Dva dny
s
didaktikou matematiky
2004

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Praha, 12.–13. 2. 2004

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Matematická pedagogická sekce JČMF

Programový a organizační výbor:

Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editor:

Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)
Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje doktorandům za pomoc při organizaci semináře.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vydání sborníku bylo podpořeno grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

Vyšlo v prosinci 2004 — Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN 80-7290-173-7

Obsah

Úvod 5

Jednání v sekcích **7**

D. Juhasová: Projekt „Rok hudby v matematice“ 7
B. Missbachová: Projekty – možno sa inšpirujete 12
J. Tenkrátová, L. Šára: Matematika s Přemyslem Otakarem II. 14
R. Ujháziová: Skúmanie v školskej matematike 21
M. Ulrychová: Pythagorova věta 25
J. Zhouf: Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, aritmetické posloupnosti vyšších řádů 31

Pracovní dílny **43**

P. Eisenmann: Proč není $0,\overline{9} < 1$? 43
J. Herman, M. Prokopová: MATE vás teMATIKA? 48
M. Hricz: Algebraické výrazy 8. ročníku ZŠ 55
L. Ilucová: Parketáže, kachličky, mozaiky a geometria 58
M. Kaslová: Písmena v matematice na prvním stupni 63
F. Kuřina: Problémy a omyly našeho školství 72
J. Molnár: Metody řazení do hodin matematiky? 76
J. Petrová: Nebojme se pravděpodobnosti 78
J. Přibyl: Hranové modely platonských těles 82
F. Roubíček: Geometrické etudy 94

Další příspěvky **101**

M. Kaslová: Žák vstupující do školy 101
M. Major: Některé typy chyb studentů při řešení úloh z počtu pravděpodobnosti 105
E. Opravilová: Předškolní výchova v současnosti 111
N. Stehlíková: Odvození analytického vyjádření podobného zobrazení 114

Časopis Učitel matematiky **121**

Úvod

Ve dnech 12. 2.-13. 2. 2004 uspořádala katedra matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze spolu s matematickou pedagogickou sekcí JČMF již osmý ročník celostátního semináře pro učitele základních a středních škol Dva dny s didaktikou matematiky.

Semináře se zúčastnilo 60 učitelů z celé České republiky a také ze Slovenska. Jednu ze dvou hlavních přednášek proslovila dr. Pešová na téma Rétorika, druhou doc. Bečvář, který hovořil na téma Jak počítali naši předkové. Obě přednášky byly velmi dobře přijaty.

Program dále sestával z prezentací v sekcích a pracovních dílen, které tradičně tvoří hlavní součást semináře. Letos měli účastníci možnost vybírat celkem ze 13 pracovních dílen na různá témata. Jsme velmi rády, že řadu z nich vedli přímo učitelé z praxe.

V pátek dopoledne proběhly otevřené hodiny na čtyřech základních a jedné střední škole. Na otevřené hodiny navazovaly časově i tématicky pracovní dílny.

V pátek odpoledne měli učitelé možnost vyjádřit se k některým aktuálním otázkám v rámci diskusí u kulatých stolů. Tentokrát je vedli dr. Hrubý (problematika začínajících učitelů), doc. Opravilová (přechod mezi mateřskou a základní školou) a doc. Slavík (hodnocení).

Seznam prezentací v sekcích a dílnách stejně jako fotografie z průběhu akce je možné nalézt na webovských stránkách KMDM PedF UK: `www.pedf.cuni.cz/kmdm/`. Některé příspěvky ze semináře vám předkládáme v tomto sborníku.

Příští ročník se uskuteční jako již tradičně v polovině února 2005.

Za programový a organizační výbor

Marie Kubínová, Darina Jirotková, Michaela Kaslová, Naďa Stehlíková

Jednání v sekcích

Projekt „Rok hudby v matematice“

Dagmar Juhasová[1]

Téma „Rok hudby v matematice“ jsem zvolila proto, že UNESCO vyhlásilo rok 2004 rokem hudby (předcházející rok byl rokem vody, rok 2005 má být rokem fyziky).

Naše škola – Osmileté gymnázium v Mladé Boleslavi – chystá na středu před Velikonocemi (7. dubna 2004) projektový den zaměřený na českou hudbu. Vzhledem ke svým aprobačním předmětům se spolupodílím na přípravě částí „Hudba a matematika“ a „Hudba a počítače“.

Do matematiky jsem vyhledala nebo vymyslela tyto typy úloh:

1. **Muzikantské počty** – sčítání, odčítání a násobení počtů křížků nebo béček u jednotlivých durových a mollových stupnic. Např. Je správná rovnost $A + B = c \cdot D - e$? (Pro studenty, kteří nejsou sběhlí v hudební nauce, jsem připravila tabulku počtů křížků a béček jednotlivých stupnic, aby i pro ně byly tyto úlohy řešitelné.)

2. **Klaviatura** – začneme-li u f, lze rozdělit na klávesách klavíru měsíce na ty, které mají 31 dní (bílé) a měsíce s jiným počtem dnů (černé). Pokud C_1= říjen 2003, který měsíc a rok bude odpovídat C_5?

3. **Včera neděle byla** – několik úkolů k písni dvou slavných Jiří.

4. **Souřadnice** – hudební nástroje, tj. poznávání druhů nástrojů ze schematických obrázků nakreslených ve čtvercové síti.

5. **Klasikové** – úlohy s využitím let narození a úmrtí klasiků české hudby.

6. **Pop** – úkoly související s daty narození a znameními současných interpretů populární hudby.

Pokud by studenti vyřešili tyto úlohy a zbýval čas do přesunu na jiné pracoviště (např. „Hudba a fyzika“), plánuji jej zaplnit **Vennovými diagramy** s hudební tematikou – např. ve třídě je 26 žáků, jen dva z nich nehrají na žádný z nástrojů kytara, flétna a klavír . . .

Předem děkuji za jakékoli další náměty, které mi budete ochotni zaslat mailem na juhasova@g8mb.cz nebo poštou na adresu PhDr. Dagmar Juhasová, Gymnázium, Palackého 191/1, 293 01 Mladá Boleslav.

[1] *Gymnázium Palackého, Mladá Boleslav, juhasova@g8mb.cz*

Muzikantské počty

Žáci ví, že durové stupnice se zapisují velkými a mollové malými písmeny. Žáci sčítají, odčítají, násobí posuvky stupnic bez ohledu na křížky či béčka.

Např. $E + d = 5$

Úkoly: Z uvedených rovností vyber ty, které jsou správné.

1) $A + B = c + F$
2) $A \cdot B = c \cdot D$
3) $A + B = c \cdot D - e$
4) $A \cdot A + c = d + E + f$
5) $A + B \cdot c + d = e + f + g$
6) $A \cdot B - c + d = E - f - G + H$

Řešení:

1) Ne: $3 + 2 > 3 + 1$
2) Ano: $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2$
3) Ano: $3 + 2 = 3 \cdot 2 - 1$
4) Ne: $3 \cdot 3 + 3 > 1 + 4 + 4$
5) Ne: $3 + (2 \cdot 3) + 1 > 1 + 4 + 2$
6) Ano: $3 \cdot 2 - 3 + 1 = 4 - 4 - 1 + 5$

Zdroj: Internet www.webpark.cz/HUDEBNÍNAUKA.

Příloha k úloze muzikantské počty

Počty křížků u durových a mollových stupnic

Durové stupnice		**Mollové stupnice**	
C-dur	0 #	a-moll	0 #
G-dur	1 #	e-moll	1 #
D-dur	2 #	h-moll	2 #
A-dur	3 #	fis-moll	3 #
E-dur	4 #	cis-moll	4 #
H-dur	5 #	gis-moll	5 #
Fis-dur	6 #	dis-moll	6 #
Cis-dur	7 #	ais-moll	7 #

Počty béček u durových a mollových stupnic

Durové stupnice		**Mollové stupnice**	
F-dur	1 b	d-moll	1 b
B-dur	2 b	g-moll	2 b
Es-dur	3 b	c-moll	3 b
As-dur	4 b	f-moll	4 b
Des-dur	5 b	b-moll	5 b

HGes-dur	6 b	es-moll	6 b
Ces-dur	7 b	as-moll	7 b

Klaviatura

Na Kačenčině klavíru je 52 bílých a 36 černých kláves.

Jestliže Katka položí prst na šestou bílou klávesu zleva (velké F_1), může odpočítávat měsíce, které mají 31 dní, na bílých klávesách a ostatní měsíce na černých.

Vyzkoušejte u klavíru (od f do e = od ledna do prosince).

Pokud C_1=říjen 2003, který měsíc a rok bude odpovídat poslední klávese vpravo (malé c_5)?

Řešení: c_5 = srpen 2010

Zdroj nápadu: Mgr. Dagmar Brůžková, Gymnázium Mnichovo Hradiště

Včera neděle byla

Interpret/autor: Jiří Suchý + Jiří Šlitr

```
                 C                     G7
1. Včera neděle byla, včera byl hezký čas,
                                     C
   včera neděle byla, za týden bude zas.
2. Nikdy bych nevěřila, že se to může stát,
   včera neděle byla, řekl, že mě má rád.
    C      C7       F                    C
R: Poslal mi úsměv letmý, tolik nesmělý byl,
                     G7                  C
   počkal si, až se setmí, a pak mě políbil,
          C7         F                    C
   láska celý svět změní, všechno je jinačí,
                 G7                  C
   zima studená není, tvrdá mez netlačí.
3.=1.
```

Úkoly:

1) Pokud by tuto píseň zpívala nějaká dívka letos druhé lednové pondělí,

a) kolik různých číslic by potřebovala, kdyby si chtěla poznamenat datum (den a měsíc) dne, jehož průběh je popisován v písni?

b) O kolik číslic by potřebovala více, kdyby se rozhodla zapsat i rok?

Řešení:

a) neděle 11.1., vystačila by s jedinou číslicí

b) 2004 – navíc 0,2,4, tj. další tři různé číslice.

2) Kolikrát byste museli přehmátnout na jiný akord, kdybyste tuto píseň chtěli zahrát na kytaru?

Řešení: Šestnáctkrát.

Naši klasikové

Josef Mysliveček	1737–1781
Bedřich Smetana	1824–1884
Antonín Dvořák	1841–1904
Zdeněk Fibich	1850–1900
Leoš Janáček	1854–1928
Josef Bohuslav Foerster	1859–1951
Vítězslav Novák	1870–1949
Josef Suk	1874–1935
Bohuslav Martinů	1890–1959

Úkoly:

1) Kdo z nich žil nejvíce a kdo nejméně let?

2) Kolik z nich žilo déle než Leoš Janáček?

3) Bedřich Smetana ztratil ve svých 50 letech sluch. Ve kterém roce to bylo a jakou část života prožil v hluchotě?

4) Antonín Dvořák byl tchánem Josefa Suka. O kolik let byl jeho zeť mladší? Který z nich se dožil vyššího věku?

Zdroj dat: Jiří Pilka: *Odznak odbornosti – hudebník*, nakladatelství Mladá fronta, Praha 1984.

Pop

Daniel Bárta	14. prosince 1969	Střelec
Iveta Bartošová	8. dubna 1966	Skopec
Bára Basiková	17. února 1963	Vodnář
Marcela Březinová	18. listopadu 1960	Štír
Karel Gott	14. července 1939	Rak
Marcela Holanová	10. června 1951	Blíženec
Zora Jandová	6. září 1958	Panna
Bohouš Josef	3. února 1962	Vodnář
Jiří Korn	17. května 1954	Býk
LuciANNA Krecarová	4. ledna 1965	Kozoroh
Marta Kubišová	1. listopadu 1942	Štír
Josef Laufer	11. srpna 1939	Lev
Janek Ledecký	27. července 1962	Lev
Věra Martinová	2. února 1962	Vodnář
Zuzana Navarová	18. června 1959	Blíženec
Eva Pilarová	9. srpna 1939	Lev
Oldřich Říha	18. května 1948	Býk
Lešek Semelka	24. listopadu 1946	Střelec

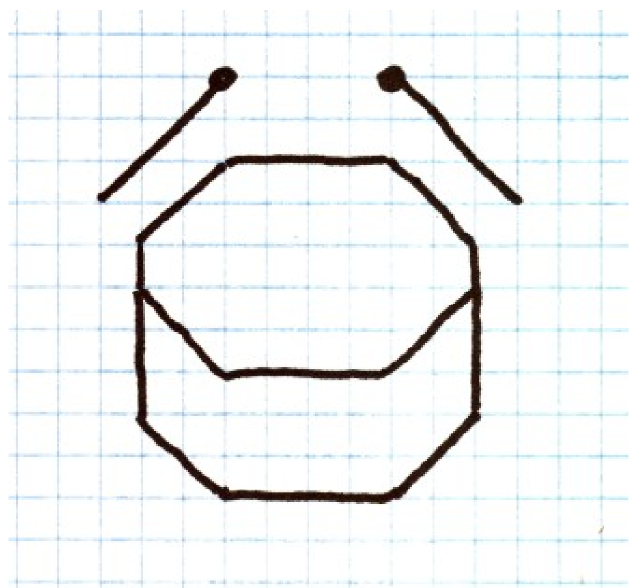
Kamil Střihavka	20. ledna 1965	Kozoroh
Helena Vondráčková	24. června 1947	Rak
Lucie Vondráčková	8. března 1980	Ryba
Hana Zaňáková = = Lucie Bílá	7. dubna 1966	Skopec

Úkoly:

1) Která znamení mají četnost větší než 1?
2) Kdo již oslavil abrahámoviny (50. narozeniny)?

Zdroj dat: Hanka Kousalová, Martin Hrdinka: *Zatím tajné*. Nakladatelství X-EGEM, Praha 1995.

Souřadnice – Hudební nástroje



1) Poznáte, který hudební nástroj vznikne, spojíte-li úsečkami body o souřadnicích (5,2) a (9,2), (3,4) a (5,2), (9,2) a (11,4),. . .

Zdroj nápadu: Časopis *KVANT* (ruské vydání), číslo 6, ročník 1979 – jsou tam na čtvercové síti schematické obrázky zvířátek.

2) Varianta bez souřadnic: Petr měl v batohu dřevěné tyčky a provázky. Pomocí tohoto vybavení se rozhodl znázornit hudební nástroje. Nejprve zapíchl tyčku do písku, přivázal k ní provázek a s klubkem v ruce udělal 4 kroky doprava (4k→), zastavil, zastrčil druhou tyčku a přivázal provázek i k ní. Pak udělal 2 kroky dopředu a 2 doprava (2k↑ a 2k→), zastrčil třetí tyčku a přivázal provázek . . .

Zdroj nápadu: Mgr. Dagmar Brůžková, Mgr. Jana Hanušová, Gymnázium Mnichovo Hradiště.

Projekty – možno sa inšpirujete

Barunka Missbachová[1]

> „Začiatkom a koncom našej didaktiky nech je: hľadať a nachádzať spôsob, podľa ktorého by učitelia menej učili, ale žiaci sa viac naučili; aby bolo v školách menej zhonu, nechutí a márnej práce, no viac voľného času, potešenia a zaručeného úspechu.“
>
> Ján Ámos Komenský

Projekt je pojem, ktorý sa v spojení s vyučovaním používa stále častejšie. Výnimkou nie je ani matematika.

Projekty vo vyučovaní matematiky môžu byť rozmanité – od aplikačných, pri ktorých sa dajú využiť medzipredmetové vzťahy, až po projekty, v ktorých sa rieši matematický problém, ale zároveň sa rozvíjajú viaceré schopnosti žiakov.

Ako inšpiráciu uvádzam niekoľko tém, ktoré môžu tvorivému učiteľovi pomôcť pri navrhovaní vlastných projektov.

Uvedené projekty som realizovala vo vyučovaní matematiky na príslušnom type školy.

Projekt – Funkcie okolo nás

Projekt poskytuje možnosť poukázať na aplikácie a možnosti využitia funkcií v rôznych oblastiach života.

Zadanie: Kde všade sa môžeme v živote stretnúť s funkciami?

Projekt bol realizovaný na strednej škole, nadväzoval na tematický celok Elementárne funkcie.

Výstupom projektu boli napríklad tieto práce študentov:

- Grafikon železničnej dopravy
- Logaritmická funkcia a zemetrasenie
- Funkcie v hudbe
- Kondiciogram
- Matematika v populácii ľudstva
- Funkcie v iných predmetoch (v biológii, vo fyzike)

Projekt – Štatistika

Štatistika sa bežne využíva pri spracovaní údajov z rôznych odvetví. Človek sa stretáva s grafmi, tabuľkami, priemermi na každom kroku. Preto by mal tomuto spôsobu

[1]*PF UPJŠ Košice, bmiss@post.sk*

spracovania výsledkov rozumieť. A ako inak sa to naučiť, ako odskúšať si urobiť vlastný štatistický prieskum.

Zadanie: Pokúste sa uskutočniť vlastný štatistický prieskum v oblasti, ktorá vás zaujíma.

Projekt bol realizovaný na strednej škole. Bol zadaný namiesto výstupného testu zo štatistiky.

Výstupom projektu boli napríklad tieto práce študentov:

- Aké sú možnosti športovania v našom meste?
- Výskyt zábavných podnikov.
- Kto je najobľúbenejší učiteľ na škole?
- Postoj mladých ľudí ku drogám.

Projekt – Ako šetriť vodou

Zaradenie tohto projektu môže byť príjemným spestrením hodín, na ktorých sa žiaci oboznamujú s objemovými jednotkami a s rátaním objemu rôznych telies.

Zadanie: Po dohode s rodinnými príslušníkmi zaznamenajte dennú spotrebu vody a vypočítajte mesačné náklady spojené so spotrebou vody. Navrhnite spôsob, ako by sa dalo vodou šetriť.

Projekt bol realizovaný na základnej škole.

Pri tomto projekte je možné oboznámiť žiakov aj s inými objemovými jednotkami – historické objemové jednotky, jednotky, ktoré sa používajú v iných krajinách. Deti si môžu vymyslieť aj vlastné objemové jednotky.

Projekt – Figurálne čísla

Čísla sú pre žiakov niečím samozrejmým – niečím čo tu vždy bolo, je a bude. Tento projekt im umožní uvedomiť si, že aj čísla musel niekto „vymyslieť“ a tiež si môžu vyskúšať, aké by to bolo bez nich.

Zadanie: Oboznámiť sa s figurálnymi číslami, pomocou zadaných úloh (vedeckého záznamu) nájsť spôsob počítania s takýmito číslami, formulovať tvrdenia a dokazovať ich.

Žiaci skúmali:

- ktoré čísla sú trojuholníkové – ako vytváram ďalšie pomocou predošlých,
- aký je výskyt párnych a nepárnych čísel medzi trojuholníkovými číslami,
- súčty dvoch susedných trojuholníkových čísel,
- čo platí pre dvojnásobky trojuholníkových čísel,
- ktoré čísla sú trojuholníkové a zároveň štvorcové.

Projekt – Pytagorova veta

Ako povedal jeden študent: „Pytagorova veta je ako acylpirín – keď už je najhoršie a nevieš, čo by pomohlo, pomôže Pytagorova veta.“ A keďže je táto veta tak používaná, stojí za to sa s ňou trochu „pohrať“.

Zadanie: Zistite, či Pytagorova veta platí aj pre iné útvary nad stranami pravouhlého trojuholníka.

V rámci projektu je možné zamerať sa na rôzne dôkazy Pytagorovej vety – niektoré zaujímavé dôkazy je možné nájsť na www stránkach:

- http://math.about.com/gi/dynamic/offsite.htm?site= http%3A%2F%2Fwww.cut-the-knot.com%2Fpythagoras%2F
- http://math.about.com/gi/dynamic/offsite.htm?site= http%3A%2F%2Fwww.ies.co.jp%2Fmath%2Fjava%2Fgeo%2Fpythagoras.html

Samostatná tvorivá práca študentov sa využije pri zovšeobecňovaní Pytagorovej vety. Študenti skúmali podobné útvary s koeficientom podobnosti určeným pomerom veľkosti príslušných strán trojuholníka.

Využívanie projektov vo vyučovaní matematiky si vyžaduje veľa času a energie, ale prináša so sebou veľa pekných zážitkov a neoceniteľných skúseností. Všetkým, ktorí to chcú skúsiť, želám veľa odvahy.

Matematika s Přemyslem Otakarem II.

Jaroslava Tenkrátová, Lubomír Šára[1]

Naše základní škola se již sedm let snaží žákům přiblížit významné postavy českých dějin. Filosofií školy je formou tvořivé dramatiky seznamovat děti s českými dějinami, významnými osobnostmi našich dějin v úseku od příchodu Slovanů do české kotliny po vládu Rudolfa II. Habsburského. Cílem je pěstovat v dětech národní hrdost a zároveň jim připomenout, že od pradávna jsme byli součástí Evropy. Připomínka české historie se prolíná všemi výchovami i předměty. Působí na děti nejen prostřednictvím rozumu, ale především emocionálně, zprostředkováním nejrůznějších krásných a romantických prožitků.

S dětmi pravidelně dvakrát ročně pobýváme na škole v přírodě v romantickém prostředí hradu Svojanov. Strážní hrad Svojanov byl ve 13. století založen českým králem Přemyslem Otakarem II., právě tak jako královská města Chrudim, Polička a Vysoké

[1] *Základní škola Lukavice, tenkratova@centrum.cz*

Mýto. Postava tohoto krále přezdívaného „Král železný a zlatý“, který má být dětem morálním vzorem rytířských ctností, seznamuje děti s životem nejen na středověkých hradech, ale i ve středověkých městech a vesnicích. Výhodou školy je i to, že v ní působí tým učitelů, kteří vzájemně spolupracují. Dalším přínosem je dobře fungující divadelní soubor dětí a dospělých. Na hradě Svojanově si děti zkusily týdenní pobyt jako panoši a královniny společnice. Všichni dospělí byli nápomocni při dramatizaci jednotlivých postav, které jsme právě potřebovali. Využili jsme pobytu na středověkém hradě nejen jako atraktivního výchovného prostředí, ale také jako romantické kulisy pro výuku matematiky. Zdůraznili jsme dětem, že matematiku potřebovali lidé již ve 13. století, ale zároveň jsme dbali na to, aby výuka po odborné stránce splňovala požadavky počátku 21. století. Dále uvádíme několik konkrétních matematických činností, které jsme s dětmi zrealizovali.

Měření a relativnost měrných jednotek

Úkolem bylo nejen dětem ukázat, jak mohou pomocí primitivních prostředků či součástí svého těla něco změřit, ale zejména to, že při měření musí užívat stejnou měrnou jednotku a trvale se dohodnout na nějakém standardu.

Král s královnou seznamují děti s novým úkolem: „Nedávno mně kupci přinesli novou krásnou červenou látku na nové šaty. Říkali, že mi prodají 25 loktů. Vaším úkolem teď bude naměřit a porovnávat 25 loktů.“ Královna vyprávěla dětem, do čeho se oblékali a jak se obchodovalo. „A my si teď zahrajeme na středověké kupce. Tady máte látku na závoje pro mé společnice a vaším úkolem je změřit, kolik jí vlastně je, abychom se dohodli na ceně.“

Činnost dětí: měří gázovinu, kterou kupujeme v desetimetrových rolích
Pomůcky: gázovina
Organizace: v hradních jižních zahradách
P: „Jak ho změříme, když nemáme metr?“
D: „Metr lidé přece zavedli o mnoho staletí později.“
Královna: „Ví někdo, jak se měřilo na lokte?“
Děti: „To umíme, to už jsme zkoušeli – třeba na kroky.“
Královna: „Děti, kdo je největší z vás? Jakub. Látku změří nejprve on.“
Jakub (měří): „25 loktů.“
Královna: „Teď změří sukno ten, kdo je z nás ze všech nejmenší.“ (Děti se porovnají podle velikosti – určí nejmenší – Aničku.)
A: „28 loktů.“
M: „No a je to k ničemu.“
H: „Jak je to možné – oni mají jinak dlouhé lokty.“
Královna: „Opravdu to tak bylo u každého obchodníka a každý z nich měl jiné míry. V průběhu let se míry měnily. Lidé používali palce, lokty, stopy. Teprve my dnes měříme metrem, který je vždy stejně dlouhý.“

Se zvolenou mírou musel být spokojen i kupec, děti pochopily nutnost kompromisu. S kupcem jsme poté dojednali cenu za jeden loket a spočítali, kolik král zaplatí za vybrané látky.

Seznámení se s pravděpodobností

Úkolem je seznámit i nejmenší děti na intuitivní úrovni, že na sobě nezávislé děje, které nejsou nějakým způsobem privilegované, jako čísla na hrací kostce, se vždy vyskytnou se stejnou četností; jejich pravděpodobnost je shodná. U starších dětí, které již dokáží sčítat, jsou nenásilně vytvářeny předpoklady pro pozdější výuku kombinatoriky. Děti téměř vždy samy poznají, jaký může být maximální a minimální součet čísel na šesti hracích kostkách. Dojít k tomu, kolika různými způsoby lze sestavit stejný součet, dokáže zpravidla jen několik nejbystřejších dětí. S pomocí to však dokáže většina dětí.

Děti s králem plní úkol v hradní věži. Král dětem vysvětlí, jak se hrály vrchcáby, které byly oblíbenou zábavou v každé středověké krčmě. Žáci měli zjistit, kolikrát padnou jednotlivá čísla při dostatečném počtu hodů. Nejprve typovali, které číslo padne nejčastěji. Žáci pracovali v týmech. Zpočátku se jim příliš nevedlo rozvržení práce jednotlivým členům, pak pochopili, že každý z nich je nezastupitelný a že je nutná jejich vzájemná kooperace.

Pomůcky: stůl, kostky, tabulky, křídy
Organizace: ve věži, na nádvoří

Král s dětmi navštíví strážní věž, kde panoši hrají v kostky.
Král: „Děti, které číslo padá v kostkách nejčastěji?“
Ondra: „6, ale ne mně.“ (směje se)
J: „1.“
D: „To přece nikdo nemůže vědět. Všechny čísla padají stejně často.“

Děti si na nádvoří v písku udělaly 6 velkých čtverců a označily je čísly 1–6. Pak si dělaly čárky, kolikrát padlo dané číslo. Po dostatečném počtu hodů (alespoň 300x) děti spočítaly, kolikrát padla jednotlivá čísla.
D: „Vidíš, že všechna čísla padají přibližně stejně často.“

Král dětem vysvětlil, že při hře v kostky se sčítají čísla, která padnou na šesti kostkách. Děti čísla z kostek sčítaly a čísla zapisovaly. Soutěžily, kdo hodí nejvyšší součet.
K: „30.“
J: „31.“
H: „32.“
P: „33. Vyhrál jsem.“
Král: „To ještě nic neznamená. Mně jednou vyprávěl můj zbrojnoš, že hodil 39.“
D: „Jo, jo, 39 – tak to pěkně kecal.“
Král: „Ale on nekecá, mohl se ale splést v součtu.“
D: „6 kostek a 6 teček – mohl mít nejvíc 36.“

Král: „Šestkrát šest je třicet šest, a to je také maximální možný součin. Byl to chyták. Jaký součin může být v kostkách nejmenší?“
L: „$6 \cdot 1 = 6$.“
Král: „Kolika způsoby můžeme hodit tak, aby součet všech teček byl 6?“
H: „No přece jenom jedním způsobem – padne nám na všech kostkách 1.“
Král: „A jak dosáhneme součtu sedm?“
K: „Pět jedniček a jednu dvojku. Jenom takhle a ne jinak.“
Královna: „Jak bychom dosáhli součtu 35?“
L: „Pět šestek a jedna pětka., jinak to nejde.“
Král: „Správně Lenko. Jak lze dosáhnout součtu 8?“
P: „5 jedniček a 1 trojka.“
L: „Nebo to může být i jinak – 4 jedničky plus 2 dvojky.“
Král: „Správně. Jak lze dosáhnout součtu 9?“
L: „5 jedniček a plus 1 čtyřka.“
M: „4 jedničky plus 1 dvojka plus 1 trojka.“
J: „3 jedničky plus 3 dvojky.“
Král: „Správně. Teď zjistěte, který součet se vyskytuje nejčastěji. Podívejte se, co jste zapsali.“
H: „Nejčastěji jsme dosáhli součtu 21.“
D: „To je jasné – 21 je průměr, to už přece známe, když jsme počítali vojáky a ty nohy.“
H: „To musí být tak.“
Král: „Dnes vás musím všechny pochválit a zároveň tak chytré děti pozvat na zítřejší soupeření v sedmeru rytířských ctností.“

Středověká násobilka

Ve středověku byla znalost násobilky považována za výjimečný výkon a lidé, kteří ji ovládali, byli považováni za opravdové znalce. Není proto divu, že se ujala metoda násobení na prstech, která přežila až do dnešní doby alespoň v některých knihách a na internetu. Proto se král Přemysl Otakar II. pokusil na podzim 2003 naučit žáky tuto metodu. Základní námět pro středověkou násobilku jsme načerpali asi před čtyřmi roky z internetových stránek www.numbershistory.com.

Násobilka devíti

Obě ruce položíme dlaněmi na stůl a pomyslně je očíslujeme zleva doprava čísly 1–10. Máme-li spočítat například $4 \cdot 9$, skrčíme čtvrtý prst. Prsty vlevo od něho udávají počet desítek a vpravo od něho počet jednotek.

Zdůvodnění:

Vlevo od skrčeného prstu	$(a-1)$ desítek
Vpravo od skrčeného prstu	$(10-a)$ jednotek
Celkem	$10 \cdot (a-1) + (10-a) = 10a - 10 + 10 - a = 9a$

Stejným způsobem můžeme dále vyzkoušet příklady $12 \cdot 9$, $13 \cdot 9$, $14 \cdot 9$, $15 \cdot 9$, $16 \cdot 9$, $17 \cdot 9$, $18 \cdot 9$ a $19 \cdot 9$.

Malíček levé ruky znamená jednu stovku, další prsty vlevo od skrčeného prstu jsou desítky a prsty vpravo jednotky.

Zdůvodnění:
Například $15 \cdot 9 = 135 \ldots\ldots\ldots (a = 5, 10 + a = 15)$
$100 + [10 \cdot (a - 2)] + (10 - a) = 100 + 10a - 20 + 10 - a = 90 + 9a = 9 \cdot (10 + a)$

Malá násobilka

Předpokladem pro úspěch je umět násobilkové spoje do $5 \cdot 5$ včetně. Ty spoje, ve kterých jsou oba činitele větší než 5, nebo jeden z nich je roven 5 a druhý je větší než 5, lze počítat na prstech našich rukou.

Máme-li spočítat např. $9 \cdot 7$, na levé ruce vztyčíme 4 prsty (9 je o 4 více než 5) a na pravé ruce 2 prsty (7 je o 2 více než 5). Celkový počet vztyčených prstů určuje počet desítek ve výsledku a součin skrčených prstů udává počet jednotek.

Zdůvodnění:

Počet vztyčených prstů	$a - 5$ na levé ruce, $b - 5$ na pravé ruce
Jejich součet	$(a - 5) + (b - 5) = a + b - 10$
Počet skrčených prstů	$10 - a$ na levé ruce, $10 - b$ na pravé ruce
Jejich součin	$(10 - a) \cdot (10 - b) = 100 - 10a - 10b + ab$

Součet vztyčených prstů (desítky) plus součin skrčených prstů je hledaný součin, to je $a \cdot b$.

$ab = 10 \cdot (a - 10 + b) + (10 - a) \cdot (10 - b) = 10a - 100 + 10b + 100 - 10a - 10b + ab = ab$

Velká násobilka

Obdobným způsobem můžeme počítat i další spoje velké násobilky:
$11 \cdot 11$, $12 \cdot 11$, $13 \cdot 11$, $14 \cdot 11$, $15 \cdot 11$, $11 \cdot 12$, $12 \cdot 12$, $13 \cdot 12$, $14 \cdot 12$, $15 \cdot 12$, $11 \cdot 13$, $12 \cdot 13$, $13 \cdot 13$, $14 \cdot 13$, $15 \cdot 13$, $11 \cdot 14$, $12 \cdot 14$, $13 \cdot 14$, $14 \cdot 14$, $15 \cdot 14$, $11 \cdot 15$, $12 \cdot 15$, $13 \cdot 15$, $14 \cdot 15$, $15 \cdot 15$.

Máme-li spočítat např. $13 \cdot 14$, na levé ruce vztyčíme 3 prsty (13 je o 3 více než 10) a na pravé ruce 4 prsty (14 je o 4 více než 10). Součet vztyčených prstů udává počet desítek ve výsledku, součin vztyčených prstů udává počet jednotek a ještě přidáme číslo 100. Tedy $3 + 4 = 7$ desítek plus $3 \cdot 4 = 12$ jednotek plus 100, dohromady dostaneme 182.

Zdůvodnění:

Počet desítek	$(a - 10) + (b - 10) = a + b - 20$
Počet jednotek	$(a - 10) \cdot (b - 10) = ab - 10b - 10a + 100$
Součet	$10 \cdot (a + b - 20) + ab - 10b - 10a + 100 = ab - 100$
	$ab - 100 + 100 = ab$

S dětmi z prvního stupně jsme se naučili malou násobilku a násobilku devíti. Velkou násobilku jsme si vyzkoušeli v jedné hodině až později s kontrolou na kalkulačce. To abychom prověřili, zda-li středověcí obchodníci nešidili. Původně jsme zamýšleli uvést toto počítání jako historickou zajímavost. Děti však počítání zaujalo, navzájem si vymýšlely a zkoušely různé příklady, „prstovou“ násobilku předváděly ostatním žákům i po návratu ze Svojanova.

Stavíme hradby

Na hradě jsme vybrali jednu z ochranných bašt. Žáci měli ve skupinách odhadnout, kolik kamenů bude třeba přivézt na stavbu stejné věže. Trvalo nám delší dobu, než jsme přepočítali kameny na obvodu v jedné řadě, spočítali počet řad a zjistili, že je třeba vzít v úvahu celý objem. Spolupráce u tohoto úkolu byla nutností.

Po skončení výpočtů bylo třeba ověřit, zda všechny týmy postupovaly správně. Tedy z kamenů vystavět základ malé bašty a přesvědčit se o rozdílu pojmů obvod, obsah a objem.

Dále jsme řešili problém dopravy kamenů: kolik koňských povozů dopraví stanovený počet kamenů z nedalekého lomu, jakou vzdálenost celkem překonají, kolik grošů budeme muset zaplatit za kámen, dovoz a za práci. Kolik dělníků budeme muset najmout, jak dlouho budou pracovat. . . Různých úkolů na toto téma se nabízí celá řada.

Chrudimská krvavá čísla

Podvečerní čas se výborně hodil pro řešení různých matematických hlavolamů. Abychom je dětem zpestřili, vložili jsme je do regionálních pověstí. Jednu z takto upravených pověstí uvádíme. Celou pověst jsme si spolu se žáky přečetli, ve zkrácené verzi jsme ji vytiskli a s tabulkou předložili žákovským týmům k řešení.

Podle pověsti se v Chrudimi v domě číslo 66 v Široké ulici zjevoval sám ďábel. Jednou tehdejší majitelce Dorotě ustřihl kratiknotem v noci nos a napsal jím na stěnu krvavá čísla 72, 27, 42, 117. Když se zohavená nešťastnice ráno probrala z mdlob, zjistila, že má nos celý, ale krvavá čísla na bílé stěně zářila:

72		42
		117
	27	

Pod tabulkou byla zapsána ještě další čísla: 57, 87, 102, 132, 147. Dorota nebyla hloupá, řekla si, že to bude zřejmý pokyn osudu, či spíše pekla. Přišla totiž na to, že čísla musí doplnit tak, aby vodorovně, svisle i úhlopříčně dostala stejný součet. Pokud to dokáže, výhra ji nemine. Dokážete to i vy? Sázka Dorotě přinesla fantastickou výhru 7 tisíc zlatých. Peníze z pekla jí však štěstí nepřinesly, nakonec všechny prohýřila ve frejích všelikých.

Putování po hradech

Matematiku jsme využili též v projektu, který propojil řadu vyučovacích předmětů. Převahu měla vlastivěda, jak její zeměpisná, tak dějepisná část.

Z matematiky jsme procvičovali řešení jednoduchých rovnic, do kterých jsme zařadili pamětné počítání. Žáci museli dát pozor na úlohy, ve kterých našli zároveň sčítání, násobení, odčítání a dělení. Co spočítat nejdříve?

Pokud tým spočítal správně úlohy, jako řešení získal jméno dalšího hradu nebo zámku. Jeho polohu nalezl na mapě a zakreslil ho do slepé mapy. Přiřadil k němu podle nalezených znaků správnou pověst a namaloval erb. Jednu z pověstí si připravil k dramatizaci pro ostatní.

Toto jsou jen namátkou vybrané úkoly, které král s dětmi při výuce matematiky na hradě provádí. Je příznačné, že děti nepřipravuje pouze na zvládnutí pozdějších složitějších matematických oblastí, jako je počet pravděpodobnosti a kombinatorika, ale vytváří předpoklady i pro pozdější výuku fyziky na druhém stupni: fyzikální měření, soustava jednotek, ale dokonce i pro střední školu: pochopení pravděpodobnosti má stěžejní význam pro kvantovou fyziku.

Závěr

O propojování výuky jednotlivým předmětům a zdůrazňování souvislostí a vzájemných vazeb jednotlivých oborů se snažíme již od nejútlejšího věku. Velký důraz klademe nejen na pochopení látky na racionální úrovni rozumem, ale minimálně stejný význam klademe na emocionální prožitek, výchovné působení a rozvoj dětí v citové a estetické oblasti.

Myslíme si, že právě specializace naší školy na českou historii, na které budujeme náš výchovně vzdělávací program, pro který jsme již získali i řadu grantů, nám takovouto romantickou, zábavnou a přitom plnohodnotně moderní výuku a výchovu umožňuje a je atraktivní pro děti i učitele. Je pochopitelné, že tento přístup nemůže být postaven pouze na jednom nebo dvou kooperujících učitelích, ale že programem musí žít celá škola, ředitelem počínaje, přes všechny pedagogy, uklízečky, kuchařky. Velmi nutné je také pro program získat nejen děti, ale i jejich rodiče a další obyvatele obce. Nám se podařilo do výchovně vzdělávacího programu tyto lidi zapojit. Škola se tak stává skutečnou sociální kotvou obce.

Příznačné pro naši školu je trvalé rozvíjení práce dětí v týmu, a to nejen na škole v přírodě, ale v celém školním roce. Děti vedeme ke vzájemné spolupráci a komunikaci. To považujeme za důležitý předpoklad úspěchu nejen ve škole, ale zejména v dospělosti, v jejich osobním i profesním životě. Je pochopitelné, že spontánní reakce dětí jsou pokaždé jiné, uvádíme je jen jako příklad typické reakce.

Fotodokumentaci z našeho projektu a další podrobnosti můžete najít na našich školních internetových stránkách `www.zslukavice.wz.cz`.

Skúmanie v školskej matematike

Renáta Ujháziová[1]

V dnešnej dobe je snaha presúvať dôraz z výučby algoritmov na rozvoj vyšších poznávacích funkcií a na oboznamovanie žiakov s činnosťami, ktoré sú matematike blízke. Pri presadzovaní týchto snáh by sa preto nemalo zabúdať hlavne na to, že matematické teórie majú v čase svojho vzniku experimentálne induktívny charakter a až vo chvíli svojho „konečného" spracovania nadobúdajú rýdzo deduktívny charakter. Preto ak chceme ukázať žiakom, ako sa skutočná matematika robí, mali by sme aspoň trochu rešpektovať to, ako matematické teórie vznikajú, ako sa rozvíjajú a získavajú deduktívny charakter. Práve skúmanie na hodinách matematiky k tomu môže v značnej miere prispieť.

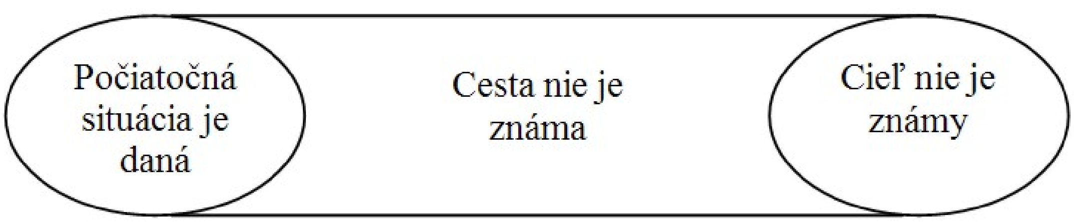
Čo je to skúmanie?

V definovaní pojmu skúmanie sa rôznia názory odborníkov, a preto sa ani v literatúre nestretávame s jeho jednotnou definíciou. Laicky by sme však mohli skúmanie popísať takto: *Skúmanie pozostáva z aktivít a činností, ktoré používame na odhalenie vzťahov vo vnútri matematickej oblasti definovanej pomocou problémovej situácie.*

Okrem tejto laickej definície sa v literatúre objavuje aj operatívna definícia tohto pojmu vo všeobecnej podobe, podľa ktorej: *Zaviesť skúmanie znamená pomocou problémovej situácie, základného problému a použitím rôznych stratégií vytvárať nové problémy, ktoré môžu dať vhľad do existujúcich vzťahov vo vnútri danej oblasti matematiky.*

Snáď ešte výstižnejšia je však definícia L. Frobishera, podľa ktorej o *matematickom skúmaní* môžeme hovoriť, ak 1. *počiatočná situácia je presne popísaná*, 2. *cieľ nie je presne zadaný alebo nie je zadaný vôbec*, 3. *cesta k cieľu nie je známa*.

Matematické skúmanie môžeme graficky znázorniť takto:



Z uvedených definícií je zrejme, že skúmanie si vyžaduje aktívne narábanie s predkladaným materiálom, aby sa mohli nájsť nové a neznáme vzťahy. Pri tejto práci je preto rovnako dôležité vedieť predkladať a sformulovať problémy ako ich vedieť riešiť.

[1] *Ústav matem. vied, rujhaziova@yahoo.com*

Keďže jedným z hlavných nástrojov metódy skúmania je *predkladanie a formulovanie problémov*, je dôležité naučiť žiakov aj niektoré stratégie na predkladanie a formulovanie problémov. Bohužiaľ, tejto problematike sa v odbornej literatúre venuje iba málo autorov, preto ani známych stratégií nie je veľa. Ale uvedieme aspoň tri z nich.

Stratégia tzv. „direction“, t.j. „smeru“

Použitie: Pri problémových situáciách, kde chceme dať podnet na smer, v ktorom odporúčame pracovať.

Predpoklady na vedomosti a schopnosti žiakov: Predpokladáme, že žiaci budú schopní vymýšľať nové problémy pomocou nami „zadaného smeru“.

Iniciatíva pre použitie stratégie: Pochádza hlavne od učiteľa. (Ale keď už žiaci majú skúsenosti s touto stratégiou, tak sa predpokladá, že ju budú úspešne používať pri ďalšom skúmaní.)

Príklad použitia stratégie „direction“: Majme daný nasledovný číselný trojuholník.

1
3 5
7 9 11
....

Spomínanú stratégiu použijeme tak, že pred skúmaním tohto trojuholníka žiakom zadáme takýto *základný problém*: Pozrite sa na prvý prvok každého riadku trojuholníka a pokúste sa nájsť nejaký vzťah medzi nimi.

Tento problém udáva žiakom smer, ktorým by sa mohli vybrať pri formulovaní ďalších problémov.

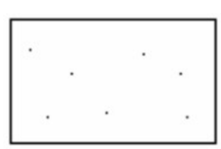
Stratégia „variation of the parameters“, t.j. „obmena parametrov“

Použitie: Pri problémových situáciách, kde je možné meniť parametre zadaného problému.

Predpoklady na vedomosti a schopnosti žiakov: Predpokladáme, že žiaci sú schopní použiť induktívnu prácu pri skúmaní a majú skúsenosti s úlohami, v ktorých museli analyzovať parametre problému.

Iniciatíva pre použitie stratégie: Po splnení uvedených podmienok je dosť pravdepodobné, že nájdenie parametra a tvorba potrebných obmien bude jedna z najprirodzenejších stratégií pre žiakov.

Príklad použitia stratégie „variation of the parameters“: Majme daný obdĺžnik a niekoľko bodov vo vnútri obdĺžnika.



Tieto body spolu s vrcholmi obdĺžnika môžeme použiť na vykreslenie trojuholníkov, pričom úsečky kreslíme vždy medzi dvoma bodmi. Úsečky sa nemôžu navzájom pretínať.

Skúmajte, koľko trojuholníkov dostanete.

Pri tejto problémovej situácii za *parameter* považujeme pojem „niekoľko bodov“. Postupným dosadzovaním čísel 1, 2, 3, . . . dostávame nový problém: Nájdite vzťah medzi výsledkami jednotlivých vyšetrených prípadov.

Stratégia „what if not“, t.j. „čo ak nie“

Použitie: Pri problémových situáciách, kde je možné položiť otázku „Čo ak nie?“. Pomocou nej môžeme odstrániť nejakú podmienku zo základného problému a tak môžeme vytvárať nové problémy.

Predpoklady na vedomosti a schopnosti žiakov: Predpokladáme, že žiaci sú schopní klásť otázky typu „Čo ak to nie je. . . ?“ a majú základné poznatky z rôznych oblastí matematiky.

Iniciatíva pre použitie stratégie: Pochádza od učiteľa aj žiaka.

Príklad použitia stratégie „what if not“, t.j. „čo ak nie“. Predpokladajme, že žiaci poznajú nasledujúcu vetu z planimetrie: *Tri body, ktoré neležia na tej istej priamke jednoznačne určujú kružnicu.*

Môžeme sa spýtať žiakov: „Ako by ste charakterizovali túto vetu?“
Možné odpovede žiakov:

1. „Je to matematická veta týkajúca sa bodov.“
2. „Je to matematická veta týkajúca sa troch bodov, ktoré neležia na tej istej priamke.“
3. „Je to matematická veta týkajúca sa kružnice.“

Dostali sme zoznam troch charakteristík tejto matematickej vety. Zoberieme zaradom každú jednu charakteristiku a položíme otázku „Čo ak nie?“.

Charakteristika 1: „Čo ak to nie je o bodoch?“

Potom uvažujme buď priamku a bod, dve priamky a bod, alebo tri priamky.

Charakteristika 2: „Čo ak tie tri body ležia na tej istej priamke?“

Uvažujme tri body ležiace na tej istej priamke.

Charakteristika 3: „Čo ak to nie je kružnica?“

Tak uvažujme buď parabolu, elipsu, hyperbolu, alebo inú krivku.

Čo môžeme robiť ďalej s takýmto zoznamom? Ukážeme si to na charakteristike 1.

Uvažujme napr. priamku a bod. Potom nový problém by sme mohli sformulovať takto: „Je možné jednoznačne určiť kružnicu pomocou priamky a bodu?“

Ak by sme uvažovali dve priamky a bod, potom by sa dal nový problém sformulovať nasledovne: „Je možné jednoznačne určiť kružnicu pomocou dvoch priamok a bodu?“ Analogicky by sme mohli sformulovať problém aj v prípade troch priamok.

Uvedené stratégie sú stratégie na formulovanie a predkladanie problémov, osvojenie ktorých môže žiakom do značnej miery pomôcť pri formulovaní vlastných problémov.

Za rovnako dôležité považujeme ukázať žiakom aj stratégie na riešenie problémov, ktorými sú známe heuristické stratégie ako preformulovanie, analógia, zovšeobecnenie, špecializácia, cesta späť, systematické experimentovanie a hľadanie vzorca, znázornenie a konkretizácia, zavedenie pomocného prvku, opakovanie určitého postupu, . . . Znalosť týchto stratégií môže výrazne uľahčiť riešenie rôznych zadaných problémov.

Prečo by sme mali zaradiť metódu skúmania do školskej matematiky?

Hlavným dôvodom pre zaradenie tejto metódy do školskej matematiky je skutočnosť, že skúmanie umožňuje rozvíjať schopnosť žiakov predkladať, formulovať a riešiť problémy, ale aj rozvíjať u nich induktívne myslenie a induktívne dokazovanie. Navyše experimenty dokazujú, že tento druh práce je pre žiakov veľmi zaujímavý, umožňuje im napredovať vlastnou rýchlosťou, vďaka nemu sa u nich vytvára lepší vzťah k matematike, učia sa pri nej pracovať samostatne aj v skupinách a je to vhodná metóda pre mnohé témy na základných i stredných školách.

Ako zaviesť metódu skúmania do vyučovania matematiky?

V školskej matematike chápeme skúmanie ako nejakú aktívnu metódu, ktorá je založená na zručnostiach a schopnostiach formulovať a riešiť problémy. Tieto zručnosti a schopnosti musia byť postupne vytvárané a rozvíjané, to znamená, že tento vývoj si vyžaduje čas a učiteľ musí postupovať pri rozvíjaní týchto vlastností tempom, ktoré je primerané schopnostiam žiakov.

Odporúča sa preto v prvom kroku *rozvíjať induktívne myslenie a induktívnu prácu pomocou*, tzv. „mini skúmania“. Žiakom preto treba najprv zadávať rôzne úlohy, v ktorých majú niečo pozorovať, nájsť ďalšie príklady, sledovať na nich tie isté vlastnosti a nakoniec majú objaviť nejaké súvislosti medzi nimi a snažiť sa vysvetliť príčinu daného javu. Majú to byť teda úlohy, resp. problémy, ktoré chceme použiť na osvojenie potrebných schopností pri práci pri práci so skutočným skúmaním. „Mini skúmanie“ je považované za nevyhnutnú podmienku pri príprave žiakov na objaviteľskú prácu.

V druhom kroku by mal učiteľ aplikovať tzv. „riadené skúmanie“, čo znamená, že spočiatku sprevádza žiakov cez niektoré časti práce, zadáva im problémy na riešenie a po nejakom čase sa počet ním zadávaných problémov postupne znižuje, pričom všetky zadávané problémy majú mať spoločný cieľ: „Ukázať žiakom, ktoré problémy stoja za riešenie.“

Až keď žiaci nadobudli skúsenosti s týmito druhmi skúmania, potom môže nasledovať tá najvyššia forma skúmania, „samostatné skúmanie a objavovanie“.

Pythagorova věta[1]

Michaela Ulrychová[2]

Ve výuce se snažím využívat konstruktivistických přístupů (Hejný & Kuřina, 2001). Domnívám se, že žák je tak motivován k aktivitě, k formulaci vlastních názorů, myšlenek a nápadů, ale také rozvíjí schopnost oponovat, vytvořit protipříklad a diskutovat o dané problematice. Tento přístup jsem využila i pro seznámení žáků sekundy osmiletého gymnázia s tématem Pythagorova věta. Inspiraci jsem čerpala z knihy Hejný & Kuřina (2001), v níž autoři představují několik přístupů k vyučování Pythagorovy věty od instruktivního, kde učitel předkládá žákům pouze hotové poznatky a vztahy, až po konstruktivní, který žáka aktivizuje k řešení praktického problému.

Popis výuky

Pro seznámení žáků s Pythagorovou větou jsem zvolila přístup E, který je z mého hlediska nejvíce vhodný pro konstruktivistický přístup – motivuje žáka a nejvíce vede k vlastnímu objevování. Žáci jsou motivováni úlohou z praxe.

Úloha 1: Je možné pronést skříň s rozměry $1,6 \times 2,4 \times 0,8$ m (š $\times$ v $\times$ h) dveřmi s rozměry $1,1 \times 1,9$ m (š $\times$ v)?

Úloha nečinila velké obtíže, avšak při jejím řešení se někteří žáci nezabývali skutečnými rozměry skříně a dveří, ale modelovali danou situaci např. pomocí penálu a krabičky od kalkulačky.

Úloha 2: Lze tuto skříň naklopit v místnosti vysoké 2,5 m?

Ani řešení druhé úlohy nebylo pro žáky obtížné. Objevilo se několik strategií řešení. Někteří žáci navrhovali naklápět skříň pomalu – měli dojem, že řešení daného problému je závislé na rychlosti. Jeden žák dokonce doma vyklidil skříň a zkoušel, jestli lze opravdu skříň naklopením zvednout. Postupně pak žáci dospěli k tomu, že hlavní úlohu zde hraje úhlopříčka obdélníku $2,4 \times 0,8$ m (v$\times$ h) a pomocí kružítka lze zjistit, zda se dá skříň naklopit.

Autoři knihy navrhují jako další úlohu doplnit tabulku; vlastně ověřit, že vztah $a^2 + b^2 = c^2$ pro daný pravoúhlý trojúhelník platí. Mně se však zdála tato úloha umělá, a tak jsem zvolila úlohu podle mého názoru vhodnější. Chtěla jsem, aby žáci sami odvodili vztah a vyslovili Pythagorovu větu. Zadala jsem úlohu 3.

Úloha 3: Vypočítejte obsahy trojúhelníků $S_1, S_2, \ldots, S_9$ (obr. 1) a součty obsahů trojúhelníků $S_1 + S_2$, $S_3 + S_4$, $S_5 + S_6 + S_7 + S_8$.

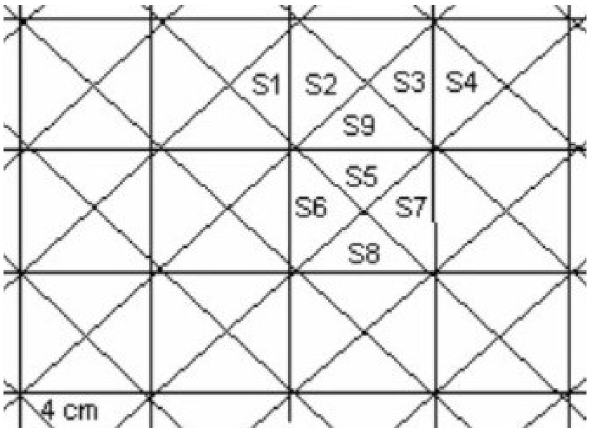
[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, ulrychova.michaela@centrum.cz*

Žáci správně vypočítali požadované obsahy trojúhelníků jako jednu čtvrtinu obsahu čtverce se stranou délky 4 cm a jejich příslušné součty.

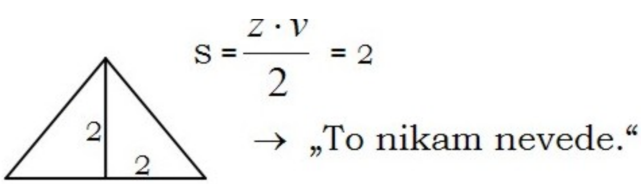
Úloha 4: Vypočítejte délky stran trojúhelníku S_9.

V této úloze se ukázala značná variabilita ve způsobu řešení.

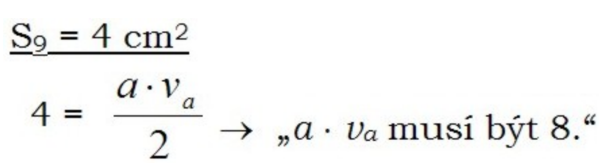


Obr. 1

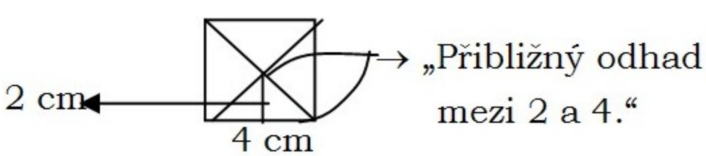
Někteří žáci se pokusili využít vzorce pro obsah trojúhelníka (obr. 2, 3), jiní určovali délky stran pomocí přibližných odhadů (obr. 4, 5) a sklápění – opět zde hraje roli pohyb (obr. 6). (Uvedené práce žáků jsou převzaty z tabule.) Jednoho žáka také napadlo určit délky stran trojúhelníku pomocí trojúhelníkové nerovnosti. V průběhu první hodiny vypočítal žák Petr délky stran daného trojúhelníka. Nejprve si uvědomil, že trojúhelníky S_3 a S_4 tvoří čtverec, sečetl jejich obsahy a potom již odmocněním obsahu čtverce vypočítal příslušnou odvěsnu trojúhelníka. S Petrem jsem nadále pracovala individuálně. Znal tedy délky tří stran v trojúhelníku, a tak jsem mu zadala úkol, aby určil vztah mezi těmito stranami v trojúhelníku, což by mohlo vést k objevu Pythagorovy věty.



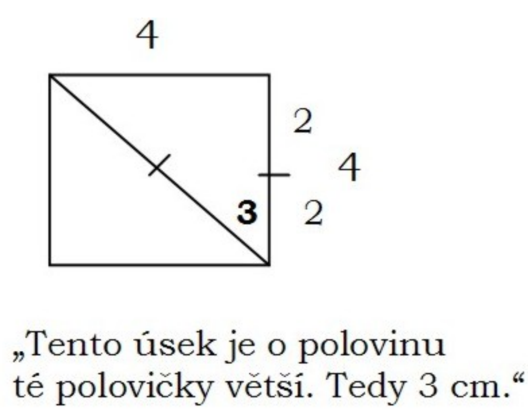
Obr. 2



Obr. 3

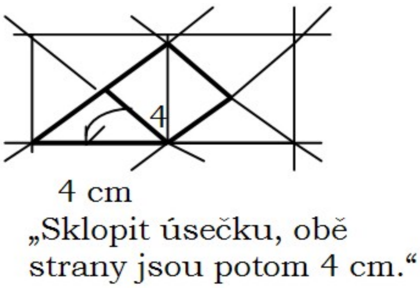


Obr. 4

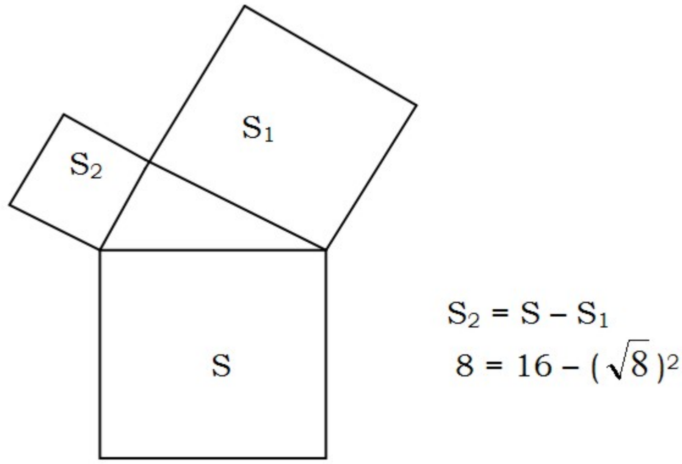


Obr. 5

Během druhé hodiny objevil Petr následující zákonitost: Vztah mezi délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku vyjádřil pomocí obsahů čtverců (obr. 7).



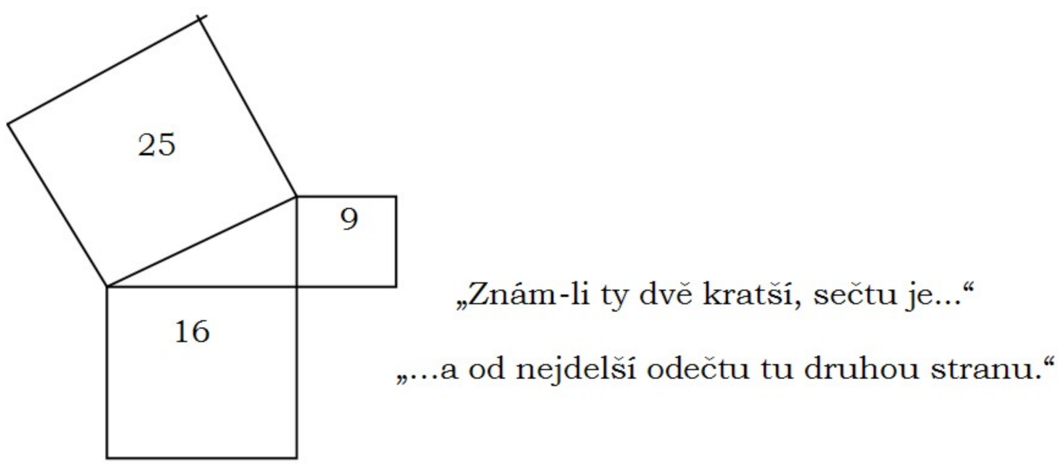
Obr. 6



Obr. 7

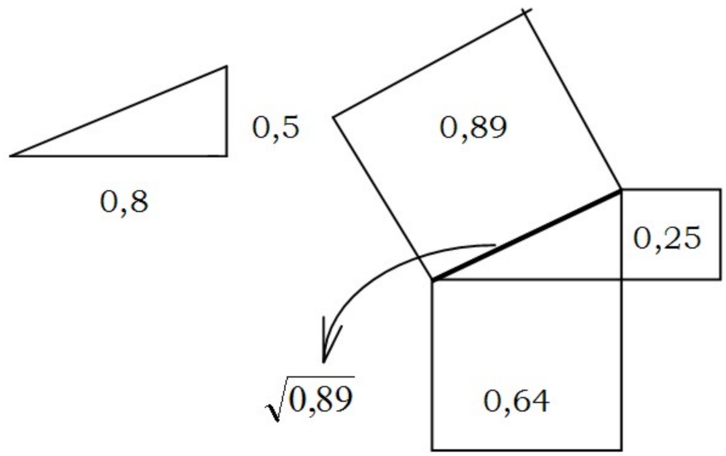
Je zde vidět jakýsi přechod v jeho způsobu uvažování. Žák již nepoužívá prostředí mozaiky, trojúhelník už není rovnoramenný, avšak ještě stále dosazuje do vztahu hodnoty pro rovnoramenný trojúhelník. Otázkou je, proč zvolil ve vyjádření tu těžší variantu – vztah pomocí rozdílu druhých mocnin délek stran.

Zeptala jsem se na obecné řešení. Po chvilce individuální práce Petr podal konkrétní příklad (obr. 8) a pomocí něj zformuloval obecný vztah, i když ne úplně přesně.



Obr. 8

Zadala jsem tedy Petrovi úlohu, ve které jsou délky stran zadány desetinnými čísly. Petr zvolil délky dvou stran v trojúhelníku jako 0,8 a 0,5 cm (obr. 9) a nezamýšlel se nad tím, jestli jsou zadány délky obou odvěsen nebo délka přepony a odvěsny, a řešil tuto úlohu následovně. Nejprve určil obsahy čtverců nad odvěsnami (pojmy odvěsna a přepona zatím neznal), pomocí součtu těchto obsahů vypočítal obsah čtverce nad přeponou a odmocněním získal délku strany čtverce, tedy přeponu pravoúhlého trojúhelníku. Tato úloha vlastně ověřila, že Petr má již dobrou představu o Pythagorově větě.



Obr. 9

Dalším problémem, který jsem nastínila, bylo, jestli tento vztah pro délky stran v trojúhelníku platí i v obecném trojúhelníku. Petr si nakreslil rovnostranný trojúhelník, vyznačil příslušné čtverce nad jeho stranami a hned objevil, že daný vztah neplatí. Doma ještě zkusil narýsovat obecný trojúhelník, změřil pravítkem délky stran trojúhelníku a vypočítal příslušné obsahy čtverců. Po dosazení však objevené pravidlo pro součet obsahů čtverců neplatilo. Přesvědčil se tedy o tom, že daný vztah pro obecný trojúhelník neplatí.

Na začátku třetí hodiny jsme společně se všemi žáky shrnuli získané poznatky u tabule, tedy že délky stran vypočítáme pomocí vztahu $S_1 + S_2 = S_3$ (tento vztah byl vázán k obrázku) a že platí

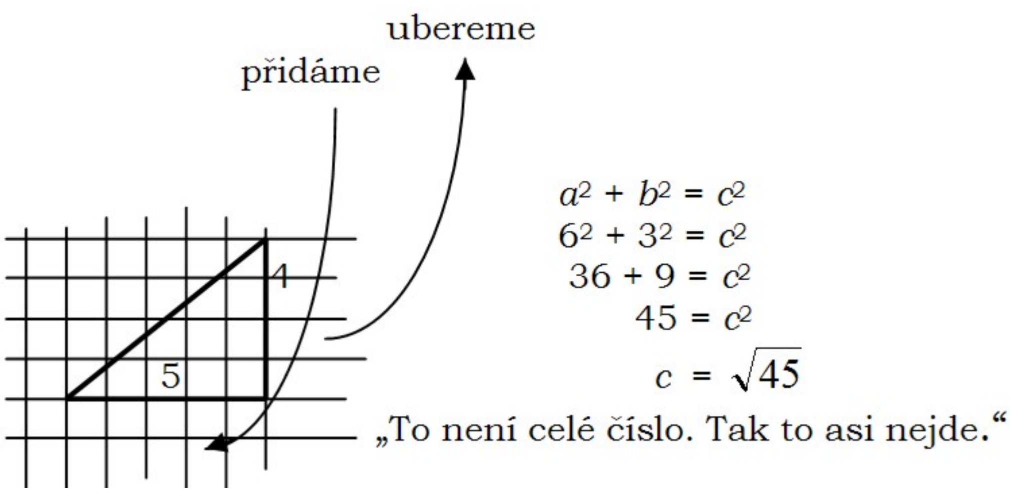
$$\begin{aligned} S_1 &= a^2 \\ S_2 &= b^2 \qquad \text{tedy } S_1 + S_2 = S_3, \\ S_3 &= c^2 \qquad\qquad a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

Na základě těchto poznatků byli žáci schopni vyslovit Pythagorovu větu. Dále jsme potom již jen procvičovali a společně počítali úlohy na tabuli. Za domácí úlohu jsem zvolila takový úkol, v němž by žáci modelovali trojúhelník, a vlastně tak daný úkol prakticky uchopili. Důležitou roli tedy hraje manipulace s předměty.

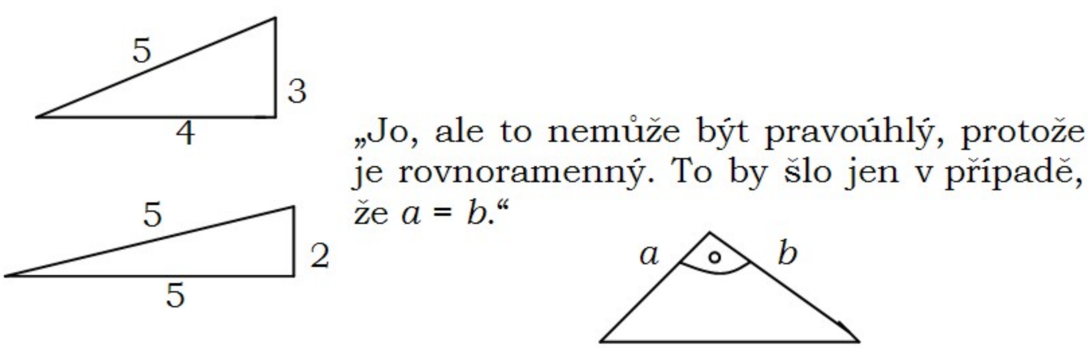
Úloha na doma: Na laně je uvázáno 13 uzlů tak, že každé dva uzly mají vždy tutéž vzdálenost (např. 10 m). Spojíme 1. a 13. uzel v jeden. Ve kterých uzlech budou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku?

Čtvrtou hodinu jsme zahájili domácím úkolem. Jedna žákyně vymodelovala z provázku pravoúhlý trojúhelník (s vrcholy v uzlech 1, 4 a 8) a nalepila ho na papír. Petr tentokrát doma nepracoval, ale byl inspirován prací spolužačky, a tak si ustřihl proužek papíru (aby nahradil provázek), který složil tak, aby přehyby představovaly dané uzly. Pomocí tohoto modelu hledal pravoúhlé trojúhelníky. Objevil též 1., 4. a 8. uzel. „To znamená, že trojúhelník má délky stran 3, 4 a 5 jednotek“, řekl. Někteří žáci konkrétní situaci pouze načrtli na papír. Jiná žákyně se začala úlohou zabývat až při hodině. Pracovala na čtverečkovaném papíru a stále uvažovala, že provázek má 13 uzlů. O dané problematice měla následující představu (obr. 10): „Ubereme-li jeden dílek a přidáme ten dílek sem, trojúhelník zůstane pravoúhlý.“ Na vyzvání však žákyně ukázala, že její úvaha nebyla správná. Pokusila se však ještě uplatnit svou myšlenku a navrhla jiný trojúhelník, ve kterém zkouší odebrat a přidat jeden dílek (obr. 11).

Dále následovaly procvičovací úlohy z učebnice.



Obr. 10



Obr. 11

Závěr

Při procvičování Pythagorovy věty jsem zaznamenala, že někteří žáci zapisují a řeší úlohy pomocí obsahů čtverců $S_1 + S_2 = S_3$ (ne objeveným vztahem pro výpočet délek stran $a^2 + b^2 = c^2$). U těchto žáků převládá spíše geometrická interpretace Pythagorovy věty, žáci si opravdu pod druhými mocninami představují obsahy čtverců nad danými stranami pravoúhlého trojúhelníka (označení stran tedy není formální).

Očekávala jsem, že tento přístup, kdy žáci sami vyvodí Pythagorovu větu, to změní. U některých žáků jsem vypozorovala znaky formálního poznání (Hejný & Kuřina, 2001). Žáci si pouze vztah $a^2 + b^2 = c^2$ (abecedně) pamatují, nechápou, co je tímto vztahem vyjádřeno, nerozumí mu. Přesvědčila jsem se o tom tehdy, když jsem označila trojúhelník jinak než ABC. Někteří žáci si trojúhelník přeznačili na trojúhelník ABC. Většina těchto žáků, kteří se neztotožnili s daným odvozením vztahu, se pak setkala s problémem uvědomit si, co je odvěsna a co přepona. Při řešení úloh pak druhé mocniny dvou zadaných délek stran náhodně sčítali, méně často odčítali. Důležitým jevem bylo také to, že tito žáci odmítali nápomoc obrázkem. Vypozorovala jsem, že se většinou jednalo o žáky, které objevování zatím moc nebaví, kteří se neradi zabývají problémy a spíše čekají, že to objeví někdo jiný a že oni objev převezmou.

Nakonec mi dovolte jednu odbočku. Ve vyučování se často potýkám s následujícím problémem. Žáci jsou k nám na gymnázium přijati na základě prospěchu na základní škole a úspěšnosti u přijímacích zkoušek. Potom chtějí i nadále patřit mezi ty nejúspěšnější, jak tomu bylo na základní škole. Je tedy těžké je přimět k tomu, aby si navzájem naslouchali a snažili se pochopit i řešení či nápady ostatních. Většinou upřednostňují pouze své přístupy, proto se při řešení různých problémů vyskytuje velké množství nápadů a myšlenek. S těmito jedinci je tedy na základě této zkušenosti zřejmě vhodnější individuální forma práce.

Literatura

Hejný M. & Kuřina F. *Dítě, škola a matematika*. Praha, Portál 2001

Müllerová J., Čižmár J., Divíšek J. & Macháček V. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. I. díl. Praha, SPN 1990

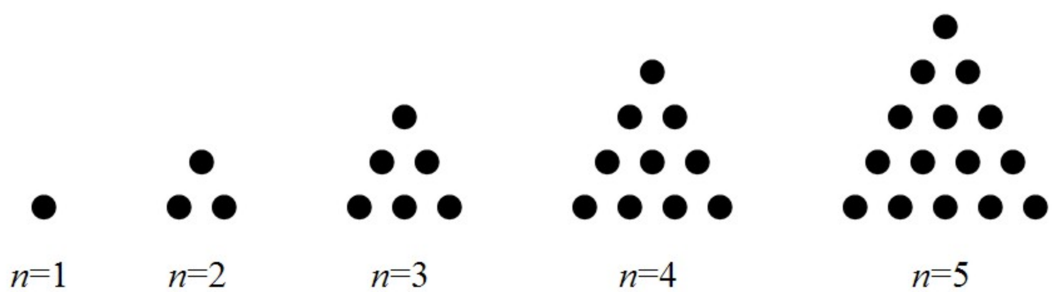
Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, aritmetické posloupnosti vyšších řádů[1]

Jaroslav Zhouf[2]

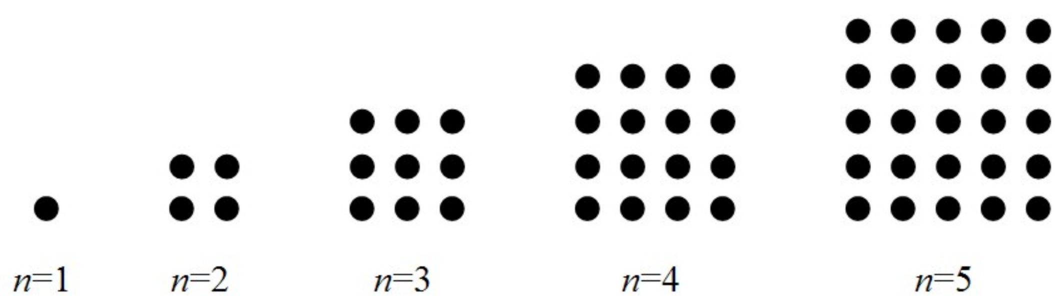
Pascalův trojúhelník je schéma přirozených čísel, která má své využití např. v binomické větě, avšak dá se v něm najít řada dalších zajímavých vlastností. V tomto příspěvku si všimneme souvislosti mezi figurálními čísly a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů.

Figurální čísla

Pythagorejci hluboce zkoumali přirozená čísla. Používali k tomu také geometrické interpretace těchto čísel. Ke znázornění přirozených čísel používali kamínky, které rovnali do geometrických obrazců. Podle toho rozeznáváme čísla trojúhelníková (obr. 1), čtvercová (obr. 2), pětiúhelníková (obr. 3), ... , čtyřstěnová, krychlová, ...



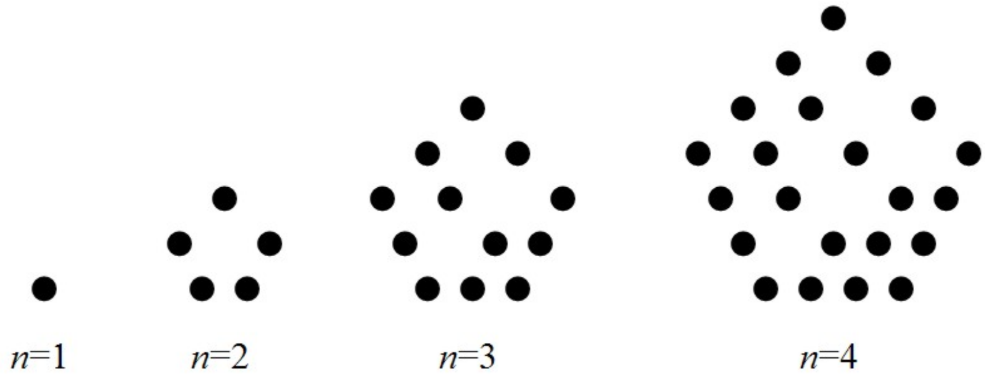
Obr. 1



Obr. 2

[1]Tento příspěvek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*



Obr. 3

Napišme si vždy několik prvních výše uvedených figurálních čísel a také vzorec pro příslušné n-té figurální číslo pro libovolné přirozené číslo n.

Trojúhelníková čísla jsou $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ \dfrac{n\,(n+1)}{2},\ \ldots$

Čtvercová čísla jsou $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$

Pětiúhelníková čísla jsou $1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \ldots,\ \dfrac{n\,(3n-1)}{2},\ \ldots$

Čtyřstěnová čísla jsou $1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ \ldots,\ \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},\ \ldots$

Krychlová čísla jsou $1, 8, 27, 64, 125, \ldots, n^3, \ldots$

Pascalův trojúhelník

Na obr. 4 a obr. 5 je Pascalův trojúhelník, který obsahuje binomické koeficienty.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Obr. 4

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Obr. 5

Všimněme si třetího šikmého sloupce jdoucího zprava shora doleva dolů. V něm jsou zapsána všechna trojúhelníková čísla

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ ...,\ \frac{n\,(n+1)}{2},\ ... = \binom{2}{2},\ \binom{3}{2},\ \binom{4}{2},\ \binom{5}{2},\ \binom{6}{2},\ ...,\ \binom{n+1}{2},\ ...$$

pro každé přirozené číslo n.

Stejně tak čtvrtý šikmý sloupec jdoucí zprava shora doleva dolů představuje všechna čtyřstěnová čísla

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ ...,\ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},\ ... =$$
$$= \binom{3}{3},\ \binom{4}{3},\ \binom{5}{3},\ \binom{6}{3},\ \binom{7}{3},\ ...,\ \binom{n+2}{3},\ ...$$

pro každé přirozené číslo n.

Pro další úvahy si je třeba uvědomit ještě jeden vztah mezi kombinačními čísly, který platí pro všechna přirozená čísla k a n i pro $k = 0$:

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+...+\binom{n-1}{0}=\binom{n}{1}$$

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+...+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+...+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+...+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{4}$$

....

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+...+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}$$

....

Aritmetické posloupnosti vyšších řádů

V Pascalově trojúhelníku se nachází aritmetická posloupnost

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...,\ n,\ ...=\binom{1}{1},\ \binom{2}{1},\ \binom{3}{1},\ \binom{4}{1},\ \binom{5}{1},...,\binom{n}{1},\ ...$$

Její n-tý člen je $n=\binom{n}{1}$, což je lineární výraz. Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$, což je kvadratický výraz.

Napíšeme-li si posloupnost trojúhelníkových čísel z Pascalova trojúhelníku

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ ...,\ \frac{n\left(n+1\right)}{2},\ ...=\binom{2}{2},\ \binom{3}{2},\ \binom{4}{2},\ \binom{5}{2},\ \binom{6}{2},...,\binom{n+1}{2},\ ...$$

a vytvoříme-li rozdíly každých dvou sousedních členů této posloupnosti, dostaneme aritmetickou posloupnost

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...,\ n,\ ...=\binom{2}{1},\ \binom{3}{1},\ \binom{4}{1},\ \binom{5}{1},...,\binom{n}{1},\ ...$$

Posloupnost

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ ...,\ \frac{n\left(n+1\right)}{2},\ ...=\binom{2}{2},\ \binom{3}{2},\ \binom{4}{2},\ \binom{5}{2},\ \binom{6}{2},...,\binom{n+1}{2},\ ...$$

patří mezi tzv. aritmetické posloupnosti druhého řádu. Její n-tý člen je $\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$, což je kvadratický výraz. Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$, což je kubický výraz.

Obdobně posloupnosti čtvercových čísel a pětiúhelníkových čísel patří mezi aritmetické posloupnosti druhého řádu. Jejich n-té členy jsou také kvadratické výrazy.

Obecně je $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *aritmetická posloupností druhého řádu*, právě když je $(b_{n+1} - b_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost. Každá aritmetická posloupnost druhého řádu je kvadratická funkce .

Proto nám známou aritmetickou posloupnost můžeme nazývat *aritmetická posloupnost prvního řádu*. Každá aritmetická posloupnost prvního řádu je lineární funkce.

Potom konstantní posloupnost, např. 1, 1, 1, 1, ... v Pascalově trojúhelníku, bychom mohli nazvat *aritmetická posloupnost nultého řádu*. Každá aritmetická posloupnost nultého řádu je konstantní funkce.

Všimněme si ještě posloupnosti čtyřstěnových čísel v Pascalově trojúhelníku

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ ...,\ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},\ ... =$$

$$= \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \binom{7}{3}, ..., \binom{n+2}{3}, ...$$

a vytvořme rozdíly každých dvou sousedních členů této posloupnosti:

$$3,\ 6,\ 10,\ 15,\ ...,\ \frac{n\,(n+1)}{2},\ ... = \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2} ..., \binom{n+1}{2}, ...$$

Dostali jsme aritmetickou posloupnost druhého řádu. Proto posloupnost

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ ...,\ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},\ ... =$$

$$= \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \binom{7}{3}, ..., \binom{n+2}{3}, ...$$

patří mezi tzv. aritmetické posloupnosti třetího řádu. Její n-tý člen je $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$, což je kubický výraz. Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4}$, což je polynom čtvrtého stupně.

Obdobně posloupnost krychlových čísel patří mezi aritmetické posloupnosti třetího řádu. Je to kubická funkce.

Obecně je $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *aritmetická posloupností třetího řádu*, právě když je $(c_{n+1} - c_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost druhého řádu. Každá aritmetická posloupnost třetího řádu je kubická funkce.

V Pascalově trojúhelníku se pak dále nacházejí aritmetické posloupnosti všech dalších vyšších řádů.

Pascalův trojúhelník poskytuje jen několik aritmetických posloupností vyšších řádů. Vytvoříme-li si podle stejného pravidla obdobný trojúhelník, můžeme si vytvořit libovolné posloupnosti vyšších řádů. Jeden takový trojúhelník je na obr. 6.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 2 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & 3 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 5 & & -1 & & & & \\
 & & & 2 & & 7 & & 4 & & 0 & & & \\
 & & 2 & & 9 & & 11 & & 4 & & 5 & & \\
 & 2 & & 11 & & 20 & & 15 & & 9 & & -2 & \\
2 & & 13 & & 31 & & 35 & & 24 & & 7 & & 3 \\
\ldots & & & & & & \ldots & & & & & & \ldots
\end{array}
$$

Obr. 6

Tento trojúhelník byl vytvořen tak, že první šikmý sloupec jdoucí zprava shora doleva dolů se skládá ze samých stejných čísel a první šikmý sloupec jdoucí zleva shora doprava dolů je vytvořen z libovolných čísel. Ostatní čísla v trojúhelníku se doplní stejně, jako se tvoří Pascalův trojúhelník.

Otázkou je, jak lze najít pro tento trojúhelník vzorce pro n-té členy příslušných aritmetických posloupností vyšších řádů. Tuto problematiku řeší teorie tzv. diferenčních rovnic. My zde tento postup provedeme, aniž bychom něco o teorii diferenčních rovnic věděli.

Vzorce pro n-tý člen a součet prvních n členů konkrétní aritmetické posloupnosti vyššího řádu

Z předchozích odstavců víme, že n-tý člen aritmetické posloupnosti k-tého řádu je polynom k-tého řádu a že součet prvních n členů této posloupnosti je polynom $(k+1)$-ního řádu. A právě této znalosti využijeme v dalších úvahách. Vše si předvedeme na konkrétních posloupnostech v trojúhelníku na obr. 6.

Posloupnost

$$2, 2, 2, 2, 2, \ldots$$

je aritmetická posloupnost nultého řádu, její n-tý člen je 2 a součet prvních n členů je $2n$.

Posloupnost

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

je aritmetická posloupnost prvního řádu, jejíž n-tý člen je $2n+1$. Součet prvních n členů je kvadratický výraz, tj.

$$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = an^2 + bn + c.$$

Koeficienty a, b, c můžeme získat např. dosazením tří prvních hodnot proměnné n do této rovnosti:

$$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$3 + 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$3 + 5 + 7 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

Toto je soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých, jejíž řešením jsou čísla $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$. Proto součet prvních n členů této posloupnosti prvního řádu je $n^2 + 2n$.

Posloupnost

$$-1, 4, 11, 20, 31, ...$$

je aritmetická posloupnost druhého řádu. Její n-tý člen je kvadratický výraz $an^2 + bn + c$. Koeficienty a, b, c opět můžeme získat např. z prvních tří členů této posloupnosti:

$$\begin{aligned} -1 &= a + b + c \\ 4 &= 4a + 2b + c \\ 11 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

Odtud je $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$. Takže n-tý člen této posloupnosti druhého řádu je $n^2 + 2n - 4$.

Součet prvních n členů posloupnosti

$$-1, 4, 11, 20, 31, ...$$

je kubický výraz, takže platí

$$-1 + 4 + 11 + 20 + ... + \left(n^2 + 2n - 4\right) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Koeficienty a, b, c, d můžeme analogicky získat např. dosazením čtyř prvních hodnot proměnné n do této rovnosti:

$$\begin{aligned} -1 &= a + b + c + d \\ 3 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 14 &= 27a + 9b + 3c + d \\ 34 &= 64a + 16b + 4c + d \end{aligned}$$

Odtud je $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{17}{6}$, $d = 0$. Proto součet prvních n členů této posloupnosti druhého řádu je $\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{6}n$.

Vzorce pro n-tý člen a součet prvních n členů aritmetických posloupností dalších řádů bychom dostali z trojúhelníku na obr. 6 obdobným způsobem.

Odvození vzorců pro součet prvních n členů aritmetických posloupností vyšších řádů pomocí vzorců pro součet stejných mocnin prvních n přirozených čísel

Metodu uvedenou v nadpisu tohoto oddílu si předvedeme na jednom konkrétním příkladu, a to na posledním příkladu z předchozího oddílu. Budeme zde potřebovat znalost těchto identit:

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$

Ty se dají najít v některých tabulkách nebo se dají odvodit z Pascalova trojúhelníku, jak si ukážeme v následujícím oddíle.

Takže platí

$$-1+4+11+...+\left(n^2+2n-4\right)=$$
$$=\left(1^2+2\cdot 1-4\right)+\left(2^2+2\cdot 2-4\right)+\left(3^2+2\cdot 3-4\right)+...+\left(n^2+2n-4\right)=$$
$$=\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)+2\left(1+2+3+...+n\right)+n\cdot(-4)=\frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{6}n.$$

Vzorce pro součet stejných mocnin prvních n přirozených čísel

Pomocí známé identity

$$1+2+3+4+...+n=\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$$

je možné získat další identity, které představují součet stejných mocnin n prvních přirozených čísel:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$$

....

Víme, že v Pascalově trojúhelníku pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti druhého řádu platí

$$1+3+6+10+...+\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{6},$$

$$\frac{1\left(1+1\right)}{2}+\frac{2\left(2+1\right)}{2}+\frac{3\left(3+1\right)}{2}+\frac{4\left(4+1\right)}{2}+...+\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{6},$$

$$\frac{\left(1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2\right)+(1+2+3+4+...+n)}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6},$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

Odsud plyne

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=2\cdot\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}-\frac{n\,(n+1)}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Druhý výše uvedený vzorec se získá analogicky ze čtyřstěnových čísel v Pascalově trojúhelníku.

Ještě si ukážeme, jak se dají tyto vzorce objevit „beze slov“ (Nelsen, 1993). Snad je to patrné z obr. 7, kde je znázorněn součet

$$3\left(1^2+2^2+...+n^2\right)=(2n+1)\,(1+2+...+n)\,,$$

a z obr. 8, kde jsou znázorněny součty

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\,(n+1)\,,$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}\left[n\,(n+1)\right]^2.$$

Pětiúhelníková čísla

Na příkladu pětiúhelníkových čísel si ukážeme, jak se dá vzorcem vyjádřit n-té pětiúhelníkové číslo.

Pětiúhelníková čísla jsou postupně

$$1, 5, 12, 22, 35, ...$$

Rozdíly mezi sousedními členy této posloupnosti jsou

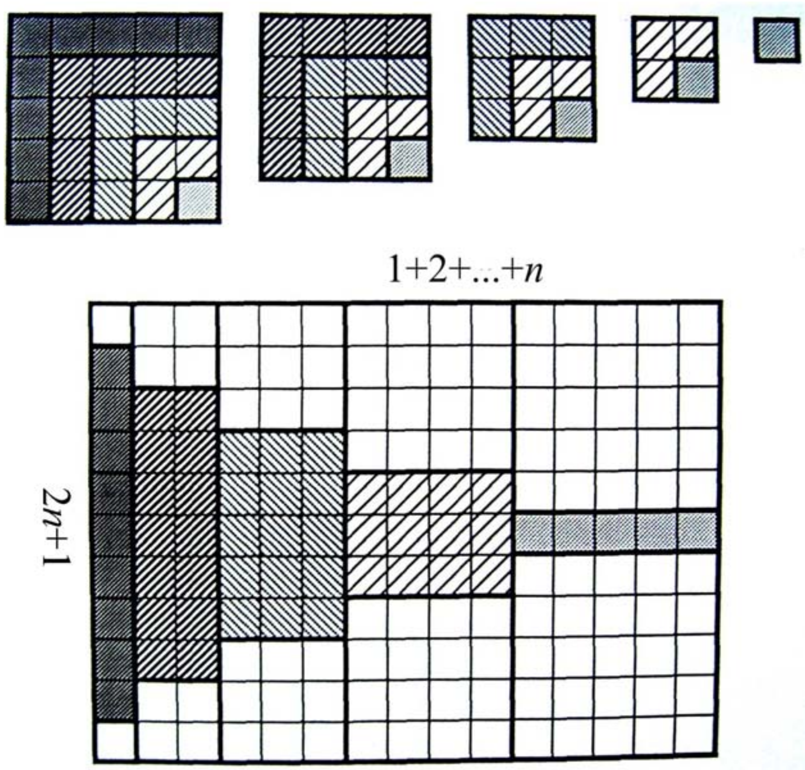
$$4, 7, 10, 13, ...,$$

což je aritmetická posloupnost prvního řádu. Proto pětiúhelníková čísla tvoří aritmetickou posloupnost druhého řádu. Takže n-té pětiúhelníkové číslo se dá vyjádřit ve tvaru an^2+ $+bn+c$. Již známým postupem najdeme koeficienty a, b, c:

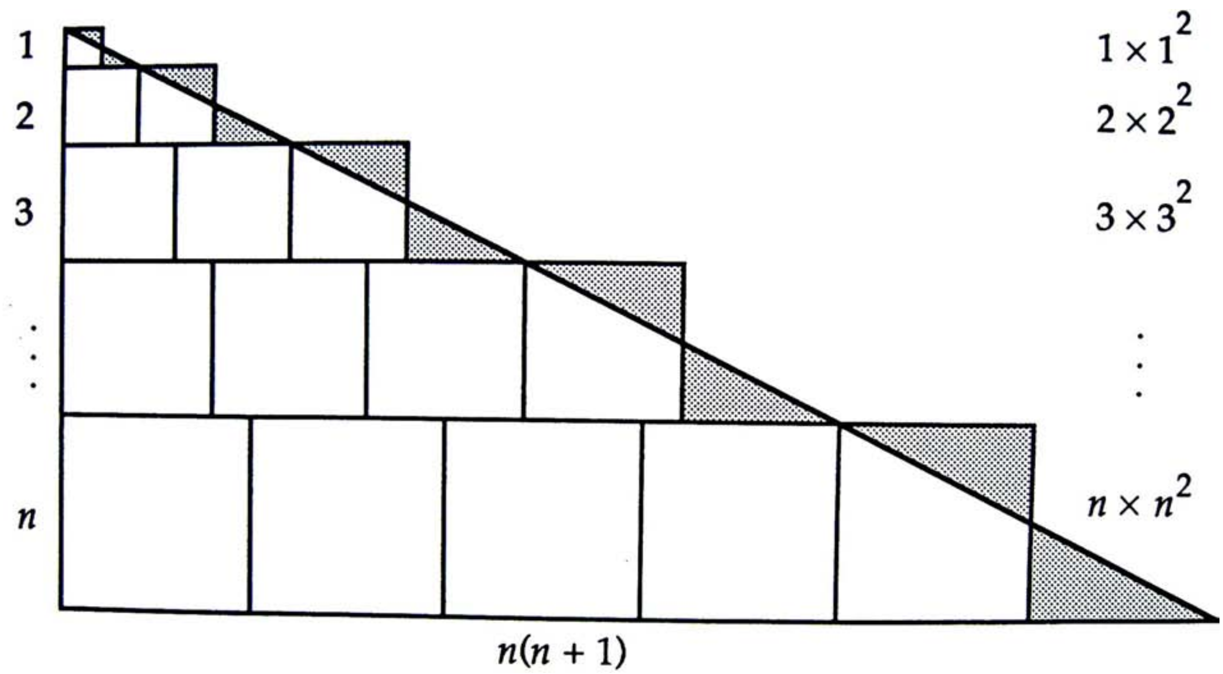
$$\begin{aligned}1&=a+b+c\\5&=4a+2b+c\\12&=9a+3b+c\end{aligned}$$

Z této soustavy plyne, že $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=0$. Proto n-té pětiúhelníkové číslo má tvar

$$\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n\,(3n-1)}{2}.$$



Obr. 7



Obr. 8

Pro pětiúhelníková čísla můžeme vytvořit číselný trojúhelník podobný Pascalovu trojúhelníku (obr. 9). Pětiúhelníková čísla jsou ve třetím šikmém sloupci zprava shora doleva dolů. A součet vždy několika prvních těchto čísel je ve čtvrtém šikmém sloupci stejně jako v Pascalově trojúhelníku.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 3 & & & & & & \\
 & & & & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 3 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 7 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 10 & & 12 & & 6 & & 1 & & \\
 & 3 & & 13 & & 22 & & 18 & & 7 & & 1 & \\
3 & & 16 & & 35 & & 40 & & 25 & & 8 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Obr. 9

Vzorec, který jsme odvodili v tomto oddíle pro pětiúhelníková čísla, můžeme opět odvodit „beze slov“ (Nelsen, 1993), což je dobře patrné z obr. 10. Tento obrázek sice znázorňuje čísla šestiúhelníková, pro pětiúhelníková čísla však platí stejná úvaha. Počet pětiúhelníkových čísel se dá podle tohoto obrázku vyjádřit výrazem

$$1 + 4\,(n-1) + 3 \cdot \frac{(n-2)\,(n-1)}{2},$$

což je rovno $\frac{n(3n-1)}{2}$.

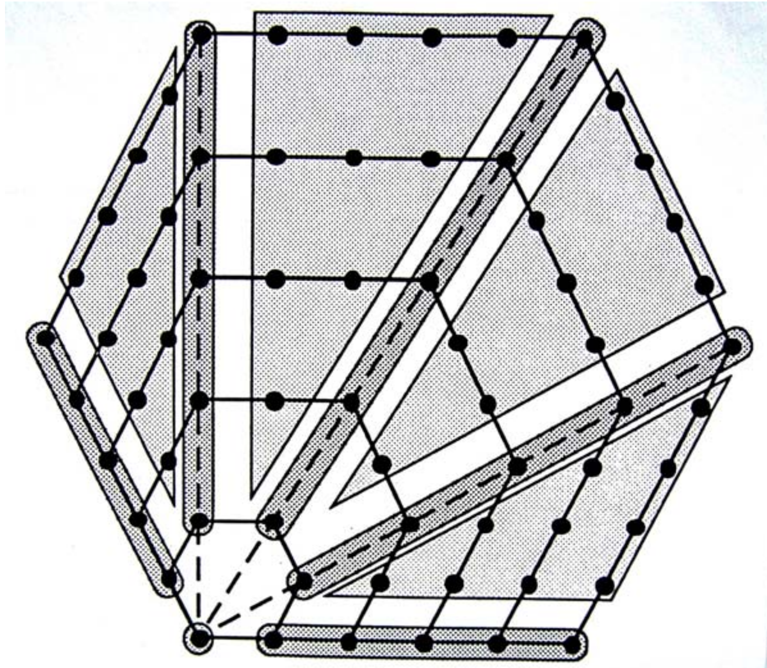
Úlohy

Úloha 1: Zvolte si nějakou aritmetickou posloupnost (prvního řádu) a k ní vytvořte aritmetické posloupnosti vyšších řádů, jestliže si zvolíte jejich konkrétní první členy. K těmto posloupnostem též vytvořte číselný trojúhelník obdobný Pascalovu trojúhelníku.

Úloha 2: Najděte vztahy pro n-tý člen a součet prvních n členů posloupnosti šestiúhelníkových čísel (obr. 10). Vytvořte k těmto hodnotám obdobu Pascalova trojúhelníku.

Úloha 3: Nechť aritmetická posloupnost (prvního řádu) má první člen a_1 a diferenci d. Najděte k ní vztah pro n-tý člen a součet prvních n členů aritmetické posloupnosti druhého řádu, která má první člen b_1.

Úloha 4: Zvolte si nějakou geometrickou posloupnost (prvního řádu) a k ní vytvořte geometrické posloupnosti vyšších řádů, jestliže si zvolíte jejich konkrétní první členy. K těmto posloupnostem též vytvořte číselný trojúhelník obdobný Pascalovu trojúhelníku.



Obr. 10

Literatura

[1] Nelsen, R. B. *Proofs without Words*. The Mathematical Association of America, Washington 1993.

[2] Polya, G. *Mathematical Discovery, Volume I*. John Wiley & Sons, New York, London 1966.

Pracovní dílny

Proč není $0,\overline{9} < 1$?

Petr Eisenmann[1]

Ve výuce matematiky na střední škole je často studenty diskutovanou otázkou problém:

Platí $0,\overline{9} < 1$ či $0,\overline{9} = 1$?

Ze své praxe vysokoškolského učitele vím, že valná většina čerstvých studentů prvního ročníku bez zaváhání zvolí první variantu. Jejich argumentace je většinou vždy stejná: „Jestliže to desetinné číslo začíná nulou, nemůže být rovno jedné, je menší než jedna.“ Podobně připomínají Mundy a Graham časté výroky studentů „Číslo $0,\overline{9}$ je přibližně 1, blíží se 1, ale není to přesně 1“ (Mundy & Graham, 1994). Při následné diskusi se studenty (ještě se k ní vrátíme) je vhodné uvést, že $0,\overline{9}$ je možné chápat jako nekonečný součet

$$0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots \tag{1}$$

Tak jsme se dostali k nekonečným číselným řadám. Klíčová otázka nyní zní: Jsou studenti schopni přijmout tezi, že součtem nekonečně mnoha (zde) kladných reálných čísel je vlastní číslo? Ve většině případů zní odpověď v tomto stádiu ne.

Bero uvádí, že úloha vypočítat součet nekonečné řady vyžaduje koordinované používání více pojmů souvisících s nekonečnem: počet členů nekonečné řady, nekonečný proces a součet nekonečné řady (Bero, 1985). Tyto pojmy nejsou v psychice studenta dostatečně diferencované, těžkosti způsobuje jenom jejich samostatné používání a v této situaci je navíc potřebné používat i vazby mezi nimi.

Podle mého názoru se dají vymezit tři základní problémy studentů při chápání pojmu součet nekonečné řady.

Za prvé jde o postoj studentů, že nekonečnou řadu sečíst nelze. Tento názor je podmíněný zkušenostmi studentů s konečnými součty:

„To nemůžeme určit, když to jde do nekonečna. Vždyť to nemá konec.“ (Gymnazista Ivan, 16 let)

„Vždyť když sčítám čísla do nekonečna, tak to nejde sečíst. Vždyť k tomu vždycky ještě něco připočítám.“ (Gymnazistka Marta, 17 let)

Za druhé je tu přirozená představa většiny studentů, že posloupnost částečných součtů nekonečné řady s kladnými členy roste nade všechny meze:

[1] *PF UJEP Ústí nad Labem, eisenmannp@pf.ujep.cz*

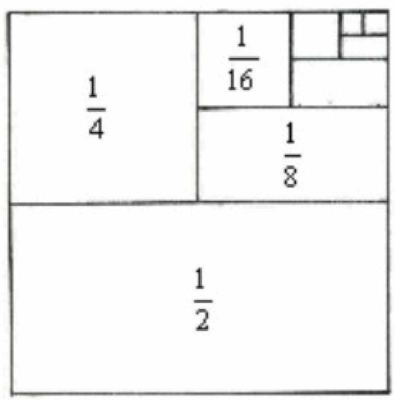
„Přece když přičtu ještě další číslo, tak se to vždycky zvětší, to se pořád zvětšuje, do nekonečna.“ (Gymnazista Petr, 16 let)

Tato představa koresponduje z hlediska vztahu fylogeneze a ontogeneze pojmu součet řady s přesvědčením Zenóna (asi 490–430 př. n. l.), že součet nekonečného počtu úseček musí být nekonečný (viz např. Trojovský, 1996).

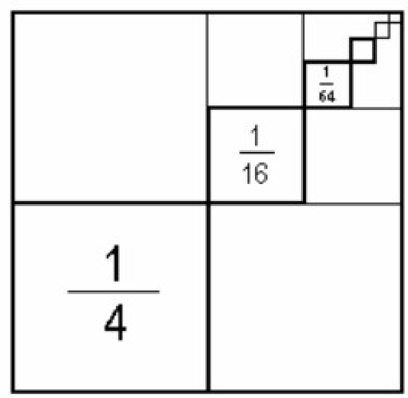
Překonat tuto představu lze u studentů pomocí názorných geometrických postupů. Připomeňme ku příkladu Oresmeho (Nicole Oresme: 1323?–1382) vtipné rozstříhání jednotkového čtverce (obr. 1) při důkazu rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1$$

.

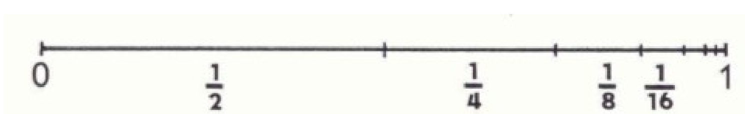


Obr. 1



Obr. 2

Totéž lze samozřejmě ukázat i na úsečce (obr. 3).



Obr. 3

Podobně uvádí např. Kuřina (1998) důkaz rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots = \frac{1}{3}$$

zřejmým obrázkem 2.

Po zvládnutí tohoto problému ve výuce tu však vyvstane třetí problém (úzce spjatý s tím prvním). Studenti například u obr. 3 argumentují:

„To stejně ale nikdy není jedna, jenom se té jedničce pořád přibližuju, ale nikdy to do ní nedojde.“ (Gymnazistka Marta, 17 let)

„Vždycky tam ještě kousek před tou jedničkou bude, i když budem sčítat pořád, vždycky do ní bude ještě kousek chybět.“ (Gymnazista Ondra, 18 let)

Uvedené výroky studentů jasně vyjadřují jejich potenciální chápání nekonečného procesu obsaženého v této úloze. Studenti ještě nemají zaveden součet řady jako limitu posloupnosti jejích částečných součtů. Ale i většina těch, kteří již tuto partii ve výuce absolvovali, reaguje při řešení nestandardních úloh o řadách podobně. K hlubšímu pochopení limity a tedy i nekonečného součtu vede dlouhá cesta.

Jak je možné při řešení posledně uvedeného problému ve výuce postupovat? Vraťme se k úvodnímu problému

$$\text{Platí } 0,\overline{9} < 1 \text{ či } 0,\overline{9} = 1?$$

Korektním postupem je probrat se studenty učivo o limitě posloupnosti, součtu řady, ukázat vzorec pro výpočet součtu nekonečné geometrické řady a pomocí něj pak součet řady (1) spočítat:

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 0,9 \cdot \frac{1}{1-0,1} = 1 \tag{2}$$

Uvedený problém je však vhodné prezentovat ve výuce již dříve než po probrání příslušných partií, nemluvě o tom, že na řadě středních škol se od geometrické posloupnosti již ten poslední skok k nekonečné řadě ani neudělá. Ještě podstatnější nevýhodou tohoto postupu je však to, že i přes formální zvládnutí dovednosti sčítat vhodné (konvergentní) geometrické řady pomocí vzorce (2) studenti obvykle nechápou podstatu toho, co dělají a souvislost s výrokem $0,\overline{9} = 1$ nevidí.

Učitelé na střední škole proto často používají pro zdůvodnění rovnosti $0,\overline{9} = 1$ „rovnicový“ postup

$$\begin{aligned} x &= 0,\overline{9} \quad &| \cdot 10 \\ 10x &= 9,\overline{9} \quad &| - \\ 9x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Toto „elegantní“ řešení obvykle na studenty zapůsobí. Je však založeno na drobném podvodu, jelikož zde kvůli odstranění nekonečné části desetinného čísla násobíme a odečítáme nekonečné desetinné rozvoje člen po členu, aniž se ptáme po oprávněnosti tohoto počínání.

Je vhodné na tomto místě studentům ukázat na nějakém jednoduchém příkladu, že zcela mechanicky se v některých případech s nekonečnými součty zacházet nedá (např.

Veselý, 1996):

$$
\begin{aligned}
0 =& (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 1-1+1-1+1-1+\cdots = \\
=& 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1
\end{aligned}
$$

Jako přínosná vzhledem k aktuálnímu vnímání nekonečného limitního procesu studenty se mi jeví diskuse vyvolaná dotazem do řad zastánců výroku $0,\overline{9} < 1$:

„Je-li $0,\overline{9} < 1$, musí být rozdíl $1 - 0,\overline{9}$ kladné reálné číslo, tak jako např. platí

$0,9 < 1$ a $1 - 0,9 = 0,1 > 0$.

Čemu je tedy $1 - 0,\overline{9}$ rovno?“

V obvykle velmi živé diskusi dospějí studenti brzy k závěru, že výsledkem nemůže být žádné číslo tvaru $0,000\,000\,001$, i kdyby tam těch 0 bylo sebevíc (korektně řečeno – libovolně, ale konečně mnoho). Důvod je jasný – součtem takového čísla s číslem $0,\overline{9}$ je zřejmě číslo větší než 1. Padají tedy návrhy $0,000\ldots1$ (vysvětlený výrokem „nekonečně mnoho nul a na konci jednička“) či „deset na mínus nekonečno“ (což se po diskusi ukáže být jako to samé). Tato diskuse se stále týká potenciálního a aktuálního vnímání nekonečného limitního procesu a je z hlediska formování představ o limitním procesu velice cenná.

Silný argument ve prospěch zastánců výroku $0,\overline{9} = 1$ nabízí vhodná interpretace známého Zenónova paradoxu Achilla a želvy (na tuto souvislost upozorňuje např. v krásném příběhu ze základní školy článek Hejný (1978)). Využijme zde tento paradox i my jako argument pro pravdivost výroku $0,\overline{9} = 1$.

> Achilles a želva běží závod na 100 m. Protože Achilles běží desetkrát rychleji než želva, dostane želva náskok 10 m. Kdo vyhraje? Nikoli Achilles, jak si všichni myslí, ale želva. Když totiž Achilles doběhne tam, kde v okamžiku startu stála želva, bude už želva o 1 m před Achillem. Než se Achilles dostane na toto místo, bude už želva o 1 dm před ním. A tak dále – Achilles želvu nikdy nedohoní.

Upravme si pro naše potřeby parametry tohoto „závodu“ takto: Achilles a želva od sebe budou v okamžiku startu vzdáleni o $d = 0,9$ m. Achilles poběží rychlostí $v_A = 1$ m/s a želva rychlostí $v_Z = 0,1$ m/s. Za jaký čas a v jaké vzdálenosti od startu Achilles želvu doběhne? Označme si na obr. 4 tento bod písmenem C. Vzdálenost $|AC|$ si označme x.

Obr. 4

Jak můžeme vzdálenost x vypočítat? Achilles potřebuje k dosažení bodu, ze kterého startovala želva (bod Z), čas t_1. Ten lehce určíme:

$$\begin{aligned} d &= v_A \cdot t_1 \\ 0,9 &= 1 \cdot t_1 \\ t_1 &= 0,9\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Za tento čas želva urazila dráhu

$$d_1 = v_Z \cdot t_1 = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09\ \mathrm{m}\,.$$

K dosažení tohoto bodu (bod Z_1) Achilles potřebuje z bodu Z čas $t_2 = 0,09$ s, neboť platí

$$\begin{aligned} d_1 &= v_A \cdot t_2 \\ 0,0 &= 1 \cdot t_2 \end{aligned}$$

Za tento čas urazí želva dráhu $d_2 = 0,009$ m. Takto bychom mohli pokračovat pořád dál. Hledanou vzdálenost x tedy můžeme vyjádřit jako nekonečný součet

$$x = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots,$$

tedy

$$x = 0,\overline{9}\ \mathrm{m}.$$

Tuto vzdálenost jsme ale schopni určit i jinak. Achilles i želva dosáhnou bodu C ve stejném čase t. Porovnáním drah uražených Achillem i želvou dostáváme

$$\begin{aligned} v_A \cdot t &= v_Z \cdot t + 0,9 \\ 1 \cdot t &= 0,1 \cdot t + 0,9 \\ t &= 1s. \end{aligned}$$

Tedy platí

$$x = v_A \cdot t = 1\ \mathrm{m}.$$

Na závěr chci vyjádřit své přesvědčení, že pro výuku diskutovaných partií je vhodná posloupnost kroků: Motivace pomocí problému součtu nekonečné řady (např. $0,\overline{9} = 1$) $\rightarrow$ limita posloupnosti $\rightarrow$ součet řady (Při sestavování definice limity posloupnosti se přimlouvám za její postupné vymezení přes jednodušší případ limity monotónní (např. klesající) posloupnosti – klíčová idea závislosti z definice limity zde obsažena je a přítomny jsou pouze dva kvantifikátory). Námitkou proti uvedenému, až na úvodní motivaci tradičnímu postupu, může být fakt, že tento postup nerespektuje princip souladu fylogeneze a ontogeneze pojmu součet řady. Limita posloupnosti je zde nahlížena jako jednodušší, základní pojem, jehož zvládnutí je nezbytné pro pochopení součtu nekonečné řady. Přitom však například Archimédes sčítal nekonečné číselné řady, aniž měl (potřeboval) limitu. Přesněji řečeno, neměl k dispozici definici limity – limitní proces v podobných úvahách přítomen byl již před Archimédem (například Antifonův výpočet obsahu kruhu pomocí postupného vepisování mnohoúhelníků do kruhu (5. st. př. n. l.) či Eudoxova exhaustační metoda (4. st. př. n. l.), podrobně viz např. Gunčaga (2002). Studenti se však před probíráním nekonečných řad nesetkávají ve výuce s dostatečným množstvím modelů limitního procesu a nemají tedy na co navazovat. Princip genetické paralely navíc není ve výuce matematiky univerzální, což dokumentuje na tradičním postupu Diferenciální počet → Integrální počet např. Knoche a Wippermann (1986, s. 73).

Literatura

Bero, P. *Nosné pojmy diferenciálneho počtu z hľadiska vyučovania*. Disertační práce na MFF UK Bratislava, 1985.

Gunčaga, J. *Limitné procesy z didaktického hľadiska*. Rigorózna práca, Katolícka univerzita Rožumberok, 2002.

Hejný, M. Achilles a korytnačka ako problém. *Matematika a fyzika ve škole*, 9 (1978), 102–105.

Knoche, N. & Wippermann, H. *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. BI – Wissenschaftsverlag, Zürich, 1986.

Kuřina, F. Matematika v obrazech (4). *Učitel matematiky*, 6 (1998), 193–202.

Mundy, F. J. & Graham, K. Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives and Integrals. In *MAA Notes 33*, 1994, 31–45.

Trojovský, P. Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada. In *Člověk, umění, matematika*. Prometheus, Praha, 1996, 167–177.

Veselý, J. O některých důležitých řadách. In *Člověk, umění, matematika*. Prometheus, Praha, 1996, 137–154.

MATE vás teMATIKA?[1]

aneb Dvě témata, která se nemohla rozhodnout, kam patří

Jan Herman, Magdalena Prokopová[2]

Na 8. ročníku semináře Dva dny s didaktikou matematiky jsme uspořádali pracovní dílnu s názvem MATE vás teMATIKA?, jejíž obsah byl různorodý (o čemž vypovídá i její název). Zvolili jsme totiž taková témata, která spojují několik oblastí matematiky.

[1]Práce vznikla s podporou grantu GAČR 406/02/0829.

[2]*PedF UK Praha, hermos@c-box.cz; KM PF UJEP Ústí nad Labem, prokopova@pf.ujep.cz*

Měli jsme k tomu několik důvodů. Jednak jsme přesvědčeni, že činnostmi, které vyžadují znalosti z několika matematických oblastí, lze překonávat některé zažité formalismy. Dále věříme, že takové počínání rozvíjí logické myšlení a představivost (žáků či učitelů?). A v neposlední řadě doufáme, že prostřednictvím takových činností je možné žákům ukázat krásu matematiky a přesvědčit je, že matematika je zajímavá.

Z celého obsahu dílny jsme pro tento článek vybrali dvě ucelená témata: *Matematika s papírem formátu A4* a *Obsahy a výrazy*. Obě v sobě zahrnují především algebru a geometrii, a to v různých podobách a rozsazích.

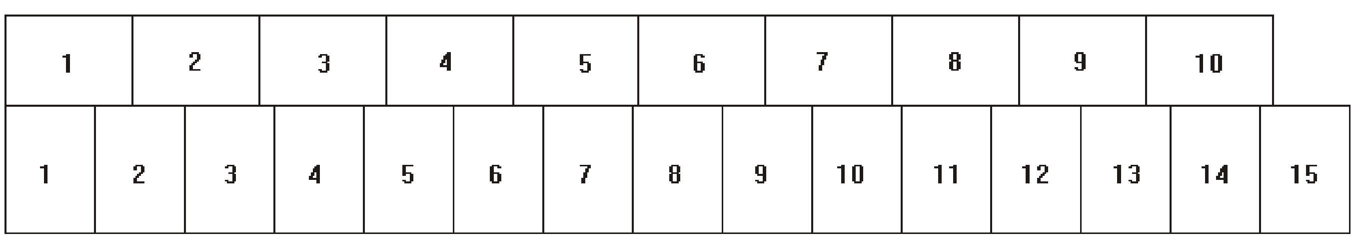
Doporučujeme čtenářům, aby se jednotlivé výzvy či úkoly, které jsou v textu uvedeny, pokusili plnit samostatně a pak se teprve seznámili s námi navrhovaným řešením. Nejlépe tak totiž poznají smysl celého našeho počínání.

Matematika s papírem formátu A4

Bez velkého překvapení půjde skutečně o práci s obyčejným papírem formátu A4. Budeme jich potřebovat několik (čím více, tím lépe) a nebude vadit, pokud budou některé již použité.

Prvním úkolem je určit poměr délek stran listu A4[3]. K řešení je možné použít libovolné množství listů, listy lze překládat, stříhat apod. Není však povoleno používat pravítko s měřítkem.

Jistě vede mnoho cest, jak dospět ke správnému závěru. Naznačíme tři z nich. Je-li naším úkolem určit poměr dvou délek, můžeme se snažit nějaký násobek jedné strany vyjádřit jako (jiný) násobek té druhé. Budeme tak klást vedle sebe kratší a delší strany listu A4 a čekat, až se tyto násobky budou rovnat. Máme-li dost místa, můžeme dojít k zajímavým výsledkům. Označme kratší stranu listu a a delší b.



Obr. 1

Takovýmto skládáním papíru dostaneme první odhad poměru. Na obrázku jsou nejblíže délky $7a$ a $5b$, odtud odhadujeme

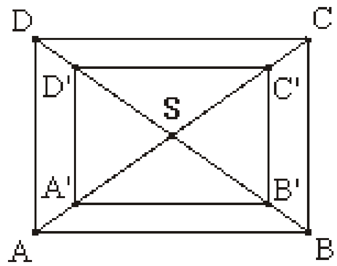
$$\frac{b}{a} \doteq \frac{7}{5} = 1,4.$$

[3]Přesněji bychom měli říci obdélníku, jehož je ideální list formátu A4 modelem. Pro lepší přehlednost textu budeme ale nadále používat jednoduše „obdélník A4“. Podobně i pro další formáty.

Budeme-li pokračovat ve skládání papíru, dalším odhadem bude číslo

$$\frac{b}{a} \doteq \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}.$$

Lepší odhad již asi nezískáme, protože by to vyžadovalo neúměrně velký prostor.



Obr. 2

Můžeme také zvolit zcela jiný přístup, tedy geometrický. Mnoho lidí má jisté ponětí o vztahu obdélníku A4 a A5. Snadno můžeme ukázat, že jsou tyto obdélníky podobné. (Mladší žáci by k tomuto závěru mohli dojít, pokud by předešlý experiment zopakovali s listem A5.) Důkaz je totiž zřejmý z obrázku 2 (resp. z přeložených listů). Obdélník $ABCD$, resp. $A'B'C'D'$, je obdélník A4, resp. A5. Bod S je střed stejnolehlosti, která obdélník $ABCD$ zobrazí na obdélník $A'B'C'D'$.

Také mnozí dobře víme, že obsah obdélníku A4 je dvojnásobek obsahu obdélníku A5. (Stačí vhodně přeložit obdélník A4 a porovnat s obdélníkem A5.) Tedy druhá mocnina koeficientu podobnosti je 2. Proč to tak je, také snadno odvodíme (pokud tento vztah není ještě známý). Označme koeficient podobnosti k, kratší stranu obdélníku A5 a' a delší stranu b'. Potom platí $a = ka',\ b = kb'$. Navíc víme, že $ab = 2a'b'$. Odtud již $k^2 = 2$.

Dále víme (popřípadě to můžeme lehce ověřit), že pro délky stran obdélníků A4 a A5 platí $a = b',\ b = 2a'$. Nakonec použijeme vlastnosti podobných obdélníků, totiž že se zachovává poměr délek stran. Odtud už snadno plyne

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{a}{\frac{b}{2}},$$

neboli

$$b^2 = 2a^2,$$

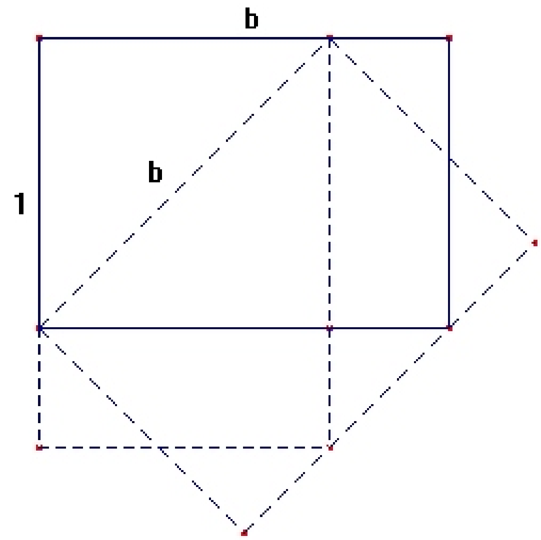
a protože se jedná o délky stran, platí

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}.$$

Všechny předešlé úlohy si můžeme zjednodušit, pokud kratší stranu obdélníku A4 prohlásíme za jednotku. Hledáme pak délku delší strany v těchto jednotkách ($a = 1 \Rightarrow \Rightarrow b = \sqrt{2}$).

K cíli vede ještě další cesta a tou je překládání. Mnozí tuto vlastnost znají, nebyla ale vyslovena explicitně. Pokud si totiž chcete vyrobit čtverec o straně délky 1 (tj. o straně a), použijete k tomu jeho úhlopříčku. Právě tato úhlopříčka má shodnou délku jako delší strana obdélníku, tj. b.

Pokud jsme došli k tomuto závěru pomocí přehýbání, můžeme se zajímat o to, jaký poměr budou mít strany v obdélníku A5 a tak dospět ke skutečnosti , že obdélníky A4 a A5 jsou podobné. [4] Stejnou úvahu můžeme zopakovat samozřejmě i pro jiné formáty, neboli všechny formáty „AX“ si jsou podobné. Poznamenejme ještě, že obdélník, jehož strany jsou právě v poměru $\sqrt{2}$ se nazývá *normalizovaný*.[5]

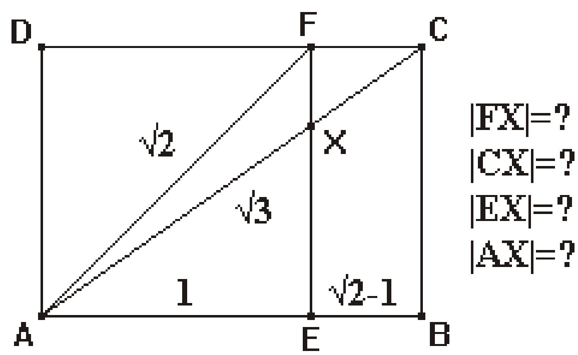


Obr. 3

Pro zajímavost se ještě vraťme k původnímu postupu. Tehdy jsme dospěli k odhadu $\frac{b}{a} \doteq \frac{17}{12} = = 1,41\overline{6}$. Všimněte si, jak blízko jsme byli, protože ve skutečnosti $\frac{b}{a} = 1,4142\ldots$[6].

Nyní můžeme do obdélníku A4 doplnit některé zajímavé délky stran a úhlopříček. Přeložením (pomocí úhlopříčky) vytvořte čtverec o délce strany a (neboli délky 1). Dále vyznačte (opět přeložením) úhlopříčku obdélníku A4. Tak jsme vytvořili několik úseček. Jaké jsou jejich délky?

Řešení je zakresleno do obrázku 4.



Obr. 4

Výpočet délek úseček $AX,\ EX,\ CX$ a FX ponecháváme čtenáři.

Pro žáky bude jistě snadné odpovědět na následující otázky. Kolik listů A4 (právě) potřebuji k vytvoření listu A3, A2, A1 a A0? A jakou jeho část pro listy A5, A6, A7 a A8? Jaké jsou koeficienty podobnosti těchto obdélníků?.

Pro přehlednost zapíšeme výsledky do tabulky. Výpočty je vhodné začínat od listu A3, resp. listu A5.

[4] Jaký je koeficient podobnosti? Tato otázka má smysl, pokud jste postupovali „v opačném pořadí“. Nezáleží tedy na tom, odkud začít, ale je zajímavé uvědomit si různé možnosti.

[5] Někomu se možná v tuto chvíli vybavuje pojem *zlatý obdélník*, jehož strany jsou v tzv. zlatém poměru, tj. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[6] Stojí za zmínku, že jsme tak narazili na skutečnost, že existuje posloupnost racionálních čísel, jejíž limitou je $\sqrt{2}$, tedy číslo iracionální.

formát	je	počet listů A4	koef. podobnosti k A4
A0	2·A1 = 16·A4	2^4	2^2
A1	2·A2 = 8·A4	2^3	$2^{\frac{3}{2}}$
A2	2·A3 = 4·A4	2^2	2^1
A3	2·A4	2^1	$2^{\frac{1}{2}}$
A4	1·A4	2^0	$2^{\frac{0}{2}}$
A5	$\frac{1}{2}$·A4	2^{-1}	$2^{-\frac{1}{2}}$
A6	$\frac{1}{2}$·A5 = $\frac{1}{4}$·A4	2^{-2}	2^{-1}
A7	$\frac{1}{2}$·A6 = $\frac{1}{8}$·A4	2^{-3}	$2^{-\frac{3}{2}}$
A8	$\frac{1}{2}$·A7 = $\frac{1}{16}$·A4	2^{-4}	2^{-2}

Ještě chvíli budeme pokračovat ve stejném duchu. Velikosti stran obdélníku A0 jsou zvoleny tak, aby byl jeho obsah 1m^2. Můžeme se tak ptát, jaké jsou obsahy dalších formátů nebo jaké jsou délky $a,\ b$ stran obdélníků AX.

Výsledky opět uspořádáme do tabulky.

formát	obsah [m^2]	a [m]	b [m]
A0	$2^0 = 1$	$2^{-\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{4}}$
A1	$2^{-1} = 0,5$	$2^{-\frac{3}{4}}$	$2^{-\frac{1}{4}}$
A2	$2^{-2} = 0,25$	$2^{-\frac{5}{4}}$	$2^{-\frac{3}{4}}$
A3	$2^{-3} = 0,125$	$2^{-\frac{7}{4}}$	$2^{-\frac{5}{4}}$
A4	$2^{-4} = 0,0625$	$2^{-\frac{9}{4}}$	$2^{-\frac{7}{4}}$
A5	$2^{-5} = 0,03125$	$2^{-\frac{11}{4}}$	$2^{-\frac{9}{4}}$
A6	$2^{-6} = 0,015625$	$2^{-\frac{13}{4}}$	$2^{-\frac{11}{4}}$
A7	$2^{-7} = 0,0078125$	$2^{-\frac{15}{4}}$	$2^{-\frac{13}{4}}$
A8	$2^{-8} = 0,00390625$	$2^{-\frac{17}{4}}$	$2^{-\frac{15}{4}}$

K další práci si musíme připravit několik dalších pomůcek. Jednak čtverec o délce strany a, nadále mu budeme říkat čtverec A4 a analogicky pro ostatní formáty. Dále pak alespoň 4 trojúhelníky, které vzniknou přepůlením obdélníku A4 podle jeho úhlpříčky, nadále jim budeme říkat O-trojúhelníky. Zde je vhodné, aby byl papír, ze kterého budeme O-trojúhelníky vyrábět, právě z jedné strany potištěný nebo popsaný. Na závěr budeme potřebovat alespoň 4 trojúhelníky, které vzniknou přepůlením čtverce A4 podle jeho úhlopříčky. Takovým trojúhelníkům budeme říkat Č-trojúhelníky. Pokud by mohlo dojít k nedorozumění, zdůrazníme, že jde o O-trojúhelníky A4, resp. Č-trojúhelníky A4 apod. (Můžete si připravit i podobné čtverce a trojúhelníky z formátu A5, resp. A3.)

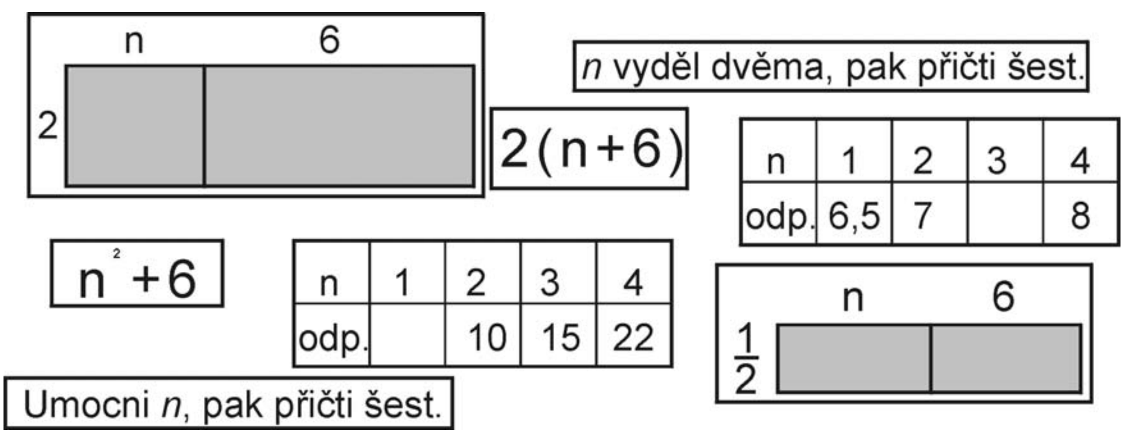
Úkoly, které nás nyní čekají, všechny souvisí se sestavováním čtverců z připravených trojúhelníků. Protože těžiště těchto úkolů spočívá ve skutečné manipulativní činnosti, předneseme zde jen výzvy a ponecháme čtenáře, aby si na ně (pokud ho ještě papír A4 neomrzel) odpověděl sám. Nebo ještě lépe, aby podobné otázky sám kladl.

Výzvy a otázky: (1) Sestavte čtverec ze čtyř Č-trojúhelníků (trojúhelníky se nesmí překrývat). Jakou délku má jeho strana? Jaký má obsah? Jaký nejmenší formát papíru AX je zapotřebí, aby bylo možné vyrobit tento čtverec z jediného dílu? (2) Sestavte čtverec ze čtyř O-trojúhelníků. Je ho možné vyrobit, aniž by měl „díru“? Proč? Jakou délku má jeho strana? Jaký má obsah? Je možné ho sestavit buď jen z potištěných (resp. nepotištěých) dílů nebo právě ze dvou potištěných a ze dvou nepotištěných? Kdy to lze a proč? Jaký nejmenší formát papíru AX je zapotřebí, aby bylo možné vyrobit tento čtverec z jediného dílu? Je možné sestavit i jiný čtverec z těchto O-trojúhelníků? atd. (3) Je možné také sestavit jiný čtverec ze čtyř Č-trojúhelníků? atd. (4) Porovnejte obsahy všech takto vzniklých čtverců. (5) Překládáním čtverce A4 vytvořte čtverec s polovičním obsahem. Jaká je délka jeho strany? Jaký nejmenší formát by byl zapotřebí, aby bylo možné vyrobit tento čtverec z jediného dílu? atd.

Je zřejmé, že zde můžeme takto klást další a další otázky kolem obsahů a délek, nejrůznějších formátů, čtverců i trojúhelníků. Cenným přínosem takových činností může být rozvoj představivosti. Navíc tím, že žák pracuje se skutečnými předměty, získává přímou zkušenost s iracionálními čísly a s jejich velikostmi. Iracionální čísla tak možná pozbudou atribut nereálnosti.

Obsahy a výrazy

Jak za okamžik zjistíte, toto téma v sobě zahrnuje víc, než by se z názvu mohlo zdát. Žáci dostanou 4 různé druhy kartiček: obrázky obdélníků, tabulky hodnot, výrazy s proměnnou a věty, které slovy popisují provedení početních operací s proměnnou. (Na obrázku jsou zobrazeny některé z kartiček.[7])



Obr. 5

Úkolem žáků je seskupit kartičky, které spolu navzájem souvisí, tzn. vytvořit balíčky kartiček, ve kterých výraz s proměnnou odpovídá obsahu obdélníku na obrázku, tabulka

[7]Zkratka „odp.“ v tabulce znamená „odpovídá“.

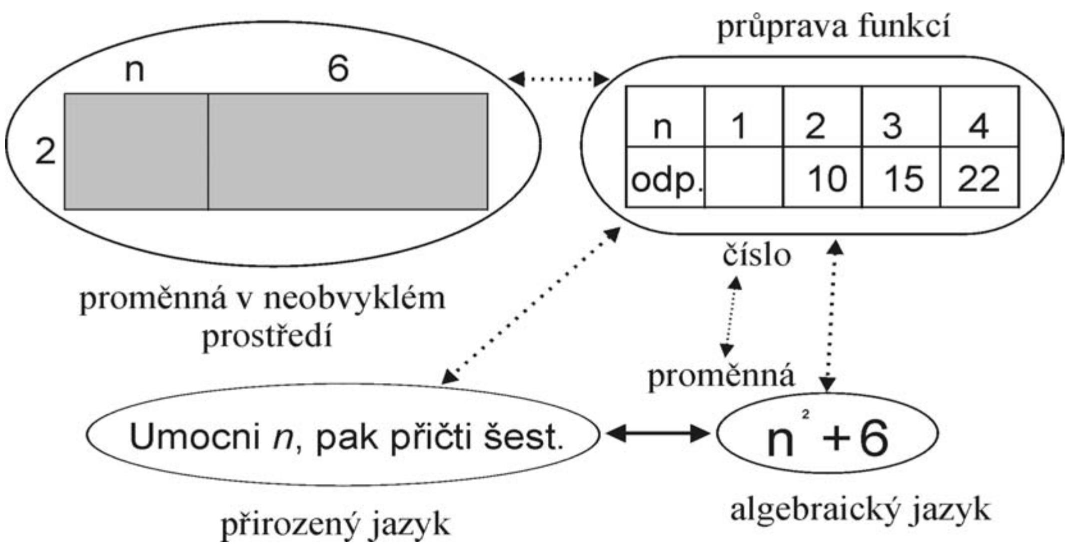
hodnot odpovídá dosazení čísla do výrazu a výraz je vlastně algebraickým zápisem věty, popisující provedení početních operací s proměnnou.

Kartičky jsou vytvořeny tak, aby se v některých balíčcích objevilo více různých kartiček stejného druhu (např. 2 kartičky s výrazy, které jsou ekvivalentní) a aby v některých balíčcích určité druhy kartiček chyběly (např. tabulka hodnot). Potom, co žáci vytvoří balíčky, následuje další výzva: „Doplňte nevyplněná políčka tabulek hodnot a vytvořte kartičky, které vám v balíčku chybí.“

Proč plnit takové úkoly?

Protože spojují znalosti z několika oblastí matematiky, jak jsme již uvedli. K výpočtu obsahu obdélníku na obrázku je zapotřebí pracovat s proměnnou v neobvyklém, i když důvěrně známém prostředí (obsahy obdélníků), což vede k lepšímu porozumění práci s proměnnou.

Při zařazování kartiček s tabulkami hodnot do některé skupiny musí žák dosazovat čísla za proměnnou. To vede k lepšímu porozumění podstaty proměnné a zároveň se jedná i o průpravu k funkcím.



Obr. 6

Závěr

Obě uvedená témata, i když připravená pro použití v hodinách matematiky, mají spíše sloužit pro inspiraci. Kolem nás je totiž mnoho materiálů, které je možné zařadit do výuky s cílem propojit znalosti z různých oblastí matematiky. Často se jedná o témata, která běžně v hodinách probíráme. Stačí se na ně podívat jinak než obvykle. Tento článek měl za úkol přesvědčit o tom, že to stojí za to.

Upřímně děkujeme našemu kolegovi Johnu Gardinerovi z Velká Británie za inspiraci a náměty.

Algebraické výrazy 8. ročníku ZŠ

Miroslav Hricz[1]

Na základě příkladů z historie matematiky lze ukázat, jak dlouhou a náročnou cestou prošla symbolika matematického myšlení. Současná symbolika algebry vznikla na konci 16. století. Jejím objevitelem byl francouzský matematik Francois Viéte (1540–1603). Nahrazování čísel písmeny znamenalo velký pokrok. Jeho jazyk mimo jiné přispěl k rozvoji infinitezimálního počtu a analytické geometrie.

Podle Hejného můžeme z didaktického hlediska práci s algebraickými výrazy rozdělit do tří hladin [1]:

- *modelování* – vyjadřování slovního textu pomocí symbolů
- *standardní manipulace* se symboly – úprava algebraických výrazů podle daných pravidel
- *strategická manipulace* se symboly – úpravy, při které nevystačíme s nacvičenými šablonami, potřebujeme objevit strategii postupu.

Pro žáky jsou úpravy algebraických výrazů velmi abstraktní, a proto je nutné věnovat dostatek času upevňování a prohlubování poznatků z této oblasti matematiky. Je dobré maximálně využít žákovskou aktivitu, schopnost pracovat samostatně či spolupracovat ve skupině.

Otevřená hodina

V pátek 13.2.2004 proběhla otevřená hodina v 8.A třídě ZŠ U Santošky 1, Praha 5. Byla zaměřena na úpravy výrazů. Cílem první části hodiny bylo procvičování sčítání výrazů (zábavnější formou pomocí sčítací pyramid), cílem druhé části hodiny bylo vyvození algoritmu pro násobení mnohočlenů.

Průběh hodiny

1. **Rozcvička**

   Žáci v rámci opakování říkali, co jsou výrazy, jak je rozdělujeme, určovali jednočleny a mnohočleny.

2. **Řešení sčítacích pyramid**

   Žáci dostali k vyplnění sčítací pyramidu (někteří pyramidu 1, jiní pyramidu 2). Po vyplnění se nemohli shodnout na výrazu, který je třeba doplnit do nejvyššího políčka

[1] *ZŠ U Santošky 1, Praha 5, www.santoska.cz, miroslav.hricz@santoska.cz, miroslav.hricz@centrum.cz*

pyramidy. Podle očekávání začali své výpočty kontrolovat, někteří „zkontrolovali“ výsledky sousedovi a vysvětlení bylo na světě.

Další dvě sčítací pyramidy (pyramida 3 a 4) řešili žáci nejprve samostatně, pak porovnávali výsledky ve tří až čtyřčlenných skupinkách. Někteří žáci si všimli toho, že je možné při řešení pyramidy 3 využít některé předchozí výpočty.

3. **Vyvozování algoritmu**

   Pro další práci žáků byla použita pyramida 6. Někteří žáci výrazy sčítali (přehlédli znaménko krát), jiní provedli pět výpočtů a tvrdili, že „dál už to nejde“. Jiní výrazy $2x + 8$ a $6x + 4$ vynásobili a získali výsledky $12x^2 + 32$ nebo $2x + 48x + 4 = 50x + 4$.

   Předpoklad, že žáci odhalí algoritmus pro násobení mnohočlenů, se nenaplnil. Úvahy žáků byly mnohdy správné, ale chyběl tolik potřebný čas. Pyramida 5 byla zadána jako domácí příprava.

Následující vyučovací hodina byla zahájena kontrolou domácí přípravy a řešením obdobné pyramidy jako pyramida 6. Jeden žák se doma zeptal na algoritmus pro násobení a uměl jej použít. Dva žáci ho v této následující hodině díky malé nápovědě odhalili. Pak vysvětlili ostatním spolužákům, jak postupovali.

Následné dílny se zúčastnilo 6 zájemců. Byla věnována zábavným formám výuky. Účastníci si zahráli „hru s výrazy“ [2] [5], doplňovali další pyramidy [3] [4] a využili další náměty [3] [4]. Shodli se, že je důležité toto učivo propedeuticky připravovat již v nižších ročnících. K tomu je dle mého názoru dobré použít kvalitně zpracované učebnice Matematika s Betkou.

V další části dílny se diskutovalo o dalších možnostech motivace žáků, o zkušenostech přítomných učitelů. Diskuse se též zaměřila na problematiku českého školství obecně.

Literatura

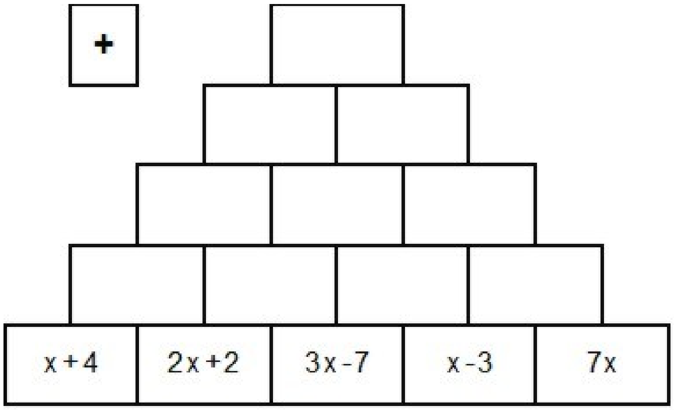
[1] Hejný,M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava.

[2] Novotná, J. a kol. (1998). *Matematika s Betkou 3, učebnice matematiky pro 8. ročník*. Scientia, Praha.

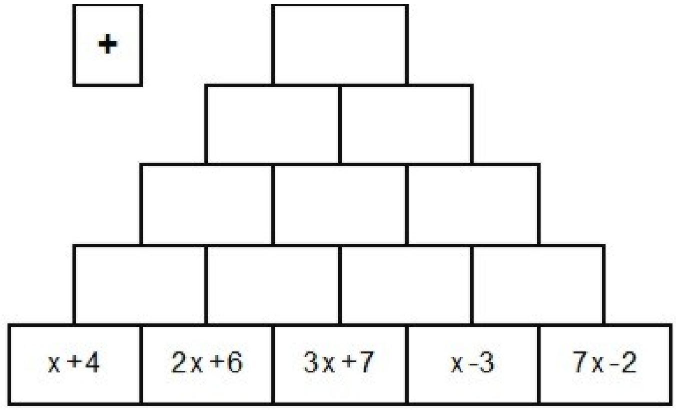
[3] Novotná, J. a kol. (1998). *Matematika s Betkou 3, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 8. ročník*. Scientia, Praha.

[4] Novotná, J. a kol. (2000). *Matematika s Betkou 4, pracovní sešit k učebnici matematiky pro 9. ročník*. Scientia, Praha.

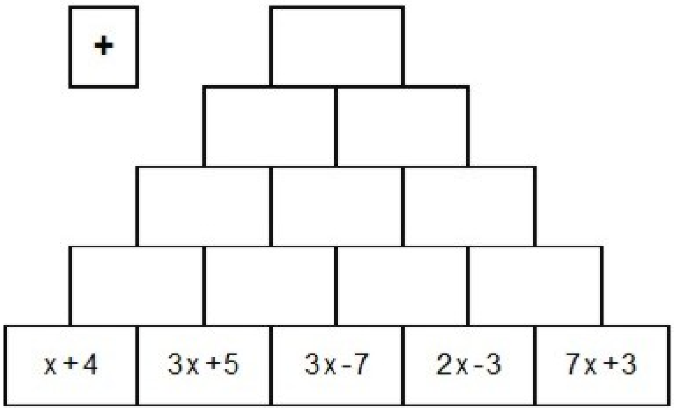
[5] Novotná, J. a kol. (1998). Matematické hry. In Jirotková, D. & Stehlíková, N. (eds.), *Sborník semináře Dva dny s didaktikou matematiky*. PedF UK Praha.



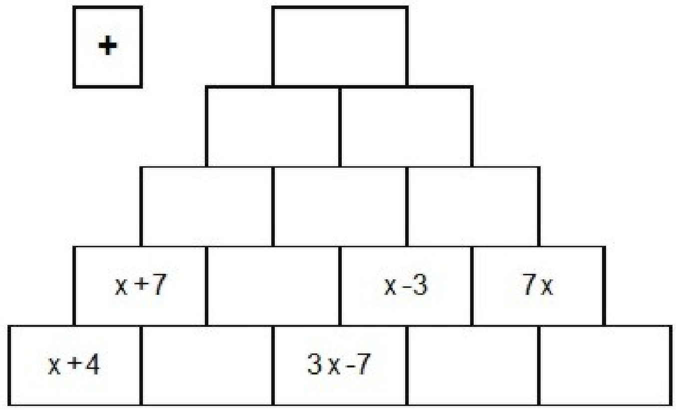
pyramida 1



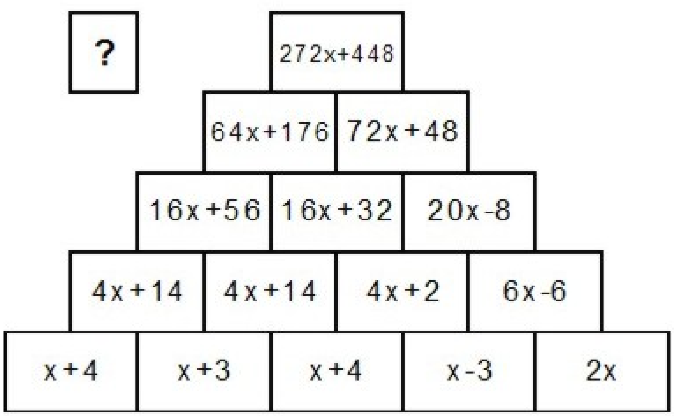
pyramida 2



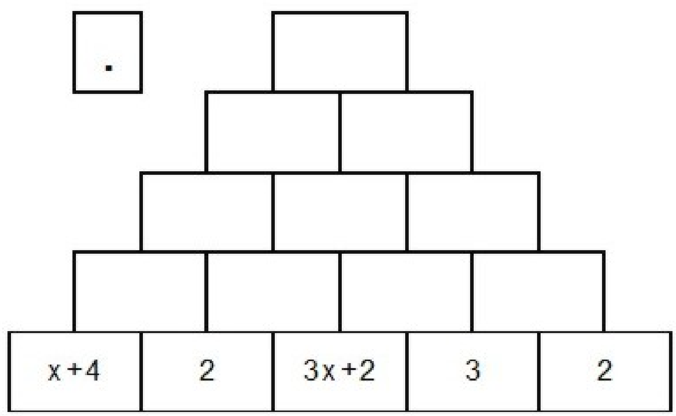
pyramida 3



pyramida 4



pyramida 5



pyramida 6

Parketáže, kachličky, mozaiky a geometria[1]

Lucia Ilucová[2]

Pri vyučovaní planimetrie sa často stretávame s formálnym využitím vedomostí a zručností žiakov pri riešení slovných úloh. Napr. pri výpočte obsahu záhrady sa po prevedení zápisu už s daným rovinným útvarom pracuje ako s geometrickým útvarom a nie ako s modelom záhrady. Preto sa deťom často zdá, že naučené poznatky nevyužívajú v reálnom živote. Úlohy týkajúce sa témy rovinné mozaiky sú formulované tak, aby riešiteľ riešil úlohu z reálneho života a matematiku použil ako nástroj.

Pod pojmom *rovinná mozaika* (alebo *rovinná teselácia*) rozumieme pokrytie roviny útvarmi, ktoré sa neprekrývajú a nie sú medzi nimi ani medzery (teda majú spoločné najviac svoje hranice). V anglickej literatúre sa môžeme stretnúť s pojmami *tessellation, tiling, paving, parquetting* alebo *mosaic*. V priestore hovoríme analogicky o *priestorových teseláciách*. S rovinnými mozaikami sa stretávame bežne; v architektúre (dlaždice, parkety, obkladačky), v umení (vzory, obrazy, nástenné mozaiky), ale i v prírode (včelí plást, pavučina, difrakčné obrazce získané štúdiom kryštálov, rezy kryštalických látok). Skvelé ukážky rovinných mozaík s bohatými vzormi ponúka maurská architektúra v Španielsku (palác Alhambra) a islamská kultúra na Strednom východe. V modernom umení 20. storočia sa vyskytujú v tvorbe holandského grafika M. C. Eschera (napr. *Deň a noc, Jašterice*). Viac informácií o rovinných mozaikách v umení môžeme nájsť v [1], [3].

Obr. 1: Maurské mozaiky

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, lucia_i@post.sk*

Na prvý pohľad rovinné mozaiky spájajú s matematikou len tvary útvarov, z ktorých sú vytvorené. No teória, ktorá skúma ich vlastnosti, ponúka veľké množstvo matematických problémov, ktoré môžu vyriešiť žiaci rôznych vekových kategórií zaujímavým a netradičným spôsobom.

Popis aktivity

Priebeh aktivity vychádzal zo skúseností získaných pri realizácii projektov pre ZŠ a SŠ z rigoróznej práce [2], v ktorej som sa zaoberala rovinnými mozaikami vytvorenými mnohouholníkmi. Zo skupiny úloh som vybrala tie, ktoré sa týkajú nasledujúcich poznatkov:

- klasifikácia mnohouholníkov,
- veľkosť vnútorných uhlov v štvorci, rovnostrannom trojuholníku, pravidelnom šesťuholníku (pre nižšie ročníky ZŠ),
- vety o súčte veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku a štvoruholníku, resp. mnohouholníku (pre stredné školy),
- veta o veľkosti vnútorného uhla v ľubovoľnom mnohouholníku (pre stredné školy).

Všetky zadané úlohy sú formulované ako praktický problém pre domáceho „kutila“ resp. architekta a majú rovnakú štruktúru ako napr. pre obdĺžnik: *Mohli by sme použiť parkety rovnakého obdĺžnikového tvaru na pokrytie podlahy?* Úlohy môžu byť riešené jednotlivcom alebo dvojicou, na vyučovaní pod dohľadom učiteľa alebo ako domáci projekt s jeho prípadnou pomocou.

Pri riešení žiaci (riešitelia) postupne zisťujú, ktoré štvoruholníky, trojuholníky, päťuholníky, šesť- a sedemuholníky pokrývajú rovinu, teda objavujú pravidlá pre pokrývanie roviny mnohouholníkmi. Tie majú v rámci svojich vedomostí a schopností dokázať (nejde o axiomatický dôkaz, skôr o určité overenie platnosti pravidiel). Poslednou úlohou je vytvorenie mozaiky zloženej z viacerých typov mnohouholníkov.

Pri práci je venovaná pozornosť aj všeobecným mnohouholníkom (t.j. nepravidelným, nepravouhlým, nerovnobežným, nekonvexným,. . .), ktoré sa v školskej matematike málo vyskytujú. Takisto teselácie známe deťom z reálneho života (kachličky v kúpeľni či kuchyni, dlažby chodníkov) sú väčšinou vytvorené zo štvorcov, obdĺžnikov alebo pravidelných šesťuholníkov. Využitie všeobecných mnohouholníkov tak v úlohách možno využiť ako motiváciu a prebudiť v riešiteľoch zvedavosť a rozvíjať tvorivosť.

Riešiteľ má k dispozícii papierovú stavebnicu, farebné a štvorčekované papiere, nožnice, ceruzku, pravítko a lepidlo, pričom si sám vyberie, ktoré pomôcky pri práci využije. Stavebnicu tvoria rôzne druhy mnohouholníkov (trojuholníky, štvoruholníky, päťuholníky, šesťuholníky a sedemuholníky), ktoré predstavujú v činnosti modely kachličiek, parkiet alebo dlaždičiek. Rozmery stavebnicových dielov sú navrhnuté tak, aby bolo možné diely ľahko kombinovať a tak vytvárať aj zložitejšie mozaiky. Štvoruholníky a trojuholníky sú zastúpené množstvom rôznych tvarov, ostatné mnohouholníky sú reprezentované ich pravidelnými tvarmi a tvarmi, ktoré pokrývajú a nepokrývajú rovinu. Pre každý tvar použitých mnohouholníkov je vhodné vytvoriť 8 – 10 kusov útvarov z hrubšieho papiera, resp. z tenkých drevených doštičiek. Počet rôznych tvarov je možné upraviť tak, aby riešiteľ pracoval len s takým počtom, ktorý je nevyhnutný na objasnenie pravidiel pre pokrývanie roviny.

Tvorivým zakončením aktivity môže byť vlastný návrh parketáže alebo kachličkovania, pre stredoškolákov abstraktnejší návrh mozaiky. Výsledky žiackych projektov môžu byť hodnotené podľa kritérií, ktoré charakterizujú matematickú časť (v prípade, že riešitelia spracúvajú úlohy písomne) – riešenie úloh, ale aj umeleckú – návrh rovinnej mozaiky (viď [2]).

Úlohy možno využiť v rôznych etapách vyučovania:

– *motivácia* – v úvode tematických celkov týkajúcich sa tvarov mnohouholníkov alebo viet o veľkostiach vnútorných uhlov v mnohouholníkoch a ich súčtoch,
– *expozícia* – pri klasifikácii mnohouholníkov a odhaľovaní viet o súčtoch veľkostí vnútorných uhlov v štvoruholníkoch a trojuholníkoch,
– *fixácia* – na upevnenie a opakovanie získaných poznatkov a ich využitie pri riešení problému zo života, na rozvíjanie tvorivosti a rovinnej predstavivosti.

Pri riešení úloh je možné pozorovať viacero kognitívnych a interaktívnych javov:

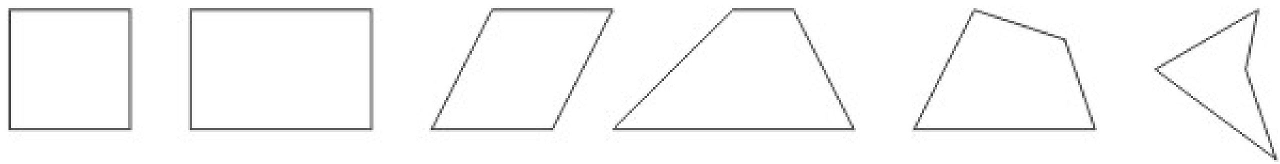
– miera riešiteľova chápania daného štvoruholníka ako rovinného útvaru, resp. modelu útvaru z reálneho života,
– použitie matematických pojmov riešiteľom pri práci a pochopenie týchto pojmov (odpovedajúce danému veku),
– schopnosť riešiteľa argumentovať,
– úroveň riešiteľovej rovinnej predstavivosti,
– schopnosť riešiteľa vyjadriť svoje myšlienky (verbálne, neverbálne),
– správanie riešiteľa pri zmene stratégie a pri spochybneniach zo strany zadávateľa.

Program a realizácia dielne

Účastníci dielne pracovali len s jedným druhom mnohouholníka – štvoruholníkom, pretože práca s ostatnými mnohouholníkmi je založená na rovnakom princípe. Štvoruholník je vhodným reprezentantom, pretože väčšina parkiet a kachličiek má práve tento tvar.

Jednotlivé úlohy boli formulované vo forme otázok, na ktoré bolo potrebné odpovedať áno/nie, pričom danú odpoveď musel riešiteľ podložiť obrázkom alebo vytvorenou mozaikou z papierových útvarov:

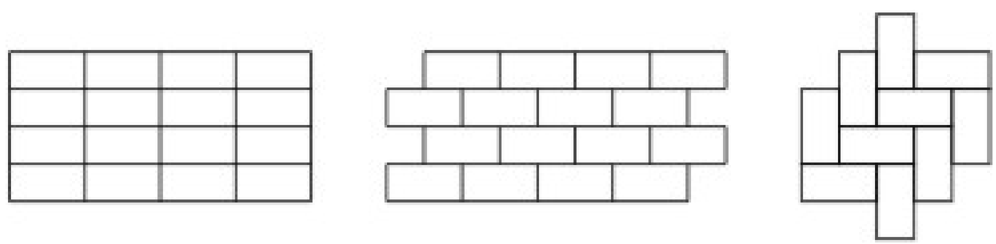
1. *Keby sme chceli vykachličkovať stenu v kúpeľni, mohli by sme použiť kachličky rovnakého štvorcového tvaru?*
2. *Mohli by sme použiť parkety rovnakého obdĺžnikového tvaru na pokrytie podlahy?*



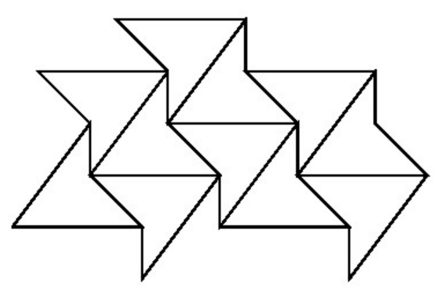
Obr. 2: Tvary použitých štvoruholníkov

3. *Mohli by sme použiť parkety rovnakého kosodĺžnikového tvaru?*
4. *Mohli by sme použiť parkety rovnakého lichobežníkového tvaru?*
5. *Mohli by sme použiť parkety tvaru všeobecného konvexného štvoruholníka?*
6. *Mohli by sme použiť parkety tvaru všeobecného nekonvexného štvoruholníka?*

(Pojem „rovnaký“ nahrádza matematicky presnejší pojem „zhodný“, pretože je deťom bližší; pojem „všeobecný“ je ekvivalentný s českým pojmom „obecný“). Po každej úlohe je vhodné položiť otázku, či je ešte možné vytvoriť z daných štvoruholníkových parkiet inú parketáž, aby si riešiteľ uvedomil divergentnosť úloh.



Obr. 3: Príklady rovinných mozaík vytvorených obdĺžnikom



Obr. 4: Rovinná mozaika vytvorená nekonvexným štvoruholníkom

Všetci účastníci si z pripravených pomôcok vybrali papierovú stavebnicu a biely alebo farebný papier ako podložku pre svoju prácu. Ich reakcie pri riešení úloh boli podobné ako reakcie žiakov. Prvé dve úlohy sa účastníkom zdali veľmi jednoduché; vykachličkovanie steny štvorcovými kachličkami alebo vytvorenie parketáže z obdĺžnikových parkiet odôvodnili zhodnosťou útvarov a tým, že k sebe „pasujú“ príslušné strany. Pri ďalších typoch štvoruholníkov väčšina pracovala podľa stratégie „rovnako dlhé strany k sebe“, niektorí si uvedomili aj použitie stredovej súmernosti, resp. otáčania. Napriek tomu mala asi tretina účastníkov problém s nekonvexným štvoruholníkom.

Poslednou úlohou účastníkov dieľne bolo písomne odpovedať na otázky:

Je možné použiť parkety ľubovoľného štvoruholníkového tvaru na pokrytie podlahy?

Ak áno, prečo?

Ak nie, nájdite také parkety štvoruholníkového tvaru, ktoré nemôžeme použiť na pokrytie podlahy.

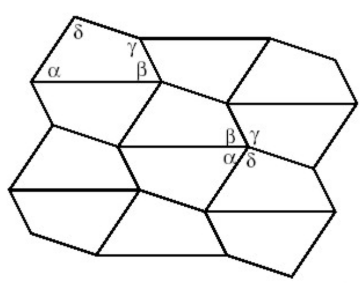
Ich odpoveď sa mala skladať z dvoch častí: najprv mali odpovedať ako žiak triedy, v ktorej učia matematiku, potom mala nasledovať ich vlastná odpoveď. Predkladám niektoré zo žiackych odpovedí, s ktorými som sa aj sama na vyučovaní stretla:

Dá sa to, lebo sme si všetky „druhy“ štvoruholníkov vyskúšali.

Ide to, pretože sa to niektorým v triede podarilo (mne nie) a pani učiteľka ich pochválila.

Áno, pretože sa mi to zatiaľ vždy podarilo.

Učiteľské odpovede už čiastočne obsahovali správne odôvodnenie, ktorým sme aktivitu zakončili:



Obr. 5: Pokrytie roviny štvoruholníkmi

Nech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú vnútorné uhly štvoruholníka. Pre súčet ich veľkostí platí $\alpha + \beta + {}$ ${}+\gamma + \delta = 360^\circ$. Každý štvoruholník môžeme pomocou stredovej súmernosti podľa stredov strán usporiadať pri vytváraní parketáže tak ako štvoruholník na obrázku:

Každý vrchol je vrcholom štyroch štvoruholníkov a uhly, ktoré ho obklopujú, sú navzájom rôzne. Spolu vytvárajú plný uhol, preto nevznikajú medzery, ani prekrytia.

Záver

V závere dieľne sa účastníci vyjadrili k úlohám, ktoré riešili. Za najzaujímavejší štvoruholníkový útvar pre pokrývanie roviny považovali nekonvexný štvoruholník, jedna účastníčka bola za štvorec z dôvodu viacerých možností pre jeho usporiadanie. Načrtli sme aj možnosti využitia ďalších mnohouholníkov v analogických úlohách a podstatu pravidiel pre pokrývanie roviny.

Cieľom tejto aktivity je ponúknuť žiakom iný pohľad na matematiku, špeciálne geometriu v rovine a umožniť im prejaviť svoju tvorivosť. V projekte si žiaci rozšíria svoje poznatky o uhloch v mnohouholníkoch a tie potom využijú pri návrhu rovinných mozaík. Možnosti využitia rovinných mozaík vo vyučovaní matematiky týmito úlohami ale zďaleka nie sú vyčerpané.

Literatúra

[1] Grünbaum, B., Shephard, G. C. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York 1987.

[2] Ilucová, L. *Rovinné mozaiky vo vyučovaní matematiky*. Rigorózna práca, PrF UPJŠ, Košice 2003.

[3] Ranucci, E. R., Teeters, J. L. *Creating Escher – Type Drawings*. Creative Publications, Palo Alto 1977.

Písmena v matematice na prvním stupni[1]

Michaela Kaslová[2]

Úvod

Dílna byla provázána s otevřenou hodinou ve 3. ZŠ Mikulandská v Praze 1 (učitelka Mgr. R. Nechanická) a s další ukázkou práce s žáky druhého ročníku během dílny. Zaměření vychází ze studia vědeckých studií věnovaných cestě k algebře, z pozorování vyučovacích hodin na prvním stupni, z analýzy některých současných evropských učebnic a v neposlední řadě z vlastní práce s žáky prvního stupně v Klubu přátel matematiky. Většina úloh je součástí souboru aktivit, které budou ještě obohaceny a realizovány na školách v rámci projektu s italskými kolegy.

Role psaného

Písmeno, číslice, čára mají *zástupnou funkci*. Jejich interpretace závisí na kontextu, tradici, zvyku či dohodě. Někdy je interpretace čistě osobní (např. poznámky), jedinečná zejména pokud jde o interpretaci čar a znaků jejich autorem, když šlo o produkt tvořivé činnosti (vývoj kresby a písma u dítěte předškolního věku). Jindy je na základě dohody určená úzké skupině osob (např. šifry). Používání znaků je vždy více či méně vázáno pravidly. Některá z nich žáci poznávají po krocích, jiná „naráz“, k některým se dopracovávají intuitivně, s dalšími jsou seznamováni prostřednictvím školy (učitelů, učebnic) či médií. Tvorba či volba znaků se podřizuje určitým požadavkům uživatelů; požadavky souvisejí s mírou snadnosti užívání a dekódování (nebo snahou po utajení).

[1]Řešení otázek je součástí řešení VZ 114 100004 a italského projektu ArAl.
[2]*PedF UK Praha, kaslovam@pedf.cuni.cz*

Zařazení izolovaných písmen v předmětech na prvním stupni

Z úsporných důvodů přistupme k přehledu pomocí tabulky. Lépe si uvědomíme, v jakém množství situací vystupují písmena od prvního ročníku. Nebudeme do ní vypisovat roli písmene jako prvku abecedy, jako produktu transformace hlásky či pojmenování písmene, transformace mluveného kódu do psaného, což se děje na začátku školní docházky při nácviku psaní. Písmena mimo tento proces mají funkci pojmenování, označení. Přehled nezahrnuje všechny situace na základní škole.

Vysvětlivky: M – matematika; Čj – český jazyk; P, V – přírodověda, vlastivěda, prvouka; Hv – hudební výchova; Š – škola.

malé písmeno	VELKÉ PÍSMENO (p) psací, (t) tiskací
M: pojmenování přímky, úsečky, strany, hrany, poloměru, průměru, kružnice, osy	M (t): pojmenovává bod, krajní body, počátek, průsečík, střed, vrchol (později výrok, množinu)
M: označuje délku úsečky, obvod (zastupuje dvojici číslo a jednotka)	M (t): označuje objem, povrch, obsah (zastupuje číslo a jednotku měření)
Čj: slovo – spojka, předložka (a, i, v, z) P, V: zkratky (l, m, h, s), souřadnice	Čj, P, V: zkratky, iniciálky, souřadnice
Hv: tónina moll tóny (písmena s číselnými s indexy)	Hv: tónina dur
M: zastupuje číslo (nahrazuje postupně volné místo, 3 tečky, rámeček)	M: znaky – římské číslice – číslice v algebrogramech
Š: značení alternativ, výčtu, pořadí, otázek nebo úkolů v učebnicích	Š: označení třídy

Není nutné žákům uvedené rozdíly vysvětlovat v takovém přehledu. Je důležité, aby učitelé byli seznámeni s touto situací. Především v první fázi uvedení písmene do matematiky je nutné zdůraznit žákům *změnu kontextu* použití písmene a vést žáky k *nové interpretaci*.

Zavedení písmene jako znaku pro číslo u nás i ve světě.

Od prvních kroků práce s číslem zapsaným *arabskými číslicemi* v poziční desítkové soustavě prochází žák nejdříve fází numerace. Numerace v oboru přirozených čísel zahrnuje řadu úkolů: *zapiš, kolik je tu. . . , řekni, kolik je tu. . . , ukaž právě tolik (3). . . , nakresli (3). . . , porovnej dvě čísla, dokaž na (řádovém) počitadle, rozhodni, které z čísel je největší (nejmenší), uspořádej (seřaď) čísla od . . . po . . . , řekni, kolikaciferné, urči počet desítek (jednotek).* Je otázkou, zda k numeraci řadit i poznávání vlastností čísel, a to v souvislosti s tříděním čísel, jako je být sudý – lichý, násobkem 10, 100, 1 000, . . . , být symetrický (121, 7 887). Numerace neproběhne jen jednou, vyskytuje se cyklicky. Např. po uvedení čísel od 1 do 5 následuje zavedení operací sčítání a odčítání, pak další kapitola numerace, v níž dojde k rozšíření oboru, opět početní úkony, numerace, operace atd.

Písmeno se ovšem v roli čísla objevuje poprvé zpravidla až v kapitole operace! *Vynechání jeho role v numeraci můžeme pokládat za jednu z příčin obtíží práce s písmenem v kapitolách operace, funkce* (Kaslová, 2002). Na prvním stupni se nenaznačuje, že by písmeno mohlo zastupovat jiné číslo než přirozené, a v tomto smyslu chybí i přemostění v matematice druhého stupně.

Písmeno jako číslo z pohledu žáka

Na prvním stupni je použití písmen nejednotné v tom: a) kdy a v jaké roli je poprvé uvádíme, b) která písmena pro práci volíme (někde jen x, jinde a, b, c, a tak podobně), c) jak písmeno pojmenováváme, čteme (odposlechnuto v praxi: a, b; proměnná a a proměnná b; proměnné a, b; neznámá a; číslo a; čísla a; x je číslo, které nelze najít, ale a ano; a výsledek, co chybí).

Pestré, nekomentované a jakoby samozřejmé použití písmene v roli čísla, zejména v krátkém časovém období bez přípravných aktivit, může být z pohledu žáka až matoucí. Žák často nemá (dobrý) poslechový vzor, jak se zápis čte, a vyjadřování je pro něho sérií pokusů a omylů, nebo se čtení zápisu vyhýbá a používá pouze charakteristiky toho, co má se zápisem provést. Příklady zadání a žákovských interpretací zápisů:

a) $10 + 23 = x$ – *x je výsledek* (početního úkonu); pro žáka x zastupuje jediné číslo nebo pouze nahradilo předchozí rámeček a žák x za číslo vůbec nepovažuje;

b) $10 + y = 33$ – *v zadání chybí číslo, které musím zapsat místo y; co musím přičíst, aby* . . . ; spontánně to zjistí experimentováním, dočítáním, či odčítáním;

10
/ \
c) **a** **b** v rámci tabulky popsal žák takto: „Mám rozložit 10 na dvě části“; to lze zapsat také jako $10 = a + b$; zde nastává první úskalí plynoucí z odlišného značení sčítanců, jsou-li písmena různá, lze nebo nelze připustit řešení 5 a 5; pro žáka jsou dvojice různé možnosti, které podmínce vyhovují, avšak teprve vyplnění celé tabulky je řešením;

d) $x < 10$, $5 < n$, $3 < a < 9$ – *mám najít číslo*; toto je pro žáka změna, protože zde písmeno nezastupuje jediné číslo, ale celou skupinu čísel; někdy konečné množství čísel, jindy dokonce nekonečně mnoho; jen výjimečně se vyskytuje situace, kdy nezastupuje žádné přirozené číslo např. $3 < y < 4$ „to je špatný příklad“; „musíme to opravit“; „je to nula . . . řešení“;

e) tabulky spjaté s procvičováním určování n-násobku čísla, používají písmeno ke zkrácení pokynů; jeden řádek je označen např. m a druhý $2m$ (nebo také $2 \cdot m$, $2 \times m$), žáci to nečtou;

f) $o = a + b + c$ příklad z geometrie je výjimkou, poněvadž zde žák používá také číslo, avšak ne důsledně; někdy dosadí za písmeno pouhé číslo, jindy číslo s jednotkou; i zápisy v učebnici vypadají následovně: $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $o = 2+3+4$, $o = 9$ cm. Jde o nejednotnost. Jednou písmeno představuje velikost – číslo, jindy délku – tedy číslo s použitou jednotkou měření. V některých případech, například a), b), jde o fázi *procesu zobecnění a písmeno zastupuje číslo* tak, že to umožňuje žákům diskutovat nejen o úloze, ale i o zadání. V jiných případech jako například c), e) jsou písmena užita autory především pro *zkrácení pokynů*, usnadnění komunikace na intuitivní úrovni, a také tak s daným typem učitelé zpravidla pracují, písmen si v podstatě nevšímají, neupozorňují na ně.

Nediskutujme, zda má nebo nemá být písmeno používáno na prvním stupni, ale uvažujme o tom, jak by mohl start k použití čísla vypadat. Malé písmeno se v učebnicích matematiky prvního stupně vyskytuje. Velké tiskací písmeno ve funkci číslice už je výjimečné, pokud ano, tak nesystematicky v úlohách pro zábavu. Moje osobní zkušenost je ta, že použití velkých tiskacích písmen před malými je pro žáky výhodnější a lze je zařadit již ke konci prvního ročníku. Pro toto zařazení mluví i relativní jednoduchost kódování, omezený počet písmen v dané úloze (nejvýše 10). Práci s velkým písmenem je možné vynechat, ale pak je třeba začít o něco později. Nedoporučuji obojí míchat současně.

Co chybí v prvních letech práce s písmeny?

1. *Vytváření vlastních symbolů a znaků* směřujících k pochopení jejich zástupné funkce ve spojení s procesem simplifikace, s pochopením charakteristik znaků jako rozlišitelnost, snadná napodobitelnost a zapamatovatelnost, ... (Laborde, Sciacovelli a další)
2. Aktivity typické pro numeraci, na kterou jsou žáci zvyklí: *manipulace* (s modely, s kartami), manipulace v kombinaci s napsaným (s textem).
3. Použití *barvy jako přemostění* obtíží u některých typů žáků.
4. *Přechod od práce s modely k práci s matematickými symboly* (číslicemi, operačními znaménky apod. ... až k písmenu) *a zpět* od matematického symbolu k modelům s odkazem na kontext a s podněcováním řeči.
5. *Použití písmene a řeči*, respektive aktivit směřujících nejen k dekódování, ale i k interpretaci zápisu při řešení úloh, a to bez formalismů, účelně a funkčně.
6. *Porovnání různých zápisů řešení* například pomocí modelů trojrozměrných, dvojrozměrných (obrázkových), matematické symboliky.

Ukázky vybraných aktivit

A. Aktivity využívající malá písmena

(Poznámka: Aktivity č. 1–13 byly ověřeny na 7–9letých žácích.) Písmena zastupují čísla (zpravidla přirozená); soubor aktivit není chápán jako uzavřený povinný sled kroků, ale jako inspirace k obohacení procesu.

1.1 Vychází se z toho, že jedno číslo neznáme. Řada karet s čísly, jen jedna karta je rubem nahoru. Dítě říká, které číslo je zespodu. Kontrola otočením. Doporučujeme od počátku plastové karty. Tak na ně můžeme později psát a posléze mazat.

1.2 Karty jsou z druhé strany barevné (je na nich barevný papír), každá jinou barvou. Komunikace se mění. Pod červenou je číslo . . . Pro kontrolu kartu otočíme. Pak se hraje ve dvojicích, každá dvojice si zvolí své pořadí barev a pak zapisuje čísla. Pak hraje jedna dvojice s druhou, v jednom kole se používá sada první dvojice, ve druhém kole se sada karet vymění.

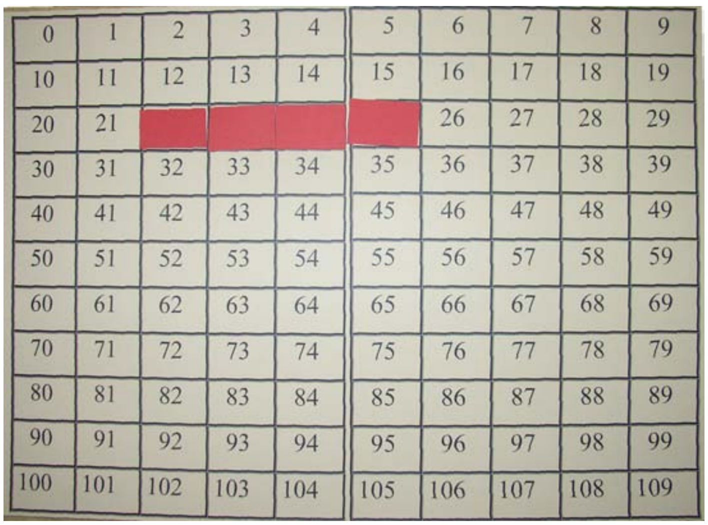
1.3 Karty s čísly neotáčíme. Máme navíc různé barevné karty. Hraje se ve dvojicích. Jeden žák zakryje jedno z čísel žlutou, jiné červenou, atd. a nezakryje všechna čísla. Druhý žák postupně zakrytá čísla určuje a odkrývá zakrytá čísla pro kontrolu. Činnost komentuje: „Pod žlutou je 15“ a podobně. Od této činnosti lze přejít k zápisu průběhu hry s použitím písmen.

Obr. 1

1.4 Použijeme karty s čísly a prázdné barevné papíry o formátu karet. Na barevné papíry napíšeme písmena: na žlutou z, červenou c, modrou m, oranžovou o, hnědou h. Červená i žlutá jsou voleny záměrně, aby došlo k první dohodě, že nebudeme používat háčky. Písmena se nesmí opakovat. Pak mají žáci sestavit řadu, ve které jsou některá čísla vynechána a místo nich jsou barevné karty. Místo ústní odpovědi přistoupí první žák k odpovědi písemné: $c = 17$, $m = 12$, $o = 18$, $h = 11$, $z = 10$. Pak dochází ke společné kontrole. Hru lze rozvinout pro práci ve skupině nebo ve dvojicích se vzájemným zadáváním, řešením a kontrolou. Totéž můžeme ovšem udělat jinou formou a vyprovokovat takovou situaci, aby si vlastně takovou hru žáci „sami vymysleli“. Písmeno chápeme jako zjednodušení pro komunikaci zejména v písemné podobě.

Žáci nedostanou barevné karty, ale jen bílé. Na každou napíší jedno písmeno (bez háčků, čárek, kroužků). Která písmena si dvojice vybere, závisí na ní. První hráči jdou na poradu s učitelem a dohodnou se, kterých 5 čísel v řadě zakryjí. Je na žákovi, které písmeno bude na kartě. Druhý hráč napíše řešení. Všichni by měli objevit stejná čísla. Pak dojde k výměně rolí. Kolo od kola je počítáno jako nová úloha. Například písmeno c může zastupovat tedy v jednom kole číslo 17, v jiném třeba 39. Zástupnost není tedy navždy, ale v závislosti na kontextu úlohy. Tím, že lze písmena mazat a pro totéž číslo příště volit jiné písmeno, nedochází k deformaci a k fixaci – kdy jedno písmeno navždy zastupuje jediné číslo.

1.5 Postupujeme obráceně. Žáci mají před sebou řadu čísel; již nemusí být na kartách, ale mohou být třeba napsaná na jednom papíru v řadě. Každý má v ruce kartičku s písmenem (třeba x). Učitel zadá úlohu. Například x je větší než 8 a je jednociferné. Žáci hledají, kam kartičku s x umístit. Charakteristika neobsahuje více než 2 podmínky. Ukazuje se, že někdy máme možnost volby, jindy ne. Postupně směřujeme k použití proužku papíru, označeného jedním písmenem, který zakryje všechna čísla splňující zadané podmínky. Takový proužek papíru (harmonika) se rozloží nebo složí podle potřeby, v závislosti na tom, kolik z nabídnutých čísel má zakrýt. K položení „písmene“ nedojde tehdy, pokud takové číslo v řadě není.



Obr. 2

1.6 Na magnetické tabuli je tabulka čísel. Učitel umístí kartičku nebo kartičky (barevnou s písmenem) a chce po žácích, aby číslo a (b, c, ...) popsali, charakterizovali. Po žácích požadujeme, aby před odhalením čísla toto číslo charakterizovali jednoznačně, případně tuto situaci převedli na typ „myslím si číslo“.

1.7 Na obdélníkovou tabulku čísel od 0 po 100 položíme lístečky rubem nahoru, lícem s písmenem dolů. Příklad: Lístečky jedné barvy dáme na všechna čísla. Učitel říká. „Myslím si číslo. To číslo by mělo zůstat zakryté. Nejděte, které pole v tabulce jsem zakryl. Moje číslo je sudé.“ Žáci odkryjí pole s lichými čísly. „Hledané číslo je dvojciferné.“ Odkryjí jednociferná a trojciferná čísla. „Moje číslo je menší než osmdesát. Počet desítek je o 5 větší než počet jednotek“ (v tabulce zůstávají zakrytá čísla 50 a 72). „Číslo není násobkem deseti. Úloha má řešení – jediné číslo. Zkontrolujte.“ Žáci otočí poslední barevný papír a pod ním je hledané číslo. Tatáž aktivita s bílým papírem výrazně zpomaluje řešení a zvyšuje chybovost při použití vylučovací metody. Vhodná je tmavá barva – hnědá, zelená nebo modrá.

1.8 Příště hrajeme totéž, myslím si číslo, říkejme mu třeba y, ale před odhalením čísla nemusí žáci nic odkrývat, mohou si ukazovat, pracovat ve dvojici. Na závěr kontrolujeme, zda mají všichni zakryté totéž pole kartičkou (se zvoleným písmenem). Později chceme, aby řešení neukazovali, ale zapsali: $y = 72$.

1.9 Podívej se na zápis a zakryj pole v tabulce. Slabší žáci mohou mít barevné karty s písmeny, rychleji se to kontroluje. Zadání: $a = 16$, $b = 61$, $c = 6$. V druhé fázi si sami žáci dávají zadání a kontrolují je. Úkol může být formulován tak, že mají zvolit čísla tak, aby po zakrytí vyšel dekor, obrázek. K tomuto typu se vrátíme, až bude jedno písmeno zastupovat skupinu čísel.

1.10 Tato úloha je obdobou úlohy 8 s tím, že se v závěru nabízejí 2 řešení. Po žácích se požaduje, aby si vybrali jednu z možností a doplnili podmínku tak, aby řešení bylo jen jedno. Dosud nahrazovalo písmeno jen jedno číslo.

1.11 Hry s možností, v nichž ještě neuvažujeme všechna řešení. Používáme spojku nebo při hledání možností. Směřujeme žáka k tomu, že malé písmeno může zastupovat skupinu čísel. Postupně žáky vedeme k tomu, aby nalezli všechny možnosti. Aktivitu můžeme propojit na poznávání násobků. Např. při práci ve dvojici zakryjte lístečky všechna pole v tabulce, kde platí: a) z je liché, menší než 15, b) x je menší než 100, je sudé, c) y je násobkem tří, větší než 10 a menší než 91, d) t na místě jednotek 0 nebo 5, není trojciferné. Vytvářejí se barevné dekory, které se snadno kontrolují. Zde zápis vynecháváme.

1.12 Totéž, avšak zadání není ústní, ale písemné. Pokryjeme vybraná pole lístečky a chceme po žácích, aby formulovali jejich charakteristiku ústně, v některých případech i písemně. Např. a) $23 < x < 29$, b) z je násobkem 10, c) y je dvouciferné a ciferný součet je 10 ... a další, kde již zasazujeme písmeno do početních operací $12 = a + b$, $m \cdot n = 24$, nebo do popisu rozdíl v, r je sudý.

1.13 Pokud už žáci pátého ročníku pracovali s velkým tiskacím písmenem a dospěli k pochopení a k zobecnění v popisu pamětných a písemných algoritmů, je možné zařadit úlohy typu: $a = GH$, $b = K$. Dej návod, jak postupovat při sčítání $a + b$.

B. Aktivity s velkým tiskacím písmenem

(Poznámka: Aktivity č. 1–9 byly ověřeny se 7–9letými žáky.) Písmena zastupují číslice, postupujeme od manipulace s kartami po zápis s komentářem; soubor aktivit předpokládá tvořivou práci, výběr, adaptaci aktivit na třídu i další obohacení.

2.1 Úvodní aktivita. Rozdáme kartičky s čísly od 0 po 12. Žáci mají za úkol je přirozeně – vzestupně uspořádat. Ptáme se: Kolikrát se na našich kartách objevuje trojka, kolikrát dvojka, nula, pětka, jednička. Pak se ptáme, co mají společného čísla od nuly po devět. Směřujeme k tomu, aby si nyní žák jasně uvědomil, že v následujících aktivitách budeme důsledně rozlišovat mezi číslem a číslicí – znakem.

2.2 Šifra. Pod karty – číslice položíme další karty, pod dvěma různými číslicemi jsou také dvě různá písmena. Hrajeme společně na magnetické tabuli. Myslím si číslo a říkám mu A. Které číslo si myslím? Pokud jsme A použili, děti najdou příslušné číslo nad ním; pokud ne, máme dvě možnosti: buď odpovíme, že takové jednociferné číslo není, nebo můžeme říci, že si zadavatel žádné jednociferné číslo nemyslel, nebo řekneme omyl. Aktivitu obměníme a pracujeme obráceně: Jak zašifruji číslo 5, jak 8 apod. Ukazujeme, že volba písmene je otázkou dohody a nikde není řečeno, že písmenu A musí příslušet číslo 1 a písmenu B 2 a tak podobně. Zkrátka k přirozeně uspořádaným jednociferným číslům nemusí být přiřazena písmena, která sledují pořadí v abecedě.

2.3 Šifru si tvoří žáci ve dvojicích tak, že pod karty dávají prázdné papíry a na ně píší písmena podle již zavedených pravidel. Musí dávat pozor, aby se žádné písmeno

Obr. 3

neopakovalo. Připravujeme se na substituci. Pak se učitel ptá, co se ukrývá pod písmenem A. Někdo řekne 3, jiný 9, jiný říká, že A nepoužil. Poznáváme, že zástupnost je otázkou dohody. Otázky pak změníme. Jak zašifrujete 8? Každý má jiný návrh. Závěr: Kdybychom chtěli hrát společně, musíme dělat dohodu také společně.

2.4 Na kartách máme jednociferná čísla v řadě v přirozeném uspořádání. Jedno z nich překryjeme bílou kartou a vyvolaný žák na ně doplní jedno tiskací písmeno např. V. Ptáme se, co o čísle V můžeme říct. (Je menší než ..., je sudé, ...).

2.5 Použijeme šifry a porovnáváme. Volíme jen písmena použitá v šifře. Např. $M \nabla D$. Žáci volí příslušný vztah a ústně své rozhodnutí zdůvodní.

2.6 Porovnáváme bez použití šifry, například: $K \nabla HR$, $BC \nabla T$, $T \nabla R$, $BC \nabla CB$, $HH \nabla HH$, $K \nabla K$. Diskutujeme, zda můžeme vztah najít, nebo ne a proč. Uvádíme příklady, případně protipříklady. Přirozené dvojciferné číslo je vždy větší než jednociferné číslo. U dvou jednociferných čísel zapsaných pomocí různých písmen nemůžeme rozhodnout, které z nich je větší. Můžeme jen říci, že nejsou stejně velká, protože jsou různá. Hledáme různé možnosti řešení.

2.7 Hrajeme hru „Větší než“ po kruhu ve skupinách 6–8 žáků. Přípravná aktivita: První řekne číslo, druhý má říct větší, třetí větší než druhý atd., až hra obejde kruh. Hra: Vyjadřujeme čísla jen pomocí písmen. Uprostřed kruhu máme hromadu karet s jednotlivými písmeny abecedy bez háčků, čárek, kroužků. Mohou být zastoupena i pětkrát. První žák řekne například D. Vybere písmeno a položí ho doprostřed na určené místo. Druhý žák má říci číslo větší. Dobrý žák řekne třeba GH, nebo DD, nebo ABC,... V takovém případě položí vybraná písmena na kartách pod první číslo a pokusí se říct proč. Pokud řekne např. E, navrhneme, že D mohlo zastupovat číslo 9, a E tedy nemůže být větší. Takže nemáme jistotu, že E je opravdu větší než D, a žáka je nutné opravit. Hraje třetí a tak dále. Když hra obejde kruh, vrátíme se k zápisům. Tentokrát si žáci vezmou karty s číslicemi a kladou je pod písmena. Poznáme, zda jsme nepoužili více písmen, než je číslic. Respektujeme totiž pravidlo dané šifrou: pokud jednou písmeno A zastupovalo číslo 5, pak ve všech následujících zápisech čísel musíme písmeno A nahradit také číslem 5.

2.8 Vztahy a řády: Víte, že AB je větší než BA, porovnejte A a B. Co můžeme říci o A a o B? (Jsou různé od nuly a jsou od sebe různá.) KLL je menší než KLM. Co platí pro K, M, L? K je různé od nuly, od L i od M. M je větší než L. Pokud to nejde, používáme karty s číslicemi a zkoušíme, kterým možnostem zadání vyhovuje a kterým ne. Víte, že XZT je menší než YZT. Porovnejte X a Y. Úlohy obměňujeme nebo necháme žáky podobné úlohy vymýšlet. Slabším žákům stačí zadat totéž s použitím jiných písmen.

2.9 Začneme s operacemi. a) $A + B = C$, b) $D + E = E$, c) $H + H = F$, d) $G + T = NL$. Hledáme co nejvíce možností, číslic, které mohou nahradit použitá písmena. Každá úloha je novou úlohou. Některým žákům vyhovuje řešení jen říkat, jiní si je chtějí psát (třeba do tabulky). Psaní sice pomůže paměti a autokontrole, avšak zpomaluje řešení, oddaluje proniknutí do podstaty soustředěním se na techniku psaní. Zkoumáme písmeno po písmenu a sledujeme, která čísla zastupovat může, která ne, případně, které číslo zastupuje s určitostí.

2.10 Několik úloh společně. Máme zašifrovaný sloupeček řešených úloh. Odhalte šifru.

a) $A + A + A = B$, $B + A = CD$; b) $K + L = M$, $M + M = LK$; c) $R \cdot T = V$, $T + T + T = V$.

Řešíme ve trojicích, experimentujeme, používáme karty, diskutujeme, nalezená řešení zapíšeme. Pokud zapisujeme celý průběh, používáme i škrt ve významu neplatí, nevyhovuje.

Závěr

Aktivity podobné aktivitám uvedeným v odstavcích A a B můžeme zařazovat i u jiných číselných oborů. Všechny uvedené aktivity jsou vyzkoušené na malých vzorcích ve druhém a třetím ročníku. Některé z aktivit byly zvládnuty i žáky prvních tříd.

Cesta k algebře nezačíná zařazením písmene do matematiky na prvním stupni, ale *přístupem k aritmetice*. Záleží na tom, jak je rozvíjeno myšlení žáků. Samotné zavedení a používání písmene v matematice je podmíněno řadou faktorů a nelze je přesně načasovat. Mezi podmínky patří *zralost žáka, jeho zkušenosti s číslem a úroveň používání substituce*. Podle zmapovaných obtíží lze předpokládat, že některé z nich mají kořeny již v zavádění číslic a písmen, některé dokonce v práci mateřské školy.

Literatura

Kaslová, M. *Použití písmene na prvním stupni ZŠ v Československu*. Nepublikovaná přednáška, UQAM Montreal 1992.

Kaslová, M. *Od číslic k písmenům – současnost a možnosti*. Nepublikovaná přednáška pro Nucleo della ricerca, Universita di Modena 2002.

Kaslová, M. *Le regolarita e le lettere nel insegnamento della matematica*. Nepublikovaná přednáška pro Univerzitu Modena, projekt ArAl. Santa Gustina 3. 9. 2004.

Malara, N., Marchini, C., Navarra, G. & Tortora, R. *Processi didattici inovativi per la matematica nalla scuola dell´obligo*. Pitagora Editrice Bologna 2002.

Marchini, C. & Kaslová, M. Substitutions and variables in primary school. In Novotná, J. (ed.), *SEMT 2003*, PedF UK Praha, s. 113–117.

Problémy a omyly našeho školství[1]

František Kuřina[2]

Obecnými otázkami našeho vzdělávání jsem se v posledních letech zabýval v řadě prací. Jakýsi shrnující pohled na tuto problematiku jsem formuloval na konferenci v Litomyšli v příspěvku *„Rámcové vzdělávací programy a naše škola“* [1]. Zde bych chtěl obrátit pozornost na tři otázky, které podle mého názoru stojí za povšimnutí. Přitom vůbec netvrdím, že mé názory jsou správné. Přispěje-li tento příspěvek k diskusi o problematice, splní svůj cíl.

Hlavní problémy naší školy

Přikláním se k názoru *Daga Hrubého: … „mezi hlavní problémy našeho školství patří problémy sociální. Zachovat existenci školy, udržet zaměstnanost při stálém úbytku žáků, udržet platy na snesitelné úrovni, financování provozu školy. To vše vytváří klima, které je méně podnětné pro tvořivou pedagogickou činnost.“* ([2], s. 58).

Ekonomické otázky se stávají limitujícím činitelem pro práci základní školy od první třídy (rušení vesnických škol), přes druhý stupeň základní školy, víceletá gymnázia a všechny typy škol středních až po školy vysoké. Otázka zachování třídy nebo školy nemůže nemít vliv na úroveň absolventů. Bylo by iluzí myslet si, že potřebnou úroveň vzdělání je možné zajistit administrativně, formulací požadavků, zadáváním jednotných testů a vyhodnocováním práce škol. Těmito metodami lze zjistit stav, ne však zlepšit stav. Přitom dodržování potřebné úrovně požadavků není nic antihumánního, naopak lidsky škodlivé je jejich snižování, neboť to může vést v dalším vývoji dítěte k problémům nebo dokonce k tragédiím. Stanovení a dodržování úrovně absolventa školy je ovšem obtížné

[1]Práce vznikla s podporou grantu GAČR 406/02/0829.

[2]*Univerzita Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz*

a může být i bolestivé, dotýká se přirozené lidské snahy dosáhnout úspěchu s minimem námahy. To ovšem není nic, co přináší nová doba. Např. *Ladislav Quis* píše ve svých *Vzpomínkách* o klesající úrovni vzdělání, neboť mnozí studenti vysokých škol se tehdy, tj. koncem 19. století *„omezují jen na nejnutnější vydření toho, čeho k ledajakému odbytí zkoušek potřebovali“* ([3], s. 97). Mnohé současné pedagogické směry zdůrazňují potřebu přirozeného, postupného a radostného rozvíjení jednotlivce. Odborníci spjatí s praxí však vidí problematiku realističtěji. Můžeme to doložit názory vědce, spisovatele i básníka.

Náš matematik *Bohumil Bydžovský* např. napsal: *„Škola si musí stále být vědoma toho, že výchova se neobejde bez jakéhosi třeba sebe mírnějšího a zastřenějšího nátlaku. Je kus morálního násilí v tom, že musíme tvora od přírody primitivního, jako je dítě, v době několika let podzdvihnout ke kulturní úrovni, ke které se lidstvo probojovávalo s obtížemi a oklikami po tisíciletí“* ([4], s. 55).

Francouzský spisovatel *J. M. Alfroy* charakterizuje učitelské přesvědčení takto: *„Příliš dlouho věřil, že když je člověk učitelem v poslední čtvrtině 20. století, že má být spíš moudrým humanistou, blahosklonným učencem než perfektním mistrem drezúry. Osudná mýlka. Doba přeje právě zmíněným mistrům odborníkům“* ([5], s. 108).

Náš básník (a vědec) *Miroslav Holub* se vyjádřil lapidárně: *„Bez magnetického nadloží nutnosti ani chlup rozumu se nevylisuje.“*

Nejsem přitom zastáncem školy založené na drilu a bezpodmínečném formálním plnění povinností. Jsem přesvědčen, že studenty na všech úrovních je nutno pozitivně motivovat k dosahování výkonů a k návyku pracovat. To koneckonců zdůrazňoval již *Jan Amos Komenský: ... „neučíli-li se kdo, ne on tím, než učitel winen, že ho k učení chtiwého učiniti, a jemu rozšafně předkládati neumí“* ([6], s. 93). Problémy vzdělávání se táhnou celou kulturní historií lidstva. Sám Komenský píše: *„Nerozwážliwě pověděl Demokritos, že kořen učení hořký, owoce ale že sladké. Málit býti owoce sladké, kořen hořký býti nemusí“* ([6], s. 85). Jak to realizovat v praxi, a to ve společnosti, která klidnému soustředění se na promýšlení základů vzdělávání nepřeje, je základní otázka, jejíž řešení bude patrně vždy spočívat na podmínkách práce školy, postojích žáka a přesvědčení učitele, neboť *„vyučování není věda, ale umění“* ([7], s. 101). Je přitom nutno vidět, že škola na každé úrovni plní i určité kvalifikační povinnosti (vzdělat občana, připravit ho pro praxi, pro povolání nebo pro další studium). Minimální požadavky tohoto druhu je nutno stanovit a měl by je dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy.

Hlavní omyly současné reformy

Termínem *„současná reforma“* rozumím pedagogické úsilí popsané v *Bílé knize* [8] a v *Rámcových programech* [9]. Jsem přesvědčen, že Bílá kniha otevírá prostor pro další rozvoj autonomie škol, pro uplatnění jejich potenciálu a pro vyšší efektivitu vzdělávání. Obávám se však, že nabízí i příležitost pro postupné snižování úrovně vzdělanosti u nás, pro nižší efektivitu vzdělávání. Vše záleží na realizaci reformy v praxi.

Mé obavy pramení z následujících dvou přístupů, které pokládám za chybné.

I. Na str. 18 *Bílé knihy* se můžeme dočíst, že za jednu z hlavních strategických linií rozvoje vzdělávání v České republice lze považovat: *„Dosáhnout vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání tvorbou nových vzdělávacích a studijních programů, které budou odpovídat požadavkům informační a znalostní společnosti, udržitelného rozvoje, zaměstnanosti a potřebám aktivní účasti na životě demokratické společnosti v integrované Evropě a které budou zároveň respektovat individuální odlišnosti a životní podmínky účastníků vzdělávání.“*

Každému pedagogickému pracovníkovi je přitom jasné, že tvorbou sebelepších programů se rozvoj vzdělání nezajistí. Ten se zajistí teprve jejich realizací v praxi. Dokumenty tvoří jen první stupeň, předpoklad úspěšného provedení reformy. Můžeme se domýšlet, že právě takto byla citovaná teze myšlena, její formulace však je nebezpečná, neboť umožňuje soustředit úsilí na víceméně formální sepsání určitých dokumentů, jmenovitě školních vzdělávacích programů. Tato „akce“ je již v plném proudu: *„Ředitelé se ptají: Co přesně po nás chcete?“* ([10]). Výzkumný ústav pedagogický shrnul podle citovaného článku připomínky ředitelů do deseti bodů, z nichž zde cituji:

• *Popsat (vytvořit) systém povinného vzdělávání garantů a tvůrců školního vzdělávacího programu, jeho fungování a harmonogram.* (*Libor Kyncl,* učitel roku 2003, požaduje na tvorbu „vlastních osnov“ *„nějaký kurs“*)

• *Navrhnout optimální podobu školního vzdělávacího programu na víceletých gymnáziích.*

. . . . . .

Nebezpečí formalismu je zde příliš velké a zrod málo kvalitních programů je v řadě případů možno očekávat.

II. Podle *Rámcového vzdělávacího programu* jsou tzv. *klíčové kompetence* hlavním výstupem základního vzdělávání. Na konci základního vzdělání *„je žák způsobilý“* např.

• *organizovat a řídit své učení, vybírat a využívat pro vlastní učení efektivní způsoby, metody a strategie,*

• *samostatně a kriticky myslet, samostatně se rozhodovat, zvažovat důsledky svého rozhodnutí a nést za ně odpovědnost.*

. . . . . .

Takovýchto kompetencí formuluje zmíněný dokument celkem 22.

Přesun výstupů základního vzdělávání do nekontrolovatelné a pro všechny absolventy základní školy nesplnitelné oblasti může snadno vést k úpadku vzdělávacího systému. Perspektivní cíle vzdělávání nelze zaměňovat s výstupy vzdělávání, konkrétní vzdělávací výstupy je podle mého názoru nutno formulovat k dobrému fungování školy ústředně.

Možná východiska

Každou reformu vzdělávání realizuje učitel. Společnost mu musí vytvořit podmínky, v nichž bude moci tvořivě pracovat. To je jedna stránka problému, která je složitá a na níž nemůžeme mít bezprostřední vliv. Orientace vzdělávání na kompetence ovšem znamená především orientaci učitelského vzdělávání na učitelské kompetence. Obávám se, že *Oldřich Botlík* a *Daniel Souček* mají pravdu, když píší: *Pro mnoho našich učitelů jsou některé kompetence prakticky neviditelné. Na cílené rozvíjení mnoha dalších nikdy nebyli připravováni a sami je často ani nemají* ([11], s. 93). V tomto příspěvku není prostor na rozbor této problematiky, zdá se mi však, že systém univerzitní přípravy učitelů nevidí zpravidla priority v rozvíjení kompetencí, a to ani kompetencí typu kritického myšlení, řešení problémů, řízení učení, práce s informacemi, komunikace, . . . , ale ani kompetencí k vyučování a výchově, ani kompetencí osobnostních. Systém tradičního univerzitního vzdělávání ve formě přednáška, cvičení a zkouška vede spíše k encyklopedickému chápání matematiky (soubor definic, vět a důkazů) než k jejímu chápání aplikačnímu, které má k rozvíjení kompetencí blíže. Přesto jsem přesvědčen, že i v rámci současného systému je možné klást důraz na poznávání cest k matematickým pojmům a poznatkům, na rozdíl od předávání části logicky uspořádané matematické disciplíny, a na posílení „pracovního“ charakteru matematiky, na rozdíl od charakterů reprodukčně memorovacího. Jde vlastně o možnosti konstruktivních přístupů v učitelském vzdělávání, o něž usilují podle publikace [12] např. na pražské pedagogické fakultě.

Literatura

[1] Kuřina, F. Rámcové vzdělávací programy a naše škola. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let*. Litomyšl 2003, JČMF, Praha 2004.

[2] Hrubý, D. Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání. *Učitel matematiky*, 1, roč. 2003.

[3] Quis, L. *Vzpomínky ze staré Prahy*. Vyšehrad, Praha 1984.

[4] Bydžovský, B. *Naše středoškolská reforma*. Praha 1937.

[5] Alfroy, J. M. *Učitel je nahý*. Praha 1991.

[6] Komenský, J. A. *Didaktika. U Řiwnáče*. Praha 1849.

[7] Polya, G. *Mathematical Discovery, II*.

[8] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha*. MŠMT, Praha 2001.

[9] *Rámcový vzdělávací program*. Výzkumný ústav pedagogický, Praha 2002.

[10] Ředitelé se ptají: Co přesně po nás chcete? *Lidové noviny.* 19. 12. 2003.

[11] Botlík, O. & Souček, D.: Aby žáci uměli víc, musí být učiva méně. *Souvislosti* 1/2000.

[12] Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. PedF UK, Praha 2004.

Metody řazení do hodin matematiky?[1]

Josef Molnár[2]

S metodami řazení se setkáváme v algoritmické matematice, znají je programátoři i učitelé výpočetní techniky. Mohly by se však také stát motivačním prvkem zejména ve volitelných, nepovinných či suplovaných hodinách matematiky, neboť se zde neformálně uplatňují aspekty mezipředmětových vztahů mezi matematikou a výpočetní technikou, posiluje se algoritmické myšlení, otvírá se možnost ve vyučování uplatňovat prvky konstruktivního přístupu či introspekce myšlení. Tak můžeme zaujmout i žáky a studenty, kteří se orientují spíše na společenské vědy.

Máme-li v matematice uspořádat nějakou množinu, zajímá nás, jak má výsledná uspořádaná množina vypadat – příliš se tedy nezabýváme procesem, kterým to provedeme. A to je právě úkolem řazení.

Pracujeme při tom s množinou reprezentovanou *seznamem prvků v poli*. Seznamem rozumíme výčet prvků množiny, přičemž každý prvek se v seznamu vyskytuje nejvýše jednou. Polem nazýváme skupinu položek stejného typu, které jsou pod společným názvem seřazeny v paměti jedna za druhou. Položky pole nemají své vlastní pojmenování, odkazujeme se na ně pomocí indexů připojených ke jménu pole, např. pole A může mít položky A_1, A_2, ...

Při využití tématu ve výuce předpokládáme, že žáci zvládli algoritmus porovnávání dvou přirozených čísel. V hodině můžeme postupovat tak, že po krátkém úvodu žáky seznámíme s úkolem a podmínkami řešení, které vycházejí z možností počítače. Na počátku mají žáci seznam několika přirozených čísel v poli (nejlépe na lístečcích seřazených za sebou) a jejich úkolem je uspořádat tento seznam vzestupně, tj. nalézt k této činnosti vhodný algoritmus. Mohou při tom porovnávat libovolná dvě čísla a rozhodnout, které z nich je menší a které větší, jeden libovolně zvolený prvek vyjmout z pole, odložit si jej na určitou dobu mimo pole a opět jej na volné místo vložit, posunout prvek na volné místo o jednu pozici vpravo nebo vlevo (s výjimkou prvku na prvním místě, který nelze posunout vlevo). Žáci pracují individuálně nebo ve dvojicích, k řešení jim poskytneme dostatek času, případně poradíme.

Je známo několik různých metod řazení, z nichž některé si představíme.

Při užití metody *přímé vkládání (Insertion Sort)* je pole prvků je rozděleno na dva úseky. V levém úseku, tzv. setříděné části, se vytváří uspořádaná posloupnost, vpravo zůstávají doposud nesetříděné prvky (na začátku tvoří setříděnou část pouze první prvek). V každém kroku vybereme první prvek nesetříděné části a zařadíme ho na příslušné místo do setříděné části. Jakmile je nalezeno místo pro jeho vložení, prvky pole od místa vložení

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 316/2001/A PP/PedF.
[2]*PřF UP Olomouc, molnar@inf.upol.cz*

směrem doprava až po volné místo jsou posunuty o 1 pozici vpravo. Na takto uvolněné místo se vloží (právě jmenovaný) prvek. Tento postup používají hráči karet při zařazování karet do ruky. Postupně odebírají karty ze své hromádky (nesetříděné části) a zařazují je do ruky (setříděná posloupnost) podle jim známého klíče.

Příklad: (Svislou čarou je naznačena hranice mezi setříděnou a nesetříděnou částí.)

11 │	**6**	8	2	4	Zařazovaný prvek:	6
6	11 │	**8**	2	4		8
6	8	11 │	**2**	4		2
2	6	8	11 │	**4**		4
2	**4**	**6**	**8**	**11**		

Metoda nazývaná *přímý výběr (Selection Sort)* spočívá v opakovaném vybírání nejmenšího čísla z doposud nesetříděné části pole. Při užití varianty A této metody nalezneme v nesetříděném poli prvků nejmenší prvek a ten vyměníme s prvkem na 1. pozici. Potom vybereme druhý nejmenší prvek a ten vyměníme s prvkem na 2. pozici pole. Tento postup aplikujeme postupně na všechny prvky pole. Ve variantě B opět nalezneme nejmenší prvek (na n-té pozici) a vložíme jej na 1. pozici, kterou jsme uvolnili posunutím prvních $n-1$ prvků o jednu pozici vpravo. Tím jsme pole rozdělili na dvě části podobně jako při užití přímého vkládání. V každém dalším kroku pak vybereme nejmenší číslo z pravého úseku a připojíme je na konec levého, již setříděného úseku.

Příklad (varianta A):

31	7	3	23	10	8
3	7	31	23	10	**8**
3	7	8	23	**10**	31
3	**7**	**8**	**10**	**23**	**31**

Probublávání (Bubble Sort) se nazývá metoda, při níž postupně porovnáváme sousední prvky pole zezadu dopředu. V případě, že prvky nejsou ve správném pořadí, navzájem je vyměníme. Tak „vybublá“ prvek s nejnižší hodnotou na levý konec pole. Poté se opět opakuje porovnávání dvojic zezadu dopředu.

Příklad:

48	61	10	9	73	25	8	4
4	48	61	10	9	73	25	8
4	**8**	48	61	10	9	73	25
4	8	**9**	48	61	10	25	73
4	8	9	**10**	48	61	25	73
4	**8**	**9**	**10**	**25**	**48**	**61**	**73**

(Jako cvičení se pokuste vylepšit tuto metodu zkrácením délek jednotlivých průchodů polem.)

Jiným vylepšením (modifikací) předchozího algoritmu je metoda *přetřásání (Shake Sort)*, při níž jeden průchod polem probíhá zprava doleva (nejmenší prvek „bublá“ na začátek) a další hned zleva doprava (největší prvek „probublá“ na konec).

S dalšími metodami řazení, jako jsou např. slévání (Merge Sort) či řazení haldou (Heap Sort) se můžete seznámit v uvedené i další literatuře.

Literatura

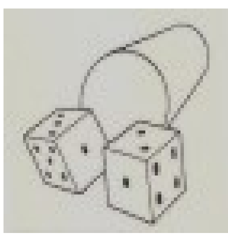
Snášel, V. & Dvorský, J. *Algoritmická matematika*. UP, Olomouc 1999.

Töpfer, P. *Algoritmy a programovací techniky*. Prometheus, Praha 1995.

Wirth, N. *Algoritmy a štruktúry údajov*. Alfa, Bratislava 1988.

Nebojme se pravděpodobnosti

Jana Petrová[1]



V dílně jsme se prakticky seznámili s jednou z možností, jak uvést téma pravděpodobnost do výuky matematiky. Vyzkoušeli jsme některé hry a s nimi spojené aktivity, které dětem umožní vhled do základních problémů pravděpodobnosti a učitelům pomohou děti motivovat a zaujmout pro tuto látku.

Tyto aktivity je možné uplatnit již v šesté třídě základní školy.

Hra

Úvodní hra měla tato pravidla:

- Hrají dva hráči, ke hře potřebují dvě kostky.
- Hráči střídavě hází oběma kostkami a výsledek sčítají.
- Když padne součet 2, 3, 4, 10, 11 nebo 12, získává bod první hráč.
- Když padne součet 5, 6, 7, 8 nebo 9, získává bod druhý hráč.
- Vyhrává ten, kdo první získá deset bodů.

Klíčová otázka po skončení jednoho či několika kol hry zní: „Je tato hra spravedlivá?“ Na tuto otázku je dobré odpovídat na základě výsledků několika dvojic. Výsledek bývá u většiny dvojic takový, že vyhraje druhý hráč. To je ten, který si počítá body za součty 5, 6, 7, 8 a 9. Děti ale na začátku hry očekávaly spíš opačnou tendenci, že bude vyhrávat hráč prvý, protože má „více součtů“ – šest a druhý hráč jen pět. Tímto je vzbuzen zájem a navozen problém, který chceme vyjasnit.

[1] *Arcibiskupské Gymnázium, Praha 2, jaspe@seznam.cz*

Jak poznám, jestli je hra spravedlivá? Na čem to záleží? Na počtu součtů či na jiných skutečnostech?

Některé děti budou již tušit, v čem tkví nespravedlnost hry, některým trvá déle než získají „vhled“ do problému. Potřebují se nejdříve přesvědčit, že výsledek první hry nebyla náhoda, potřebují pozorovat, které součty padají častěji a které méně často, porovnávat, ověřovat domněnky. Velice vhodná je v tuto chvíli následující aktivita:

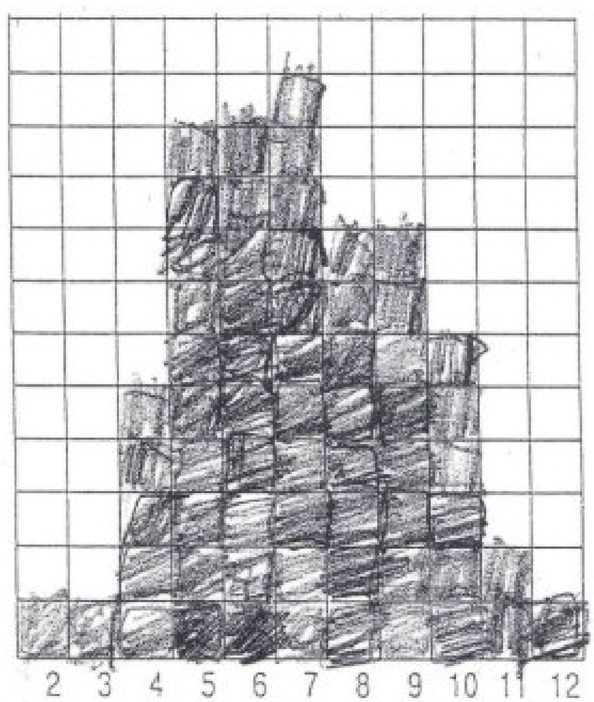
Experiment

V podstatě jde o zaznamenávání součtů, které padnou při házení dvou kostek a sčítání padlých ok. Je dobré zaznamenat přibližně 70 hodů, což by nemělo trvat déle než 5 minut.

Pokyny

Pracujte ve dvojici. Potřebujete dvě kostky a tužku. Házejte oběma kostkami a sčítejte oka, která padnou. Výsledek zaznamenejte vyplněním odpovídajícího čtverečku do tabulky. Dříve než ale začnete házet, zkuste odhadnout, jak bude asi po pěti minutách házení tabulka vypadat. Svoje očekávání stručně zapište.

Experiment jedné skupiny je na obr. 1.



Obr. 1

Až budete hotovi, odpovězte na následující otázky:

1. Který součet se objevil nejčastěji? Který nejméně často?

2. Jak byste popsali vzhled tabulky? Vypadá tak, jak jste to předem odhadovali?
3. Je možné dostat součet ok roven jedné?
4. Jak by asi tabulka vypadala, kdybychom házeli delší dobu?
5. Proč tabulka takto vypadá?
6. Co je pravděpodobnější? Dostat součet 7 nebo součet 10?

Diskuse nad výsledky experimentu je velice důležitá. Většina dětí začíná chápat, že součty je možno tvořit různými způsoby a že některé mají těch způsobů víc, některé méně. Je ale dobré počet způsobů přesně určit, k tomu slouží následující tabulka či diagram.

Diagram

Nejlépe je předložit dětem diagram polovyplněný a vyzvat je, ať jej samy doplní.

Pokyn: Doplňte diagram na obr. 2, který obsahuje všechny způsoby jak získat součty 2 až 12 pomocí dvou kostek.

	2+1									
1+1	1+2									
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Obr. 2

					5+2					
				4+2	4+3	4+4				
			3+2	3+3	3+4	4+5	3+6			
		2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	5+5	5+6		
	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	
1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Obr. 3

Vyplněný diagram je na obr. 3.

Po vyplnění celého diagramu se pomocí několika otázek přesvědčíme, že děti pochopily jeho funkci a význam. Společně odpovíme na několik otázek, např.:

- Který součet má nejvíce možností? Který nejméně?
- Jaký má diagram tvar?
- Je tu vidět podobnost s výsledky experimentu?

- V čem se tato tabulka liší od experimentu a proč?

Pro ověření, že děti skutečně objevený princip pochopily, použijeme samostatnou práci. Každý dopoví na následující otázky a poté výsledky společně zkontrolujeme a případně opravíme.

K zodpovězení následujících otázek použij vyplněný diagram:

Házíme dvěma kostkami a sčítáme padlá oka.

1. Co je pravděpodobnější, že padne – součet 6, nebo součet 9?
2. Který součet má stejnou pravděpodobnost, že padne jako součet 5?
3. Který součet je dvakrát víc pravděpodobný než součet 2?
4. Co získáme pravděpodobněji – součet 2 či 3, nebo součet 7?
5. Co spíše padne – součet 2 až 6, nebo součet 7 až 12?

Nyní je již možno pomocí diagramu ověřit, že hra není spravedlivá, a ukázat proč. Je vhodné na vyplněném diagramu barevně vyznačit, které možnosti patří hráči prvnímu, které hráči druhému, a porovnat jejich počet.

Úkol: změň pravidla hry tak, aby byla spravedlivá

Toto je velice motivující úkol a díky němu ještě více ověříme, zda děti problém pochopily. Dává možnost aktivně vymýšlet pravidla tak, aby šance na výhru byly pro oba hráče stejné, tedy aby každý z nich měl shodný počet možností, jak dané součty vytvořit.

Pokud by děti měly problémy se úkolu zhostit, dáme jim pomocnou otázku:

Byla by hra spravedlivá, kdyby první hráč získal bod za součty 2, 3, 4, 5, 10, 11 nebo 12 a druhý hráč za součty 6, 7, 8 nebo 9? Zdůvodni.

Poté, co již jsou objevena pravidla, při kterých bude hra spravedlivá, můžeme přidat ještě jednu kontrolní otázku:

Byla by hra spravedlivá, kdyby první hráč získal bod, když je součet sudé číslo, a druhý hráč, když je součet liché číslo? Zdůvodni.

V dílně jsme se dále věnovali způsobům, jak navázat na tuto úvodní motivační hodinu a jak naučit děti vypočítat pravděpodobnost a vyjádřit ji číselně.

Poznámka: Sadu aktivit pro výuku pravděpodobnosti jsem původně vypracovala pro účely výzkumu týkajícího se výuky matematiky v cizím jazyce. Zájemcům poskytnu další informace, případně pracovní listy v angličtině či němčině.

Hranové modely platonských těles

Jiří Přibyl[1]

Předmětem tohoto příspěvku je obsah didaktické dílny, ve které se účastníci seznámili s vrcholově-hranovým systémem modelování pravidelných těles, jehož autorem je Miyuki Kawamura (Kawamura, 2001).

Ve výuce kolem nás vzniká nemálo pomůcek pro modelování různých geometrických objektů. Jenom v oblasti modelování pravidelných a polopravidelných těles jsem se setkal s několika typy. Mohu uvést například modely ze špejlí a plastelíny, modely, kde se nejprve na papír vytvořila síť, která se vystříhala a následně slepila, stejně tak komerčně vyráběné modely z plastu, kde jedinec má dopředu danou hromadu vrcholů a hran a konče „moderními" pomůckami na bázi magnetu a ložiskových kuliček. Každý z těchto modelů má své klady a zápory a jistě nejednou prokázal své oprávnění k existenci. Komerčně vyráběné modely jsou dostupné všem, tedy i méně motoricky nadaným, ovšem za určitý poplatek, který leckdy není zanedbatelný. Oproti tomu modely ze sítě či špejlí, které jsou vytvořitelné doma, zase vyžadují určitou zručnost, která v předchozím případě není zapotřebí.

Systém modelování, který zde předkládám, v sobě kombinuje klady i zápory všech výše uvedených způsobů modelování. Tak v prvé řadě je nejdostupnější. Papír je dnes dobře dostupný každému a oproti síťovému modelu nepotřebujeme nůžky, lepidlo ani pravítko a tužku pro vytvoření sítě. Oproti modelu špejle/plastelína bývá obvykle stabilnější. Dále pracuje obdobně jako plastový model, tzn. že jedinec má k dispozici hrany a vrcholy a z nich tento model sestavuje a může při tom zkoumat námi požadované závislosti. Zmiňme i zápory. Nevýhodou je, že je kladen požadavek na určitou manuální zručnost jedince. Tato nevýhoda se dá odstranit skupinovým vyučováním, kdy manuálně slabší jedinci vytvářejí jednodušší moduly a tím zdokonalují svoji motoriku, kdežto ti zdatnější pracují rovnou na těžších modulech. Druhou nevýhodou je potřeba naučit se komunikační jazyk. Tuto nevýhodu může odstranit učitel tím, že tento prostředek se naučí sám a dále dětem jen předvádí (tlumočí z jazyka PP (překládání papíru)), jak mají pracovat. Dovolil jsem si uvést na začátek tohoto článku několik základních pojmů.

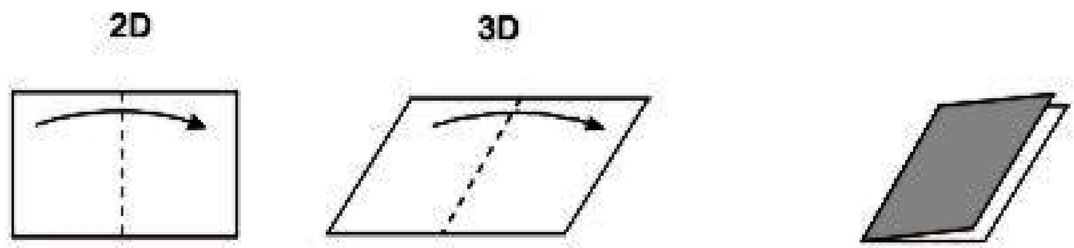
Není předmětem, a myslím si, že by to ani nebylo účelné, uvádět klady a zápory, které přináší zapojení dalšího smyslu do poznávání, v našem případě těles a jejich zákonitostí. To lze nalézt v jiných článcích, popř. se s tím lze setkat na různých přednáškách.

Nakonec vám popřeji, abyste si vy i vaši žáci užili při vytváření modelů co nejvíce zábavy a výuka matematiky se tak stala zase o něco menším „strašákem".

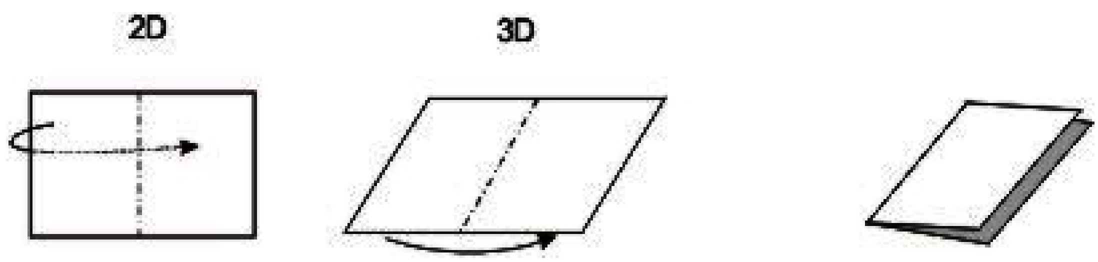
[1] *KMAT PF UJEP Ústí nad Labem, pribyljap@seznam.cz*

Základní symbolika a značení v překládání papíru

Tento typ hrany označuje tzv. „údolíčkové“ přeložení papíru – někdy se též označuje jako líc k líci.



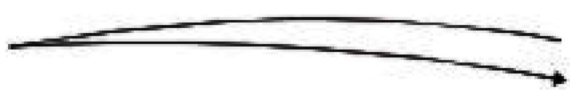
Tento typ hrany označuje tzv. „kopečkové“ přeložení papíru – někdy se též označuje jako rub k rubu

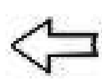


Tento typ hrany označuje hranu již dříve vytvořenou

Pojmem *hrana* budeme obvykle rozumět i okraje listu papíru.

Tento typ čáry  označuje přeložení papíru – použití viz výše.

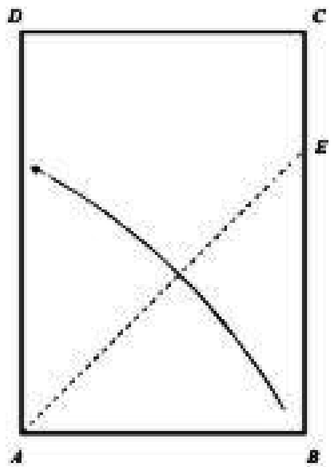
Tento typ čáry  označuje přeložení a opětovné rozložení papíru

Tento typ šipky označuje otevření: 

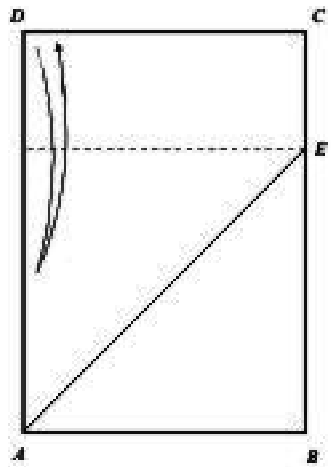
Diagramy

Grafický záznam algoritmu vytváření skládanky se označuje termínem *diagram*. Diagram tedy je konečná, graficky zaznamenaná, posloupnost kroků vedoucí k požadovanému tvaru.

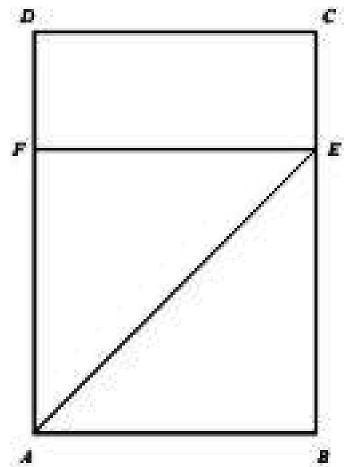
Vytvoření čtverce z papíru formátu A4: Přeložíme papír (formátu A4) tak, aby se bod B zobrazil na hranu AD. Na hraně BC vznikne bod E jako průsečík hran BC a AE (obr. 1). Přeložíme papír tak, aby se bod C zobrazil na hranu BE (obr. 2). Papír podle hrany EF rozstřihneme (obr. 3).



Obr. 1



Obr. 2

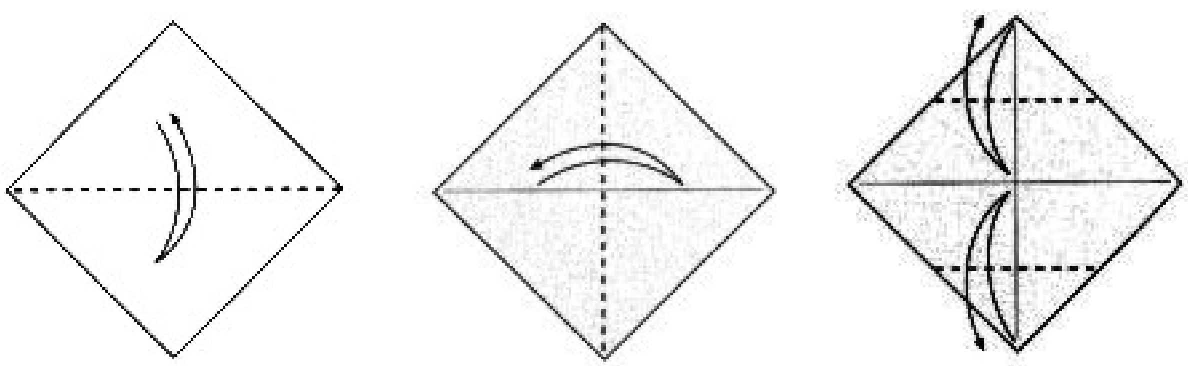


Obr. 3

Modul hrany

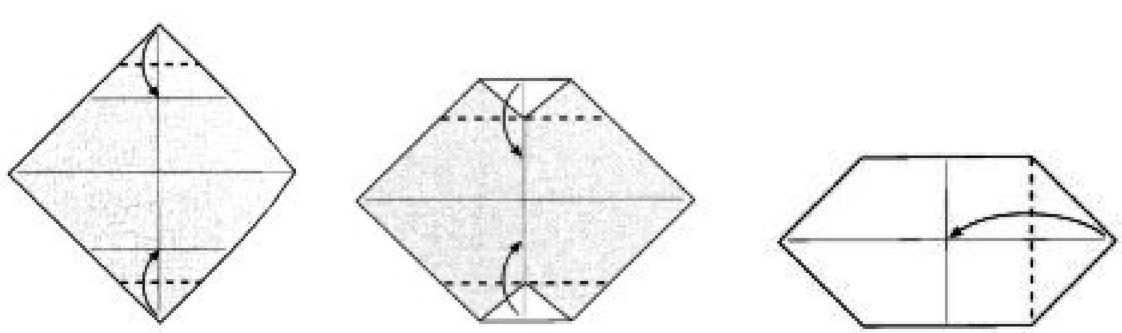
Viz obr. 4 – obr. 8.

1. Přeložíme papír v polovině, podél diagonály čtverce.
2. Učiníme to stejné ve vertikálním směru.
3. Horní i spodní roh přehneme do středu papíru.



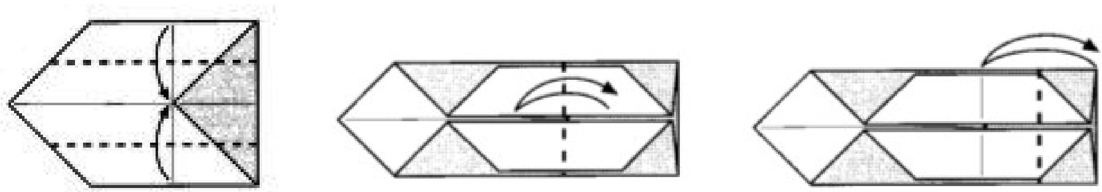
Obr. 4

4. Horní i spodní roh papíru přehneme k hraně vytvořené v minulém kroku. Již nerozevíráme.
5. Přehneme podél hrany vytvořené v kroku 3. Skládanku obrátíme.
6. Přehneme pravý roh skládanky do středu papíru.



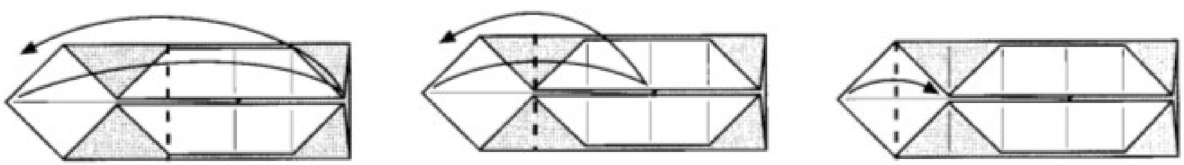
Obr. 5

7. Přeložíme model podél naznačených hran do středu papíru.
8. Přeložíme skládanku podél hrany vytvořené v kroku 2.
9. Přeložíme pravou část modulu k hraně vytvořené v předchozím kroku.



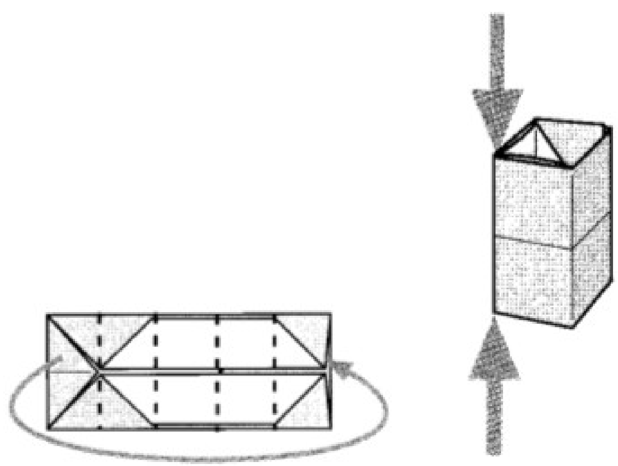
Obr. 6

10. Přeložíme modul v polovině.
11. Přeložíme levou část modulu k hraně vytvořené v kroku 8.
12. Přeložíme levý roh skládanky k hraně vytvořené v předchozím kroku.



Obr. 7

13. Zasuneme levou část modulu do pravé části. Šipky naznačují vytvořené kapsy.

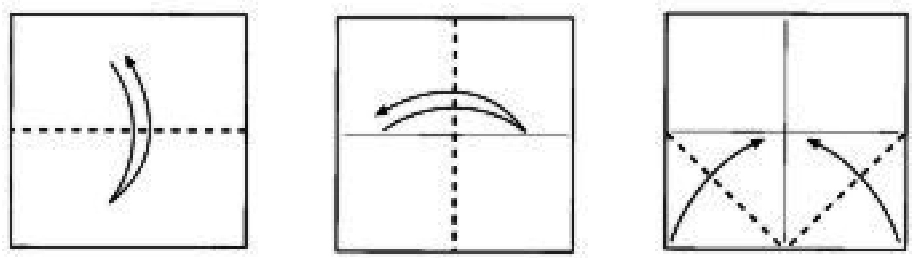


Obr. 8

Modul – vrchol šestistěnu

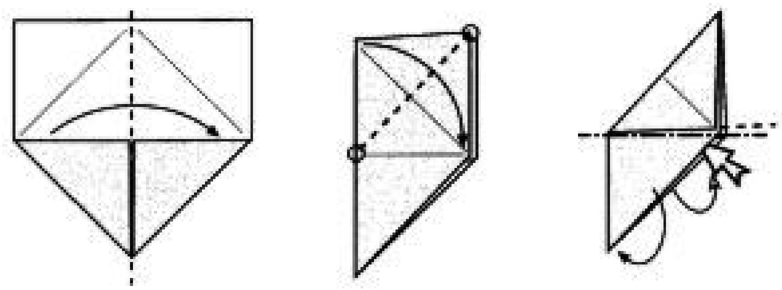
Viz obr. 9 – obr. 11.

1. Přeložíme papír v polovině (horizontálně).
2. Přeložíme papír v polovině (vertikálně)
3. Levý dolní a pravý dolní roh přeložíme ke středu.



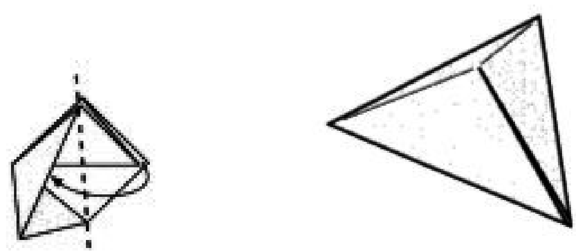
Obr. 9

4. Přeložíme papír v polovině podle hrany vytvořené ve 3.
5. Levý horní roh (všechny vrstvy) přeložíme podél naznačené hrany.
6. Skládanku zevnitř rozevřeme, čímž přestane být 2D, ale stane se 3D a vytvoří roh.



Obr. 10

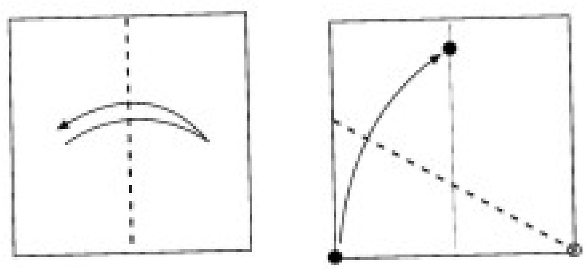
7. Přeložením podle naznačené hrany celou skládanku zpevníme.
8. Výsledný modul.



Obr. 11

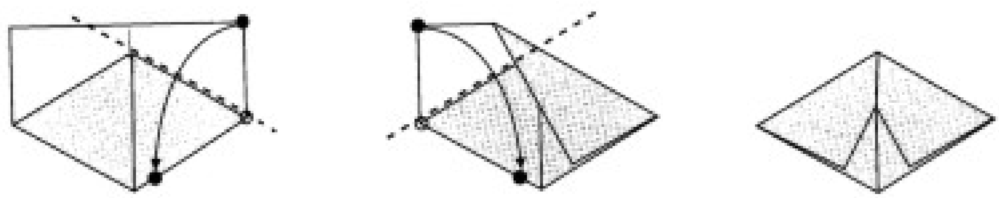
Modul – vrchol čtyřstěnu

Viz obr. 12 – obr. 16.
1. Přeložíme papír v polovině (vertikálně).
2. Přeložíme papír tak, aby levý dolní roh se zobrazil na hranu vzniklou v předchozím kroku
3. Přeložíme papír tak, aby pravý dolní roh se zobrazil do stejného místa jako levý dolní roh.



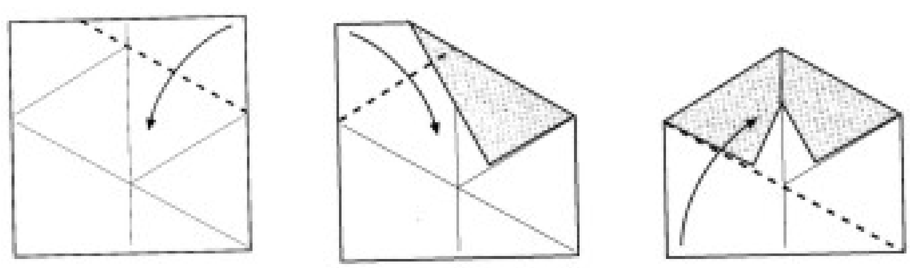
Obr. 12

4. Přeložíme papír tak, aby pravý horní roh se zobrazil na hranu papíru.
5. Provedeme totéž na druhé straně.
6. Výsledek. Papír zcela rozložíme.



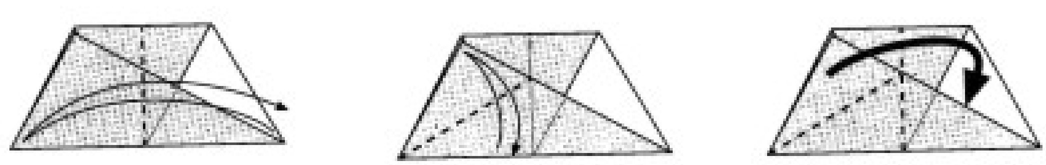
Obr. 13

7. Přehneme papír podle hrany vytvořené v kroku 4.
8. Přeložíme papír podle hrany vytvořené v kroku 5.
9. Přeložíme papír podle hrany vytvořené v kroku 2. Skládanku pootočíme.



Obr. 14

10. Vytvoříme hranu přeložením v polovině.
11. Přeložíme pouze jednu vrstvu papíru podle naznačené hrany.
12. Přeložíme podle hrany vytvořené v kroku 10, přičemž trojúhelník vytvořený v kroku 11 zasuneme do kapsy.



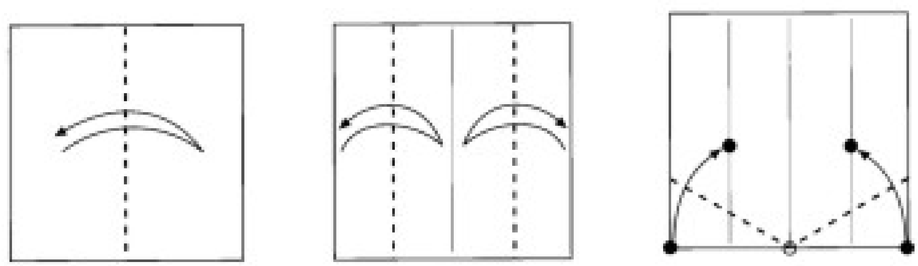
Obr. 15

13. Model rozevřeme do 3D podoby.
14. Požadovaný výsledek.

Obr. 16

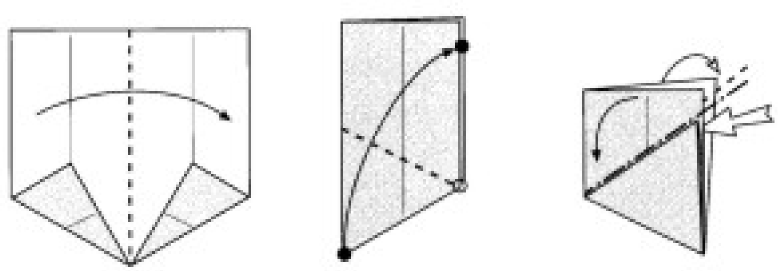
Modul – vrchol osmistěnu

Viz obr. 17 – obr. 20.
1. Přeložíme papír v polovině (vertikálně).
2. Pravou i levou stranu papíru přeložíme ke středu.
3. Pravý dolní i levý dolní roh zobrazíme na hrany vzniklé v předešlém kroku.



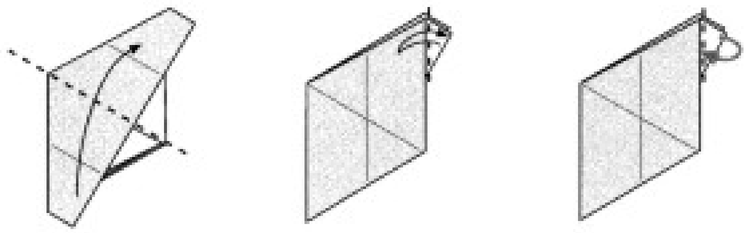
Obr. 17

4. Přeložíme papír podle hrany z kroku 1.
5. Přeložíme papír tak, aby levý dolní roh se zobrazil na pravou hranu.
6. Vsunutím ruky dovnitř papír rozprostřeme naplocho tak, aby se levý okraj papíru roztáhl do roviny. Výsledek je na následujícím obrázku.



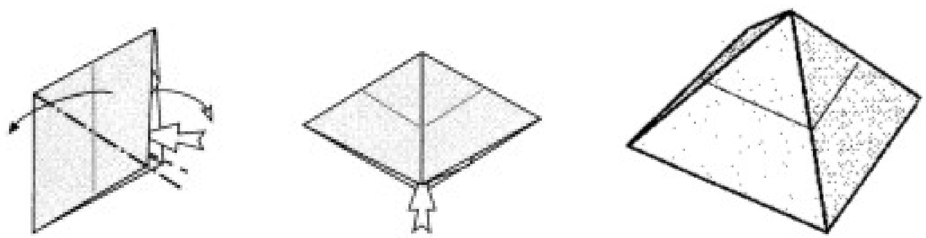
Obr. 18

7. Přehneme jednu vrstvu papíru podle již dříve vytvořených hran.
8. Trojúhelníky vpravo nahoře přehneme podle hrany okraje papíru – oba stejným směrem.
9. Oba trojúhelníčky vložíme do jedné kapsy (dovnitř skládanky).



Obr. 19

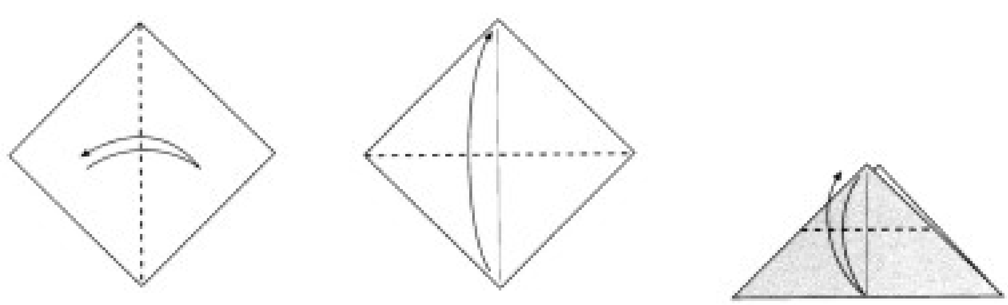
10. Rozevřením skládanky ji zploštíme do druhého směru.
11. Rozevřením získáme 3D tvar - pyramidu.
12. Požadovaný výsledek.



Obr. 20

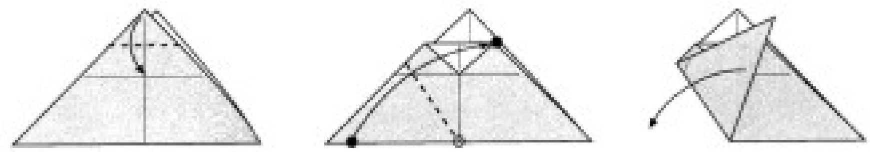
Modul – vrchol dvanáctistěnu

Viz obr. 21 – obr. 26.
1. Papír přeložíme diagonálně.
2. Přeložíme po druhé diagonále.
3. Vyznačíme si střed výšky trojúhelníka.



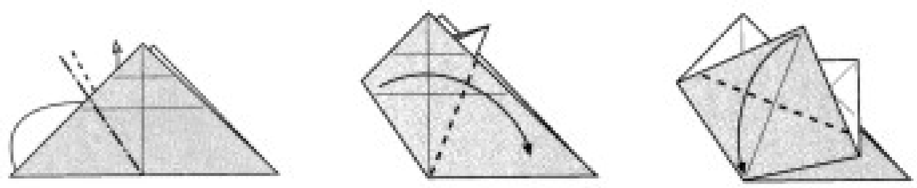
Obr. 21

4. Přeložíme horní roh do průsečíku hran vytvořeným v krocích 1 a 3.
5. Přeložíme papír tak, aby se pravý horní roh nově vzniklého trojúhelníka zobrazil na levou dolní hranu.
6. Rozevřeme.



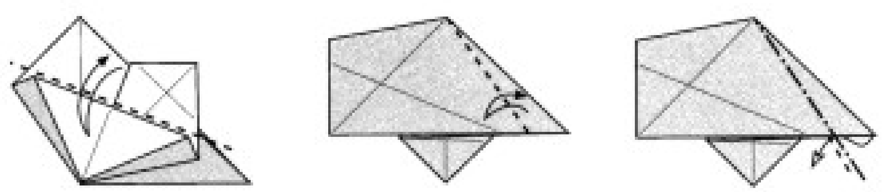
Obr. 22

7. Papír „vsložíme“ dovnitř skládanky.
8. Vrchní stranu skládanky přeložíme doprava, jak jen je to možné.
9. Přeložíme vrchní stranu do levého dolního rohu.



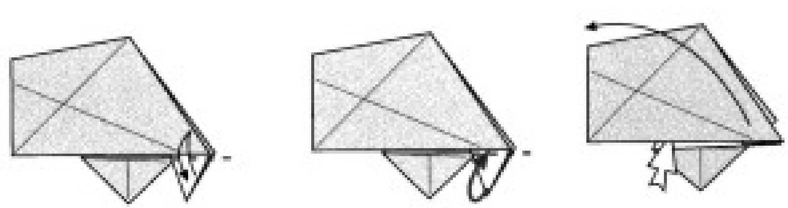
Obr. 23

10. Zbývající vrstvy papíru přeložíme podél hrany vzniklé v minulém kroku. Rozložíme. Skládanku otočíme.
11. Přední stranu skládanky přehneme podle hrany na zadní straně – tzn. aby hrany byly „totožné“. A rozložíme.
12. Papír „vsložíme“ dovnitř podle hrany vzniklé v minulém kroku.



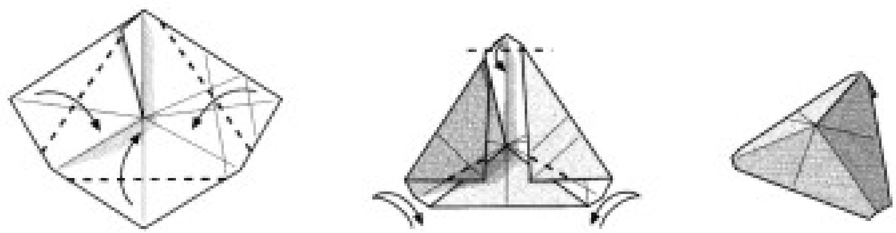
Obr. 24

13. Trojúhelníček přehneme podél hrany okraje papíru. Obě vrstvy stejným směrem.
14. Trojúhelníček vložíme do kapsy.
15. Skládanku rozložíme, přičemž složené zůstane pouze to, co bylo vytvořeno v posledním kroku. Vznikne ohraničení prostoru třemi stěnami.



Obr. 25

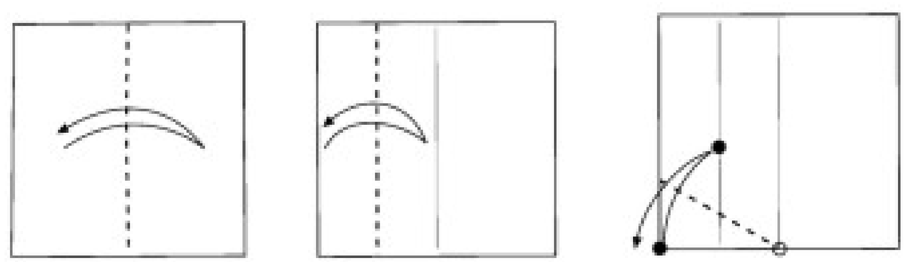
16. Podle již dříve vytvořených hran přehneme papír dovnitř.
17. Na přehnutých stranách (pravá a levá) vyznačíme hrany tak, aby souhlasily s hlavními hranami přehybů. Vrchní část pouze překlopíme dolů.
18. Požadovaný tvar.



Obr. 26

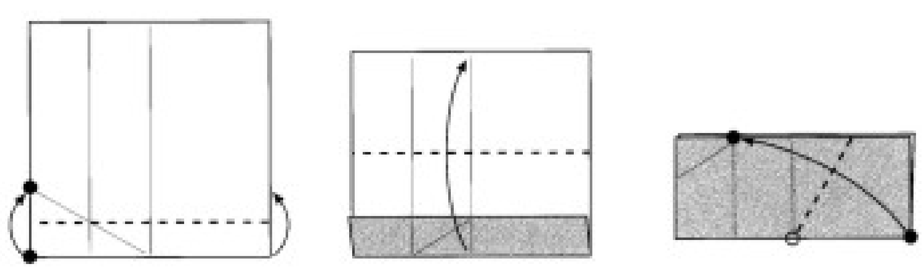
Modul – vrchol dvacetistěnu

Viz obr. 27 – obr. 31.
1. Přeložíme papír v polovině (vertikálně).
2. Přeložíme levou hranu papíru do středu.
3. Přeložíme papír tak, aby se levý dolní roh papíru zobrazil na hranu vytvořenou v předchozím kroku.



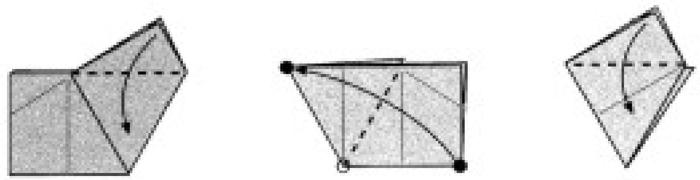
Obr. 27

4. Přeložíme papír tak, aby se levý dolní roh zobrazil na bod vzniklý v předchozím kroku.
5. Přeložíme skládanku v polovině.
6. Přeložíme papír tak, aby se pravý dolní roh zobrazil na horní hranu, přičemž vznikající hrana prochází středem dolní hrany.



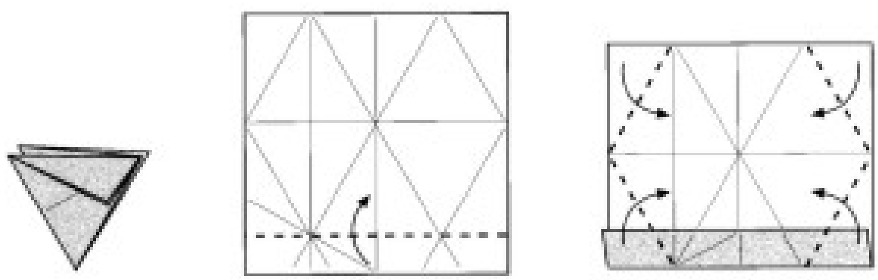
Obr. 28

7. Přeložíme podle naznačené hrany, která „kopíruje“ hranu papíru.
8. Přeložíme papír tak, aby se pravý dolní roh skládanky zobrazil na levý horní roh.
9. Přeložíme podle naznačené hrany, která „kopíruje“ hranu papíru



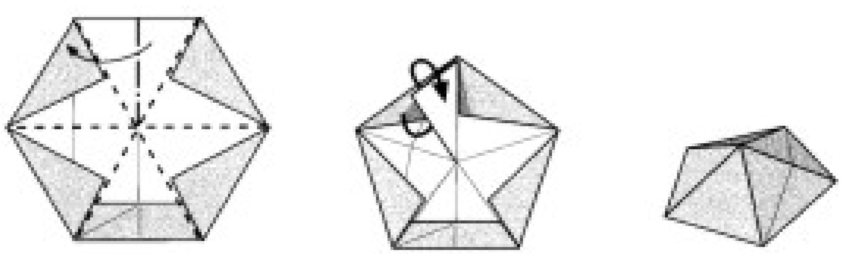
Obr. 29

10. Výsledek. Skládanku zcela rozložíme.
11. Přeložíme papír podle hrany vytvořené v kroku 4.
12. Přehneme podél vytvořených hran tak, aby vzniknul pravidelný šestiúhelník.



Obr. 30

13. Horní trojúhelník přeložíme v polovině a přiložíme k pravé straně. Model se stane prostorovým a vznikne pyramida nad pravidelným pětiúhelníkem.
14. Vzniklý trojúhelník vložíme pod druhý.
15. Požadovaný výsledek.



Obr. 31

Trocha statistiky

Vzhledem k tomu, že se jedná o modulární modely, je třeba počítat s větším množstvím papírů. Dovolím si ve zkratce uvést, kolik čeho bude zapotřebí.

	hranové moduly	vrcholové moduly
čtyřstěn	6	4
šestistěn	12	8
osmistěn	12	6
dvanáctistěn	30	20
dvacetistěn	30	12

Všechny modely se skládají ze čtvercových papírů stejné velikosti. Na každý modul je třeba jeden list papíru.

Literatura

Kawamura, M. *Polyhedron origami: For Beginners*. Tokyo (Japan): Nihon Vogue Co., Ltd., 2001. Japanese/English.

Rozšíření literatury vzhledem k dané problematice

Horák, S. *Mnohostěny*. 1. vydání. Praha: Mladá fronta, 1970. Škola mladých matematiků, 27.

Montroll, J. *A Plethora of Polyhedra in Origami*. Mineola (New York): Dover Publications, Inc., 2002. English.

Kasahara, K. *Amazing Origami*. New York (New York): Sterling Publishing Company, Inc., 2001. English.

Kadeřávek, F., Klíma, J. & Kounovský, J. *Deskriptivní geometrie I*. 3. vydání. Praha: JČMF, 1946. Knihovna spisů matematických a fysikálních, 16.

Origami3: Third International Meeteing of Origami Science, Mathematics, and Education. HULL, Thomas (editor). Natick (MA): A K Peters, Ltd., 2001.

Mitchell, D. *Mathematical Origami: Geometrical Shapes by Paper Folding*. Norfolk (England): Tarquin Publications, 2002.

Fuse, T. *Unit Origami: Multidimensional Transformations*. Tenth printing. Tokyo (Japan): Japan Publications, Inc., 2001.

Franco, B. *Unfolding Mathematics with Unit Origami*. Emeryville (CA): Key Curriculum Press, 1999.

Geometrické etudy

Filip Roubíček[1]

Geometrické útvary můžeme a měli bychom reprezentovat různými způsoby. Více způsobů *reprezentace* je určitou zárukou, že geometrický pojem nebude ztotožněn s jeho reprezentací, tedy s tím, co jej v reálném světě jen zastupuje. Geometrické obrazce a tělesa nebo jejich části (strany, hrany, stěny apod.) můžeme popsat slovy, nakreslit, vymodelovat, ukázat na předmětech kolem nás, naznačit gestem . . . Můžeme je však také zosobnit – personifikovat tím, že je necháme promlouvat. K užití prvků dramatizace ve vyučování geometrii a napsání několika geometrických etud mě inspiroval článek o geometrickém sci-fi románu *Flatland*, který publikoval v roce 1884 v Londýně učitel E. A. Abbott (Kupčáková, M. Tajemné kruhové úkazy očima geometra. *Učitel matematiky*, říjen 1996, roč. 5, č. 1, s. 41–46).

Geometrická etuda je krátká scénka, ve které vystupují geometrické útvary. Jejich dialogy jsou sestaveny tak, aby obsahovaly indicie útvarů důležité pro jejich rozpoznání. Popis vlastností nemusí být ryze geometrický, útvar může být připodobněn nějakému reálnému předmětu. Při tvorbě dialogů je třeba vystihnout charakteristické vlastnosti útvaru a správně použít geometrickou terminologii. Děj etudy volíme většinou podle reálné situace, v níž se vyskytují předměty daného geometrického tvaru. Například dějem etudy, v níž vystupují čtyřboké hranoly, může být stavba zdi nebo dláždění chodníku.

Geometrické etudy lze zařadit do výuky jako formu *evokace* geometrického tématu. Žáci mohou etudu předem nacvičit a v hodině zahrát svým spolužákům, jejichž úkolem je rozpoznat, které geometrické útvary v etudě vystupovaly. Hledání argumentů, proč je to tento a ne jiný útvar, je ideální podnět pro diskusi. Starší žáci a studenti mohou také napsat vlastní etudu. Je však třeba si uvědomit, že tato činnost vyžaduje hlubší geometrické znalosti. Tvorba etudy může být součástí opakování nebo shrnutí geometrického tématu. Prezentace vlastní etudy představuje také určitou formu *(sebe)reflexe*. Při poslechu etud na jedno zadané téma si žáci mohou uvědomit, do jaké míry porozuměli probíranému učivu, a učitel může zjistit, jak hluboko se žákům podařilo proniknou do tématu.

Pro názornou představu uvádím několik etud, které si účastníci dílny zahráli.

Krychle a koule

Filip Roubíček

Kutálející se Koule narazí do stojící Krychle.

Krychle Au! Kam koukáš? Nevidíš, že tu stojím?

[1] *MÚ ČSAV, roubicek@math.cas.cz*

Koule	Ale vidím. Jenom se neumím zastavit.
Krychle	To jsem si všimla.
Koule	Díky, že tu tak pevně stojíš. Konečně si trochu odpočinu.
Krychle	Prosím, rádo se stalo.
Koule	Ach, já nikde dlouho nepostojím. Stačí, aby do mne někdo strčil nebo zafoukal vítr, a už mě to žene jinam.
Krychle	Buď ráda. Poznáš svět. To já se nikam moc nepodívám. Kam mě postaví, tam stojím.
Koule	Jak já bych ráda stála a ještě si mohla vybrat na které stěně. No jo, když já žádnou nemám.
Krychle	Víš, já mám ráda „Člověče nezlob se!“. To si vždycky vezmu ty své puntíkované šaty a kutálím se sem a tam. Ale pak mě bolí vrcholy. Nejsem na takový pohyb vůbec stavěná.
Koule	Takové problémy já nemám. Nevím, jaké to je mít vrcholy nebo hrany.
Krychle	*(kýchne)* Hepšík! (*Koule se kutálí pryč.*) Počkej! Kam jdeš?
Koule	*(volá z dálky)* To bych také ráda věděla.

Kužel a jehlan

Filip Roubíček

	Stojí na židlích dál od sebe (jako střechy věží).
Kužel	*(volá)* Hej, pane kolego.
Jehlan	*(ohlíží se)* To voláte na mě?
Kužel	A na koho? Vždyť tady široko daleko nikdo jiný jako my není?
Jehlan	Hm, máte pravdu. Ale stejně, podobní si moc nejsme.
Kužel	Jeden oblý, druhý hranatý. Co na tom? Vrchol máme oba dva.
Jehlan	Hm, jen aby nepršelo.
Kužel	Koukám, že máte nový plášť.
Jehlan	Pěkný, co? Měděný.
Kužel	Stejně vám zezelená jako mně.
Jehlan	Snad nezávidíte?
Kužel	Ale kdepak. . . . Vypadá to na bouřku.
Jehlan	Střihli mi ho akorát. Všechny trojúhelníky mi pěkně padnou a nikudy nefouká. Však ten starý byl už pro ostudu.
Kužel	Vám se to povídá. Já budu muset v tomhle ještě nějaký rok přečkat. To víte, mně může střihnout na plášť jen mistr.
Jehlan	No, jen se nevytahujte. Co by podle vás měla říkat paní Kulová?
Kužel	Nic mi do toho není, pane kolego, ale kde máte hromosvod?
Jehlan	Proč se ptáte? Mají ho dodělat zítra.

Kužel Jenom že se sem žene bouřka. Podívejte, tamhle se už blýská.

Jehlan To je nadělení. Co budu dělat?

Kužel Modlit se, abyste z té parády neměl cáry. Tak zítra.

Trojboký hranol, kvádr a válec

Filip Roubíček

Kvádr sedí na židli, Hranol stojí nakloněn vedle něj a Válec stojí ze strany za Hranolem (jako stavebnicové kostky). Náhle se všichni zachvějí, Válec spadne a zapře se o Hranol.

Kvádr Co to bylo?

Hranol To nevím, ale je to dost těžké.

Válec *(omluvně)* Nezlobte se, to jsem já. Sotva se držím na nohou.

Kvádr Pěkná tíha. Měl byste trochu zhubnout.

Válec *(brání se)* V naší rodině jsou štíhlí i širocí a nikomu to nevadí.

Kvádr Ovšem vy jste z nich nejvykutálenější.

Válec Nechte si ty řeči. Podívejte se na svou sestru, zrovna támhle s ní hrají. *(ironicky)* To je štíhlost sama.

Hranol *(rozhlíží se)* Kde? Já přes vás nic nevidím.

Válec Prosím, nevrťte se. Nebo se skutálím až kdovíkam.

Kvádr Ani bych se nedivil, na takové nakloněné rovině.

Válec Vám se to mluví. Máte šest stěn . . .

Hranol *(skáče mu do řeči)* Já jich mám pět!

Válec . . . a k tomu dvakrát tolik hran.

Kvádr A vy snad nemáte stěny? Na čem jste předtím asi stál?

Hranol A hrany máte taky, víte. Sice jen dvě, ale za to extra.

Kvádr To my takové nemáme, viďte *(šťouchne loktem do Hranolu)*, a nikdy mít nebudeme.

Válec Ovšem dvě shodné stěny máte stejně jako já.

Hranol To je ale asi to jediné, co máme s vámi společného.

Kvádr *(vychloubavě)* Já si mohu dokonce vybrat.

Všichni se opět zachvějí.

Válec A je to tady. *(kutálí se pryč)*

Kvádr Co?

Hranol *(radostně)* To je úleva. Dobře, že už musel.

Kvádr Konečně jen mezi svými.

Pravidelné mnohoúhelníky

Filip Roubíček

Přicházejí trhavými kroky (jako by se převalovaly).

Šestiúhelník *(jde napřed, ohlíží se)* Pánové, trochu pohybu do toho umírání.

Čtverec *(jde jako poslední, těžce se převaluje a funí)* Zastavme se na chvíli, sotva popadám dech.

Pětiúhelník *(vesele, trochu namyšleně si prozpěvuje)* Já jsem symbol harmonie.

Čtverec *(k šestiúhelníku)* Co se mu stalo?

Šestiúhelník Asi se z té své výjimečnosti zbláznil. Myslí si, že když má složitou konstrukci, je něco víc než my ostatní.

Pětiúhelník Copak to není pravda? Vás zvládne i malé dítě, ale mě jen učenec.

Šestiúhelník Prosím tě, kde žiješ? Dnes, ve světě počítačů . . .

Čtverec . . . a úhloměrů?

Pětiúhelník Ty, mě nebudeš poučovat, ty obrázku ze školky.

Čtverec Možná obrázek, ale nebýt mě, nevěděli bychom, kdo je jak velký.

Šestiúhelník Bůh ví, proč si vybrali právě tebe.

Čtverec To je přece jasné. Protože umím pokrýt rovinu.

Šestiúhelník Tak to já umím taky a mnohem zajímavěji.

Pětiúhelník Nepovídej.

Šestiúhelník Vezmi si třeba včely, ty si vybraly právě mě jako vzor pro svou architekturu.

Pětiúhelník To je ale jediná architektura, kde se uplatníš. To já, když se spojím v prostoru se svými bratry, to je krása.

Šestiúhelník No a co.

Čtverec Pojďte už raději. Nebo si ještě vjedete do stran a žádná kružnice už s námi nebude chtít nic mít.

Všichni odcházejí.

Vrcholy rovnoramenného trojúhelníku

Filip Roubíček

Vrcholy A, B sedí po stranách a jsou natočeni k třetímu (Vrcholu C), který stojí uprostřed. Hovoří mezi sebou.

Vrchol A *(mluví k Vrcholu C)* Povídám vám, že máte nejlepší rozhled.

Vrchol B *(připojuje se)* A ještě vás oslovují Hlavní.

Vrchol C Přijde na to.

Vrchol A	Ale kdybych to měl stejně daleko k vám jako k němu, tak bychom byli všichni Hlavní.
Vrchol B	No vidíte, to mě nenapadlo. A nebudou si nás potom plést?
Vrchol C	A pak se divíte, že vám říkají BÉ.
Vrchol B	Hele, ať mě neuráží. Nebo tu základnu zkrátím a bude mít po ptákách.
Vrchol C	To bych chtěl vědět jak?
Vrchol A	Nějaký způsob se určitě najde.
Vrchol C	Nehodlám se s vámi hádat, ale stejně by vám neříkali Hlavní.
Vrchol A	Co není, může být.
	Vrcholy A, B se k sobě přisunou
. Vrchol C	Co se to děje? Co je to za transformaci?
	Všichni vstanou a vymění si místa (vznikne jako rovnostranný trojúhelník).
Vrchol A	*(stojí uprostřed)* Tady je opravdu pěkný výhled.
Vrchol B	Já tam chci taky.
Vrchol A	Buď ticho! Teď jsem Hlavní já.
Vrchol B	A proč ne já?
Vrchol C	*(vstane a slavnostně prohlašuje)* Přátelé, Hlavní sice nejsme nikdo, ale povýšili jsme do stavu pravidelnosti.

V druhé části dílny její účastníci tvořili a hráli vlastní etudy. Jak se jim to podařilo, můžete posoudit sami.

Strany pravoúhlého trojúhelníku

Milada Hudcová, Dana Kubešová a Renáta Němečková

	Přicházejí ze tří stran. Jedna brebentí přes druhou, poplácávají se, obhlížejí se, jedna měří pohledem druhou – prostě ženské.
Všechny	Čau holky! Tak jak se máte? Jak se vede? To byla věčnost, co jsme se neviděly.
Přepona	*(namyšleně)* Supr! Vidím, že jsem z vás stoprocentně nejdelší.
Odvěsna a	*(dotčeně, chytne odvěsnu b za ruku)* My jsme sice kratší, ale když se dáme dohromady, nemáš nárok.
Odvěsna b	*(podpichuje)* A navíc svíráme společné tajemství. *(uličnicky vyplázne jazyk)*
Přepona	*(uraženě, rozmazleně)* Já mám také tajemství. A mám ho uprostřed.
Odvěsna a	To není žádné tajemství. Vždyť nás se to také týká.
Odvěsna b	*(výhružně, mírně strčí do přepony)* A stejně, ten tvůj sejf v pohodě odhalíme.
Přepona	*(bojovně)* Tak to bych ráda věděla jak? Jste bez šance.
Odvěsna a	*(vítězně)* Jednoduše! Každá najdeme ten svůj trezor. . .

Odvěsna b *(skočí jí do řeči a točí se s ní dokolečka)* ... a pak vyrazíme kolmo k cíli!
Přepona *(skoro plačtivě)* No a?!
Odvěsny *(posmívají se)* No nic, sejdeme se u toho tvého sejfu. A pak to pěkně roztočíme. *(opět se bezstarostně točí)*
Aby odvěsny zažehnaly blížící se konflikt, rychle zavedou řeč na jiné téma.
Odvěsny *(smířlivě se obrací k přeponě)* A co chlapi? Jak to jde?
Přepona Perfektně! Euklides podává stabilně spolehlivý výkon.
Odvěsna a I Thales je docela ve formě. Je to špica!
Odvěsna b A já? *(plačtivě)* Pythagoras už je pod kytičkama! *(úsměv)* I když ?!

Kružnice opsaná a vepsaná

Květa Krüger a Míla Straková

Běží vedle sebe.
Vepsaná Já už jsem celá uondaná.
Opsaná Nestěžuj si, já se naběhám víc.
Vepsaná Řekla jsi, že se proběhneme spolu a pak si tady lítáš sama.
Opsaná Za chvilku mě budou stejně bolet nohy.
Vepsaná To jsem ráda, že si trochu odpočinu. Z toho čtverce se mi už točí hlava.
Opsaná Nestěžuj si, nemusíš dávat pozor na cestu. To já pořád běžím, běžím a najednou vrchol – první, druhý, třetí, čtvrtý. . .
Vepsaná Já zase musím dávat pozor, abych se neodřela.
Opsaná Hele, tady jsme už dneska potřetí.
Vepsaná Není divu, když běháme stále kolem jednoho bodu.

Rovnoběžník, lichoběžník a různoběžník

Viera Matušincová, Jana Nepomucká a Marie Vykoukalová

Tři kamarádi – Rovnoběžník, Lichoběžník a Různoběžník (deltoid) zasněně povídají o svých přednostech.
Rovnoběžník Já jsem krásný, pravidelný.
Lichoběžník To já taky, a můžu mít více podob.
Různoběžník Heč, ale já jsem mezi vámi výjimečný!
Lichoběžník Čím ty můžeš být výjimečný?
Různoběžník Jsem z vás nejméně pravidelný.
Rovnoběžník Ale jdi. Já mám čtyři strany, a vždy dvě shodné a rovnoběžné.
Lichoběžník To já mám vždy dvě rovnoběžné a dvě různoběžné.
Různoběžník Já sice ne, ale se mnou si na podzim hrají děti.

Všichni Jsme sice každý jiný, ale všichni máme čtyři strany a součet velikostí našich vnitřních úhlů je 360°.

Krychle, kvádr a pravidelný čtyřboký hranol

Veronika Kremsová, Ján Žabka a . . .

Krychle a Kvádr sedí, přichází Hranol.

Hranol Ta hrozná hranaté škola a spolužáci. Nebudu tam chodit! A vůbec tohle hrozné pravoúhlé království mě už štve.

Krychle Ale vždyť chodíš do té nejlepší školy, do královské!

Hranol No právě. Vadí mi, že mezi ostatními vyčnívám.

Krychle Vidíš, a já jsem si tvého tatínka vybrala právě proto, že je tak vysoký a štíhlý. I tvůj dědeček je stejně vysoký, ale tlustší a jeho výška tak nevynikne.

Kvádr Taky když sis mě přivedla domů, tvým rodičům se nelíbilo, že nejsem tak pravidelný jako vaše královská rodina. A přitom dokážu vyplnit prostor stejně dobře jako vy.

Krychle To je pravda. Nakonec jsme rodiče přesvědčili.

Kvádr A ty *(k Hranolu)* máš z nás to nejlepší: podstavy po mamince . . .

Krychle . . . a výšku po tatínkovi.

Další příspěvky

Žák vstupující do školy[1]

Michaela Kaslová[2]

Úvod

Do prvních tříd dnes nastupují děti velmi různé úrovně rozvoje schopností, škály návyků. Není to dáno pouze odlišným vývojem dítěte nebo rodinným prostředím. Jde i o děti, které prošly mateřskou školou, byly klasifikovány jako zralé pro vstup do školy a přesto bude jeden učitel postaven před složitější situaci než druhý. Proč tomu tak je? Existují rozdíly, které jsou dány filosofií mateřské školy, stylem její práce. Někteří učitelé budou nuceni učit žáky sedět, učit nebo přeučovat, jak držet v ruce tužku, soustředit se, porozumět širší škále otázek, naučit je kooperaci ve dvojici, rozvíjet u nich paměť, schopnost pozorovat atd. V jiných případech to tak být nemusí a učitel bude moci postupovat výrazně rychleji. Žáci se budou také lišit mírou zkušeností podle toho, jak je organizován program předškolního zařízení (výlety, škola v přírodě, předplavecká výchova, saunování, výstavy, divadlo apod.).

Mateřské školy, které se orientují pouze na volnou hru, spontánní pohyb dítěte, nemohou vyhovovat řadě dětí. Jiné školy se orientují jen na rozvoj vybraných schopností (zaměřenost na jazyky, na výtvarnou výchovu), jiné školy si zachovaly všestrannost. *Vliv rodiny* na dítě je nezávisle na mateřské škole velký. Vstup dítěte do školy ovlivňuje jak hodnocení dítěte rodiči, tak i očekávání, které do dítěte vkládají. Pro usnadnění vstupu dítěte do školy i pro naplnění vlastních představ rodiče dítě specificky připravují. To ovšem mateřská škola ani učitel prvního ročníku nemusí vědět. Učitel prvního ročníku nemá snadnou roli.

Výjimečné dítě v mateřské škole

Sledujme podrobněji osudy „výjimečných“ dětí, zejména těch, na které upozornili rodiče nebo učitelky. Od druhé poloviny osmdesátých let mne takto kontaktovalo téměř 30 rodičů a 8 učitelek mateřských škol. Rodiče přicházejí pro potvrzení osobního názoru, že jejich dítě je nedoceněné, nadprůměrné, dokonce nadprůměrné v matematice. Počet takových rodičů narůstá. Tuto změnu přičítám jednak opadnutí ostychu oslovit osoby mimo mateřskou školu, jednak i zúžení podnětové škály na některých mateřských školách, což se projevilo jak nespokojeností určitého typu dětí, tak jejich rodičů.

---

[1] Příspěvek navazuje na kulatý stůl, který proběhl v rámci semináře.

[2] *PedF UK Praha, kaslovam@pedf.cuni.cz*

Na přání rodičů (kromě konzultací na katedře a hodnocení učitelkou mateřské školy) zhruba polovina dětí prošla také pedagogickými poradnami. Z dětí, které byly označeny rodiči za výjimečné, bylo 20 následně sledováno po několik let jejich školní docházky. To umožnilo zpětně hodnotit: a) charakteristiku dítěte podanou rodiči, b) vlastní pozorování v různých situacích.

Jsou rodiče, kteří se o své děti příliš nezajímají, jiní své dítě zatěžují „přiměřeně“ a třetí skupina je protipólem k první a své dítě trénují (někdy nadmíru). Takoví rodiče přibírají k roli rodičovské i roli učitelskou. Z posledních dvou skupin se vymyká skupina těch, kteří své dítě považují za výjimečné v tom smyslu, že je nadprůměrně inteligentní a že je třeba na to upozornit a toto dítě specificky nadstandardně rozvíjet. Rozvoj dítěte však může mít několik podob.

Prudký rozvoj v určité oblasti v předškolním věku, který se zpomalí či „normalizuje“ po vstupu do školy; rozvoj může být zcela normální (křivka učení má za poslední období 5–6 let tvar prudkého nárůstu s následnou stagnací). Příčinou prudkého zdvihu oproti ostatním může být také intenzivní individuální práce učitele a rodičů a dobrá paměť dítěte, i když by za podmínek srovnatelných s ostatními byla křivka nevymykající se průměru. Dítě v prvním ročníku již nevystačí s mechanickou pamětí. Začíná nástup požadavků i na kvalitativní úrovni kognitivního rozvoje. I dobře vedený první ročník znamená změnu. Počáteční prudký rozvoj se může na chvíli pozastavit, a pak je opět následován dalším vzestupem, nebo také i zpomaluje. Záleží na tom, v které fázi je dítě s ostatními porovnáváno, v které oblasti a za jakých podmínek.

Nadprůměrný předškolák v prvním ročníku ZŠ

Polovina ze sledovaných dětí (14 chlapců, 6 děvčat), které vykazovaly při vstupu do školy nadprůměrné výsledky ve znalostech čísel a v orientaci v daném oboru, byla opravdu nadprůměrná i po vstupu do školy nejméně v následujících třech letech, ve většině případů pouze v oblasti intelektové, u 8 zaostávala grafomotorika, svalová koordinace, rychlost orientace v prostoru při kinezi.

Dalších 10 dětí, jak se ukázalo během prvního ročníku, k nadprůměrným rozhodně nepatřilo. Jednalo se o děti, které byly doma pouze trénované v počítání po jedné, případně po deseti nebo stech. Kromě jednoho dítěte byly všechny bez schopnosti vytvářet představy kvantity. Jejich představy nebyly vázány na modely čísla. První obtíže se ukázaly při řešení slovních úloh. Pokud děti uměly číst, vyhledávaly v zadání jen číslice a ty se snažily použít v nějaké operaci. Zde se tedy nelišily jejich reakce od průměrných dětí, avšak jejich přehnaná zaměřenost na izolované číslo, číslici jim bránila zpracování vztahů mezi údaji v zadání. Zmínění žáci byli však znevýhodněni před ostatními, kteří se nebránili použití počitadla či jiného modelu v případě krize během řešení. Na rozdíl od opravdu nadprůměrných, kteří řeší občas vhledem, mají tito žáci tendenci se jim v rychlosti řešení vyrovnat, a tak neexperimentují, nepočítají, ale hádají a chybují. Rozdíly se projevují v metodách řešení i mezi těmito dětmi a průměrnými žáky. S chybou se vyrovnávají hůře než děti, které nebyly rodiči označovány jako geniální.

Druhá polovina sledovaných žáků během prvního ročníku postupně ztrácela své výsadní postavení dané tím, že „byli z domova napřed“ v některých tématech. Například Toník i Martina (1994, 1995) prožívali pocit ztráty výjimečnosti až počátkem třetího ročníku, k čemuž přispěly dva faktory: a) rodiče se nechtěli vyrovnat jen s mírně nadprůměrnými výkony ve škole a neustále dětem tvrdili, že jsou nejlepší, což se rozcházelo jak s hodnocením učitelek, tak s vlastními pocity žáků; b) oba měli o dva roky mladší sourozence, kteří byli schopni řešit úlohy určené pro konec druhého ročníku již při vstupu do školy a kteří vykazovali od začátku (do konce ZŠ) vysoce nadprůměrné výkony. V obou případech se projekce rodičů podepsala na sourozeneckých vztazích.

U Natálie (1997) jsme zaznamenali prudký sestup z pozice dítěte, které vše ví, do pozice „normálního“ žáka. Změna postavení Natálie ve třídě, přes veškerý pedagogický takt učitelky, vedla k depresivním stavům, které byly umocněny odchodem otce od rodiny. Ztrátu otce si Natálie interpretovala jako důsledek ústupu z pozice výrazně nejlepší žákyně třídy proto, že ji od předškolního věku otec představoval jako geniální a sám ji v roli učitele driloval v počátcích matematiky. Ve třetím ročníku, kdy byla neoblíbená, přešla od silného sebeprosazovnání za každou cenu do stavu, kdy upadala do pasivity s komentářem, že „. . . nemá cenu se učit“, když nikdo „. . . nevidí, že je nejlepší“.

Honzík (1996) byl podobně považován za malého génia a také tak označován učitelkou mateřské školy. Nerad zpíval, nerad kreslil, nerad se zapojoval do pohybových her, ale rád opakoval, co se mu řeklo. Veškeré situace, kde by se dal předpokládat neúspěch, byly redukovány na minimum. Učitelka mu „chtěla udělat radost“ a učila ho počítat do 100, sčítat do 10, uměl číst čísla od 1 do 20. Honzík byl sice ve všem pozadu, ale vynikal v těchto početních aktivitách. Do školy šel provázen učitelčiným hodnocením, na které si dávno zvykl: „Jsi tak strašně chytrý. Tobě půjde všechno snadno. Nikdo toho neumí tolik jako ty.“ Svět školy se mu dopředu redukoval na svět školní matematiky, schopnost učit se na schopnost reprodukovat. Jeho zklamání po měsíci školní docházky bylo zřejmé, podobně jako u jeho rodičů. Není třeba rozebírat Honzíkův nový vztah k matematice a k dalším předmětům.

Suverenita dětí, vědomí nadprůměrnosti nemusí být výsledkem zrání a vynikajících dispozic, ale mohou být produktem nejen zvýšené péče rodičů, ale i jejich víry ve výkon těchto dětí. Proč tato víra žene dítě do výkonu nad jeho hranici? A. Marchive (2003) uvádí ve své studii, že efekt Pygmalion působí především v předškolním věku a prvních ročnících prvního stupně. Čím je žák starší, tím se pohled rodičů na dítě méně odráží v jejich výkonu. Je třeba zdůraznit, že efekt Pygmalion je schopen v daném období od sebe odlišit dva stejně schopné a stejně výkonné žáky. Ten, co se cítí být považován za nadprůměrného, má tendenci, chuť takové výkony podávat, chovat se tak. Zaujal-li rodič roli učitele s určitými rysy chování, dochází k Pygmalion efektu. Pygmalion efekt je tedy dvojsečný pro rodinnou výchovu. Na jedné straně dítě cítí podporu, která se ovšem může stát pro dítě zavazující, a ve výkonu pak je nejen podpůrná, ale i svazující. Víra rodičů spojená se ctižádostí blokuje reálný pohled na dítě a mění se pojetí výchovy – od práce *s otevřenou budoucností k pojetí determinované budoucnosti* (Langmajer & Matějček, 1986).

Závěr

Pygmalion efekt může ovlivnit učitelovo diagnostikování nadprůměrnosti předškolních dětí a žáků mladšího školního věku. Na základě přenosu (přechod z mateřské školy na základní školu) můžeme i mylně interpretovat žákův výkon. Proto je dobré nenechat si označit jednotlivce a ke všem přistupovat stejně, jakoby všichni byli nadprůměrní. Jinak nelze výkony zejména malých žáků porovnávat. Marchive popisuje, že ani zkušení učitelé po dobu experimentu neodhalili nepravdivou charakteristiku žáků a díky Pygmalion efektu „nadprůměrné žáky" sledovali, pracovali s nimi diferencovaně, jakoby opravdu nadprůměrní byli, i když šlo o žáky náhodně vybrané.

Pokud se rodiče ujali role učitele u předškolních dětí, mohou dítěti vstup do školy jak usnadnit, tak zkomplikovat. Podobně může působit i práce učitelky v mateřské škole, která nastartovala extrémní přístup k dítěti a nechala deformovaně vzniknout působení Pygmalion efektu (například právě tím, že redukuje všestranný rozvoj dítěte na rozvoj jediné schopnosti s vysokým osobním nasazením a nepřiměřenou chválou). Učitel prvního ročníku, zejména začátečník, nemá snadnou roli a v matematice navíc ztíženou ve výše zmíněných oblastech. Usiluje o vytvoření vztahu ke škole, k učení, ke spolupráci ve třídě, dobrém klimatu školy a mimo jiné i k pěknému vztahu k jednotlivým předmětům, tedy i k matematice. Ne vždy má možnost poznat rodinné zázemí žáka a správně vyhodnotit žákovy reakce. První nadprůměrné či podprůměrné výkony žáka je třeba hodnotit citlivě, střízlivě. Není vždy snadné připustit si, že i výjimečný výkon může být provázen či následován sérií nemalých obtíží zejména v oblasti sociální, a to s důsledky v dalších oblastech.

Literatura

Kaslová, M. *Číslo I, II.* RAABE pro mateřské školy, Praha 1999.

Kaslová, M. Komunikace a talent. In Zhouf, J. (ed.), *Sborník konference Ani jeden matematický talent nazmar*. Pedagogické centrum Hradec Králové 2003, s. 49–59.

Marchive, A. Efekty očekávání a produkce výborného žáka. Zhouf, J. (ed.), *Sborník konference Ani jeden matematický talent nazmar*. Pedagogické centrum Hradec Králové 2003, s. 107–110.

Langmajer, J. & Matějček, Z. *Počátky našeho duševního života*. Pyramida, Praha 1986.

Některé typy chyb studentů při řešení úloh z počtu pravděpodobnosti

Maciej Major[1]

Předmětem počtu pravděpodobnosti je konstruování a zkoumání tzv. pravděpodobnostních prostorů. Pravděpodobnost jevu je některou vlastností jistého pravděpodobnostního prostoru.

Úvod

Nechť Ω je libovolnou aspoň dvouprvkovou konečnou množinou. *Rozdělením pravděpodobnosti na množině* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s\}$ nazýváme každou nezápornou funkci p na množině Ω takovou, že

$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \cdots + p(\omega_s) = 1.$$

Dvojici $\{\Omega, p\}$ kde p je rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω, nazýváme *pravděpodobnostním prostorem*.

Pokud $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ a $p(\omega_j) = 1/s$ pro $j = 1, 2, \ldots s$, pak funkci p nazýváme *klasickým rozdělením pravděpodobnosti na množině* Ω a dvojici $\{\Omega, p\}$ – *klasickým pravděpodobnostním prostorem*.

V pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) je každý jev podmnožinou množiny Ω. Nechť $A \subset \Omega$. Pravděpodobnost jevu A je v tomto pravděpodobnostním prostoru číslo $\sum_{\omega \in A} p(\omega)$ (viz [4], s. 98). Pokud (Ω, p) je pravděpodobnostním prostorem a Ω je množinou všech výsledků náhodného pokusu d a funkce p přiřazuje každému výsledku pravděpodobnost, s jakou může pokus d skončit tímto výsledkem, pak ho nazýváme *stochastickým modelem pokusu* d.

Pravděpodobnostní prostor (Ω, p), kde $\Omega = \{0, 1\}$, $p(0) = 2/3$ a $p(1) = 1/3$, je stochastickým modelem losování koule z urny, ve které jsou dvě koule označené číslem 0 a jedna označená číslem 1.

Řešení každé úlohy na výpočet pravděpodobnosti jevu se začíná od konstrukce pravděpodobnostního prostoru. Tento prostor je stochastickým modelem náhodného pokusu, se kterým se spojuje zmíněný jev.

Někdy je tento prostor modelem některé mimomatematické situace. Jako např. v případě úloh týkajících se náhodných her a procesu rozhodování v podmínkách rizika. V této situaci začíná řešení překladem zadání z běžného do matematického jazyka. Pak nastupuje výše zmíněná konstrukce pravděpodobnostního prostoru. Překlad i konstrukce pravděpodobnostního prostoru tvoří první fázi řešitelského procesu, tzv. *matematizace*.

[1] *Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna w Krakowie, mmajor@wsp.krakow.pl*

Následují *výpočty a dedukce*, které se jako základní části řešení úlohy na výpočet pravděpodobnosti jevu, vždy provádí v určeném pravděpodobnostním prostoru. Výsledky těchto výpočtů však mohou být interpretovány v kontextu zadané úlohy, a pak mluvíme o *interpretaci*. Řešení úlohy z počtu pravděpodobnosti může obsahovat formulování věrohodných úsudků vyplývajících z výpočtů. Tato interpretace se může týkat zároveň světa matematiky i výchozí mimomatematické situace.

Kontrola stochastických kompetencí – schopnost matematizovat a interpretovat výsledky výpočtů jako předmět této kontroly

Objektem kontroly a hodnocení znalostí z počtu pravděpodobnosti je konkrétní řešení studenta, ve kterém nám nejde jen o jeho formální znalosti, tzn. znalost definic, tvrzení a algoritmů, ale o jeho schopnost matematizace, výpočtů a interpretace. Předmětem této práce jsou typické chyby, jakých se dopouštějí žáci při organizaci třech uvedených fází řešení úloh z počtu pravděpodobnosti.

Při řešení úloh z počtu pravděpodobnosti se studenti dopouštějí chyb týkajících se: 1. matematizace, 2. výpočtů a dedukce, 3. interpretace.

Příklady úloh a reflexe nad chybami v jejich řešení

Práce se týká jisté reflexe nad řešením dvou úloh na výpočet pravděpodobnosti jevu. Tato řešení obsahují zároveň organizaci matematizace, i některé interpretace, tj. formulování úsudků, jaké vyplývají z velikosti této pravděpodobnosti pro racionální rozhodnutí, a tedy pro praxi.

1. úloha

Dané jsou dvě urny U a V. Urna U obsahuje jednu kouli s číslem 6 a dvě koule s číslem 1, urna V obsahuje jednu kouli s číslem 0 a dvě koule s číslem 4. Číslo na vylosované kouli z urny je vylosovaným číslem. Z těchto dvou uren můžeš vybrat jednu, zbylou urnu bere tvůj soupeř ve hře. Každý z vás bude losovat číslo ze své urny a zvítězí ten, kdo vylosuje větší číslo. Kterou urnu si vybereš pro tuto hru, jestliže máš přednostní právo? Jak zdůvodníš svoje rozhodnutí?

2. úloha

Z urny, ve které je šest koulí označených čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6, budou losované současně dvě koule. Vypočítej pravděpodobnost jevů:

a) součet čísel na vylosovaných koulích bude sudé číslo (jev A),

b) součet čísel na vylosovaných koulích bude liché číslo (jev B).

Tyto úlohy byly řešeny na přijímacích zkouškách z matematiky v krakovské Pedagogické akademii.

Správné řešení 1. úlohy

Předpokládejme, že jsem zvolil urnu U, můj soupeř má urnu V. Výsledek losování dvou koulí, jedné z urny U, druhé z urny V, je dvojice čísel, a tedy $\Omega = \{1, 6\} \times \{0, 4\}$.

Rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω určíme tzv. metodou stejně možných případů (viz [4], s. 33). Koule se stejným číslem můžeme na chvilku rozlišit. V této (teoretické) situaci v urně U jsou tří koule: 1_I, 1_{II}, 6, v urně V jsou tři koule: 0, 4_I, 4_{II}. Mějme tedy devět stejně možných případů:

$(1_I, 4_I)$, $(1_I, 4_{II})$, $(1_I, 0)$, $(1_{II}, 4_I)$, $(1_{II}, 4_{II})$, $(1_{II}, 0)$, $(6, 4_I)$, $(6, 4_{II})$, $(6, 0)$.

Výsledku $(1, 4)$ jsou příznivé případy: $(1_I, 4_I)$, $(1_I, 4_{II})$, $(1_{II}, 4_I)$, $(1_{II}, 4_{II})$, a tedy pravděpodobnost výsledku $(1, 4)$ se rovná $4/9$.

Analogicky najdeme pravděpodobnosti zbývajících výsledků. Jestliže p je funkce, která každému výsledku přiřazuje jeho pravděpodobnost, pak:

ω	$(1,4)$	$(1,0)$	$(6,4)$	$(6,0)$
$P(\omega)$	$4/9$	$2/9$	$2/9$	$1/9$

V určeném pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) představuje jev $A = \{$*zvítězí hráč, který má urnu U*$\}$ množina

$$A = \{(6,4), (1,0), (6,0)\},$$

a tedy z definice pravděpodobnosti jevu vyplývá, že

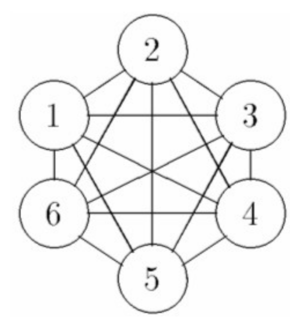
$$P(A) = p(6,4)) + p(1,0)) + p(6,0) = 2/9 + 2/9 + 1/9 = 5/9.$$

Správné řešení 2. úlohy

Obrázek 1 představuje klasický pravděpodobnostní prostor jako model losování dvou koulí z urny, o které se mluví v úloze 2.

Každá úsečka představuje výsledek losování jako dvouprvkovou kombinace množiny šesti koulí. Možných výsledků máme tedy tolik, kolik je úseček spojujících dva vrcholy šestiúhelníku, tedy $(6 \cdot 5)/2$, tj. 15.

Jevu B je příznivých devět výsledků, a tedy $P(B) = 9/15 = 3/5$. Jevy A a B jsou opačné, a tedy $P(A) = 1 - P(B) = 1 - 3/5 = 2/5$.



Obr. 1

Chyby týkající se matematizace daných situací

Hlavní chybou při řešení tohoto typu úloh je opomenutí fáze matematizace, tj. konstrukce pravděpodobnostního prostoru jako modelu popsaného v úloze náhodného pokusu. Mnoho studentů si neuvědomuje, že pravděpodobnost jevu se vždy vypočítává v určeném pravděpodobnostním prostoru.

Této chyby se týkají také překlady nematematického (reálného) problému do jazyku matematiky, tj. formulování matematické úlohy a také konstrukce stochastického modelu náhodného pokusu, s nímž je tento problém spojován. Chyby tohoto typu ukazují následující návrhy studentů na řešení uvedených úloh na výpočet pravděpodobnosti jevu.

Ilustrace I

Řešení úlohy 1

Student A. „Vybral bych si urnu V, poněvadž pravděpodobnost vylosování koule s číslem 4 z urny V je větší než pravděpodobnost vylosování koule s číslem 6 z urny U.“
Student B. „Z obou uren U a V vybírám urnu V, protože mám větší šanci na vylosování koule s číslem 4, než soupeř kouli s číslem 6. Pravděpodobnost, že i já vylosuji kouli s číslem 4, je 2/3, a pravděpodobnost, že on vylosuje kouli s číslem 6, je 1/3.“
Student C. „Vybírám urnu U, (protože) možnost vylosování koule s číslem 6 mi dává šanci na 100% výhru a vylosování koule s číslem 1 mi dává šanci na 33,33% výhru (soupeř vylosuje kouli s číslem 4 – pravděpodobnost 2/3, nebo soupeř vylosuje kouli s číslem 2 – pravděpodobnost 1/3).“

Je zřejmé, že tito studenti nekonstruují pravděpodobnostní prostor jako model losování koule. Nevidí, že o vítězství je možné mluvit pouze tehdy, když oba hráči losují koule každý ze své urny. Pouze se pokoušejí jistým způsobem použít daná čísla v zadání.

Ilustrace II

Student D. „Rozhodnul bych se pro výběr urny U, neboť možné výsledky losování dvou koulí, jedné z urny U, druhé z urny V, jsou: $(6,0)$, $(6,4)$, $(1,0)$, $(1,4)$, a tedy tři výhry a jedna prohra.“

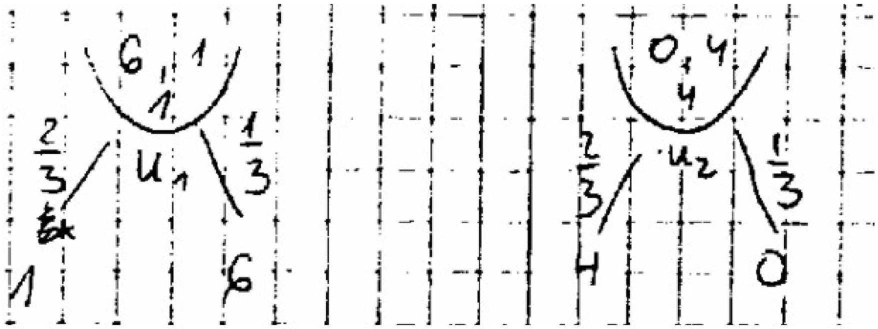
Komentář: Student chybně konstruuje pravděpodobnostní prostor. Tento prostor není stochastickým modelem náhodného pokusu, který se ve hře provádí. Problémy s výběrem správného modelu se projevují především v těch situacích, kdy model není klasickým pravděpodobnostním prostorem. Někteří studenti se domnívají, že každý výsledek každého náhodného pokusu je stejně pravděpodobný, a docházejí k tomuto závěru bez jakékoli reflexe nad argumentací tohoto faktu.

Řešení 2. úlohy

Nejčastěji byla analyzována následující (chybná) řešení úlohy 2.

$\Omega = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $A = \{4,6,8,10\}$, $B = \{3,5,7,9,11\}$, $P(A) = 4/9$, $P(B) = 5/9$.

V tomto řešení je výsledkem losování součet čísel na dvou vylosovaných koulích. Bez jakékoliv reflexe je přitom uvedeno, že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné. Jde tedy o rozhodnutí, že stochastickým modelem popsaného losování je klasický pravděpodobnostní prostor. Je to chyba, neboť výsledky (jako součty vylosovaných čísel) nejsou stejně pravděpodobné (stačí tady porovnat šanci výsledků 3 a 7). Chyby týkající se konstrukce modelu vznikají také při počítání pravděpodobnosti jevu spojeného s náhodným pokusem, který probíhá po etapách. V tomto případě se konstruují modely pro každou etapu odděleně. Chybu tohoto typu představuje obrázek 2 (řešení úlohy 1).



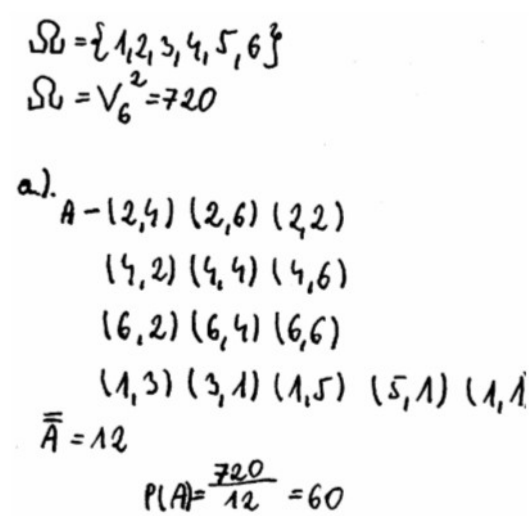
Obr. 2

Obrázek napovídá (chybné) rozhodnutí: Volím urnu V, protože pravděpodobnost vylosování čísla 4 z urny V je větší než pravděpodobnost vylosování čísla 6 z urny U. Studenti často používají při výpočtech stochastický strom, ale bez znalosti toho, co znamená součet a co znamená součin získaných (pomocí pravidel spojených s tímto stromem) čísel. Tento strom pomáhá jedině při zkoumání, jak probíhá náhodný pokus. Interpretaci pravidel, pomocí kterých se konstruuje pravděpodobnostní prostor, studenti přitom vůbec nechápou.

Chyby týkající se výpočtů a dedukce

V řešení uvedených úloh byly také aritmetické chyby (krácení zlomků) a chyby kombinatorické povahy (počet prvků dané množiny). Některé chyby vyplývají ze zvláštností terminologie přijaté v teorii pravděpodobnosti (*elementární jev není jev*). Hlavně však musíme konstatovat, že žáci mají velké problémy s formulováním svých argumentací v rodném jazyku. V řešení jsou uváděny jen vzorce, množiny a výpočty bez jakýchkoli komentářů.

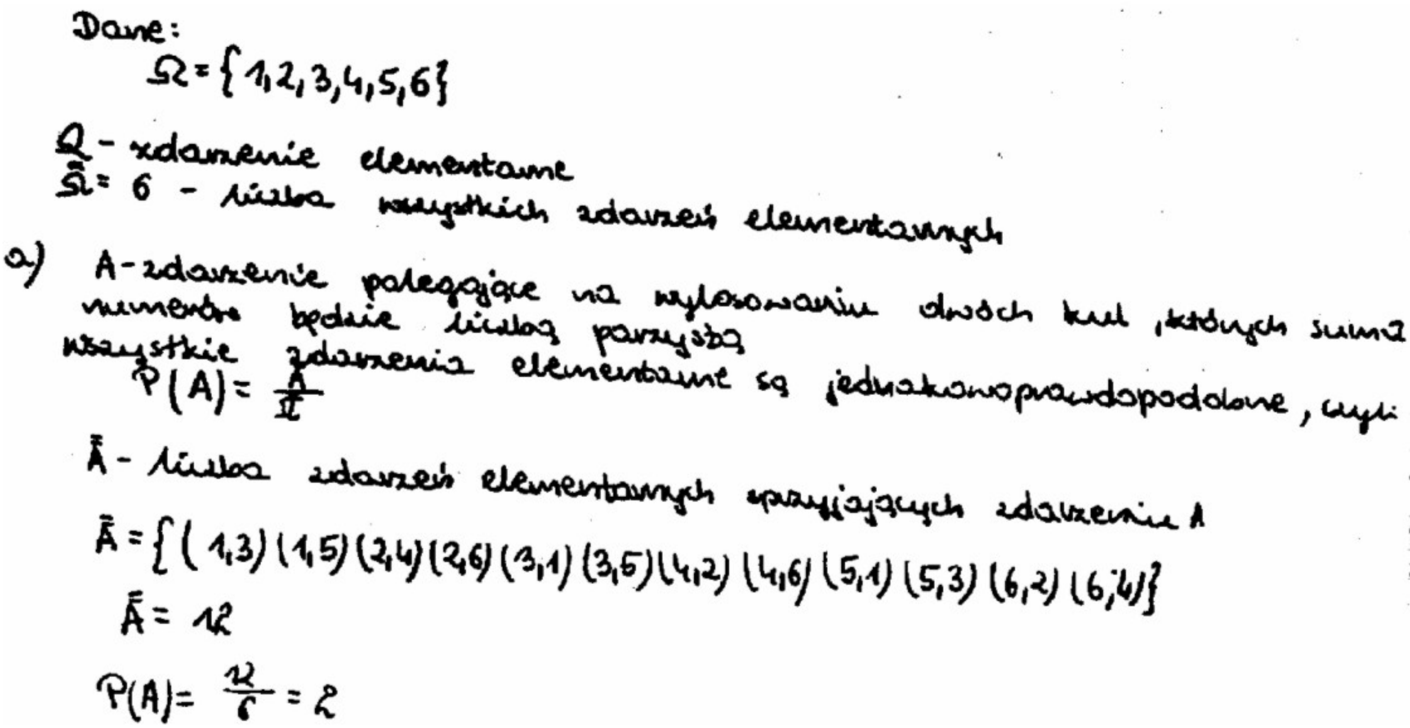
Někdy žákem vypočítaná pravděpodobnost jevu je číslem větším než 1. Tento fakt není přitom vůbec komentován. Zmíněnou chybu zobrazují následující příklady týkající se řešení 2. úlohy.



Obr. 3

Chyby týkající se fáze interpretace

Problémy spojené s formulováním správné odpovědi na otázky formulované v úloze vyplývají hlavně z chybného řešení této úlohy. V uvedených úlohách se fáze interpretace týká procesu rozhodování v podmínkách rizika (vyber čísla, na která se sází, vyber urnu, která dává větší šanci na vítězství). Jestliže student získal správné řešení úlohy



Dane:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ω - zdarzenie elementarne

$\bar{\bar{\Omega}} = 6$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

a) A-zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul, których suma numerów będzie liczbą parzystą

wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowoprawdopodobne, czyli

$P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}}$

$\bar{\bar{A}}$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

$\bar{\bar{A}} = \{(1,3)(1,5)(2,4)(2,6)(3,1)(3,5)(4,2)(4,6)(5,1)(5,3)(6,2)(6,4)\}$

$\bar{\bar{A}} = 12$

$P(A) = \frac{12}{6} = 2$

Obr. 4

na výpočet pravděpodobnosti jevů, pak úsudky týkající se racionálního rozhodnutí, jsou vesměs správné.

Literatura

[1.] Major, M. Wiedza probabilistyczna maturzystów. (Wnioski z trzech egzaminów wstùpnych na studia). *Dydaktyka Matematyki*, Kraków 1996, s. 103–134.

[2.] Major, M., Płocki, A. Kontrola i ocean stochastycznej wiedzy ucznia jako nowy problem dydaktyki matematyki. *Dydaktyka Matematyki*, Kraków 1993, s. 57–84.

[3.] Major, M. & Nawolska, B. *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych.* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[4.] Płocki, A. *Pravdepodobnost kolem nas. Pocet pravdepodobnosti v ulohach a problemech*. UJEP,Ústí nad Labem, 2001.

[5.] Płocki, A. *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobiestwa i statystyka matematyczna in statu nascendi.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Kraków 1997.

Předškolní výchova v současnosti
(Od předškolní výchovy k předškolnímu vzdělávání)

Eva Opravilová[1]

Podle ISCED (International Standard Classification of Education – Mezinárodní norma pro klasifikaci ve vzdělávání), přijaté UNESCO 1997, je předškolní výchova charakterizovaná úrovní ISCED 0: „Uvedení dětí raného věku do prostředí školního typu.“ Znamená různé typy vzdělávacích programů určené pro děti předškolního věku a realizované v mateřských školách.

Představuje:
– součást celoživotního vzdělávání, a proto se vytvářejí programy, které svými obsahy připravují děti na školní vzdělávání,
– dlouhodobé pozitivní důsledky pro další život a rozvoj dětí, a proto ovlivňuje i školskou politiku,
– změnu v tradičním pohledu na období raného dětství, které bylo dříve chápáno převážně jako objekt vychovatelské péče, nyní se stává subjektem vzdělávání.

Ve většině zemí jsou mateřské školy samostatnými institucemi, výjimečně (Dánsko) jsou připojeny ke školám, anebo přímo obsahově integrovány do primárního vzdělávání (Nizozemsko od roku 1985 primární školy nového typu od 4–12 let, Irsko).

Většinou jsou určeny pro děti od 3 do 6 či 7 let (Finsko, Polsko, podle doby zahájení školní docházky), v některých zemích začíná již od dvou let věku. Ve vyspělých zemích je míra účasti dětské populace v předškolním vzdělávání poměrně vysoká. Česká republika patří k zemím s vysokou účastí. Délka předškolního vzdělávání je různá, nejdelší je ve Francii, Belgii a Maďarsku, nejkratší v Kanadě, Finsku a Portugalsku. V České republice je to 2,7 roku, což je někde uprostřed.

Pojetí předškolního vzdělávání

Základní cíl je ve všech rozvinutých zemích v zásadě shodný: připravit dítě pro život ve společnosti, vybavit je určitými poznatky a dovednostmi pro vlastní rozvoj a vzdělání. Tento cíl je deklarován v různých dokumentech národní vzdělávací politiky jako jsou ústava, listina práv dítěte, národní vzdělávací programy a kurikulárních materiály určené pro předškolní vzdělávání.

Rozdíly jsou ve způsobu realizace cíle a v míře, podle které se řídí stanovené vzdělávací obsahy.

Základní přístupy:

[1] *PedF UK Praha, eva.opravilova@pedf.cuni.cz*

- prvotní úloha předškolní výchovy je chápána jako doplněk rodinné výchovy a nerealizuje se jako systematické vyučování, ale jako socializační působení (Německo, Dánsko, Nizozemsko),
- poslání předškolní výchovy spočívá v postupném seznamování se „světem školy“, proto se do předškolního vzdělávání začleňuje záměrné učení určitým dovednostem, které tvoří základy elementární gramotnosti jako např. základy čtení, matematiky (Belgie, Francie, Itálie, Španělsko).

Základní modely:

- školský model – předškolní vzdělávání je organizováno ve věkově homogenních třídách (Francie, Španělsko, Řecko, Británie, Slovensko, Maďarsko),
- rodinný model – předškolní vzdělávání se uskutečňuje v heterogenních skupinách (Finsko, Dánsko, Německo),
- spojení obou modelů podle přání rodičů či zřizovatelů (Belgie, Itálie, Nizozemsko, Portugalsko).

Jednoznačné klady či zápory jednotlivých modelů nebyly spolehlivě prokázány. Rozhodující není organizační hledisko ale především personální podmínky (úroveň a zaměření přípravy pracovníků předškolní výchovy), míra spolupráce s rodiči a sociokulturní úroveň rodiny, z níž děti přicházejí. Evropské výzkumy předškolní výchovy se dnes zabývají především otázkou, jakou kvalitu by měly mít předškolní instituce a jejich pracovníci, aby mohli předškolní vzdělávání úspěšně realizovat.

K faktorům, které pozitivní účinky předškolního vzdělávání ovlivňují, dále patří:

- délka předškolní výchovy (čím déle jí dítě prochází, tím je větší pravděpodobnost pozitivních efektů),
- kvalita vzdělávacích programů (typ a preference aktivit, které jsou zabudovány v kurikulech předškolního vzdělávání),
- podpora předškolní výchovy ze strany rodičů (rodiče musí s institucí spolupracovat a posilovat to, co se děti v mateřské škole naučí).

Předškolní vzdělávání tvoří první fázi celoživotního vzdělávání, která probíhá optimálně zejména tehdy, když se rodina a mateřská škola doplňují. Proto je institucionální předškolní vzdělávání i vzhledem k dosavadním mezinárodním zkušenostem všeobecně podporováno.

Jedním z příkladů nového přístupu může být i současná diskuse o kompetencích (způsobilostech) probíhající na světovém i domácím fóru. Od roku 1997 probíhá pod záštitou OECD výzkumný program, jehož úkolem je vytvořit teoretickou základnu pro pojmové vymezení a výběr kompetencí potřebných k tomu, aby každý jedinec mohl vést úspěšný a odpovědný život. Syntézu všech dosavadních stanovisek představuje základní univerzální třídění klíčových kompetencí, které bylo předloženo na mezinárodním symposiu v Ženevě v únoru 2002. I když zahrnuje zejména období školní, lze požadované principy vztáhnout i na období předškolní.

Podle tohoto třídění je třeba umět:

- jednat autonomně,
- užívat interaktivní nástroje,
- uplatňovat se v sociálně heterogenních skupinách.

Výchovné působení směřuje především k rozvoji:

- komunikačních dovedností,
- rozhodovacích dovedností,
- interpersonálních dovedností,
- dovednosti celoživotního učení.

Z tohoto pojetí vychází i Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání, který byl od roku 2002 ověřován a jehož současná upravená verze vstoupí v platnost spolu se školským zákonem pravděpodobně v lednu 2005.

V České republice deklaroval strategické záměry v oblasti výchovy a vzdělávání Národní program rozvoje vzdělávání v České republice (Bílá kniha, 2001). V něm je konstatováno, že předškolní vzdělávání rozvoji dítěte prospívá. Ovlivňuje je v intelektových schopnostech, sociálních a komunikačních dovednostech i v příznivějším postoji k učení při zahájení školní docházky. Vzhledem k tomu, že tento dokument není exekutivně závazný, nelze zatím soudit, do jaké míry budou záměry naplněny tak, aby se podmínky pro předškolní vzdělávání, chápané jako proces probíhající od narození dítěte, skutečně naplnily. Nové legislativní úpravy, které by měly zaručit bezplatnou docházku do mateřské školy pro děti pětileté, i návrh zajistit povinnou docházku do mateřské školy pro děti, u nichž lze očekávat problémy, by mohl k naplnění progresivních cílů předškolního vzdělávání přispět.

Literatura

Průcha, J. *Vzdělávání a školství ve světě*. Praha: Portál, 1999.

Předškolní výchova a primární vzdělávání v zemích Evropské unie. Ústav pro informace ve vzdělávání, 1996.

Rámcový program pro předškolní vzdělávání. VÚP, 2004.

Opravilová, E. Péče o děti předškolního věku jako sociální a politický problém. *Předškolská výchova*, roč. LVII, 2002/2003, č. 4.

Odvození analytického vyjádření podobného zobrazení[1]

Naďa Stehlíková[2]

Úvod

V poslední době se i v české didaktice matematiky stále častěji hovoří o větším uplatňování tzv. konstruktivistických přístupů ve výuce matematiky (např. Hejný & Kuřina, 2001). Jedním z jejich nejdůležitějších principů je větší důraz na samostatnou konstrukci poznatků. Podle možností se snažíme o zvýšení podílu vlastní práce studenta i na úrovni vysoké školy u budoucích učitelů matematiky, protože věříme „že i v rámci současného systému je možné klást důraz na poznávání cest k matematickým pojmům a poznatkům, na rozdíl od předávání části logicky uspořádané matematické disciplíny, a na posílení „pracovního“ charakteru matematiky, na rozdíl od charakterů reprodukčně memorovacího“ (Kuřina, 2004). Děje se tak v rámci kurzu pro budoucí učitele druhého stupně základní školy a střední školy Analytická geometrie II, který je zaměřen na geometrické transformace (shodnosti, podobnosti a afinní transformace přímky a roviny) (Hejný, Jirotková & Stehlíková, 1997; Stehlíková, 2003).

Popisovaný způsob výuky vyžaduje od studenta hledání nových přístupů, tvorbu nových strategií i větší aplikaci své tvořivosti. Vyučující se pak často dočká různých neočekávaných řešení a kreativních přístupů. Na druhou stranu je tento přístup k výuce časově náročnější než tradiční přístup. Proto jsou některé úlohy, které mají vést k objevení poznatků, zadávány jako domácí úkoly.[3] Jiné úkoly jsou zpracovávány v rámci seminárních prací a studenti si mohou vybrat, zda chtějí pracovat ve skupinách nebo individuálně. V tomto textu se podíváme na jednu ze seminárních prací, jež byla zaměřena na odvození analytického vyjádření podobnosti, a na to, jak ji studenti uchopili.

Nejdříve se však podívejme, jak různí autoři přistupují k problematice analytického vyjádření podobnosti a zejména jak tuto otázku nastolují. Výběr knih je nutně subjektivní a závislý na tom, co je autorce k dispozici.

Analytické vyjádření podobnosti

Kuřina (2002) podobnost nejprve definuje a odvozuje některé vlastnosti. Analytické vyjádření je zavedeno v jednom příkladu, který se týká jedné konkrétní podobnosti, jež vznikla jako složení rotace kolem počátku o úhel 60° a stejnohlosti se středem v počátku a koeficientem 2. Řešení příkladu je uděláno na základě rovnic otočení a stejnolehlosti, které jsou už čtenáři v této chvíli známé. Analytické vyjádření obecné podobnosti není řešeno.

---

[1] Tento příspěvek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2] *PedF UK Praha, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

[3] Realita je taková, že ne všichni studenti úkol splní nebo se o něj alespoň pokusí. Nicméně věříme, že student, který odvození převezme od spolužáka, může i takový poznatek uchopit smysluplně a může být inspirován k vlastní matematické práci.

Gans (1969) nedává čtenáři žádný úkol hledat analytické vyjádření podobnosti, ale podrobně toto vyjádření odvozuje pomocí složení shodných zobrazení a stejnolehlosti. Dospívá k obecným rovnicím pro podobné zobrazení. Student má pak za úkol procvičovat tyto rovnice v konkrétně zadaných úlohách.

Cederberg (2001) předkládá analytické vyjádření podobnosti ve formě věty, kterou mají studenti pouze dokázat.

Klasikou v oblasti geometrie a geometrických transformací zůstává kniha Sekanina a kol. (1988). Autoři odvozují analytické vyjádření podobnosti pomocí poznatku, že každou podobnost s koeficientem k můžeme složit ze stejnolehlosti s koeficientem k a libovolným středem, např. v počátku soustavy souřadnic, a ze shodnosti. Dospívají k těmto rovnicím.

$$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p = mx - ny + p & \qquad (m,n) &\neq (0) \\ y' &= kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q = nx + my + q & \qquad &\text{podobnost přímá} \end{aligned} \tag{1}$$

Maticově: $\begin{pmatrix} m & -n & p \\ n & m & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p = mx + ny + p & \qquad (m,n) &\neq (0) \\ y' &= kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q = nx - my + q & \qquad &\text{podobnost nepřímá} \end{aligned} \tag{2}$$

Maticově: $\begin{pmatrix} m & n & p \\ n & -m & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

Pro koeficient k platí $k = \sqrt{m^2 + n^2} > 0$.

Podobnost a seminární práce

Do kurzu Analytická geometrie II přicházejí studenti z kurzu syntentické geometrie vybaveni následujícími poznatky týkajícími se podobného zobrazení.

Definice: Zobrazení p roviny ρ na rovinu ρ je *podobnou transformací* (podobností) roviny ρ, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro libovolné dva různé body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$. Pokud $k \neq 1$, mluvíme o *vlastní podobnosti*.

V1: Podobnost s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnolehlost se středem S a koeficientem k a shodné zobrazení.

V2: Vlastní přímou podobnost, která není stejnolehlostí, lze rozložit na stejnolehlost a rotaci s týmž středem. Vlastní nepřímou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a osovou souměrnost s osou procházející středem stejnolehlosti.

V3: Máme-li v rovině dány dvě dvojice různých bodů (A, B) a (A', B'), pak existuje právě jedna přímá a právě jedna nepřímá podobnost, která zobrazí bod A do bodu A' a bod B do bodu B'.

Studentům byly zadány dvě úlohy, které měli v průběhu několika týdnů zpracovat jako seminární práci.

Úloha 1. Odvoďte analytické vyjádření podobnosti s koeficientem k v E^2.

Výsledek: Viz (1) a (2).

Úloha 2. Najděte analytické vyjádření všech podobností v E^2, při kterých se bod $X[1;0]$ zobrazí do bodu $X'[4;-2]$ a bod $Y[2;3]$ do bodu $Y'[2;-8]$.

Výsledek: Existují dvě podobnosti. Přímá podobnost má rovnice $x' = -2x + 6$, $y' = -2y - 2$ (stejnolehlost se středem $[2; -\frac{2}{3}]$ a koeficientem -2) a nepřímá podobnost má rovnice $x' = \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{12}{5}$, $y' = -\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{4}{5}$ (samodružný bod je $[-\frac{12}{5}; \frac{4}{5}]$, koeficient je 2).

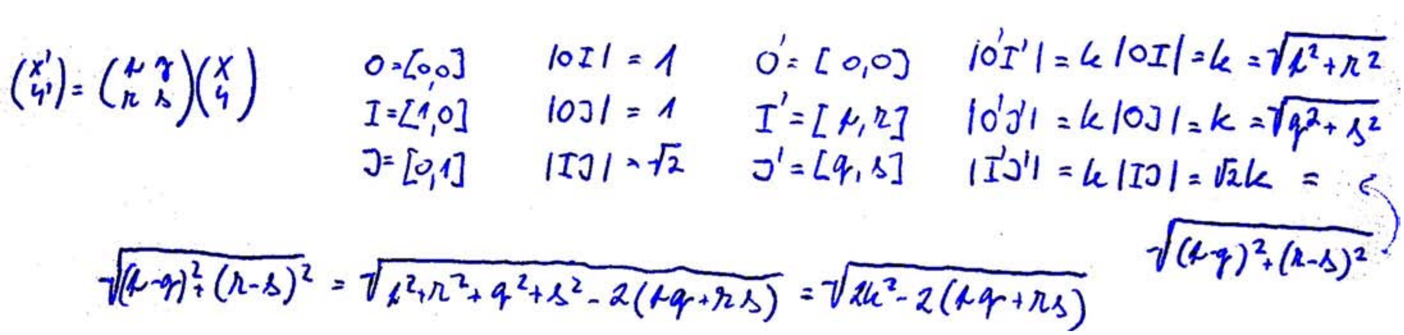
V době psaní seminární práce studenti znají analytické vyjádření všech shodností v rovině, a to pomocí rovnic i pomocí matic 3. řádu.

Ilustrace studentských prací

Níže uvedené ilustrace studentských řešení obou úloh seminární práce pocházejí ze školního roku 2002/03 a 2003/04. Práce byly analyzovány z hlediska způsobu odvození analytického vyjádření podobnosti.

Dva přístupy k odvození

Překvapivě se objevila jen jedna práce, v níž student použil definici podobnosti k odvození jejího analytického vyjádření. Stručně řečeno, vycházel z toho, že vzdálenosti jsou násobeny koeficientem podobnosti, a to u konkrétního trojúhelníku OIJ (obr. 1).



Obr. 1

Při řešení získané soustavy rovnic řešitel využil toho, že vektory $\overrightarrow{O'I'}$ a $\overrightarrow{O'J'}$ jsou na sebe kolmé, tj. jejich skalární součin je roven nule, a tedy $\overrightarrow{O'J'}(-r;p)$, nebo $\overrightarrow{O'J'}(r;-p)$. Tak dospěl ke dvěma maticím, které prohlásil za matice podobnosti (obr. 2). Nepokoušel se je geometricky charakterizovat.

$$\begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha & m \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\sin\alpha & m \\ k\sin\alpha & -k\cos\alpha & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obr. 2

Všichni ostatní studenti použili fakt, že podobnost lze rozložit na shodné zobrazení a stejnolehlost. Analytické vyjádření stejnolehlosti s libovolným středem většinou nepůsobilo problémy (obr. 3). V jednom případě skupina studentů odvodila toto analytické vyjádření zobecněním analytických vyjádření pěti konkrétních případů stejnolehlostí.

$$H(s_1;s_2;k) = T_{(s_1,s_2)} \circ H(1,k) \circ T_{(-s_1;-s_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 & s_1(1-k) \\ 0 & k & s_2(1-k) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obr. 3

Ti studenti, kteří použili větu V1 (menší část), většinou nedokázali své výsledky interpretovat tak, aby objevili dva typy analytického vyjádření (1) a (2).

Ti, kteří použili větu V2, dva typy objevili. Zajímavé bylo, že řada z nich nevolila střed rotace shodný se středem stejnolehlosti a osu souměrnosti procházející středem stejnolehlosti, čímž dospěli k mnohem složitějšímu analytickému vyjádření (obr. 4).

a) $P = R \circ H$

$$P_R(a,b,\varphi,m,n,k) = R(a,b,\varphi)\cdot H(m,n,k) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a(1-\cos\varphi)+b\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b(1-\cos\varphi)-a\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 0 & m-km \\ 0 & k & n-kn \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_R(a,b,\varphi,m,n,k) = \begin{pmatrix} k\cos\varphi & -k\sin\varphi & ka(1-\cos\varphi)+kb\sin\varphi+m(1-k) \\ k\sin\varphi & k\cos\varphi & kb(1-\cos\varphi)-ka\sin\varphi+n(1-k) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obr. 4

Konečný tvar analytického vyjádření

Bylo překvapivé, že žádný ze studentů nebyl schopen zjednodušit výsledné analytické vyjádření na tvar (1) a (2) a všichni ponechali výsledek v tom tvaru, který získali vynásobením matice shodnosti a matice stejnolehlosti (obr. 4 a 5). Neuvědomili si, že nás nezajímá, jak se dá podobnost rozložit, ale jaký tvar má její analytické vyjádření.

$$U\cdot H = \begin{pmatrix} A & B & m \\ -B & A & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k & 0 & i \\ 0 & k & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} kA; & k\cdot B; & Ai+Bj+m \\ -kB; & kA; & Aj-Bi+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

kde $k \in R-\{0,1\}$; $A,B \in \langle 0,1\rangle$; $m,n,i,j \in R$

tedy $X' = kAX + kBY + Ai + Bj + m$

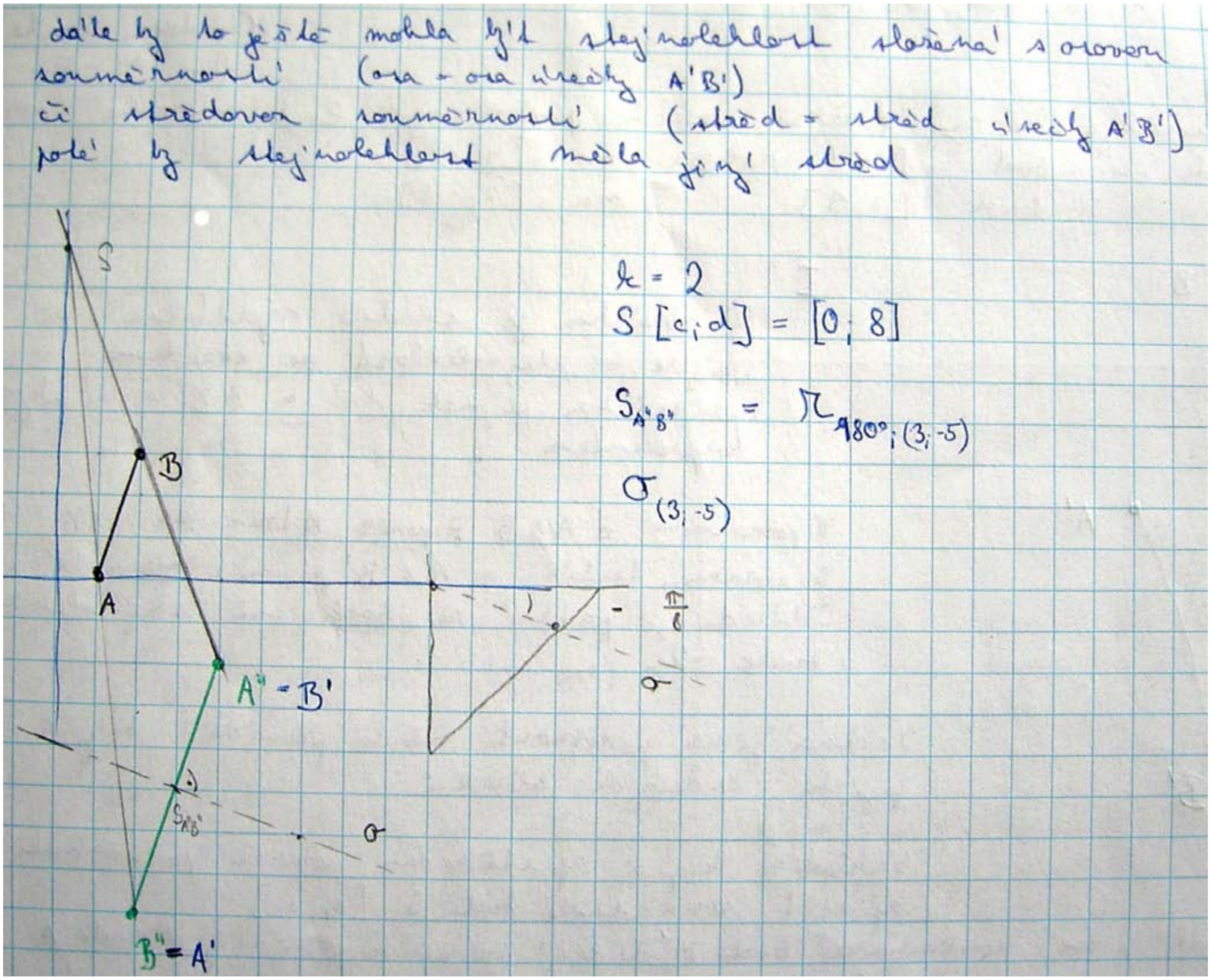
$Y' = -kBX + kAY + Aj - Bi + n$

Obr. 5

Ono zjednodušení pak muselo být uděláno při přednášce např. takto (vzhledem k obr. 4): Víme, že platí $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Vynásobíme rovnost číslem k^2 a označíme $k\cdot\cos\varphi = m$ a $k\cdot\sin\varphi = n$. Pak $k^2 = m^2 + n^2$ a dostáváme analytické vyjádření (1) a (2).

Řešení úlohy 2

Mnoho studentů nespojilo řešení 1. a 2. úlohy a 2. úlohu řešili bez ohledu na to, že již znali analytické vyjádření všech podobností v rovině. Pokoušeli se nejdříve spíše o syntetické řešení, tj. řešili úlohu zkusmo, a teprve pak vyjadřovali analytické vyjádření. To způsobilo, že nalezli jen jedno řešení (stejnolehlost) (obr. 6).



Obr. 6

Někteří studenti se dokonce domnívali, že existuje nekonečně mnoho řešení na základě toho, že si můžeme volit střed stejnolehlosti libovolně.

Závěr

Mohlo by se zdát, že chyby a nepřesnosti, které se objevily ve studentských pracech, jsou spíše dokladem toho, že studenti nejsou schopni samostatně úlohu řešit a že to byla ztráta času. Opak je pravdou. Jistě, bylo by bývalo jednodušší prezentovat odvození analytického vyjádření podobnosti v pěkné a elegantní podobě, v jaké je např. uvádí Sekanina a kol. (1988). Nicméně domníváme se, že teprve na základě vlastní práce, vlastního bloudění a neúspěšných pokusů student krásu tohoto odvození správně ocení.

Některé poznatky, které vyplynuly z analýzy studentských řešení úloh seminární práce, byly prezentovány i před studenty samými. Účelem bylo, aby oni sami se nejen poučili z chyb svých i svých spolužáků, ale také aby se inspirovali a uvědomili si, jaké spektrum přístupů se může při řešení takto otevřené úlohy objevit. Tuto zkušenost pak využijí i při své učitelské praxi. Netřeba dodávat, že podobné analýzy pomáhají i vyučujícímu k tomu, aby lépe volil návodné úlohy a aby byl lépe připraven na případná nestandardní řešení.

Literatura

Cederberg, J.N. *A course in modern geometries*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 2001.

Gans, D. *Transformations and geometries*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1969.

Hejný, M., Jirotková, D. & Stehlíková, N. *Geometrické transformace (metoda analytická)*. 1. vydání. Praha: PedF UK, 1997.

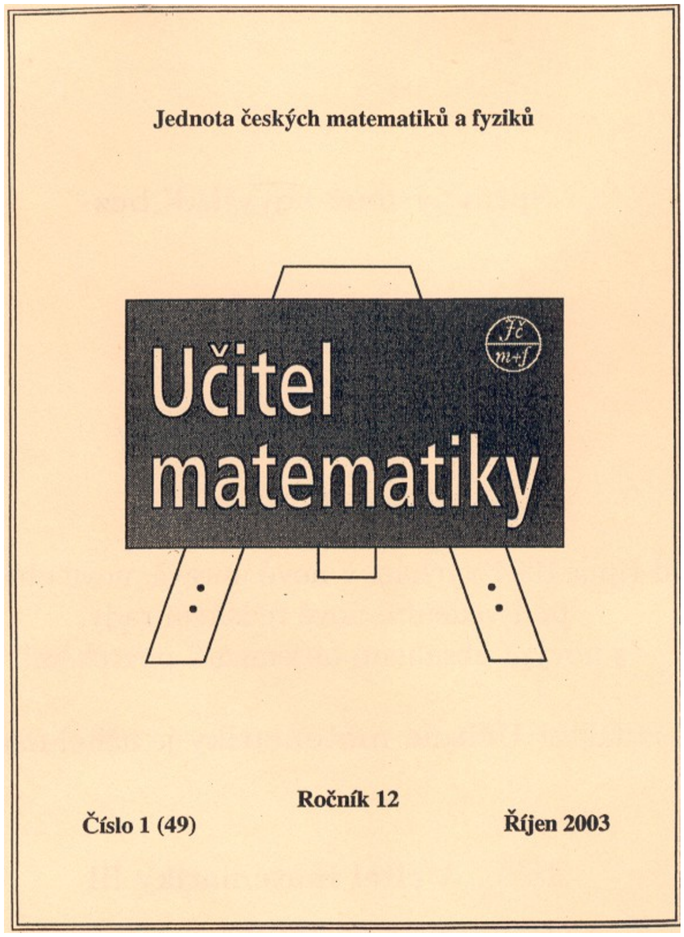
Hejný, M. & Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001.

Kuřina, F. *10 geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002.

Kuřina, F. Problémy a omyly našeho školství. In Jirotková, D. & Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*. Praha: PedF UK, 2004.

Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M. & Šedivý, J. *Geometrie II*. Praha: SPN, 1988.

Stehlíková, N. Ilustrace konstruktivistických přístupů k vyučování na vysoké škole. In Burjan, V., Hejný, M. & Jány, Š. *Zborník príspevkou z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras*. Bratislava: EXAM, 2003, s. 83–88.



Časopis *Učitel matematiky* vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků* vkročil již do 13. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Cena jednoho čísla je 30,- Kč, roční předplatné za čtyři čísla činí 110,- Kč.

Zájemci o odběr časopisu mohou napsat na adresu:

Redakce Učitele matematiky
Katedra matematiky PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno

nebo poslat e-mail na adresu: ucmat@math.muni.cz

Vedoucí redaktor: Dag Hrubý — Výkonný redaktor: Eduard Fuchs

Sborník příspěvků semináře Dva dny s didaktikou matematiky

Praha, 12.–13. 2. 2004

Organizátor: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Matematická pedagogická sekce JČMF

Organizační a programový výbor: Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editoři: Darina Jirotková, Naďa Stehlíková
Sazba: Naďa Stehlíková, systémem LaTeX
Počet stran: 122
Vydala: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a Matematická pedagogická sekce JČMF, v prosinci 2004

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Pro vnitřní potřebu, neprodejné.

ISBN 80-7290-173-7