožnila diagnostikovat existující znalosti a zkušenosti žáků před tím, než začal být probírán celek Funkce.

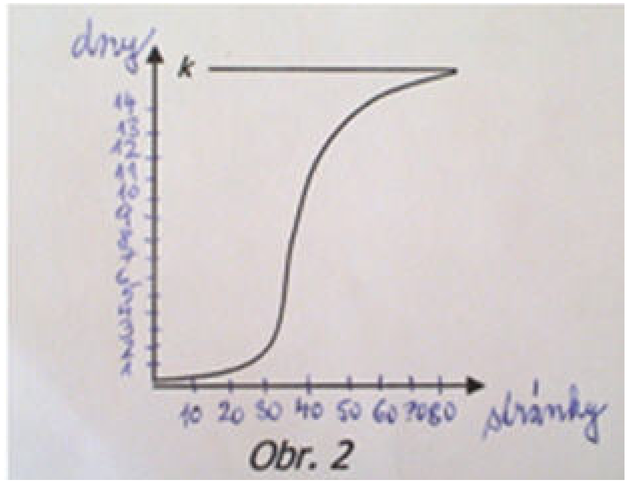
UKÁZKY ŘEŠENÍ ŽÁKŮ

Zde se podíváme alespoň na některá zajímavá žákovská řešení.

Žák popsal graf na obr. 1 následujícím způsobem. „Tady je ještě na nule, tady se rozjíždí, tady jede ještě pomaloučku, tady nabere rychlost a jede strašnou rychlostí – skočí.“ Zeptala jsem se, kde přesně lyžař skočil. Ukázal na hodnotu 8. vteřina na vodorovné ose: „Tvar tady po osmé vteřině závisí na tom, jak rychle skočí. Pokud je rychlejší, graf by šel výš, a kdyby šel graf dolů, jel by pomalu." Tato výpověď ukazuje, že si uvědomoval vztah mezi rychlostí a časem.

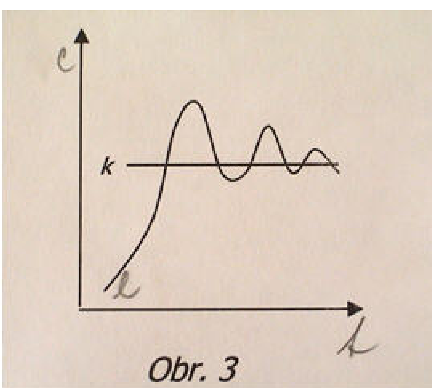


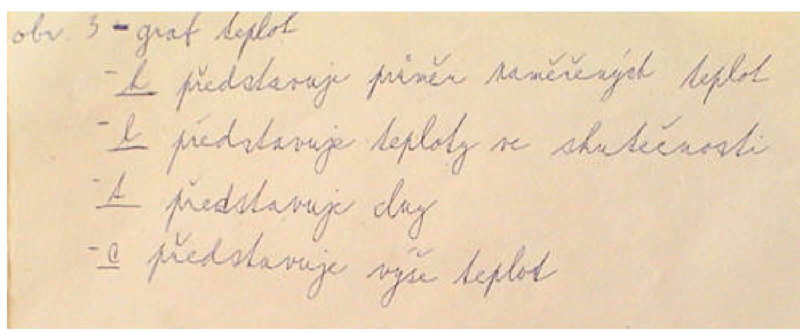
Obr. 1: Skokan na lyžích



Obr. 2: Graf počítání Bělouna

Žákyně popsala graf na obr. 2 následujícím způsobem. „První den se vypočítá nejvíc stránek, pak se tempo zvolní (od 30. stránky), no a pak se to dohání a třeba v jednom dni se vypočítá 30 stránek." (Diskrétní data jsou zde uchopena spojitou křivkou.)





Obr. 3

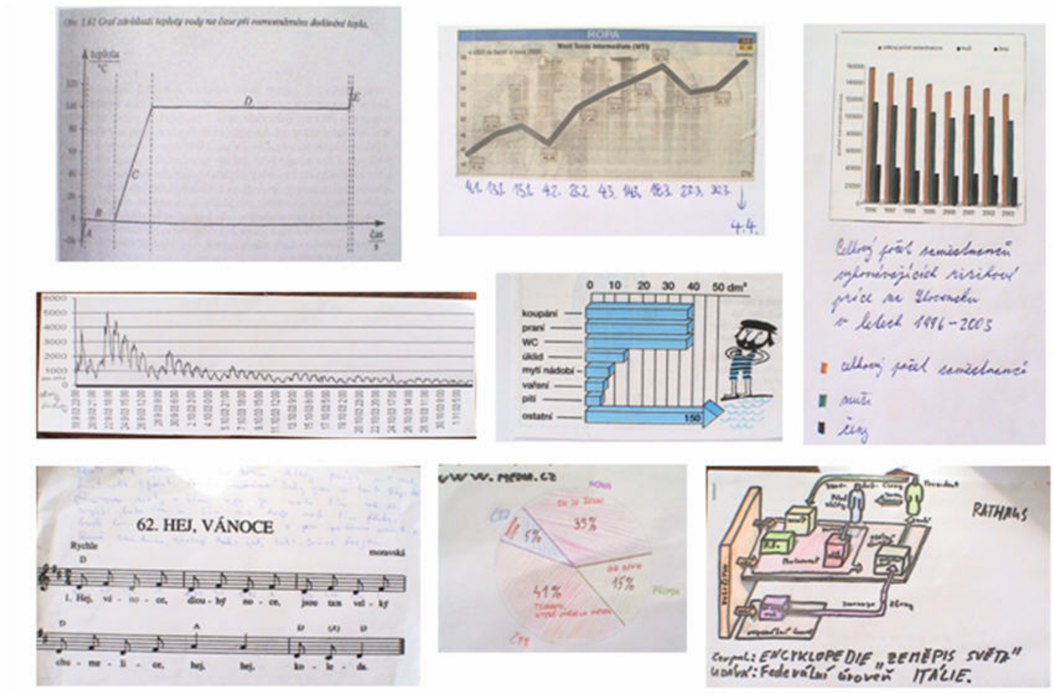
Graf na obr. 3 je vysvětlen přímo žákem na obr. vpravo.

2. ETAPA: GRAFY REÁLNÝCH DĚJŮ

Domácí úkol: Najděte příklady grafů, které popisují určité reálné děje nebo situace.

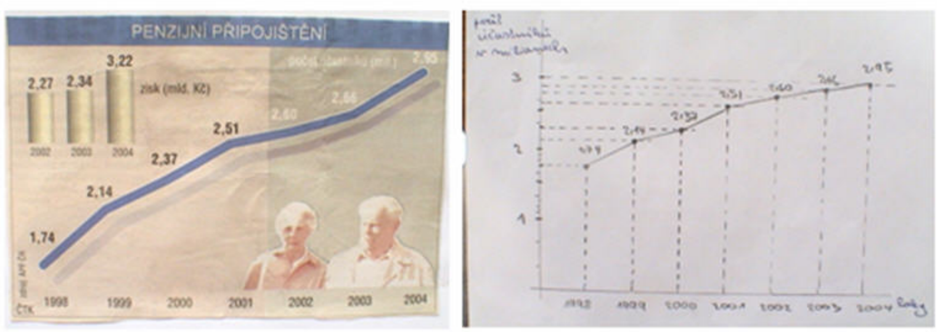
Z první úlohy, popř. etapy vyplynula etapa druhá – a to domácí úkol. Žáci si tímto mohli vyzkoušet i jiný přístup, na který nebyli dosud příliš zvyklí, a to vyhledávání informací a dat v literatuře, médiích, na internetu apod. I tento úkol měl v žácích probudit aktivitu.

Na obr. 4 jsou ukázky toho, co všechno žáci považují za grafy.



Obr. 4

Jedna žákyně graf překreslila, protože jí „nepřipadal dostatečně přesný“ (obr. 5).



Obr. 5

3. ETAPA: VLASTNOSTI FUNKCÍ

Některé grafy byly diskutovány ve třídě. Žáci byli vedeni k tomu, aby pojmenovali některé vlastnosti grafů (chtěla jsem připravit pojmy pro popis matematických vlastností). O většině pojmů ale slyšeli žáci poprvé (nebo přinejmenším se poprvé dozvěděli jejich správná matematická jména). Například většinou popisovali graf jako „stoupající“. Navrhli popisování funkce těmito vlastnostmi: tvar („přímka, hyperbola, parabola“), funkční hodnoty (jedna dívka se podivila, že „v grafu mohou být dokonce i záporná čísla“, další navrhla, že můžeme rozlišovat funkce „kladné a záporné“), spojitost (žák použil slovo „spojený“ proti „rozdělený“), omezenost (žák použil slovo „ohraničená“ versus „nekonečná“), periodicita (žák použil slovo „střídavá“). Další návrhy pro popis grafu funkce zahrnovaly přídavná jména jako „zvlněný“, „horizontální“, „nekonečný“,

„postupně stoupající“, „rychle stoupající“, „špičatý“ atd. O návrzích jsme vedli diskusi a současně jsem žáky upozorňovala na správnou matematickou terminologii.

Nakonec jsem připravila tabulku, v níž byly ve sloupcích jednotlivé grafy (celkem 12) a v řádcích tyto vlastnosti: definiční obor, obor hodnot, spojitost, monotonie, prostá funkce, sudá/lichá funkce, extrémy, průsečíky s osami, jiné vlastnosti nepopsané dříve.

Z materiálů, které žáci přinesli, jsem vybrala 12 různých grafů a diagramů tak, aby tento soubor zahrnoval co největší paletu. Šlo mi o to, abych motivovala žáky k přemýšlení o různých vlastnostech a k rozhodnutí, zda je možné tyto vlastnosti zkoumat v jakémkoli grafu a diagramu.

V této etapě jsem změnila způsob práce, který se osvědčil. Jednotlivé grafy a diagramy jsem rozmístila na lavice ve třídě. Žáci pracovali ve skupinách po dvou nebo po třech a pohybovali se mezi jednotlivými stanovišti. Měli postupně doplnit do tabulky dané vlastnosti jednotlivých grafů.

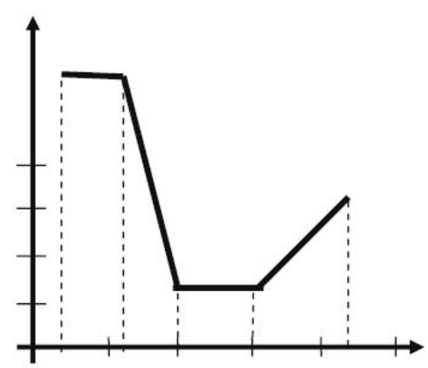
Tento způsob práce byl dětem blízký zřejmě z toho důvodu, že jim mohl připomínat formu celotáborové hry na letních dětských táborech, na které většina žáků třídy jezdí.

Protože žáci řešili úkol ve skupinách, byli nuceni komunikovat a argumentovat. Vlastnosti funkcí bylo pro ně zcela nové téma. Úloha přispěla také k rozvoji tvořivého myšlení žáků, protože žáci měli popisovat nejen dané vlastnosti funkcí, ale také popsat, co graf vyjadřuje. V neposlední řadě pomohla úloha žákům při osvojování nové matematické terminologie.

Úloha vedla žáky k tomu, aby interpretovali grafy velmi pečlivě a věnovali se podrobnostem, které by normálně považovali za triviální. Například u jednoho z grafů si všimli, že aby mohli mluvit o definičním oboru, musí být vodorovná osa řádně označena (tento graf je spojitá křivka a vodorovná osa není označena). Žáci často omezili definiční obor funkce na tu část grafu, která byla vidět na obrázku. Na druhé straně ovšem žáci často překvapivě nechtěli rozhodnout, zda je funkce například prostá kvůli nedostatku informací: „Nevím, jak graf pokračuje.“ V obou případech jsem je požádala, aby se zamysleli nad tím, zda by graf mohl „pokračovat“.

4. ETAPA: CO POPISUJE TENTO GRAF?

Úloha: Popište graf (závislost) na obrázku.



Třetí etapa vyústila v etapu čtvrtou, v úlohu Co popisuje tento graf? Úloha sloužila jako diagnostická úloha, ve které měli žáci uplatnit osvojené poznatky a ukázat, co se naučili.

Úlohu řešili žáci opět ve skupinách po dvou až třech žácích. Opět se u žáků ukázala značná variabilita způsobů řešení úlohy. Někteří žáci se zaměřili na popis vlastností funkce, jiní se zabývali významem grafu funkce. Graf charakterizovali jako:

– Závislost prodaných kusů vajec (v milionech) na roku prodeje
– Závislost počtu cestujících (v tisících) na roku
– Návštěvnost během týdne
– Spotřeba paliva během dní
– Příbytek a úbytek živočišného druhu během let
– Rychlost kola v desítkách km za hodinu
– Petrovy úspory v dnech
– Hladina vody v lahvi vrcholového sportovce
– Závislost krevního tlaku na velikosti zátěže
– Stav konta banky před a po vykradení
– Spotřeba vody v procentech na obyvatelích ČR
– Počet obyvatel domova důchodců (na dnech)

Někteří se snažili najít i vtipné řešení jako např. „závislost otcovy nálady na známkách“. Objevil se i takový názor, že tento graf necharakterizuje nic z reálného prostředí, protože „nezačíná v nule nebo aspoň není od nuly konstantní“.

Úloha poskytla řadu příležitostí pro diskusi o vlastnostech funkce popsané tímto grafem. Zejména jsme se zaměřili na problematiku popisu diskrétního děje (který žáci často navrhovali) spojitou křivkou.

ZÁVĚR

Představená rozmanitost řešení a schopnost žáků popisovat změny grafů poměrně přesným způsobem ukazuje, že mají s grafy bohaté zkušenosti, které by učitel měl využít při matematickém vymezení pojmu „graf funkce“. Je také důležité, aby si žáci uvědomili, že stejný graf může mít mnoho různých interpretací.

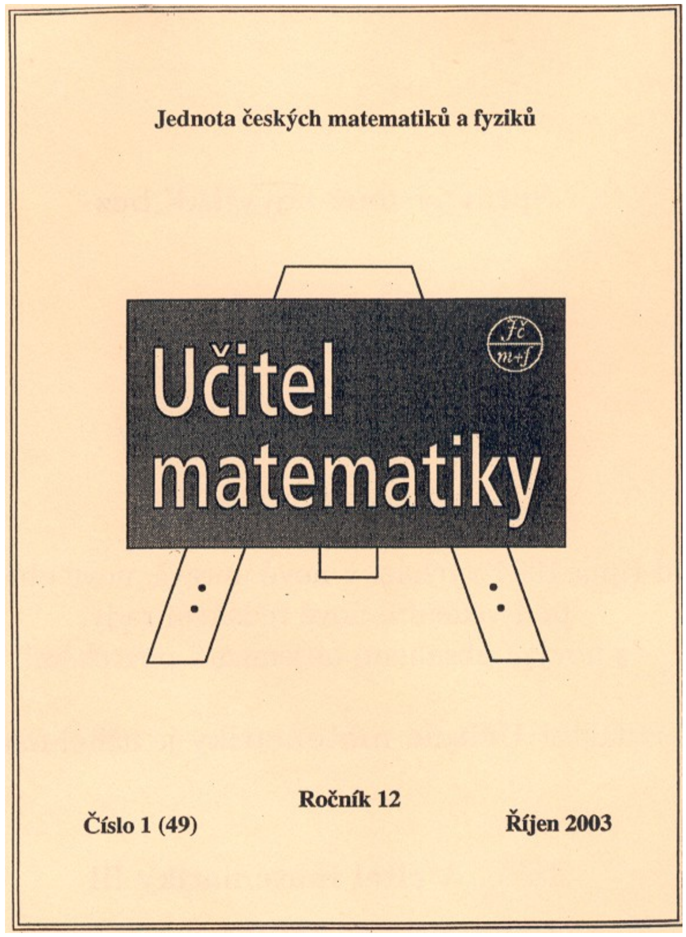
Domnívám se, že pomocí úloh a diskusí kolem nich vedených si žáci zlepšili svou úroveň matematické terminologie, která jim nebyla jen dána jako hotová. Snažila jsem se přejít přirozeně od přirozeného jazyka na začátku aktivity k matematickému jazyku na jejím konci. Bylo by jistě zajímavé zadat stejné úlohy žákům, kteří již tematický celek Funkce probírali, a zjišťovat, zda budou nějaké rozdíly v jejich interpretacích, jinými slovy, jak vyučování matematice ovlivnilo jejich výstupy řešení daných úloh.

Podrobněji jsou tyto úlohy i mnohé další popsány v [2].

LITERATURA

[1] Eisenmann, P. (2006). Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole. In Prokopová, M. (Ed.), Sborník příspěvků z konference Jak učit matematice žáky ve věku 11-15 let. Plzen: Vydavatelský servis, 43-52.

[2] Kubínová, M., Stehlíková, N. (V tisku.) Závislosti a funkce. Kapitola v knize *Pět podnětných pro učitele matematiky*, Praha, PedF UK, 54 stran.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 15. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Cena jednoho čísla je 30,- Kč, roční předplatné za čtyři čísla činí 110,- Kč.

Zájemci o odběr časopisu mohou napsat na adresu:

Redakce Učitele matematiky
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno

nebo poslat e-mail na adresu: ucmat@math.muni.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý — Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Sborník příspěvků semináře Dva dny s didaktikou matematiky

Praha, 2.–3. 2. 2006

Organizátor: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky JČMF

Organizační a programový výbor: Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editoři: Naďa Stehlíková, Darina Jirotková
Sazba: Naďa Stehlíková, systémem LaTeX
Počet stran: 180
Vydala: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a Společnost učitelů matematiky JČMF, v roce 2007

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN 978-80-7290-286-6