Dva dny
s
didaktikou matematiky
2005

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Praha, 10.–11. 2. 2005

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Matematická pedagogická sekce JČMF

Programový a organizační výbor:

Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editor:

Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)
Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci semináře.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo 2005 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN 80-7290-223-7

Obsah

Milé kolegyně a kolegové,

seminář „Dva dny s didaktikou matematiky" proběhl již po deváté. Těžko se nacházejí slova, která by nezazněla v úvodu některého z předešlých sborníků ze semináře. Jak se stalo již tradicí, i tento ročník byl místem přátelských i odborných setkání, místem, kde si účastníci vyměnili řadu nových nápadů a námětů a zejména načerpali nové síly do své další práce.

Vzhledem k probíhající reformě si dovolím ocitovat malý příběh z knihy *Teaching Gap*, kde se její autoři J. W. Stiegler a J. Hiebert pomocí metafory zamýšlejí nad tím, proč jsou reformy v USA tradičně neúspěšné (jejich slova). Metafora popisuje, jak hrdina příběhu prochází sídlištěm, které bylo zbudováno pro lidi přicházející z afrických a arabských zemí.

> Procházeli jsme se po sídlišti a dozvěděli jsme se, že většina těch lidí dříve bydlela ve stanech nebo v primitivních domech a že nejídávali na stole. Vznikl projekt, který měl za cíl přesvědčit je, aby používali stoly. Jak jsme se tak procházeli, naši průvodci navrhli: „Pojďme navštívit jednu z rodin. Podíváme se na jejich byt." A zaklepali na jedny dveře a řekli: „Máme tady návštěvu z New Yorku, můžeme dál?" Vstoupili jsme a uvnitř byla rodina z Jemenu a skutečně jedla na stole. Ale ten stůl byl vzhůru nohama, deska spočívala na podlaze a nohy trčely vzhůru.

Byl tedy projekt úspěšný?

Pokud se někdy budete cítit jako „mravenec, který celý den pospíchá na sever po zádech slona houpavě směřujícího na jihozápad" (slovy P. Piťhy), budeme rádi, pokud ve sborníku, který právě držíte v ruce (nebo prohlížíte na obrazovce počítače), najdete inspiraci, která vám dodá sílu k plnění vašich nelehkých povinností. Zároveň doufáme, že nám i nadále zachováte svoji přízeň a zúčastníte se dalšího ročníku semináře.

Za programový a organizační výbor

Naďa Stehlíková

Hlavní přednášky

Klima ve třídě z perspektivy žáků

Miroslav Klusák[1]

Referát prezentuje stejnojmennou kapitolu, příspěvek autora do kolektivní monografie Pražské skupiny školní etnografie – *Čeští žáci po deseti letech* (Praha: UK PedF, 2004). Díky tomu, že se autoři vrátili v r. 2002/2003 do pražského terénu základních škol z r. 1991/1992 (viz jejich publikace *Co se v mládí naučíš. . . . Zpráva z terénního výzkumu*. 2. vydání, Praha: UK PedF, 2001), mohli se kromě návratu k tématům předchozího výzkumu věnovat též historickému posunu a jeho srovnání s antropologickými konstantami v daných oblastech školního života. Tematická kontinuita a empirická srovnatelnost byly zajištěny stejnými výzkumnými metodami: vývoj škol jako institucí se sledovanými třídami (tzv. pasportizace, za účelem kontroly rámce vlastního výzkumu); klima v několika třídách (opakované dotazníky); blok vazeb škola, rodina, volný čas a hodnoty (opakovaný dotazník); vztah dětí k poznání (opakovaná metoda tzv. poznatkových bilancí); představy dětí o budoucnosti (kombinované etnografické postupy); a volba povolání (kombinované etnografické postupy).

Na klima ve třídě jsme se v roce 1992 ptali 81 žáků 8. ročníku (54 % chlapců) ze 3 různých škol na jednom pražském obvodě. Ve stejných školách to v roce 2002 bylo 73 žáků 8. ročníku (52 % chlapců). Ptali jsme se pomocí dotazníku ICEQ (na míru individualizace prostředí ve třídě) a známého dotazníku „Moje třída“. Autory dotazníků jsou B. J. Fraser a D. L. Fisher. V případě dotazníku „Moje třída“ byl použit překlad J. Laška a J. Mareše (viz Jak změřit sociální klima třídy? *Pedagogická revue*. 1991, roč. 43, č. 6, s. 401–410).

Mezi zkoumanými dimenzemi klimatu lze rozlišit ty, které se týkají vzájemného citu (Osobně vstřícný učitel; Soudržnost třídy); moci (Liberální učitel; Absence řevnivosti; Absence třenic); školní práce (její organizace: Badatelské zaměření výuky; Individuální diferenciace výuky; Účast žáků na řeči vedené ve třídě; a přiměřenost schopnostem většiny: Zvládnutelnost školní práce); a pocitu z toho všeho (Spokojená třída). Ptali jsme se na stav reálný a pomocí téhož souboru otázek pak i na stav ideální (jak by si žáci přáli, aby to ve třídě vypadalo).

Co se historického posunu týče, v souhrnu a na první pohled se sice za deset let klima ve třídě zhoršilo, avšak nijak dramaticky (o 1/10, tj. o 10 % z dosažitelných bodů). Na

[1] *PedF UK v Praze, miroslav.klusak@pedf.cuni.cz*

druhé straně v souhrnu je skryto zhoršení o 1/5 dosažitelných bodů (−22 %) ve sledované soudržnosti třídy a o 1/6 bodů (−16 %) v celkové spokojenosti žáků ve třídě; i to, že v devíti z deseti případů, místo ve čtyřech z deseti, se naměřené hodnoty sledovaných dílčích okruhů nacházejí v „horší“ polovině škály; i to, že v žádném ze sledovaných dílčích okruhů nedošlo ke zlepšení.

Co se týče antropologické konstanty, bylo možné nejen potvrdit to, že žáci si přejí lepší klima ve třídě, než reálně zažívají, ale též přítomnost oportunismu vůči zažívané skutečnosti (který se vyjadřuje v pozitivní korelaci mezi skutečností a přáním, ideály; před deseti lety koeficient 0,81, vysvětluje téměř 2/3 společné variance, v roce 2002 ještě stále dost vysoký – 0,51).

Pokud z daného oboru úvah (a výpočtu koeficientu korelace v roce 2002) vyčleníme čtyři okruhy otázek, a to Spokojená třída, Zvládnutelnost školní práce, Absence třenic, a zvláště Absence řevnivosti, zbývajících šest okruhů otázek opět vykazuje vysokou hodnotu koeficientu korelace mezi zažívanou skutečností a ideály (0,80).

Zároveň tak ovšem zjišťujeme nejen historický posun k menšímu oportunismu vůči zažívané skutečnosti, ale též k diferencovanější reakci žáků na zažívanou skutečnost. Žáci jednak jako by reagovali úměrnou mírou rezignace na nabízené hodnoty, mohli bychom říct „akomodací“ svých ideálů na míru změny k horšímu, a to ve věcech kázně (prakticky nulové), ve věcech učitelova vstřícného vztahu k žákům (markantnější), v moderní organizaci výuky, ale i v soudržnosti třídy (nejmarkantnější vůbec). V případě celkové spokojenosti ve třídě, zvládnutelnosti školní práce, ale i absence vzájemných třenic jako by na relativně nezanedbatelné změny k horšímu nereagovali vstřícnou adaptací, jako by je „asimilovali“ prakticky beze změny svých ideálů. V reakci na změnu k horšímu ve vzájemné řevnivosti však jako by šli ve svých ideálech do konfliktu s realitou změny klimatu školního života, jako by si přáli zakoušet ještě méně vzájemné řevnivosti, než si přáli jejich předchůdci z roku 1992. Naši osmáci v roce 2002 za asimilaci či vzdor vůči reálné zkušenosti pak jakoby platí nespokojeností zažívanou i prožívanou (vyjádřenou nakonec též v okruhu Spokojená třída).

Zjistili jsme tak zároveň, že pokud by pedagogové chtěli zlepšovat klima ve třídách našich osmáků, pak by jim nesporně vyšli vstříc, kdyby se snažili o to, aby ve třídách vládla vyšší spokojenost – zřejmě odvozená především od toho, že žákům pomohou lépe zvládat vzájemné city a soutěživost o hodinách a o přestávkách. Co se týče změny k lepšímu v oblasti tzv. moderní organizace výuky a zvláště její individuální diferenciace, zdá se, že toto přání, tuto potřebu žáci s pedagogy zdaleka nesdílí v takové míře – zde by je pro tyto hodnoty nejdříve museli pedagogové získat.

Výsledky výzkumu považujeme za cenné nejen pro historickou či sociologickou hodnotu zjištěných psychologických poznatků o klimatu ve třídě z perspektivy žáků staršího školního věku. Inspirativní pro praktickou diagnostiku klimatu ve třídě by mohla být i naznačená možnost práce s „měřením“ jeho historických změn, jejich analýzy a interpretace, a to třeba i v případě historie konkrétní třídy.

Podíl učitele matematiky na tvorbě Školního vzdělávacího programu (zamyšlení nad probíhající kurikulární reformou)

Václav Sýkora, Marie Kubínová[2]

Úvod

Rámcové vzdělávací programy (dále RVP) vycházející z politického rozhodnutí o decentralizaci řízení našeho školství podstatně mění činnosti školské správy, funkce vedení škol, ale výrazně ovlivňují také profesní postoje učitelů, tedy i učitelů matematiky. Končí období, kdy bylo jasně a podrobně „shora" řečeno, co a jak má učitel dělat. Školní vzdělávací programy (dále ŠVP) nevzniknou ze dne na den a budou představovat nekrátkou a nejednoduchou etapu ve vývoji naší školské matematiky. Měli bychom rychle přemýšlet, jak se s novou situací vyrovnat, a hlavně začít rychle konat.

Návrh projektu, který předpokládá razantní změnu „pedagogické" osobnosti učitele matematiky, by měl obsahovat přesnou úvahu o tom, jak podle něj naučíme učitele pracovat. Obáváme se, že v opačném případě učitelé vezmou staré osnovy (nebo existující vzdělávací programy) a budou pracovat beze změny podle nich. Rychle musí reagovat především školy vzdělávající budoucí učitele matematiky. Měly by být odpovídajícím způsobem motivovány k tomu, aby připravovaly učitele pro práci s novými programy. Silný tlak na práci vysokých škol mohou dnes vyvíjet například grantové agentury poskytující jim finanční prostředky na výzkum. Zatím jsme, bohužel, nedosáhli toho, aby vysoké školy považovaly přípravu na RVP, jeho ověřování a dopracování za významnou prioritu. Hrozí tak nebezpečí, že vysoké školy připravující učitele budou řešit akademické, vysoce teoretické výzkumné úkoly a vůbec si nevšimnou, že by jimi připravovaný učitel měl dnes vypadat už zcela jinak. Totéž se týká oblasti dalšího vzdělávání učitelů, která je u nás znovu velmi složitě oživována. Bez systematické přípravy a hlavně motivace učitelů nepřinese kurikulární reforma předpokládaná očekávání. Velké procento učitelů bude jistě brát vážně důvěru, s níž mohou sami dopracovávat a konkretizovat učební osnovy a všechny materiály týkající se projektování učiva v konkrétních podmínkách vlastní školy. Musí však vidět, že taková důvěra je reálně poskytována. Tím chceme říci, že bez odpovídající přípravy ředitelů, zástupců, inspektorů, popřípadě dalších státních nebo obecních úředníků se dobrá idea rozvíjející učitelovu samostatnost a profesionální tvořivost může změnit jen v byrokratické opatření.

Nedovedeme si představit, že by součástí ŠVP nebyly podrobné *osnovy* předmětu

[2] *PedF UK Praha, vaclav.sykora@pedf.cuni.cz, marie.kubinova@pedf.cuni.cz*

matematika na příslušném stupni a typu školy, stejně tak, jako si nedovedeme představit, že by učitel matematiky pracoval bez časového plánu pro konkrétní třídu označovaném v současné době jako *tematický plán*. Plánování vlastní práce je pro učitele matematiky stejně nezbytné jako plánování práce v ostatních profesích. Předpokládáme proto, že osnovy a tematické plány budou tvořit součást nově vznikajících ŠVP.

Dvě šance

Nelze vyloučit, znovu připomínáme, že novou situaci vzniklou po decentralizaci řízení školství vyřeší mnohé školy po svém: vezmou stávající podklady pro řízení školy (především osnovy a tematické plány), sepíšou k nim několik stran slohového cvičení a předloží je jako ŠVP. Patrně nebude existovat nástroj, který by jim v tom bránil. Jako učitelé matematiky bychom si však měli uvědomit, že tím ztrácíme možnost využít přinejmenším dvě významné šance, které by vyučování matematice mohly prospět.

První šance – změna obsahu a metod

Především je třeba konstatovat, že nastává historická šance umožňující učiteli matematiky *výrazně ovlivňovat vlastní práci po stránce obsahové i po stránce užitých metod*. V historickém pohledu u nás bylo doposud vyučování matematice řízeno centrálními osnovami, na jejichž plnění dozírala školní inspekce. Nově vznikající volnost není absolutní, je limitována RVP, počty hodin učebního plánu, nezbytností připravit žáky k přijímacím zkouškám, horizontální prostupností škol apod. Asi být úplně volná ani nemůže. Zkušenost Velké Británie s úplným uvolněním školních kurikulí vedla nakonec stejně k přijetí minimálního *národního kurikula* závazného pro všechny školy. Tato výzva je nicméně pro naše učitele matematiky nová. Je pravda, že bez předchozích zkušeností nemůže být plně využitá, neměla by však být zcela zahozena tím, že škola splní úřední povinnost, aniž by cokoli na své práci změnila.

Jak si představujeme možnosti učitele matematiky využít vlastní odborné erudice a profesních zkušeností při zpracování vlastního kurikula? Uvedeme příklady obsahové úpravy současné situace na školách i úpravy týkající se metodického postupu. Jde samozřejmě o naše subjektivní pohledy vyplývající z našich zkušeností i názorů na didaktické zpracování matematického učiva, ale je samozřejmé, že subjektivní stránka (opírající se o profesní odbornost) bude při tvorbě ŠVP vstupovat do hry v podstatně větší míře.

Například v geometrii základní školy jsou v současné době nepřehlédnutelně opomíjena *geometrická zobrazení*. Všichni víme, že pojmy posunutí a otočení jsou dnes zařazovány do rozšiřujícího učiva. Hovoříme-li přitom o geometrizaci reálného světa, víme, že svět kolem nás je dynamický, pohybuje se. Matematické modely těchto pohybů přitom v žádném případě nevidíme jako složení osových souměrností. I laik v nich vidí skládání dílčích posunutí a otočení. Otevírání dveří, jízda dopravním prostředkem, pohyby rukou, mechanismy lidského těla, volný pád, to vše jsou příklady reálných dynamických situací, jejichž matematizaci zatím pilně opomíjíme. Od prvního stupně se přitom zabýváme *souměrnostmi*, které mají ale vesměs statický charakter (fasády budov) a dynamiku vnějšího světa nereprezentují v plné míře.

Jiným příkladem týkajícím se možné variability didaktického zpracování matematického učiva je zavedení *pojmu kvadratická rovnice* na středních školách. Prakticky všechny učebnice vycházejí z pojmu kvadratická funkce a z něho odvozují kvadratickou rovnici a její řešení. Pro střední školy, které nejsou vyloženě zaměřené na matematiku, se nám zdá být vhodnější opačný postup. Vyjdeme-li například z rovnic volného pádu (více méně experimentálně odvozených ve fyzice) nebo z názorných geometrických situací (transformace čtverce na obdélník), je pro žáky těchto typů škol přijatelnější pokračovat ve zobecňování pojmu rovnice. Pojem kvadratické funkce je pro ně příliš těžký a v reálných situacích málo použitelný.

Učitel matematiky má možnost v současné době takto posoudit didaktické situace na konkrétní škole v konkrétní třídě a zvolit vlastní cestu. Pokud ji prosadí do ŠVP v rámci osnov nebo tematického plánu, má zajištěnou možnost tuto cestu realizovat (samozřejmě za předpokladu, že nejde o didakticky nebo matematicky chybné řešení). V další části příspěvku opakovaně zdůrazníme možnost *dospět ke stanovenému cíli různými cestami*. Tato možnost by měla být ovšem doprovázena nástrojem, který zajistí přiměřenou jednotu dosažené úrovně matematického vzdělání v celospolečenském rozsahu. Popíšeme tento nástroj v rámci úvah o standardizaci učitelovy práce.

Druhá šance – zasazení matematiky do kontextu reálného světa

Druhá významná šance, kterou bychom mohli propásnout, je nezbytnost sledovat *vývoj vyučování matematice ve světě*. Je třeba si uvědomit, že školská matematika projde v časově blízkém horizontu podstatnými změnami. Příčinou je zjevně razantní rozvoj výpočetní techniky, která radikálně mění využití matematických poznatků v každodenní praxi. Zdá se to být paradoxní, ale člověk bude ve 21. století patrně potřebovat k úspěšnému profesnímu i soukromému životu méně osvojených konkrétních matematických poznatků než v předcházející době. Rozvoj civilizace se sice bude ve stále větší míře opírat o výsledky matematiky a dalších vědeckých disciplín, pro praktickou potřebu lidí budou však tyto poznatky „předpřipraveny“ v podobě softwarových výbav počítačů. Týká se to i vysokoškolsky vzdělaných lidí, jako jsou techničtí, ekonomičtí a další inženýři nebo pracovníci těchto oborů. Víme všichni, že zatímco se naši otcové ještě učili algoritmus druhé odmocniny, v současné době uvažují didaktici matematiky už o nepotřebnosti algoritmu písemného dělení. Výzkumy ukazují, že běžný občan se ve svém praktickém životě spokojí s aritmetikou přirozených čísel a desetinných čísel zaokrouhlených na dvě desetinná místa (peníze jsou až na prvním místě). Méně již vstupuje do života běžného občana matematický poměr nebo výpočet hodnot přímé či nepřímé úměrnosti (trojčlenka).

Geometrizace reálného světa by ve škole měla být prioritní, žijeme přece v euklidovském trojrozměrném prostoru. Jednoduché výzkumy vám ale opět ukáží, že budete obtížně hledat občana, který při zatloukání hřebíku do podkrovního stropu pomyslí na definici nebo kritérium kolmosti přímky k rovině, stejně obtížně najdete dokonce i mezi učiteli matematiky základní školy občany, kteří dokáží vyslovit přesnou definici podobnosti v rovině nebo v prostoru (i když se denně setkávají s jejími předmětnými modely). Zato však všichni *pracujeme s daty* a informacemi znázorněnými grafy, diagramy nebo tabulkami, všichni *měříme* a přepočítáváme jednotky (přinejmenším peněžní měny), všichni hledáme optimální *strategie řešení* nejrůznějších (i nematematizovaných) problémů, všichni se potřebujeme *orientovat* v našem (trojrozměrném) prostoru a všichni pracujeme s *obrazy* trojrozměrných těles na dvojrozměrném papíru nebo monitoru. Nikdo dnes nesčítá „nudli“ čísel u pokladny v Tescu, všichni nakupující ji ale přelétnou a snaží se *odhadnout*, zda nebyli (příliš) ošizeni. V tomto smyslu bude patrně také třeba měnit školskou matematiku.

Domníváme se, že pojem *kompetence*, který pedagogika ve světě zavádí a který didaktika matematiky ve světě velmi intenzivně studuje, by mohl přispět k nalezení východiska. Nechceme dopadnout jako programátoři! Před dvaceti lety byla totiž zvažována možnost zavedení programování jako povinného všeobecně vzdělávacího předmětu pro všechny občany. Říkalo se, že všichni si musí osvojit základy tvorby algoritmů jako obecnou dovednost nezbytnou pro praktický život. Technika nás, bohužel, předstihla, dnes všichni pracujeme jako uživatelé s počítači jako s černými skříňkami, do kterých nevidíme, a přitom si nedovedeme bez nich už představit naši existenci. Programátorů, kteří zajišťují nesmírně rychlý rozvoj informatiky a výpočetní techniky, je přitom ve světě snad pár desítek tisíc, mají speciální vzdělání a vzdělávání a stačí to. Nejčernější vize říkají, že by matematika mohla dopadnout podobně.

Neměli bychom to připustit. Je totiž reálné předpokládat, že matematiku jako vědu bude v dostatečném rozsahu rozvíjet stejně tak několik desítek tisíc specialistů připravovaných na speciálních školách, zatímco celému zbytku lidstva bude k životu postačovat aritmetika přirozených a desetinných čísel (na dvě desetinná místa). Tyto obavy nejsou bezpředmětné, ve školách jsme svědky toho, jak se hledají hodiny pro nově zaváděné předměty (ekologie, multikultura, počítače, drogy, rodičovství apod.) a paralelně se setkáváme s hlasy, že „matematika učí věci, které člověk v životě nevyužije“.

Učitel matematiky a tvorba Školních vzdělávacích programů

V čem by tedy měl spočívat podíl učitele matematiky na zpracování ŠVP? Dohodli jsme se, že nebudeme mluvit o vzorovém ŠVP pro matematiku, protože vzdělávací program je záležitost všech předmětů a vzdělávacích oblastí školy. Nelze z nich matematiku vytrhnout jako izolovanou záležitost.

Vycházíme přitom z přesvědčení, že zpracování ŠVP by v žádném případě nemělo představovat jednorázovou akci, jejíž výsledek potom řadu let visí na zdi ředitelny jako závazné dogma. Zpracování ŠVP musí být *podnětem k diskusi v učitelském sboru* a vedení školy musí při definitivním rozhodování z této diskuse vycházet. Je třeba podotknout, že bez osvíceného přístupu vedení škol k celé kurikulární reformě budou jakékoli pokusy o zkvalitnění práce škol zbytečné.

Uvedeme v bodech a poznámkách naše názory na angažovanost učitele matematiky (předmětové komise) při tvorbě ŠVP. Otázkami naznačujeme problémové situace, které by diskuse na konkrétní škole měla řešit.

1. **Analýza prostředí školy** (silné a slabé stránky školy z hlediska matematiky (dále M), profilace školy a žáka):

Kritéria hodnocení silných a slabých stránek školy z hlediska vyučování M. Jaký posun bychom si přáli, kde bychom chtěli školu mít z hlediska vyučování M? Profil absolventa. Marketing okolí školy. Představy rodičů. Co dělá vedení školy pro zajištění dostatečného počtu zájemců o studium na škole? Konkurence sousedních škol. Má smysl o těchto otázkách z hlediska vyučování M uvažovat?

2. **Učební plán** (včetně volitelných předmětů, zájmových činností apod.):

Jak odhadujeme svoje možnosti prosadit zájmy M při tvorbě učebního plánu? Jaké argumenty a postupy navrhujeme k jejich prosazení? Jakou pomoc a od koho bychom potřebovali? Lze vytvořit loby učitelů M prosazujících zájmy předmětu? Postoje učitelů M v případě nematematického zaměření školy.

3. **Cílová a obsahová náplň M** rozvržená do času (struktura kompetencí, osnovy, tematický plán):

Jak ovlivní cílovou a obsahovou náplň M profil absolventa obsažený v ŠVP? Vyplývá z tohoto profilu cílové zaměření absolventa školy z hlediska M? Máme představy o úrovni, na kterou chceme žáka matematicky vzdělat? Jaký je standard určující úroveň žáka (v jednotlivých ročnících, nejen absolventa). Máme kontrolní nástroje pro ověření této úrovně? Co jsou kompetence a jak jsou formulovány? Sledujeme spíše faktografii nebo formativní působení matematiky? Jak se to odráží v hodnocení žáka?

4. **Materiálně technické zabezpečení** (učebnice, pomůcky apod.):

Jaké učebnice užíváme? Užití kalkulaček – je možné na škole vyřešit jednotně jejich užívání? Kabinet M? Vybavenost dalšími pomůckami? Možnosti nákupu (kde)? Máme plán do budoucna, nebo budeme nakupovat, co nás momentálně napadne? Jsme zařazeni do dlouhodobého finančního plánu školy? Můžeme vůbec něco nakupovat? Můžeme si dovolit multilicenci Cabri geometrie za 18 000,-Kč?

5. **Výpočetní technika** (třída PC, software):

Máme přehled o vybavení školy výpočetní technikou určenou k využití ve výuce? Máme zvláštní učebnu výpočetní techniky? Máme Cabri geometrii? Je nakupovaný software didakticky hodnotný? Sledujeme trendy ve využití PC při vyučování matematice?

6. **Mezipředmětové vztahy** (včetně průřezových témat, environmentální výchova, občanství, svět práce, tolerance, drogy, zdraví apod.):

Mezipředmětové vztahy patří mezi pedagogický „evrgrín“. Byly o nich napsány monografie, vymýšleny teorie, sepsány mnohé zkušenosti učitelů, publikovány různé metodické pokyny. Pokud jde o vyučování matematice, domníváme se, že jde o jednu z klasických ukázek pedagogických problémů, jež je mnohem rozumnější a efektivnější řešit přímo ve škole než na centrální úrovni (patří mezi ně například i problematika užití kalkulačky). Na úrovni ŠVP by mohly být, podle našeho názoru, promýšleny bez velkých nároků na zatížení učitelů. Víme například, že matematika nemůže být nikdy beze zbytku sladěna s fyzikou. Ve vztahu k ostatním předmětům bývala návaznost na matematiku většinou podhodnocována vzhledem k různorodosti učiva. Ukážeme příklad časově nenáročného postupu, jehož hlavním cílem je *výměna informací* mezi učiteli různých předmětů. V jedné škole se takto scházeli učitelé M, Čj, D a Tv a sepsali si během 10 minut informace o tom, co budou učit příští týden:

Program výuky 8. ročníků
na týden 20. 10. 2003 - 24. 10. 2003

- Renesance v Anglii, W. Shakespeare.
- Zvuková podoba hudby renesanční.
- Zrcadlo sebepoznání. Kdo jsem.
- Služby obyvatelstvu, cestovní ruch.
- Mocnina a odmocnina kladného čísla. Operace s mocninami, úpravy výrazů.
- Souvětí podřadné, větný člen vyjádřený vedlejší větou. Předložky vlastní a nevlastní.
- Tlak. Hydrostatické paradoxon.
- Životopis.
- Konec tureckého nebezpečí. Okolí Vídně. Turecký motiv u Mozarta.
- Obratlovci – orgánové soustavy. Lékařství v období renesance – Paracelsus, Eustachio.
- Alkalické kovy.
- Basketbal – obrana. Florbal – přihrávky, střelba na bránu. Posilování břišních svalů.

Vzájemná informovanost poskytovala matematikovi možnost využít například učiva o spojkách v Čj k posílení logické terminologie, učiva z dějepisu o historickém kontextu fylogeneze matematických pojmů (1683 – například moderní matematická symbolika, zavedení symbolu a^2, infinitezimální počet, fyzika a matematika, analytická geometrie), učiva z F k opakování dovednosti vyjádřit proměnnou z daného výrazu. Ale i služby obyvatelstvu a cestovní ruch představují práci s daty (diagramy, statistické přehledy), která by měla být průběžně rozvíjena ve všech předmětech.

Jak je řešena koordinace s fyzikou (ostatními předměty)? Kdo se jí zabývá, je řízená? Existuje průběžná vzájemná informovanost učitelů o probíraných tématech? Jak je realizována?

7. **Metody a formy práce** (soutěže, mimotřídní a mimoškolní aktivity apod.):

Projektová metoda, metody vnitřní a vnější diferenciace (individuální přístup, skupinová práce, „chytré“ třídy, apod.). Matematické soutěže. Konkrétní formy mimotřídních a mimoškolních aktivit v M. Sledujeme trendy v práci s talentovanými žáky v M?

8. **Hodnocení:**

Systém hodnocení by měl být rovněž zakotven v ŠVP po důkladné diskusi v předmětové komisi. Pokud jde o moderní trendy v hodnocení žáků v matematice, víme například, že směřují k tomu, abychom nehodnotili jenom konkrétní poznatky a postupy, ale usilovali o vícerozměrný přístup k hodnocení. Hovoříme o tom, že hodnocení by mělo nabývat charakteru „vektoru“ na rozdíl od dosavadního „skalárního“ přístupu.

Nejasnosti u nás panují v současné době ve vztahu ke *slovnímu hodnocení*. Známe ředitele škol, kteří se domnívají, že jeho povinné zavedení v jejich škole představuje progresivní prvek ve vyučování, a zajímají se spíše o mediální využití celé problematiky. Naše zkušenosti zatím svědčí o účelnosti slovního hodnocení na 1. stupni, současně však máme pochybnosti o jeho zralosti pro matematiku na 2. stupni ZŠ. Pro ilustraci uvedeme příklad reálného slovního hodnocení užitého na konkrétní škole v 6. ročníku. Můžeme diskutovat o jeho efektivnosti.

„Zuzana X.: Zuzano, počítání s desetinnými čísly už je docela v pořádku, pokud jde o násobení; i úlohy na dělení se ti daří zvládnout. Umíš i dobře zapsat zbytek při dělení. Slovní úlohy řešíš také pěkně. Zaměříme se příští rok hlavně na zápis postupu řešení. To se týká také konstrukčních úloh. Vím, že užití matematických značek není jednoduché, ale řešení matematických úloh je potřebuje. Zato měření úhlů ti jde pěkně. Líbí se mi, že projevuješ samostatný zájem o další poznatky, živě se účastníš práce při vyučování. Byl bych rád, kdyby sis svou velmi dobrou úroveň udržovala. Oceňuji velmi pěknou úpravu zápisů v sešitu.“

Jaké formy hodnocení užíváme v naší škole? Mohou učitelé užívat různé formy hodnocení, nebo je nařízena jednotná forma? Diskutují učitelé o formách hodnocení? Bere vedení školy zřetel na takové diskuse? Jak je zajištěno to, aby žáci a rodiče rozuměli užívanému hodnocení (aby jim poskytovalo dostatečnou informaci), a vyvozují z něho důsledky?

9. **Specifické vzdělávací aktivity:**

Jakou zvláštní pozornost věnujeme v M dyskalkulikům, LMD, integrovaným žákům, popřípadě dalším žákům se specifickými potřebami? Jak se vyrovnáváme se skupinou žáků, kteří nestačí, a my nemáme čas a prostředky k tomu, abychom je dostali na průměrnou úroveň třídy?

10. **Organizační aspekty:**

Počty hodin a jejich členění (algebra a geometrie), zařazení v rozvrhu, povinné písemky, termíny úkolů, počítačové zpracování úředních dokumentů apod.

11. **Další vzdělávání učitelů:**

Kariérní růst, specializace a profilace učitele, zahraniční kontakty apod. Existuje ve škole plán DVU, můžeme ho jako učitelé matematiky ovlivňovat? Specializují se učitelé z hlediska dalšího vzdělávání učitelů (např. učitel zaměřující se na soutěže a talenty v matematice, učitel zaměřený na využití počítačů v matematice apod.)?

Postoje učitele matematiky

Pokusme se ještě shrnout, v čem bychom tedy chtěli *měnit konkrétně postoje* učitelů matematiky.

Především to je v oblasti *cílového zaměření učitelovy práce*. Učitel by neměl vnímat svou práci jako postupné probírání (odučení) témat osnov jednoho po druhém (až si na konci 9. ročníku odškrtne poslední téma osnov). Měl by svou práci vnímat jako *směřování* k určitému cíli, jímž je předem stanovená (učitelem plánovaná) úroveň matematického vzdělání žáka. Směřování k tomu cíli by mělo být kontrolovatelné („standardizováno") a nejen samotným učitelem kontrolováno. Měřit dosaženou úroveň umíme v matematice pouze a výlučně řešením úloh nebo problémů (máme tím na mysli provozně použitelné způsoby).

Uvedeme příklad: Učitel rozvíjející prostorovou představivost žáka by měl mít k dispozici sadu úloh (svých nebo převzatých z nějakého standardu – Scio, Běloun, Kalibro apod.) s tím, že po ukončení určité etapy práce (např. konec 9. ročníku) předloží žákům tyto úlohy. Pokud je žáci vyřeší, řekne si, ano, moji žáci mají prostorovou představivost na úrovni, jakou jsem si předsevzal a naplánoval. Dosáhl jsem v této oblasti svého cíle. Pokud žáci úlohy nevyřeší, řekne si, nenaučil jsem to, co jsem plánoval, a musím přemýšlet o tom, zda je chyba ve mně, v žácích nebo někde jinde. Taková (standardizovaná) kontrola by měla probíhat i v dílčích etapách (např. po jednotlivých pololetích). Podobně by měl učitel prostřednictvím vybraných sad úloh hodnotit svou práci i v ostatních tématech nebo kompetencích (zda v souladu se svým cílem naučil řešit rovnice nebo slovní úlohy, ale i na jaké úrovni si žáci osvojili dovednosti argumentovat, pracovat s daty, zobrazovat tělesa apod.). Samozřejmě, že do výběru takových sad úloh vstupuje subjektivní faktor. Postupně by však měly vznikat podobné nástroje na objektivnější úrovni a měly by být učitelům nabízeny (možná i v různých verzích).

Hodnocení práce žáků

Předchozí představa souvisí s *hodnocením práce žáků* (evaluace) a vlastní učitelovy práce (*autoevaluace*). Hodnocení práce žáků by nemělo vycházet výlučně z úrovně osvojení faktografie, nemělo by být orientováno převážně na obsahovou stránku školské matematiky, ale mělo by se zaměřovat na úroveň osvojení *kompetencí*. Kterých?

- Matematické myšlení (pochopení obsahu a přiměřeného rozsahu daných matematických pojmů a práce s nimi v různých typech tvrzení). Abstrakce (práce s proměnnou) a její úloha v praktickém životě (obecná tvrzení a soudy).

- Matematická argumentace (znalost základů a praktické použití principů matematických důkazů a transfer těchto dovedností do reálných situací praktického života).
- Vymezení problému a nalezení strategie jeho řešení (analýza dané situace, návrh různých strategií jejího řešení, jejich posouzení a výběr nejvhodnější strategie, návrh konkrétního postupu – konstrukční úlohy).
- Matematizace reálných situací (uchopení reálné situace ve verbálním nebo jiném popisu, „matematizace“, tj. převod „reality“ do jazyka matematických struktur, práce s matematickými modely a následující „dematematizace“, tj. interpretace matematických modelů v jazyce „reality“).
- Užití znakových reprezentací a jejich transformace (symbolika, práce s proměnnou, dekódování, formy znázornění matematických objektů a vztahů mezi nimi). Práce se separovanými modely matematických pojmů. Různé přístupy k vytváření separovaných modelů.
- Komunikace (schopnost pochopit písemné nebo ústní výroky, vyjádřit je a sdělovat jejich význam).
- Algoritmy a zákonitosti jejich vytváření (geometrické konstrukce, zápisy řešení slovních úloh).
- Závislosti a funkční myšlení (reálné závislosti, verbální popis, pravidelnosti – souměrnosti, pravidelnosti ve výpočtech).
- Kvantifikace a numerace spolu s rozvíjením pojmu číslo („matematické řemeslo“, algoritmy aritmetických operací, výrazy, „technické dovednosti“).
- Práce s daty a informacemi (sledování změn, čtení diagramů a grafů, interpretace každodenních informací, shromažďování a tabelace výsledků).
- Zobrazování (trojrozměrná tělesa ve dvojrozměrné rovině, projekce).
- Prostorová (geometrická) představivost (orientace).
- Měření, vážení, představy o velikosti a množství (odhady, převody jednotek, peněz apod.).
- Práce s chybou jako významný nástroj rozvoje žákovských kompetencí, jehož pojetí je třeba ve vyučování matematice výrazně změnit.
- Užití pomůcek a nástrojů (výpočetní a informační techniky, jejich matematická podstata, praktické využití).
- Chápání matematického vzdělání jako součásti lidské kultury (historické začlenění jednotlivých poznatků).
- Hledání a vytváření integračních vazeb s ostatními předměty (fyzika, přírodovědné disciplíny, jazyk jako formální komunikační prostředek, matematika a výtvarné umění nebo hudba).

Hodnocení práce učitele

Autoevaluace práce učitele by měla vycházet ze současných poznatků didaktiky matematiky a jejich průběžné aktualizace. Měli bychom přemýšlet o profesních kompetencích učitele, které se v mnohém těsně váží k osvojovaným kompetencím žáka, v některých případech však mají specificky profesní charakter. Které máme na mysli? Patří mezi ně především konstruktivistické pojetí pojmotvorného procesu, motivace žáků k matematice, diagnostika žákovských dispozic a předpokladů, práce s talentovanými žáky, mezipředmětové vztahy, formy hodnocení, využití didaktické techniky, práce s chybou.

Nepochybujeme o tom, že změna postojů učitele matematiky je mimořádně náročný cíl v současných podmínkách naší školské soustavy. Musíme k němu přistupovat s velkou odpovědností, a to jako k problému, který je otevřený a který je třeba řešit. Tvrdíme přece, že matematika rozvíjí obecnou dovednost *řešit problém* jako málokterý jiný předmět.

Literatura

1. Helus, Z. (2001). Čtyři teze k tématu „změna školy“. *Pedagogika*, č. 1, 25–41.
2. Jaworski, B.(1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. The Falmer Press.
3. Kacíková, H. (1997). *Kooperativní učení, kooperativní škola*. Portál, Praha.
4. Kubínová, M., Novotná, J.(1997). Students’ Independent Work in Mathematics Out of School. *Mathematics Competitions*, Vol. 10, No 2, 14–28.
5. Maňák, J. (2000). *Nárys didaktiky*. Brno, Masarykova univerzita v Brně.
6. Tichá, M., Kubínová, M.(1998). On the activiting role of projects in the classroom. In *CERME 1*. Osnabrück 1998. http//www.erme.uni-osnabrueck.de/cerme1/group5.htm
7. OECD (1999). *Měření vědomostí a dovedností*. Překlad z angl. Praha, ÚIV.
8. Kubínová, M. (2002). *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti*. Praha, PedF UK.
9. Fuchs, E., Kubát, J. a kol. (1998.) *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. Praha. Prometheus, 1998.
10. Vopěnka, P. (2000.) *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha, Práh.
11. Hejný, M. (2002.) Úvod. In *Sborník příspěvků z 8. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Prachatice 7.–9.11.2002. Praha, JČMF.
12. *NCTM Principles and Standards for School Mathematics*. (2002) Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, (standards-e.nctm.org).
13. Sýkora, V. Práce s daty v západoevropských školách. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10-15 let, sborník příspěvků*, UK PedF 2004.

Jednání v sekcích

Rozvoj komunikačných zručností v príprave učiteľov matematiky pre ZŠ s využitím IKT

Jaroslava BRINCKOVÁ[1]

Výsledky medzinárodných meraní úrovne čitateľskej gramotnosti, prírodovedného a matematického poznania žiakov 2. stupňa ZŠ v projektoch PISA ´03, MONITOR ´03 a TIMSS´03 ukázali [5], že veľká skupina našich žiakov nevie svoje matematické vedomosti použiť pri riešení aplikačných úloh. Problémovým, projektovým a typovým slovným úlohám, ktoré umožňujú rozvinúť schopnosť objavovať matematické objekty a vzťahy medzi nimi, diskutovať o možnostiach riešenia úlohy prácou vo dvojiciach, či v skupinách, nie je v súčasnom vyučovaní matematiky venovaný dostatočný časový priestor. Pritom práca v heterogénnych skupinách dáva šance aj pre slabších žiakov v matematike pochopiť podstatu použitých algoritmov pri riešení úloh pri komunikácii so spolužiakmi.

Skúmame interakcie v kooperatívnej práci žiakov

V súčasnej didaktike matematiky podľa [3] sú známe pri realizácii skupinovej práce a kooperatívneho učenia sa ako organizačnej forme dva základné prístupy k výskumu interakcií v skupine:

- skúmanie procesov – *procesuálne orientovaná didaktika matematiky*
- analýza obsahu komunikácie – *poznávanie procesov, ktoré prebiehajú vo vedomí žiaka*

Významnú úlohu v tomto skúmaní zohráva príprava učiteľov na analýzu dialógu v pedagogickej komunikácii použitím metódy klinického interview. S touto problematikou sme prvýkrát pracovali v roku 1983 po oboznámení sa s prácami V.F. Šatalova [4]. Z našej dlhodobej skúsenosti s touto metódou vyplynulo, že ako najvhodnejší prostriedok pre identifikáciu interakčného aspektu diskusie a hodnotenie matematického obsahu odpovede je transkript videozáznamu, prípadne zvukového záznamu reálnej vyučovacej hodiny. Umožňuje hodnotiť vyučovaciu jednotku z viacerých pohľadov. V didaktickej príprave učiteľov matematiky sa v súčasnosti zameriavame na osem kategórií hodnotenia vyučovacej jednotky:

[1] *PF UMB Banská Bystrica, SR, jbrinckova@pdf.umb.sk*

- kladenie otázok (predchádzajúcemu hovorcovi, na vlastné premýšľanie pri práci, pri rozbore slovnej úlohy),
- reakcie (otázky na objasnenie, súhlas, nesúhlas, opakovanie),
- riadenie vyučovacieho procesu,
- vysvetlenie s dôkazom,
- premýšľanie nahlas behom činnosti alebo učenia,
- prezentácia myšlienok,
- komentár,
- opätovné nastolenie problému.

Tvorba transkriptu vyučovacej jednotky je časovo náročná a vyžaduje si individuálnu tvorivú prípravnú prácu so záznamom z vyučovacej jednotky na seminár z didaktiky matematiky u každého adepta učiteľstva. Využitie multimediálnych technológií umožňuje v rámci e-learningu v prostredí Moodle [6] sprístupniť takúto databázu vyučovacích jednotiek študentom. Súčasne motivuje k potrebe zamyslieť sa nad vlastnou prípravou na vyučovanie počas priebežnej pedagogickej praxe z matematiky. Študenti tak aktívnejšie pristupujú k štúdiu inovácie obsahu a vyučovacích metód v matematike s dôrazom na medzipredmetovú integráciu pri tvorbe motivačných rámcov vyučovacích jednotiek. Poznatky o medzipredmetových vzťahoch im umožňujú zostavovať problémové, projektové a slovné úlohy pre osem typov inteligenčných okruhov (inteligencia jazyková, logicko-matematická, priestorová, telesne-pohybová, hudobná, intrapersonálna, interpersonálna a ekologická) [2], v ktorých žiaci pracujú. Pri tvorbe týchto úloh sa zamýšľame nad intelektuálnymi cieľmi, na rozvoj ktorých sa pri ich riešení úlohy zameriavame. Odpovedáme si na otázku: Vyžaduje táto úloha myslenie na úrovni poznania, pochopenia, aplikácie, analýzy, syntézy, hodnotenia alebo tvorivosti žiaka? V súlade s intelektuálnym cieľom sa pri tvorbe úloh používajú pobádacie slová z Bloomovej taxonómie, umožňujúce daný cieľ dosiahnuť. Do svojich príprav študenti vhodne začleňujú skupinovú prácu a kooperatívne učenie, na prípravu ktorých využívajú výhody a dostupnosť multimediálnych technológií na našej katedre.

Príprava učiteľov matematiky v kontexte medzinárodnej spolupráce

Snaha o prípravu učiteľov matematiky pre 2. stupeň ZŠ, ktorí by našli uplatnenie na trhu práce v rámci EU, nás viedla k porovnávaniu obsahu prípravy adeptov učiteľstva v stredoeurópskom priestore. Vyústila v roku 2003 do projektu medzinárodnej spolupráce Socrates – Comenius 2.1 s akronymom LOSSTT-IN-MATH, ktorého koordinátorom sa stala katedra matematiky Univerzity v Pise a partnermi kolegovia z katedier matematiky univerzít v Siene, Florencii, Paríži, Odense, Prahe a Banskej Bystrici. Analýza obsahu učebných plánov prípravy učiteľov matematiky ukázala na výrazné rozdiely v príprave učiteľov v matematike a v technologickej podpore vyučovania. Cieľom projektu preto je rozvíjať učiteľské kompetencie tak, že:

- zaradíme vybrané „najlepšie“ vzdelávacie aktivíty jednotlivých účastníkov projektu do prípravy učiteľov matematiky,
- využijeme multimediálne technológie v príprave učiteľov aj počas priebežnej a súvislej pedagogickej praxe študentov,
- zintenzívnime jazykovú prípravu na prácu učiteľa matematiky v zjednotenej Európe.

Naša katedra sa v tomto projekte podieľa na spolupráci s KMDM PedF UK v Prahe pri vyučovaní projektu Šťastné čísla. Do medzinárodnej prípravy učiteľov matematiky sme zaradili v spolupráci s Florenciou náš projekt Tangram v matematike. Vychádzame v ňom z perspektív vyučovania geometrie pre 21. storočie, ktoré navrhujú posilniť geometrické myslenie žiaka rozvíjaním umenia:

- *počítať* — rozvíjajúce podľa M. Hejného a F. Kuřiny [2] schopnosť synchronizovať v jednom myšlienkovom procese rôzne mentálne funkcie. (*Napríklad pri výpočte obsahu Tangramu v tvare obdĺžnika so stranami dĺžky 16 cm a 32 cm určujeme súčin dĺžok jeho strán. Násobíme* $16 \cdot 32$. *Najprv musíme vziať čísla 6 a 2 a vynásobiť ich (riadením); vieme, že* $6 \cdot 2$ *je 12 (dlhodobá pamäť); číslo 12 rozložíme na 1 a 2 (operácie nižšej úrovne); číslicu 2 zapíšeme na isté miesto (riadenie); číslo 1 si zapamätám (uložené v krátkodobej pamäti); ďalej vezmem čísla 2 a 1 a vynásobíme . . . .*
- *vidieť, zostrojovať, dokazovať.*

My k tomuto umeniu priraďujeme prípravu rozvíjajúcu *umenie komunikovať* vo vyučovaní matematiky na ZŠ. Doporučujeme preto učiteľom v praxi: pozrite si videozáznam svojej vyučovacej hodiny matematiky a analyzujte efektívnosť komunikácie v triede.

Literatúra:

[1] Coufalová, J.: *Možnosti učebnic matematiky v procesu individualizace vyučování.* Habilitačná práca. Banská Bystrica: PF UMB, 2001

[2] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001

[3] Hejný, M., Stehlíková, N.: *Číselné představy dětí*. Praha: PedF UK, 1999

[4] Šatalov, V.F.: *Kam a jak zmizeli dostatočné z matematiky*. Hranice na Moravě: VU 1980

[5] `www.statpedu.sk/projekty.htm`

[6] `www.pdf.umb.sk/moodle/_course/`

Několik námětů ke konstruktivnímu vyučování matematice na ZŠ

Jana Cachová[1]

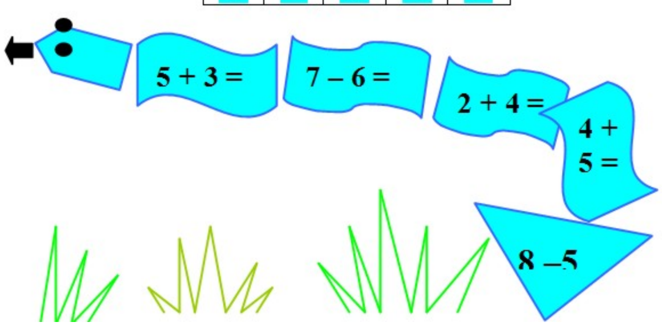
„. . . Člověk není pasivním příjemcem podnětů přicházejících z vnějšího světa, ale ve zcela konkrétním smyslu tvoří svůj svět. . . “ L. von Bertalanffy

V současné době si mnozí učitelé (zvláště na 1. stupni) uvědomují skutečnost, že má-li být vyučování úspěšné, musí být v prvé řadě pro žáky zajímavé. Pokud jsou činnosti ve vyučování pro děti přitažlivé, práce v hodině žáky baví a nenudí je. Učitelé často volí úlohy, které zaujmou formou (různé rébusy, křížovky, tajenky, pohádkové příběhy), a přitom mimoděk (*aby si žák příliš neuvědomoval, že musí počítat*) anebo právě proto (*bez vyřešení početních úloh nelze problém překonat*) vedou k činnostem spjatým s matematikou (př. 1).

Příklad 1:
Vypočítej jednotlivé dílky hada a doplň písmena. Odkud had leze?

Had leze z . . . .

3	8	6	1	9
Y	T	Á	R	V



Příklad 2:
*Doplň místo * vhodné početní úlohy.*

55		54		53
-14		-14		-14
65		64		*
-14		-14		
75		*		73
-14				-14
*		84		*
		-14		

Obr. 1

Zájem je sice důležitý, aby bylo vyučování efektivní, záleží však také na činnostech, které žák při vyučování vykonává. U kryptogramu (př. 1) lze z podivné formulace *vypočítej jednotlivé dílky hada* poznat, že povede k formální práci s čísly. Děti počítají, aby přečetly tajenku. Přestože je počítání může zaujmout, já osobně motivaci, kdy je matematika jen přítěží na cestě ke splnění úkolu, nepovažuji za vhodnou. Podobné úlohy nerozvíjejí kladně vztah dítěte k matematice. Matematika je v nich překážkou, která se dětem staví do cesty a kterou musejí překonávat.

[1] *Katedra matematiky PdF UHK, jana.cachova@uhk.cz*

Domnívám se, že je vhodnější zakládat vztah k matematice na jejím kladném přínosu pro každodenní život, učit děti matematiku správně aplikovat. Příklad 1 jen procvičí početní dovednosti, nepodporuje rozvoj hlubších matematických souvislostí. Stejně tomu je i v případě dalších úloh, jako příklad jmenujme vybarvování obrázků, kdy mají žáci podle výsledků početních úloh zabarvit bílá políčka, atd. Matematika je v pozici pouhého nástroje k dosažení jiného cíle, který s ní většinou vůbec nesouvisí.

Je zapotřebí volit úlohy zajímavé nejen formou, ale rovněž podnětné hlubším matematickým obsahem. Úloha pak vede žáka k porozumění pojmům a k pochopení souvislostí (Wittmann, Müller, 1990). Navíc učí matematiku aplikovat, pomáhá při řešení problémů v běžném životě. Tím se utváří kladný vztah dítěte k matematice.

Příklad 2 řešili žáci třetí třídy – měl je vést k pochopení hlubších souvislostí mezi čísly a početními operacemi. Úlohy nejsou voleny náhodně, ale podle jistého pravidla. Podstata úlohy však není jednoznačně formulována, na místo $***$ je možné doplnit cokoli. Žák musí vytušit, co se po něm chce. Uzpůsobení odpovědi očekávání učitele je dalším z problémů školní praxe – nejde o porozumění podstatě, ale o hledání odpovědi, která obstojí u učitele.

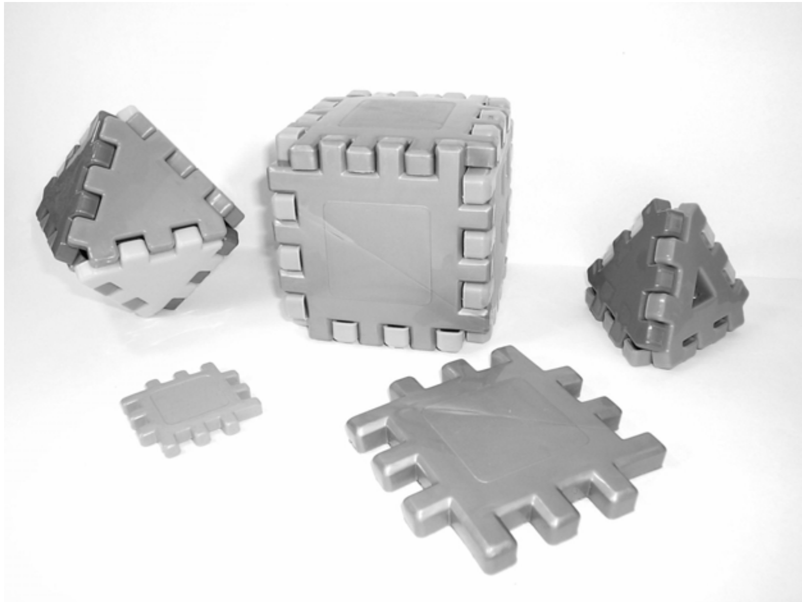
Jak správně motivovat žáka k práci v matematice, abychom získali a udrželi jeho zájem? Jak vést děti k porozumění pojmům a souvislostem? Jaké úlohy jsou k tomu vhodné?

Odpověď je možné hledat v konstruktivním vyučování, které se orientuje především na systematické rozvíjení matematického světa žáka (jeho představ o číslech, geometrických útvarech, závislostech, atd). Úkolem učitele je probudit zájem a aktivitu žáka, neboť spolu s radostí z práce a úspěchu jsou důležitou motivační silou. Zájem je vhodné podporovat podnětnými úlohami, vedoucími ke správnému porozumění pojmům a souvislostem. Činnost žáků přispívá k rozvoji jejich představ o matematice – vše si vyzkouší, nepřebírají pouhé informace. Tvořivá činnost je nejlepším předpokladem pro rozvoj dítěte. Pro učitele to znamená, aby také pěstoval a rozvíjel vlastní tvořivost.

Pouze na základě úloh nelze rozhodnout o tom, zda je vyučování konstruktivní či nikoli – stejně jako není možné napsat ryze konstruktivní učebnici – nejde o samotný obsah výuky, ale v prvé řadě jsou důležité procesy, které se při vyučování odehrávají (Hejný, Stehlíková, 1999). Přesto se domnívám, že některé úlohy jsou méně vhodné, jiné naopak mohou sloužit jako dobrý námět – vždy ale záleží na učiteli, jak s nimi naloží. Zajímavé úlohy jsou tedy nutnou, nikoli však postačující podmínkou konstruktivního vyučování.

Náměty pro konstruktivní vyučování na základní škole – práce s jednoduchou stavebnicí

Lze pracovat v různých dimenzích (drátěné modely těles, špejle; stavby z jednotkových krychlí, krychlová tělesa; modely povrchů, hranice těles – pro náměty úloh jsem užila stavebnici, která modeluje hranice těles – viz obr. 2).



Obr. 2

- Postavte různé stavby – která tělesa představují, na která je lze rozložit, které rovinné útvary při pohledu na ně vidíme? (útvary v rovině i prostoru)
- Sestavujte různé krychle a kvádry – porovnávejte jejich rozměry – délky hran, obsahy stěn atd. (shodnost, podobnost)
- Vymodelujte krychli. Vymodelujte krychli s dvojnásobnou délkou hrany. Porovnejte povrchy (objemy) obou krychlí.
- Vymodelujte krychli – rozviňte její plášť do roviny, abyste získali souvislý útvar – hledejte různé možnosti – podle jedné vyrobte z tvrdého papíru hrací kostku. (sítě krychle, kombinatorika)
- Pro hru „Člověče, nezlob se“ vytvořte jinou hrací „kostku“, „rychlejší“ (hody 1–8), popř. „pomalejší“ (1–4), tak, aby všechny hody byly stejně spravedlivé. (pravidelnost = spravedlnost, pravidelná tělesa)
- Sestavujte dvojice shodných čtverců z malých a větších dílků. (obsah čtverce, převody jednotek)
- Vymodelujte plánek pozemku (zahrada, hřiště). Jak dlouhý plot potřebujete na jeho oplocení, jakou má pozemek rozlohu? (obvod, obsah)
- Vymodelujte místnost pro panáčky – kolikrát byste ji museli zvětšit, abyste se do ní také vešli? Kolik je do ní potřeba koberce, dlažby? Kolik je potřeba barvy na obílení stěn? (poměr, povrch, pokrývání roviny)

Na 1. stupni lze náměty k činnostem použít pro propedeutiku pojmů, na 2. stupni je možné činnosti dále rozvést potřebným směrem, podrobněji se pojmy zabývat. Při práci se stavebnicí odpadá strach z matematiky, učení je hravé a přirozené.

Literatura

Hejný, M., Stehlíková, N. *Číselné představy dětí*, PedF UK, Praha, 1999

Wittmann, E., Müller, G. *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Stuttgart, 1990

Který čtyřúhelník má největší obsah?

Dag Hrubý[1]

Cílem článku je ukázat užití diferenciálního počtu v geometrii. Dříve než přistoupím k hlavní úloze tohoto článku, kterou bude nalezení čtyřúhelníku maximálního obsahu, ukáži několik souvisejících úloh.

Úloha 1:
Který trojúhelník o stranách a, b má největší obsah?
*Řešení:*Je-li φ velikost úhlu, který svírají strany a, b v trojúhelníku, pak

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi. \tag{1}$$

Vzhledem k $\sin\varphi \le 1$ je $\frac{1}{2}ab\sin\varphi \le \frac{1}{2}ab$. Odtud plyne $S_{max} = \frac{1}{2}ab$. Daný trojúhelník musí být pravoúhlý. Na vztah (1) se také můžeme dívat jako na funkci proměnné φ.

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}ab\sin\varphi.$$

Nyní budeme hledat extrém této funkce. Pro první derivaci dostáváme

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}ab\cos\varphi.$$

Dále je $\frac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Bod $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je bod podezřelý z extrému. Snadno se přesvědčíme, že v tomto bodě má funkce $S = S(\varphi)$ maximum, a proto $S_{max} = \frac{1}{2}ab$.

Úloha 2:
Který rovnoramenný trojúhelník má největší obsah?

[1]*Gymnázium Jevíčko, hruby@gymjev.cz*

*Řešení:*Je-li φ velikost úhlu, který svírají obě ramena v trojúhelníku, pak

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi. \tag{2}$$

Další postup je stejný jako v úloze (1), stačí položit $a = b$. Nakonec dostáváme $S_{max} = \frac{1}{2}a^2$.

Úloha 3:
Mezi všemi trojúhelníky o straně a a protilehlém úhlu α najděte trojúhelník maximálního obsahu.
*Řešení:*V trojúhelníku ABC označme β úhel při vrcholu B, $c = |AB|$ a $v = v_c$. Pro obsah trojúhelníku platí

$$S = \frac{1}{2}cv. \tag{3}$$

Pro stranu c platí $c = v(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$. Pro obsah trojúhelníku platí $S = \frac{1}{2}v^2(\operatorname{cotg}\alpha + {} + \operatorname{cotg}\beta)$. Dále je $v = a\sin\beta$. Po dosazení do (3) dostáváme

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin^2\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta).$$

Tento vztah není zřejmě z pohledu planimetrie ideální pro diskusi o maximálním obsahu daného trojúhelníku. Pokud si ale uvědomíme, že množinou všech vrcholů C takových trojúhelníků je množina všech bodů v rovině, ze kterých je vidět úsečku velikosti a pod úhlem α, pak po provedení náčrtku snadno odhadneme, že daný trojúhelník je rovnoramenný a platí $\beta = \gamma$. My se však podíváme na vztah (3) jako na funkci $S = S(\beta)$ proměnné β a budeme hledat její extrém. Pro první derivaci platí

$$\frac{dS}{d\beta} = a^2 \sin\beta\cos\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) - \frac{1}{2}a^2.$$

Dále je $\frac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \sin\beta\cos\beta(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta) = \frac{1}{2}$. Odtud postupnými úpravami plyne $2\sin\beta\cos\beta\operatorname{cotg}\alpha + 2\cos^2\beta - 1 = 0$. Nakonec dostáváme pro extrém podmínku

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}2\beta = 0.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s rovností $\alpha + 2\beta = \pi$. Ponechám už na čtenáři, aby se přesvědčil, že pro $\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}$ má naše funkce maximum. Pro úhel γ dostáváme $\gamma = \pi - \alpha - \beta = 2\beta - \beta = \beta$. Hledaný trojúhelník je tedy rovnoramenný.

Úloha 4:
Mezi všemi lichoběžníky s vlastností $|BC| = |CD| = |DA| = b$ najděte lichoběžník maximálního obsahu.

Řešení: V lichoběžníku $ABCD$ označíme φ velikosti úhlů při vrcholech A, B, protože daný lichoběžník je rovnoramenný. Při označení $|AB| = a$ dostáváme pro obsah lichoběžníku $S = \left(\frac{a+b}{2}\right) v$. Dále je $\sin\varphi = \frac{v}{b}$, a proto $S = \left(\frac{a+b}{2}\right) b \sin\varphi$. Nyní si ještě vyjádříme a pomocí b a φ. Zřejmě platí $\cos\varphi = \frac{a-b}{2b}$ a pro a pak dostáváme $a = b + 2b\cos\varphi$. Pro obsah lichoběžníku platí

$$S = b^2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi. \tag{4}$$

Nyní budeme hledat extrém funkce $S(\varphi) = b^2 \sin\varphi + b^2 \sin\varphi\cos\varphi$. Pro první derivaci dostáváme

$$\frac{dS}{d\varphi} = b^2\cos\varphi + b^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi.$$

Dále je $\frac{dS}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \Leftrightarrow 2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$. Tato rovnice má kořeny $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ a $\cos\varphi = -1$, z nichž vyhovuje pouze kořen $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, resp. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Tento bod je bod podezřelý z extrému. Snadno se přesvědčíme, že v tomto bodě má funkce $S = S(\varphi)$ maximum, a proto $S_{max} = b^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2$.

Nyní jsme, doufám, připraveni k hlavní úloze tohoto článku.

Úloha 5:

Mezi všemi čtyřúhelníky, které mají dané velikosti stran a, b, c, d, najděte čtyřúhelník maximálního obsahu.

Řešení: Ve čtyřúhelníku $ABCD$ označme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ velikosti úhlů při vrcholech A, B, C, D a položme $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$. Pro obsah čtyřúhelníku $ABCD$ zřejmě platí

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta. \tag{5}$$

Na předcházející vztah (5) se můžeme dívat jako na funkci dvou proměnných $S = S(\beta, \delta)$. Abychom mohli počítat v duchu předcházejících úvah, musíme jednu proměnnou vyjádřit pomocí druhé. Rozhodněme se, že vyjádříme δ pomocí β, resp. $\sin\delta$ pomocí $\sin\beta$. Uvažujme trojúhelníky ACD a ABC a pro stranu AC použijeme dvakrát kosinovou větu. Dostáváme

$$c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta.$$

Odtud plyne

$$\cos\delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\beta}{2cd} = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2cd} + \frac{ab}{cd}\cos\beta.$$

Pro zjednodušení položme

$$A = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2cd}, \qquad B = \frac{ab}{cd}.$$

Můžeme tedy psát $\cos\delta = A + B\cos\beta$. Dále je $\sin\delta = \sqrt{1-(A+B\cos\beta)^2}$, protože $0 < \beta < \pi$. Po dosazení do (5) dostáváme

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sqrt{1-(A+B\cos\beta)^2}.$$

Nyní jsme dostali funkci jedné proměnné $S = S(\beta)$.

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{2}ab\cos\beta + \frac{1}{2}cd\frac{(A+B\cos\beta)B\sin\beta}{\sqrt{1-(A+B\cos\beta)^2}}.$$

Po dosazení za $\cos\delta = A + B\cos\beta,\ B = \frac{ab}{cd}$ dostaneme

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{2}ab\cos\beta + \frac{1}{2}ab\frac{\cos\delta\sin\beta}{\sin\delta}.$$

Dále $\frac{dS}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \sin\delta\cos\beta + \sin\beta\cos\delta = 0 \Leftrightarrow \sin(\beta+\delta) = 0 \Leftrightarrow \beta + \delta = \pi$. Odtud nutně plyne $\alpha+\gamma = \pi$. Daný čtyřúhelník musí být tětivový. Po dosazení do (5) dostaneme pro obsah tětivového čtyřúhelníku vzorec

$$S = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta.$$

Tento vzorec samozřejmě platí pro čtverec a obdélník, jak se můžeme dosazením přesvědčit.

Literatura

[1] Gillman, L., Mc Dowell, R. H.: *Matematická analýza*. SNTL, Praha 1983.

Flanelograf

Antonín Jančařík, Kateřina Jančaříková[1]

Cílem vystoupení bylo seznámit účastníky s jednoduchou a velmi dobře uplatnitelnou pomůckou – flanelografem.

Geniální nápady bývají velmi často jednoduché. Lidé se k některým pomůckám i metodám vracejí. Příkladem platnosti obou tvrzení je velmi jednoduchá a účinná didaktická pomůcka – flanelograf. Flanelograf je deska potažená flanelem, na kterou se připevňují obrázky a obrazce vystřižené z menších barevných kousků flanelu. Díky přilnavosti obrazce na flanelografu drží, a to i v několika vrstvách.

[1] *PedF UK v Praze, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz*

Flanelograf byl používán v počátcích české televize (1961), dle pamětníků byl opětovně objeven o dvacet let později (80. léta) a používán ve školách. I když bychom v některých třídách flanelograf našli, obvykle nebývá využíván.

Po roce 1989 jsou do České republiky (především z USA) dováženy flanelografy biblických postav a využívány při výuce katechismu v nedělních školách a besídkách.

Flanelograf je stále vhodnou pomůckou. Děti reagují pozitivně na jeho hebkost. Připevnění obrazce na flanelograf je jednodušší a rychlejší než např. přichycování papíru nebo plastové fólie na magnetickou tabuli, stačí obrazec přitlačit. Flanel je oproti papíru mnohem trvanlivější – vydrží žmoulání i ohýbání. A oproti plastové fólii mnohem ekologičtější.

Vyrobit si vlastní sadu geometrických obrazců není pro učitele matematiky nijak složité a ani nákladné. Doporučujeme využívat flanelograf při výuce pojmosloví (geometrický diktát), základních operací, úvodu do zlomků či dramatizaci slovních úloh.

Na semináři bylo demonstrováno využití flanelografu při výuce důkazu Pythagorovy věty. Čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka pokryjeme díly, které potom přeskládáme a pokryjeme jimi čtverce nad odvěsnami, čímž demonstrujeme, že obsah čtverce nad přeponou je stejný jako obsah čtverců nad oběma odvěsnami. Bylo demonstrováno několik způsobů rozdělení.

Schematizace – funkce podílející se na tvorbě struktury[1]

Jana Kratochvílová, Klára Nejedlá[2]

Úvod

Kognitivní strukturu si představujeme metaforicky jako vícevrstvovou síť, jejíž uzly představují konkrétní dílčí poznatky a vlákna spojující tyto uzly představují různé myšlenkové spoje (při navazování dokonce myšlenkové toky). Dominantní postavení v této síti mají pojmy, které jsou většinou budovány jako výsledek procesů. Mechanismus tvorby struktury matematického poznání je popsán např. v Hejný (2003). Dominantní postavení v tomto mechanismu mají generické modely, které jsou zobecněním dílčích percepcí a zkušeností a východiskem k abstraktním pojmům a vazbám (Hejný, Kratochvílová, 2005). Na tomto mechanismu se podílejí kognitivní a metakognitivní funkce, z nichž schematizace je jednou z nich (funkce klasifikace byla popsána v Hejný, Kratochvílová, 2004).

[1]Příspěvek byl podpořen projektem COSIMA (Sokrates – Comenius 2.1. registrovaným pod číslem 112091-CP-1-2003-1-DE-COMENIUS-C21).

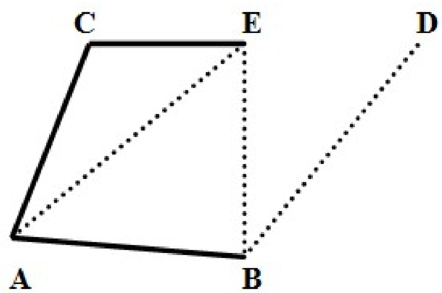
[2]*PedF UK v Praze, jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz; ZŠ Vodičkova, Praha 1, K.Nejedla@seznam.cz*

Schematizace je činnost, kterou člověk dělá při vizualizaci vazeb mezi prvky ve struktuře. Příklady z běžného života mohou být plán rozvodu plynu v domě, železniční síť v republice, plán města nebo metra apod. Ve vyučování matematice hledáme takové úlohy a situace, abychom funkci schematizace rozvinuli.

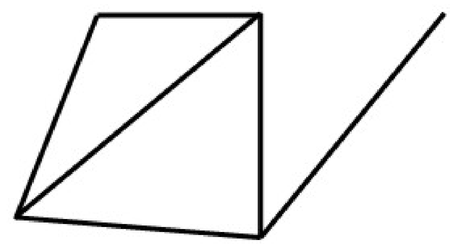
Úlohy[3]

A. LINKY

Ú1. Na obr. 1 je plánek autobusové dopravy v jednom městě. Na plánku je 5 zastávek, které jsou propojeny 2 autobusovými linkami. Přerušovaná: A →E→B→D; plná: E→C→A→B. Jestliže vymažeme názvy zastávek a barvy linek, dostaneme pouze plánek ulic (viz obr. 2). Tímto způsobem vznikla následující úloha: Přiřaďte názvy A, B, C, D, E k zastávkám na plánku tak, aby vznikly výše uvedené linky (přerušovaná a plná).

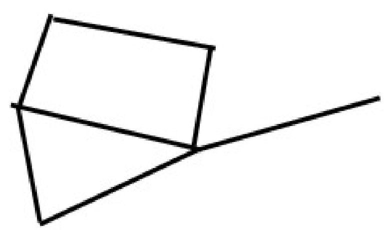


Obr. 1



Obr. 2

Ú2. Na obr. 3 je plánek se 6 zastávkami, které jsou propojeny 2 autobusovými linkami; červená: D → C → E → F, modrá: E → A → C→ B→ F. Vyznačte tyto linky na obrázku.



Obr. 3

Strategie řešení úlohy typu linky

Řešitelé, v našem případě 18 žáků 5. ročníku ZŠ, pro vyřešení úlohy tohoto typu nejčastěji volí strategii pokus-omyl. Až při zjištění, že tato strategie nevede rychle k cíli, začnou evidovat některé vlastnosti linek. Například evidují, že jedna zastávka na začátku nebo na konci linky se vyskytuje pouze u jediné linky, tudíž má pouze jednu sousední zastávku. Jiní žáci naopak evidují, že například obě linky mají některé zastávky společné.

[3] Autorem úloh je M. Hejný.

Ty mají různé sousední zastávky, proto společné zastávky pro obě linky umisťují do plánku tam, kde se linky nejvíce kříží.

Strategii řešení úloh tohoto typu, která přímo vede k jejich vyřešení, ilustrujeme na úloze Ú2 následující tabulkou:

Zastávka	A	B	C	D	E	F
Σ sousedů	2	2	4	1	3	2

Evidujeme-li počet sousedních zastávek[4] ze zadání úlohy, je pak zřejmé, kde jsou zastávky C, D a E na plánku umístěny. Zastávky A, B, F, které mají stejný počet sousedních zastávek, jsou pak rozmístěny podle názvů těchto sousedních zastávek (například zastávka A má sousední zastávky E a C, tudíž její umístění je jednoznačné, podobnou úvahu lze udělat i pro zastávky B a F).

Velice vyspělá řešitelská strategie je založena na opačném postupu. Nevycházíme od plánku, ale od linek a z nich si uděláme plánek. Budeme mít dvě vizualizace téhož plánku a pak již lehce přiřadíme zastávky jednoho plánku zastávkám druhého plánku. Metodu nazýváme izomorfizmus.

B. LINKY A DĚLITELNOST

Ú3. K vrcholům grafu na obr. 3 připište čísla 17, 33, 65, 91, 154 a 510 (ke každému vrcholu jedno číslo) tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná.

Řešení: Vrcholu A z úlohy Ú2 odpovídá číslo 33, vrcholu B 65, vrcholu C 510, vrcholu D 17, vrcholu E 154 a vrcholu F 91.

Ú4. Najděte jinou množinu šesti čísel, než je v úloze Ú3, tak, aby je bylo možné připsat k vrcholům do grafu na obr. 3 a největší číslo bylo menší než a) 500, b) 400, c) 300. Jestliže taková množina čísel neexistuje, dokažte to.

Řešení: 1. vrcholu A 33, B 85, C 210, D 7, E 286, F 221; 2. vrcholu A 65, B 51, C 210, D 7, E 286, F 187.

Ú5. a) Najděte 6 takových čísel, která mohou být připsána k vrcholům šestiúhelníku (jedno číslo k jednomu vrcholu) tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná. b) Najděte takovou množinu šesti čísel, že její největší číslo je menší než 60.

Řešení: Vrcholu A 26, B 39, C 21, D 35, E 55, F 22.

Ú6. Najděte 8 takových čísel, která mohou být připsána k vrcholům krychle (jedno číslo k jednomu vrcholu), tak, aby čísla sousedních vrcholů byla soudělná a nesousední byla nesoudělná.

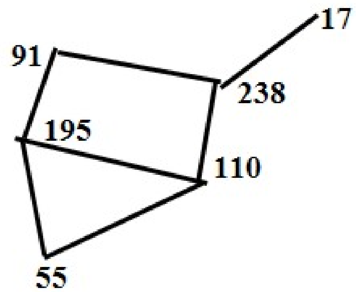
Řešení: Např. vrcholu $A = 3 \cdot 19 \cdot 31$, $B = 3 \cdot 11 \cdot 37$, $C = 5 \cdot 11 \cdot 23$, $D = 7 \cdot 19 \cdot 23$, $E = 2 \cdot 17 \cdot 31$, $F = 2 \cdot 13 \cdot 37$, $G = 5 \cdot 13 \cdot 29$, $H = 7 \cdot 17 \cdot 29$.

Ú7. Je dána množina čísel 17, 55, 91, 110, 195 a 238. Vytvořte graf o 6 vrcholech takový,

[4] V teorii grafů počtu sousedních zastávek říkáme index vrcholu grafu.

že každý jeho vrchol je označen jedním z čísel množiny a platí, že čísla sousedních vrcholů jsou soudělná a nesousední jsou nesoudělná.

Řešení jsou na obr. 4.



Obr. 4

Závěr

Domníváme se, že předložené úlohy patří k těm, jejichž řešením žáci rozvíjejí strukturotvorný proces schematizace. K těmto úlohám zařazujeme i úlohy, kde se podporují mezipředmětové vztahy. Například následující úloha by mohla být řešena ve vyučování zeměpisu: Zvolte nějaké kritérium a podle něho uspořádejte následující česká města: Ústí nad Labem, Beroun, Praha, Ostrava, Strakonice, Nymburk, Poděbrady, Padov, Příbram, Třebíč, Český Krumlov. Na pomoc si vezměte mapu. Uvedené úlohy bychom mohli zadávat žákům i při hodinách českého jazyka, např. u úlohy Ú3 místo 6 čísel zadáme šest vhodných slov a úkolem je tato slova přiřadit zastávkám tak, aby slova sousedních zastávek měla stejný dvoupísmenový spol a slova nesousední takový spol neměla. Například slova pytel a byt mají stejný dvoupísmenový spol a tím je „yt".

Úlohy jsou vhodné pro žáky 2. stupně ZŠ (úloha Ú2 i pro žáky 1. stupně ZŠ). Svou podstatou patří do teorie grafů. Výhodou je, že lze gradovat jejich náročnost až na vysokoškolskou úroveň. Příspěvek je výzvou pro kolegy k hledání podobných úloh.

Literatura

Hejný, M. Diagnostika aritmetické struktury. In Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds.), *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2003*, JSMF, EXAM, Bratislava, 22–42.

Hejný, M., Kratochvílová, J. Klasifikace jako kognitivní funkce. In Vagaský, M., Hejný, M. (eds.), *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*, JSMF, EXAM, Bratislava, 26–44.

Hejný, M.; Kratochvílová, J. From Experience, through Generic Models to Abstract knowledge. In *Proceedings CERME4 Fourth Conference of the European Research in Mathematics Education*, 2005, 10 stran. V tisku.

Zapojení učitelů 1. stupně ZŠ do mezinárodního projektu IIATM, Socrates-Comenius[1]

Irena Kročáková, Jitka Michnová[2]

Tento článek je společným úvodem ke dvěma dalším článkům, v nichž autorky každá jednotlivě informují o pracovní dílně uskutečněné v rámci semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2005. Stručně popíšeme, jak jsme se k práci, o níž píšeme, dostaly. Protože první kontakt byl navázán druhou autorkou tohoto článku, bude následující odstavec přímou řečí J. Michnové.

V roce 2003 jsem ukončila kombinované studium učitelství pro první stupeň základních škol na Pedagogické fakultě UK v Praze. Má diplomová práce na téma Čtverečkovaný papír jako cesta ke konstruktivistické pedagogice napsaná pod vedením D. Jirotkové významně ovlivnila moji současnou pedagogickou práci.

Při výběru tématu jsem se rozhodla pro geometrii, protože jsem chtěla hlouběji porozumět rozporu, který jsem ve výuce tohoto předmětu pociťovala od začátku své pedagogické práce. Tradiční koncepce výuky vycházející ze základních stavebních kamenů geometrie bod, úsečka, přímka, rovina, … zdaleka nebyla pro děti tak přitažlivá jako různé geometrické hrátky a hlavolamy se skládáním papíru, stavebnic, tangramů apod. Tento druhý proud byl sice pro žáky přitažlivý, ale měl jen epizodický charakter, úlohy vzájemně nesouvisely, scházelo systematické poznání. Při experimentech, které jsem pod vedením D. Jirotkové dělala, jsem pochopila, jak prostředí čtverečkovaného papíru může nabídnout žákům jak vysoce motivující úlohy, tak i postupnou strukturaci vědomostí.

Své zkušenosti a myšlenky jsem formulovala v diplomové práci. Po úspěšné obhajobě byla má práce navržena do celostátní soutěže SVOČ kategorie diplomové práce z didaktiky matematiky, kombinované studium, a získala první cenu. Soutěž SVOČ byla spoluorganizována Matematicko-pedagogickou sekcí JČMF. Dosažený úspěch mne motivoval k pokračování v experimentální práci ve vlastní třídě i ke studiu teorie, které jsem završila vykonáním rigorózních zkoušek.

Byla jsem potěšena nabídkou ke spolupráci v mezinárodním projektu IIATM v rámci EU programu Socrates-Comenius 2.1, který koordinují a jehož řešitelé jsou M. Hejný, D. Jirotková, M. Kubínová a N. Stehlíková (KMDM PedF UK) a dále pak po dvou univerzitních učitelích z Anglie (University of Derby), Německa (Kassel Universität) a Řecka (Archimedes University of Thessaloniki).

Byla mi nabídnuta i možnost přizvat k práci na projektu některou kolegyni ze školy. Tuto možnost být v každodenním kontaktu s kolegyní, která bude pracovat na podobné problematice, jsem využila a velice ji uvítala. A tak od února 2004 pracujeme na projektu

[1]Příspěvek byl zpracován v rámci projektu IIATM, Socrates – Comenius 2.1., číslo 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2]*ZŠ Školní, Neratovice, krocakova.irena@seznam.cz, michnovajitka@seznam.cz*

IIATM na ZŠ Školní v Neratovicích ve dvojici s Irenou Kročákovou. Společně promýšlíme různé vyučovací pokusy, řešení úloh pro učitele a také jsme společně promýšlely jak obě pracovní dílny, tak i tento úvodní článek.

Projekt IIATM je rozdělen do pěti tematických celků. Jeden z nich, do něhož jsme zapojeny my, se týká rozvoje prostorového myšlení žáků základní školy. Stručně popíšeme naši roli v rámci projektu.

Celý tematický celek je členěn do dvou podtémat, krychlová tělesa a sítě krychle. Každé podtéma je členěno do tří úrovní podle věku žáků: A (5–8 let), B (7–11 let), C (10–15 let). Poslední čtvrtá úroveň označená T je zaměřena na učitele. Naše první pokusy o řešení úloh nebyly vždy stoprocentně úspěšné, ale vzájemné diskuse nám oběma byly vždy velmi prospěšné. Dobrá spolupráce s učiteli fakulty nás však zbavila jakéhokoliv ostychu a dnes nejenže se na řešení nových úloh těšíme, ale zřetelně si uvědomujeme, že tato práce nám zvyšuje i naše matematické sebevědomí. Navíc nám řešení úloh umožňuje tvořivým přístupem proniknout k pojmům a zákonitostem geometrie na hlubší úrovni, než je potřebná při práci se žáky. Tato skutečnost nám na jedné straně dává jistotu „pevné půdy pod nohama“ v oblasti poznatků, na druhé straně nás dobře připraví k tvořivé didaktické práci, jako je tvorba úloh pro žáky, příprava pomůcek, příprava a realizace scénářů výukových hodin, individuální péče o žáky slabší nebo naopak nadprůměrné, zejména však motivace celé třídy k intenzivní práci při poznávání 3D geometrie.

Nápady k experimentálnímu vyučování vznikají různě, v našem případě vznikly v průběhu řešení zadaných úloh pro učitele, když jsme uvažovaly o tom, jak úlohu zprostředkovat dětem. Podobným způsobem vznikly i experimenty, které jsou východiskem dvou nabídnutých pracovních dílen. S realizací experimentů jsme neměly žádné problémy, neboť vedení naší základní školy podporuje snahy učitelů o příznivé klima pro tvořivé vyučování na škole. Rovněž tak jsme měly možnost představit výsledky své práce některým svým kolegům i z druhého stupně ZŠ. Prezentace výsledků práce na celostátním semináři Dva dny s didaktikou matematiky nám otevřela dveře k navázání cenných kontaktů s učiteli jiných škol i k získání nových námětů k práci se žáky. Rády bychom se podělily o zkušenosti jak vlastní, tak i dalších kolegů učitelů, a proto prosíme o vaše reakce na tento příspěvek i na pracovní dílny na téma „sítě krychle“ a „krychlová tělesa a hlavolamy“ (viz dále).

Příspěvky zasílejte na adresu: michnovajitka@seznam.cz. Děkujeme.

Literatura

Michnová, J. (2005.) *Čtverečkovaný papír jako cesta ke konstruktivistické pedagogice*. Diplomová práce, PedF UK v Praze, nepublikováno.

Realizace hry „Hádej a plať“ ve třídě[1]

Markéta Laksarová, Renata Němečková[2]

Klasifikace je jedna z psychických funkcí, které se podílejí na tvorbě struktury u žáka (Hejný, Kratochvílová, 2004). K rozvoji této funkce byla v rámci mezinárodního sokratovského projektu COSIMA, na kterém se autorky podílí, rozpracována klasifikační hra „Hádej a plať“[3]. Pravidla hry jsou popsána v tomto sborníku (Dyková, E.: Klasifikační hra „Hádej a plať“). Učitelé českého týmu projektu vyzkoušeli tuto hru ve svých třídách. Protože se jejich zkušenosti téměř shodovaly, uvádějí ty, které získali při realizaci hry v jedné třídě 4. ročníku ZŠ.

Realizace

Představuje-li se nová hra, často se těžko dají zformulovat pravidla. Proto je dobré hru odehrát demonstračně, čímž se její pravidla naznačí. Pro demonstrační hru jsme použili následující galerii (galerie byla ve skutečnosti odlišena barvou, ne silou znázornění) a tabulku (viz obr. 1). Vše včetně typu otázek bylo napsáno na tabuli, požadované řešení bylo napsáno na zadní části tabule.

Obr. 1

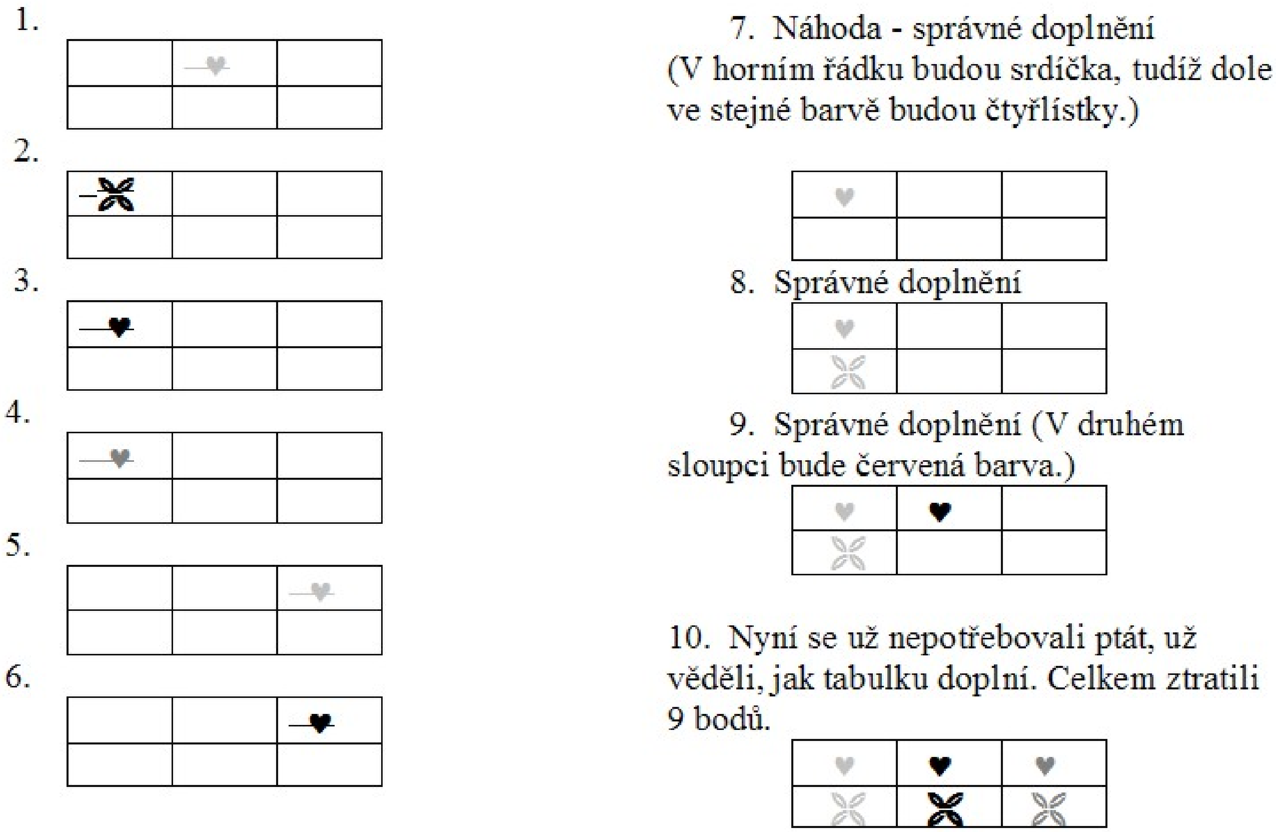
Dříve než se začalo hrát, někteří žáci už vykřikovali své postřehy, např. že je to podle barev nebo že barvy budou ve sloupcích a třeba srdíčka budou nahoře. Při demonstraci byly všechny děti hledači. Otázky pokládaly ústně. Všechny děti si vybíraly jednobodové otázky a chodily k tabuli ukazovat na políčko, kam chtěly umístit daný symbol. Jejich dotazy byly evidovány na tabuli přímo do jedné předkreslené tabulky. Finální řešení vypadalo takto (viz obr. 2).

Po tomto úvodu následovalo další kolo hry. Tentokrát již děti hrály po skupinách (5 trojic a 2 dvojice) a učitel byl opět zadavatel. Došlo i ke změně galerie – tentokrát to byla jména (dívčí a chlapecká). Každá skupina dostala kartičku s prázdnou tabulkou a jmény (obr. 3).

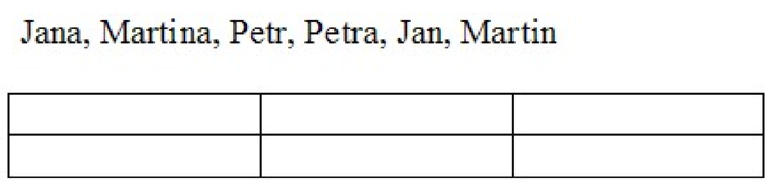
[1]Příspěvek byl podpořen projektem COSIMA (Socrates – Comenius 2.1. registrovaným pod číslem 112091-CP-1-2003-1-DE-COMENIUS-C21).

[2]*ZŠ Brána jazyků, Praha 1, marketa.laksarova@volny.cz; ZŠ Chlupova, Praha 5, renata.nemeckova@centrum.cz*

[3]Autorem hry je M. Hejný.



Obr. 2



Obr. 3

Děti si měly v každé skupině vybrat jednoho zástupce, který bude chodit s otázkami k zadavateli. (Typy otázek byly stále k dispozici na tabuli.). Též byly vyzvány se snažit o ztrátu co nejmenšího počtu bodů.

Reflexe organizace

V průběhu hry se ukázalo několik organizačních („technických“) nedostatků:

a) Nedodržování diskrétní zóny: Hned po zahájení tohoto kola děti s papírky obstoupily stůl učitele. Bylo nutné je dodatečně upozornit, aby utvořily frontu a dodržovaly diskrétní zónu.

b) Nejasná reprezentace skupiny: Ne všechny skupiny dodržely pravidlo, že se má chodit ptát jen jeden za skupinu, takže shromáždění dětí u stolu učitele bylo zbytečně velké.

c) Nejasná technologie komunikace: Nebylo důkladně promyšleno, jakou formou bude probíhat komunikace mezi zadavatelem a tazateli – každá skupina měla jednu kartičku s prázdnou tabulkou a se jmény.

d) Nedodržení pravidel tázání: Dvě skupiny nedodržely pravidla pokládání otázek a děti přicházely s návrhem zcela nebo částečně vyplněné tabulky. Na to jim bylo řečeno, že to nemají správně, ztrátové body nebyly přiděleny a ony tak získaly určitou informaci bez ztráty bodu, takže výsledek byl zkreslený.

Žákovské úlohy

Po druhé sehrávce byl zadán dětem úkol – vymyslet vlastní galerii objektů do tabulky 3×2. Bylo jim znovu vysvětleno, že mají vymyslet prvky, které by se daly do tabulky uspořádat podle dvou kritérií, tedy do řádků a sloupců.

Evidovali jsme tři jevy, které se vyskytly při tvorbě úloh dětmi:

1. Úloha vznikla substitucí objektů v úloze dané. Byla uvedena galerie bez vyřešení. Domníváme se, že příčinou tohoto jevu byla potřeba všech žáků interiorizovat a znovu prožít předchozí úspěch z řešení. Po vytvoření této úlohy necítí potřebu uvést řešení. Tedy vnímají ji jako velice jednoduchou a přirozeně si dávají další úkol vytvořit úlohu náročnější.

2. Zvýšení náročnosti úloh spočívalo ve dvou směrech: a) mění se objekty – vše jsou trojúhelníky a rozlišovacími parametry jsou barva a vyplněnost/nevyplněnost tvarů; b) mění se organizační princip – místo klasifikace je zde něco jako párování. Tento úkol se ukázal jako výzva žáků směrem k upřesnění pravidel organizace tabulky od učitele.

3. Již při druhé sehrávce jedna skupina začala spontánně vymýšlet jinou galerii. Domníváme se, že vidíme-li děti spontánně tvořit úlohy, zvolená činnost je pro ně smysluplná.

Ukázka některých žákovských úloh

Adam uvedl tyto objekty: kámen, pískovec, cukroví, list, bonbon, žvýkačka. Jako kritérium uspořádání uvádí od největšího do nejmenšího. Je to příklad dítěte, které upřednostňuje lineární organizaci objektů a které touto hrou začíná nabývat zkušenosti s klasifikační organizací.

Bětka v první úloze provedla substituci: kritériem zůstává tvar a barva. Ve druhé úloze místo tvarů či symbolů zvolila čísla 1, 2 a 3 (+ barvy červená/zelená). Ve třetí úloze navrhla písmena: A, N, F, S, D, R v barvách červené a modré, ale tento návrh nevyhovoval zadání úlohy, neboť chtěla uspořádat písmena podle abecedy, což není dobře zvolené kritérium pro klasifikaci. V prvních dvou úlohách dítě variuje objekt směrem k abstrakci. Ve třetí úloze mění organizaci.

Cyril v první úloze též provedl substituci. Ve druhé úloze vytvořil dvojice karetní hra + nějaký prvek ze hry: prší – spodek, žolíky – srdce, oko – 21. Sloupce nejsou klasifikační třídy, ale asociační dvojice.

Dan v první úloze také provedl substituci. Ve druhé úloze vytvořil dvojice historická etapa – historická postava: Starověk – Alexandr Makedonský, Středověk – Karel Veliký, Novověk – Stalin. Sloupce nejsou třídy, ale asociační dvojice, tudíž toto není klasifikace. Ve třetí úloze se však jedná o klasifikaci: Přišel s ilustracemi na poněkud morbidní téma - nakreslil tři postupná stadia rozpadu useknuté hlavy a useknuté ruky. Do této úlohy navíc vnáší další organizační prvek: lineární uspořádání sloupců pomocí času.

Emil v první úloze sestavil tři dvojice dopravních značek: začátek hlavní silnice – konec hlavní silnice, omezená rychlost 80 km/h – konec omezené rychlosti. . . , přikázaná rychlost 30 km/h – konec příkazu. . . {hlavní silnice, omezená rychlost, přikázaná rychlost} {začátek, konec}. V této úloze existují obě klasifikační kritéria.

Závěr

Tuto hru jsme nerealizovali pouze s dětmi, ale též jsme ji hráli mezi sebou (čtyři učitelé českého týmu projektu COSIMA). I pro naše sehrávky jsme vymýšleli vlastní úlohy. Některé ze svých galerií nabízíme jako námět pro zájemce o tuto hru.

Galerie pro tabulku 2×3

1. 12, 54, 72, 102, 114, 204
2. ACA, AAB, BAA, ABA, AAC, CAA

Galerie pro tabulku 3×3

1. Nutella, Snickers, Saab, Stockholm, Mercedes, New York, Mentos, Madrid, Nissan
2. matematika, kimatamate, maeamattki, tekamaatmi, temakatami, matiamatke, kitmaaamte, kimetamtaa, tetmamkaia

Literatura

Hejný, M., Kratochvílová, J. (2005). Klasifikace jako kognitivní funkce. In Vagaský, M., Hejný, M. (Eds.), *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*, JSMF, EXAM, Bratislava, 26–44.

Základní techniky sebehodnocení školy a metody na podporu rozhodování

Marek Lauermann[1]

Škola, stejně jako každá jiná organizace, se může rozvíjet jen tehdy, pozná-li své nedostatky a ty dokáže včas napravit. Jestliže chce vaše škola či jakákoliv jiná organizace

[1] *Středisko služeb školám Brno, lauermann@sssbrno.cz*

pracovat účinně, sebehodnocení je nevyhnutelné. Mělo by být součástí vaší práce, protože je to jediný způsob, jak se ujistit, že jste na správné cestě. Často se necháváme unést výčtem aktivit, které probíhají v rámci naší činnosti, ale zapomínáme se ptát, jestli tyto činnosti přinášejí žádaný efekt. Řekneme-li, že ano, máme pro toto tvrzení nějaký důkaz? Právě zde nám pomůže, když se podíváme sami na sebe kritickýma očima. Jaké techniky tedy například můžeme v procesu sebehodnocení využít? Zmíníme zejména ty, které mají vazbu na matematické myšlení a jsou označovány jako „techniky managamentu založené na matematických modelech“.

SWOT analýza

SWOT analýza může být prvním krokem sebehodnocení, které napomáhá těm školám, které mají zájem zdokonalovat svoji práci přes vytváření systematické zpětné vazby. Je to jakýsi proces učení, který aktivně vtahuje účastníky do sebereflexe s cílem dělat kvalitní rozhodnutí pro rozvoj školy a jejího vzdělávacího programu. Formou SWOT analýzy je možné vytipovat hlavní dynamické a brzdící síly.

SWOT analýza hodnotí *vnitřní silné a slabé stránky* organizace a *vnější příležitosti a hrozby*. (**S**trenght = silné, **W**eaknesses = slabé, **O**pportunities = příležitosti, **T**hreats = ohrožení.)

Bostonská matice pro určení míry potenciálu školy

Matice Bostonské poradenské skupiny (BCG), tzv. matice „růst – podíl“ je východiskem pro úvahy o budoucí úspěšnosti stylů výuky, prvků vybavení nebo třeba vzdělávacích služeb poskytovaných školou. Pomáhá sjednotit přístupy a názory managementu a sboru na portfolio činností realizovaných školou.

Bostonská matice je nástrojem strategického plánování rozvoje školy. Možnost dalšího růstu (vertikální osa) označuje tempo rozvoje školy. Současné postavení (osa horizontální) pak porovnává podíl např. určitého stylu výuky v rámci koncepce výuky na celé škole.

Při rozhodování o tom, které segmenty jsou pro školu zajímavé, můžeme vycházet z obdoby bostonské matice, ve které budeme sledovat náklady na zavedení nové služby nebo stylu práce a potenciální hodnotu daného segmentu (přínos pro naplňování dlouhodobých cílů a vize školy). Matice je rozdělena do čtyř kvadrantů, které jsou označeny jako *Otazníky, Hvězdy, Krávy* a *Psi*.

Otazníky jsou možnosti, které škola má, ale jichž nevyužívá, např. styly výuky, které škola začíná aplikovat. Jsou charakteristické nízkým relativním podílem (začínají), ale vysokým tempem růstu (zajímavá příležitost). Většinou nepřinášejí velký efekt, protože škola musí na jejich udržení a zároveň garantování stávající kvality vynakládat značné prostředky. Z toho důvodu je lépe přicházet s Otazníky postupně, po jednom.

Úspěšné Otazníky se stávají Hvězdami. Hvězdy mají obvykle vedoucí postavení v rámci dynamicky se rozvíjejícího prostředí školy. Přinášejí obvykle žádaný posun v kvalitě (např. větší aktivizaci žáků), ale vyžadují ještě dosti velké náklady, zejména na odrážení tradičních, zavedených stylů práce. Hvězdy se připravují na to, aby se z nich staly Krávy. Je tedy lépe, je-li jich více.

Hvězda, jejíž největší relativní podíl zůstane zachován i při poklesu tempa rozvoje školy, se stává Krávou. Nyní nastává čas dojit. Krávy totiž přitahují ke škole pozornost, posilují její postavení mezi ostatními školami, škola se stává atraktivnější pro žáky i rodiče, což většinou přináší i přísun prostředků od zřizovatele, které potřebuje na podporu Otazníků, Hvězd i Psů. Je s ní nejméně starostí, není třeba zasahovat do stylů práce, organizační struktury a koncepce výuky a vedoucí pozice na trhu je stabilní. Je v zájmu školy, aby měla Krav co nejvíce, protože na nich záleží úspěšnost zavádění dalších Otazníků.

Psi štěkají v kvadrantu, který je charakterizován nízkým podílem na naplňování dlouhodobých cílů a nízkou pravděpodobností svého dalšího rozvoje. Psem je např. styl práce učitele, který je neustále hájen jako tradicí osvědčený, přestože přináší v určité třídě pouze konflikty, nebo styl práce ředitele, který učitele spíše demotivuje. Rozumná škola hledá u Psů způsob, jak se jich v nejbližší době zbavit.

Techniky na podporu rozhodování

Podstatou rozhodování je volba z více variant. Rozhodování rozdělíme na dílčí fáze, z nichž první je identifikace a analýza problému. Při analýze problému můžeme použít tzv. graf rybí kosti, který slouží k rozpitvání problému na menší části. Je to přehledná grafická metoda vedoucí ke zjištění příčin problému, neboť hierarchická struktura školy a organizace probíhajících procesů umožňuje zanoření do hlubších úrovní *diagramu „rybí kosti“*. Zanořením se lze identifikovat příčiny a důvody sledovaného stavu. Problém může mít řadu nositelů, i my se snažíme postihnout, která činnost nebo rys nositele může být příčinou vzniku problému. Každý z nás alespoň jedl rybu a dokáže tak pochopit, kolik kostí obsahuje a jak se vzájemně překrývají.

Při tvorbě variant rozhodování můžeme postupovat intuitivně (např. brainstormingem), systematicky (řešení podle určitého systému) a nebo analogicky (už byl problém řešen). Ke stanovení kritérií hodnocení jednotlivých variant můžeme použít tzv. *problémový strom*. Jedná se opět o přehlednou grafickou metodu umožňující přehledně znázornit, z čeho jev (problém) vzniká a co způsobuje. Často totiž řešíme pouze symptomy určitého problému a ne jeho příčiny. Aplikací rozhodovacího stromu můžeme lépe pochopit, z čeho problém vyrůstá (co jsou jeho příčiny) a co způsobuje (jaké má důsledky).

Nejlepší je, když se řeší problémy na nejnižší úrovni řízení (dobře strukturované). Složité se řeší na TOP linii vedení školy a jsou mnohdy špatně strukturované. Rozhodovat můžeme za podmínek jistoty (víme důsledky), za podmínek rizika (částečně víme důsledky) a za podmínek nejistoty (nemůžeme určit důsledky).

Existuje samozřejmě více technik využitelných v procesu sebehodnocení školy, které jí mohou usnadnit činit správná rozhodnutí odpovídající reálným potřebám jak školy jako celku, tak i aktérů školního života. Pokuste se tyto možná prozatím pro vás teoretické přístupy použít při rozhodovacích procesech v rámci naplňování dlouhodobých cílů a vize vaší školy. Poznávání prožitků u jednotlivých aktérů, schopnost racionálně uvažovat o zjištěných záporech a zamýšlet se společně nad řešením problémů by měl nastartovat management. Účinnou roli v tomto procesu však může sehrát každý učitel, který věří, že jen při pravdivém odhalení jednotlivých úskalí máme možnost je měnit.

Postupné pronikání do tajů kombinatorických konfigurací

Eva Milková[1]

Úvod

Kombinatorika jakožto matematická disciplína zabývající se konfiguracemi, jejich vzhledem, počtem, hledáním optimálních konfigurací v závislosti k daným podmínkám, je vynikajícím zdrojem příkladů rozvíjejících logické myšlení. Výuka této části matematiky může probíhat zábavnou a velmi podnětnou formou, zaměřenou na „vtažení studentů do děje“, tj. zaměřenou na jejich aktivní spoluúčast, diskusi, rozvíjení představivosti při řešení jednotlivých problémů.

Aby studenti dobře chápali probíranou látkou, je vhodné postupně rozvíjet daný problém, ukazovat studentům vzájemné souvislosti mezi jednotlivými konfiguracemi, řešit každou úlohu pokud možno více přístupy a snažit se o co nejsrozumitelnější ilustraci vysvětlovaných pojmů.

Pro ilustraci výše zmíněného nahlédněme společně na několik následujících krátkých ukázek. Začněme úlohami, které lze zařadit do části, kdy probíráme permutace, úlohami, v kterých postupně rozvíjíme jeden jediný příklad. U každého úlohy je naznačen zápis hledané konfigurace a v hranatých závorkách uveden výsledek řešení.

Permutace n prvků

1. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 navzájem různých knih? [7!]
2. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 navzájem různých knih tak, aby na začátku stála předem určená kniha (např. Atlas)?

   Atlas ...... [6!]

[1] *FIM UHK, Hradec Králové, eva.milkova@uhk.cz*

3. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 navzájem různých knih tak, aby na začátku a na konci stála kterákoli ze dvou předem určených knih (uvažujme např. Anatomii a Zoologii)?

   Anatomie . . . . . . Zoologie nebo (tj. +) Zoologie. . . . . . Anatomie [5!+5!]

4. Kolika způsoby můžeme uložit 7 knih do poličky tak, aby na začátku, na konci a uprostřed stála kterákoli ze tří předem určených knih?

   X. . . X . . . X [4!3!]

5. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 navzájem různých knih tak, aby vedle sebe stály dvě předem určené knihy v předem určeném pořadí (např. Angličtina a Slovník)?

   .. AS ... [6!]

   Nyní máme pouze šest objektů, jejichž pořadí nás zajímá, přičemž jeden z nich je „tlustá“ kniha obsahující dvě předem určené knihy v předem určeném pořadí.

6. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 navzájem různých knih tak, aby vedle sebe stály dvě předem určené knihy?

   .. AS ... nebo .. SA ... [6!2 = 6!2!]

7. Kolika způsoby můžeme do poličky uložit 7 knih tak, aby vedle sebe stály tři předem určené knihy A, B, a C?

   .. ABC .. [5!3!]

8. Kolika způsoby můžeme do tří poliček uložit 7 navzájem různých knih, přičemž záleží na pořadí knih v jednotlivých poličkách?

   Např.: ..|...|.., nebo např. jiná možnost: ....||, jiná: ||....... atd.

   Tj. každá tečka představuje libovolnou ze 7 navzájem různých knih a značí přechod mezi sousedními poličkami. [(7+2)!/2 =9!/2!]

Opakování

Při opakování je vhodné navázat na již probrané příklady a různě je dále rozvíjet. Například poslední, osmou, výše uvedenou úlohu zopakujeme na příkladu, kde uvažujeme více knížek a více poliček a řešíme ji jak pomocí permutací s opakováním, tak pomocí kombinací.

Dále z ní (z 8. úlohy) utvoříme úlohu, v níž opět pracujeme s navzájem různými knihami, ale již nebude záležet na pořadí knih uložených v jednotlivých poličkách. Pak můžeme přejít od úlohy s navzájem různými knihami k úloze, v které do poličky ukládáme několik stejných knih. A pokud bychom se ve výkladu dostali až k principu inkluze a exkluze, rozšíříme uvedené příklady na úlohy, do kterých přidáme podmínku, že v každé poličce musí být alespoň jedna kniha.

Vizualizace

Příklady z kombinatoriky lze dobře ilustrovat. Na naší fakultě byla implementována knihovna vzdělávacích objektů DILLEO (viz <http://e-dilema.uhk.cz/>). V ní jsou mimo jiné dány zaregistrovaným uživatelům k dispozici dvě multimediální prezentace vytvořené v prostředí Macromedia Director, a to prezentace Kombinatorika a prezentace Kombinatorika hrou. Obě byly vytvořeny v rámci diplomových prací pod vedením autorky tohoto článku. První se zabývá základními kombinatorickými konfiguracemi, v druhé je pomocí animací vysvětlen princip inkluze a exkluze.

Závěr

Ve svém příspěvku jsem krátce naznačila způsob výuky, který se snažím uplatňovat, způsob založený na čtyřech pravidlech: přistupovat k probíranému problému z více stran; využívat a dále rozvíjet získané poznatky; diskutovaný problém co nejlépe znázorňovat; přibližovat studentům danou látku zábavnou formou na logických úlohách a praktických příkladech.

Nejen znalosti, ke kterým se naši posluchači při zvoleném přístupu k výuce dopracovávají, ale také jejich postupně rostoucí zájem o daný předmět dokládají, že takto zvolená cesta k učení a učení zdá se být efektivní.

Grafické řešení logických úloh

Jarmila Robová[1]

Důležitou součástí výuky matematiky na základních i středních školách je rozvoj logického myšlení, neboť formulování správných úsudků na základě daných faktů patří k dovednostem, které jsou nezbytné při úspěšném studiu matematiky.

Logické myšlení lze rozvíjet prostřednictvím celé řady úloh, často však bývá pro studenty obtížné vysvětlit a zapsat postup, kterým dospěli k řešení. V semináři „Metody řešení matematických úloh“ na UK MFF jsou budoucí učitelé matematiky proto seznamováni se základními metodami řešení logických úloh, jako je metoda úsudku, využití výrokového kalkulu a grafické metody řešení (Eulerovy diagramy, Vennovy diagramy, šipkové diagramy). V průběhu vedení tohoto semináře jsem zjistila, že studentům více vyhovují grafické metody, u kterých oceňují, že mohou jejich prostřednictvím jednoduše znázornit nejen vztahy mezi objekty, ale také zachytit myšlenkové postupy.

[1] *MFF UK v Praze, robova@karlin.mff.cuni.cz*

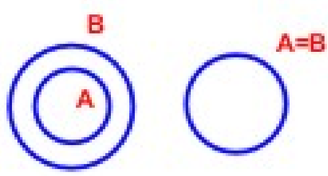
Eulerovy a Vennovy diagramy

Pro znázornění vztahů mezi množinami lze využívat Eulerovy i Vennovy diagramy, avšak Vennovy diagramy přehledněji zachycují možné vazby mezi množinami.

Příklad 1

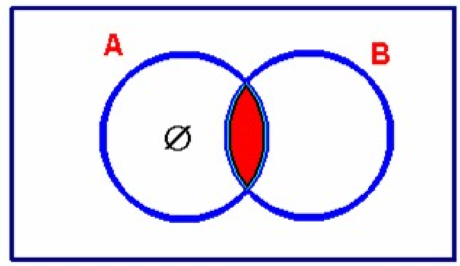
Všechny prvky množiny A leží v množině B.

Eulerův diagram



Obr. 1

Vennův diagram



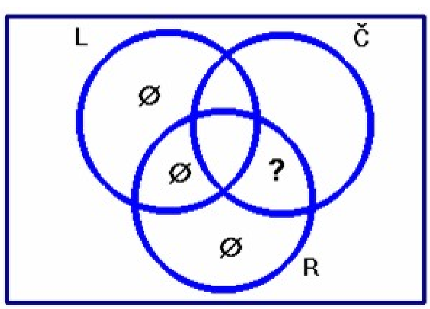
Obr. 2

S rostoucím počtem množin, jejichž vztahy chceme zachytit, se však Eulerův diagram stává složitějším, proto je v těchto případech vhodnější využívat Vennův diagram. Tyto diagramy lze také využívat k posuzování správnosti úsudků (příklad 2 a 3).

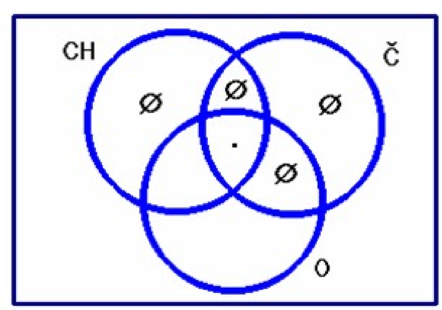
Příklad 2

Všechny lichoběžníky jsou čtyřúhelníky. Všechny rovnoběžníky jsou čtyřúhelníky. Proto všechny rovnoběžníky jsou lichoběžníky.

Řešení: Úsudek je chybný (na obr. 3 podmnožina označená „?“ není prázdná).



Obr. 3



Obr. 4

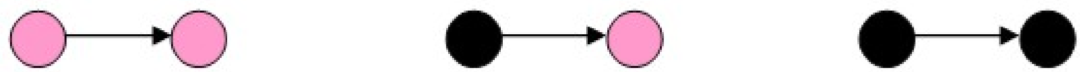
Příklad 3

Všichni chytří lidé jsou dobře oblečeni. Všichni čilí lidé jsou chytří. Proto jsou všichni čilí lidé dobře oblečeni.

Řešení: Úsudek je správný (na obr. 4 jediná neprázdná podmnožina množiny Č je také podmnožinou množiny O).

Šipkové diagramy

Metoda pochází od J. Šedivého a je vhodná pro řešení logických úloh, které obsahují složené výroky – implikace. Jednotlivé atomární výroky znázorňujeme uzly (kolečky) a ke každému výroku znázorníme uzlem jeho negaci. Implikace znázorníme šipkami mezi příslušnými uzly. Dále stanovíme pravidla pro obarvení uzlů – pravdivý výrok značíme například červeným kolečkem (na obr. 5 světlejší barva), nepravdivý černým. Na základě pravdivostní tabulky implikace jsou přípustná pouze následující spojení (obr. 5).



Obr. 5

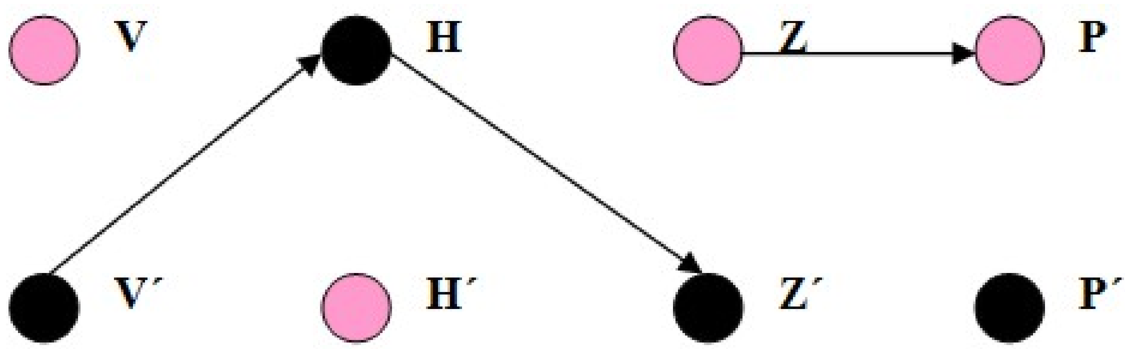
V diagramu postupně obarvujeme na základě podmínek úlohy a pravidel obarvení (včetně principu sporu) jednotlivé uzly. Úloha je vyřešena, pokud se nám podaří obarvit všechny uzly diagramu a my můžeme formulovat závěry.

Příklad 4

Jednou na pouti jsem navštívil stan s věštkyní. Věštkyně mi prozradila:

1. Jestliže mi nevěříš, pak jsi hloupý.
2. Jestliže jsi hloupý, nezaplatíš mi.
3. Když mi zaplatíš, dozvíš se pravdu.

Zaplatil jsem. Co mi vlastně věštkyně prozradila? [2]



Obr. 6

Nejdříve obarvíme barvou pro pravdivý výrok uzel Z (tj. zaplatil jsem) a na základě principu sporu uzel Z´, představující jeho negaci, obarvíme barvou pro nepravdivý výrok. Dále postupujeme podle pravidel, až se nám podaří obarvit všechny uzly diagramu (obr. 6). Na základě obarvení diagramu můžeme vyslovit následující tvrzení.

<u>Řešení:</u> Dozvěděl jsem se pravdu, věřím jí a nejsem hloupý.

Závěr

Uvedené postupy nejsou univerzální, lze je však také využívat při řešení řady dalších úloh jako je ověřování rovnosti dvou množin, zjednodušování množinových zápisů a řešení slovních úloh (úlohy o počtech prvků konečných množin, [3]).

Literatura

[1] Bušek, I. aj.: *Základní poznatky z matematiky*. Prometheus, Praha 1992.

[2] Kobza, M.: *Sbírka úloh z logiky pro výuku středoškolské matematiky*. Diplomová práce. UK MFF, Praha 2004.

[3] Šedivý, J. aj.: *Úlohy o výrocích a množinách pro 1.ročník gymnasia*. SPN, Praha 1972.

SOKO-BAN: Legenda pre vašu výuku matematiky

Vladimír Zahoranský[1]

Chcete nájsť hlavolam, voľne dostupný software pre bežný počítač, hlavolam, ktorý zaujme malé deti či dospelých, riešiť rôzne jeho mapy? Hľadáte software vyžadujúci veľmi malé nároky na počítač, ľahko stiahnuteľný z Internetu, s viac než 50 bezplatnými edíciami, s viac než 10 000 mapami, s ľahkou editáciou máp aj pre deti? Stále hľadáte hlavolam, ktorého ľahké mapy môžu začať riešiť malé deti? Hlavolam, ktorého náročné, záludné mapy potrápia aj šachového veľmajstra? Hlavolam, ktorého pravidlá vysvetlíte za jednu minútu, ktorého pokročilé riešiteľské stratégie zvládnu deti za dva – tri mesiace, ktorého ťažšie mapy budú deti vedieť riešiť za krátky čas? Hlavolam, ktorý umožňuje veľkú súťaživosť medzi riešiteľmi? Týmto hlavolamom je nesporne SOKO-BAN, legenda pre vašu výuku matematiky.

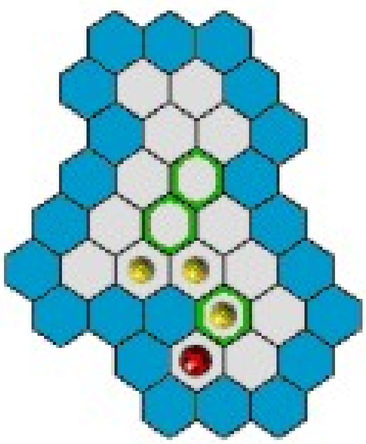
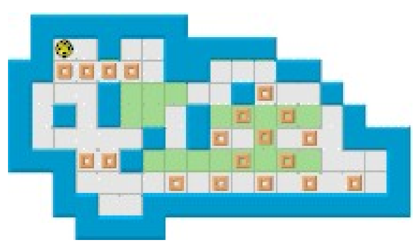
Hlavolam SOKO-BAN pochádza z Japonska, autorom je Hiroyuki Imabayashi zo spoločnosti Thinking Rabbit z roku 1980. V meste Takarazuka v roku 1982 vyhlásila skladová spoločnosť súťaž na vytvorenie motivujúceho software pre voľné chvíle zamestnancov. Prihlásené boli rôzne „žánre“ hier, akčné, strategické či dobrodružné. Vyhral však SOKO-BAN, logická hra, vďaka svojej elegantnosti, jednoduchosti a rozmanitosti legendárnych 50 máp, ktoré tento hlavolam na celom svete preslávili. Postupne pribúdali ďalšie edície na rôznych typoch počítačov či mobiloch. Hlavolam si získal veľmi veľa riešiteľov ale i tvorcov máp. Vznikli aj rôzne obmeny ako SokoMind Plus, HexaBan, MultiBan apod.

[1] *FMFI UK Bratislava, zahoransky@pobox.sk*

Pravidlá tohto hlavolamu sú veľmi jednoduché a je možné ich vysvetliť za jednu minútu. Cieľom je premiestniť skladníkom všetky balíky na cieľové políčka (vyznačené červenou farbou) tak, že viete tlačiť práve jeden balík v jednom zo štyroch smerov na voľné políčko. Balíky nemajú „ucho“, ktorým by ste „ťahali“. Samozrejme, cieľom je získať čo najlepšie riešenie, teda s najmenším počtom ťahov skladníka či s najmenším počtom tlačení balíkov.

Určite uvažujete, či je správne propagovať hranie počítačových hier. Nevravím, aby deti na hodine hrali hry na počítači či mobile. Ale čo si myslíte, že robia Vaši žiaci doma? Vytrvalo sa učia? Alebo sedia pri počítači a hrajú počítačové hry? Ak sa zamyslíte, hranie počítačových hier rozvíja rôzne schopnosti potrebné pre výuku. Z tohto ohľadu je vhodné využiť túto „záľubu“ vašich žiakov. Hlavolam SOKO-BAN môže byť veľmi dobrá inšpirácia.

V článku [Z] som podrobne opísal široké využitie tohto hlavolamu vo vyučovacom procese, užitočné informácie možno nájsť aj na [W2]–[W4], internetových stránkach Phila Shapira – učiteľa matematiky. V krátkosti, najdôležitejšie aspekty uvádzame v zarážkach. Viac informácii nájdete v článku [Z], resp. v elektronickej forme [W5], alebo na www stránke [W1] s množstvom odkazov.


Prínos hlavolamu SOKO-BAN pre rozvoj dôležitých schopností pre život a vyučovací proces matematiky

– schopnosť logicky a strategicky uvažovať
– schopnosť analyzovať aktuálnu situáciu
– schopnosť tvoriť hypotézy (domnienky) a tie overovať, schopnosť odôvodňovať
– schopnosť pracovať s informáciami
– schopnosť rozhodovať sa
– schopnosť argumentovať
– schopnosť abstrahovať
– výborný nástroj motivácie žiakov

– práca s IKT, komunikácia s ostatnými riešiteľmi
– neformálna tvorba poznania, vhodné aj ako reedukačná stratégia

Prínos hlavolamu SOKO-BAN z pohľadu využívania IKT vo výuke:

– skromné nároky na hardware či software počítača
– skromné nároky na prácu s počítačom
– ľahká obsluha hlavolamu, iba klikanie a používanie šípok klávesnice
– veľké množstvo dostupných edícii a máp hlavolamu
– krátka doba hrania jednej mapy, niekoľko minút
– ľahká prezentácia ukážkových či rekordných riešení máp
– stupňovaná náročnosť máp, teda môžu „hrať“ aj slabší žiaci
– výborný nástroj motivácie žiakov, podnecovanie zdravej súťaživosti
– tímová práca pri riešení náročnejších máp
– prospešné využitie IKT na výmenu riešiteľských skúseností s inými riešiteľmi

Stratégie riešenia máp hlavolamu SOKO-BAN

Hlavolam SOKO-BAN sa vyznačuje ešte jednou cennou vlastnosťou. Obsahuje jednoduché riešiteľské metódy, ktoré je možné aplikovať na vyriešenie netriviálnych máp. Medzi ne určitě patria metódy – „ovečky do košiara“, chybových pozícií, koncových rozložení, „vzorov“ (paternov), efektívnych riešení, prechodových stavov či rozkladová, reverzná, sektorová (bloková) a trasovacia metóda. Viac informácii čitateľ nájde v článku [Z].

Záver

Tento príspevok vznikol stručným výberom myšlienok z článku [Z], ktorý bol prezentovaný na konferencii Aplimat 2004 a bol publikovaný v zborníku. V elektronickej verzii je možné ich nájsť na stránke [W1] alebo na stránke konferencie Aplimat [W5].

Literatúra a užitočné zdroje

[Z] Zahoranský, V.: Čo má spoločné so vzdelávacím procesom matematiky legendárny hlavolam SOKO-BAN? In, *Zborník z konferencie Aplimat*, 2004, s. 1023–1035.

[W1] `http://kantorek.webzdarma.cz` – František Pokorný, riešiteľ a tvorca máp

[W2] `http://www.his.com/~pshapiro/about.ss.html` – The Educational Value of Sokoban Puzzles, pub. November 1995

[W3] `http://www.his.com/~pshapiro/sokomindarticle.html` – SokoMind Freeware Logic Puzzles, pub. 2002

[W4] `http://www.technicitytimes.com/Issue2/FreeSoftware_Feb_03.htm` – SokoMind: Free educational Software, pub. Februar 2003

[W5] `http://www.aplimat.com` – oficiálna stránka konferencie Aplimat

Úloha matematické rozcvičky v matematice

Romana Zemanová[1]

I hodiny matematiky lze zpestřit činnostmi, které mají žáci rádi, soutěží v nich a procvičují matematiku, aniž si to uvědomují a aniž jsou stresováni špatnou známkou.

Matematickou rozcvičku lze provádět u všech věkových kategorií žáků. Já jsem ji zavedla ve všech třídách, které učím, tj. 6., 7. a 8. ročník.

Co to matematická rozcvička je? Procvičování učiva matematiky zábavnou formou.

Kolik času zabere? Neměla by překročit 5 úvodních minut hodiny.

Jakou formu zvolit? Lze užít individuální práci žáků, kompetitivní i kooperativní formu.

Faktory ovlivňující formu rozcvičky:

– počet žáků ve třídě
– úroveň třídy (intelektuální i kázeňská)
– ochota spolupracovat s učitelem
– uspořádání třídy (uspořádání lavic)
– vhodnost učiva

Učivo, které mohu procvičovat? Lze vybrat kterýkoli tematický celek, záleží pouze na fantazii učitele a vhodně zvolené formě.

Důvod, proč rozcvičku zavést do hodin? Množství učební látky na 2. stupni ZŠ je velké a nezbývá tedy čas procvičovat pamětní počítání, ale ani dostatečně procvičit nové učivo. Dalším důvodem je i procvičení „bystrosti a rychlosti pedagoga“. A v neposlední řadě také snaha zainteresovat a motivovat žáka k aktivní spolupráci.

Jak náročná je rozcvička na přípravu učitele? Záleží na výběru typu rozcvičky, ale většinou není potřebná příprava předem, pouze je důležité zvládnout organizaci práce ve třídě.

6. třída

Situace: 17 žáků, třída průměrná, žáci soutěživí; rozdělení žáků do tří skupin; forma kompetitivní, ústní zadávání úloh.

Rozcvička probíhá danou hodinu matematiky v několika kolech. V každém kole má každá skupina jednoho zástupce (žáci by se měli střídat), který, pokud jako první správně vypočítá učitelem zadanou úlohu, získá pro skupinu jeden bod. Na konci každého týdne skupina s největším počtem bodů získává jedničku za soutěž skupin.

Je nutné předem děti seznámit s pravidly soutěže, domluvit se na nich a rozdělit žáky do skupin, které jsou alespoň přibližně vyrovnané svými početními schopnostmi.

[1] ZŠ Rakovského, Praha 4, ZemanovaRomana@seznam.cz

Výhody:
– žáci se nechají lehce vtáhnout do soutěže
– jsou motivováni jedničkou do žákovské knížky
– jedničku získávají všichni členové skupiny bez ohledu na správnost a rychlost jejich odpovědí
– učitel může na začátku vytvořit vyrovnané skupiny (nevyhrává pouze jedna skupina)
– individuální přístup k žákům (pokud vím, že žák nemá předpoklady k počítání zpaměti, může si úlohu napsat na papír)

Úskalí:
– učitel musí být ve střehu a rozhodovat o udílení bodů
– objektivita – pozor na vysmívání se pomalým a slabým žákům

7. třída

Situace: 26 žáků, třída je lepší průměr, žáci jsou hluční, upovídaní, je nutné časté upoutávání pozornosti

Rozcvička je vedena individuální formou, každý pracuje sám za sebe. Kdo dosáhne za celý týden předem dohodnutých výsledků, dostává jedničku (v této třídě počítáme úspěšnost řešení příkladů na procenta, odměněn je ten, kdo má po celý týden 90% a 100%-ní úspěšnost).

Výhody:
– žáci pracují klidněji, lépe se soustředí
– vidí své vlastní výsledky a pokroky
– motivace odměnou (jedničkou)

Úskalí: možnost záměrného přilepšení výsledků při kontrole spolužákových výsledků

Okruhy učiva: početní operace s celými čísly, počítání se zlomky, počítání zpaměti, počítání s procenty, změna čísla v daném poměru.

Vlastní pozorování: Tato forma rozcvičky je klidnější, ale méně soutěživá a spontánní. Třída je špatně kázeňsky zvladatelná, proto s ní nelze provádět kompetitivní rozcvičku.
Myslím si, že každá vyučovací hodina by měla být koncipována tak, aby byla pro žáky co nejvíce poutavá, záživná a zábavná. Žák má potom větší předpoklady zapamatovat si více z obsahu hodiny.

Matematickou rozcvičku jsem zavedla před dvěma roky, postupně jsme spolu s žáky hledali optimální varianty této „zahřívací“ aktivity a myslím, že se nám podařilo najít takovou podobu, která co nejvíce vyhovuje oběma stranám. Žáci si na rozcvičku zvykli velice rychle, i přestože jejich počáteční reakce byly trochu rozpačité. Styděli se před ostatními, báli se negativních ohlasů na špatné výsledky, nebo si pouze připadali trapně. Za celou dobu se stalo pouze několikrát, že se našel žáček, který se nechtěl zúčastnit, což bylo způsobeno zdravotním stavem nebo událostmi v rodině. Pokud s rozcvičkou začneme u šesťáků, není pak problém pokračovat s ní i v dalších ročnících. Zavádět rozcvičku u deváťáků by mohlo být problematické.

Žáci sami upozorňují na zařazení rozcvičky a podle jejich reakcí je vidět, že tato aktivita je baví, i když pouze počítají nezáživné úlohy. Tvrdí také, že se jim potom lépe píší desetiminutovky. Tento vliv jsem zatím nezkoumala, ale je možné, že se do něj v dalších letech pustíme, samozřejmě spolu s žáky. Na závěr bych chtěla doporučit, pokud jste ještě rozcvičku nezkusili a máte dostatek elánu, odvahy, rádi experimentujete a rádi vidíte spokojené žáky, zkuste to!

Pracovní dílny

Klasifikační hra „Hádej a plať“[1]

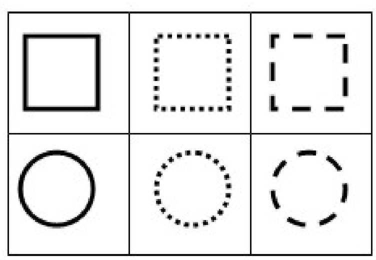
Eva Dyková[2]

V pracovní dílně byla účastníkům představena klasifikační hra „Hádej a plať“.[3] Tato hra vznikla v rámci mezinárodního sokratovského projektu COSIMA, na němž se autorka podílí. Smyslem hry je rozvíjet schopnost klasifikace jako jednu z psychických funkcí podílejících se na tvorbě struktury u žáka (Hejný, Kratochvílová, 2005).

Pravidla hry

Ve hře proti sobě stojí ZADAVATEL a ŘEŠITEL. ZADAVATEL předkládá ŘEŠITELI sadu objektů (slov, znaků, obrázků, čísel. . .), kterou nazýváme GALERIE. Např.:

Zároveň má sám tyto objekty uspořádané v tabulce, např. tab. 1:



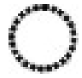
Tab. 1

Objekty musí být umístěny v řádcích a sloupcích tabulky podle jistých kritérií (v tomto případě je to pro řádky kritérium tvar a pro sloupce kritérium typ čáry). Takto uspořádanou tabulku nazýváme TASK. Úkolem ŘEŠITELE je uhodnout TASK, tedy a) objevit kritéria, podle kterých lze objekty uspořádat do řádků a sloupců prázdné tabulky, a b) zjistit konkrétní uspořádání tabulky – přesně stejné, jako má ZADAVATEL. ŘEŠITEL plní svůj úkol pomocí následujících tří typů otázek, které pokládá ZADAVATELI:

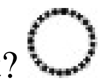
[1] Příspěvek byl podpořen projektem COSIMA (Socrates – Comenius 2.1. registrovaným pod číslem 112091-CP-1-2003-1-DE-COMENIUS-C21).

[2] *Eva Dyková, ZŠ Školní, Praha 4, eda26@seznam.cz*

[3] Autorem této hry je M. Hejný.

- V kterém poli je tento objekt? 

  (otázka za 5 bodů)
- Který objekt je v tomto poli? (ŘEŠITEL ukáže na jedno pole.)

  (otázka za 5 bodů)
- Je v tomto poli (ŘEŠITEL ukáže na jedno pole) tento objekt? 

  (otázka za 1 bod)

U každé otázky je uvedena její cena – počet bodů, který „platí“ ŘEŠITEL ZADAVATELI za zodpovězení dané otázky. ŘEŠITEL se snaží uhodnout správné uspořádání tabulky s co nejmenší ztrátou bodů. Role ŘEŠITELE a ZADAVATELE je samozřejmě možné střídat.

Sehrávky s účastníky dílny

Hra byla účastníkům dílny představena formou jedné demonstrační sehrávky, kdy autorka byla v roli ZADAVATELE a celá skupina byla v roli ŘEŠITELE. GALERIE, prázdná tabulka i typy otázek byly napsány na tabuli. Pro tuto první demonstrační sehrávku jsem zvolila výše uvedenou GALERII s 6 objekty (čtverce a kružnice).

Aniž by se účastníci nějak domlouvali, hlásili se a pokládali otázky, dokud neuhodli TASK. Ztráta bodů byla zapisována na tabuli. Demonstrační sehrávka sloužila k představení pravidel hry. Po této sehrávce následovala krátká diskuse o snadném objevení kritérií v předložené GALERII a o strategii.

TASK 1

SASANKA	STRAKA	STŮL
PÁMELNÍK	PYTEL	PES
TABULE	TULEŇ	TIS

Dále byli účastníci rozděleni do dvojic a sehrála se ještě další dvě kola hry s jinými GALERIEMI (jedna z nich viz TASK 1). Hra s těmito GALERIEMI je náročnější, protože obsahují více objektů a lze najít více kritérií pro jejich uspořádání. V obou případech šlo najít tři kritéria uspořádání. V uvedeném TASKu 1 se jedná o následující kritéria: 1. počáteční písmeno, 2. počet slabik a 3. příslušnost slov podle významu do skupin: rostlina/zvíře/věc. Situace je ještě náročnější, protože vzhledem ke stejnému počtu řádků i sloupců v tabulce mohou všechna kritéria platit jak pro řádky, tak pro sloupce.

Průběh těchto dvou sehrávek byl organizován následujícím způsobem: Autorka opět byla v roli ZADAVATELE, účastníci ve dvojicích byli ŘEŠITELI. Všechny dvojice obdržely papír s prázdnou tabulkou a objekty GALERIE ve formě nastříhaných kartiček, aby s nimi bylo možné manipulovat. Kromě toho dostala každá dvojice sadu „dotazovacích kartiček“. Na jednotlivé kartičky hráči zaznamenávali postupně své otázky, jeden z dvojice vždy kartičku přinesl ZADAVATELI a obdržel na ni odpověď.

Když se hry sehrály, účastníci dílny diskutovali o náročnosti hry, o tom jak se náročnost mění s formátem tabulky a s rostoucím počtem kritérií. Vyšší úrovní hry může být hledání optimální strategie (jak uspět s co nejmenší ztrátou bodů bez pomoci šťastné náhody) pro různé typy tabulek a různý počet kritérií.

Závěr

Hra nabývá na zajímavosti, když ZADAVATEL sám své GALERIE vytváří. Objekty do GALERIE mohou být voleny ze všech možných oblastí, nemusí se v žádném případě týkat pouze matematiky. Nutná je pouze přítomnost jasných kritérií pro uspořádání. Náročnost hry lze snadno upravovat podle věku a schopností žáků, takže ji lze hrát na 1. i 2. stupni ZŠ (popřípadě i na vyšších stupních). Žáci mohou hrát jako jednotlivci (učitel či jeden žák v roli ZADAVATELE, ostatní žáci ŘEŠITELÉ), ve dvojicích (jeden ZADAVATEL, druhý ŘEŠITEL) nebo ve skupinkách (osvědčily se mi trojice). Hra ve skupině je obohacena o prvek spolupráce, dohody, argumentace... Samozřejmě je dobré, když se role ZADAVATELE a ŘEŠITELE po sehrávce vystřídá.

Aby byl učitel připraven hrát hru se žáky, je dobré, aby se s ní sám aktivně seznámil a získal pro ni jistý zápal. Proto autorka uvádí několik úloh, které nejprve mohou posloužit učiteli a později i žákům.

Úlohy

Ú1. Hledejte a pojmenujte kritéria pro uspořádání následujících galerií do tabulky 2×3.

a) ACA, AAB, BAA, ABA, AAC, CAA

b) 12, 54, 72, 102, 114, 204

c) 

d) Anna, Barbora, Dominik, Dominika, Bořek, Alexandr

Ú2. Hledejte kritéria pro uspořádání následujících galerií do tabulky 3×4.

a) NUTELLA, SNICKERS, SAAB, STOCKHOLM, PEUGEOT, MERCEDES, NEW YORK, MENTOS, MADRID, PRAHA, NISSAN, PEPSI

b) KÁVA, KOSTEL, OMYL, METAN, PUŠKA, KRÉDO, OSLAVA, PES, PRÁDLO, OKO, MÝTO, MYŠ

c) BIRD, LAMP, PEACH, PYRAMID, LEMON, RING, RABBIT, RASPBERRY, LABRADOR, BANANA, PENGUIN, BASKET

Ú3. Vymýšlejte různé galerie do tabulky 3×3, kde budou tři kritéria. Prvky galerie vybírejte z různých oblastí života (např. slova, obrázky, symboly, čísla, tvary atd.).

Řešení úloh

Ú1.

a) řádek: obsahuje písmeno B / C
sloupec: začíná AA / končí AA / A__A
b) řádek: násobky 6 / násobky 12
sloupec: ciferný součet 3 / ciferný součet 6 / ciferný součet 9
c) řádek: menší velikost / větší velikost; znak s podtržítkem / bez podtržítka
sloupec: trojúhelník / čtverec / kruh
d) řádek: ženské jméno / mužské jméno
sloupec: 2 slabiky / 3 slabiky / 4 slabiky; počáteční písmeno A / B / D

Ú2.

a) řádek: značky potravinářských výrobků / jména měst / značky aut
sloupec: počáteční písmeno N / S / M / P
b) řádek: rod ženský / mužský / střední
sloupec: počáteční písmeno K / M / O / P; počet písmen 3 / 4 / 5 / 6
c) řádek: počet slabik 1 / 2 / 3; živočich / věc / ovoce
sloupec: počáteční písmeno B / L / P / R

Literatura

Hejný, M., Kratochvílová, J. (2005.) Klasifikace jako kognitivní funkce. In Vagaský, M., Hejný, M. (Eds.), *Zborník príspevkov z letnej školy teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2004*, JSMF, EXAM, Bratislava, 26–44.

Zlatý vrch nad Českou Kamenicí aneb Funkce v přírodě okolo nás

Petr Eisenmann[1]

Bývalý lom Zlatý vrch nad Lískou u České Kamenice v severních Čechách je tradičním místem zastavení při toulkách na okraji Lužických hor. Lom zde byl založen někdy kolem roku 1870. Čedičové sloupce v něm byly dokonale vyvinuté a jen málo rozpukané,

[1] *PF UJEP Ústí nad Labem, eisenmannp@pf.ujep.cz*

takže se daly lámat až 6 m dlouhé. Pro svou velkou odolnost se údajně používaly i při stavbě mořských hrází v Nizozemí. Těžba zde byla definitivně zastavena až v roce 1973, kdy byla odkryta celá lomová stěna, tvořená až 30 m dlouhými dokonale vyvinutými čedičovými sloupy. Zlatý vrch je národní přírodní rezervací.

Člověk spjatý s matematikou si při pohledu na tvar čedičových sloupců (viz obr. 1) může pomyslet: Přede mnou zde stojí parametrický systém funkcí. V následujícím příspěvku se pokusíme tyto funkce popsat předpisem. Předpokládat budeme pouze elementární znalosti ze základů diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.


Obr. 1

Nejjednodušší variantou je použít k tomu celistvou racionální funkci, tedy polynom. Zde by vzhledem ke tvaru čedičových sloupců mohl vyhovovat již polynom třetího stupně, tedy

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Umístěme inflexní bod hledané funkce y (bod, ve kterém se zde funkce mění z konkávní na konvexní) do počátku. Z toho plyne podmínka

$$y(0) = 0, \quad \text{tedy } d = 0.$$

Funkce y musí být zřejmě rostoucí. Její derivace

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

tedy musí být kladná. Toho můžeme jednoduše dosáhnout například volbou koeficientů

$$b = 0,\ a > 0, c > 0.$$

.

Těmto podmínkám vyhovuje i další, následující požadavek. Potřebujeme totiž, aby funkce y byla na intervalu $(-\infty, 0)$ konkávní a na intervalu $(0, \infty)$ konvexní. Musí tedy platit

$$y'' = 6ax < 0 \,\text{pro všechna}\, x < 0$$

$$y'' = 6ax > 0 \,\text{pro všechna}\, x > 0$$

Z obr. 1 je patrné, že tečna ke grafu funkce y v počátku by měla s kladným směrem osy x svírat úhel asi 70°. Mělo by tedy přibližně platit

$$y'(0) = \text{ tg } 70^\circ.$$

Volme tedy koeficient $c = 3$. Na základě provedených úvah vypadá předpis hledané funkce y prozatím takto

$$y = ax^3 + 3x.$$

Stanovit hodnotu koeficientu a je vhodné pomocí nějakého programu umožňujícího kreslení grafů funkcí. Touto cestou jsme například my při výuce na gymnáziu dospěli pomocí programu Mathematica k hodnotě $a = 0,05$. Předpis hledané funkce y tedy jest

$$y = 0,05x^3 + 3x.$$

Posledním krokem nyní bude vytvořit z této funkce parametrický systém funkcí odpovídající obr. 1. Vzhledem k tomu, že derivace funkce y (a tedy i směrnice tečny ke grafu této funkce) je v každém bodě větší než 1 (je větší nebo rovna třem), bude vhodné parametr vložit do argumentu. Hledaný předpis tedy může být

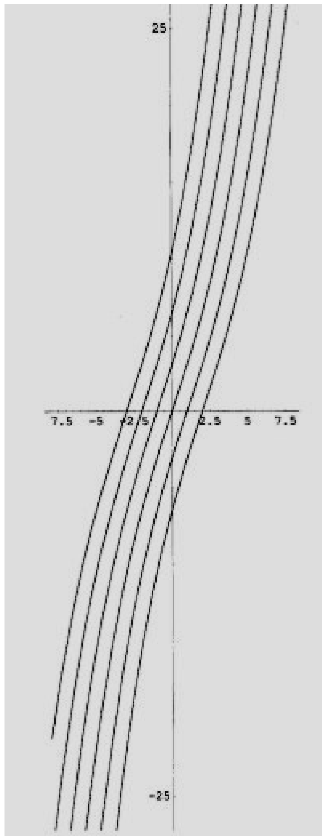
$$y = 0,05(x+n)^3 + 3(x+n),$$

kde $n = 0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots$. Obrázek grafů funkcí tohoto parametrického systému je na obr. 2.

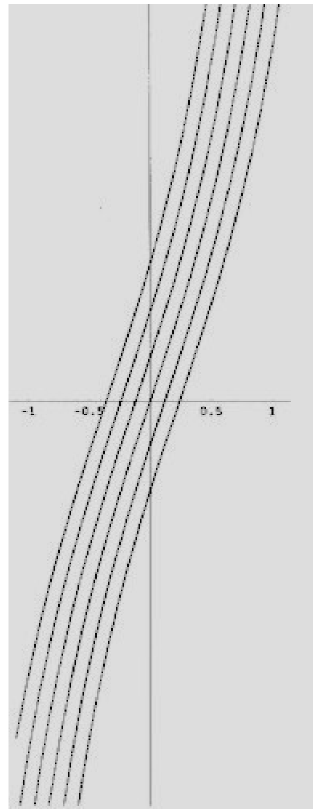
Další možnost, jak zvolit parametrický systém popisující obr. 1, navrhli při experimentální výuce na gymnáziu sami studenti. Těm se v závěru předchozí fáze vybavila funkce tangens. Ta totiž bez dalších úprav splňuje všechny požadavky kladené na hledanou funkci. Jedinou nutnou korekcí zde byla úprava hodnoty první derivace v počátku. V souladu s předchozím řešením jsme zvolili první derivaci v počátku rovnou 3. Navržený předpis tedy byl

$$y = 3\tan(x+n),$$

kde $n = 0, 0, 1, -0, 1, 0, 2, -0, 2, 0, 3, \ldots$. Obrázek grafů funkcí tohoto parametrického systému je na obr. 3.



Obr. 2



Obr. 3

Funkční myšlení na základní škole[1]

Miroslav Hricz, Zuzana Korcová, Michaela Ulrychová[2]

Ve výuce matematiky na základní škole a v odpovídajících ročnících víceletého gymnázia jsou funkce první pojem obsahující dynamiku, pohyb. Propedeutika tohoto pojmu začíná již od začátku školní docházky. Za důležité považujeme využití mezipředmětových vztahů. Téma umožňuje využívat experimentování, řešení úloh modelováním, intuicí či dedukcí.

Dílna se konala v pátek 11. února 2005 a zúčastnilo se jí 9 zájemců. Hlavní náplní byly úlohy, které je možné zařadit do výuky. Zaměřili jsme se na prezentaci tří projektů – Měření teplot, Plán výletu a Růstové křivky populace.

[1] Realizováno v rámci projektu IIATM – Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Sokrates – Comenius 2.1, 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2] *ZŠ U Santošky 1, Praha 5, www.santoska.cz, miroslav.hricz@santoska.cz; G E. Krásnohorské, Praha 4, zuzana.korcova@atlas.cz; KG Kozinova, Praha 10, www.krestanskegymnazium.wz.cz, ulrychova.michaela@centrum.cz*

Měření teplot

Žáci několika škol měřili v období od 1. do 7.6. 2004 teploty třikrát denně – v 8.30 hod., 13.00 hod. a 18.00 hod. Měření probíhalo na různých místech ČR.

Po ukončení měření žáci řešili následující úlohy:

1. Graficky znázorněte údaje z tabulky.
2. Popište změnu teplot v jednotlivých dnech a jednotlivých časech.
3. Určete průměrnou teplotu, modus a medián. Řešte různé varianty.
4. Určete četnosti jednotlivých hodnot naměřených teplot.

V rámci dílny žáci[3] výsledky projektu prezentovali sami. Popsali realizaci a v počítačové prezentaci uvedli i ukázky grafů (PowerPoint):

- sloupcový graf
- plošný graf – chybný – začíná a končí v 0°C, tyto hodnoty nebyly naměřeny
- prostorový spojnicový graf – vybrán proto, že se žákům líbil
- spojnicový graf
- ručně dělané grafy – sloupcový, přehledný;
  – kruhový s výsečemi

Žákovská řešení shrnuje následující tabulka:

Typ grafu		**další dělení**
lineární	3 grafy, zvlášť každý čas	
	3 grafy v jednom obrázku	
	vše v 1 grafu	spojeno celé – jednobarevné
		spojeno celé – barevně odlišeno
		spojené teploty v rámci dnů (za sebou)
		spojené teploty v rámci dnů (nad sebou)
	každý den zvlášť	
	změna os	spojeno celé – jednobarevně
		průměrné teploty – pro každý čas zvlášť
	průměrné teploty	v 1 grafu
		pro každý čas zvlášť

[3] Žáci 9.A třídy ZŠ U Santošky 1, Praha 5 – Kateřina Puldová, Petr Klasna, Richard Günzl, Jakub Zlocha.

Excel	všechny typy	
sloupcové (kvádrové nebo válcové)	průměrné teploty	
	3 grafy, zvlášť každý čas	
	v jednom obrázku	barevně odlišeny časy
		jednobarevné
		jednotlivé časy u sebe
	zvlášť každý den a hodina (1 den = 3 grafy)	
pruhové	kvádrové, válcové, obdélníkové	
křivkové	„had“, „spirála“	
	„hory“, vrcholový graf	
kruhové	koláčové – ve výsečích popis	
	s výsečemi – 1 výseč = 1 den	
kombinované	lineární a sloupcový	
netradiční	sluníčka	
chybné	měnící se barvy ve sloupci	
	grafy začínající nebo končící v O	
	přímá úměrnost	
	koláčové – ve výsečích popis (všechny výseče jsou stejně velké)	
	chybně zaznamenány dny, kdy se neměřilo	

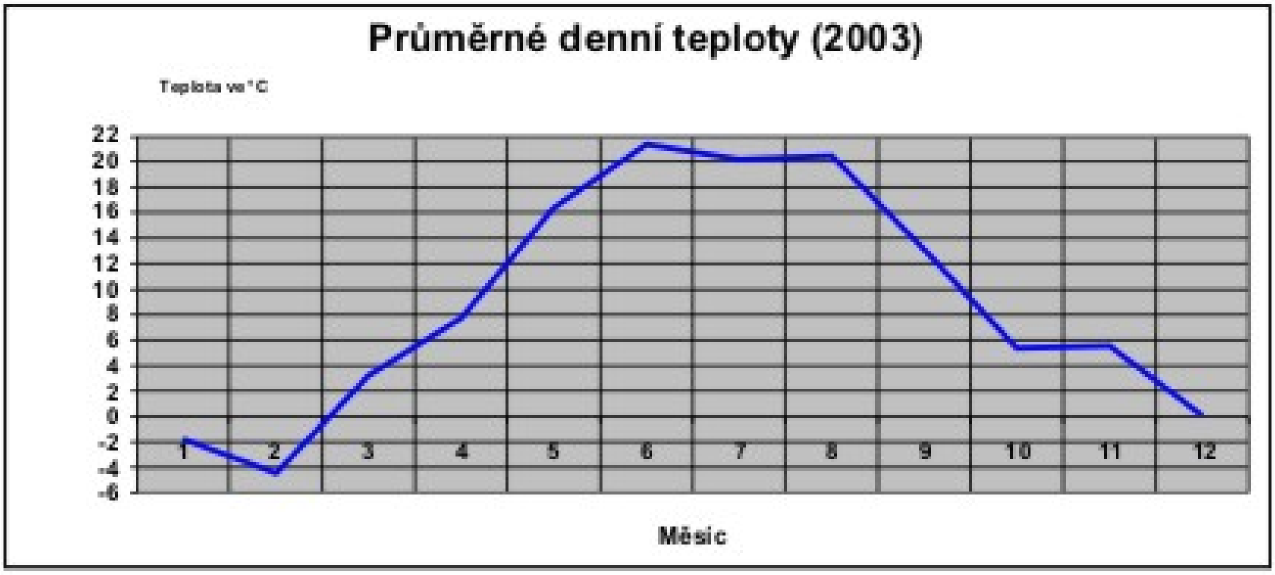
Plán výletu

Úloha 1

V areálu Základní školy ve Dvoře Králové je umístěna stanice, která měří denní i noční teploty. Na obrázku 1 vidíte graf průměrných měsíčních teplot naměřených v roce 2003.

a) V kterém měsíci byla nejnižší a v kterém nejvyšší průměrná teplota?

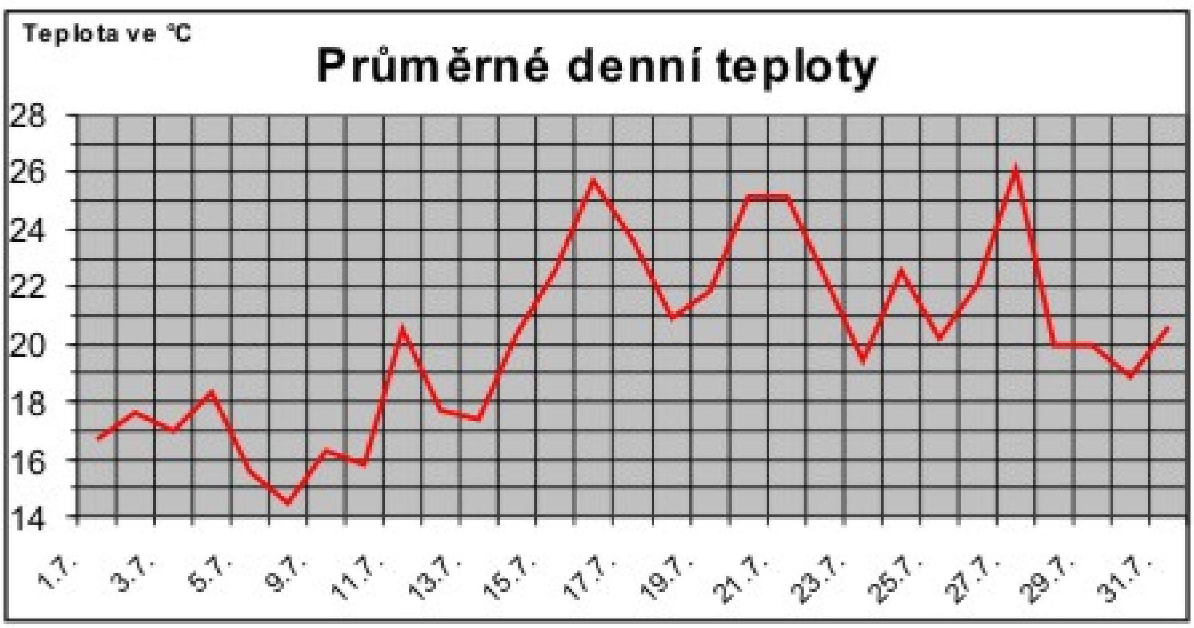
b) Popište, jak se teplota měnila v roce 2003.



Obr. 1

Úloha 2

Bára plánuje se svými kamarády na červenec výlet na kolech. Shodli se, že nejlépe se na kolech jezdí, když není ani moc teplo, ani moc zima. Nejlepší jsou podle vás teploty od 18°C do 24°C. Na obrázku 2 a 3 jsou grafy předpokládaných průměrných denních teplot a nejnižších nočních teplot v červenci získané z tajných zdrojů.



Obr. 2

a) Který termín byste Báře doporučili a proč? Vyznačte ho i v grafu.

b) Protože se všichni rozhodli spát ve stanech, přemýšleli i o nočních teplotách. Určitě by jim byla zima, kdyby teplota klesla pod 12°C. Který termín byste jim doporučili teď?

c) Výlet má trvat celý týden. Doporučte jim nejvhodnější datum odjezdu.

Obr. 3

Žákovská řešení

Dále uvádíme souhrn žákovských řešení formou tabulky. Za tabulkou vždy následuje několik poznámek.

Úloha 1

a)

1	Udaná čísla měsíců	*- 2. měsíc nejnižší, 6. měsíc nejvyšší* *- 2 nejmíň, 6 nejvíc*
2	Vyjmenované měsíce	*- Únor nejnižší, červen nejvyšší*
3	Vyjmenované měsíce zároveň s nejvyšší (nejnižší) teplotou, která se v něm vyskytla.	*- Únor ($-4°C$), červen ($22°C$)*
4	Vyjmenované měsíce s extrémy teplot a snaha o popis	*- únor, protože je tam křivka grafu nejníž* *- únor, protože je tam křivka na nejnižším stupni* *- únor, protože grafová čára je tam nejníž*

- Všichni žáci určili měsíce správně a nikdo neměl s určením žádný problém.
- Nepozorovali jsme žádný rozdíl mezi mladšími a staršími žáky.

b)

1	Vyjmenované měsíce a teploty v nich naměřené	- *leden* ($-2°C$)*, únor* ($-4°C$)*, . . .*
2	Vyjmenované měsíce a posouzení teploty	- *v lednu byla zima, v únoru taky, v březnu bylo teplejc,. . . , v červnu bylo vedro, . . .*
3	Vyjmenované měsíce a rozmezí naměřených teplot	- *leden* (-2 *až* $-3°C$)*, únor* (-4 *až* $-2°C$)*, . . .*
4	Vyjmenovaná posloupnost hraničních teplot	- $-2, -4, 22, 20, 6, 0$
5	Jednoduchý popis průběhu s měsíci	- *klesala, od února stoupala až do června,, pak klesala*
6	Jednoduchý popis s měsíci a teplotami	- *klesala na* -4 *v únoru, potom rostla do června na 22, . . .*
7	Přesnější popis průběhu s měsíci	- *do února mírně klesala, potom prudce rostla do června, dále kolísala, srpna prudce klesala, v říjnu a listopadu byla stejná, a potom klesala*
8	Popis se změnami teplot	- *v únoru klesla o* $2°C$*, v březnu stoupla o* $6°C$*, v dubnu stoupla o* $6°C$*, . . .*

- Množství přístupů zejména u mladších žáků (prima, sekunda, 6. ročníky).
- U mladších žáků více podrobností.
- U starších žáků vždy průběh – jednoduchý či přesnější (málo početný vzorek).

Úloha 2

a)

1	Určený den splňující zadání pro denní teploty (s udáním teploty)	- *17.7., protože je ve dne dobrá teplota* ($21°C$)
2	Určené rozmezí dnů od 2 do 15 dnů (úlohu splňuje maximálně rozmezí 5 dnů, u ostatních rozmezí nebyla respektována horní hranice teplot)	*-23.– 27.7., protože teploty jsou mezi* $18°C$ *a* $24°C$
3	Dvě nebo tři data splňující zadání	- *12.7. nebo 31.7., protože je teplota přesně mezi 24 a* $18°C$
4	Jedna z předchozích možností, ale hned zohledněny i noční teploty (zřejmě pročteno nejprve celé zadání)	- *17.7., protože ve dne je* $21°C$ *a v noci* $16°C$

5	Jedna z předchozích možností, ale nesplňující zadání (uplatnění vlastního pohledu)	*- 15.–23.7., čím větší teplota, tím lepší*

- Velmi často žáci nerespektovali horní hranici teplot (24°C jim nepřipadalo zřejmě jako vysoká teplota nevhodná pro jízdu na kole).
- Často se žáci snažili hned zohledňovat i noční teploty (asi v polovině případů úspěšně).
- Pod pojmem „termín“ ze zadání velká část zejména mladších žáků rozumí pouze jedno datum (u několika skupin se jedno datum objevilo jako datum odjezdu, což se ukázalo v dalším postupu řešení).
- Dvě skupiny si hranice teplot v grafu označily přímkami rovnoběžnými s osou dat.
- Časté uplatňování vlastního pohledu (*mohlo by foukat, tak by vyšší teplota nevadila*, *čím větší teplota, tím lepší*, *18°C je málo, to bych teda na kole nejel*).
- Téměř nikdo nepoužil sudá data (v grafu jsou kvůli přehlednosti uvedena jen lichá data).

b)

1	Určený den vyhovující pouze zadaným nočním teplotám (jiný den než v zadání a)	*- 17.7., protože noční teploty jsou nad 12°C*
2	Určený den vyhovující nočním i denním teplotám (stejný jako v zadání a)	*- 19.7., teploty v noci jsou vyšší než 12°C a ve dne je teplo.*
3	Určené rozmezí dnů vyhovující pouze zadaným nočním teplotám (bez ohledu na odpověď udanou v zadání a)	*- 17.7.–29.7., protože teploty vyhovují*
4	Určené rozmezí dnů dvakrát – jednu pro denní teploty, jedno pro noční teploty, udané termíny se překrývají	*- 22.–27.7., protože denní teploty jsou mezi 18 a 24°C a 25.–29.7., protože noční teploty vyhovují*
5	Určené rozmezí dnů, vyhovující nočním i denním teplotám (bez ohledu na odpověď udanou předtím v zadání a)	*- 23.–27.7., protože to vyhovuje teď oběma teplotám*
6	Určené rozmezí dnů – rozmezí ze zadání a upravené tak, aby vyhovovalo i nočním teplotám	*- 23.-27.7., protože tak to vyhovuje i nočním teplotám*

7	Určené rozmezí dnů nesplňující zadání	*- noční teploty vyhovují a denní dvakrát krátce převyšují 24°C, ale to se dá snést a dá se to strávit třeba na koupališti*

- Často uplatněn vlastní pohled na teploty a návrhy řešení (*denní teploty zadání splňují a v noci je to jedno, protože máme spacáky do −50°C, jeden den je tepleji, ale můžeme jít na koupaliště, v noci je sice někdy větší zima, ale pár dnů se to dá vydržet*).
- Skupiny, které použily zakreslení povolených teplot, použily stejný postup i na noční teploty.
- Velmi málo skupin použilo možnost zakreslování do grafů (*je to zadání*).

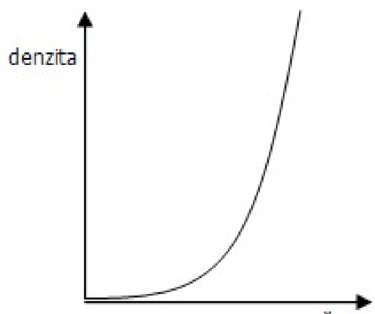
c)

1	Určené rozmezí 7 dnů (splňující noční teploty, překročené denní teploty)	*- 21.–28.7., teploty nám vyhovují* *- vyjedeme 19.7. a vrátíme se 26.7., protože v těchto dnech jsou nejoptimálnější teploty, dva dny je sice teploty, ale naplánovali bychom návštěvu aquaparku, který všichni zbožňujeme* *- 23.–30.7., protože je teplota průměrná, jiný termín neexistuje*
2	Určené datum odjezdu (splňující noční teploty, překročené denní teploty)	*- datum odjezdu 17.7., v noci není zima a přes den není horko, teplota přes den nevyšplhá ani na 30°C*
3	Určené datum odjezdu, teploty splňuje pouze tento den	*- odjezd 28.7.*
4	Určené datum odjezdu, první den nebo poslední den nesplňuje teploty	*- na začátku stejně pojedeme autobusem, tak nám to nevadí* *- poslední den budeme spát v posteli, tak je jedno, jaká je teplota*
5	Určené rozmezí více než 7 dnů (nesplněny ani denní ani noční teploty)	*- termín od 17.7. do 30.7., v noci je teplo, když tak vezmeme dobré spacáky a ve dne není vedro, mohl by foukat i slabý vítr*
6	Určené rozmezí méně než 7 dnů splňující denní i noční teploty	*- 22.–27. 7., protože jsou teploty splněny*

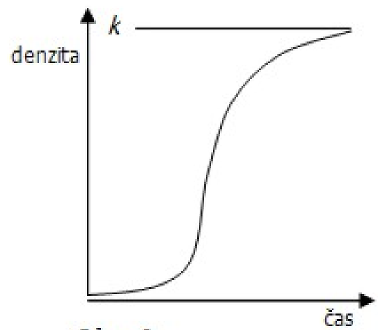
- Úloha neměla jednoznačné řešení, zajímavé bylo, jak si s tím jednotlivé skupiny poradí.
- Většina žáků úlohu vyřešila a odůvodnila, proč vybrala právě daný termín a jak řeší problém, že něco není splněno.

Růstové křivky populace

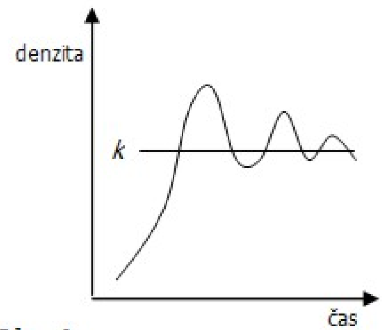
V rámci pracovní dílny jsme také využili aktivitu účastníků. Měli se vžít do role učitele, jehož přístup k vyučování je konstruktivistický, a vymýšlet zadání netradiční úlohy. K dispozici byly následující grafy.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Návrhy účastníků dílny

<u>Úkol:</u> Navrhněte způsob zadání úlohy. Naznačte možná řešení.

<table>
<tr><th>Skup.</th><th>Návrhy řešení</th></tr>
<tr><td>č. 1</td><td>• Který graf definuje demografický vývoj v České republice? (vyhledávat statistiky, práce s informací)
• Diskuse – nosná kapacita prostředí
Překročili jsme v ČR nosnou kapacitu prostředí? (Jsme před / za?)
Dá se nosná kapacita prostředí k určit a) v ČR, b) u primitivních národů?
• Porovnejte demografický vývoj v ČR a demografický vývoj primitivních národů.
• Obr. č. 3 – Porovnej velikosti navýšení a propadů.
• Otázka natality a mortality
• Otázka trvale udržitelného rozvoje</td></tr>
<tr><td>č. 2</td><td>• Obr. č. 1 – Pomocí údajů z tabulky vyjadřující růst populace králíka australského zaznamenej informace do grafu.
<table>
<tr><td>Čas</td><td>1900</td><td>1910</td><td>1920</td><td>1930</td><td>1940</td><td>1950</td><td>1960</td><td>1970</td><td>1980</td><td>1990</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>Počet králíků</td><td>0</td><td>150</td><td>160</td><td>235</td><td>1600</td><td>5000</td><td>25000</td><td>50000</td><td>100000</td><td>180000</td><td>500000</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

č. 3	• Obr. č. 1 – Populace živočichů v rybníce, která nemá predátora (nikdo je neloví), má dostatek živin k uživení všech potomků. Zkuste navrhnout graf, který by vyjadřoval přírůstek jedinců v závislosti na čase v období 10 let. V roce „0“ jsou 2 jedinci, kteří mohou mít maximálně 4 potomky, a to přesně 1 rok od narození. • Obr. č. 1 – Podívej se na zadaný graf (viz obr. 1) a vysvětli, co vyjadřuje. !! žáci mohou uvažovat kvadratickou funkci • Obr. č. 1 a 2 – Porovnej graf na obr. č. 1 a obr. č. 2.
č. 4	• Obr. č. 1 – Zakreslete graf zaplňování divadla před představením. S každou přibývající minutou před představením se počet diváků zdvojnásobuje. (Vidíme jen část grafu – např. od 16.00 do 17.00, v 17.00 je plno, zavírají) • Obr. č. 2 – Nakreslete průběh osídlování nového sídliště. (Na začátku moc zájemců není, potom se o možnosti bydlení dozvídá více a více lidí, na závěr – maximum – víc baráků není.) • Obr. č. 3 – Zakreslete návštěvnost v ordinaci praktického lékaře s polední pauzou. (Nejprve roste počet pacientů v čekárně, potom oběd – pauza, po obědě – lidé z práce, necítí se dobře, 3. maximum – opilci na chodníku)

Literatura

Kubínová, M., Stehlíková, N. (2005.) Functional thinking. *Pracovní materiál pro projekt IIATM*. Nepublikováno.

Escherovské teselácie[1]

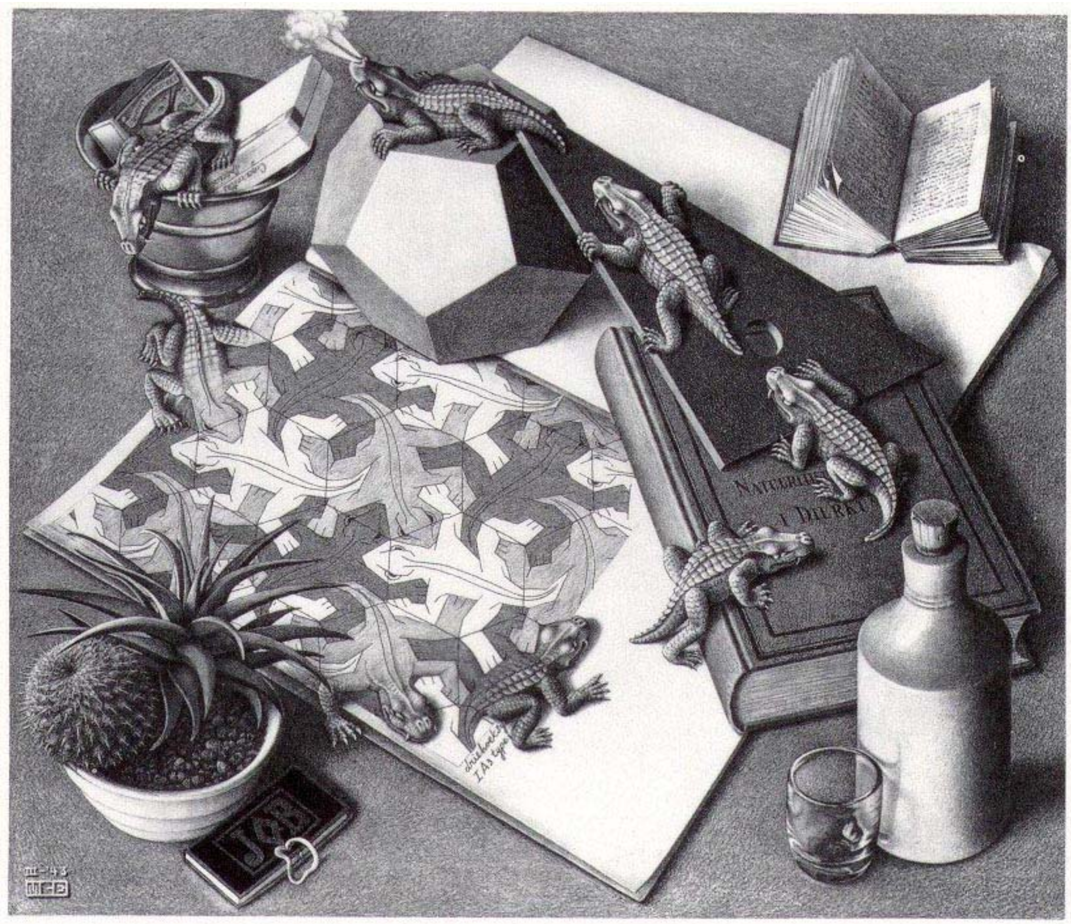
Lucia Ilucová[2]

Tvorba holandského grafika M. C. Eschera je známa na celom svete. Priťahuje svojou jedinečnosťou a zaujímavosťou, ale málokto si uvedomuje jej matematickú stránku. V grafike *Jašterice* (*Reptiles*, 1943) spája Escher prechod medzi rovinou a priestorom (obr. 1). Na stole leží otvorený skicár, v ktorom je mozaika zložená z obrazcov v tvare jašterice v troch farebných odtieňoch. Jedno zviera prestalo baviť ležať medzi svojimi

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha,* lucia_i@post.sk

druhmi naplocho a tak sa odpúta od roviny skicára a vydáva sa do priestoru. Vylezie na knihu a po trojuholníkovej doske sa dostáva k vrcholu svojho bytia. Tam si krátko odpočinie a spokojné pokračuje opäť dole, cez popolník, kde sa poslušne zaradí medzi svojich dvojrozmerných druhov (podľa [2]).



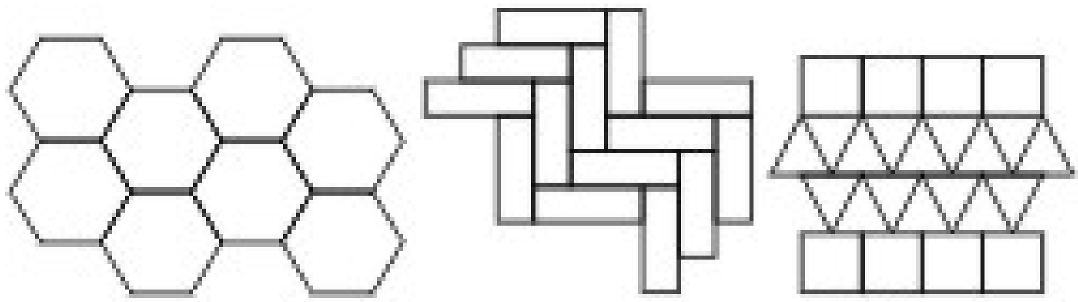
Obr. 1: M. C. Escher: *Reptiles* (1943)

Pozorovateľ si nevyhnutne položí otázku: Ako Escher vymyslel taký zložitý útvar ako je daná jašterica, ktorý je možné v rovine opakovať bez medzier a prekrytí? Odpovedať na túto otázku sa pokúsim v nasledujúcich riadkoch.

Pokrytie roviny útvarmi bez medzier a prekrytí sa nazýva rovinná *mozaika* alebo *teselácia*. Pojem *teselácia* je prebratý z anglického *tessellation* odvodeného zo slovesa *tessellate* (pokrývať). Okrem pojmu *tessellation* sa v anglickej literatúre používajú aj pojmy *tiling* (kachličkovanie), *paving* (dláždenie), *parqueting* (parketovanie) alebo *mosaic* (mozaika).

Podľa toho, aké útvary vytvárajú teseláciu, môžeme rozdeliť teselácie na mnohouholníkové a Escherovské (podľa [7]).

Mnohouholníkové teselácie (obr. 2) sú vytvorené mnohouholníkmi, pričom sa v teselácii opakuje jeden útvar (*homogénna* teselácia), alebo ich môže byť viac, resp. nekonečne veľa (*heterogénna* teselácia). Tieto teselácie predstavujú prostredie bohaté na matematické problémy vhodné pre skúmanie žiakmi rôznych vekových kategórií na ľubovoľnom type školy. Viac informácii o mnohouholníkových teseláciách je možné nájsť napr. v [3], [4], [5], [6].



Obr. 2: Príklady mnohouholníkových teselácií

Základným opakujúcim sa prvkom pre homogénne *Escherovské teselácie* je útvar, ktorý je možné získať takou zmenou tvaru mnohouholníka vytvárajúceho homogénnu mnohouholníkovú teseláciu, že jeho obsah zostane nezmenený, pričom sa využijú zobrazenia, ktoré sú súčasťou učebných osnov už 6. ročníka základnej školy a ktoré intuitívne poznajú i deti prvého stupňa – translácia a rotácia. Takisto pomôcky potrebné pre prácu, sú jednoduché a lacné, teda prístupné pre všetkých: papierové siete z pravidelných mnohouholníkov – štvorec a pravidelný šesťuholník (mnohouholníkové teselácie), ceruzka, a samozrejme guma.

Dva možné postupy tvorby takýchto Escherovských teselácií sú nasledovné[3]:

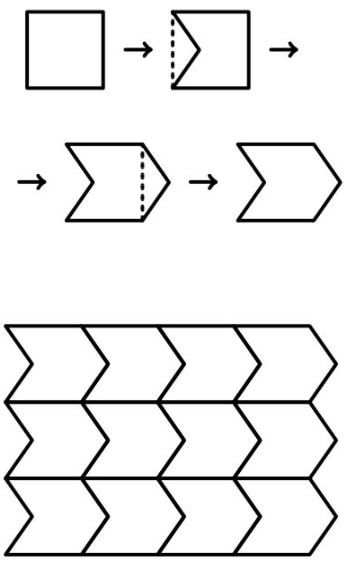
I. Translácia

Východiskovým bodom prvého postupu pre tvorbu Escherovskej teselácie je zmena jednej strany – úsečky – mnohouholníka tvoriaceho teseláciu (štvorec, pravidelný šesťuholník) na krivku. Keďže podmienkou toho, aby do seba nové útvary zapadali, je zachovanie obsahu pôvodného útvaru, to, „čo sme ubrali, to musíme pridať“. Preto nasleduje posunutie tejto krivky na protiľahlú stranu útvaru. Postup je naznačený v nasledujúcich obrázkoch (obr. 3, obr. 4). Výsledná teselácia vznikne postupným prikladaním jednotlivých útvarov k sebe (ako skladanie „puzzle“).

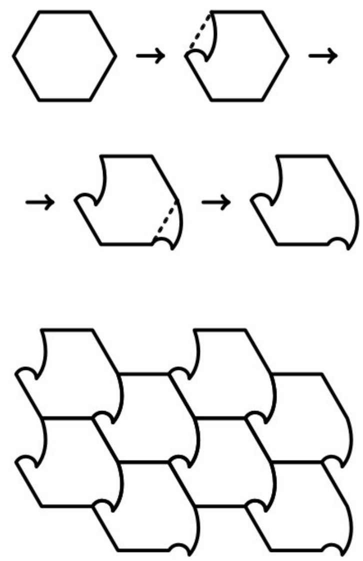
Z obr. 3 je možné zistiť, že daná teselácia je síce Escherovská, pretože sme vychádzali zo známej (štvorcovej) teselácie a použili sme posunutie, ale súčasne je aj mnohouholníková, pretože jej základným, opakujúcim sa útvarom je šesťuholník. Preto je nevyhnutné

[3]Problematika tvorby Escherovských teselácií týmito postupmi nie je vyčerpaná, viac informácií je možné nájsť napr. v [4] a [7]. V článku sú predložené také dva postupy, ktoré zvládne bez problémov každý.

si uvedomiť, že delenie teselácií na mnohouholníkové a Escherovské nie je jednoznačné, pre potreby našej práce ale vhodné.



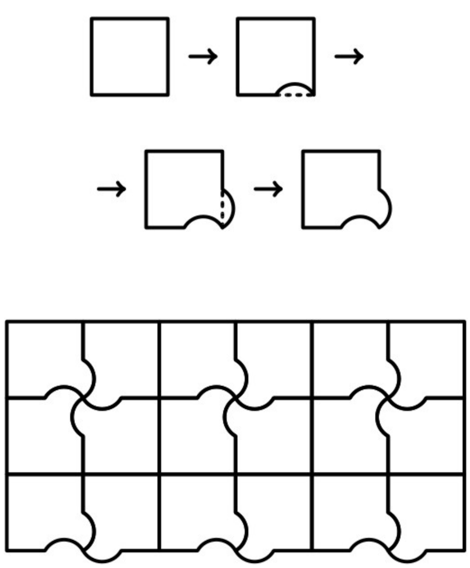
Obr. 3



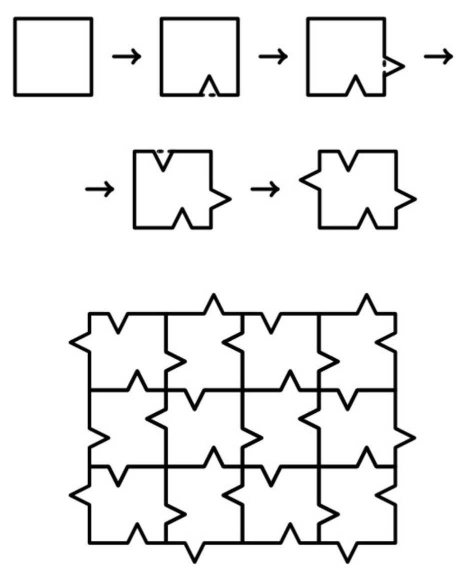
Obr. 4

II. Rotácia

V druhom postupe dochádza k zmene strany mnohouholníka a následnej rotácii okolo svojho vrcholu o príslušný uhol (v štvorci o 90°, v pravidelnom šesťuholníku o 120°). Dva príklady takýchto teselácií sú uvedené na nasledujúcich obrázkoch (obr. 5 a 6).

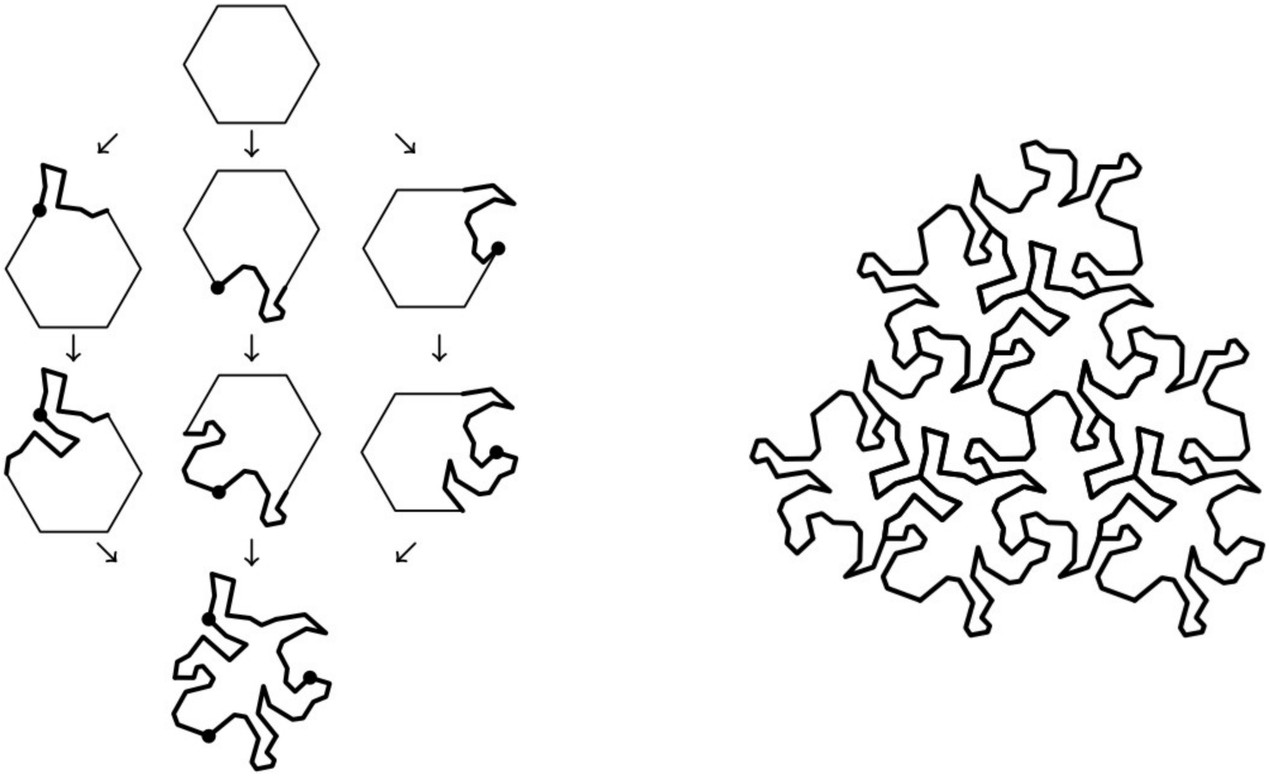


Obr. 5



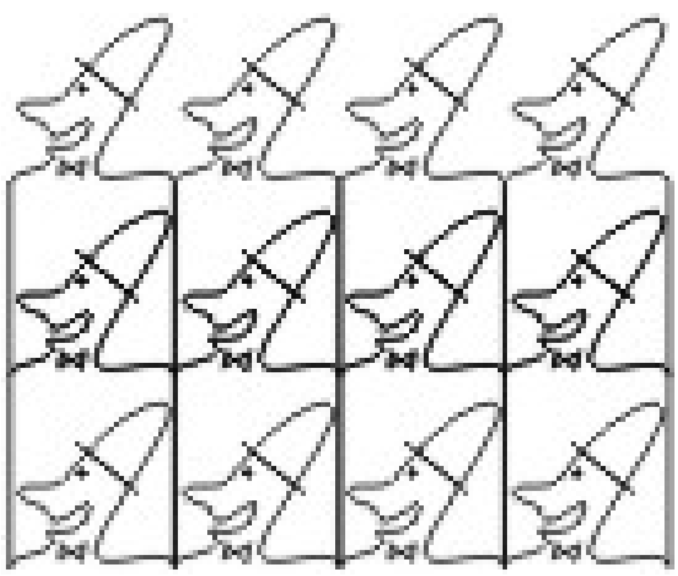
Obr. 6

Rotáciu využil aj Escher pri „výrobe“ jašterice pre svoju grafiku *Reptiles*, pričom postupne nahradil tri strany pravidelného šesťuholníka vhodnými krivkami, ktoré otočil okolo príslušných vrcholov (obr. 7).



Obr. 7: Postup tvorby základného útvaru – jašterice a výsledná teselácia

A čo na koniec dodať? Môžeme sa ešte zamyslieť, čo nám daná teselácia (alebo jej jednotlivé útvary) pripomína a podľa toho jednotlivé útvary perom alebo ceruzkou dokresliť (obr. 8). Nezabudnite, že predstavivosti a fantázii sa medze nekladú. Veľa chuti a radosti do „teselovania“.



Obr. 8: Veselí chlapíci (autorka)

Dodatok

Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) už v škole prejavil záujem o hudbu, tesárčinu a kreslenie; ostatné predmety (vrátane matematiky) mu však robili problémy (dokonca raz aj prepadol). Prianie rodiny, aby sa z neho stal architekt, sa neuskutočnilo, pretože štúdium kvôli chatrnému zdraviu prerušil a venoval sa svojej najväčšej záľube – kresleniu a technikám litografie.

Značnú časť Escherovho života vypĺňalo cestovanie. V roku 1922 prvýkrát navštívil palác Alhambra v španielskej Granade. Bol očarený krásou tohto maurského paláca zo 14. storočia (Mauri obsadili územie Španielska v období rokov 711 – 1492) a najmä farebnými majolikovými dláždeniami – teseláciami – pokrývajúcimi steny a podlahy budovy. Niektoré z maurských vzorov použil neskôr v svojej tvorbe. Už v tomto roku sa prvýkrát objavuje motív opakujúcej sa skupiny ôsmych útvarov bez medzier v jednej jeho grafike *Eight heads*[4].

Zlomom v jeho tvorbe bol rok 1937, kedy musel definitívne kvôli nástupu fašizmu opustiť s rodinou milované Taliansko. Kým v predchádzajúcom období v jeho grafikách dominovali krajinky (bol nadšený prírodou okolia Stredozemného mora), po roku 1937 sa Escher zameral na realizáciu osobných nápadov a jeho tvorba je poznačená matematikou. V týchto prácach sa Escher často hrá s predstavivosťou diváka, napr. *Concave and convex* (1955), *Belvedere* (1958), *Waterfall* (1961), *Möbius band II* (1963).

Napriek svojim neúspechom v školskej matematike sa Escher naučil ako samouk princípy teórie rovinných grúp symetrií, ktoré úspešne využil pri tvorbe grafík s motívom teselácií. V roku 1956 sa Escher stretol s Brunom Ernstom, ktorý vytvoril systém mapujúci celú jeho „matematickú“ prácu. Medzi sedem hlavných tém patria aj teselácie označené ako pravidelné delenie roviny (*regular division of plane*). Do tejto skupiny je možné okrem už spomenutých grafík *Reptiles* a *Eight heads* zaradiť napr. *Day and night*, 1938, *Sky and Water* (1938), *Metamorphose* (1939 – 40) alebo *Smaller and smaller* (1956). Ďalšou inšpiráciou preňho boli aj práce jeho priateľa, kanadského profesora H.S.M. Coxetera alebo britského matematika R. Penrosea.

O svojej práci sám Escher povedal:

> *„. . . ocitol som sa v sfére matematiky. Hoci nemám žiaden výcvik, ani vedomosti v exaktných vedách, často sa mi zdá, že mám viac spoločného s matematikmi ako s kolegami – umelcami.“*
>
> (podľa [1], s. 55)

Literatúra

[1] Bool, F. H., Ernst, B., Kist, J. R., Locher, J. L., Wierda, F. *Escher. The Complete Graphic Work.* Amsterdam: Thames& Hudson, 2000.

[4]Všetky spomenuté grafiky sú reprodukované v [1] a je ich možné aj násť na uvedených internetových stránkach

[2] Escher, M. C. *Grafika a kresby.* Köln: Taschen, 2003.

[3] Ilucová, L. Parketáže, kachličky, mozaiky a geometria. In Jirotková, D. & Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*. Praha: PedF UK, 2004; s. 58 – 63.

[4] Kupčáková, M. *Geometrie ve světě dětí i dospělých.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2001.

[5] Kuřina, F. *10 geometrických transformací.* Praha: Prometheus, 2002; s. 196 – 209.

[6] Opava, Z. *Matematika kolem nás.* Praha: Albatros, 1989; s. 259 – 262.

[7] Ranucci, E. R., Teeters, J. L. *Creating Escher-type drawings.* Palo Alto: Creative Publications, 1977.

Zaujímavé stránky (Aktuálne k dátumu 5. 4. 2005.)

`www.mcescher.com`
`www.worldofescher.com`

Karetní hry a výuka matematiky[1]

Antonín Jančařík[2]

Úvod

Již od dob Komenského se traduje heslo „škola hrou“. Hry a herní aktivity jsou do výuky matematiky zařazovány, ale rozsah, který je těmto aktivitám věnován, se různí škola od školy. Je samozřejmě otázkou diskuse, které hry jsou pro vyučování matematice vhodné či nevhodné a jaký prostor by jim měl být věnován. Často se setkávám s tím, že mezi hry „nevhodné“ jsou, často z důvodů společenských, řazeny hry karetní. V době mého středoškolského studia bylo hraní karet ve škole zakázáno. V posledních deseti až dvaceti letech prošel herní průmysl velkým rozmachem. Stranou nezůstaly ani karty. Zatímco před dvaceti lety byl okruh karetních her poměrně úzký a rozšířeny byly pouze čtyři druhy karetních sad (žolíky, mariáš, taroky a kvarteta), dnes je nabídka mnohem rozmanitější. Cílem tohoto článku je nastínit možnosti použití několika nových karetních her pro rozvoj matematických schopností.

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GAČR 406/05/P561.
[2]*PedF UK Praha, Antonin.Jancarik@pedf.cuni.cz*

Co je karetní hra?

Možná se zdá tato otázka trochu zbytečná, ale určit, co je a co není karetní hra je stále složitější, na trhu se objevují stále nové hry, které kromě karet používají i nejrůznější další pomůcky – herní plány, kostky, figurky, zvonečky . . . Typickým příkladem je hra Carcassone, hraje se sice s tvrdými papírovými kartičkami (kartami), ale přesto je obtížné ji za karetní hru považovat. Jiným příkladem jsou sběratelské karetní hry (Might and Magic, Lord of The Ring . . .). Tyto hry se liší tím, že karty nejsou společné, každý hráč hraje pouze se svými vlastními kartami a nedílnou součástí zábavy spojené s hraním těchto her je nakupování, vyměňování a vzájemné obdivování a hodnocení karet.

Ani hry, které budeme uvádět, nezapadají do kategorie klasických karetních her.

Cink – počítání do pěti

Pravidla této hry jsou velmi jednoduchá. Hráči vykládají karty s obrázky ovoce, pokud se na obrázcích objeví právě pět stejných druhů ovoce, musí hráči zazvonit na zvoneček, kdo zazvoní první, bere všechny vyložené karty. Hra je vhodná pro první třídu. Nenechme se ale zmást, na stole se ve velmi rychlém sledu střídají karty s obrázky různého ovoce (a s různým počtem kusů). Je nutné sledovat aktuální stav až čtyř druhů ovoce, velmi rychle vyhodnocovat každou příchozí kartu, ale co víc, i každou kartu odchozí. Vyložením nové karty je vždy stará karta daného hráče překryta a tímto překrytím lze také dosáhnout požadovaného počtu pěti vyložených stejných druhů ovoce.

Hru lze doporučit jak pro procvičení počítání do deseti pro děti v první třídě, tak i jako rychlou intelektuální rozcvičku pro hráče každého věku. Hra cvičí základní početní dovednosti, postřeh a rychlé vyhodnocování proměnlivé situace.

Digit – symetrie v praxi

Hra Digit není karetní hrou v pravém slova smyslu. Hraje se s kartami a pěti dřívky (podobnými sirkám). Na jednotlivých kartách jsou nakresleny obrázky, které se mají ze dřívek složit (obrázky jsou souvislé a dřívka svírají úhly 90 a 180 stupňů a dotýkají se pouze konci). Úkolem hráče je přesunem jednoho dřívka získat obrázek ze své karty bez ohledu na symetrie. Právě tato podmínka – bez ohledu na symetrie – je jádrem hry. Hráči se musí naučit rozpoznávat, které obrázky jsou „blízko" a které jsou stejné (to u některých tvarů není až tak triviální). Zkušenost ukazuje, že při prvních hrách děti obrázky různě otáčí a překlápí, ale po velmi krátké době jsou schopny symetrie nalézat bez toho, aby musely pohybovat kartami a dřívky.

S touto hrou se však váží některé otázky, které jsou algoritmického charakteru:

1. Jak poznám, že jsou dva obrázky blízké?
2. Jakým postupem měřit vzdálenost mezi dvěma kartami?
3. Kolik je všech různých karet?
4. Jak získat (nakreslit) všechny karty?

Hra je velmi vhodná k budování pojmu shodnost a k jeho procvičování. Připojené otázky algoritmického charakteru jsou poměrně obtížné a není příliš pravděpodobné, že na ně žáci sami najdou odpověď. To ovšem neznamená, že nemá cenu si tyto otázky klást. Právě hledání nových řešení, odhalovaní slepých uliček, nalézání argumentů a protipříkladů je velmi cenné. Je ovšem třeba důsledně kontrolovat, aby neúspěchem nedošlo k demotivaci.

Ligretto – karetní akce

Další karetní hrou je hra Ligretto. Jedná se o hru, při které každý hráč hraje „nezávisle“ na ostatních. Cílem je co nejdříve se zbavit svého balíčku karet, přičemž karty jsou odkládány podle daných pravidel do společného herního prostoru. Hra neprobíhá v kolech, ale všichni hrají současně.

Základní pomůckou pro tuto hru je sada karet s čísly od jedné do deseti v různých barvách.

Samotná hra je vhodná pro mladší děti pro upevnění číselných řad, se staršími dětmi se dá hrát pro rychlé odreagování, procvičení postřehu a schopnosti předvídat vývoj situace a reagovat na nenadálé změny. Samostatná sada karet s čísly je pak výbornou pomůckou pro generování příkladů a hraní nejrůznějších matematických her. Uvedu několik příkladů:

Otočte čtyři karty, přidejte znaménka $+$, $-$, $\times$, : a závorky tak, abyste každé číslo využili právě jednou a výsledek byl 10.

Otočte šest karet a nechte děti, ať sestaví z karet:

1. Číslo, které je dělitelné třemi (čtyřmi, pěti, . . .),
2. největší číslo,
3. dvě čísla, aby jejich součet (rozdíl, součin) byl největší (nejmenší).

Zajímavým rozšířením je po několika kolech nechat děti hledat univerzální postup (algoritmus), kterým lze uvedené úlohy řešit (mám tady šest karet, co s nimi mám udělat, abych dostal největší číslo).

Závěr

Představili jsme tři netradiční karetní hry, které lze s úspěchem použít pro nácvik a rozvoj početních dovedností u menších dětí, nebo jako matematické „rozcvičky“ s dětmi každého věku. Některé otázky, které jsme u her nastínili, daleko přesahují obsah středoškolského učiva a odpovídají svou náročností spíše úlohám z matematických a programátorských soutěží.

Těmito třemi hrami jsme ani zdaleka nevyčerpali nabídku karetních her, které lze použít pro rozvoj matematických dovedností a strategického myšlení. Za ty nezmíněné jmenujme jen Fazole, Colloreto či Ztracená města. Prostor, který je vymezen tomuto článku, nedovoluje, abychom se všem věnovali. Můžeme však každému doporučit, aby zvážil využití uvedených her jak při výuce, tak jako vhodnou zábavu o přestávkách, v družině, při školních výletech či dalších akcích.

Sítě krychle[1]

Irena Kročáková[2]

Téma pracovní dílny navazovalo na jeden experiment, který jsem ve školním roce 2004/2005 realizovala v rámci projektu IIATM, Socrates-Comenius 2.1. se svou vlastní třídou, druhým ročníkem ZŠ Školní v Neratovicích. Tématem experimentu byla tvorba sítí krychle. Tato látka je sice obsahem geometrického učiva, ale až 4. a 5. ročníku ZŠ. Autoři učebnic vesměs nabízejí hotové sítě. Aktivity, ke kterým jsou pak žáci vyzýváni, jsou typu: „Překresli síť, vystřihni ji a slož krabičku.“ „Doplň tečky na síti hrací kostky tak, aby součet na protějších stěnách byl 7.“ „Jaký je obsah sítě krychle na obrázku?“ „Které z obrázků jsou sítěmi krychle a které ne? Překresli na průsvitný papír a vystřihni.“ Jak je vidět, žádná z úloh nevyzývá žáky k vlastní tvorbě sítě, úlohy jsou převážně instrukcemi, které nerozvíjí tvořivost žáků. Navíc lze v nabídce sítí krychle v učebnicích 4. a 5. ročníku, se kterými jsem v poslední době pracovala, nalézt pouze 7 různých tvarů. Žádná úloha nepředkládá všech 11 tvarů ani nevede k jejich nalezení.

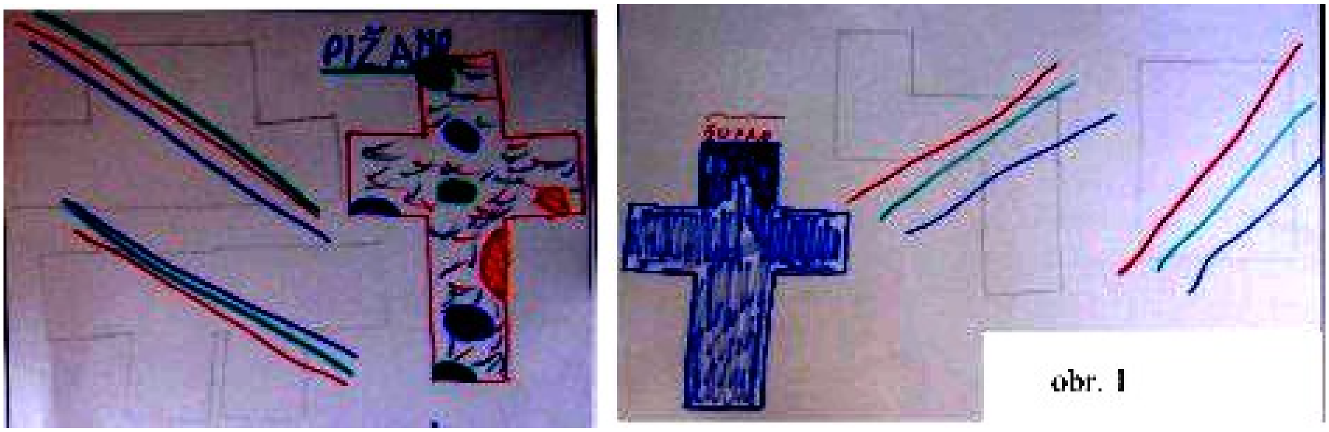
Jsem přesvědčena, že při hledání všech tvarů sítě krychle není nejdůležitější to, aby žáci poznali všech 11 tvarů sítě krychle, ale rozvoj takových dovedností (abilit), jako je experimentování, evidence experimentů, argumentování, organizace souboru řešení,. . . Tyto dovednosti jsou potřebné pro úspěšné řešení problémů nejen v matematice.

Vzhledem k tomu, že tvorba sítí krychle může být činností manipulativní, kterou lze postupně v tempu přiměřeném každému individuálnímu žákovi převádět v činnost mentální, a že se pracuje s tělesem, které je většině žáků důvěrně známé z různých her a stavebnic, rozhodla jsem se, že experimentálně zařadím toto učivo již do druhého ročníku ZŠ. Otázkou byla vhodná motivace především pro dívky.

O rok dříve jsem obdobný experiment realizovala pouze se dvěma dívkami 2. ročníku. Dívky měly za úkol zhotovit různé střihy na šaty pro krychli „parádnici“. Celý experiment jsem nahrávala na video a pečlivě evidovala průběh. Pak jsem jej analyzovala s kolegy z projektu. Ukázalo se, že motivace, kterou jsem zvolila, byla pro tuto věkovou skupinu dívek velice vhodná. Při analýze experimentu bylo zajímavé všímat si nejenom správných řešení, správných sítí krychle, ale zejména cest, po kterých se dívky ke správným řešení dopracovaly. Ty většinou vedly přes chybná řešení, která jsou např. na obr. 1 škrtnuta.

[1]Experiment byl realizován a příspěvek vznikl za podpory projektu IIATM, Socrates – Comenius 2.1., číslo 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2]*ZŠ Školní, Neratovice, krocakova.irena@seznam.cz*



obr. 1

Při tomto experimentu jsem získala zkušenosti s tím, jak vhodně formulovat otázky, aby nedocházelo příliš často k nedorozumění, jak pomoci žákům, abych je navedla k nalezení správných řešení a přitom jim nemusela dát přímou radu, jak volit úlohy, aby byly pro žáky přitažlivé. Také jsem zjistila, že i takto malé děti jsou schopny tvořit sítě krychle samostatně. Nabyté zkušenosti mně dodaly odvahu zkusit tuto činnost s celou třídou. Zvolila jsem postup, který je naznačen níže úlohou 2.

Průběh celého experimentu zde nebudu popisovat. Chtěla bych jen zdůraznit, že při práci v malých skupinách se žákům podařilo najít všech 11 tvarů sítí, že práce zaujala všechny děti a každý se mohl nějak uplatnit a přispět k řešení. Žáci zpočátku s nadšením sítě vystřihovali a manipulovali s nimi, manipulovali s dřevěným modelem krychle, později začali tvořit sítě bez manipulace s krychlí, vyznačovali na síti stěny, které jsou na krychli rovnoběžné apod. Velmi cenná byla i závěrečná celotřídní diskuse, v níž jsme dávali dohromady všechna řešení a diskutovali o shodnosti sítí nalezených různými žáky. Nakonec jsme přijali domluvu, že takové dvě sítě, které lze přiložit na sebe tak, aby se kryly, budeme považovat za shodné. Mně, jako učitelce, přinesla tato činnost uspokojivý pocit ze zajímavé a smysluplné práce, při které se sama něco nového učím a při které navíc poznávám své vlastní žáky zase z jiného úhlu pohledu.

Úlohy pro pracovní dílnu

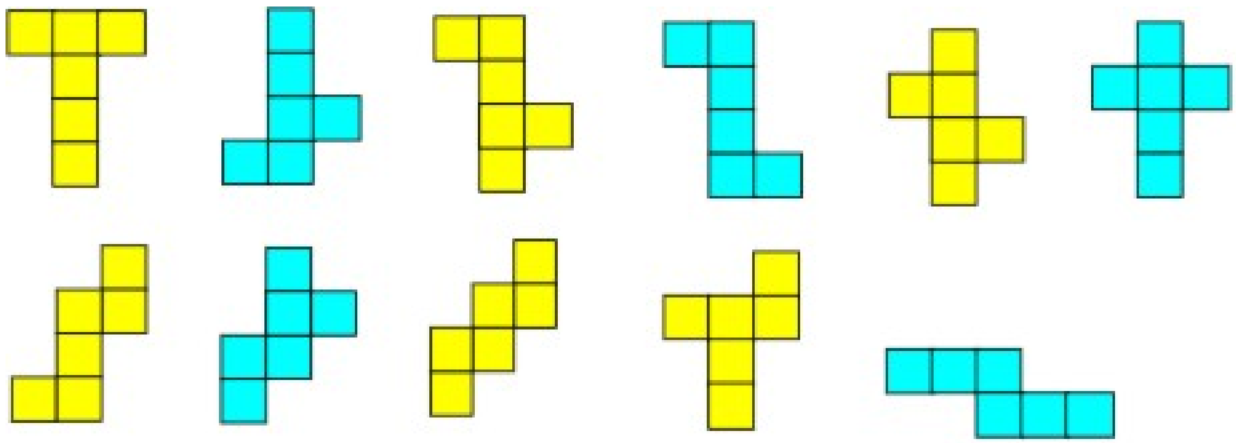
Cílem zvolených úloh bylo zprostředkovat účastníkům dílny zkušenost s jedním možným postupem hledání sítí krychle a seznámit je s výše zmíněnými experimenty.

Pomůcky poskytnuté účastníkům: dřevěná krychle, 6 ks čtverců nastříhaných z pevnější fólie a shodných se stěnou dané krychle, barevná lepenka, nůžky, tužka a pastelky, pracovní listy – archy čtvrtky.

Úloha 1. Najdi pomocí práce se čtverci a použitím lepenky co nejvíce sítí krychle.

Komentář: Pro žáky můžeme úlohu formulovat takto: Z jednotlivých dílů střihu sestav co nejvíce různých střihů na oblek pro krychli parádnici.

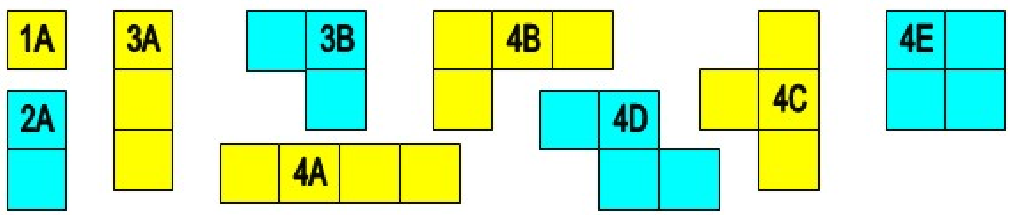
Řešení: Přehled všech sítí krychle je na obr. 2.



Obr. 2

Úloha 2. Sestav co nejvíce tvarů sítě krychle použitím: (a) jednoho bimina a jednoho tetramina, (b) dvou trimin, (c) jednoho monomina, jednoho bimina a jednoho trimina (viz obr. 3).

Komentář: Pro žáky formulujeme úlohu takto: Najdi co nejvíce střihů na oblek pro krychli použitím daných dílů střihu.



Obr. 3

Úloha 3. Na síti krychle je část květu (viz příloha č. 2). Dokážeš dokreslit zbývající díly květu tak, aby se po složení krychle ze sítě celá květina objevila v jednom rohu krychle?

Úloha 4. Na síti krychle jsou části postavy (hlava, trup, dolní a horní končetiny, viz příloha č. 1). Doplň zbývající díly postavy tak, aby po složení krychle ze sítě vznikl celý panáček, pro kterého můžeš vymyslet jméno.

Průběh dílny

Účastníci dílny pracovali ve dvojicích. Po vysvětlení a motivaci se pustili do práce. Slepováním jednotlivých fóliových čtverců izolepou si vytvářeli střihy pro krychli. Zhotovený střih si zakreslovali do pracovních archů. Potom střih oblékli na krychli a dolepili izolepou zbývající díly, tzv. zapnuli zip na obleku. Oblek, který byl již na krychli položen, byl pak svlékán. Při tom došlo mnohdy k objevení nového střihu. Někdy se objevil střih, který nepokryl celou krychli nebo nešel na krychli obléci. Ten pak museli z katalogu střihů vyškrtnout. Nakonec si střihy ze svých archů vystřihli a vzájemně si je porovnali, což umožnilo každému zkompletovat katalog sítí krychle.

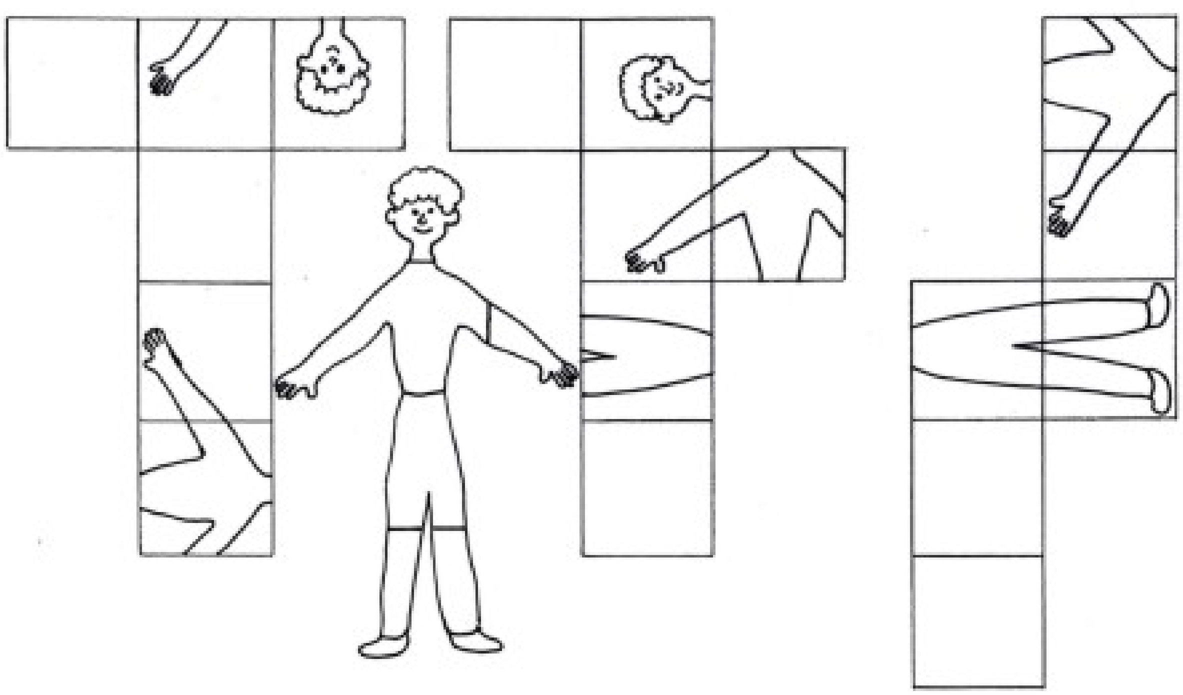
Ačkoliv všichni účastníci dílny byli dospělí učitelé, dokonce i učitelé druhého stupně ZŠ, zdálo se, že hraní si a manipulativní činnost je bavila stejně tak jako moje žáky. Účastníci si odnesli z pracovní dílny nejen soubor jedenácti různých tvarů sítě krychle, ale hlavně zkušenost, jak lze tuto látku zprostředkovat žákům a podle jejich úrovně ji modifikovat.

Autorka článku s díky uvítá sdělení kolegů učitelů o jejich zkušenostech s touto tematikou, rovněž tak kritické připomínky k článku.

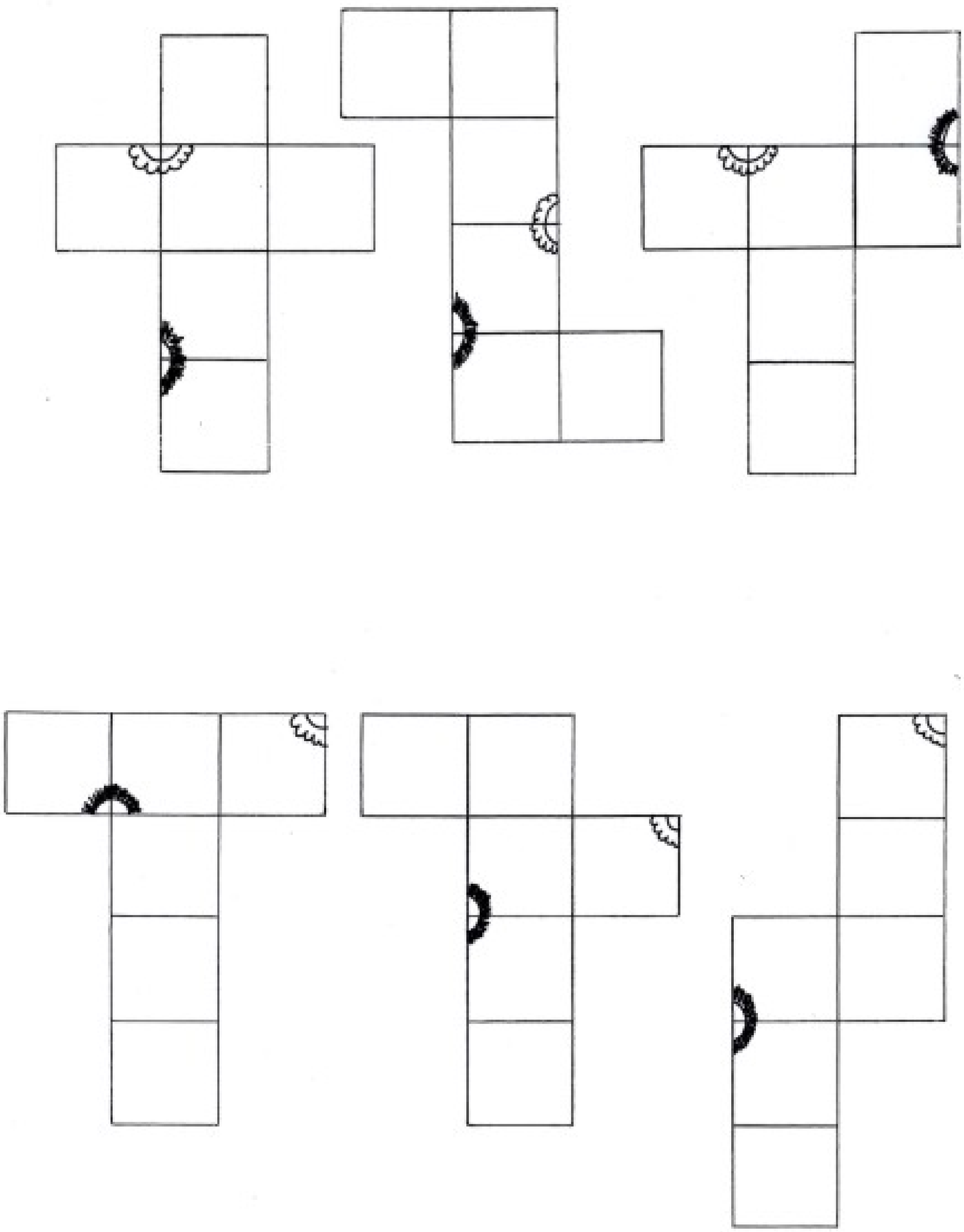
Literatura

Hejný, M., Jirotková, D. (2005.) Unit 3D geometry. *Pracovní materiál projektu IIATM*. Nepublikováno.

Příloha č. 1



Příloha č. 2



Od pravidelností k algebraickým výrazům[1]

Graham Littler, Darina Jirotková[2]

Úvod

Pracovní dílna vycházela z principů konstruktivistického přístupu jak k vyučování, tak k učení se matematice. To znamená, že její podstatnou součástí byla diskuse účastníků dílny o myšlenkách, které byly vysloveny v průběhu řešení úloh. Nabídnuté úlohy svou povahou nepatří ke standardním učebnicovým úlohám a jsou zaměřeny na odhalování algebraické formulace matematického vztahu na základě práce s jistou pravidelností, s jistým vzorem (pattern).

Pravidelnosti (patterns) jsou v Anglii základním prvkem školské matematiky a schopnost či dovednost rozpoznat je a pracovat s nimi je považována za velmi důležitou pro rozvoj matematického myšlení. Pravidelnosti lze nalézt ve všech oblastech školské matematiky – v aritmetice, algebře, geometrii, pravděpodobnosti a statistice i v různých didaktických hrách. Tradičně bývají pravidelnosti nejvíce využívány v tématech aritmetické a geometrické posloupnosti, které se probírají ve školské matematice až na úrovni gymnazia. Avšak při současných trendech ve vyučování mají pravidelnosti mnohem širší využití, počínaje v předškolním věku například aritmetickou číselnou řadou, kde každé číslo je určeno přičtením jedné k číslu předchozímu,

```
0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
   +1    +1    +1    +1    +1    +1    +1    +1    +1
```

až po vyjadřování pravidelností, které žáci vyvozují na základě nějaké experimentální práce z jisté algebraické vazby jako například $l+b=10$, kde l a b jsou rozměry obdélníku.

Zcela přirozeně je mnoho pravidelností svázáno s prostorovými jevy. V začátcích budování představ o číslech děti rozpoznají počet objektů (např. teček), jsou-li nějakým způsobem uspořádány, například jako oka na hracích kostkách či dominu.

```
x    x    x    x x    x   x    x  x
     x    x    x x      x      x  x
          x           x   x    x  x
```

Později se žáci zamýšlejí nad vazbou mezi dvěma parametry při pohledu na množinu údajů. Koncem prvního stupně ZŠ mohou být učitelé spokojeni, jestliže žáci dokáží vazbu formulovat slovy bez použití znaků. Potřeba formulovat vazbu povede docela přirozeně k používání znaků či symbolů místo čísel, a to je dobrý začátek nástupu algebry.

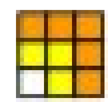
[1] Realizováno v rámci projektu IIATM – Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Sokrates – Comenius 3.1, 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2] *University of Derby, UK, grahamlittler@msn.com; PedF UK v Praze, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

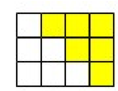
Dále je důležité, aby se žáci seznamovali a pracovali s grafickými reprezentacemi algebraicky vyjádřených vztahů, neboť to vydatně přispívá k porozumění mnohým otázkám, které často učitelé ani nevysloví, jako například: „Jaký může být výsledek řešení soustavy dvou lineárních rovnic?“ „Jaká je možná kombinace kořenů kvadratické rovnice, jestliže uvažujeme o kořenech reálných, komplexních či sobě rovných?“ Takové a další otázky mohou žáci snadno zodpovědět, mají-li dobrou představu o grafické reprezentaci dané funkce.

Znovu zdůrazněme naše přesvědčení, že je-li kladen dostatečný důraz na úlohy, v nichž žáci experimentují, odhalují pravidelnosti a formulují závislosti, pak je tím dobře otevřena cesta k používání symbolů a k algebře.

Průběh pracovní dílny



Úvodem do společné práce byly jednoduché číselné pravidelnosti jako čtvercová a trojúhelníková čísla. Účastníci dílny byli vyzváni, aby vyjádřili posloupnost čtvercových čísel takovým způsobem, aby bylo zřejmé, jak byla čísla vytvořena. Tento úkol byl celkem jednoduchý a většina řešitelů navrhla začít s jedním prvkem například čtverečkem, pak přidat další tři odlišné barvy – tak vzniknou 4, a tak dále, jak naznačuje obrázek. Dalším úkolem bylo pak nalézt „pattern“, který vede na lichá nebo sudá čtvercová čísla.



Dále byl formulován úkol najít výraz pro n-té trojúhelníkové číslo s využitím „patternu“. Po chvíli zkoumání a diskusí bylo zjištěno, že když se dva obrazce pro stejné trojúhelníkové číslo přiloží k sobě tak, jak je na obrázku, vytvoří tyto obdélník, jehož delší strana má délku $n + 1$ a kratší n. Pak celkový počet čtverečků v obdélníku je $n \cdot (n + 1)$, což je dvojnásobek n-tého trojúhelníkového čísla. Odtud závěr: n-té trojúhelníkové číslo je $n \cdot (n + 1)/2$.

Další práce již probíhala v malých skupinách. Každá skupina dostala sadu úloh, z nichž alespoň jednu měli za úkol vyřešit a na konci dílny spolu s didaktickými komentáři prezentovat.

Úlohy řešené v pracovní dílně

1. K řešení tohoto úkolu použijte krychlovou stavebnici se spojovatelnými krychličkami. Umístěte jednu krychli na stůl a zapište, kolik stěn můžete vidět. Připojte druhou krychli tak, že se jednou stěnou dotýká stolu a jednou stěnou je spojena s předchozí krychlí. Počítejte a zaznamenejte počet viditelných stěn. Pokračujte dále v připojování krychliček po jedné tak, že tvoříte rovnou řadu, kde se každá krychle dotýká jednou stěnou stolu. Pokaždé spočítejte počet viditelných stěn a číslo zaznamenejte do tabulky.

Počet krychlí	1	2	...	5	20	107	n
Počet viditelných stěn							

2. Úloha je stejná jako úloha č. 1 s tím rozdílem, že tentokrát stavíte krychle do výšky jako věž. Pouze první krychle se dotýká stěnou stolu.
3. K řešení této úlohy potřebujete tzv. „stovkový čtverec", viz obr. 1. Číselná dvojčata jsou taková dvě dvojciferná čísla, pro která platí, že jejich součet je stejný jako součet dvou čísel, která dostaneme zaměněním pořadí číslic. Např. 24 a 53 jsou číselná dvojčata, neboť $24 + 53 = 42 + 35 = 77$.

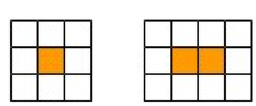
   Najděte sérii číselných dvojčat a jejich součty vyznačte na stovkovém čtverci (obr. 1). Můžete vysvětlit, kde tato čísla leží? Pomůže vám toto vysvětlení najít snadněji další dvojčata? Nyní vyznačte čtyři dvojciferná čísla, která jsou součtem číselných dvojčat, na stovkovém čtverci. Všimli jste si něčeho zajímavého? Kde tato čísla leží?

   Zkoumejte dále tento jev a pokuste se zjistit, zda objevené vztahy platí i pro číselná trojčata.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Obr. 1

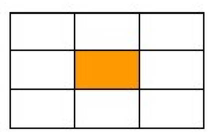
4. Kruhový dort je krájen jako obvykle vždy přes střed. Sledujte počet řezů nožem a počet odpovídajících kousků dortu. Najděte závislost mezi počtem řezů a počtem kusů. Kolik kusů obdržíte, jestliže rozříznete dort 20krát, 50krát, $n$krát? Je jenom jeden způsob, jak krájet dort? Pokud ne, změní se vaše řešení pro n krájení?
5. V této úloze budeme dláždit chodník kolem zahradního bazénu. Pro bazén velikosti č. 1 potřebujeme 8 dlaždic, pro bazén č. 2 je zapotřebí 10 dlaždic atd., jak je ukázáno na obrázku. Vystínované čtverce představují bazén a nevystínované dlažbu okolo. Najděte počet dlaždic, které je potřeba na chodník okolo bazénu číslo 5, 10, 29, …, n.



6. Pracujeme na čtverečkovaném papíru. Zkoumejte „pattern“, ve kterém je každý třetí čtverec vybarven (na obrázku označen znakem x. Na kterém schodu (počítejme při chůzi se shora) šlápnete na nevybarvený čtverec? Co se stane s „patternem“, když zvýšíme počet o na obrázku na 3, 4, ..., n?

o
o x
o o x
o o x o
o x o o x
o o x o o x
o o x o o x o
o x o o x o o x
o o x o o x o o x
--------------------- atd.

7. 28 vězňů má být rozmístěno do osmi cel postavených kolem dvora tak, že jejich součty v řadách i sloupcích (na obrázku) jsou stejné. Existuje pouze jedno řešení? Pokud ne, kolik? Jak se změní situace, změníme-li počet vězňů? Zkoumejte situaci pro sudý a lichý počet vězňů. Pokuste se zobecnit vaše výsledky.



8. Kolik čtverců lze najít na šachovnici 8×8? Kolik čtverců je na šachovnici 10×10, $20 \times 20, \ldots, n \times n$?
9. Potřebujeme provázek dlouhý 20 jednotek nejlépe tak, aby jedna jednotka odpovídala délce strany čtverce na čtverečkovaném papíru (nejméně 1 cm). Spojíme konce provázku. Nyní na čtverečkovaném papíru vyznačujte pomocí provázku obdélníky s celočíselnými délkami stran, jejichž obvod je konstantní a je roven 20 jednotkám. Evidujte oba rozměry obdélníku a jeho obsah. Nakreslete graf závislosti mezi délkami stran nalezených obdélníků. Můžete říci, jaká je to závislost? Můžete z grafu určit délku jedné strany, když víte, že druhá strana měří 7,5 jednotek? Má obdélník s největším možným obsahem nějaké zvláštní jméno?[3] Připomíná vám právě nakreslený graf nějaký objekt z reálného života?
10. Nyní potřebujeme 36 vystřižených čtverečků. Ze všech 36 čtverečků skládejte obdélníky a evidujte délky stran každého obdélníku. Jednotkou délky je délka strany jednoho čtverečku. Vidíte nějakou závislost mezi délkami stran obdélníků? Umíte tento vztah

[3]Ve Velké Británii je ve školní geometrii čtverec považován za zvláštní případ obdélníka. V české školské geometrii tomu tak není.

vyjádřit slovy, symboly? Nakreslete graf této závislosti. Nyní spočítejte obvod každého obdélníku a nakreslete graf závislosti mezi délkou jedné stany obdélníku a jeho obvodem. Jak vypadá obdélník s nejmenším možným obvodem? Jak vypadá obdélník s největším možným obvodem?

Věříme, že jsme v pracovní dílně nabídli úlohy, které mohou zpestřit hodiny matematiky a přitom rozvíjet důležité matematické kompetence žáků. Jsme si vědomi, že mnoho podobných úloh si učitel může nalézt sám. Důležité však je nechat žákům dostatek času na jejich vlastní „objevy“ a dostatek prostoru na formulaci jejich vlastních myšlenek a diskusi o nich.

Literatura

Littler, G.H., Koman, M. (2001). Challenging activities for students and teachers. In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of SEMT01*, PedF UK, Praha, 113–118.

Littler, G.H., Benson, D. (2005.) Patterns leading to generalizations. In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of SEMT05*, PedF UK, Praha, 202–210.

Jak řeší úlohy se zlomky žáci? A jak učitelé?[1]

Jana Macháčková[2]

Úvod

Zlomky patří k nejsložitějšímu učivu na ZŠ. Učitelé někdy podceňují úlohu důkladného vytvoření představy pojmu zlomek.

Pochopení pojmu zlomek bývá často zaměňováno za pochopení algoritmu výpočtu. Stejně tak bývá často opomíjena nutnost vcítit se do dětského myšlení, aby učitel mohl rozvíjet nebo naopak korigovat dětské představy. Při práci v dílně jsem vycházela jednak z vlastní učitelské praxe, jednak ze svých zkušeností s videonahrávkami z hodin, které umožňují při následném rozboru pochopit myšlení dětí. Chtěla jsem učitelům nabídnout:

a) některé náměty pro práci se zlomky,

b) konfrontaci vlastních řešení úloh s řešením žáků 4. a 5. ročníku,

c) ukázat, jak lze díky kolektivním reflexím pronikat do myšlení dětí,

d) poukázat na nutnost používat při vyvozování představy o zlomku různých modelů.

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAČR 406/05/2444

[2]*ZŠ Uhelný trh, Praha, 1, jana.ice@seznam.cz*

Obsah dílny

Učitelé postupně dostali k vyřešení čtyři úlohy, které jsem řešila se žáky čtvrtého a pátého ročníku. Nejprve měli úlohy řešit tak, jak si představují, že by je řešily děti. Potom v kolektivní diskusi porovnat svoje řešení s řešeními žáků, která mohli vidět na videonahrávkách. Učitelé měli posoudit problémy, které se při řešení úloh vyskytly, zjistit kde a proč vznikají chyby a posoudit možnosti při překonávání překážek (Tichá, Hošpesová; 2004).

Dílny se zúčastnilo 22 učitelů z různých stupňů škol. Učitelé měli pracovat ve dvojicích.

První úloha: Postavte stavbu z devíti krychlí tak, aby jedna třetina krychlí ve stavbě byla žlutá.

Pomůcky: červené a žluté krychle.

Učitelé byli vyzváni, aby se úlohu pokusili řešit tak, jak by ji řešily děti.

Následně byla učitelům nabídnuta videonahrávka vyučovací hodiny, ve které úlohu řešily děti z páté třídy.

Komentář k videonahrávce upozorňoval, že tuto úlohu děti dostaly až po úplném probrání učiva, po osvojení algoritmu výpočtu části celku, který bezpečně zvládly.

Ukázka měla ilustrovat, že zvládnutí samotného algoritmu vůbec neznamená pochopení pojmu zlomek, a upozornit na nutnost využívat při budování pojmu různých modelů, protože tato činnost činila mnohým žákům značné problémy.

Účastníci měli odpovědět na otázku, jakou úlohu v práci učitele může hrát videonahrávka z hodiny, co může odhalit, jakým způsobem může přispět ke zvyšování kompetence učitele (Hošpesová, Tichá; 2003). Učitelé byli dotázáni, jaké modely oni sami při vyvozování zlomků používají.

Druhá úloha s krychlemi zněla: Postavte stavbu podle plánku (na plánu byla stavba z deseti krychlí, 4 žlutých, 6 červených). Změňte stavbu tak, aby jedna třetina stavby byly žluté krychle.

Účastníci se měli zamyslet nad tím, jaké problémy se při řešení mohou objevit, na co se děti pravděpodobně zeptají, než přistoupí k řešení úlohy. Videonahrávky ilustrovaly, že úlohy tohoto typu činí žákům značné problémy, které učitelé zpravidla neočekávají.

Poznámka: Krychle byly připraveny na stolcích před příchodem účastníků dílny. Bylo zajímavé sledovat reakce příchozích: „Jsme tu správně na zlomcích?“ „Krychle na zlomky?“

Komentář: Účastníci byli dotázáni, jaké modely využívají při vyvozování zlomků. Nejvíce převládaly kruhy jako koláče, čokoláda. Zkušenost s jinými modely, například se čtvercovou sítí, proužky papíru nebo dokonce s prostorovými modely, se neobjevily.

Třetí úloha měla dvě části[3]

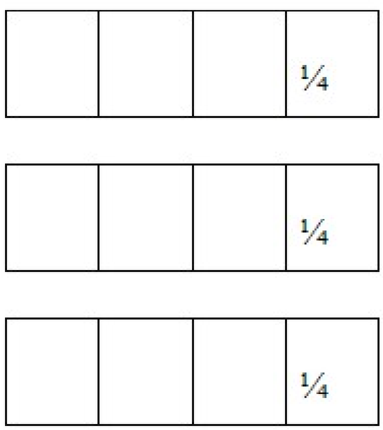
Zadání první části: Spravedlivě rozdělte tři pizzy čtyřem dětem.
Pomůcky: fólie a fixy.

Učitelé měli zakreslit svoje řešení na fólie a svoje postupy ukázat ostatním. Po diskusi nad řešením úloh následovala videonahrávka s řešením žáků, kdy měli učitelé možnost konfrontovat svoje řešení s řešením dětí.

Komentář: Učitelé měli možnost vidět, jak děti v krátké době objevily různá řešení. Přestože se všichni účastníci aktivně zapojili do řešení úloh, prezentovat svoje řešení byli ochotni jen někteří z nich. Na rozdíl od dětí, které ochotně vysvětlovaly postupně všechna řešení, která našly, někteří učitelé měli zábrany veřejně vystoupit. A přestože se v jejich pracích objevují všechna možná řešení, nebyla prezentována.

Zadání druhé části

Úkol pro žáky jsem formulovala takto:



Učitel zadal dětem úlohu: „4 děti si spravedlivě rozdělily 3 pizzy. Jakou část pizzy dostalo každé dítě?“

Dvě děti vyřešily úlohu takto:

1. Jedno dítě navrhlo toto řešení: „Rozdělím každou pizzu na 4 stejné části. Každé dítě dostane 1/4 z každé pizzy. Dostane 3 čtvrtky, to znamená 3/4 pizzy.“

2. Druhé dítě řešilo úlohu takto: „Rozdělím každou pizzu na čtyři stejné části. Dohromady to je 12 kousků. Každé dítě dostane 3 kousky z 12. Takže odpověď je 3/12.“

My teď máme rozhodnout o správnosti řešení. Řekněte, zda:
a) První řešení je správně.
b) Druhé řešení je správně.
c) Obě jsou správně.
d) Žádné řešení není správně.
e) Existuje jiné řešení.

Účastníci dílny opět nejprve vyřešili úlohu sami a pak jim byla předvedena videonahrávka s diskusí dětí nad problémem. Učitelé byli vyzváni, aby si všímali, jak děti úlohu řeší, jak se jejich úvahy vyvíjejí v průběhu diskuse, kde a proč vznikla nepochopení při řešení nejen ze strany dětí, ale i učitele a jakou úlohu hraje učitel při překonávání překážek.

Komentář: Schopnost dětí vyřešit tuto úlohu byla pro učitele zjevně překvapivá. Účastníci byli překvapeni, jak byly děti schopny diskutovat nad problémem, reagovat přitom

[3] Úloha byla inspirována příspěvkem Ruti Steinberg na konferenci SEMT 2003 (Steinberg et al., 2003).

na řešení ostatních. Z ukázky mohli vysledovat i vývoj uvažování jednotlivých žáků v průběhu celé diskuse.

Zadání čtvrté úlohy: Tady máte tři úplně stejné papírové obdélníky. Jeden z nich je polovina, druhý třetina a třetí čtvrtina. Jak je to možné?

Podrobněji se o této úloze můžete dočíst v článku Tichá, Hošpesová, Macháčková (2004).

Pomůcky: tři shodné malé papírové obdélníky, tři různě dlouhé papírové obdélníky (bylo možné poznat, že malý obdélník představuje polovinu jednoho z nich, třetinu druhého a čtvrtinu třetího).

Komentář: Úloha se učitelům zdála zpočátku nejasná. První otázky po zadání úlohy byly: „Z čeho jsou ty proužky?“ (Učitelé měli zřejmě na mysli, z jakého jsou celku.)

Moje otázka ale byla stále stejná. Jak je možné, že přestože je jeden papírek polovina, druhý třetina a třetí čtvrtina, jsou stejné? Stejně jako děti, si měli i učitelé v diskusi uvědomit (vodítkem měly být nestejně dlouhé proužky papíru ilustrující celky), že je to proto, že každý malý obdélník je z jiného celku. Nejen děti, ale překvapivě i sami učitelé měli s řešením úlohy problémy. Nedostatek času ke konci dílny pravděpodobně způsobil, že učitelé řešení nenašli.

Závěr

Dílna ukázala, že při vyvozování zlomků nebývá ve školách pravidlem využívat různých modelů. Nevyužívá se ani řízená diskuse se žáky. Při práci v dílně bylo vidět, že učitelé nemají vlastní zkušenosti s diskusí. Při diskusi měli tendenci obracet se na nějakou autoritu, která „schválí“ správnost názoru. Účastníci projevili obavy z nedostatku času při využití diskuse jako jedné z vyučovacích metod. Otázkou je, jak přesvědčit učitelskou veřejnost, že některé aktivity nejen že nezdržují v plnění osnov, ale naopak, zdánlivá „ztráta času“ je nutná pro to, aby žáci nepřijímali pouze hotové informace, ale aby si cestu k nim měli šanci s pomocí učitele najít sami a tak učivo skutečně pochopit.

Literatura

Hošpesová, A., Tichá, M. (2003). Zdokonalování kultury vyučování matematice cestou kolektivní reflexe. In Coufalová, J. (ed.), *Od činnosti k poznatku. Sborník konference s mezinárodní účastí věnované počátečnímu vyučování matematice*, Plzeň: ZČU, 99–106.

Steinberg, R., Bassan-Cincinatus, R., Klein, R., Sheffet, M. (2003). Using children's thinking to improve teaching of fractions: Can 3/12 be the same as 3/4? In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of SEMT03*, Praha: Charles University, Faculty of Education, 144–148.

Tichá, M., Hošpesová, A. (2004). Učíme se z praxe. In Uhlířová, M. (ed.), *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, 23–33.

Tichá, M., Hošpesová, A., Macháčková, J. (2004). Kompetence učitele a akční výzkum ve vyučování matematice. In Ausbergnerová, M., Novotná, J. (Ed.), *9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Srní: JČMF A KM FAV ZČU, Vydavatelský servis Plzeň, 315–322.

Krychlová tělesa a hlavolamy[1]

Jitka Michnová[2]

Prostorová představivost je jednou z velmi důležitých kompetencí žáků, kterou je třeba důsledně rozvíjet již od nejmladšího školního věku. K velké škodě žáků se mnoho učitelek na prvním stupni ZŠ aktivitám rozvíjejícím prostorovou představivost vyhýbá, a to především z důvodu, že ji samy nemají dostatečně rozvinutou, a tudíž se obávají, že by se snadno mohly dostat do situace, ve které by si nevěděly rady. Kromě toho pravděpodobně ani nedokáží tuto kompetenci docenit. Další potíž může spočívat v tom, že je velmi těžké měřit úroveň prostorové představivosti a nějak ji ohodnotit známkou.

V pracovní dílně bylo představeno zpracování tématu, které jsem s velkým úspěchem použila ve své vlastní páté třídě. Samozřejmě, že jsem si sama musela vyřešit mnoho úloh, abych se při hodinách s dětmi cítila jistá. Cílem pracovní dílny bylo rozvíjení prostorové představivosti účastníků v prostředí krychlových těles formou herních činností, a sice konstrukce a složení hlavolamu.

Nejdříve vysvětlíme, co rozumíme krychlovým tělesem. *Krychlové těleso* je složeno z konečného počtu shodných krychlí tak, že každá krychle je s alespoň jednou další krychlí „slepena“ celou stěnou. Dále budeme místo slov krychlové těleso používat zkratku KT. Pokud je toto vysvětlení nejasné, z dalšího bude patrné, co KT je.

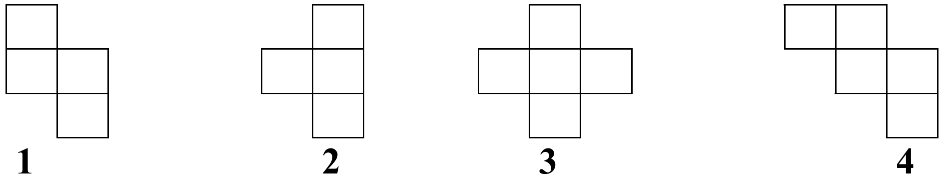
Dále uvedeme úlohy, které byly předloženy mým žákům a byly nabídnuty v pracovní dílně. Pak popíšeme průběh dílny.

Úloha KT 1

Emil a Jana řešili záhadnou šifru, podle níž se dala stavět KT. Vypadala takto (obr. 1):

[1]Příspěvek byl zpracován v rámci projektu IIATM, Socrates – Comenius 2.1., číslo 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2]*ZŠ Školní, Neratovice, michnovajitka@seznam.cz*



1) □↓□→□↓□
2) □↑□←□→↑□
3) □→□→□←↑□↓↓□
4) □→□↓□→□↓□

Obr. 1

Dokážeš odhalit „šifrovací kód“? Vysvětli, co znamenají znaky □, ↑, →, ↓, ←. Popiš, jaká tělesa můžeš podle šifry postavit.

Řešení úlohy KT 1: „Šifry“ představují konstrukci KT. Jednotlivé znaky znamenají:
□ polož krychli
← jdi doleva (alternativně lze používat jdi na západ)
→ jdi doprava (na východ)
↑ jdi dozadu (na sever)
↓ jdi dopředu (na jih)

Pomocí daných znaků lze postavit KT pouze v jedné vrstvě. Abychom mohli stavět KT tzv. prostorová, musíme seznam znaků doplnit ještě alespoň o jeden z dalších dvou znaků:
≡ jdi nahoru (po žebříku)
jdi dolů (do kanálu)

Úloha KT 2

2.1. Ve skupině slepte všechna KT podle znakových zápisů daných na lístku.
2.2. Všechna KT složená podle „návodu“ tvoří části hlavolamu. Vyřešte jej ve skupině.
2.3. Vypracuj úlohy o hlavolamu v pracovním listě:

a) Z kolika KT je hlavolam složen?
b) Dokážeš zapsat znakovým zápisem nejmenší a největší KT?
c) Z kolika krychlí se skládá hlavolam? Jak jsi to zjistil? Proč jich je právě tolik?
d) Jakou část hlavolamu tvoří toto  KT? Jak jsi na to přišel?
e) Z kolika krychlí by muselo být KT, které by tvořilo právě jednu třetinu hlavolamu? Proč?
f) Zkoumej nejmenší KT: Kolik má vrcholů, hran, stěn? Jak bys ho pojmenoval? Jaká další tvrzení o něm můžeš říct?
g) Které KT se ti líbí nejvíc a co ti připomíná (zvíře, věc bytost. . .)? Pojmenuj jej a namaluj.

h) Jak se ti líbila hodina?

Přehled lístků KT pro jednotlivé skupiny:

Hlavolam A	Hlavolam B	Hlavolam C	Hlavolam D	Hlavolam E
□→□→□↓□↑≡□	□→□→□↓□≡□	□≡□→□↑□≡□	□→□→□≡□#↓□	□→□→□↑□≡□
□→□ □→□↑□	□→□ □→□≡□	□≡□ □→□≡□	□→□ □≡□→□	□≡□ □→□≡□
□→□→□↑□	□→□≡□→□	□→□≡□→□	□→□≡□#↑□	□→□→□←≡□
□→□→□←↑□	□→□→□≡□	□→□→□≡□	□→□→□≡□	□→□≡□→□
□←□≡□↑□	□→□→□←≡□	□→□→□←≡□	□↓□→□≡□	□←□↑□≡□
□→□↑□↓→□≡□	□→□↑□≡□→□	□≡□↑□→□↑□	□→□↓□≡□#→□	□→□≡□↑□→□

Obr. 2

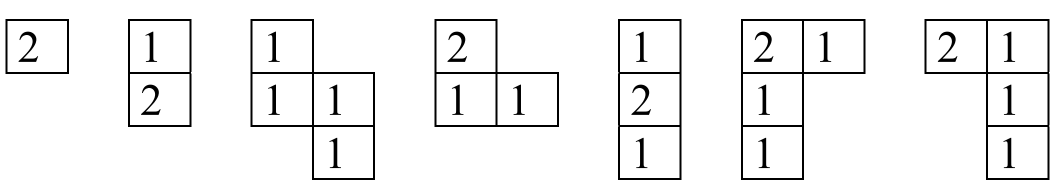
Úloha KT 3

Opět hlavolamy: Čtyři hlavolamy uvedené pod čísly 1, 2, 3, 4 jsou zaznamenány čtyřmi různými způsoby. Dokážeš rozlišit, kterému hlavolamu z obr. 2 odpovídá záznam hlavolamu u této úlohy, a doplnit tabulku?

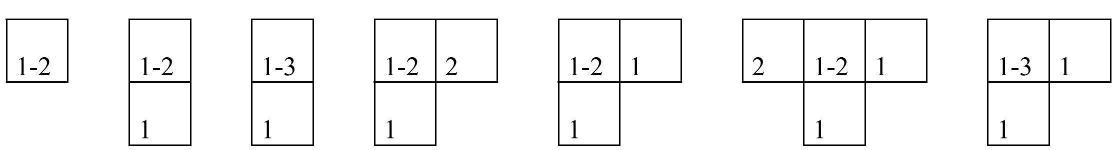
Hlavolam 1 (zaznamenaný znakovým systémem):

□→□→□↓□↑≡□
□→□↑□↓→□≡□
□→□→□↑□
□→□→□←↑□
□←□≡□↑□
□→□↑□
□→□

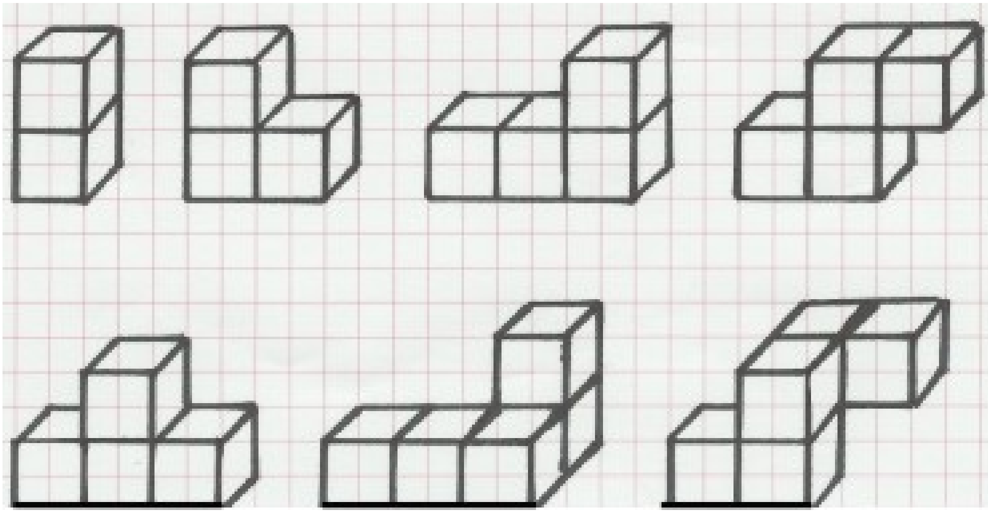
Hlavolam 2 (zaznamenaný plánem prostým):



Hlavolam 3 (zaznamenaný plánem úplným):



Hlavolam 4 (zaznamenaný portrétem):



Hlavolam 1	Hlavolam 2	Hlavolam 3	Hlavolam 4
Hlavolam A	Hlavolam . . .		

Úloha KT 4

Které KT zapsané znakovým zápisem do skupiny nepatří? Proč?

I.
a) □←□←□
b) □→□≡□
c) □≡□←□
d) □→□#□

II.
a) □→□↑□↓→□
b) □→□→□←≡□
c) □→□→□≡□
d) □≡□≡□#→□

III.
a) □→□#□→□
b) □→□≡□#→□
c) □≡□→□≡□
d) □←□→#□→□
e) □←□≡□←□

IV.
a) □→□↑□↓↓□↑→□
b) □→□≡□#→□→□
c) □→□→□←≡□##□
d) □#□≡←□→≡□#→□
e) □≡□≡□#→□←←□

Průběh dílny

Účastníkům dílny byla předložena úloha KT 2. Pracovali ve skupinách, které se v průběhu dílny měnily. Ze začátku seděli účastníci dílny u stolků libovolně. Na tabuli byl záznam klíče ke znakovému zápisu – tzv. šifra. Každý obdržel lístek se znakovým zápisem, podle kterého lepil KT. Jeho hotové KT se zároveň stalo částí hlavolamu, tato informace však zatím zůstala utajena. Otázky, které si účastníci kladli, diskutovali zpravidla ihned uvnitř skupiny a řešili je správně. Týkaly se většinou symbolů a jejich významu.

V další části vyhledávali účastníci dílny podle barvy lístku další spoluhráče (se stejně barevným zadáním) a společně se pokusili ze svých hotových KT složit hlavolam, tedy krychli o rozměrech $3 \times 3 \times 3$. Byla to část malého překvapení (hlavolam?) a bouřlivých diskusí při skládání krychle. Účastníci dílny si s hlavolamem poměrně hravě poradili. Potíže měla pouze jedna skupina, ve které jsme vzápětí odhalili chybu v KT, opravili ji a mohlo se pokračovat.

Pokud skupina složila vlastní hlavolam, vypracoval každý ve skupině samostatně „úlohy o hlavolamu" na pracovním listě. V této části panovalo v dílně pracovní ticho. Úlohy nutí řešitele opětovně rozkládat a skládat hlavolam. Narozdíl od dětí byli účastníci dílny schopni většinu úloh řešit zpaměti bez pomoci manipulace s hlavolamem. Můžou se tedy pochlubit vynikající prostorovou představivostí. Přesto se manipulace s hlavolamem během řešení úloh objevila i u nich.

Protože zbyla chvilka času, mohla jsem účastníkům nabídnout návod na složení papírové krychle. Návod většina z nich prověřovala zhotovením jedné krychle, navíc mě potěšil zájem, se kterým se do skládání účastníci dílny pustili.

Zkušenosti z experimentálního vyučování

Většinu účastníků dílny zajímalo, zda podobné úlohy dostávají i žáci. Odpověď zní ano, stejné úlohy již dříve řešili žáci pátého ročníku ZŠ Školní v Neratovicích v rámci projektu IIATM, ve kterém spolupracujeme s PedF UK. Žáci většinou odevzdávali správná řešení. Většina žáků však nedokáže úlohy řešit v představách, jako toho byli schopni mnozí účastníci dílny, ale na základě opakované manipulace s hlavolamy a KT.

K úspěšnému zvládnutí úloh žáky je třeba předem důkladně promyslet gradaci úloh a pomůcky a pokusit se předpokládat situace, které mohou v průběhu realizace nastat. Jednoduše znát své žáky. V případě prostorové představivosti je pravděpodobné, že stupeň rozvoje u jednotlivých žáků v jedné třídě bude různý a že tyto rozdíly mohou být mezi dětmi výrazné. Přesto lze hodinu „nastartovat" tak, aby uspěla většina žáků.

V průběhu experimentů ve 4. a 5. třídě jsme se při řešení podobných úloh pokusili popsat různé stupně rozvoje prostorové představivosti u dětí:

Vynikající prostorová představivost	Dokáže podobné úlohy řešit mentálně, „z hlavy".
Stále výborná prostorová představivost	K řešení úlohy si načrtne nějaký plánek či jiný záznam.
Průměrná prostorová představivost	K řešení úlohy bude potřebovat fotografie nebo obrázky.
Nízká prostorová představivost	Úlohu si potřebuje modelovat na krychlích.

Rozvoj prostorové představivosti nelze příliš urychlovat, a proto je nutné mít k dispozici materiál, v našem případě krychle, jehož prostřednictvím může uspět každý žák. Prostřednictvím podobných činností si žáci nejen rozvíjí prostorovou představivost, ale zároveň si uvědomují některé geometrické vlastnosti jako kolmost (kolmé stěny, hrany krychle), rovnoběžnost (rovnoběžné stěny, hrany krychle); budují či upevňují si představu o pojmech vrchol KT (bod), hrana krychle, KT (úsečka), stěna krychle, KT apod.; rozvíjí své kombinatorické schopnosti; při práci ve skupinách pak komunikační a kooperační schopnosti a dovednosti.

Navíc, pokud se svými žáky zrealizujete konkrétně úlohu KT 2, pak vám vedle bezpochyby dobré zkušenosti s hlavolamy zůstane ve třídě poměrně pestrá stavebnice KT. To je příjemný materiál k tvorbě dalších úloh. Když nic jiného, zabaví se vaši žáci skládáním různých KT všelijak do sebe ve volných chvílích a o přestávkách, a to i bez vašeho přičinění. Moc užitečná věc!

Závěrem úloha pro geniální

Dokážete nějakým způsobem graficky zaznamenat řešení hlavolamu? Dokážete to dokonce zapsat do počítače? Pak jste z mého pohledu geniální. Prosím o vaše řešení. Zasílejte ho na adresu michnovajitka@seznam.cz. Na stejnou adresu si můžete napsat o návod ke skládání papírové krychle či mi poslat připomínky a náměty.

Literatura

Hejný, M., Jirotková, D. (2005.) Unit 3D geometry. *Pracovní materiál projektu IIATM*. Nepublikováno.

Stěnové modely platónských těles[1]

Jiří Přibyl[2]

V roce 2004 jsem na semináři Dva dny s didaktikou matematiky v rámci pracovní dílny prezentoval hranové modely platonských těles. Letošní dílna přinesla oproti té loňské určité změny. V prvé řadě je to výběr modelů. Loni výsledná tělesa tvořila ucelený soubor, který pocházel od M. Kawamury (Kawamura, 2001). Po zkušenostech, které jsem v uplynulém roce získal s těmito modely, jsem se rozhodl postupovat jinak. Jediným kritériem byla jednoduchost modelu. Snažil jsem se nalézt takové způsoby, aby byly co nejpřijatelnější pro žáky druhého stupně ZŠ a studenty středních škol. Upustil jsem též od

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAČR 406/05/2444

[2]*KMAT, PF UJEP, Ústí nad Labem; pribyljap@seznam.cz*

modulárního origami, kdy každé těleso bylo tvořeno dvěma různými moduly, a přiklonil se k jednotkovému origami, kdy tělesa jsou tvořena jednou jedinou jednotkou.

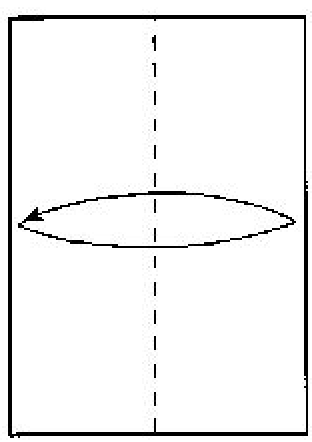
Jednoduchost s sebou přináší určitá omezení a nedostatky. Prvním a také největším nedostatkem je přesnost, a to zejména u dvanáctistěnu. Vytvořit úhel o velikosti $108°$ je o něco obtížnější než vytvořit pravý úhel či úhel o velikosti $60°$, a proto se od toho upouští a nahrazuje se úhlem o velikosti cca $109°$. V části věnované dvanáctistěnu se o této problematice lze dočíst více.

Za omezující lze považovat změnu velikosti a tvaru papíru. Po určitých zkušenostech, které jsem získal, doporučuji vycházet z papíru formátu A4, jemuž norma předepisuje rozměr 297 mm $\times$ 210 mm, o gramáži 80 g/m^2 – tedy běžný kancelářský papír. Pokud zvolíte pestrobarevné papíry, dosáhnete zajímavých efektů, a jestliže zůstanete u papíru bílého, můžete naopak na model kreslit a psát.

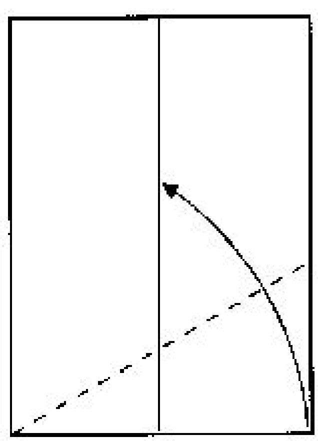
Také řazení modelů je podřízeno kritériu jednoduchosti, a tedy nesleduje žádné zákonitosti, jak tomu obvykle bývá. Závěrem vám přeji hodně radosti, zábavy a poznání při modelování pravidelných mnohostěnů.

Vytváření papíru s poměrem stran $1 : (2/\sqrt{3})$

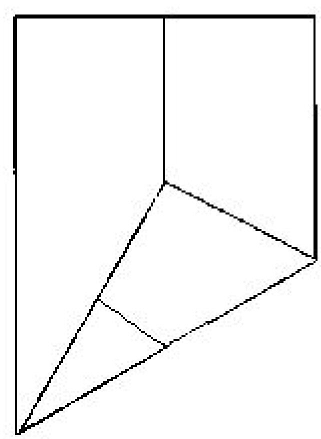
Tento tvar je výchozím pro modely čtyřstěnu, osmistěnu a dvacetistěnu, a proto se s ním blíže seznámíme. Pro naše potřeby budeme potřebovat papír o formátu A4. Po určitých zkušenostech lze vzíti i papír menšího rozměru – A5 či A6, a to podle zručnosti a zkušenosti.



Obr. 1



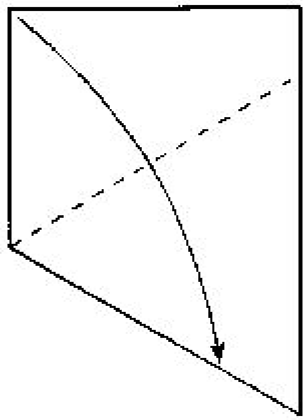
Obr. 2



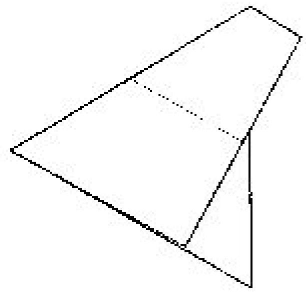
Obr. 3

Nejprve vytvoříme svislou osu obdélníka – obr. 1. Další hranu chceme vytvořit tak, že hledáme osu souměrnosti, pomocí které zobrazíme libovolný vrchol obdélníka na již vytvořenou osu, přičemž se řídíme obrázky 2 a 3.

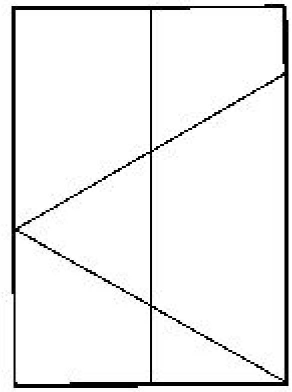
Nyní papír obrátíme rubem k sobě a budeme podle návodu pokračovat dále. Přeložíme papír tak, aby se levý horní roh zobrazil na hranu vytvořenou na obr. 2 (viz obr. 4 a výsledek na obr. 5). Nakonec papír rozložíme do původního tvaru. Celý postup zrcadlově zopakujeme podle osy vytvořené v kroku na obr. 1.



Obr. 4

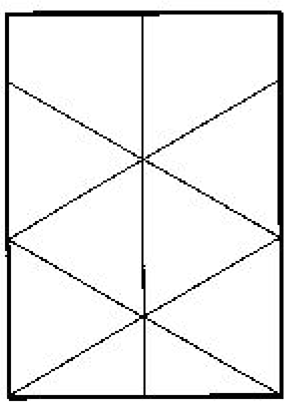


Obr. 5

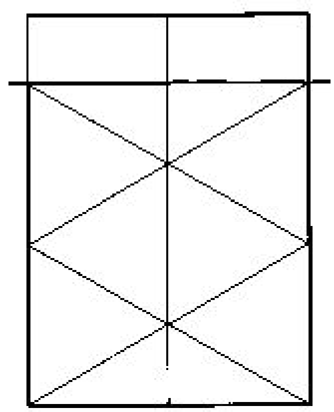


Obr. 6

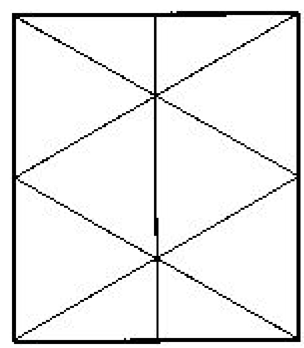
Požadované rýhování je vidět na obr. 7. Nyní si například pravítkem či pomocí přeložení hrany vyznačíme spojnici konců hran, jak je tomu na obr. 8. Vrchní obdélník odstřihneme a získáme požadovaný tvar – obr. 9.



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

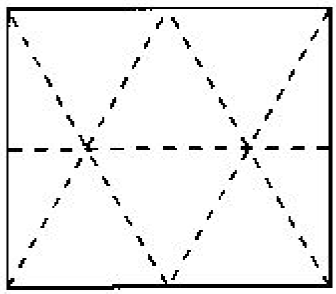
Osmistěn

Tento model je tvořen dvěma jednotkami. Tyto jednotky si připravíme následujícím způsobem.

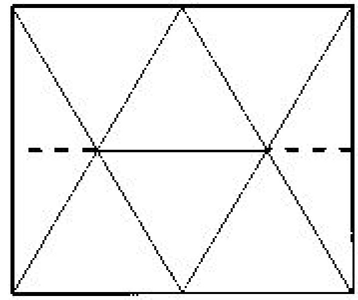
Budeme potřebovat obdélníkový tvar papíru s poměrem stran, který vytvoříme výše uvedeným postupem – obr. 10. Tím také vznikne potřebné rýhování. U všech hran nastavíme stejnou polaritu – podle každé hrany přeložíme papír k sobě.

Nyní obrátíme polaritu hrany – na obr. 11 vyznačeno přerušovanou čarou. Jedná se pouze o výšky v rovnoramenných trojúhelnících.

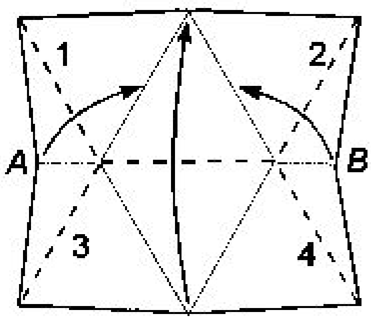
Nyní budeme skládat podle hran v pořadí, které je uvedeno čísly na obr. 12. Výsledkem by mělo být, že body A a B leží uvnitř skládanky, a to na ramenech pravidelného trojúhelníka. Výsledek je vidět na obr. 13.



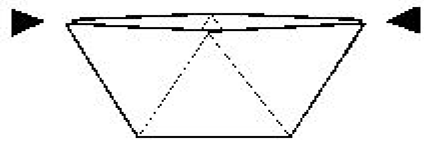
Obr. 10



Obr. 11



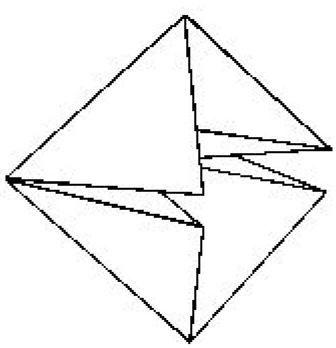
Obr. 12



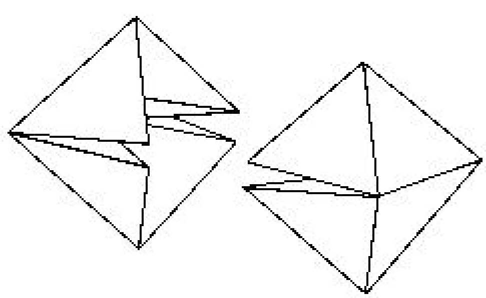
Obr. 13

Nyní náš výrobek připomíná lodičku s tím, že jak napravo, tak nalevo jsou vždy dva cípy papíru. Nyní na tyto cípy budeme tlačit (viz obr. 13) a vznikne 3D model. Dbáme na to, že příslušné hrany vedoucí k cípům mají být rovnoběžné a nikoliv se setkat. Na obr. 14 je požadovaný výsledek. Takovéto jednotky zhotovíme celkem dvě.

Nyní nastane ten nejobtížnější krok – sestavíme model pravidelného osmistěnu. Obě jednotky uchopíme do rukou tak, aby cípy směřovaly směrem k sobě. Pomalu budeme jednotky do sebe zasouvat, přičemž dbáme na to, aby se jednotlivé cípy střídaly.

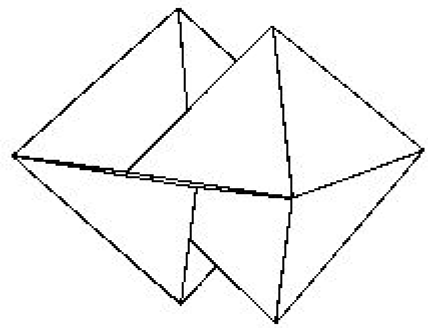


Obr. 14



Obr. 15

Na obr. 16 je výsledek na půli cesty.



Obr. 16

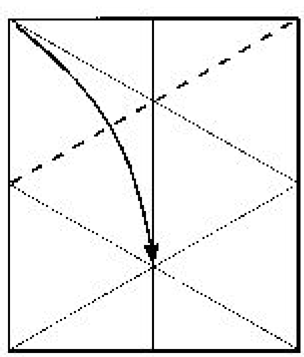
Čtyřstěn

Tento model je také tvořen dvěma jednotkami, ale tyto jednotky nejsou shodné, jelikož jsou zrcadlově převrácené (ve skutečnosti se tedy jedná o modulární origami). Opět vycházíme z papíru formátu $1 : (2/\sqrt{3})$.

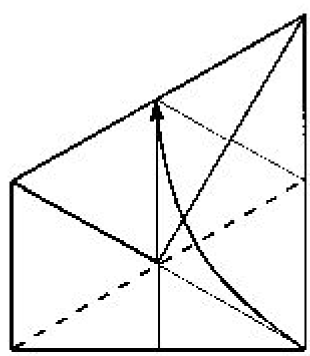
Nyní budeme překládat papír podle již existujících hran. Nejprve přeložíme levý horní roh na symetrálu obdélníka (obr. 17). (Duálně: pravý horní roh.)

Dále přeložíme pravý spodní roh na tutéž osu – obr. 18. (Duálně: levý dolní roh.)

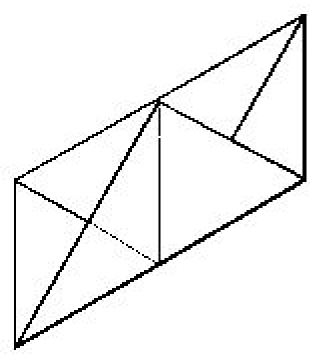
Získáme požadovanou jednotku – obr. 19.



Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19

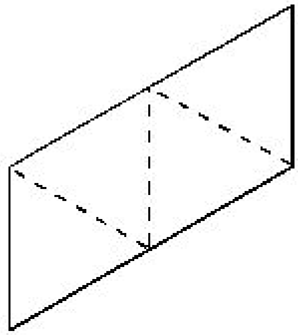
Na obr. 20 je požadovaná duální jednotka (z líce).

Jak je na obr. 20 naznačeno, zvýrazníme všechny hrany, a to směrem dovnitř. Obr. 20 je úmyslně nakreslen obráceně, aby bylo vidět, které hrany máme na mysli.

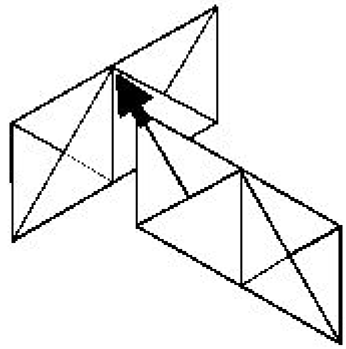
Na obr. 21 je vidět, jakým způsobem začínáme vytvářet model čtyřstěnu. Nejprve na stůl položíme původní jednotku a na ní položíme jednotku duální. Pouze položíme, není tam žádná kapsa.

Nyní z původní jednotky seskládáme čtyřstěn – obr. 22.

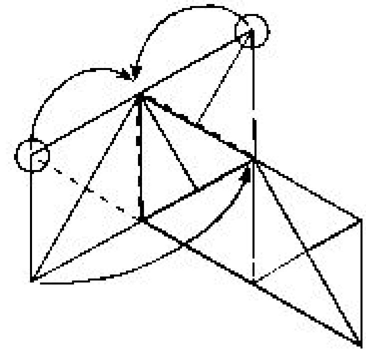
Tento čtyřstěn nedrží pohromadě, a proto je tu duální jednotka, kterou čtyřstěn „obalíme“, přičemž poslední rovnostranný trojúhelník vložíme dovnitř – obr. 23.



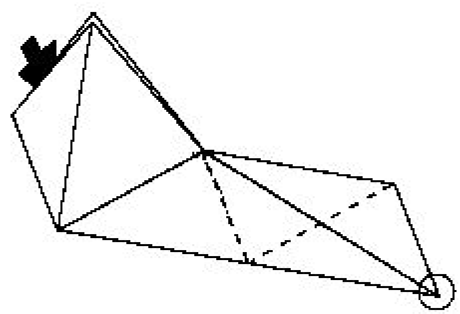
Obr. 20



Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23

Měl jsem možnost si vyzkoušet všech pět pravidelných těles jak se žáky, tak se studenty VŠ. V obou případech se modely setkaly s přiměřenou odezvou, která odpovídala zájmu a schopnostem jednotlivců. Při práci s větší skupinou se mi osvědčilo vybrat si ze skupiny několik žáků a ty předem naučit (rozumná doba je týden, ale je to jen můj názor) celý postup. Ti potom během hodiny sloužili jako moji pomocníci a celá skupina měla daleko větší šanci se s danou problematikou lépe seznámit.

Závěrem vám přeji, abyste vy sami zažili spoustu radosti a zadostiučinění z vytváření modelů a aby se vám tuto radost podařilo předat dál.

Literatura

Brill, D. *Brilliant Origami.* 1. vydání (4. dotisk). Tokyo (Japan): Japan Publications, Inc., 2001. English.

Kawamura, M. *Polyhedron Origami: For Beginners.* 1. vydání. Tokyo (Japan): Nihon Vogue Co., Ltd., 2001. Japanese/English.

Mitchell, D. *Mathematical Origami: Geometrical Shapes by Paper Folding.* 1. vydání. Norfolk (England): Tarquin Publications, 2002. English.

Konstrukce a klasifikace sítí krychle: Užití myšlenkových map ve vyučovacích experimentech na ZŠ[1]

Bernd Wollring[2]

Sestrojování všech jedenácti tvarů sítě krychle je oblíbená a smysluplná činnost v hodinách geometrie na základních školách, jak na prvním, tak i na druhém stupni. V tomto článku navrhujeme postup výuky zpracovaný na základě materiálu pro projekt IIATM, Socrates-Comenius od autorů M. Hejného a D. Jirotkové z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Po provedení mnoha experimentů a po vzájemných diskusích s kolegy z projektu nám tento postup připadá vhodný zejména pro první stupeň základních škol.

CZ 1

Východisko: Kultura poznání

Popíšeme několik základních principů naší práce, aby bylo zřejmé, na jakých názorech je náš přístup založen. Zastáváme konkrétně konstruktivistické principy. Pod tím rozumíme hlavně to, že studenti se učí aktivním poznáváním ve vzájemném společenském kontaktu a že učitelé vedou své studenty k samostatnosti ve studiu a k umění se učit.

To ovšem znamená, že učitelé potřebují mít jisté zkušenosti s učebním potenciálem svých žáků v konkrétních učebních situacích. Jedině tak mohou odhadnout, jaký výkon se dá v konkrétní situaci od dětí očekávat a s čím naopak budou potřebovat pomoct.

Účinný doplněk konstruktivistických principů vidíme v principech informativních, které se sice na první pohled zdají samozřejmé, ale přesto je chceme zdůraznit. Vidíme je hlavně v tom, že učitelé mají nezbytný přehled o rozmanitosti výsledků a pracovních postupů konkrétních cvičení. Tím pádem jsou schopni podpořit činnost dětí vhodnými, ale nikoliv přehnanými způsoby a zároveň mohou dětem sloužit jako spolehlivé zdroje matematických informací.

Oba tyto principy se spojují v princip jediný, který označujeme pojmem „Kultura poznání“. Spočívá hlavně ve schopnosti učitelů podchytit i částečnou snahu žáků, zdánlivě neplnohodnotná řešení nebo pouze částečně vypracované postupy, které jsou přínosné pro celkovou práci na nějakém problému. Podstatnou součástí atmosféry třídy je přístup pozitivního hodnocení a hodnocení pozitivních kompetencí dětí. Je to tedy pravý opak důvěrně známého přístupu orientovaného na nedostatky, který naopak zvýrazňuje pouze ty aspekty správnosti a smysluplnosti, které v příspěvcích dětí zatím chybí.

---

[1]Příspěvek byl vytvořen s podporou projektu IIATM 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2]*Univerzita v Kasselu, Německo, Wollring@mathematik.uni-kassel.de*

Výukové okolí

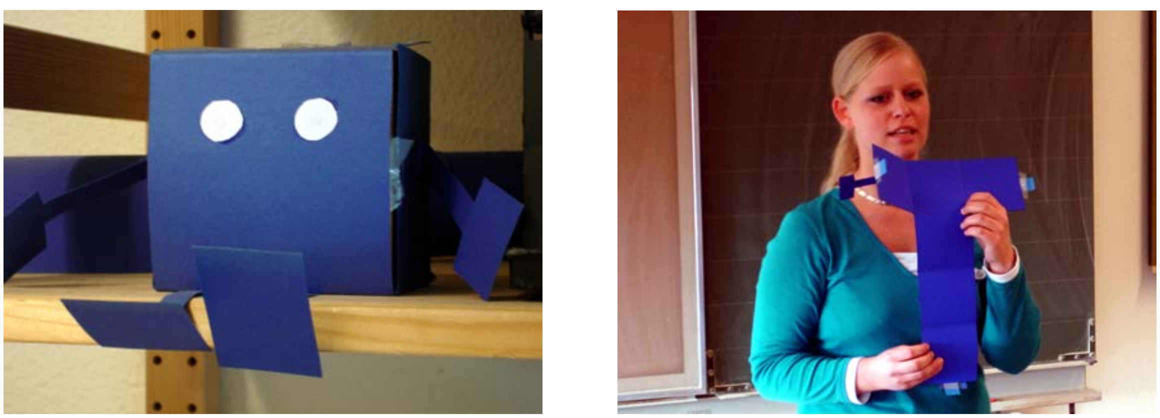
Abychom podobné principy mohli realizovat, používáme pojem „výukové okolí“. Výukové okolí je určité přirozené rozšíření toho, čemu se tradičně říká cvičení. Výukové okolí je v podstatě jakési flexibilní cvičení, nebo ještě přesněji, jakési rozsáhlé flexibilní cvičení. Sestává vždy z několika dílčích cvičení, která jsou pospojována takzvanými hlavními myšlenkami. Rozlišujeme šest různých hlavních myšlenek, které mohou charakterizovat výukové okolí:

Matematický smysl a smysl matematické práce, Rozvoj sociálních dovedností, Diferenciace, Logistika, Možnost evaluace, Propojení s ostatními hlavními myšlenkami.

Místo vysvětlování jednotlivých bodů uvádíme následující příklad, naše výukové okolí, neboli rozsáhlé cvičení „Sestrojování a klasifikace sítí krychle“. Toto cvičení bylo použito a ověřeno na základní škole v hodinách matematiky, konkrétně bylo navrženo pro druhý, třetí a čtvrtý ročník. Jednotlivé hlavní myšlenky vztáhneme na toto cvičení.

Výukové okolí „sítě krychle“ a přípravné úvahy

Co to je síť krychle, lze objasnit metaforicky (viz např. rozpracovaný materiál projektu IIATM, kapitola *3D geometrie* autorů M. Hejného a D. Jirotkové). Síť krychle se zde popisuje jako „střih na oblek pro krychli“, který se skládá z dílů – čtverců, které je třeba „sešít“, a u kterého se musí ještě „zapnout zipy“, když se na krychli „obléká“. Je to jeden z možných popisů, kterým lze výuku zahájit.



Obr. 1: „Pan Kostka“ a jeho oblek

Sestrojování sítí krychlí z jednotlivých čtverců vede k řešitelným, ale nikoliv jednoduchým logistickým problémům. Musíme se rozhodnout, jak veliké mají čtverce být, z jakého mají být materiálu, jak se budou spojovat a kolik jich budeme potřebovat.

Začněme s posledním jmenovaným problémem. Vezměme v úvahu třídu o dvaceti žácích, které rozdělíme do skupin po čtyřech. Každá z pěti skupin by měla sestrojit všech jedenáct tvarů sítě krychle. Když žádné dítě neprovede chybný pokus a když děti budou spolupracovat, budeme potřebovat $5 \cdot 6 \cdot 11 = 330$ čtverců. Pokud započítáme chybné pokusy a duplicitní řešení, bude se reálný potřebný počet čtverců pohybovat okolo 400. Pokud navíc započítáme, že děti navíc nerozpoznají sítě osově souměrné, bude potřeba ještě mnohem více čtverců, pro výše uvedenou třídu celkem zhruba 600. Pokud vyrobíme čtverce z plochého materiálu, je výhodné je pospojovat kousky lepicí pásky, vzhledem k tomu, že takové spojení je jednak ohebné a jednak se dá později odstranit. Tím pádem potřebujeme na čtverce plast. V jednom z prvních experimentů jsme použili na výrobu všech 600 čtverců silnou plastovou fólii tloušťky přibližně papíru, ze které jsme získali přesné a pevné čtverce.

Jak veliké tedy mají takové čtverce být? V první řadě s nimi musí jít pracovat, nesmí být ani moc malé, ani moc velké. Za druhé musí být jednak samotné krychle, ale i jejich sítě takové, aby žáci základní školy mohli sami stanovit jejich objem. Jinými slovy to znamená, že z krychlí lze složit větší krychli o objemu jeden litr. Rozklad na prvočinitele $10 = 2 \cdot 5$ ukazuje, že vhodné jsou krychle o délce hrany 2 cm nebo 5 cm. Jakékoliv jiné krychle by ztěžovaly spojení tohoto výukového okolí s jinými, ve kterých se budeme soustředit na objemy.

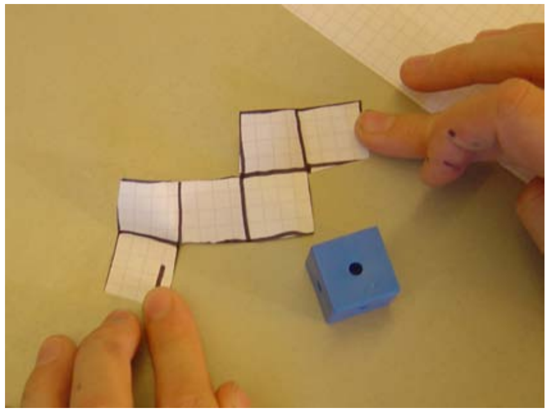
Obr. 2: Krychle o délkách hrany 10 cm, 5 cm a 2 cm

Sítě krychle o hraně 5 cm jsou poměrně veliké, proto jsme si tento postup vyzkoušeli pouze na učitelích z „In-Service Teacher Training“. Pro práci s dětmi jsme zvolili krychle o hraně 2 cm a jiný způsob tvoření sítí. Sítě těchto krychlí jsme nechali kreslit samotné děti na čtverečkovaný papír.

Konstrukce sítí

Nakreslené sítě děti vystřihnou, po stranách čtverců zpřehýbají a pro kontrolu do nich zabalí své krychle. Tuto aktivitu, takzvanou konstrukci, považujeme za jednu z hlavních aktivit. Podporuje osvojování si vztahu rovinných útvarů a prostorových těles. Z logistického hlediska nepředstavuje tato aktivita žádné problémy.

Během našich experimentů se každému dítěti za dobu zhruba jedné hodiny podařilo nakreslit, vystřihnout, zohýbat a přezkoušet průměrně deset sítí.



Obr. 3: Krychle o hraně 2 cm a nakreslená síť

Klasifikace sítí a hledání shodností

Rozhodující navazující aktivita nyní spočívá v klasifikaci a třídění hotových sítí. Při této aktivitě se ukazuje, že naše výukové okolí nemá svůj hlavní význam pouze v prostorové geometrii – v souvislostech mezi dvojrozměrnými sítěmi a prostorovými tělesy, ale že je také významné pro výuku symetrie a shodnosti. Tyto dva pojmy hrají důležitou roli v tom, jak děti své sítě konstruují, klasifikují a popisují.

Objevili jsme, že děti vidí dvě sítě jako shodné, pokud jednu z nich mohou zcela přikrýt druhou sítí. Je to intuitivní přístup k pojmu shodnost a je jednoduché vidět dvě sítě jako stejné, když je můžeme na sebe položit tak, aby se kryly. Další dovednosti dítě získá, jakmile zjistí, že dvě sítě jsou shodné poté, co jedna z nich se musí otočit lícem na rub a teprve potom ji lze přiložit na druhou síť. Tento krok, kdy je nutné sítě obrátit, musel být u některých dětí iniciován učitelem.

Z hlediska matematiky je třeba uznat, že při klasifikaci sítí krychle se u dětí vyvíjejí schopnosti rozpoznat shodnost u dvojrozměrných obrazců, shodná zobrazení – posunutí, rotaci a zrcadlení (odpovídá obracení sítě lícem na rub). V geometrii lze dokázat, že všechna shodná zobrazení v rovině lze vyjádřit pouze pomocí zrcadlení (osové souměrnosti).

Tento vztah děti objevují při třídění sítí, aniž by se k němu musely prodírat teorií, jinými slovy jako „Theorems in Action“ – matematické věty v činnostech.

Pokud se při klasifikaci sítí povolí pouze posunutí a rotace jako jediné dva přípustné pohyby, přemístění, výsledkem bude 20 různých tvarů sítí. Některé budou symetrické, ale ty se nyní budou počítat zvlášť. Pouze dvě sítě s vlastní osovou souměrností, „kříž“ a „T“, se vyskytnou jen jednou. Pokud povolíme i obracení lícem na rub, zredukujeme konečný počet různých sítí na 11.

Pro klasifikaci a samotné konstruování sítí si děti vymyslí velice odlišné postupy. Je vhodné proto vytvořit jakýsi systém znázornění, ve kterém budou děti moci vyjádřit své vlastní sítě a jejich klasifikace, ačkoliv jim zatím bude chybět terminologie. Dokud děti mohou používat pouze hovorový jazyk, dorozumívají se i pomocí předvádění, ukazování a manipulace. Náročnost na terminologii musí být svým způsobem demokratická, tzn. musí se přizpůsobit myšlení dětí a posléze doplňovat jazykové prostředky geometrickými termíny.

Takový přístup k terminologii nám nabízí postup s názvem „Mind Maps“, myšlenkové mapy. Tento postup považujeme za nejvhodnější pro situace, kde hledáme správná označení při výuce na základní škole. Co to vlastně je myšlenková mapa?

Myšlenkové mapy

Zhruba řečeno myšlenková mapa je nějaký plakát, obraz, na kterém jsou jen tak připíchnuty obrázky nebo psané pojmy, které se aranžují podle jednotlivých vztahů. Zajímavé je, že silnější nebo slabší vztahy mezi jednotlivými pojmy nebo obrázky se zvýrazní tím, že tyto obrázky budou naaranžovány blíže k sobě nebo dál od sebe. Myšlenkovou mapu můžeme popsat i následujícím způsobem.

Myšlenková mapa je plocha, na které se nalézají zobrazení pojmů (tj. texty, obrázky nebo symboly) tak, že:

– momentální poloha těchto zobrazení vypovídá o vzájemných vztazích jednotlivých pojmů a

– momentální polohu těchto zobrazení lze snadno a podle potřeby měnit tak dlouho, než najdeme takovou polohu, která, podle názoru těch, kteří myšlenkovou mapu aranžují, vystihuje vztahy mezi jednotlivými pojmy nejlépe.

Při diagnostických výzkumech hrají myšlenkové mapy velice významnou roli. Zároveň jsou však velice účinnou pomůckou při samotné výuce. Zejména při výuce našeho výukového okolí jsou velice praktické, protože představují formu zobrazení, která ozřejmuje komplexní geometrická fakta, o kterých by děti na základní škole nebyly schopny vypovídat souvisle.

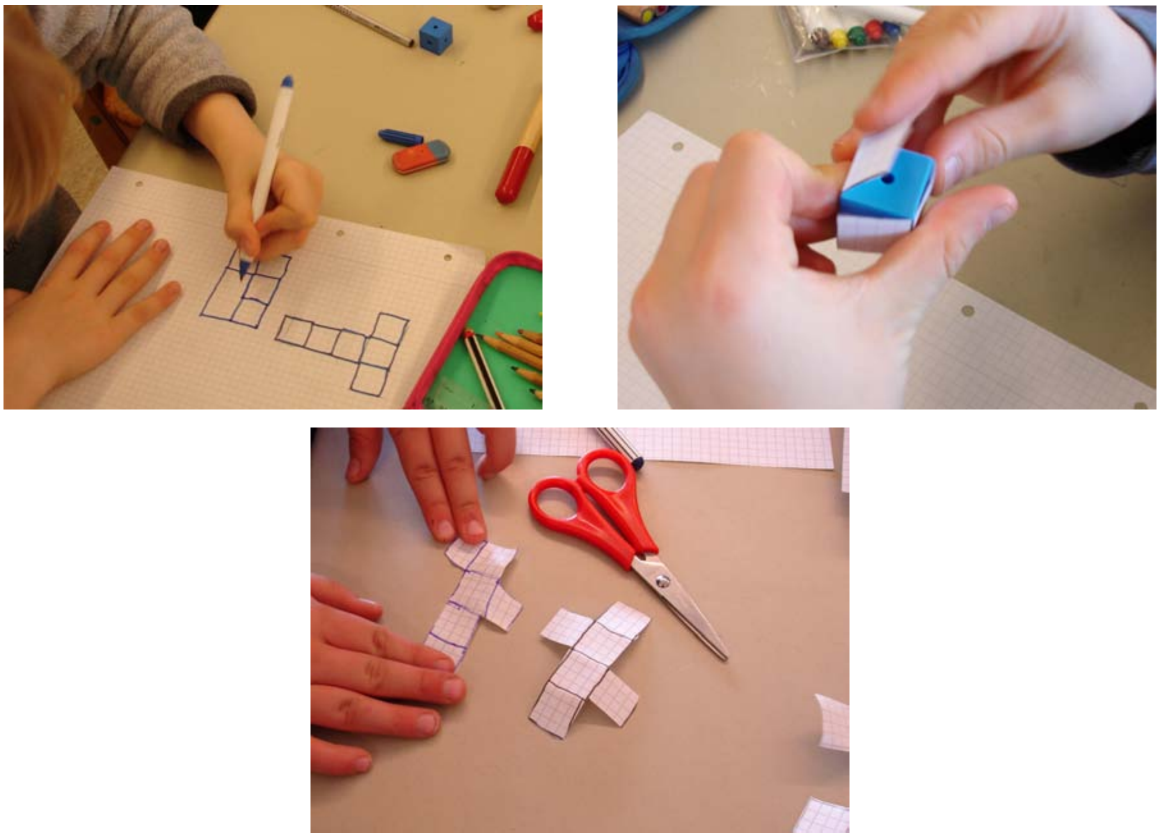
Na myšlenkových mapách je podstatná idea zvýrazňovat vztahy mezi jednotlivými objekty pomocí jejich polohy na ploše. Takovému postupu se děti při společné práci velice rychle naučí a velice rychle si ho osvojí. Dokud není společná myšlenková mapa fixní a povoluje změny posunutím jednotlivých zobrazení, je velice lehké opravovat „chyby“ a velice dobře se zobrazují výsledky vzájemných diskusí. Myšlenková mapa je také vhodný způsob zobrazování při práci ve skupinách i při práci samostatné. V našich experimentech jsme vyzkoušeli obě varianty. Zejména při systematickém popisování sítí krychle je použití myšlenkové mapy velice efektivní i přesto, že na plakáty samotné potřebujeme další materiál.

Aktivity

Jak již bylo řečeno, nechali jsme jednak učitele a jednak žáky 4. ročníku základní školy kreslit a vystřihovat sítě krychle o hraně 2 cm. Žáci měli navíc výše zmíněnou možnost si zabalením krychle do své sítě ověřit její správnost. Nyní popíšeme několik aktivit vhodných pro dodatečné systematické zobrazení nalezených sítí. Jiné aktivity než námi zde uvedené jsou taktéž možné a užitečné, například zkoumání sítí krychle z hlediska toho, které strany čtverců se budou stýkat na jedné hraně krychle apod., což prováděli kolegové Hejný a Jirotková. Při našich experimentech pracovali jak učitelé tak žáci vždy ve skupinách po čtyřech.

Aktivita 1: Testování a porovnávání sítí

Nastříhané sítě se na stole uspořádají do hromádek. Síť se buď položí jako základ nové hromádky, anebo se přiřadí k ostatním sítím stejného typu.

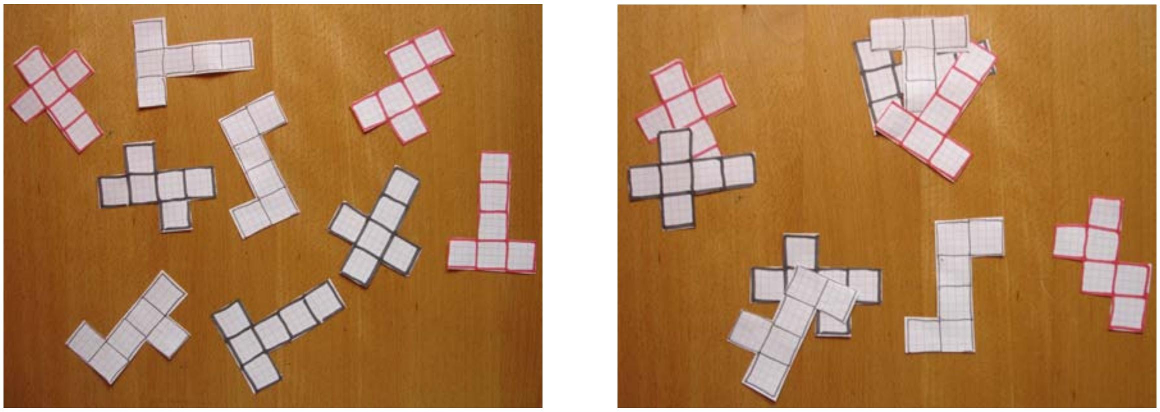


Obr. 4: Sítě a jejich kreslení, ověřování a porovnávání

Ve všech skupinkách se objevila otázka, zda se smí sítě při tomto cvičení obracet lícem na rub. Pokud ano, vznikne méně hromádek. Všechny hromádky se pak někde na stole shromáždí. Hromádka s jedinou sítí bude prvním prvkem systematické klasifikace. Samotné uspořádání hromádek na stole tvoří první předběžný model myšlenkové mapy.

Aktivita 2: Klasifikace sítí a uspořádání hromádek

Důležitost aktivity 1 spočívala v tom, že se shromáždily sítě, které vypadaly stejně. Někdy se ale ocitly sítě stejného typu na dvou nebo více hromádkách. Jakmile si toho účastníci všimli, hromádky se přerovnaly. Vznikla tak potřeba hromádky přehledně uspořádat. Intuitivně se tak rozmístění hromádek přibližovalo struktuře myšlenkové mapy. Hromádky, které ležely blíže k sobě, obsahovaly sítě, které se podle studentů svou strukturou vzájemně podobaly, dále od sebe pak ležely sítě méně podobné.

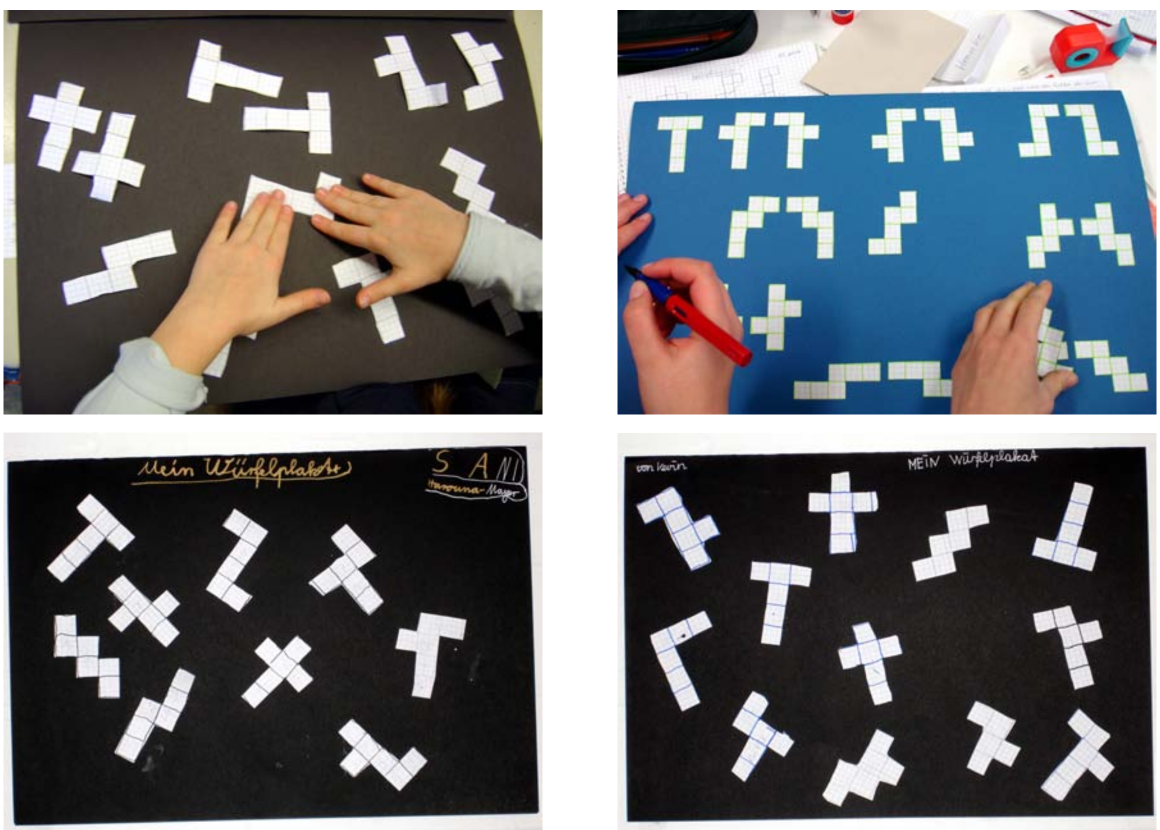


Obr. 5: Hromádky sítí krychle

Aktivita 3: Aranžování sítí do myšlenkové mapy

Skupiny dostaly za úkol vybrat z každé hromádky jednu síť, která bude hromádku reprezentovat, a tyto vybrané sítě pak uspořádat na plakátu o velikosti 50 cm $\times$ 70 cm. Dalším požadavkem bylo, aby sítě byly uspořádány tak, aby bylo vidět, „zda to skutečně jsou anebo nejsou sítě krychle“.

Úkol uspořádávat sítě podobné struktury blíže k sobě jsme explicitně nezadávali.



Obr. 6: Myšlenkové mapy se sítěmi krychle

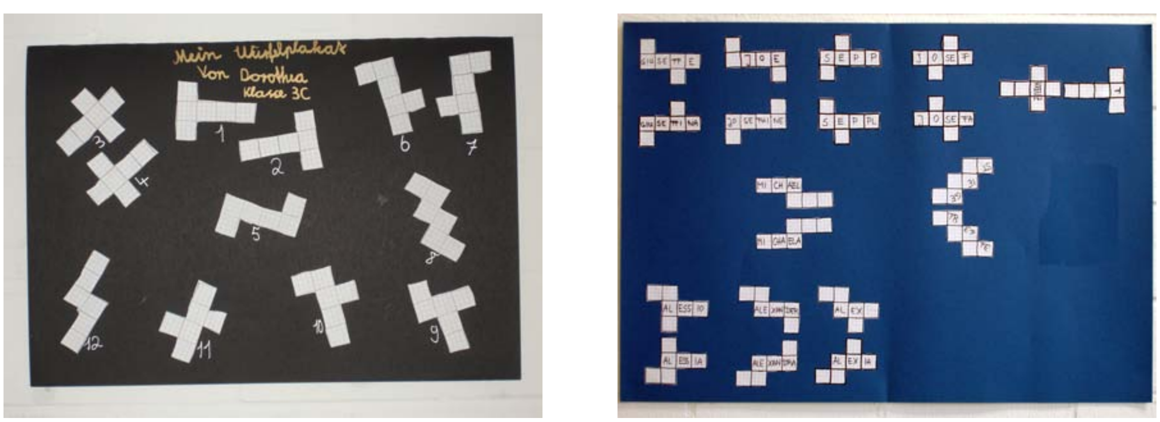
Ukázalo se, že všechny skupiny, ať už učitelé nebo žáci, potřebovaly na tuto aktivitu zhruba půl hodiny. Stanovila se technická podmínka, že se myšlenkové mapy budou definitivně lepit až poté, co se celá skupina shodne na uspořádání. Vznikly velice odlišné plakáty. Plakáty, které lze měnit, jsme nazvali „Flexi-plakáty“ (Flex-Poster).

Aktivita 4: Pojmenování sítí

Pozorovali jsme, že během aktivity 3 používali jednak učitelé ale i studenti často pro své sítě rozličná slovní označení. Stávalo se také, že se některá označení neujala a nebyla dále používána. Celková pozorování všech experimentů ukazují, že se používaná označení dají klasifikovat do tří hlavních skupin:
– Jména, která označují tvary, například „kříž“, „stůl“, „hák“.
– Jména, která označují objekt z hlediska nějakého systému, například „4L-1N“. Taková jména se objevovala hlavně u skupin složených z učitelů.
– Jména, která jsou vlastní jména, například „Anna“, „Alexander“ nebo „Friedrich“.

Oproti našim původním dojmům se ukázalo, že názvy prvního a druhého typu jsou mnohem méně efektivní než názvy třetího typu. Důvod je nejspíše ten, že většina označení prvního typu označují nejen samotnou síť, ale i jakousi její speciální polohu vůči pozorovateli. Pokud se tato poloha změní, ztratí takovéto označení pro mnohé svůj význam. Kvůli odlišným názorům jednotlivých účastníků bylo obtížné se dohodnout na označení objektů, pokud se mělo jednat o označení prvního typu. Tento problém však nehovoří proti používání takovýchto označení, protože pojmenovávání tvarů jednoznačně patří k výuce matematiky. Ale v naší konkrétní situaci takováto označení představují problém, který může práci zpomalit. Nadto je pro studenty s různými mateřskými jazyky obtížné označení prvního typu popsat a zdůvodnit. Také označení druhého typu se jen velice vzácně ukáží jako vhodná pro práci ve skupinách. Je obtížné je používat, mnohdy jsou též závislá na poloze konkrétní sítě a obecně mají smysl jen v takové situaci, kdy všichni účastníci mají potřebné schopnosti používat systematická pojmenování.

U třetího typu pojmenování jsme zaznamenali velice vysoký stupeň efektivity.



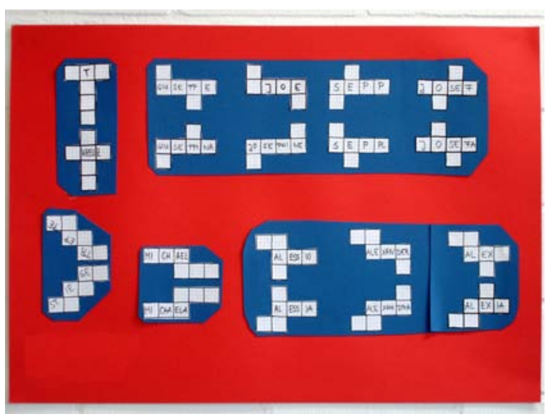
Obr. 7: Myšlenková mapa se sítěmi krychle a jejich jmény

Jako velice efektivní se v našich experimentech ukázalo používání křestních jmen pro jednotlivé sítě. Křestní jména mají navíc tu výhodu, že každý účastník je může navrhnout a také se může se svou vlastní sítí identifikovat. Křestní jména také nabízejí originální způsoby, jak popsat větší množství sítí, zejména pak pokud jsou tyto navzájem symetrické, ale i když jsou zcela odlišné. Symetrické sítě se v našich experimentech často spontánně označovaly podobnými jmény, například „Jan“ a „Jana“, která vznikají zcela přirozeně přechylováním. Sítě symetrické samy o sobě se často označovaly palindromy, například „Oto“ nebo „Anna“, aby se v názvu vyjádřila geometrická symetrie těchto objektů.

U jednotlivých skupin jsme pozorovali i třetí spontánní možnost používání vlastních jmen. Sítě krychle, které skupina považovala za rozdílné pouze změnou struktury, dostávaly souhrnné jméno buď mužského, nebo ženského tvaru, například jméno „Alexander“ se v různých řečech objevovalo jako: „Alexander“, „Alexandra“, „Alessandro“, „Alessandra“, „Alex“, „Alexa“ atd. Zde bylo použito hovorového jazyka k popsání objevené struktury. Takovýto systematický popis struktur je důležitou součástí matematického chování.

Aktivita 5: Vytváření tříd sítí

Všem účastníkům dělalo potíže znovu zkonstruovat všechny sítě jeden nebo několik dní po ukončení práce. Aktivita s cílem uspořádat sítě tak, aby bylo vidět, že jsou všechny, ale aby také bylo možné je všechny za čas opět zkonstruovat, vedla k rozličným pokusům v rámci jednotlivých skupin uspořádat sítě do tříd.



Obr. 8: Třídy sítí krychle

Vytváření tříd sítí vedlo k přehodnocování jmen tak, aby bylo možné rozpoznat jednotlivé třídy i podle jmen jejich prvků. Výše uvedený princip používat podobně znějící jména se rozšířil mezi všechny skupiny. Výsledek byl, že tyto třídy byly v rámci pracovních skupin označovány jako „rodiny“ (toto není termín, který bychom vědomě používali, nebo který zde zavádíme). Podle našeho názoru je to vhodné označení a můžeme ho ponechat. Vzniklé myšlenkové mapy tím pádem označujeme jako „Flexi-plakáty rodin“. Převládající princip třídění při vzniku rodin spočíval u našich experimentů v tom, že se sítě třídily podle toho, jaký byl nejdelší pás na sebe navazujících čtverců, který lze v konkrétní síti nalézt.

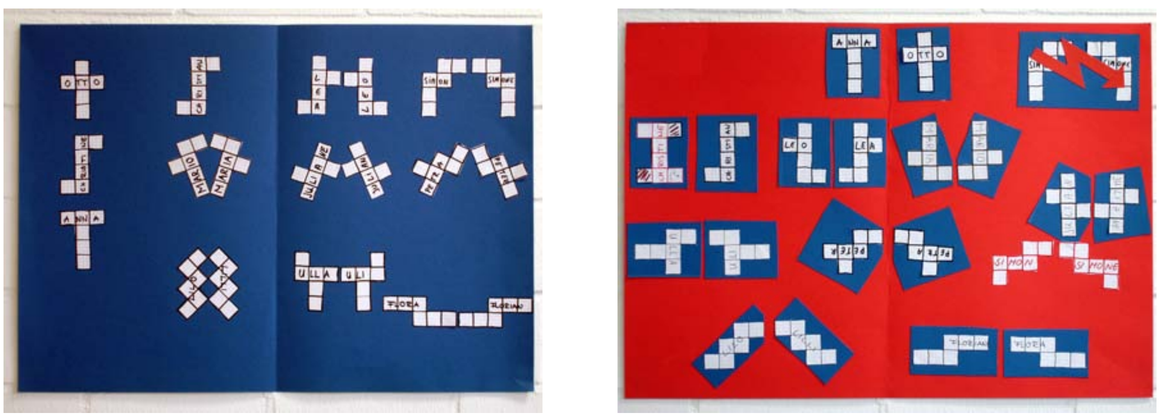
Aktivita 6: Revize plakátů a tvoření nových myšlenkových map

Hmatatelným výsledkem skupinové práce byl zkompletovaný plakát, který nesl buď název „Plakát rodin“ nebo při ne zcela jasném třídění sítí pouze název „Plakát“.

Nyní jsme vybrali několik pracovních skupin a dali jim následující úkoly:

Máte k dispozici plakát jiné skupiny. Ověřte, zda tento plakát obsahuje nesprávné sítě, tyto označte nebo odstraňte. Ověřte, zda některé sítě chybí a případně je doplňte. Posuďte, zda vám připadá třídění do rodin vhodné. Smíte je měnit. Ale nová jména jim dávejte jen tehdy, pokud to shledáváte nezbytným.

Záměr tohoto cvičení nespočívá ani tak v opravování chyb nebo vyjadřování kritiky, ale spíše v tom, že hodnotí nepřesné nebo chybné výsledky v jejich původním prostředí a z hlediska původních myšlenek a využívá je jako východiska pro řešení správná a smysluplná. Vzniká tak možnost seznámit se s výsledky ostatních skupin a konstruktivně je využívat.



Obr. 9: Revidované myšlenkové mapy

Aktivita 7: Přehlídka myšlenkových map

Snadno organizovatelná aktivita, při které se skupiny rovněž seznámí s prací a s výsledky ostatních, je uspořádání přehlídky všech prací, tedy jakési výstavy, a požádání každé skupiny, aby si dělala poznámky o ostatních plakátech, o rozdílech, shodnostech a možných důvodech, proč ostatní plakáty vypadají právě tak, jak vypadají.

Přitom se projeví jednak schopnost uznat rozdílné pracovní postupy a jednak potřeba stejného vyjadřování. Sítě krychle jsou naštěstí objekty, které nemají v matematice pevně stanovená pojmenování. Při diskusi s ostatními skupinami lze tudíž používat jejich i svá vlastní pojmenování, lze reflektovat potřebu jednotného vyjadřování a na základě shody dospět k jednotnému definitivnímu označení pro určitý tvar sítě.

Aktivita 8: Pozorování a reprodukce sítí krychle pomocí myšlenkové mapy

Jako doplněk výše popsaných aktivit lze chápat tuto aktivitu jako dlouhodobou, která spočívá v tom, že jeden Plakát rodin sítí krychle, který schválí celá třída, lze nastálo vystavit buď v samotné třídě, nebo na školní nástěnce, a tím docílit častého kontaktu se všemi jedenácti tvary sítí krychle a postupného zapamatování.

Realizované hlavní myšlenky

Práce se sítěmi krychle a myšlenkovými mapami vytváří výukové okolí v pravém slova smyslu a může se použít jako dobrý příklad ilustrace hlavních myšlenek:

- Matematický smysl a smysl matematické práce: Jednotlivé objekty mají matematický význam. Krychle a její sítě se vyskytují nejen v matematice, ale i v běžném životě.
- Rozvoj sociálních dovedností: Práce s konkrétními krychlemi, sítěmi a myšlenkovými mapami umožňuje rozvoj v oblasti vzájemného vyjednávání, ale i samotného mluvení a psaní, samostatně i ve skupinách. Podporuje taktéž skupinovou spolupráci.
- Diferenciace: U rozličných aktivit nastává bez dalšího vlivu přirozená diferenciace. Tím pádem je možné, díky cílené dělbě práce, předvídat dodatečnou diferenciaci. Rozdílné formy prací a předmětů dávají dětem výkonnějším i méně výkonným stejnou možnost práce prospěšné pro kolektiv. Zde obstojí klasický mustr zadávání úkolů s vyšší možností diferenciace: najít jedno řešení, najít další řešení, všechna tato řešení zdůvodnit.
- Logistika: Z materiálního hlediska je toto výukové okolí obhajitelné. Krychle nejsou nedostatkovým materiálem a vyplatí se pořídit celou sadu jak krychlí o hraně 5 cm ze dřeva, tak krychlí o hraně 2 cm z plastu. Tato sada krychlí však nemusí být k dispozici pouze jediné třídě. Myšlenkové mapy nevyžadují žádný speciální materiál, lze například použít zadní strany starých plakátů nebo popsaného papíru.
- Možnost evaluace: Hodnotit pracovní výsledky je pro učitele s určitým tréninkem velice užitečné i s odstupem času. Vyučující by měli všech jedenáct tvarů sítí krychle znát a pouze v případě nouze používat ve třídě „tahák“.
- Propojení: Existuje mnoho vztahů mezi tímto výukovým okolím a dalšími. Zde zmíníme pouze tři. Pojem myšlenkové mapy, který je zde realizován v podobě Flexi-plakátů rodin, je forma práce, kterou lze používat pro znázornění systematické klasifikace i v jiných matematických oblastech, například u geometrických těles, u číselných modelů apod. Namísto krychle lze zvolit jiné těleso, ke kterému lze hledat sítě, například čtyřstěny, hranoly nebo jiné, které spadají do látky základních škol. Sítě krychle odkazují na rozmanité vztahy s jinými obrazci, které se skládají ze čtverců, například tetramina, pentamina, hexamina.

Závěr

Závěrem nezapomeňme na to, že skutečným účelem tohoto výukového okolí není předkládat jednoznačně správné nebo špatné výsledky. Záměrem je zdůraznit dva podstatné aspekty výuky matematiky na základních školách. Za prvé, nejen aritmetika, ale i geometrie představuje významnou oblast práce na základní škole. Za druhé, jádro matematické činnosti spočívá v aktivním konstruování a pracovních postupech s ním spojených, a nikoliv pouze ve slepém opakování rutinní práce.

Literatura

Hejný, M., Jirotková, D. (2005). *Solids – Nets of cube*. Nepublikovaný materiál z projektu Socrates Comenius 2.1.

Rozšíření pojmu aritmetická posloupnosti na střední škole, aritmetické posloupnosti vyšších řádů[1]

Jaroslav Zhouf, Naďa Stehlíková[2]

Úvod

Následující text bude strukturován způsobem, který podle našeho názoru umožňuje řešiteli postupně objevovat vlastnosti posloupností vyšších řádů (viz také Zhouf 2004, 2005a, 2005b, 2005c). Nepůjde tedy o popsání vlastností a jejich ilustrace. Úlohy jsou zpravidla na úrovni střední školy a lze je samozřejmě řešit i jinými metodami. Zde jsou však ukázána pouze ta řešení, která jsou založena na myšlence aritmetické posloupnosti vyšších řádů (i když se někdy může jednat o řešení podstatně složitější než řešení jinou metodou).

Příklad

Pojem aritmetické posloupnosti (dále AP) vyššího řádu vysvětlíme na příkladu[3] posloupnosti $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$ Je to aritmetická posloupnost 2. řádu (tedy AP2).

Rozdíly po sobě následujících členů této posloupnosti tvoří posloupnost $3, 5, 7, 9, \ldots$ Jedná se o aritmetickou posloupnost prvního řádu (tj. AP1).

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF

[2]*UK v Praze, PedF, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

[3]Vysokoškolské zavedení tohoto pojmu je možné najít např. v příspěvku Bittnerová (2005).

Konečně rozdíly po sobě následujících členů druhé posloupnosti tvoří konstantní posloupnost $2, 2, 2, \ldots$ Je to aritmetická posloupnost nultného řádu (tj. AP0).[4]

Lze dokázat (Zhouf 2005b, 2005c), že n-tý člen aritmetické posloupnosti k-tého řádu je polynom k-tého stupně, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0$ (viz následující tabulka).

AP0	konstanta A	$A - A = 0$
AP1	$a_n = An + B$, $A \neq 0$	$a_{n+1} - a_n =$polynom 0. stupně
AP2	$b_n = An^2 + Bn + C$, $A \neq 0$	$b_{n+1} - b_n =$polynom 1. stupně
AP3	$c_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$, $A \neq 0$	$c_{n+1} - c_n =$polynom 2. stupně
AP4	$d_n = An^4 + \cdots + E$, $A \neq 0$	$d_{n+1} - d_n =$polynom 3. stupně

Několik úloh na AP vyšších řádů

Úloha 1: Figurální čísla

- Najděte polynom vyjadřující n-té trojúhelníkové číslo: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$
- Najděte polynom vyjadřující n-té pětiúhelníkové číslo: $1, 5, 12, 22, 35, \ldots$
- Najděte polynom vyjadřující n-té čtyřstěnové číslo: $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$

Rada: Najděte nejdříve řád příslušné AP.

Řešení pro trojúhelníková čísla: Uvedená posloupnost je AP2, tedy její n-tý člen je polynom druhého stupně. Vyjádříme-li její první, druhý a třetí člen jako polynom druhého stupně, dostaneme soustavu rovnic

$$1 = A + B + C, 3 = 4A + 2B + C, 6 = 9A + 3B + C,$$

která má řešení $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$. Její n-tý člen má tedy vyjádření $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Stejným způsobem řešíme i zbylé dva úkoly v úloze 1. Výsledek pro pětiúhelníková čísla je $\frac{1}{2}n(3n-1)$ a pro čtyřstěnová čísla $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (zde se jedná o AP3, dostaneme tedy čtyři rovnice o čtyřech neznámých).

Úloha 2

Zjistěte počet všech oblastí, na něž rozdělí rovinu n přímek, kde každé dvě mají průsečík a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Použijte znalostí o aritmetických posloupnostech vyšších řádů.

Řešení: Experimentálně zjistíme počet oblastí pro několik přímek (viz následující tabulka).

[4] AP0 je ve středoškolské matematice počítán mezi AP1. V tomto příspěvku budeme tyto dva případy odlišovat.

počet přímek	1	2	3	4	5	6	...
počet oblastí	2	4	7	11	16	22	...

Jedná se o AP2, tedy pomocí výše uvedeného postupu získáme tři rovnice o třech neznámých

$$2 = A + B + C, 4 = 4A + 2B + C, 7 = 9A + 3B + C,$$

která má řešení $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$. Tedy počet oblastí pro n přímek je $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Úloha 3

Najděte počet všech oblastí, na něž rozdělí rovinu n kružnic, kde každé dvě mají dva různé průsečíky a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Použijte znalostí o aritmetických posloupnostech vyšších řádů.

Řešení: Experimentálně zjistíme počet oblastí pro několik kružnic (viz následující tabulka).

počet kružnic	1	2	3	4	...
počet oblastí	2	4	8	14	...

Jedná se o AP2, tedy pomocí výše uvedeného postupu získáme tři rovnice o třech neznámých

$$2 = A + B + C, 4 = 4A + 2B + C, 8 = 9A + 3B + C,$$

která má řešení $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Tedy počet oblastí pro n kružnic je $n^2 - n + 2$.

Následující úlohy se řeší podobně, uvádíme tedy jen výsledky.

Úloha 4

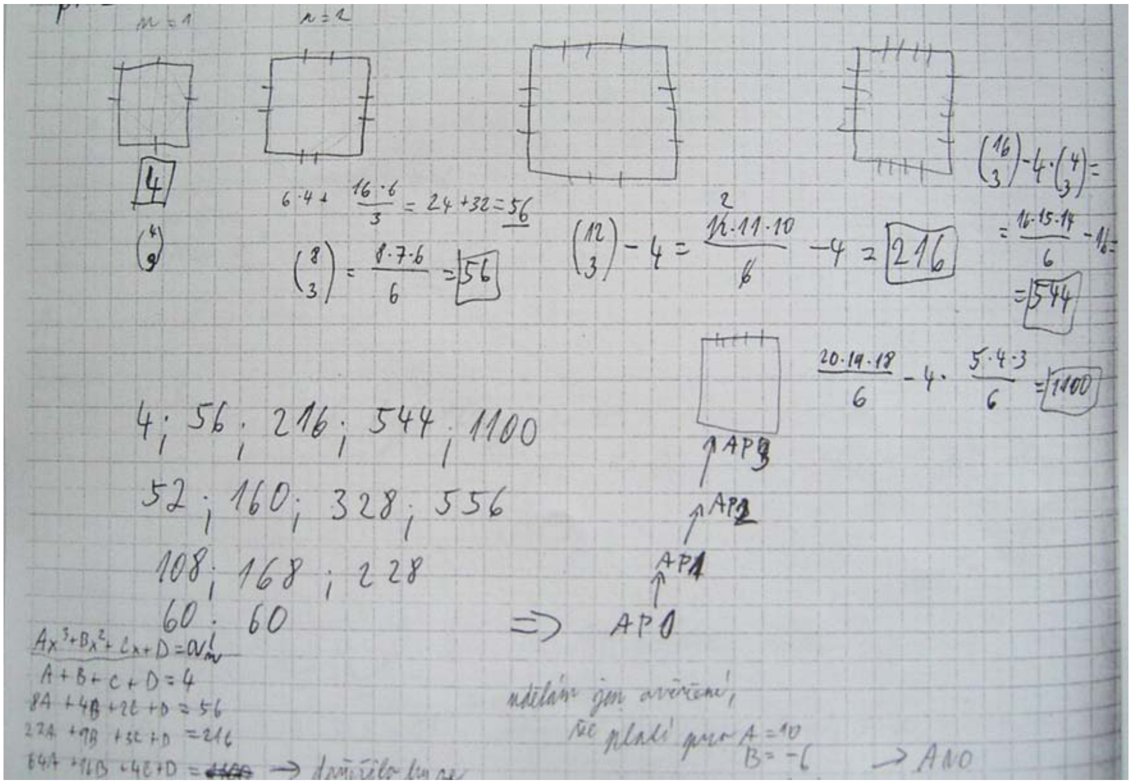
Najděte počet všech úhlopříček n-úhelníku, $n \geq 3$.

Výsledek: $\frac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 3$

Úloha 5

Uvnitř každé strany čtverce je zvoleno n různých bodů. Zjistěte počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

Komentář: Tato úloha je obtížná, protože posloupnost, k níž dospějeme, je AP3 (obr. 1 – řešení studentky Evy). K danému výsledku se pro $n \geq 3$ jednodušeji dospěje pomocí kombinačních čísel: $\binom{4n}{3} - 4\binom{n}{3}$.



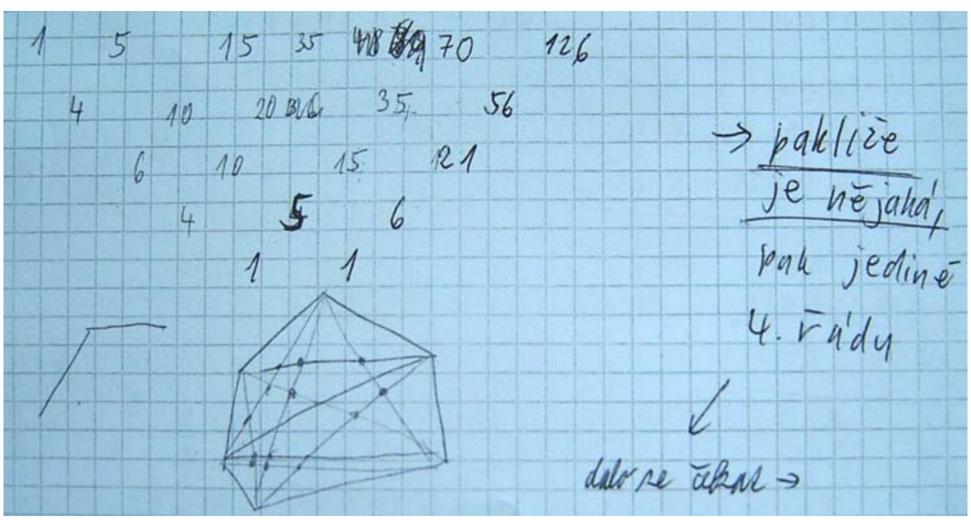
Obr. 1

Výsledek: $10n^3 - 6n^2$

Úloha 6

Zjistěte počet všech průsečíků úhlopříček n-úhelníku, kde žádné tři se neprotínají v jednom bodě, $n \geq 3$.

Komentář: Tato úloha je opět obtížná, jedná se o AP4 (na obr. 2 je část řešení Evy).



Obr. 2

Výsledek: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, $n \geq 3$

Úloha 7

(a) Ukažte, že součet s_n prvních n členů AP1 (a_n) je AP2. Zobecněte.
(b) Použijte tento fakt ke zjištění součtu s_n prvních n trojúhelníkových čísel.

Řešení: (a) $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$
Zobecnění plyne z faktu, že pro posloupnost (a_n) a součet s_n jejích prvních n členů platí $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$.

(b) Trojúhelníková čísla tvoří AP2, takže součet prvních n trojúhelníkových čísel je AP3:
$s_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D.$
Zjistíme posloupnost součtů s_1 až s_4 a dostaneme čtyři rovnice o čtyřech neznámých:

$$1 = A + B + C + D,\ 4 = 8A + 4B + 2C + D,\ 10 = 27A + 9B + 3C + D,$$
$$20 = 64A + 16B + 4C + D.$$

Jejím řešením je $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = 0$, a tedy $s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (což je současně n-té čtyřstěnové číslo).

Úloha 8

Najděte další příklady aritmetických posloupností vyšších řádů.

(Některé příklady je možné najít v článcích Zhouf (2004, 2005a).)

Úloha 9

V Pascalově trojúhelníku najděte trojúhelníková a čtyřstěnová čísla a aritmetické posloupnosti různých řádů.

Řešení: Řešení je v článku Zhouf (2004).

Úloha 10

Nadefinujte si nový trojúhelník pomocí stejného pravidla, jaké platí v Pascalově trojúhelníku, ale změňte čísla na jeho okrajích. Zkoumejte aritmetické posloupnosti, které vzniknou v novém trojúhelníku, a zjistěte výrazy pro jejich n-tý člen.

Řešení: Jedna z možností je uvedena v článku Zhouf (2004).

Další otázky

Zde uvedeme několik otázek a úkolů, které by se daly v souvislosti s AP vyšších řádů řešit často i na úrovni střední školy.

Je součet dvou AP1 opět AP1? Je součet dvou AP2 opět AP2? atd.
Je součin dvou AP1 opět AP1? Je součin dvou AP2 opět AP2? atd.
Máme-li dánu AP2, lze ji vždy rozložit na součin dvou AP1?

Zkoumejte AP vyšších řádů v oboru komplexních čísel.

Jak souvisí AP vyšších řádů s algebraickými rovnicemi?

Tvoří AP2 vzhledem k operaci sčítání nebo násobení grupu? atd.

Jak by se analogicky definovaly geometrické posloupnosti vyšších řádů?

Najděte obdobu Pascalova trojúhelníku, v němž se nacházejí geometrické posloupnosti vyšších řádů.

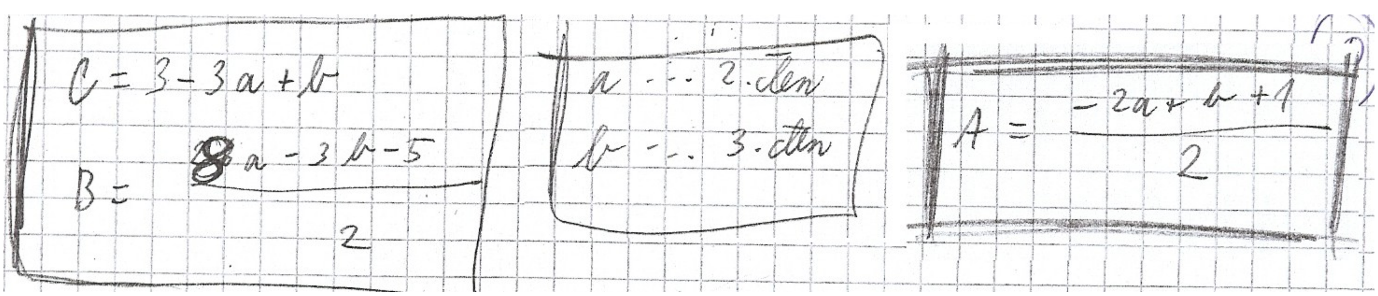
Případová studie

Výše uvedený sled úloh byl vyzkoušen se studentkou prvního ročníku učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školu, která na toto téma vypracovala seminární práci. Je to Eva, jejíž řešení jsme použili i v tomto článku.

Eva Patáková[5] je nadaná studentka, která se zajímá nejen o matematiku, ale i o vyučování matematice. V prvním ročníku svého studia na vysoké škole projevila zájem věnovat se i jiným tématům než jen povinným matematickým kurzům. Oba autoři tohoto článku jí tedy nabídli téma aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Eva ho začala zkoumat prostřednictvím úloh, které samostatně řešila doma. Svá řešení pak konzultovala na společných schůzkách s autory článku. Zde získala další náměty a otázky. V současné době pracuje na matematickém popisu svých zkoumání.

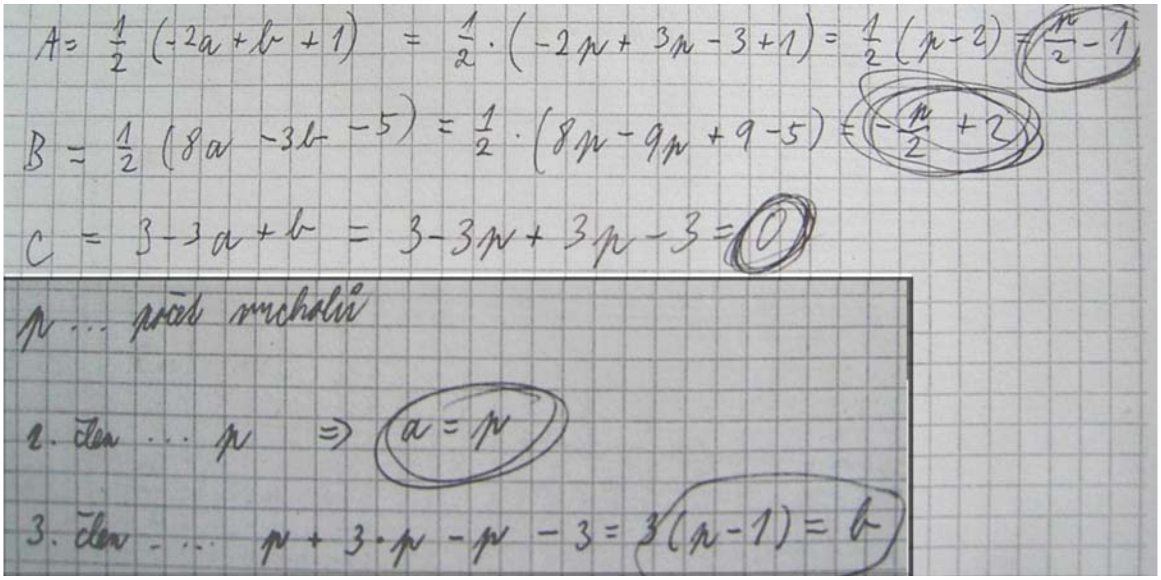
Eva nejen řešila předložené úlohy, ale též jejich řešení obohatila o své vlastní úvahy. Např. se snažila najít obecný návod, jak zjišťovat n-tý člen posloupností n-úhelníkových figurálních čísel. Nejdříve formulovala závěr, že „posloupnost jakýchkoli n-úhelníkových figurálních čísel je vždycky aritmetická posloupnost druhého řádu“, a posléze dospěla k jednoduchému obecnému vzorci, do něhož stačí pouze dosadit počet vrcholů n-úhelníku (obr. 3 a 4). Podobným způsobem zkoumala figurální čísla čtyřstěnová, osmistěnová a ikosaedrická.

Z oblasti vysokoškolské matematiky se Eva zabývá strukturálními vlastnostmi aritmetických posloupností vyšších řádů vzhledem k operaci sčítání a násobení a buduje vlastní „teorii“ geometrických posloupností vyšších řádů. Těmto tématům se podle našeho názoru zatím nikdo nevěnoval, jedná se tedy o původní příspěvek Evy.



Obr. 3

[5] Celé jméno uvádíme se souhlasem Evy.



Obr. 4

Shrnutí

Domníváme se, že by problematika aritmetických posloupností vyšších řádů mohla sloužit jako vhodný kontext pro samostatné zkoumání studentů střední školy (i studentů učitelství na VŠ). Při řešení výše uvedených a podobných úloh dochází k propojování znalostí z oblastí posloupností, soustav rovnic, úprav algebraických výrazů, polynomů, kombinatoriky a matematické indukce. Studenti mají možnost objevovat nové zajímavé souvislosti, aniž by museli nastudovat nějakou novou teorii.

Literatura

Bittnerová, D. (2005). Using arithmetic sequences or order s. In *Sborník abstraktů ICPM'05 (International Conference Presentation of Mathematics ‡05)*, Technická univerzita Liberec.

Zhouf, J. (2004). Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, aritmetické posloupnosti vyšších řádů. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2004*, Praha, PedF UK.

Zhouf, J. (2005a). Středoškolské úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů. In Zhouf, J., Hofmanová, P. (Eds.), *Sborník příspěvků z konference MAKOS 04*, Ústí nad Labem, UJEP.

Zhouf, J. (2005b). Úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů v české (československé) MO. In Zhouf, J. (Ed.), *Sborník příspěvků z druhé konference Ani jeden matematický talent nazmar*, PedF UK, Praha, 115-120.

Zhouf, J. (2005c). Aritmetická posloupnost druhého řádu. *Rozhledy matematicko fyzikální*, č. 3 (v tisku).

Otevřené hodiny

Třídní diskuse o geometrických objektech[1]

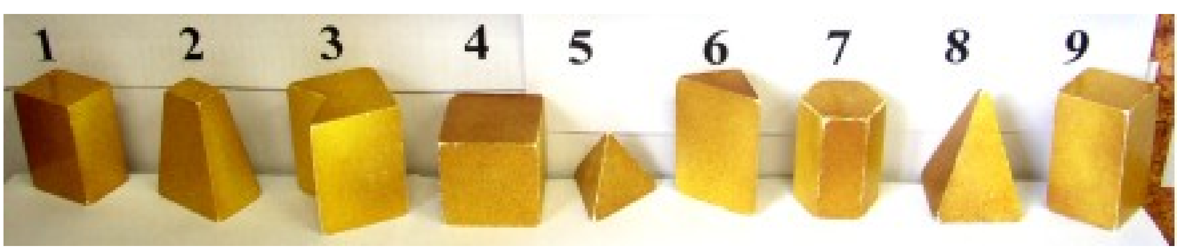
Milan Hejný, Darina Jirotková[2]

Otevřená hodina uskutečněná jako součást programu semináře Dva dny s didaktikou matematiky tematicky vycházela z jedné části (Unit 3D Geometry) projektu IIATM (Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics) programu Socrates-Comenius 2.1. Odehrála se v 5. ročníku ZŠ Uhelný trh, Praha 1. Vyučujícím byl M. Hejný, D. Jirotková asistovala. Cílem hodiny bylo vyvolat třídní diskusi o vlastnostech geometrických těles a její řízení učitelem. Uvedeme zde scénář, podle kterého se vyučovací hodina odehrála.

Scénář vyučovací hodiny

Žáci pracují rozděleni do 6 družstev A, B, C, D, E, F. Každé družstvo zvolí svého mluvčího. Každé družstvo má k dispozici barevnou fotografii souboru těles, která jsou též fyzicky přítomna na stole uprostřed třídy. Jsou to:

1. kvádr
2. komolý jehlan s obdélníkovou podstavou
3. nekonvexní 5-boký kolmý hranol
4. krychle
5. tetraedr
6. kolmý 3-boký hranol, podstava rovnoram. pravoúhlý trojúhelník
7. pravidelný 6-boký hranol
8. pravidelná 4-boký jehlan
9. pravidelný 4-boký hranol



Učitelé přítomní na otevřené hodině sedí u jednotlivých družstev. Dělají si poznámky o zajímavých jevech; o těch se bude diskutovat po hodině. Žákům do práce vůbec nezasahují, na otázky týkající se řešených úkolů odpovídají „nevím“. Hodina je koncipována jako soutěž družstev a kolegyně Matylda vede evidenci bodů jednotlivých družstev na tabuli.

[1]Otevřená hodina s následnou diskusí se konala s podporou projektu IIATM 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

[2]*PedF UK v Praze, milan.hejny@pedf.cuni.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

1. Část

Vyučující vysvětlí hru: „Já řeknu nějakou vlastnost tělesa a vy mezi těmito devíti tělesy najdete všechny, které tu vlastnost mají. Jejich čísla podle fotografie napíšete na lístek, který každé družstvo dostane. Například když řeknu, těleso má 8 vrcholů, která čísla napíšete na lístek?“ Očekávaná odpověď žáků je: „1, 2, 4, 9.“ Vyučující pokračuje: „Výborně. Za každé správně určené těleso získáváte 1 bod, za chybně určené ztrácíte 1/2 bodu. Budou položeny čtyři otázky, vysloveny čtyři vlastnosti a vy zapíšete čísla příslušných těles na lístky. Lístky pak vybereme a obodujeme.“ Družstva dostanou lístek tohoto tvaru:

Družstvo A.			
1. otázka:	2. otázka:	3. otázka:	4. otázka:

Vyučující položí čtyři otázky. Na každou otázku mají žáci asi 40 vteřin času.

Otázky:
Jaké těleso má
1. 4 vrcholy?
2. aspoň jednu stěnu 5-úhelník?
3. 5 stěn?
4. více než 12 hran?

Lístky od družstev jsou vybrány a vyučující vyzve mluvčí družstev A – F, aby postupně sdělili nejdříve svou odpověď na otázku 1. Průběžně se kontroluje, zda družstva odpovídají stejně jako písemně na lístku. Matylda zapisuje čísla do připravené tabulky na tabuli.

Družstvo	A	B	C	D	E	F
1. otázka						
2. otázka						
3. otázka						
4. otázka						
Úloha A						
Úloha B						

Celá třída vyslechne jednotlivá řešení a následuje debata o jejich správnosti, o chybách a jejich příčinách, o možnostech, co udělat, aby se příště podobné chybě vyhnulo. O přidělení bodů za jednotlivá řešení rozhodne celá třída. Body jsou nakonec vepsány do tabulky.

Obdobně probíhá kontrola a bodování odpovědí na otázky 2, 3 i 4. Pokud bude debata smysluplná, může se protáhnout i do konce hodiny. Je však nutné vyhlásit pořadí družstev.

2. Část – Úloha A

Vyučující vysvětlí další hru: „Teď každé družstvo samo vymyslí jednu podobnou otázku a napíše ji na šest připravených lístků.“

Otázku zadává družstvo A.
Řeší družstvo B

„Jeden z těchto lístků odevzdáte a na něm bude vaše řešení vaší úlohy. Ostatní lístky rozdáte soupeřům. Pak každé družstvo řeší úlohy soupeřů. Výsledek zapíše vždy na příslušné lístky.“

Hodnocení bude následující:

- Za nekorektní otázku družstvo nezíská žádné body a každé jiné družstvo získá 1 bod.
- Za korektní otázku družstvo získá 4 body.
- Za její správné řešení získá 2 body a za její chybné řešení žádný bod.
- Za řešení otázky jiného družstva dostává družstvo tolik bodů, jako tomu bylo u otázek 1 – 4.

Na napsání otázky mají družstva 3 minuty. Na vyřešení pěti otázek pak má každé družstvo 5 minut. Časy mohou být upraveny podle okolností. Pak družstva odevzdají lístky.

Následuje hodnocení všech šesti otázek takto:

1. Mluvčí družstva přečte otázku.
2. Vyučující vyzve třídu k posouzení korektnosti a toto se diskutuje.
3. Je-li otázka nekorektní, zapíše Matylda příslušné body do tabulky. Je-li otázka korektní, pokračuje se hodnocením odpovědí. Matylda zapisuje výsledky do tabulky.

3. Část – Úloha B

Vyučující: „A teď obráceně. Já z těles vyberu nějakou skupinu a vaším úkolem je napsat vlastnost, která tuto skupinu charakterizuje. Například, když skupina bude složena z těles 5, 6 a 8, jak bude znít vaše odpověď?“ Žáci odpovídají například: „Má trojúhelníkovou stěnu.“

Není vyloučeno, že se zde objeví zajímavé myšlenky, jejichž diskuse si vyžádá dost času. Bude-li čas, bude se v obdobných úlohách pokračovat. Družstva píší svoje odpovědi na volné papíry. Na každém papíru musí být uvedeno písmeno družstva.

Při těchto úlohách je třeba neopakovat seskupení těles, které již některé družstvo dalo v předcházející části. Připravené jsou proto skupiny těles z tab. 1. Poslední dvě jsou velice náročné.

Úlohy, které se nestihnou dokončit nebo probrat, jsou zadány jako úlohy pro dobrovolníky.

Ukázky žákovských řešení

Uvedeme zde žákovská řešení úloh, z nichž některá byla východiskem bohaté diskuse. Správnost řešení ponecháme k posouzení čtenáři a rovněž tak úvahy o možných příčinách „chybných“ odpovědí. Zdánlivě chybné odpovědi vypovídají o tom, jak si žáci daný pojem představují, o jejich životních zkušenostech, o tom, do jaké míry jsou již schopni oddělit geometrický svět od reálného. Při našich úvahách je užitečné řídit se otázkou: *V jakém kontextu žák asi přemýšlí, jestliže je jeho odpověď smysluplná?* Velmi doporučujeme učitelům dělat si evidenci o vlastnostech těles, které jsou pro žáka dominantní, a evidenci toho, jak danou vlastnost žáci vyjadřují. Pro nás je například úplně nová zkušenost, jak žáci družstva A v úloze A vyjádřili nekonvexnost tělesa. Podle odpovědí ostatních družstev je zřejmé, že formulace vlastnosti byla pro žáky zcela srozumitelná. Je škoda, že družstva nestihla zpracovat otázku družstva F. Domníváme se, že žáci družstva F byli zaměřeni na komolý jehlan. Důsledně vzato, mělo by se však jednat o čtyřboký jehlan.

skupina	**tělesa**	**možná charakteristická vlastnost**
1	1, 4, 6, 9	má aspoň jednu stěnu čtvercovou
2	5, 8	nemá žádné dvě stěny rovnoběžné
3	3, 6, 8	má lichý počet stěn
4	1, 7	má 6 obdélníkových stěn
5	1, 4, 9	má pouze pravoúhelníkové stěny
6	2, 5, 8	má hranu, že žádná jiná hrana tělesa s ní není rovnoběžná
7	3, 7	má aspoň 5 navzájem rovnoběžných hran
8	5, 6, 8	má méně než 10 hran
9	2, 3, 5, 6, 8	nemá střed souměrnosti
10	2, 3, 6, 8	má právě dvě roviny souměrnosti

Tab. 1

Čtenářům budeme vděčni za jejich názory, komentáře, úvahy či vysvětlení podepřené vlastními zkušenostmi.

Otázky: Jaké těleso má |Družstvo	A	B	C	D	E	F
1. 4 vrcholy?	5	5	1	4	5	5
2. aspoň jednu stěnu 5-úhelník?	6	3	3	7, 3	3	3
3. 5 stěn?	8, 6	8, 6	6, 2	3	8, 6	4
4. více než 12 hran?	7	3, 7	7	7, 3	7, 3	7

Úloha A

Otázky a odpovědi jsou na obr. 1. Na některé otázky již družstva nestihla odpovědět, rovněž tak neproběhlo hodnocení této úlohy. Úloha B nebyla při hodině řešena z časových důvodů.

Diskuse

Místo popisu diskuse, která proběhla jak ve třídě se žáky, tak po vyučování s přítomnými učiteli, přivedeme několika otázkami čtenáře k jeho vnitřnímu dialogu.

Otázky zadané družstvem / Odpověď družstva	A	B	C	D	E	F
A: *Najdi obrazec, který může stát na hraně.*	**3**	3	-	3	3	-
B: *Které těleso má každou stranu trojúhelníkovou?*		**5**		5		
C: *Napište všechny tělesa která mají protilehlé strany.*	-	1,9,4,6, 7,3,2	**1-4, 6-9**	1,4, 7,9	1-4, 6,7,9	-
D: *Jaká tělesa mají 5 stěn.*	6,8	6	-	**6,8**	8,6	-
E: *Které těleso má právě 8 hran?*	8			8	**8**	
F: *Jaké těleso má po useknutí VRCHOLU 12 hran?*						

Obr. 1 (Otázky jsou přepsány tak, jak je žáci napsali, tedy i s chybami.)

- Jaká je představa žáků skupiny C a D o pojmu vrchol?
- Jakými úlohami byste přivedli tyto žáky k dobré představě o tomto pojmu?
- Mají žáci skupiny F dobrou představu o pojmu vrchol?
- Jak byste pracovali s těmito žáky, abyste jejich představu upřesnili?
- Jaká je představa žáků skupiny D o pojmu pětiúhelník?
- V jakém významu použili žáci skupiny B a C slovo strana?
- Jak byste přeformulovali srozumitelněji otázku skupiny C v úloze A?
- Jak se liší interpretace této otázky u jednotlivých skupin?
- Které pojmy byly kterými skupinami použity ve správném významu?
- Pokuste se vysvětlit, proč se pletou pojmy strana a stěna?
- Znáte jiné dva pojmy, které se pletou? (Např. vlevo – vpravo) Zkuste najít příčinu, proč se pletou.
- Je možné definovat nekonvexní těleso vlastností, kterou použila skupina A? „Těleso je nekonvexní právě tehdy, když může stát na hraně.“ Pokuste se najít příklad i protipříklad.
- Kteří žáci se zmínili o nějakých vazbách mezi průvodními jevy (atributy) tělesa? Jaké to jsou průvodní jevy a k jakému tělesu se váží?
- Jakým způsobem vnímají žáci skupiny F komolost tělesa?
- Jaká je představa žáků skupiny D a F o pojmu stěna?
- Jak byste tuto představu upřesnili?
- Pokuste se najít původ této představy.
- Formulujte další otázky pro své kolegy.

Věříme, že takovýto vnitřní dialog, byť některé otázky zůstanou otevřeny, je přínosnější než pasivní čtení o čísi diskusi a přejímání cizích názorů.

Literatura

Jirotková, D. (2004.) Hra Sova a její využití v přípravě učitelů 1. stupně základní školy. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. PedF UK Praha, 247–268.

Jízdní grafy[1]

Miroslav Hricz[2]

Budování pojmu závislost (funkce) musí být vzhledem k jeho vývoji v dějinách matematiky dlouhé. V propedeutice tohoto pojmu využíváme každodenních zkušeností žáků. Klademe důraz na posilování vazeb mezi reálnými situacemi, které popisujeme, a závislostí (funkcí) – nástrojem k modelování těchto situací.

Využití jízdních grafů má propedeutický charakter pro studium závislostí dráhy na čase, případně rychlosti na čase ve vyučování fyzice. Jízdní graf však není znázorněním trajektorie pohybujícího se tělesa a není to obecně totéž, co graf závislosti dráhy na čase.

Ve svém příspěvku popíši průběh otevřené hodiny v 6. třídě, která proběhla jako otevřená hodina v rámci semináře Dva dny s didaktikou matematiky (11.2.2005). Byla zaměřena na jízdní grafy.

Otevřené hodině předcházela diskuse: „Co si představuji, když se řekne jízdní graf?“

Žáci uváděli následující odpovědi:

- na přímce vyznačíme počet ujetých kilometrů,
- kruhový diagram – vyznačuje, kolik už je ujeto,
- porovnání pomocí obdélníků – 3 vozidla,
- křivka zachycující dráhu auta,
- vyznačení trasy na mapě.

Byl vyvozen důležitý závěr, že se jízdní grafy týkají pohybu. Zároveň byl uveden jeden příklad jízdního grafu.

[1]Realizováno v rámci projektu IIATM – Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics, Socrates – Comenius 2.1, 112218-CP-1-2003-1-CZ-COMENIUS-C21.

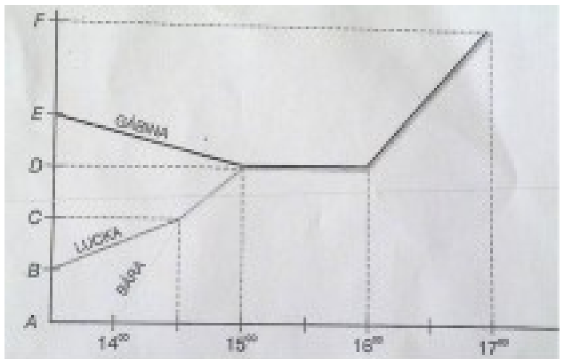
[2]*ZŠ U Santošky 1, Praha 5, www.santoska.cz, miroslav.hricz@santoska.cz*

Otevřená hodina

Cílem první části hodiny bylo upevňování schopnosti komunikovat ve dvojici, prezentovat výsledky, argumentovat, cílem druhé části hodiny byl nácvik rýsování grafu, v dalších hodinách byl kladen důraz na důležitost kvalitního a přesného rýsování.

Popis jízdního grafu

Žáci měli za úkol popsat graf z [1] str. 73, cvičení 408 (obr. 1).



Obr. 1

Žáci pracovali v 9 skupinách (dvě trojice a sedm dvojic). Pro žáky nebyl problém popsat graf, zcela záměrně nebyla tvrzení komentována. Při prezentaci vznikla zajímavá diskuse.

Žákovská řešení zachycuje tabulka:

Poznámka: Jedná se o autentický přepis žákovských řešení, včetně chyb.

Skupina 1	čas, 3 osoby, všichni jdou do stejného bodu,sešli se Lucka + Bára D = se sešli všichni, jména osob, šli do bodu F 6 bodů, 2 hodiny šli spolu, Bára vyšla z bodu A, Bára ve 14:00 h., Lucka z bodu B, Gábina bod E, Lucka + Bára = 14:30 h. se sešli, v 15:00 jdou spolu, do bodu F dorazili v 17:00h.
Skupina 2	Byly tři dívky, Bára, Lucka a Gábina. Nejdřív šli Bára a Lucka společně a potom se sešli s Gábinou v 15 hodin.
Skupina 3	Čas, Gábina a Lucka vycházejí ve stejný čas, body odkud vycházejí, Bára vychází o půl hodiny později, Lucka a Bára se ve 14:30 sešli a šli půl hodiny spolu, v 15:00 hod. se Lucka s Bárou a Gábinou sešli, do 17:00 hodin šli spolu
Skupina 4	Gábina ve 13:00 byla v bodu E a do bodu F dorazila v 17:00, do bodu D dorazila v 15:00 hodin. Lucka byla v bodu B také ve 13:00 a v bodu C byla ve 14:30 do bodu D dorazila taky v 15:00 a do bodu F se dostavila v 17:00. Bára byla v bodu a . . . (nestihli)

Skupina 5	Jsou 3 dívky. Gábina a Lucka jeli ve stejný čas. Bára s Luckou se setkali v bodě C ve 14:00. Všechny 3 dívky se setkali v bodě D v 15:00. Dívky byly 15:00 – 16:00 v bodu D, Všechny dívky dojeli do bodu F v 17:00. Dívky byly spolu od 15:00 do 17:00, Gábina a Lucka v . . . (nestihli)
Skupina 6	3 dívky, 6 prvních písmen v abecedě, 3 barvy, vzdálenost mezi dívkami, časy 14:00, 14:30, 15:00, 15:30, 16:00, 16:30, 17:00
Skupina 7	Z grafu se dá vyčíst, že Bára vyběhla ve 14:00 a sešla se s Luckou ve 14:30 h. Z grafu se dá vyčíst, kdo se v jakou hodinu setkal s přítelem. Také se dá vyčíst, že všechny tři dívky došly do cíle v 17:00 h. Také se dá vyčíst, že Bára se setkala s Luckou v 14:30 hod. Potom střetli s Gábinou v 15:00. Všechny tři se sešli v 15:00 hodin. Gábina a Lucka vyšly v 13:30 h. a Bára ve 14:00 hod.
Skupina 8	Gábina vycházela z bodu E a Lucka z bodu B. Nejdřív vyšli Gábina a Lucka (13:30). Po nich Bára (14:00). Lucka a Bára se sešli ve 14:30 na bodu (polopřímce) C. Všichni se sešli v 15 hodin na bodu (polopřímce) D. Šli (jeli) společně do 17:00 hod. až dokonce až na bod (polopřímku) F
Skupina 9	Jízda na kole G – bod E – jela sama L + B – bod B – 14:30 sami, každá zvlášť, ve 14:30 se sešli a od 14:30 – 15:00 jeli L a B společně V 15:00 se G, L a B sešli a měli od 15:00 – 16:00 pauzu od 16:00 jeli GLB společně až do 17:00

Na otázku „Jak se vám pracovalo?“ odpověděli takto:

- dobře – několikrát, normálně
- žádné problémy, domluvili jsme se. . .
- občas jsme neměli stejnej názor, ale nakonec jsme se domluvili
- my jsme se hádali, co mohly dělat, a pak už jsme se dohodli
- mně se pracovalo líp, než když jsme v pěti, protože ve dvou se líp dohodnem

Rýsování jízdního grafu

Zadání pro žáky bylo následující: „Narýsujte jízdní graf parníku, který pluje z jednoho místa do druhého jednu hodinu a má 20 minut přestávku.“

Práce žáků byla zachycena na videonahrávce, uvádím pouze některé postřehy:

- dva chlapci se hádali, kolik hodin má trvat jízda, zda jednu hodinu či zda se jednalo o několik hodinových jízd,
- dva chlapci rýsovali pomocí velkého trojúhelníka na tabuli,
- několik skupin rýsovalo správně, chyby se objevovaly v použití plných a čárkovaných čar.

V následující hodině proběhl rozbor popisu grafů a narýsovaných grafů.

Rozbor popisu grafů

- žáci diskutovali o tom, jak by se dala upřesnit páteční vyjádření (co lze vyčíst z grafu);
- došlo k ujasnění, jak z grafu poznáme zastávku, pohyb. . . ;
- znovu bylo zdůrazněno, že i když se dívky pohybovaly z místa C do místa D, nemusely být spolu;
- z výše uvedeného bylo vyvozeno, že totéž může platit pro pobyt dívek v místě D a pohyb z místa D do místa E;
- žáci se shodli na tom, že vlastně nevěděli, co mají psát (jak hodně podrobně);
- jeden žák až dnes pochopil (navzdory tomu, co v pátek tvrdil) to, co se mu spolužáci snažili minulou hodinu vysvětlit.

Popis narýsovaných grafů

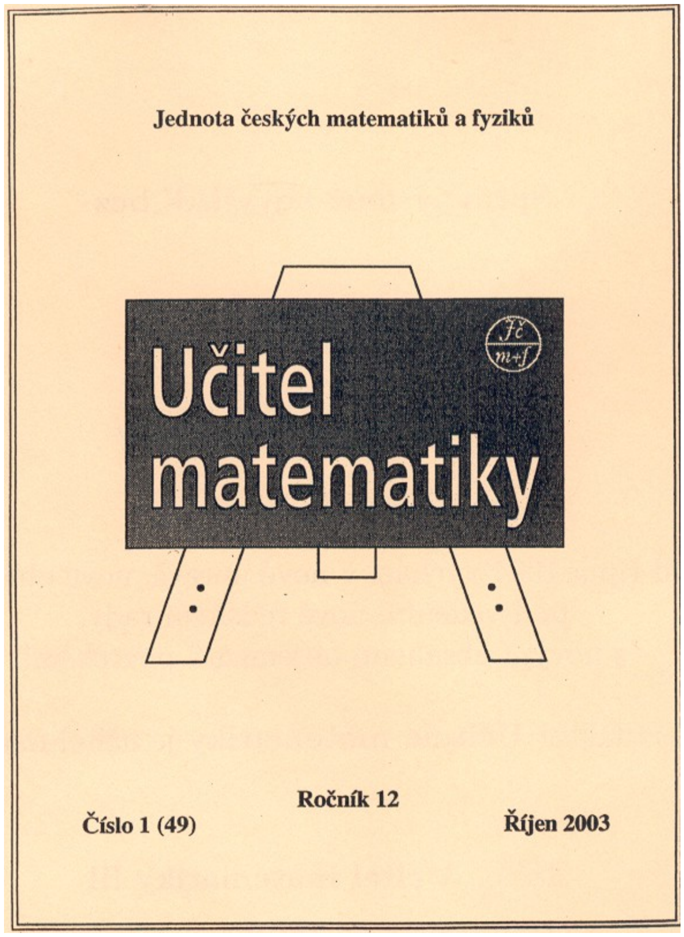
- žáci se dožadovali, aby učitel sdělil, co bylo správně:
  1. doba jízdy 1 hodina + 20 minut přestávky (celkem 80 minut),
  2. doba jízdy + přestávka (celkem 60 minut);
- jeden žák připouští, že se mýlil;
- žáci se shodli na tom, že při rýsování grafů byl i časový problém, odůvodňovali tím i náčrtky grafů;
- někteří žáci říkali, že by to udělali jinak – evidentní vliv toho, co říkali ostatní (týkalo se i těch, kteří postupovali správně).

Jízdní grafy umožňují budovat v žákově poznatkové struktuře představu o grafu funkce jako důležitém zdroji informací o vlastnostech dané funkce. Jízdní grafy používané v 6. ročníku graficky popisují závislost dráhy na čase, výjimečně popisují závislost rychlosti na čase. Ve vyšších ročnících je možné je využít k popisu dalších závislostí.

Literatura

[1] Novotná, J. a kol. (1996). *Matematika s Betkou 1, učebnice matematiky pro 6. ročník*. Scientia, Praha.

[2] Novotná, J. a kol. (1995). *Matematika s Betkou 1, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 6. ročník*. Scientia, Praha.



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 14. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Cena jednoho čísla je 30,- Kč, roční předplatné za čtyři čísla činí 110,- Kč.

Zájemci o odběr časopisu mohou napsat na adresu:

Redakce Učitele matematiky
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno

nebo poslat e-mail na adresu: ucmat@math.muni.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý   Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Sborník příspěvků semináře Dva dny s didaktikou matematiky

Praha, 10.–11. 2. 2005

Organizátor: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Matematická pedagogická sekce JČMF

Organizační a programový výbor: Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editoři: Darina Jirotková, Naďa Stehlíková
Sazba: Naďa Stehlíková, systémem LaTeX
Počet stran: 130
Vydala: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a Matematická pedagogická sekce JČMF, v roce 2005

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN 80-7290-223-7