Dva dny s didaktikou matematiky 2003

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Praha, 13.–14. 2. 2003

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Matematická pedagogická sekce JČMF

Programový a organizační výbor:

Marie Kubínová
Darina Jirotková
Michaela Kaslová
Naďa Stehlíková

Editor:

Darina Jirotková (e-mail: darina.jirotkova@pedf.cuni.cz)
Naďa Stehlíková (e-mail: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje členům katedry matematiky a didaktiky matematiky a doktorandům za pomoc při organizaci semináře.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v prosinci 2003 Systémem LaTeX zpracovala Naďa Stehlíková

ISBN 80-7290-143-5

Obsah

Vážení a milí čtenáři,

jsme moc rádi, že seminář „Dva dny s didaktikou matematiky“, který pořádá pro učitele matematiky katedra matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy v Praze, Pedagogické fakulty, ve spolupráci s Matematickou pedagogickou sekcí JČMF, má už svou tradici a mají o něj zájem i učitelé, kteří se předchozích ročníků nezúčastnili.

Seminář proběhl ve dnech 13. a 14. února 2003 a zúčastnila se ho téměř stovka učitelů matematiky ze základních a středních škol z celé České republiky a kolegové z Itálie, Polska a Slovenska. Po dobrých zkušenostech z roku předešlého jsme se snažili uspořádat program semináře tak, aby poskytoval co nejvíce možností pro aktivní podíl každého účastníka – byly připraveny pracovní dílny a kulaté stoly k aktuálním problémům vyučování matematice, znovu bylo otevřeno „Tržiště dobrých nápadů“.

Atmosféra semináře i diskuse s jeho účastníky nám opakovaně potvrzují, že na našich školách pracují obětaví učitelé, kteří věnují vyučování matematice mnoho ze svého volného času a jsou ochotni se o své zkušenosti podělit se svými kolegy. Nesmírně si vážíme toho, že zájem o náš seminář trvá, a jsme moc rádi, že je místem, kam se učitelé rádi vrací a kde otevřeně hovoří o své práci. Proto chceme v příštím ročníku poskytnout daleko větší časový prostor pro diskusi. Možná, že tento sborník bude první výzvou k ní.

Všem účastníkům semináře přejeme, aby jim tento sborník připomněl příjemnou pracovní atmosféru, která podle našeho názoru i podle názoru mnoha účastníků seminář provázela. A ostatním čtenářům přejeme, aby je náš sborník potěšil, aby v něm našli podněty pro svou vlastní práci a možná i pozvání na další seminář Dny s didaktikou matematiky, který plánujeme na 12. a 13. únor 2004.

Přihláška na seminář je k dispozici u sekretářky KMDM (M.D. Rettigové 4, 116 39 Praha l, tel. 221 900 248) a v elektronické podobě na www-stránkách KMDM PedF UK (`http://www.pedf.cuni.cz./k_mdm/index.htm`). Tam také naleznete aktuální informace o přípravě 8. ročníku našeho semináře „Dva dny s didaktikou matematiky“.

Se všemi, kterým není lhostejný stav vyučování matematice na našich školách, se těším na shledanou v únoru 2004 na 8. ročníku semináře „Dva dny s didaktikou matematiky“.

Marie Kubínová

předsedkyně programového výboru semináře

Vydání sborníku bylo podpořeno výzkumným záměrem „Kultivace matematického myšlení a vzdělanosti v Evropě“ J13/98:114100004.

Přednáška

Kolektivní reflexe ve vyučování matematice

Alena Hošpesová, Marie Tichá[1]

Úvodem

V centru diskusí o matematickém vzdělávání jsou obecné otázky kolem nabývání poznatků s porozuměním a dovednosti využívat matematické poznatky pro řešení matematických úloh i úloh aplikačního charakteru. Odpovědí se zdá být uplatňování konstruktivistického přístupu. V České republice byl formulován „didaktický konstruktivismus“ (Kuřina, 1995; Hejný & Kuřina 2001), jehož autoři vycházejí z přesvědčení, že hlavním cílem každého vzdělávání je *kultivace žákova duševního světa*, že důležité pro porozumění je, aby poznatky vznikaly jako individuální konstrukty v mysli poznávajícího člověka. V matematickém vzdělávání jde minimálně o tři oblasti: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky. Kuřina a Hejný ve zmíněné práci formulovali v „desateru konstruktivismu“ faktory, které podporují vytváření sítě poznatků. Jedná se zvláště o vytváření podnětného prostředí podporujícího samostatné intelektuální činnosti žáků, jejich zvídavost, tvořivost, nabývání a využívání zkušeností, konstrukce poznatků a jejich strukturování, objevování, pěstování různých reprezentací, rozvíjení sociálních interakcí a prostředků komunikace. Učitel zaujímá v tomto procesu roli tvůrce klimatu, nositele výzev. Role učitele dostává nové dimenze a stává se, podle našeho soudu, stále náročnější.

Proto se naše pozornost obrací k učiteli a vyučování. Když mluvíme o učitelích, nemáme na mysli jen jejich teoretické znalosti matematiky, didaktiky matematiky a metodiky (vyučovacích metod). Máme na mysli vždy, možná dokonce hlavně, aktivity učitelů při vyučovaní matematice, jejich hodnocení a posouzení. Došli jsme k závěru, že chceme-li změnit charakter matematického vzdělávání a vyučování matematice, musíme se především snažit ovlivňovat učitele, kultivovat jejich nazírání a přesvědčení o podstatě, smyslu a cílech vyučování matematice, a jejich kompetence. V souvislosti s úvahami v tomto článku vyzdvihujeme zejména kompetenci „kvalifikované pedagogické sebereflexe s důrazem na analýzu vlivu vlastního smýšlení a jednání na žáky spojenou se schopností projektovat své celoživotní vzdělávání.“ (Helus, 2001).

[1] *PF JU České Budějovice, hospes@pf.jcu.cz, MÚ AV ČR, ticha@math.cas.cz*

Projekt programu Socrates Comenius

Od roku 1999 spolupracujeme s kolegy ze SRN a Itálie na řešení projektu programu Socrates – Comenius „Porozumění kultuře matematického vzdělávání a vyučování matematice v různých zemích“ („Understanding of mathematics classroom culture in different countries“). Cílem projektu je přispět ke zkvalitnění permanentního vzdělávání učitelů-elementaristů a dalších odborníků, kteří se zabývají vyučováním matematice na 1. stupni základní školy. Důležitou charakteristikou projektu je zapojení učitelek, které přímo na 1. stupni učí. V každém „národním“ týmu pracují, jak učitelé z univerzit, resp. pracovníci z výzkumu, tak učitelky. (Další informace o projektu je možné získat na www.pf.jcu.cz/umccdc.)

V návrhu projektu jsme přepokládali, že cílem bude pochopit specifické rysy kultury vyučování matematice v jednotlivých zúčastněných zemích, že se proto zaměříme na popis a analýzu těchto charakteristik v každé ze zúčastněných zemí a na základě zvážení vzdělávacích tradic i na možnosti využití nejefektivnějších postupů v jiných zemích. Cíle naší práce se během řešení projektu (podrobněji Hošpesová, Tichá, 2003) posunuly k vytváření cest jak ovlivňovat činnosti učitele ve vyučování (Scherer, Steinbring, 2003), a to zejména na:

- kultivaci činnosti učitelů prostřednictvím sebereflexe a kolektivní reflexe,
- formování citlivějších učitelských přístupů k žákovským způsobům myšlení a schopností využívat je ve vyučování,
- uvědomování si momentů hodnotných z hlediska žákova poznávacího procesu.

V současné době probíhá práce na projektu v několika fázích. Na setkání celého týmu připravujeme vyučovací experiment. Z vyučování jsou pořizovány videozáznamy. Učitelé navzájem hospitují (i když ne tak často, jak bychom si představovali). Na společných setkáních českého a pak celého mezinárodního týmu diskutujeme o videozáznamech a zkušenostech ze škol. Učitelé působí v trojí roli: jako učitelé, studenti i jako výzkumníci. Jsou silně „zataženi“ do práce na přípravě nových experimentů (podrobněji v Hošpesová, Tichá, 2003).

Při rozboru videozáznamů z vyučování často evidujeme momenty, které ilustrují, jak se žáci učí a uchopují matematické pojmy. V tomto příspěvku bychom chtěli porovnat z tohoto pohledu dvě vyučovacích epizody z 1. ročníku 1. stupně ZŠ, zamyslet se nad nimi a naznačit, jak probíhá kolektivní reflexe v české části týmu.

Plánování a průběh vyučovacího experimentu na konci 1. ročníku

Český tým tvoří 6 pracovníků z Prahy a Českých Budějovic, z toho 4 učitelky 1. stupně ZŠ. Ve školním roce 2001/2002 vyučovala v každém městě jedna učitelka v 1. ročníku.

Cílem vyučovacího experimentu, který jsme připravili společně s celým českým týmem, bylo aktualizovat potřebné dětské zkušenosti a vytvořit podnětnou situaci pro rozvíjení uchopování vztahů celek – část a pro rozvíjení dovednosti rozdělovat na stejné části. Jedná se o propedeutiku pojmu zlomek. Vycházeli jsme z úvahy, že mnoho činností v každodenním životě žáků (nematematickém i matematickém) vyžaduje pochopení vztahu části a celku a že se tedy jedná o dětem blízkou tématiku. Tak například ve vyučování matematice na 1. stupni je spojování dvou (nebo více) disjunktních částí v celek užíváno jako jeden z přístupů k zavedení operace sčítání/odčítání. V dalších oblastech, kde je vztah části a celku základem (násobení, dělení, zlomek, poměr), se školní vyučování zaměřuje více na nácvik početních technik než na vytváření představ o pojmech. Jednou ze zmíněných aktivit je dělení na stejné části.

Byly jsme proto přesvědčeny, že žáci budou schopni vyřešit úlohu na dělení na stejné části bez předchozího výkladu učitele na základě svých praktických zkušeností i her. Zajímalo nás, jaké postupy řešení budou žáci volit: dělení „po částech“ (je stanovena velikost části) nebo „na části“ (rozdělování na určený počet částí).

Rozhodli jsme se začít geometrickým pohledem (kontinuální prostředí), ale hlavně se soustředit na aritmetický pohled (řešit úlohy v diskrétním prostředí). Po diskusi bylo vybráno „reálné“ prostředí zahrady jako přirozené prostředí, se kterým má většina dětí zkušenosti. V přípravě na hodinu jsme naplánovali tři činnosti:

(a) Dělení ve spojitém prostředí (*Rozděl záhon na dvě stejné části.*)
(b) Dělení v diskrétním prostředí (*Sázíme kedlubny*.)
(c) Diskuse nad různými řešeními a jejich vysvětlení (*Co jsme dnes dělali?*)

Zde si ukážeme, jak se lišilo zadání úloh (a) a (b) a jak byly děti schopné zvládnout dělení na stejné části v diskrétním prostředí.

V hodině nejprve děti dostaly arch papíru, který byl modelem záhonu, a přeložily ho na dvě stejné části. Pro řešení úkolu (b) učitelky připravily pro děti obrázky sazenic kedlubnů a hrášku vystřižené z papíru. Děti měly řešit úkol s těmito obrázky a na závěr „sazenice“ přilepit na „záhon“.

Ačkoliv při společné přípravě panovala mezi učitelkami shoda a mohlo by se zdát, že vyučovací hodiny budou až na detaily stejné, realizace se značně lišila.

(a) Rozděl záhon na dvě stejné části

Úlohu (a) zadaly učitelky zdánlivě obdobně. Požadovaly přeložení (resp. ohnutí) papíru. Nicméně požadavek na to, jak mají být záhony rozděleny, není identický.

> Učitelka ve třídě P[2]: „Já vás poprosím, abyste mi jedním jediným ohnutím papíru, jak budeš chtít, rozdělili zahradu na **dva stejně velké záhony**. Nějakým způsobem si ten list ohněte, aby vám vznikly dva stejně velké záhony.“
>
> Učitelka v C: „Ty se o ten záhon se svým kamarádem rozdělíš. Abyste se nehádali, že jeden má menší a druhý větší. A víte, jak si ho rozdělíte? Ten papír si prostě **přeložíte, tak abyste měli spravedlivou část záhonu.**“

[2]Pro rozlišení obou tříd, kde probíhalo experimentální vyučováním a vyučujících učitele, používáme P (Praha) a C (České Budějovice).

V obou třídách v rámci závěrečné diskuse zaznělo slovo „půlka“ a přeložením papíru se ověřovala shodnost polovin. Dialog byl ale veden vždy jiným směrem. Zatímco v dialogu ve třídě P slovo „půlka“ nabídly samy děti (záznam 1) a učitelka se jej pak snažila precizovat (záznam 2), ve třídě C byla diskuse vedena tak, aby se k tomuto pojmu došlo (záznam 3).

Záznam 1

Učitelka P	. . . Kdo mi dokáže, že tento záhon je stejně velký jako tento? Lucko.
Lucka	Že je to rozpůlený na dvě půlky.
Učitelka P	Co je to půlka? Pavlo – my jsme narazili na slovo, které já vůbec neznám. Co to je, že to „je na dvě půlky“?
Lucka	Že je to rozpůlený.
Tom	No – ano.
Učitelka P	A dokáže mi někdo říct, jestli říkám totéž. Já říkám, že to jsou dva stejné záhony a ty říkáš, že to jsou dvě půlky. A vždycky platí, že půlky jsou stejný?
Lucka	*Kroutí hlavou, že ne.*
Učitelka P	Může být větší a menší polovina?
Hlasy	Ano. Jo. Ne.
Pavla	Ne.
Učitelka P	Ukažte mi, že ty záhony jsou stejné. (*Bere papír a přehýbá jinak.*)

Později se v této třídě ještě jednou k pojmu polovina vrátili a učitelka se snažila aktualizovat neformální představy dětí o zlomcích a jejich vztazích.

Záznam 2

Učitelka P	Jak to vypadá, když jdeš koupit půlku chleba? Helenko? Můžeš mi to tady ukázat. (*Kreslí obrázek.*) Kolik půlek chleba z bochníku?
Hlasy	Dvě.
Učitelka	To by byla jedna půlka toho chleba. Já si koupím jednu část z kolika nabízených?
Hlasy	Ze dvou.
Učitelka	Ze dvou. Protože z jednoho chleba můžeš udělat kolik?
Hlasy	Dvě.
Učitelka	Rozdělím ho na polovinu a když si vezmu dvě poloviny, tak jsem koupila co? Tomáši?
Hlasy	Chleba. Celej.
Exp.	Na kolik částí je, když dělíte na půlky?

Hlasy	Na dvě.
Učitelka	A co kdybych měla koláč. (*Kreslí kruh.*)
Míša	Tak ho rozdělíme na čtyři půlky. Třeba.
Učitelka	Jak rozdělím na 4 půlky?
Markéta	Na čtvrtiny?
Markéta	To je čtvrtina.
Učitelka	Co že to je?
Hlasy	Čtvrtina!!!
Učitelka	Vybarvíš mi tu jednu čtvrtinu?
Markéta	*Vybarvuje.*
Učitelka	Mohla bys vytečkovat dvě čtvrtiny?
Markéta	*Vytečkovává.*
Učitelka	A co jsou to ty dvě čtvrtiny?
Hlasy	Půlka.
Učitelka	Kolik? Dvě čtvrtiny je kolik těch půlek?
Markéta.	Jedna.
Učitelka	A co mi zbylo nevytečkováno?
Hlasy	Jedna čtvrtina.

Pozn.: Je zajímavé, že téměř totožný dialog jsme zachytili v experimentálním vyučování realizovaném v jiné třídě na počátku probírání zlomků ve 4. ročníku.

Záznam 3

Učitelka C	A když se podíváme na ten záhon. Věděl bys jakou část zaujímají kedlubny z toho celého záhonu? Na jakou část jsi vlastně ty kedlubny zasadil?
Tomáš	Půlka. . . (*mimo záběr kamery*)
Učitelka C	Jsou tam vlastně dvě části. Jedna pro tebe a jedna pro kamarády. Přišel bys na to, jakou část vlastně Románek osázel? Co myslíš, Michale?
Michal	Tu jednu.
Učitelka C	A věděl bys, jaká je to část celého záhonu, Tomášku?
Tomáš	Ta s tima kedlubnama.
Učitelka C	To je část s kedlubnama. Ale já se ptám, jestli bys přišel na to, jaká je to část z toho celého velkého záhonu.
Tomáš	Půlka (*mimo záběr*).
Učitelka C	Lubošku.
Luboš	Obdélník.

Učitelka C	To je celý záhon a část záhonu. Ale jaká je to část? Tomášku.
Tomáš	To je půlka.
Učitelka C	Jak jsi na to přišel?
Tomáš	No, když je půlka kedlubnů, tak, . . .
Učitelka C	Že ten záhon má dvě části . . .
Tomáš	No.
Učitelka C	Jak bych mohla říct, že je to přesně půlka. Veroniko, pojď nám to ukázat.
Veronika	Že to přiložíme.
Učitelka C	Pojď nám to ukázat.
Veronika.	. . . že si to takhle přiložíme, aby z toho vznikla půlka.

(b) Sázíme kedlubny

Zadání úkolu (b) se v obou třídách značně lišilo. Učitelka ve třídě C předem s dětmi počítala několik příkladů na sčítání stejných sčítanců. Pak zadala otevřenou úlohu, ve které nebyl explicitně vyjádřen požadavek na dělení na stejné části. Předpokládala, jak později řekla, že na základě praktických zkušeností budou děti v tomto „prostředí“ vytvářet řádky se stejným počtem sazenic.

> Učitelka ve třídě C: „Představte si, že maminka má pořád na zahradě ještě jeden záhon volný a ještě jí zbyly nějaké sazenice fialových kedlubnů. Víš, co musí s těmi sazenicemi udělat? “
>
> Při vysvětlování a upřesňování úkolu učitelka ještě dodala, že: „. . . (sazenice) musí mít dost místa, aby mohly růst.“

Učitelka ve třídě P se rozhodla zasadit všechny činnosti do situace „Zahrádka“. Připravila pro děti projekt (3 vyučovací hodiny) – děti kreslily zahradu, obrázky třídily, půlily záhony, sázely sazenice, prodávaly vypěstovanou zeleninu, . . . Ve formulaci úlohy zdůraznila požadavek dělení na stejné části a zadala kvantitativní údaje:

> Učitelka ve třídě P: „Každá skupina dostane 18 kedluben. Budeme sázet na záhon, který jste si vybrali. A já mám pro vás jednoduchý úkol. Já bych chtěla, abyste ty kedlubny, které jste dostali, rozdělili **do třech řádků**. Zvládneme rozdělit ty kedlubny na tři stejné části? To znamená do třech řádků.“

Když jsme začali vyhodnocovat průběh jednotlivých hodin, uvědomili jsme si, že to, jak učitelky formulovaly úkol, by nám mohlo umožnit sledovat v jednotlivých třídách odlišné jevy:

1. **ve třídě C**

   (a) jakou úlohu žáci vytvoří, to znamená:

   – úlohu na dělení na (stejné) části, například: *rozdělit kedlubny do tří řádků tak, aby v každém řádku byl stejný počet*;

   – úlohu na dělení po (stejných) částech, například: *rozdělit kedlubny do řádků po třech*;

   – jinou úlohu (například: *hrášek jen rozhodit na záhon*);

   (b) strategii řešení sestavené úlohy;

2. **ve třídě P**

   jak budou žáci řešit úlohu, kterou formulovala učitelka. To znamená, zda užijí dělení „na části“ nebo „po částech“ nebo jiný postup; úloha byla zadána tak, že bylo možné očekávat oba uvedené, ale i jiné postupy řešení.

Při podrobném několikanásobném sledování videozáznamů jsme evidovali zajímavé jevy, které podle našeho názoru dokumentují a ilustrují některé etapy procesu postupného uchopování vztahu části a celku (třídění, klasifikace, „spravedlivé rozdělování“, dělení po několika, . . .).

Ve třídě C se řešení lišila podle toho, zda měli žáci „vysadit“ 15 sazenic kedluben nebo 20 hrášků. 15 sazenic téměř všechny děti rozmístily do pravoúhelníka třikrát pět. Nejčastěji použitou strategii bychom mohli nazvat „dorovnávání“: děti rozmístily obrázky několika sazenic na papír do řádků a pak upravovaly tak dlouho, až měly na každém řádku stejný počet obrázků. V situaci „hrášek“ se objevila různá rozmístění: dvakrát deset, čtyřikrát pět, i nestrukturovaná rozmístění.

Ve třídě P (rozděl 18 kedluben do 3 řádků) jsme předpokládali, že děti budou většinou „rozdělovat“. Avšak děti, které pracovaly ve skupinách, si navzájem zasahovaly do práce a jejich postup (pokud se práce neujal dominantní žák, který dělal vše sám) působil chaoticky. Při rozboru videozáznamů práce žáků se zdá, že děti kombinují rozdělování a dělení po několika. Na mnoha místech je patrný proces volby strategie: žák se rozhoduje pro určitý postup nejen tehdy, když má odpovědět na otázku „jak začít“, ale i v průběhu řešení, když se rozhoduje „jak pokračovat“. Modifikuje svá rozhodnutí na základě informací od úlohy, jakoby s úlohou komunikoval.

Závěrečné poznámky

V provedeném experimentu se ukázalo, že organizace vyučování do značné míry omezuje nebo dokonce určuje, jakou metodu řešení žáci užijí. Organizace vyučování (skupinové vyučování a práce ve dvojicích) zřejmě ovlivnila i rozhovory se žáky podněcující žákovské reflexe o dosažených výsledcích („Co jsme dneska dělali.“)a způsob argumentování. Děti ze třídy C často uváděly estetické („líbí se mi to tak“, možná ale ve smyslu, „tak je to správně“) a sociální („babička mi to řekla“) důvody. Děti ze třídy P se snažily situaci „matematizovat“ (například přeložením papíru ukázat shodnost). Důležitou roli hrají i praktické zkušenosti žáků s prostředím, které mohou ovlivnit řešení úlohy (např. zda se „sázejí kedlubny“ nebo „sejí hrášek“).

Při aktivním objevování nových poznatků přinášejí žáci do vyučování vlastní strategie, které se mohou lišit od postupu, který si předem připraví (a na který je připraven) učitel. Porozumění strategiím žáků a jejich využití ve vyučování klade značné nároky na flexibilitu učitele a jeho profesionální zdatnosti. Na základě našich dosavadních zkušeností z práce na projektu Socrates doufáme, že jednou z možností, jak pěstovat tyto schopnosti, je sebereflexe a kolektivní reflexe. Naše přesvědčení potvrzuje i výpověď učitelky C: „Velice pozitivní jsou následné diskuse s ostatními, protože řadu věcí si ani neuvědomím, nenapadnou mě. Někdy mě ani nenapadne hledat jiný způsob, pokud ho nevidím v práci kolegyně nebo se o něm „nějakým“ způsobem nedozvím.“

Zdá se, že učitelky spolupracující v našem týmu si během řešení projektu stále více uvědomují význam systematické sebereflexe a kolektivní reflexe a možnosti diskutovat svou práci s kolegy. To můžeme doložit např. tvrzením učitelky C: „Výborné jsou videozáznamy, které jsou autentické a umožňují mi např. sledovat moji práci v hodině v jiné pozici, v rovině pozorovatele efektivity a kvality mojí vyučovací práce – vyjadřování se, přesnost a správnost – či nepřesnost v zadávání práce žákům, kvalita komunikace se žáky a mezi žáky; jak se žáci zapojují a reagují na mé výzvy, atd.“ Učitelka J zdůraznila: „Pro mne je sebereflexe a pomoc kolegů důležitá. V některých situacích nejsem schopná se změnit, i když chci.“ Také oceňují možnost diskutovat o tom, jak učí, s členy celého týmu. Učitelka P napsala: „. . . možnost komunikovat nad pracovními problémy je pro mě obrovským hnacím motorem.“ Učitelky ale současně upozorňovaly, že kvalifikovaná kolektivní reflexe je možná jenom v některých školách; vyžaduje podporu vedení školy i dobré pracovní vztahy.

Během řešení projektu jsme všichni ocenili, že spolupráce v mezinárodním týmu umožňuje kolektivní reflexi nejen učitelů z jedné školy, případně učitelů z různých škol, ale dokonce reflexi učitelů z různých zemí. Umožňuje sledovat jejich vyučování, které vychází z jiné kultury, založené na jiných tradicích vzdělávání. Učitelka C napsala: „Zejména je výborné, že mohu poznávat odlišnost kultury jiných zemí, která se prolíná školní prací a ovlivňuje tak celkové klima ve třídě.“ Učitelka P: „Jsem přesvědčena, že kultura vzdělávání neoddělitelně souvisí s kulturou daného národa.“

Literatura

Hejný, M., Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha, Portál. S. 160 – 161.

Helus, Z. (2001). Čtyři teze k tématu „změna školy“. *Pedagogika*, v. 51, 2001, no. 1, str. 25 – 41.

Hošpesová, A., Tichá, M. (2003). *Selfreflection and improvement of mathematics classroom culture.*

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG11/TG11-list.html

Kuřina, F. (1995). Konstruktive Zutritte zum Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 30. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 4. bis 8*. März 1996 in Regensburg.

Scherer, P., Steinbring, H. (2003). *The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – teachers commonly reflect feedbacks to their own instruction activity.*

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG11/papers_pdf/TG11_Scherer.pdf

87636-CP-1-2000-1-CZ-Comenius-C31 UMCCDC – Understanding of mathematics classroom culture in different countries http://www.pf.jcu.cz/umccdc

Poznámka: Výzkum je podporován grantem programu Socrates č. 187636-CP-1-2000-1-CZ-Comenius-C31 a grantem GAČR 406/02/0829.

Jednání v sekcích

Iracionálne čísla a integrované tematické vyučovanie

Jaroslava Brincková[1]

Ústredným činiteľom tvorivého vyučovania a je učiteľ, ktorý pozná teóriu tvorivosti a didaktické prostriedky rozvíjania tvorivosti žiakov a uplatňuje ich v praxi tvorivého vyučovania. Využitie tvorivých metód integrovaného tematického vyučovania (ITV) na ZŠ predpokladá zmenu štýlu práce školy. Predovšetkým učiteľov ochotných pracovať na sebe, dobrú spoluprácu učiteľov školy v rámci predmetových komisií a snahu rozvíjať tvorivosť svoju a svojich žiakov.

Základom tvorivého vyučovania je utváranie podmienok pre rozvoj tvorivosti žiakov a uplatnenie rôznych druhov tvorivých činností vo vyučovaní [2]. *To predpokladá uskutočniť didaktickú analýzu obsahu učiva z hľadiska možností rozvíjania tvorivosti a metodické postupy orientovať tak, aby žiaci získali poznatky vlastnými aktivitami a prostredníctvom tvorivých vyučovacích metód.* Tvorivosť predstavuje určitú zručnosť, ktorej sa môžu žiaci naučiť, resp. ktorú môžu vo vyučovaní prostredníctvom učebnej činnosti zdokonaľovať. K tomu však *musia byť oboznámení s obsahom učiva* a *s tvorivým postupom* riešenia učebných úloh. Tento postup sa musia naučiť aktívne používať (napr. v matematike treba žiakov najprv naučiť riešiť úlohy určitého typu, až potom môžu vytvárať nové riešenia daných úloh).

Učitelia môžu rozvíjať tvorivosť žiakov predovšetkým *cez obsah učiva* jednotlivých predmetov. Z neho sa vyčleňujú problémy a odvíjajú sa rôzne metódy tvorivého vyučovania, najmä:

- problémové metódy – problémový výklad, metóda riešenia problémových úloh
- dialogické problémové metódy – tvorivé dielne, tvorivé semináre
- výskumná metóda, metóda autentického výskumu, metóda riadeného objavovania
- metóda zmeny úloh netvorivého charakteru na úlohy divergentného typu
- metóda tvorby diferencovaných úloh
- inšpiratívne metódy – čítania životopisov vedcov, umelcov, . . .
- demonštratívne a laboratórne metódy (pokusy v škole)
- heuristické metódy – metóda heuristického rozhovoru, hry ako metóda, didaktické hry

[1] *Katedra matematiky PdF UMB, Banská Bystrica, jbrinckova@pdf.umb.sk*

- aktivizujúce metódy – situačná metóda, inscenačná metóda, simulačná metóda, dramatizácia a i
- projektové metódy

Pre objasnenie medzipredmetových vzťahov prírodovedných predmetov môže učiteľ použiť ľubovoľnú z uvedených tvorivých metód. Dá sa predpokladať, že v praxi v určitej etape je preferovaná vždy niektorá metóda. Po čase ju vystrieda preferencia ďalšej a ďalšej metódy. Tento cyklus striedania pokračuje špirálovite a zabezpečuje variabilitu vo vzdelávacom procese. Núti učiteľov, aby vo svojom poznaní neustrnuli a hľadali najoptimálnejší spôsob sprostredkovania učiva v danej triede. Jedným z nich je aj integrácia medzi predmetmi, ktorá umožňuje odhaliť duplicitu vo vzdelávaní a získať väčší časový priestor pre nácvik zručností a rozvoj osobnosti v matematike. Získaný čas umožňuje pracovať žiakom samostatne, pri riešení komplexných problémov, pričom získavajú skúsenosti s praktickou činnosťou a experimentovaním. Máloktorá vyučovacia metóda umožňuje učiteľovi rozvíjať takú škálu zručností a schopností žiakov ako práve projektové vyučovanie. Súčasne máloktorá mu dáva väčšiu príležitosť premárniť množstvo času zle riadenými činnosťami. Preto je potrebné zlepšiť prípravu učiteľov na prácu pomocou tvorivých metód vyučovania aj v matematike.

Takúto možnosť poskytujú práve projekty ako súčasť integrovaného tematického vyučovania prírodovedných predmetov. V príprave študentov učiteľstva matematiky pre ZŠ sme spracovali matematický projekt: *Čo skrývajú kocky.* Projekt sme realizovali v rámci priebežnej praxe v 8. ročníku ZŠ po prebratí učiva o mocninách a odmocninách a učiva o kruhu, valci a premene jednotiek objemu. Vlastný projekt vyplynul z učiva fyziky v ktorom žiaci hľadali odpoveď na otázku: „Prečo sa musia kalibrovať odmerné nádoby v pohostinstve?“ Projekt si kládol matematický cieľ: Modelovanie množiny iracionálnych čísel. Ukázať, že iracionálnych čísel je nekonečne veľa okolo nás. Nie je to len $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a π.

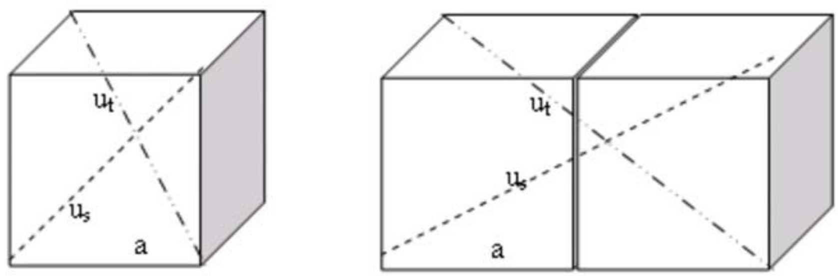
Vychádzali sme z modelovej situácie:

> Najvhodnejším telesom pre meranie objemu je kocka. Z kociek môžeme stavať postupným pridávaním nové stavby, ktorých objem vieme merať (je násobkom počtu použitých kociek). Ak hrany kocky majú dĺžku 1 cm, akú dĺžku majú jej uhlopriečky? Skúmajte aké dĺžky budú mať stenové a telesové uhlopriečky telies zostavených z 2 až 10 kociek?

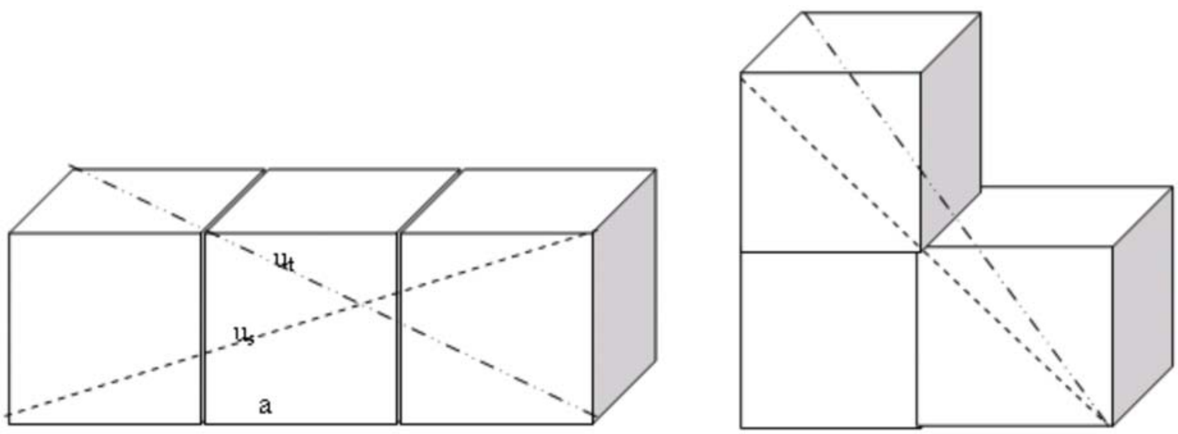
Čiastkové úlohy:

1. V drôtenom modeli kocky modelovať pomocou špajdle jednotlivé uhlopriečky. Určiť ich dĺžku v mm.
2. Modelovať rôzne stavby z 2 až 9 kociek tak, že prikladáme celé steny k sebe. Pomocou špajdlí modelovať ich uhlopriečky a zistiť ich dĺžku.

3. Údaje spracovať do tabuľky č. 1.
4. Sformulovať záver svojho pozorovania.



Obr. 1



Obr. 2

Potom sme hľadali odpoveď na otázku: „Prečo je potrebné kalibrovať všetky poháre v pohostinstve? Prečo potrebujeme poznať prevod 1dm$^3 = 1$ liter? “

Odpoveďou bolo skúmanie násobkov iracionálnych čísel.

Obvod kruhu $= 2 \cdot \pi \cdot r$ násobok iracionálneho čísla je iracionálne číslo.

Obsah kruhu $S = \pi \cdot r^2$ . . . iracionálne číslo.

Objem valca $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ . . . iracionálne číslo.

Povrch valca $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + v)$ . . . iracionálne číslo.

Objemy valca sa nedajú presne vyjadriť.

Môžeme v praxi merať presne?

Menia kvapaliny svoj objem v závislosti od teploty?

Škola v novom tisícročí má vytvárať príležitosti k individuálnemu rozvoju slobody prejavu realizáciou takých vyučovacích metód a foriem, aby mal žiak možnosť:

- verejne prezentovať svoje návrhy a obhajovať ich, pričom sa učí kultivovanému prejavu,
- verejne vyslovovať hodnotiace súdy tak, aby neurazil iných, aby jeho prejav nebol agresívny, ale konštruktívny (vie v ňom naznačiť východiská, resp. lepšie riešenie),
- naučiť sa pohotovo reagovať na otázky a pripomienky iných,
- vedieť aktívne počúvať a byť tolerantný k názorom iných.(Brincková, 2002)

Tabuľka č.1

Počet kociek	**Stavba**	u_s	u_t
1		$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
2		$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
3	$1, 1, 1$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$
3	2, 1	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$
4	$1, 1, 1, 1$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18}$
4	$2, 1, 1$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$
4	2, 2	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$
5	$1, 1, 1, 1, 1$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{27}$
5	$2, 1, 1, 1$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{21}$

Zaujímavé bolo sledovať nadšenie žiakov pre experimentálne overovanie dĺžok uhlopriečok v stavbách z drôtených modelov kociek. Vo svojom skúmaní pokračovali aj doma. Na obr. č. 2 sú dve stavby z troch kociek, ktoré rozprúdili diskusiu o definícii uhlopriečok a potrebách presného vyjadrovania sa.

Projektové vyučovanie dalo žiakom možnosť verejne prezentovať svoje návrhy a obhajovať ich, pričom sa učili kultivovanému prejavu, verejne vyslovovali hodnotiace súdy tak, aby neurazil iných, naznačili východiská, resp. lepšie riešenie. Učili sa pohotovo reagovať na otázky a pripomienky iných, pričom sa snažili aktívne počúvať a byť tolerantný k názorom iných. Táto metóda by nemala chýbať aspoň v záverečnom zhrnutí tematického celku. Nám sa osvedčila.

Literatura

Brincková, J.: Problémy, projekty a ich riešenie v príprave učiteľov matematiky pre ZŠ. In: *34. konferencia slovenských matematikov Jasná pod Chopkom. Abstrakty prednášok.* Žilina, Vydavateľstvo ŽU 2002, s. 8–9.

Lokšová, I., Lokša, J.: *Teória a prax tvorivého vyučovania.* Prešov, ManaCon 2000, s. 101

Konstruktivní přístupy v praxi – šance pro školy či utopie?

Jana Cachová[1]

Uplatněním konstruktivních přístupů ve vyučování matematice se může školní výuka přiblížit přirozenému způsobu poznávání dětí, může rozvíjet a kultivovat jejich myšlení, a alespoň částečně tak oprostit žáky od formálních znalostí a dovedností. Je však v současné době reálné plošnější rozšíření konstruktivních přístupů do škol?

V rámci své doktorandské práce jsem prováděla šetření mezi učiteli matematiky na různých typech a stupních škol s cílem zjistit, jaký je jejich názor na možnost využití konstruktivních přístupů v praxi.

Jako reakci na rozeslaný dotazník jsem obdržela 20 odpovědí, což sice není statisticky nijak významné, na druhou stranu však podrobný rozbor jednotlivých odpovědí skýtá celkem zajímavý náhled na tuto problematiku.

Získala jsem 7 výpovědí od učitelů SOŠ a VOŠ, 5 od vyučujících na gymnáziích, 6 odpovědí učitelů 2. stupně ZŠ a konečně 2 od učitelek 1. stupně. (Odpovědi však nelze takto přísně dělit, neboť mnozí z dotazovaných mají zkušenosti s různými typy a stupni škol.) Obdržela jsem spíše obsáhlé odpovědi než strohé, a ačkoli se někde učitelé nevyjadřují přímo k věci, mají zapotřebí napsat o své dlouholeté práci, o svém pedagogickém snažení, o svých zkušenostech. Zdá se, že je dotazník přece jen oslovil. Každý se většinou snažil co nejvíce ospravedlnit přístup, který zvolil a léta jej užívá. Jen málo učitelů je k sobě opravdu kritických. Ovšem i z nepřímých odpovědí se dají vyčíst podstatné informace o dotazovaném učiteli, jeho práci a přístupu, který uplatňuje ve výuce.

Odpovědi, budu-li je posuzovat podle postoje respondentů k otázce možnosti uplatnění konstruktivních přístupů v běžné výuce matematice na našich školách, lze rozdělit do následujících skupin:

- od velice příznivých odpovědí, kde učitelé považují svou výuku za odpovídající či blížící se konstruktivnímu vyučování,
- přes učitele, kteří věří, že takové vyučování je realizovatelné v praxi, líbí se jim a snaží se svou výuku alespoň zčásti k němu přiblížit,
- po učitele, kteří by tak chtěli učit, ale v praxi se jim to nedařilo,
- dále po ty, kteří udávají argumenty proti možnosti realizace tohoto přístupu v praxi, ačkoli uvádějí, že by bylo pěkné tak učit,
- až konečně po některé, kteří takovou výuku přímo odsuzují.

[1] *Univerzita Hradec Králové, cach@spse.cz*

Chtěla bych za všechny uvést alespoň tři různé názory na konstruktivní přístupy ve vyučování:

- „Když jsem začínala učit, měla jsem dvakrát problém, že na začátku hodiny jsem neuvedla vzdělávací cíl – tím bych si ale zkazila vše, čeho jsem chtěla dosáhnout – aby ten cíl žáci našli sami; na ředitele a inspekci jsem nedala, a vyplatilo se – alespoň myslím. Takové vyučování není nové, probíhá. Je reálné, ale je časově, psychicky i fyzicky náročné. . . “
- „Co se týče konstruktivního přístupu k matematice, o to jsem se opravdu snažila, ale myslím si, že to v současném tradičním školském systému moc nejde. O tom by se dalo povídat hodiny. . . Často mě přepadala beznaděj, že je to marná práce. A i když jsem se opravdu snažila udělat zajímavé hodiny a ty studenty vtáhnout do procesu, bylo to stále málo a bez výsledků. Myslím si, že by chtělo změnit především postoj či vztah učitele a žáka, pak by konstruktivní přístup k vyučování matematice byl zcela automatický. . . “
- „Diskuse se žáky při hodině M je možná na ZŠ v omezené míře, rozhodně ne na povel. Na ZŠ žáci poznatky teprve získávají, a proto jich na účelnou, obsažnou diskusi mají jen omezeně. Mohlo by se snadno stát, že diskutují k danému problému 1 – 2 žáci, ostatní mlčí, protože nevědí, o čem je řeč, nebo se zabývají jiným problémem, nebo ruší. Připravit dobrou a účelnou diskusi v M je velmi náročné. Je vhodná pro menší kolektiv, ne celou třídu, pro žáky s přibližně stejnými znalostmi k problému, který se řeší. Pak může být učitelova úloha úlohou koordinátora. . . “

Uvedené odpovědi charakterizují tři skupiny, do kterých se dají odpovědi respondentů dotazníku rozdělit, a sice:

- učitelé spokojení se sebou a svou prací,
- učitelé vnitřně nespokojení – chtěli by učit jinak, ale nejde jim to tak – chyby hledají jednak u sebe, jednak u žáků, jednak ve stávajícím školském systému,
- učitelé, kteří svou práci ospravedlňují např. splněním osnov, přípravou žáků na přijímací zkoušky, jsou nespokojeni hlavně se žáky, chyby hledají spíše u nich než u sebe.

Z provedeného šetření mezi učiteli vyplývá, jak výrazně záleží na osobnosti každého učitele, zda dokáže a zda je ochoten ve své výuce uplatnit konstruktivní přístupy či nikoli.

Vepsaná nebo připsaná[1]

Petr Dvořák[2]

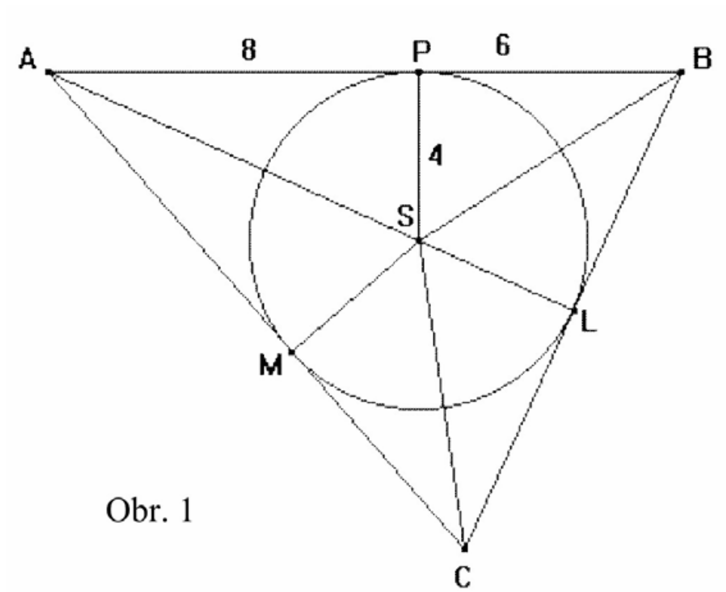
V rámci semináře zaměřeného na řešení matematických úloh jsem narazil na jednu zajímavou úlohu, při jejímž řešení mě napadlo, že by se dala zobecnit. Úlohu nejprve vyřešíme a ve druhé části příspěvku zobecníme.

Původní úloha

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC je 4 a úseky, na které je jedna strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku s touto kružnicí, mají délky 6 a 8. Určete délky zbývajících dvou stran. (Loren C. Larson, 1990)

Řešení:

Označme $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$, $AB = c'$, $BC = a'$, $CA = b'$.



Obr. 1

Podle obr. 1 platí

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Dále pokračujeme pomocí elementárních vztahů a úprav a dostaneme

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{180^\circ - (2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}{2} = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{7}{4},$$

$$|LC| = \frac{4}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = 7,$$

$$|AB| = 14, |AC| = 15, |BC| = 13.$$

Jiné řešení:

Označme $|MC| = |LC| = x$, $|PS| = r$. Dále platí $|AM| = 8$, $|BL| = 6$,

$$s = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{14+8+x+6+x}{2} = 14 + x,$$

[1]Psáno s podporou grantu: GAUK 316/2001/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, petr.dvorak@pedf.cuni.cz*

$$S = \sqrt{s(s-a')(s-b')(s-c')} = \sqrt{(14+x)\cdot 8\cdot 6\cdot x},$$

kde S je obsah trojúhelníku ABC.

Protože platí $r = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{(s-a')(s-b')(s-c')}{s}}$, můžeme psát $4 = \sqrt{\frac{6\cdot 8\cdot x}{14+x}}$. Po jednoduchých úpravách získáme rovnici $14 = 2x$, což vede k výsledku $x = 7$ a již uvedenému řešení zadané úlohy, tedy

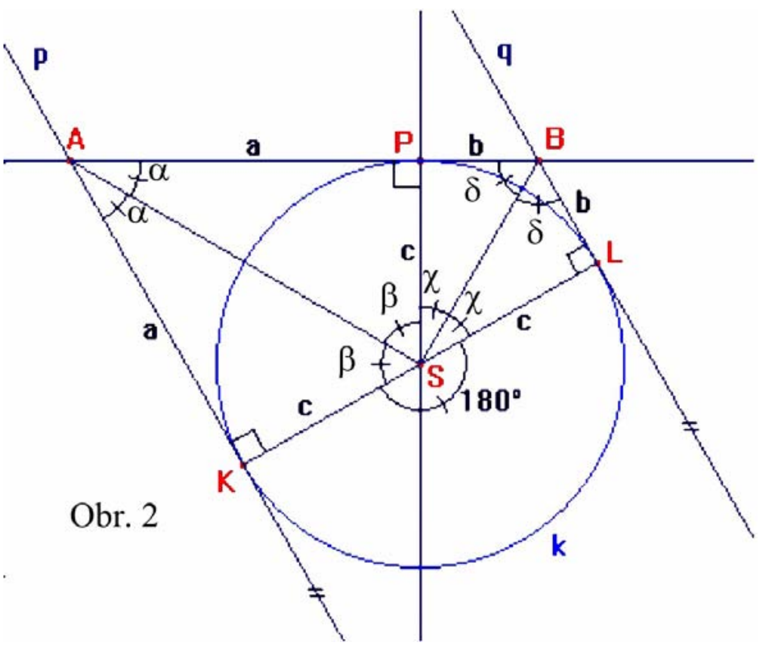
$|AB| = 14$, $|AC| = 15$, $|BC| = 13$.

Snadnost řešení konkrétního zadání nás přivede k myšlence tuto úlohu zobecnit.

Zobecnění

Poloměr kružnice k vepsané (připsané) trojúhelníku ABC je c a úseky, na které je jedna strana trojúhelníku rozdělená bodem dotyku s touto kružnicí, mají délky a a b. Určete délky zbývajících dvou stran.

Řešení:



Obr. 2

a) Je zřejmé, že jediný případ, kdy nelze trojúhelník ABC sestrojit, je situace, kdy přímky p, q (obr. 2) jsou rovnoběžky, má-li bod C ležet na p i q.

Pak ale platí

$\triangle APS \cong \triangle AKS$,

$\triangle BPS \cong \triangle BLS$,

$|\angle KSL| = 180°$.

Z toho získáme vztah $2\chi = 180° - 2\beta$, tedy $\chi = 90° - \beta$.

Ale v trojúhelníku APS platí, že $\alpha = 90° - \beta = \chi$. Dopočtením úhlu BPS získáme vztah $\delta = \beta$. Proto platí, že trojúhelník ABS je pravoúhlý. Je tedy zřejmé, že podmínka rovnoběžnosti přímek p, q souvisí s velikostí úhlu ASB. Jestliže má mít tento úhel velikost 90°, pak nutně musí platit Euklidova věta o výšce ve tvaru $ab = c^2$.

b) Pro kružnici trojúhelníku vepsanou (obr. 3) musí tedy platit, že $ab > c^2$, protože trojúhelník ABC je tupoúhlý.

Pro trojúhelník ABC platí $S = \sqrt{s(s-a')(s-b')(s-c')}$, kde a', b', c' jsou strany trojúhelníka ABC. Pak platí

$s = \frac{a'+b'+c'}{2} =$

$= \frac{b+x+a+x+a+b}{2} = a + b + x.$

Pro poloměr kružnice trojúhelníku vepsané platí:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a')(s-b')(s-c')}{s}}.$$

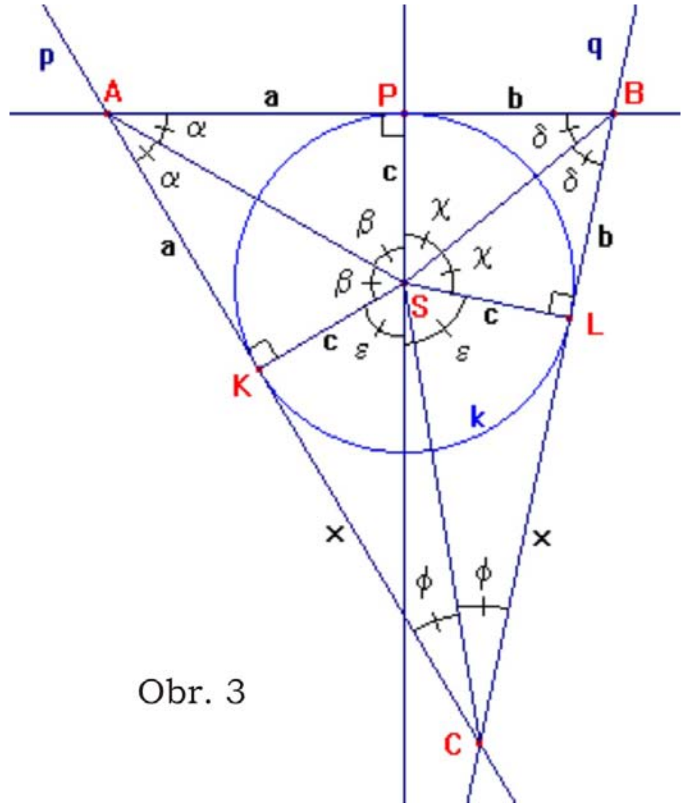
Jelikož $r = c$, tak platí:

$c^2 = \frac{(s-a')(s-b')(s-c')}{s} = \frac{abx}{a+b+x}$

$c^2(a+b+x) = abx$

$c^2(a+b) = x(ab-c^2)$

$x = \frac{c^2(a+b)}{ab-c^2}.$



Obr. 3

Jelikož pravá strana rovnosti nemá smysl pro případ $ab = c^2$, potvrzuje se tímto náš předpoklad neexistence řešení při naplnění této podmínky, což je ekvivalent rovnoběžnosti přímek p, q. Také je z tohoto vztahu patrné, že musí platit $ab > c^2$, jelikož čitatel pravé strany je kladné číslo a x musí být také kladné číslo.

c) Při konkrétním zadání jsme použili k výpočtům trigonometrických vztahů. Jejich zobecněním dospějeme ke stejnému výsledku, jak si nyní předvedeme.

Z trojúhelníků APS a BPS (obr. 3) získáme $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{c}{b}$, tedy $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{c}{a}$, $\delta = \operatorname{arctg}\frac{c}{b}$.

Pro trojúhelník ABC platí $2\phi = 180° - (2\operatorname{arctg}\frac{c}{a} + 2\operatorname{arctg}\frac{c}{b})$, což lze upravit na

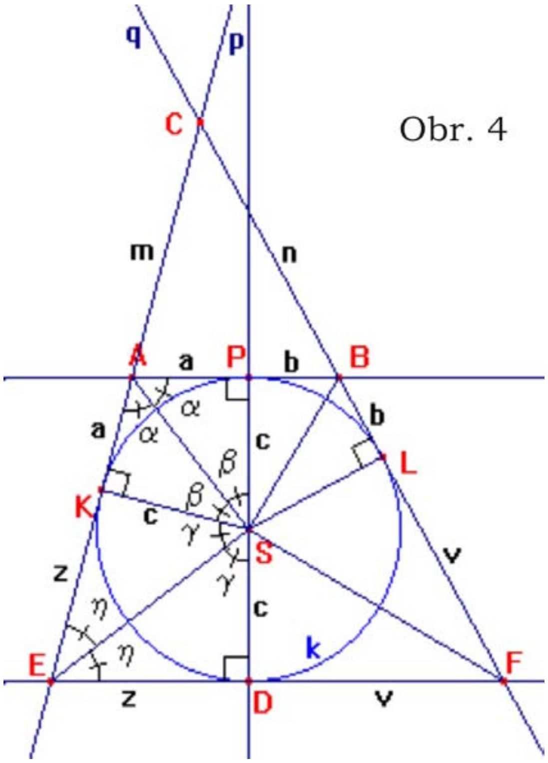
$$\phi = 90° - (\operatorname{arctg}\frac{c}{a} + \operatorname{arctg}\frac{c}{b}) = 90° - \operatorname{arctg}\frac{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}{1-\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}} = 90° - \operatorname{arctg}\frac{c(a+b)}{ab-c^2} = \frac{c^2(a+b)}{ab-c^2}.$$

Z trojúhelníka CLS plyne $\operatorname{cotg}\phi = \frac{x}{c}$, odkud pomocí předchozí rovnosti dostaneme

$$x = c\operatorname{cotg}\phi = c\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}\frac{c(a+b)}{ab-c^2}) = c\frac{c(a+b)}{ab-c^2} = \frac{c^2(a+b)}{ab-c^2}.$$

Tímto jsme se opět dostali ke stejnému vztahu jako v bodě b). Nyní stačí dopočítat jednotlivé strany: $a' = b + x$, $b' = a + x$, $c' = a + b$.

d) Protože pro kružnici připsanou straně trojúhelníku platí, že $c^2 > ab$, neboť trojúhelník ABS je ostroúhlý, nabízí se zde otázka, jestli nestačí „otočit“ pořadí členů ve jmenovateli ve výrazu pro výpočet x. Ukážeme, že tato myšlenka je správná.



Nejdříve si ale problém kružnice připsané trojúhelníku drobnou „fintou“ převedeme na nám již známý stav, kdy kružnice k je kružnicí vepsanou trojúhelníku. Toho docílíme narýsováním rovnoběžky s přímkou AB v bodě D tak, jak to vidíme na obr. 4. Vzniknou nám dva nové body E, F. Jestliže nyní najdeme vztah mezi čísly z, v a čísly a, b, c, můžeme úlohu řešit již známým způsobem.

Protože $|\angle PSD| = 180°$, platí tedy $2\gamma = 180° - 2\beta$, tj. $\gamma = 90° - \beta = = \alpha$ (z $\triangle APS$), odkud $\eta = \beta$. Platí tedy $\triangle APS \sim \triangle SDE$, proto $\frac{a}{c} = \frac{c}{z}$ a odtud $z = \frac{c^2}{a}$. Analogicky je $v = \frac{c^2}{b}$.

Protože jsme prokázali výše požadovanou podmínku, můžeme dále tuto úlohu řešit jako v b), kde $x = m + a = n + b$.

Následují tyto vztahy:

$$x = \frac{c^2(z+v)}{zv - c^2} = \frac{c^2\left(\frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)}{\frac{c^2}{a} \cdot \frac{c^2}{b} - c^2} = \frac{c^2\left(\frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)}{\frac{c^2(c^2-ab)}{ab}} = \frac{\frac{c^2(a+b)}{ab}}{\frac{(c^2-ab)}{ab}} = \frac{c^2(a+b)}{c^2 - ab}$$

Tímto se potvrdila výše uvedená hypotéza. Nyní stačí dopočítat strany trojúhelníka ABC. Platí:

$$m = \frac{c^2(a+b)}{c^2 - ab} - a = \frac{c^2a + c^2b - c^2a + a^2b}{c^2 - ab} = \frac{b(c^2 + a^2)}{c^2 - ab}$$
$$n = \frac{c^2(a+b)}{c^2 - ab} - b = \frac{c^2a + c^2b - c^2b + ab^2}{c^2 - ab} = \frac{a(c^2 + b^2)}{c^2 - ab}$$

e) Tyto závěrečné vztahy vedou k možnosti pozměnit zadání:

Určete strany trojúhelníka ABC, jestliže víte, že poloměr kružnice k vepsané trojúhelníku ABC je c a příčka rovnoběžná s jednou ze stran trojúhelníka ABC je tečnou této kružnice a je bodem dotyku kružnice rozdělena na úseky o velikosti a, b.

Takto modifikovaná úloha by mohla být vrcholem série gradovaných úloh.

Literatura

Loren C. Larson: *Metódy riešenia matematických problémov*, Svornosť, Bratislava, 1990

Učitel matematiky a historie matematiky

Petr Emanovský[1]

Postavení matematiky v současné informační společnosti již není zdaleka tak neotřesitelné, jak tomu bylo ještě před poměrně nedávnou dobou, kdy byla praktická využitelnost matematiky uznávána širokou laickou veřejností. Praktické užití matematiky je dnes totiž zcela v područí informatiky a výkonné výpočetní techniky. Přestože matematika stála u zrodu počítačů a stále významnou měrou přispívá k jejich dalšímu zdokonalování, neodborníkovi se může zdát, že další pěstování matematiky a její výuka na školách ve stávajícím rozsahu jsou již přežitkem. Tento názor může být bohužel ještě utvrzován některými příznaky každodenního života. Prodavačka v supermarketu celý den přejíždí laserem čárkové kódy a nemusí prakticky vůbec umět počítat. Moderní technika ji tak zbavuje jedné z posledních nutností, která ještě zpohodlnělému člověku zůstala – nutnosti myslet. Podobnou situaci můžeme vidět i ve škole, pokud zcela odbouráme počítání zpaměti. Jiné situace, které by měly být pro každého matematika zvláště alarmující, jsou výroky některých mediálně známých osobností na adresu matematiky. Bohužel, veřejná přiznání jejich negativního vztahu k matematice se stala téměř módní záležitostí.

Podíváme-li se na výše popsanou situaci očima učitele matematiky, musíme otevřeně konstatovat, že tato situace není příliš optimistická. Přesto se domnívám, že právě učitel matematiky by zde mohl sehrát klíčovou pozitivní roli. Nezájem, či dokonce odpor k matematice může být totiž často také důsledkem nezajímavého způsobu výkladu, nesmyslného drilu či vytváření atmosféry strachu v hodinách matematiky. V současné, pro matematiku ne příliš příznivé, situaci by se měl každý učitel matematiky tím více snažit udělat maximum pro to, aby u svých žáků vzbudil zájem o svůj předmět. O motivaci ve vyučování matematice toho již bylo napsáno mnoho. Všimněme si nyní pouze jedné z mnoha možností vedoucích k zvýšení zájmu o matematiku, a sice historického přístupu k vyučování matematice. Význam matematiky totiž nespočívá pouze v jejím bezprostředním praktickém využití. Matematiku a její historický vývoj je třeba chápat jako součást kulturního bohatství lidstva podobně jako například umění. V tomto duchu by se měl také každý učitel matematiky snažit působit na své žáky. O nutnosti historického přístupu k vyučování matematice říká výstižně profesor Vopěnka: „Studovat dějiny Evropy je nejlepší na dějinách matematiky. Proto by se matematika na školách měla učit úplně jinak než dosud. Jako příběh, jako součást humanitního vzdělávání a ne jako vzdělávání technického. Technické využití je pouze takový artefakt, který samozřejmě stál u kolébky moci Evropy, ale podstata matematického vzdělání to není. Uvědomte si, že všichni velcí evropští myslitelé byli stejně velcí matematici jako filosofové – Descartes, Leibniz, Spinoza, . . . Tihle lidé dělali Evropu. Myslím, že má větší smysl ve školách učit o Descartesovi než o Ludvíku XIII., byť jsou o něm zajímavé pavlačové historky.“

[1]*Pedagogická fakulta Univerzity Palackého Olomouc, eman@risc.upol.cz*

Uskutečnění této vize v blízké budoucnosti zřejmě nedovolí tradiční přístupy k výuce v našem školství. Přesto má každý učitel matematiky možnost uplatňovat historický přístup k výuce svého předmětu prostřednictvím historických poznámek v učivu. Tyto poznámky můžeme nalézt ve větší či menší míře prakticky ve všech učebnicích matematiky. Vhodné a nenásilné zařazování historických poznámek do výuky však vyžaduje jistou učitelovu erudici v oblasti historie matematiky. Nezbytná je alespoň orientace v základních etapách historického vývoje matematiky od období vzniku a formulace základních abstraktních matematických pojmů, přes období matematiky konstantních veličin, období matematiky proměnných veličin až po současné období nazývané obdobím matematiky zobecněných kvantitativních a prostorových vztahů (viz např. [1]). Ideální by byl samozřejmě učitel, kterému by se stala historie matematiky koníčkem a který by se jí soustavně zabýval. Takový učitel by totiž bezesporu prostřednictvím historie matematiky rozvíjel nejen svoje znalosti historické, nýbrž i odborně matematické. Pokud by se mu navíc podařilo přenést svůj zájem o matematiku a její historii i na jeho žáky, mohl by mít dobrý pocit z toho, že alespoň trochu přispěl k úspěchu v oprávněném boji matematiky o místo na slunci.

Literatura

[1] Struik, D.J. *Dějiny matematiky.* Praha: Orbis, 1963.

[2] Vopěnka, P. Smysl matematiky. In *Sborník z 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Prachatice, 2002. s. 35 – 54.

Jak efektivně vyučovat informatice na ZŠ

Zdeněk Lauerman[1]

Do příspěvku jsem vybral část 6. kapitoly ze své práce nazvané „Jak efektivně vyučovat informatice na ZŠ“. Kapitola dále pokračuje částí „MS Excel na ZŠ“, ale protože respektuji rozsah 2 str., tuto část jsem vynechal stejně jako množství úloh, kterými je text doplněn.

Kapitola šestá – Motivace žáků

6.0. Motivace v informatice

Vzhledem k přirozené zvídavosti dětí, chuti poznávat nové věci a experimentovat není těžké motivovat žáky ZŠ k práci s počítačem – je to často mnohem snazší než motivovat dospělé. Někdy se ale stává, že když se děti naučí používat dovednosti popsané

[1] *ZŠ Roztoky, lauermannzdenek@seznam.cz*

v předchozích kapitolách, mají pocit, že se už nic dalšího učit nemusí, že jiné programy jsou příliš náročné (a to často jen proto, že k jejich efektivnímu využití je třeba použít postupy, na které nejsou zvyklí) nebo zbytečné (protože nevědí, jak využít jejich možnosti). Proto chápu motivaci v informatice jako probuzení zájmu o stále zajímavější, více specializované a náročnější programy.

V následujícím textu se pokusím nastínit, jak některé z takových programů přiblížit dětem na základní škole.

6.1. Prezentace – PowerPoint

K vytváření prezentací nabízí školní prostředí mnoho příležitostí. Jednak pro žáky (vytvořit prezentaci školy, své třídy, zájmového kroužku, školního sportovního družstva,. . .), jednak pro učitele (vytváření efektních přednášek, má-li škola potřebné projekční zařízení). Program PowerPoint umožňuje snadno a rychle navrhnout, kvalitně esteticky ztvárnit a následně spouštět prezentace s obrázky, grafy, vloženými objekty a podobně. Každý, kdo umí pracovat s programem Word, se s programem PowerPoint naučí pracovat bez problémů, proto je snadné žáky motivovat k práci s tímto programem, zvláště pak poté, co zjistí, jak snadno lze vytvářet velmi efektní prezentace. U tohoto programu začnou žáci rychle vnímat velké možnosti jeho využití v běžném mimoškolním životě – prezentace turistického, skautského, atletického,...atd. oddílu, dále např. prezentace rodinné firmy nebo možnost vytvořit prezentaci sbírky svých modelů a podobně. V praxi mají prezentace vytvořené v programu PowerPoint většinou za úkol představit konkrétní firmu, produkt, služby nebo pomáhat při přednáškách, školeních a tak dále. PowerPoint je přesně tím programem, který umožňuje dětem dělat to, co je baví – živé, barevné, nápadité dokumenty. Jednotlivé snímky mohou „oživit“ vhodným nastavením přechodů a efektů – např. může obrázek „přijet“ z různých stran, text se může zobrazovat postupně atd.

S dětmi lze začít pracovat v PowerPointu v podstatě hned poté, co zvládnou práci s textem a vkládání objektů. Doporučuji začít hned s vytvářením nové prezentace – program nabídne po spuštění 3 možnosti :

– Stručný průvodce

– Se šablonou

– Prázdná prezentace

Vybereme tedy Prázdná prezentace a můžeme začít pracovat. Jakmile děti zjistí, že dokument, který vytvářejí, je vlastně posloupnost na sebe navazujících snímků, což je pro lidi zvyklé pracovat ve Wordu nebo v jiném textovém editoru zpočátku nezvyklé, začnou se zajímat o to, jakým způsobem lze již hotové nebo rozpracované snímky zobrazovat. Brzy zjistí, že existuje způsobů několik, jako nejpřehlednější a pro začátečníky patrně nejvhodnější způsob doporučuji „Zobrazit řazení snímků“ – pak lze snadno pouhým tažením myši měnit pořadí snímků, nepotřebný snímek klepnutím označit a klávesou DELETE smazat. Doplňovat do prezentace nové snímky lze pomocí nástroje „NOVÝ

SNÍMEK“ (buď přímo v panelu nástrojů nebo Vložit – Nový snímek . . . nebo Ctrl+M).

V okně, které se následně zobrazí, jsou jednotlivé snímky typově rozděleny:

První snímek má připravená textová pole pro nadpis a podnadpis, další snímky mají kromě připraveného textového pole pro nadpis ještě další připravená pole pro seznamy s odrážkami, pro vkládání obrázků, grafů a jiných objektů. Vkládat nadpisy a vytvářet seznamy je tak velmi jednoduché – mnohem jednodušší než v textovém editoru.

Bude-li učitel působit na své žáky vhodným způsobem (tj. vhodně volit úkoly, poradit při hledání vhodného grafického provedení, pomoci s optimálním nastavením časování a podobně), mohou při práci s PowerPointem naplno uplatnit fantazii, tvořivost, hravost, naučí se jednotlivé snímky uspořádat tak, aby na sebe navazovaly (což je myslím velmi užitečná dovednost do praktického života – umět přehledně a srozumitelně formulovat a prezentovat myšlenky) a na závěr podle vlastností jednotlivých snímků nastavit časování, přechody a efekty. Tím získají velmi pěkný konkrétní výsledek své práce, ze kterého budou mít radost a který je bude sám o sobě motivovat k vytváření dalších prezentací.

Program PowerPoint považuji za ideální pro použití na ZŠ a je velká škoda, že na mnoha základních školách je mu věnováno jen málo času nebo je dokonce zcela opomíjen. Domnívám se, že je to způsobeno tím, že učitelům často chybí osobní zkušenost s tímto programem. Doufám, že tato kapitola přiměje alespoň některé z nich k seznámení s PowerPointem.

6.2. Digitální fotografie

Jak se postupně stávají digitální fotoaparáty dostupné i lidem s průměrnými příjmy, dochází poslední dobou v mnoha českých domácnostech ke změně v používání osobního počítače. Počítač slouží stále častěji ke zpracování digitálních fotografií. Tomuto trendu by se podle mého názoru měla přizpůsobit i výuka informatiky na základních školách. V osnovách předmětu informatika by měl být dán přiměřený prostor různým způsobům práce s digitálním fotoaparátem a zpracování digitálních fotografií tak, aby žáci byli schopni jak pořizovat snímky, tak je i následně upravovat a zpracovávat. Je vhodné, aby byla škola vybavena jak digitálním fotoaparátem, tak i kvalitní tiskárnou. Pro děti je velkou motivací, mohou-li si odnést hmatatelný výsledek své práce.

6.3. Skenování

6.3.1. Práce s obrázkem

Scanner je zařízení umožňující (laicky řečeno) převést informaci uchovanou v tištěné podobě do podoby, kterou lze zpracovat a uchovat prostřednicvím počítače. Škola by měla mít scanner dispozici jak z důvodů výukových (žáci by se s ním měli naučit v hodinách informatiky pracovat), tak z důvodů ryze praktických (provoz školy často vyžaduje zpracovávat na počítači informace uchované v tištěné podobě). Skenovat a zpracovávat obrázky je velmi jednoduché. Součástí zakoupeného scanneru je příslušné programové vybavení, které to umožňuje. Ovládání těchto programů bývá intuitivní a většinou nečiní žádné vážnější problémy. Naskenovaný obrázek je zpravidla možné uložit v různých typech formátů.

6.3.2. Práce s textem

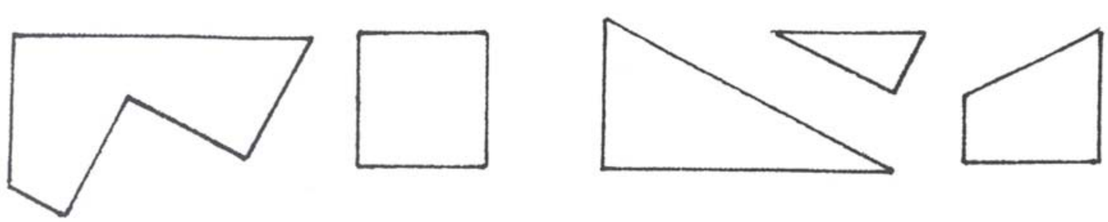
Chceme-li skenovat text, činíme tak zpravidla proto, abychom ho mohli následně upravovat. Proto potřebujeme program, který převede naskenované informace do nějakého textového editoru, kde je můžeme upravovat tak, jak je v textových editorech obvyklé (měnit velikost nebo typ písma, formátovat odstavce, vkládat nadpisy a podobně). Takovým programem je například ABBYY FineReader. Vytváří-li žák referát ve Wordu, může se stát, že je potřeba začlenit do referátu nějaký odstavec z novin, z knihy nebo z časopisu. Protože je nepraktické ručně text přepisovat, je výhodné ho pomocí programu ABBYY FineReader naskenovat a převést do Wordu. Odtud můžeme připravený text snadno začlenit do cílového dokumentu známou metodou „vyjmout – vložit“.

Skládanky v geometrii

Jaroslav Perný[1]

Při výuce matematiky a zejména geometrie má velký význam představivost žáků. Proto je vhodné využívat všech příležitostí pro její rozvíjení. Jednou z možností jsou také „Geometrické skládanky“, kdy žáci řeší úlohu složit z jednotlivých částí požadovaný útvar. Představivost je zde doplňována manuální činností a experimentováním, což přispívá k aktivitě žáků.

Geometrická představivost je rozvíjena např. skládankou v rovině, kdy je žákům předložen soubor 5 obrazců z papíru (viz obr. 1), ze kterých má být složen postupně: a) čtverec, b) obdélník, c) trojúhelník, d) rovnoběžník, e) lichoběžník, f) různoběžník. Přitom musí být použity všechny díly souboru.

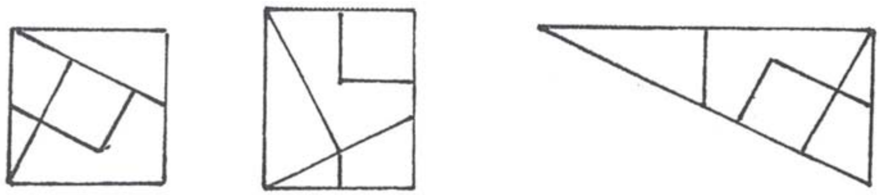


Obr. 1

Řešení na obr. 2a a 2b.

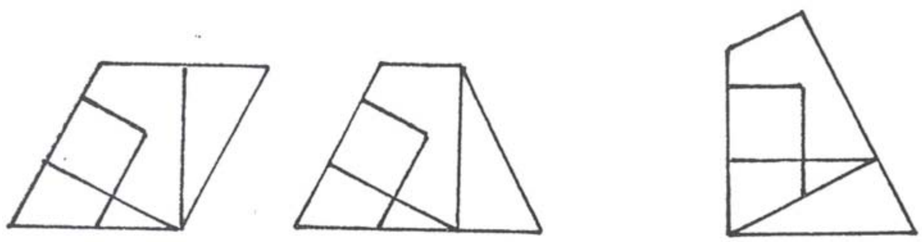
[1] *TU Liberec, Fakulta pedagogická, KMD, jaroslav.perny@vslib.cz*

a) čtverec b) obdélník c) trojúhelník



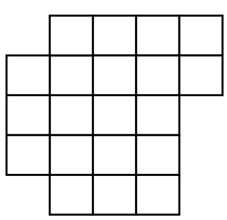
Obr. 2a

d) kosodélník e) lichoběžník f) různoběžník

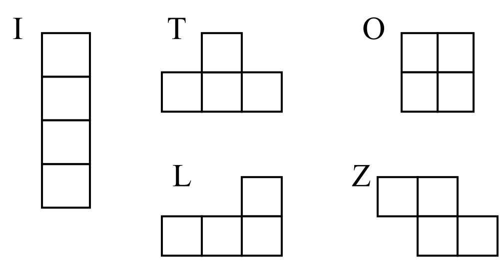


Obr. 2b

Jinou skládankou v rovině je úloha kolika způsoby lze z rovinných papírových „tetramin“ složit požadovaný obrazec (viz obr. 3). Rovinné „tetramino“ je obrazec ze 4 shodných čtverců, které mají společnou stranu. Dílčím úkolem může být i samotné vytvoření všech možností „tetramin“. (Obr. 4)

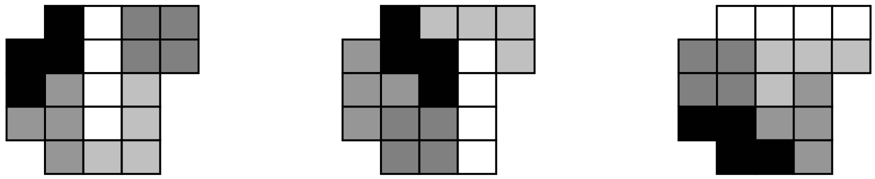


Obr. 3



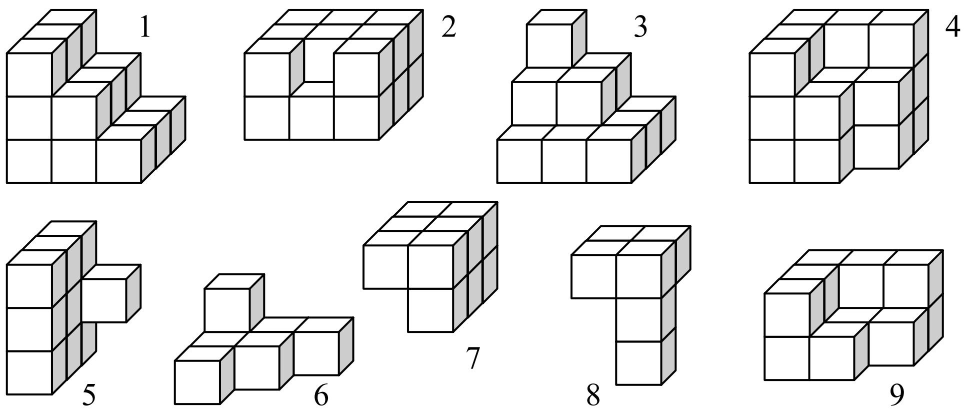
Obr. 4

Řešení:



Obr. 5

Prostorová představivost je rozvíjena např. skládankou v prostoru, kdy je žákům předloženo několik částí těles (viz obr. 6), které mají složit na celé těleso, přičemž nic nesmí chybět ani přebývat.

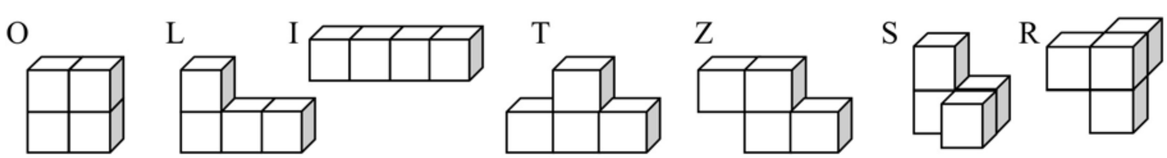


Obr. 6

Na obrázku vždy dvě části těles tvoří krychli. Které dvojice to jsou a která část je navíc?

Řešení: 1-7, 2-5, 3-9, 4-8. Navíc je část 6.

Jinou prostorovou skládankou, obdobně jako v rovině, je úloha složit všechna prostorová „tetramina“ (obr. 7). Prostorová „tetramina“ jsou tělesa složená ze 4 shodných krychlí, které mají společnou stěnu.



Obr. 7

Tyto geometrické skládanky mohou být zařazovány do hodin matematiky jako rozcvičky, nebo pro zpestření, i když není probíráno geometrické učivo.

Lze je rovněž zařazovat pro žáky různého věku, jenom je nutno přiměřeně upravit formulaci zadání a volit vhodné pomůcky.

Literatura

Vondráčková, D.: *Vhled žáků do prostorové představivosti.* Diplomová práce, Liberec 1998.

Jarkovská, Z.: *Geometrická skládanka.* Semestrální práce, Liberec 2002.

Využití internetu při osvojování učiva o dělitelnosti přirozených čísel

Bronislava Růžičková[1]

Tak jako se před časem stalo zcela běžným používání kapesních kalkulátorů všude, kde to člověku usnadňovalo zdlouhavé výpočty a šetřilo čas a dokonce po zdlouhavých debatách, zda kalkulačky ve vyučování matematice ano či ne, se s touto otázkou vyrovnalo i naše školství, tak se v současné době stávají počítače zcela nepostradatelné ve většině oblastí našeho života. Dostaly se i na základní školy a každá z nich se pyšní počítačovou učebnou. Ovšem i ve většině domácností se již stává počítač nepostradatelným pomocníkem. A což teprve s připojením na Internet! Pak jsou to mnohdy hodiny, které lidé tráví u počítače. Ale jsou naše děti, žáci či studenti vedeni k tomu, aby jejich surfování nebylo jen ztrátou času, či pouhou zábavou, nýbrž i zdrojem, zprostředkovatelem, dodavatelem informací a obrovskou motivací? Připojení základních škol na internetovou síť dává možnost využít Internetu téměř ve všech předmětech, tudíž i v matematice. Mění se však i role učitele. Učitel již není jediným zprostředkovatelem a dodavatelem informací, a tím se snižuje závislost žáků na jeho osobě. Takto se z něj stává pomocník a rádce. Musí mnohdy zodpovídat otázky žáků a vysvětlovat nejasnosti, kterých žáci nabudou prostřednictvím Internetu.

Já bych se zde chtěla zmínit o jedné možnosti využití Internetu při výuce učiva o dělitelnosti přirozených čísel.

V učebních osnovách vzdělávacího programu Základní škola v 6. ročníku je zařazen celek „Dělitelnost přirozených čísel“. Tento tématický celek je rozdělen na základní učivo a rozšiřující. Žák by měl po probrání tohoto celku ovládat pojmy násobek, dělitel,

[1] *PdF UP, Olomouc, ruzickova@risc.upol.cz*

prvočíslo, čísla soudělná a nesoudělná, znaky dělitelnosti 2, 3, 5, 10. Dále by měl umět rozeznat prvočíslo a číslo složené, provést rozklad přirozeného čísla na prvočinitele, určit největší společný dělitel dvou až tří přirozených čísel, určit nejmenší společný násobek dvou až tří přirozených čísel, řešit jednoduché slovní úlohy vedoucí k určení nejmenšího společného násobku 2 až 3 přirozených čísel nebo největšího společného dělitele 2 až 3 přirozených čísel. Rozšiřujícím učivem je určování znaků dělitelnosti čtyř, šesti, osmi, devíti a řešení náročnějších slovních úloh vedoucích k využití vlastností dělitelnosti přirozených čísel.

Tento tématický celek patří k těm méně oblíbeným. Po zvládnutí učiva dle předepsaných osnov lze však využít tzv. „Pari systém“ pro zpestření výuky a pro řešení složitějších úloh či pro rychlou kontrolu správnosti řešení.

Základem tohoto výukového programu je počítačový systém GP/ PARI CALCULATOR (Copyright ©1989-1999 by C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen a M. Olivier) v jeho nejnovější verzi: 2.0.20 (beta). Tento systém je sice určen pro řešení úloh z teorie čísel na vyšší úrovni, například pro vědecké pracovníky používající oblast teorie čísel, ale může pomoci i žákům na základní škole. Systém obsahuje mnoho instrukcí, které lze použít tak, jak bylo uvedeno výše. Některé další příkazy jsou komplikovanější a přesahují rámec osnov základní školy, ale řadu z nich však lze využít pro nadanější žáky jako rozšiřující učivo.

Z příkazů, které systém nabízí, jsem vybrala jen takové, které jsou vhodné pro využití při výuce dělitelnosti, a jejich názvy vycházející z angličtiny jsem převedla do české verze tak, aby byly pro žáky srozumitelné. Žáci se tak seznámí předně s příkazy používanými v PARI systému pro základní operace: sčítání ($+$), odčítání ($-$), násobení ($\cdot$) a dělení ($/$); k tomu je ještě připojeno umocňování celého čísla přirozeným exponentem.

Z dalších příkazů, jež mohou žáci v PARI systému využívat:

- přirození dělitelé přirozeného čísla n ... `dc(n)`,
- počet kladných dělitelů čísla n ... `pocetd(n)`,
- součet kladných dělitelů čísla n ... `soucetd(n)`,
- dělení se zbytkem ... `dsz (x,y)`,
- test na prvočíselnost čísla x ... `prvocislo(x)`,
- rozklad čísla x na prvočinitele ... `rozklad(x)`,
- největší společný dělitel ... `nsd`$(x_1, x_2, \dots)$,
- nejmenší společný násobek ... `nsn`$(x_1, x_2 \dots)$,
- nejblíže větší prvočíslo k číslu x ... `vetsip(x)`,
- nejblíže menší prvočíslo k číslu x ... `mensip(x)`.

Dále si ukážeme řešení některých základních typů úloh učiva o dělitelnosti přirozených čísel využitím „Pari systému“. Poznamenejme, že – jak je u počítače obvyklé –

zadání každého údaje nebo příkazu ukončujeme klávesou Enter (v našich ukázkách její použití neuvádíme).

1. Dělení dvou čísel

Pro přirozená čísla x, y označíme q jejich neúplný podíl při dělení $x : y$ a r zbytek při dělení, tedy $x = y \cdot q + r$. V následujícím příkladu máme zjistit q a r pro čísla $x = 37\,453$, $y = 27$.

Příklad: Zjistěte neúplný podíl a zbytek při dělení čísla 37 453 číslem 27.

Zadáme: $x = 37453$, $y = 27$, `dsz(x,y)`
a na obrazovce se objeví:
```
Deleni se zbytkem
37 453 : 27 = 1 387 a zbytek 4.
```
Pro kontrolu můžeme zadat příkaz: $y * 1387 + 4$
Objeví se: 37 453

Přirozené číslo y dělí číslo x, právě když zbytek r po dělení čísla x číslem y je roven 0, tedy právě když číslo y je dělitelem čísla x neboli číslo x je násobkem čísla y. Všechna tato vyjádření by se pro žáky měla stát běžná.

Příklad: Zjistěte, zda číslo 13 je dělitelem čísla 173.
Zadáme: `dsz(173,13)`
Na obrazovce se objeví:
```
Deleni se zbytkem
173 :13 =13 a zbytek 4.
```
Odpověď: Číslo 13 není dělitelem čísla 173.

Text úlohy lze pro žáky formulovat i takto:
Příklad: Zjistěte, zda je číslo 1 431 násobkem čísla 27.
Zadáme: `dsz(1431,27)`
Na obrazovce se objeví:
```
Deleni se zbytkem
1 431 : 27 = 53 a zbytek 0.
```
Odpověď: Číslo 1 431 je násobkem čísla 27.

2. Prvočíslo a číslo složené

Příklad: Zjistěte, která z následujících čísel jsou prvočísla a která jsou čísla složená: 18, 23, 31, 68, 73, 120, 135.
Zadáme: `prvocislo(18)`
Na obrazovce se objeví: `Cislo 18 není prvocislo.`
Podobně si žáci ověří, že čísla 68, 120, 135 nejsou prvočísla a čísla 23, 31 a 73 jsou prvočísla.

3. Rozklad čísla na prvočinitele

Příklad: Rozložte na prvočinitele číslo 140.

Zadáme: `rozklad(140)`

Na obrazovce se objeví:

`Rozklad na prvocinitele`

`140 = 2 * 2 * 2 * 5 * 7.`

Žáky jistě zaujme zadávání i větších čísel.

Příklad: Rozložte na prvočinitele číslo 1 347 259

Zadáme: `rozklad(1347259)`

Na obrazovce se objeví:

`Rozklad na prvocinitele`

`1 347 259 = 563 * 2 393.`

Na tento výsledek by žáci bez počítače asi nepřišli.

Žáci budou jistě ochotni si i pohrát. Např. mohou zjistit jedenácté prvočíslo příkazem `ntep(11)` (zjistí, že to je 31) a podobně třeba devatenácté (67) a třicáté (113) a pak zadat třeba výpočet čísla `x = 31*31*31*67*67*67*113*113`.

Na obrazovce se objeví: `114 410 629 875 877.`

A hned si mohou ověřit rozklad čísla x na prvočinitele pomocí příkazu: `rozklad(x)` systém „Pari“ sdělí:

`Rozklad na prvocinitele`

`114 410 629 875 877 = 30 * 31 * 31 * 67 * 67 * 67 * 113 * 113.`

4. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Zadáme: $x = 630$, $y = 3500$, $z = 2730$.

Chceme verifikovat tvrzení $D(x, y, z) = D(D(x, y), z)$. Po příkazu `nsd(x,y,z)` se objeví: `Nejvetsi spolecny delitel zadanych cisel je 70.`

Po příkazu `nsd(x,y)` se objeví: `Nejvetsi spolecny delitel zadanych cisel je 70.`

Po příkazu `nsd(70,z)` se objeví: `Nejvetsi spolecny delitel zadanych cisel je 70.`

Podobně pracujeme s nejmenším společným násobkem, kde budeme verifikovat vzorec $n(x, y, z) = n(n(x, y), z)$.

Levou stranu dostaneme příkazem `nsn(x,y,z)` s odpovědí:

`Nejmensi spolecny nasobek zadanych cisel je 409 500.` Pravou stranu příkazem `nsn(x,y)` s odpovědí:

`Nejmensi spolecny nasobek zadanych cisel je 31 500.` – a příkazem `nsn(31500,z)` s odpovědí

`Nejmensi spolecny nasobek zadanych cisel je 409 500.`

Nyní ukážeme praktické využití „PARI systému“ při řešení dvou slovních úloh.

Příklad: Tři auta vozila písek z pískovny na stavbu dálnice. Každé jezdilo na jiný úsek stavby, proto se první vracelo za 40 minut, druhé za hodinu a třetí dokonce za 1 hodinu 20 minut. V kolik hodin se auta opět potkají v pískovně, když se naposledy setkala v 8 hodin?

Řešení: Hledáme nejmenší společný násobek čísel 40, 60, 80. Proto zadáme příkaz: `nsn(40,60,80).`

Na obrazovce se objeví: `Nejmensi spolecny nasobek cisel je 240.`

Odpověď: Auta se v pískovně potkají za 4 hodiny po posledním setkání tj. ve 12 hodin.

Příklad: V aleji zbyly jen čtyři stromy, mezi kterými jsou vzdálenosti 35 m, 14 m a 91 m. Do mezer mají být vysázeny nové stromy tak, aby vzdálenosti mezi všemi stromy byly stejné a měly co největší rozestupy. Jaká je vzdálenost mezi stromy a kolik nových stromů bude vysázeno?

Řešení: Hledáme největšího společného dělitele čísel 35, 14, 91. Zadáme příkaz: `nsd(35,14,91).`

Na obrazovce se objeví: `Nejvetsi spolecny delitel zadanych cisel je 7.`

Řešitel příkladu pak musí zjistit, kolik stromů se vejde do které mezery, sečte je a může říci:

Odpověď: Vzdálenost mezi stromy je 7 metrů a tudíž se musí vysázet 17 nových stromů.

Na předcházejících příkladech a textu je prezentována skutečnost, že někdy zdánlivě i zcela neatraktivní učivo lze pro žáky (například využitím počítačů a Internetu ve výuce matematiky) učinit zajímavé a zejména že v něm lze žáky vést k aktivnímu způsobu práce.

Literatura

Rúžičková, B. O jedné z možností propojení výuky informatiky a matematiky na ZŠ. In: *Sborník z mezinárodně vědecko-odborné konference na téma „Modernizace výuky v technicky orientovaných oborech a předmětech“*. 1. vyd. Olomouc: PdF UP, 2002, s. 186–189.

Růžičková, B. Využití aktivizující metody při osvojování základních poznatků o dělitelnosti žáky ZŠ. In: *Sbornik z XX. Mezinárodního kolokvia o řízení osvojovacího procesu.* 1. vyd. Vyškov: VŠPV, 2002, s. 346–349.

Projektová metóda a skúmanie v školskej matematike

Renáta Ujháziová[1]

V dnešnej dobe sa projektová metóda stáva bežnou súčasťou vyučovania matematiky na rôznych stupňoch škôl a zároveň sa silno prejavuje aj snaha chápať školskú matematiku predovšetkým ako vzdelávanie žiakov v činnostiach, ktoré sú charakteristické pre matematickú prácu. Preto je otázne, či je možné aplikovať projektovú metódu aj pri skúmaní v školskej matematike.

To, že je to skutočne možné, ukážem na konkrétnom projekte, ktorý má názov *Posledné cifry násobkov čísel* a bol navrhnutý nasledovne:

Názov projektu: POSLEDNÉ CIFRY NÁSOBKOV ČÍSEL
Veková kategória: Projekt je určený pre žiakov stredných škôl
Tematický celok: Projekt nadväzuje na témy „Deliteľnosť prirodzených čísel“, „Najväčší spoločný delitel‘“, „Najmenší spoločný násobok“
Predpoklady na vedomosti žiakov: Žiaci majú ovládať násobilku čísel. Majú vedieť určiť najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ, prípadne poznať aj iné číselné sústavy.
Povaha projektu: Divergentná objaviteľská práca
Forma výstupu: Spracovanie výsledkov v písomnej forme
Časové rozpätie: Krátkodobý projekt plánovaný na dve vyučovacie hodiny
Forma práce: Skupinová (žiaci pracujú vo dvojiciach)
Zásahy učiteľa: Učiteľ usmerňuje prácu žiakov v minimálnej miere
Ciele výchovné:

- rozvíjať schopnosť formulovať a riešiť problémy
- rozvíjať logické a tvorivé myslenie žiakov
- dať možnosť všetkým žiakom pocítiť radosť z matematiky
- rozvíjať prácu vo dvojiciach

Ciele vzdelávacie:

- objaviť nové vlastnosti čísel
- propedeutika pojmu kongruencie

Návrh realizácie:

Na prvej vyučovacej hodine sa celej triede zadá problematika skúmania posledných cifier násobkov čísel od 1 do 10 a učiteľ oboznámi žiakov so spôsobom a hodnotením ich práce. Spoločné skúmanie by malo prebehnúť na celej prvej hodine a na záver by

[1] *Ústav matem. vied, rujhaziova@yahoo.com*

mal učiteľ spolu so žiakmi navrhnúť možné smery skúmania. Tie im budú slúžiť ako pomôcka pri skúmaní, ale žiaci sa môžu sa vybrať aj inými smermi počas skúmania. Samotné objavovanie vlastností má prebehnúť na druhej vyučovacej hodine, ale žiaci svoje písomne spracované výsledky majú odovzdať až na nasledujúcej hodine.

Obsahová štruktúra projektu:

Základný problém: Vypíšte násobilky čísel od 1 do 10 a skúmajte posledné cifry násobkov týchto čísel.
Výsledok: Posledné cifry násobkov týchto čísel sú napísané v poradí v nasledujúcej tabuľke:

Násobky	**Posledné cifry násobkov čísel 1 až 10**
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, . . .
2	2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, 0, . . .
3	3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, . . .
4	4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, . . .
5	5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, . . .
6	6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, . . .
7	7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, . . .
8	8, 6, 4, 2, 0, 8, 6, 4, 2, 0, . . .
9	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, . . .
10	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, . . .

Tabuľka 1

Úloha 1: Skúmajte tieto cifry a skúste nájsť nejakú zákonitosť, vlastnosť, ktorá pre ne platí. Napr. porovnajte cifry násobkov čísel 4 a 6, 2 a 8, . . .
Možné závery: V opačnom poradí sa vyskytujú cifry v násobkoch čísel: 2 a 8; 7 a 3; 6 a 4; 1 a 9.

Úloha 2: Spočítajte, koľko rôznych posledných cifier majú násobky čísel 1 až 10. Platí nejaká zákonitosť? Počty rôznych cifier zapíšte do tabuľky.
Záver:

Násobky čísla x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet číslic	10	5	10	5	2	5	10	5	10	1

Tabuľka 2

Počas skúmania posledných cifier násobkov čísel 1 až 10 ľahko zistíme, že vždy stačí určiť cifry až do prvého výskytu nuly (vrátane 0). Všetky tieto cifry sú rôzne a po výskyte nuly už nedostaneme žiadnu inú rôznu cifru.

Úloha 4: Skúmajte tabuľku 2.

Úloha 5: Porovnajte číslo 10 s číslami v nasledujúcich množinách: $\{1, 3, 7, 9\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{5\}$, $\{10\}$. Vyslovte všeobecný záver.
Možný výsledok skúmania: Čísla 1, 3, 7, 9 sú nesúdeliteľné s číslom 10, tzn. napr. $\mathrm{D}(3, 10) = 1$ a majú 10 rôznych cifier. Čísla 2, 4, 6, 8 sú súdeliteľné s číslom 10, najväčší spoločný deliteľ každého z nich s číslom 10 je dva, tzn. napr. $\mathrm{D}(6, 10) = 2$ a počet rôznych posledných cifier násobkov týchto čísel je 5. Pre číslo 5 platí: $\mathrm{D}(5, 10) = 5$ a má dve rôzne posledné cifry. Pre číslo 10 platí: $\mathrm{D}(10, 10) = 10$ a má jednu rôznu poslednú cifru.

Úloha 6: Výsledok skúmania vyslovte ako vetu.
Možná formulácia: Pre každé číslo x od 1 do 10 platí:

Počet rôznych posledných cifier v násobkoch čísla $x \cdot \mathrm{D}(x, 10) = 10$.

Po takto navrhnutom projekte nasledovala jeho realizácia vo vyučovaní a následné vyhodnotenie jej priebehu. Kedže formulované problémy žiakov boli rôznorodé a tvorivé, preto spôsob hodnotenia prác žiakov nebola jednoduchá záležitosť. Isté riešenie sme videli v slovnom hodnotení a v nami navrhnutom 5-stupňovom modely hodnotenia, v ktorom sme za kritéria hodnotenia zvolili obsah, formu a ústny prejav. Napokon sa tento model nepoužil (žiaci boli hodnotení na základe vzájomného porovnávania jednotlivých prác), pretože sa zameriava na počet a formálne spracovanie výsledkov skúmaní a nezohľadňuje originálnosť a širokosť problémov. Tie sú však z hľadiska matematického skúmania oveľa dôležitejšie.

Na druhej strane treba povedať, že hodnotenie práce žiakov z pohľadu projektovej metódy má svoje opodstatnenie. Ak sa majú žiaci naučiť pracovať aj na projektoch, je nevyhnutné ich prácu nejakým spôsobom ohodnotiť. Ale ako, to zostalo naďalej otvorené. Za najdôležitejší záver však považujem zistenie, že dobre pripravený projekt môže byť vhodným nástrojom pri skúmaní v školskej matematike. Netreba však zabudnúť na skutočnosť, že realizácia projektu je zložitá záležitosť s radom ovplyvňujúcich činiteľov, ktoré majú neraz dopad na výsledky a na jej úspešnosť.

Aritmetika v desítkové soustavě s neobvyklými číslicemi[1]

Jaroslav Zhouf[2]

Úvod

V mládí se naučíme chápat hodnotu čísel, jejich stavbu z jednotlivých číslic a jejich aritmetiku. Naučíme se to automaticky a dále většinou nepřemýšlíme o možnostech jiné

[1]Příspěvek byl vytvořen v rámci grantu GAUK 316/2001/App/PedF

[2]*PedF UK Praha, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*

stavby čísel. Tento příspěvek by měl vést k zamyšlení se nad stavbou čísel v naší poziční desítkové soustavě.

Tato stavba je v podstatě dokonalá. Máme k dispozici deset číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a každé další číslo je z nich jednoznačně vyjádřeno. V minulosti to ale tak jasné nebylo. Např. dlouho neexistoval znak pro nulu. Čísla se většinou zapisovala slovně a později při číslicovém pozičním zápisu čísel se místo pro nulu nechávalo prázdné, později se psala na tomto místě tečka a ještě později kroužek, z něhož se nakonec vyvinul znak pro nulu. Ani s jedničkou to nebylo jednoduché. Dlouho nebyla chápána jako rovnocenná číslice ve skupině těch ostatních, ale byla považována za znak pro základní množství, z něhož je vytvořen větší celek.

Zamysleme se nyní nad tím, jak by to možná vypadalo, kdyby byl historický vývoj naší poziční desítkové soustavy poněkud jiný.

Aritmetika celých čísel

Nejprve si uvědomme, že kdyby chyběla některá z námi používaných číslic, že by se nám nepodařilo všechna čísla vyjádřit. Kdyby např. chyběla zmiňovaná nula, nešla by vyjádřit čísla 10, 20 atd. Stejné by to bylo při absenci jiných číslic.

Co kdyby ale byl vývoj takový, že by chyběla číslice 0, avšak místo ní by se vyvinula číslice A (s hodnotou 10)? Jak by se pak počítalo v poziční desítkové soustavě s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(=10)? V tom případě by nešlo vyjádřit číslo nula, ale další čísla by byla vyjádřena takto: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 2A, 31, 32, . . .

A jak by vypadaly jednoduché operace s těmito čísly? Vyzkoušejme je na několika příkladech:

12 + 15 = 27
12 + 18 = 3A
3A + 5A = 9A
AA + 19A = 2AA

47 – 17 = 2A
6A – 2A = 3A
A23 – 6A1 = 322
314 – 1A5 = A

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot\, 14 \\ \hline 5A \\ 15 \\ \hline 1AA \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2A \\ \cdot\, A3 \\ \hline 8A \\ 29A \\ \hline 2A8A \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4AA : 17 = 2A \\ \;16A \end{array}$$

Při řešení těchto příkladů jsme se mohli přesvědčit, že i ty pro nás nejjednodušší aritmetické operace při změně jedné číslice tvoří značné problémy. Pro rychlé zvládnutí operací by bylo nutné naučit se tabulky s malou sčítalkou a násobilkou s novými číslicemi tak, jak se to učíme v mládí. Budeme-li nyní provádět již zmíněné operace s čísly podle těchto tabulek, jasně se přesvědčíme, že se nám počítání s novými číslicemi jeví jako jednodušší. V následujících tabulkách je tato sčítalka a násobilka uvedena:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	11
2	3	4	5	6	7	8	9	A	11	12
3	4	5	6	7	8	9	A	11	12	13
4	5	6	7	8	9	A	11	12	13	14
5	6	7	8	9	A	11	12	13	14	15
6	7	8	9	A	11	12	13	14	15	16
7	8	9	A	11	12	13	14	15	16	17
8	9	A	11	12	13	14	15	16	17	18
9	A	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	2	4	6	8	A	12	14	16	18	1A
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2A
4	4	8	12	16	1A	24	28	32	36	3A
5	5	A	15	1A	25	2A	35	3A	45	4A
6	6	12	18	24	2A	36	42	48	54	5A
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	6A
8	8	16	24	32	3A	48	56	64	72	7A
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	8A
A	A	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8A	9A

Postupme dále a zaměňme vedle číslice 0 ještě i číslici 1 číslicemi A(=10) a B(=11). Číslicemi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B se pak vyjádří přirozená čísla takto: *, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 2A, 2B, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 3A, 3B, 42, 43, . . . , 99, 9A, 9B, A2, A3, A4, . . . , AB, B2, B3, . . . , B9, BA, BB, *, *, *, . . . , 222, 223, . . . Hvězdičky znamenají, že příslušná čísla nelze danými číslicemi vyjádřit.

I zde vypočítáme několik příkladů s operací sčítání:

55 + 16 = 6B
2B + B8 = nelze sečíst (bylo by to 149)

A6 + B4 = nelze sečíst (bylo by to 1BA)

Opět jsme se přesvědčili o obtížnosti provádět jednoduché operace s neobvyklými číslicemi. A opět nám mohou pomoci tabulky pro malou sčítalku a násobilku:

+	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	4	5	6	7	8	9	A	B	*	*
3	5	6	7	8	9	A	B	*	*	*
4	6	7	8	9	A	B	*	*	*	*
5	7	8	9	A	B	*	*	*	*	*
6	8	9	A	B	*	*	*	*	*	*
7	9	A	B	*	*	*	*	*	*	*
8	A	B	*	*	*	*	*	*	*	*
9	B	*	*	*	*	*	*	*	*	*
A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
B	*	*	*	*	*	*	*	*	*	22

.	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	4	6	8	A	*	*	*	*	*	22
3	6	9	*	*	*	*	24	27	2A	33
4	8	*	*	*	24	28	32	36	3A	44
5	A	*	*	25	2A	35	3A	45	4A	55
6	*	*	24	2A	36	42	48	54	5A	66
7	*	*	28	35	42	49	56	63	6A	77
8	*	24	32	3A	48	56	64	72	7A	88
9	*	27	36	45	54	63	72	7B	8A	99
A	*	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8A	9A	AA
B	22	33	44	55	66	77	88	99	AA	BB

Kdybychom zaměňovali další číslice, situace by byla stále složitější a stále více čísel by nešlo novými číslicemi vyjádřit. A to nás přesvědčuje o dokonalosti naší poziční desítkové soustavy.

Aritmetika desetinných čísel

Problematika vyjadřování desetinných čísel jinými číslicemi a jejich aritmetika je obdobná jako problematika počítání s celými čísly. Ukažme si to na několika příkladech:

2,4A (= 2,50) 2,4B (= 2,51) 2,A3 (= 3,03)

17,26 + 5,74 = 22,9A 63B,59 – 35A,AB = 27A,48

Závěr

Počítání v poziční desítkové soustavě s jinými číslicemi než s těmi, na něž jsme zvyklí, buď vůbec není možné, nebo je pro nás velmi nezvyklé. Přitom si však zajisté uvědomíme, že postupným procvičováním operací s neobvyklými číslicemi bychom stále více tento problém uchopovali. A dokonce kdybychom se učili takto počítat od mládí, zdálo by se nám naopak složité počítat tak, jak jsme zvyklí nyní.

Literatura

Zhouf, J. , Zápis čísel více číslicemi. In Calábek, P. a kol. (eds.), *Makos 2002, sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty*, UP Olomouc, 2003, s. 91–95.

Pracovní dílny

Integrujeme v matematike ZŠ (ITV ako most pri prechode žiakov z 1. na 2. stupeň ZŠ)

Jaroslava Brincková[1]

Anotácia: V pokusoch i integrovanú tematickú výučbu (ITV) prírodných vied možno registrovať dva smery:

- Ponechať klasickú štruktúru vyučovacích predmetov odvodených od prírodných vied. Tento model doplniť integrovaným predmetom s názvom Prírodoveda (Prírodné vedy), ktorý by nadväzoval na poznatky žiakov z 1. stupňa ZŠ v jednotlivých predmetoch. V podstate by išlo o spájanie poznatkov žiakov, ktoré v predchádzajúcom školení vnímali izolovane.
- Integrovať celú základnú výučbu klasických predmetov (matematika, fyzika, chémia, biológia, geografia) do väčšieho vyučovacieho predmetu s názvom Prírodoveda (Nauka o prírodných vedách). Matematika a informatika v tomto modeli preberá úlohu prostriedku spracovania informácií.

Prvý model je jednoduchší, vyžaduje menej zmien a zásahov do učebných plánov a má väčší priestor pre realizáciu. Niektoré možné cesty integrácie vedú cez: spoločné pojmy prírodných vied, životné prostredie a jeho súčasti, metodológiu prírodných vied, výber niektorej disciplíny ako dominujúcej, selekciu významných procesov v prírode. Úplná integrácia učiva umožňuje učiteľom objaviť značné časové rezervy v učebnom pláne a umožniť aj využitie metód a postupov nácviku sociálnych zručností a práce v skupine, ktoré sú prípravou na skupinovú prácu a uplatnenie detí v budúcom pracovnom procese. Táto forma spolupráce obohacuje efekt vyučovania tým, že mnohé poznatky si žiaci osvojujú a upevňujú vzájomnou komunikáciou. V príprave učiteľov matematiky tvoríme matematické slovné úlohy umožňujúce integrovať poznatky prírodovedných a humanitných predmetov.

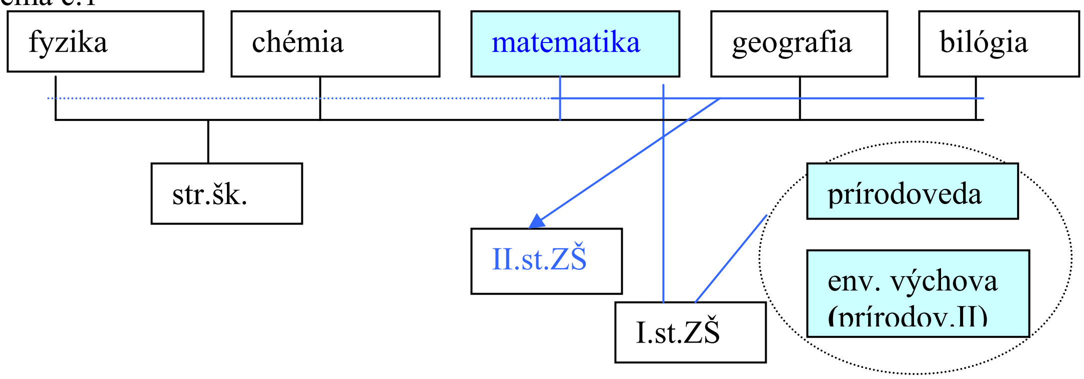
Na úvod

Otázky koordinácie a integrácie vyučovania prírodovedných predmetov sa stávajú dôležitým prvkom modernej prestavby nášho školstva. Je nepochybné, že lepšia koordinácia prírodovedných predmetov prispieva k skvalitneniu vyučovania. Časopis Science

[1]*Katedra matematiky PdF UMB, Banská Bystrica, jbrinckova@pdf.umb.sk*

Classification Official Journal of the European Communities 1991 No 1./p.23 uvádza pre prírodovedné vzdelanie nasledujúcu schematikú klasifikáciu:

Schéma č.1



Otvoreným problémom zostáva určiť základné východiskové princípy koordinácie a integrácie, rozriešiť problém, kde a za akých podmienok pristúpiť k vytvoreniu integrovaných predmetov, ako včleniť takýto predmet do súčasnej sústavy vyučovacích predmetov, ako organizačne zabezpečiť realizáciu predmetu, vytvorenie obsahu, prípravu učiteľov, učebníc a pod. Snahy zaviesť do škôl vyučovací predmet Prírodoveda (Prírodné vedy) nie sú nové. V matematike sa v minulosti tieto snahy prejavili aj pri tvorbe matematickej čítanky, ktorá sa na školách v Rakúsko – Uhorsku objavila okolo roku 1870. Je to vlastne čítanie pre žiakov spojené s riešením matematických úloh, prevažne slovných problémov (Kováčik, 2000). Na prvom stupni ZŠ sa úspešne vyučuje aj elementárna prírodoveda a ako predmet a sa osvedčila. V pokusoch i integrovanú výučbu prírodných vied možno registrovať dva smery.

1. Ponechať klasickú štruktúru vyučovacích predmetov odvodených od prírodných vied. Tento model doplniť integrovaným predmetom s názvom Prírodoveda (Prírodné vedy), ktorý by nadväzoval na poznatky žiakov z jednotlivých predmetov. V podstate by išlo o spájanie poznatkov žiakov, ktoré v predchádzajúcom školení vnímali izolovane.
2. Integrovať celú základnú výučbu klasických predmetov (matematika, fyzika, chémia, biológia, geografia) do väčšieho vyučovacieho predmetu s názvom Prírodoveda (Nauka o prírodných vedách).

Model a) je jednoduchší, vyžaduje menej zmien a zásahov do učebných plánov a má väčší priestor pre realizáciu. Tomuto čiastočne zodpovedá aj zavedenie predmetu Prírodoveda v 9. ročníku ZŠ.

1. Integrujúci faktor – VESMÍR

Integračné snahy v prírodných vedách sa premietli vo vzdelávacích systémoch niektorých krajín do projektov integrovanej výučby, ktoré zahŕňajú predovšetkým nižšie ročník základnej školy, ale často aj stredné školy a prípravu budúcich učiteľov. K stanoveniu obsahu a časovej postupnosti učiva sa pristupuje v jednotlivých vzdelávacích projektoch rôznymi cestami,ktoré sa spravidla neopakujú a každá obsahuje prvky zvláštnosti a výnimočnosti. K faktorom, ktoré najviac ovplyvňujú obsahovú náplň učiva patrí predovšetkým voľba integrujúceho faktora.

Niektoré možné cesty integrácie:

- cez spoločné pojmy prírodných vied
- cez životné prostredie a jeho súčasti
- cez metodológiu prírodných vied
- výberom niektorej disciplíny ako dominujúcej
- selekciou významných procesov v. prírode.

V učiteľskej obci pre 2. a 3. stupeň školy vyvoláva diskusiu otázka hlavného integrujúceho predmetu. Má to byť fyzika, ekológia, environment, či matematika? Katedra fyziky FPV UMB v Banskej Bystrici vypracovalav rámci projektu Tempus návrh na integráciu prírodovedného učiva v 9. ročníku ZŠ a zaradila do študijného programu učiteľov pre 5.–12. ročník voliteľný predmet Prírodoveda. Pri výbere obsahu predmetu zohrával významnú úlohu aj adresát, ktorému sú texty určené. Vypracované nové texty sú vyvážené tak, aby boli vhodné pre všetkých učiteľov prírodovedných predmetov. Túto požiadavku pomohla splniť aj voľba integrujúceho faktora – *vesmíru*, ktorý je vlastne našim ekologickým prostredím a akceptovanie evolúcie vesmíru ako modelu pre vytváranie časového a obsahového členenia predmetu (Holec, 1998, s. 5). Ekológovia navrhujú ako integrujúci faktor ekologické princípy, predovšetkým princíp jednoty živého s neživým. V tom má integrácia prírodovedného vzdelávania hlboký poznávací zmysel a dlhodobo pozitívny praktický význam.

Integrujúci faktor *vesmír* ako východisko pre štruktualizáciu predmetu umožňuje pri vysvetľovaní postupovať od jednoduchšieho k zložitejšiemu. Preto „pochopiteľný svet“ značí, že vieme vysvetliť, prečo niečo je práve také ako je, prečo nemá iné vlastnosti a prečo sa čosi deje práve tak a nie naopak. Ak sa neuspokojíme len s kvalitatívnymi odpoveďami, ale radi by sme poznali aj kvantitatívnu stránku všetkého diania vo svete, tak ako uvádza P. Klenovčan (2000), nevyhnutne potrebujeme vhodný „jazyk“, ktorý nám poznané zákonitosti sprostredkuje v kvantitatívnej podobe. Týmto *jazykom je matematika*. Nevyžaduje znalosť konkrétneho významu používaných pojmov, ale len ich kvantitu. Pre matematiku nie je dôležité, či skúmame kamene, jablká, zvieratá alebo ľudí, ale iba ich počet. Matematika teda nerozlišuje predmet skúmania tej – ktorej vedy, ale všetkým poskytuje rovnaký formalizmus na „spracovanie“ údajov. Je preto prirodzeným a veľmi účinným integračným činiteľom. Predstavuje najúspornejší spôsob generovania a sprostredkovania informácií, preto by sa jej malo v procese rozvíjania integračných tendencií vo vyučovaní venovať dostatok pozornosti.

Prax si vyžaduje rôzne kvantifikátory, ako sú prirodzené čísla, zlomky, komplexné čísla a na vyššej úrovni aj také matematické nástroje, ako funkcie, množiny, grupy, vektory, tenzory, atď. Práca s nimi si vyžaduje časovo náročné osvojenie poznatkov, zručností a schopností vykonávať rozličné operácie. Skúmanie vzťahov v rámci matematických štruktúr viedlo k tomu, že sa matematika postupne vyprofilovala ako zložitá vedná disciplína, ktorá si plným právom nárokuje na určitú autonómiu, čiže rozvoj na vlastnom „piesočku“, a to nezávisle od toho, či takto získané výsledky možno bezprostredne aplikovať, alebo nie.

Pri kvantifikácii rozličných v praxi používaných pojmov sa stretávame s viacerými problémami. Možnosť vyjadrenia číslom si vyžaduje definíciu vhodnej jednotky. Na definícii sa možno dohodnúť, ale nie vždy sa počítalo s tým, že príslušná jednotka by mohla závisieť aj od okolností merania. Výrazne sa to prejavilo v súvislosti so zvolenými jednotkami na meranie hmotnosti, dĺžky a času, čo potom viedlo k známym tvrdeniam, že hmotnosť telies závisí od ich pohybu a že pohybom sa deformuje aj samotný priestor a čas. Ako základné integrujúce prvky vesmíru z aspektu Prírodovedy a ich vplyv na Zemi určujeme preto čas, priestor, hmotu, energiu a informáciu. Vzťahy k jednotlivým predmetom môžeme znázorniť nasledujúcou schémou:

Schéma č.2:

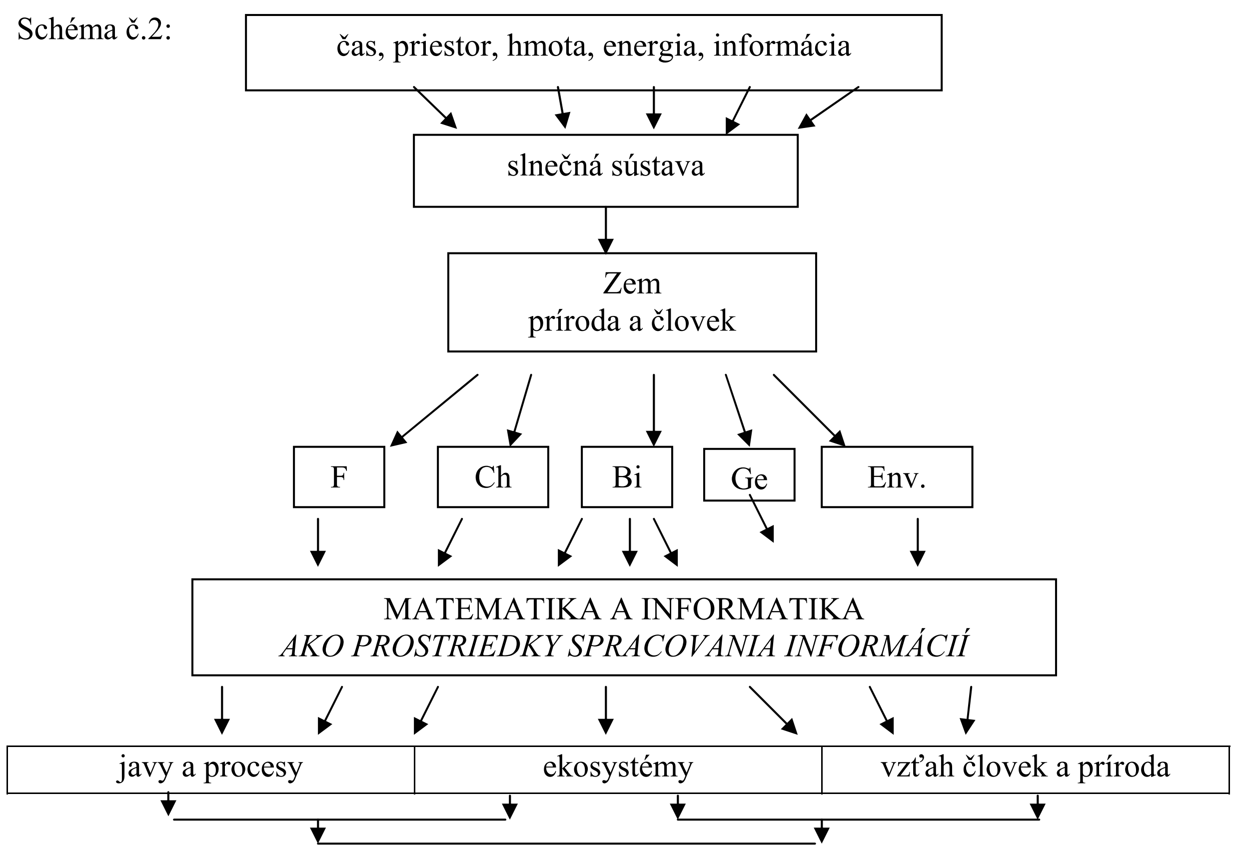
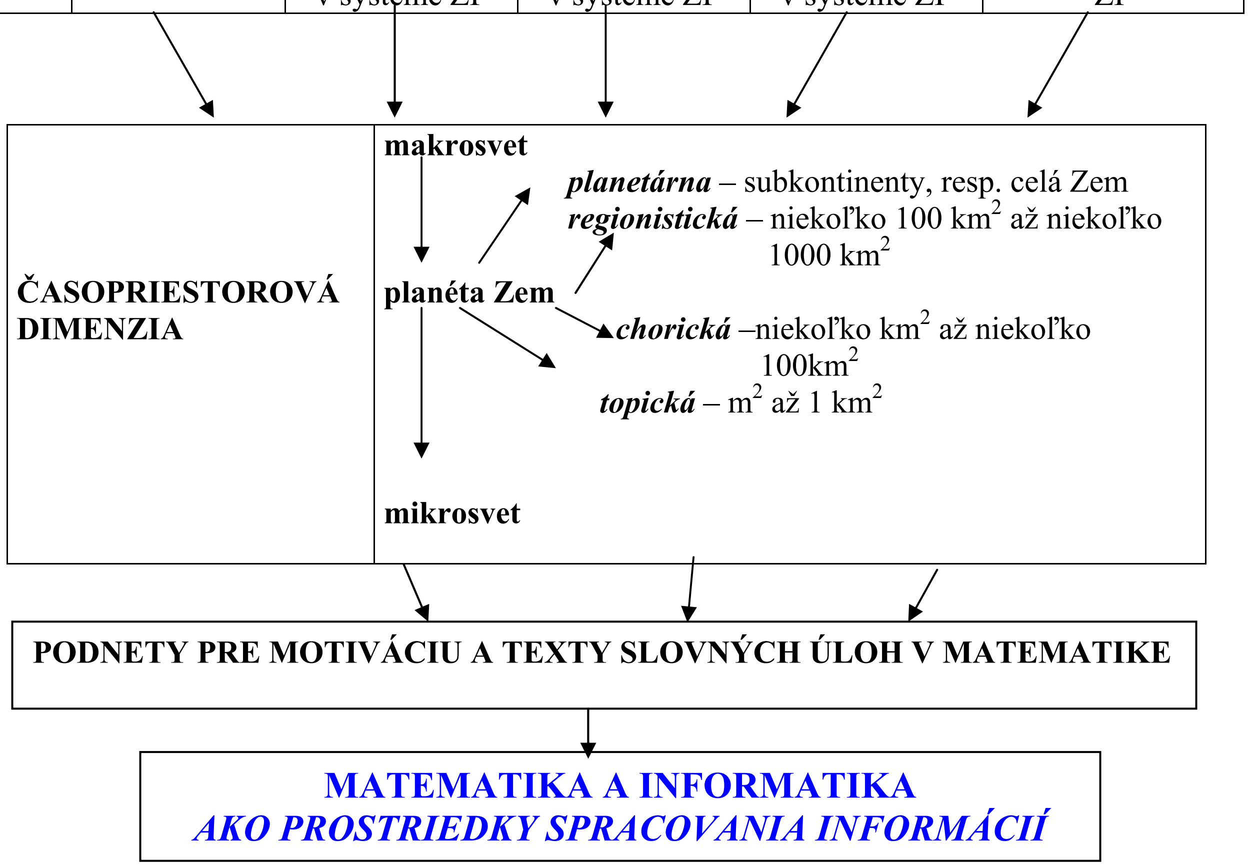


Schéma 3. Vybrané prvky prírodného prostredia a možnosti ich integrácie

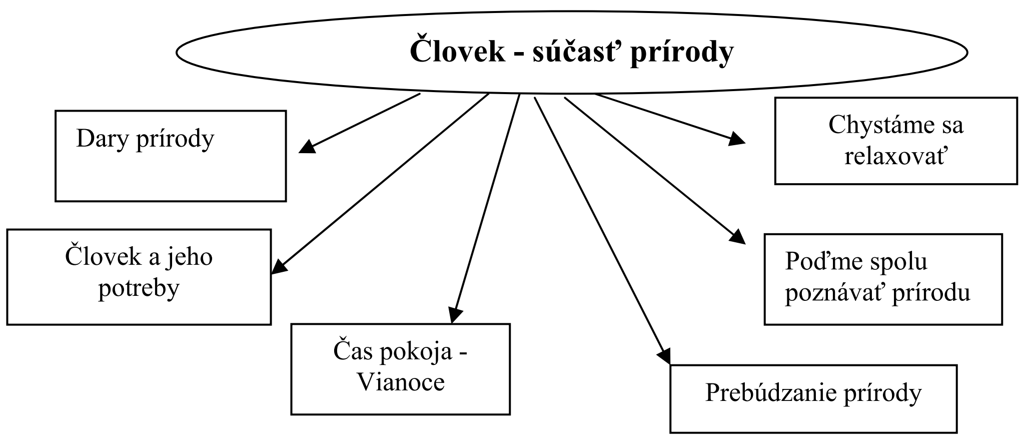
	SLNEČNÉ ŽIARENIE	VZDUCH	VODA	PÔDA	RASTLINSTVO A ŽIVOČÍŠSTVO
F:	optika	prúdenie	hydraulika	fyzika pôdy	fyzika v živých organizmoch
Ch:	chemické zmeny v dôsledku slneč. žiarenia	zloženie vzduchu, analytické vlastnosti vzduchu	voda ako chemická zlúčenina, anal.vlastnosti vody	chémia pôdy	chémia v živých organizmoch
Bi:	význam pre živé organizmy	vzduch a živé organizmy	voda v živých organizmoch	pôda a živý organizmus	botanický a živočíšny systém
Ge:	klinické pásma	klimatológia	voda v krajine a jej využitie	rozšírenie pôd a ich vlastností z hľadiska produkcie	rozšírenie živých organizmov
Env:	zmeny klímy	vzduch a jeho kvalita v systéme ŽP	voda a jej kvalita v systéme ŽP	pôda a jej kvalita v systéme ŽP	rastl. a živoč. ako indikátory kvality ŽP



Plná integrácia učiva v škole predpokladá rozpracovať obsah učiva v škole tak, aby celoročná téma školy a vybrané podtémy umožňovali učiteľom vo všetkých ročníkoch a predmetoch využiť nové vedomosti na rozvoj osobnosti žiaka. Celoročná téma je stanovená na zjednocujúcom pojme, napríklad v 7. ročníku ZŠ téma Človek – súčasť prírody skúma vzájomné závislosti okolo nás a v nás, (ako nám určité vedomosti pomáhajú chápať svet). Má organizujúci aspekt: cesty – súvislosti, poznanie a ochrana životného prostredia. Má logické zdôvodnenie: všetko so všetkým súvisí. Minulosť, prítomnosť, budúcnosť sú pojaté dynamicky. Vedomosti idú spolu s uvedomením si seba samého.

Prírodu a človeka v nej môžeme skúmať vo vyšších ročníkoch ZŠ aj v integrácii poznania v rámci prírodného prostredia:

Schéma č. 4. Príklad celoročnej témy realizovanej na cvičnej ZŠ



Takýto rámcový plán školy umožňuje v jednotlivých ročníkoch na každý týždeň vo všetkých predmetoch spracovať vyučovací obsah tak, aby texty úloh a bádateľské práce spolu s pojmami preberanými podľa učebných osnov sa stali pre žiakov zmysluplné. Táto neľahká úloha v matematike predpokladá, že učitelia sú dostatočne oboznámení s obsahom učiva matematiky v jednotlivých ročníkoch školy. Poznajú logické súvislosti medzi jednotlivými zložkami daného budovaného pojmu a tiež poznajú obsah učiva ostatných predmetov vyučovaných na ZŠ. Ľahšie sa jej zmocnia študenti 1. stupňa ZŠ.

Pri tvorbe podtém sme v príprave učiteľstva matematiky pre ZŠ volili integrujúce učivo mesiaca a týždňa matematiku, slovenský jazyk, zemepis a prírodopis. Zostavili sme kľúčové pojmy, fakty a zručnosti jednotlivých predmetov, ktoré si má žiak v plnom rozsahu osvojiť na veku primeranej úrovni. V 7. ročníku ZŠ v téme „Prebúdzanie prírody" bol na vybraný človek na potulkách Amerikou. Tému mesiaca sme rozdelili do štyroch týždňov: 1. Život je mozaika, 2. Hľadáme stredy, 3. Osi v nás a mimo nás, 4. Liečia nás a nie sú lekári.

Záver

Úplná integrácia učiva umožňuje učiteľom pri práci v predmetovej komisii objaviť značné časové rezervy v učebnom pláne. Ponúka aj využitie metód a postupov nácviku sociálnych zručností a práce v skupine, ktoré sú prípravou na skupinovú prácu a uplatnenie žiakov v budúcom pracovnom procese. Táto forma spolupráce obohacuje efekt vyučovania tým, že mnohé poznatky si žiaci osvojujú a upevňujú vzájomnou komunikáciou. V matematike je táto integrácia prínosom predovšetkým pri tvorbe motivačného rámca vyučovacej hodiny a pri tvorbe textov slovných úloh z prostredia, ktoré je žiakom známe a veku primerané. Pracovná dielňa bola zameraná na nácvik tvorby pojmových máp a slovných úloh s využitím medzipredmetových javov. Z jej záverov vyplynulo, že za najrealizovateľnejší postup v bežnom školskom prostredí pri voľbe aktivít sprístupňujúcich matematické učivo považujeme v súčasnosti postup, v ktorom je integrované vyučovanie významným doplnkom, umožňujúcim syntézu nadobudnutých poznatkov o aplikácii učiva v praxi, ale nie je len jedinou formou vyučovania.

Literatura

Holec, S.: Prírodoveda pre budúcich učiteľov. In: *Acta Didactica 2: Koncepčné otázky integrovaného prírodovedného vzdelávania na Slovensku*. Nitra, FPV UKF 1998

Klenovčan, P.: Autentické učenie v matematike. In: *Zborník príspevkov z konferencie na tému: Autentické vyučovanie a využtie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní matematiky*. Banská Bystrica, PdF UMB 2000, s. 47–52

Kováčik, Š.: Matematika na 1. stupni ZŠ a možnosti integrovaného vyučovania. In: *Zborník príspevkov z konferencie na tému: Autentické vyučovanie a využtie medzipredmetových vzťahov vo vyučovaní matematiky.* Banská Bystrica, PdF UMB 2000, s. 53–56

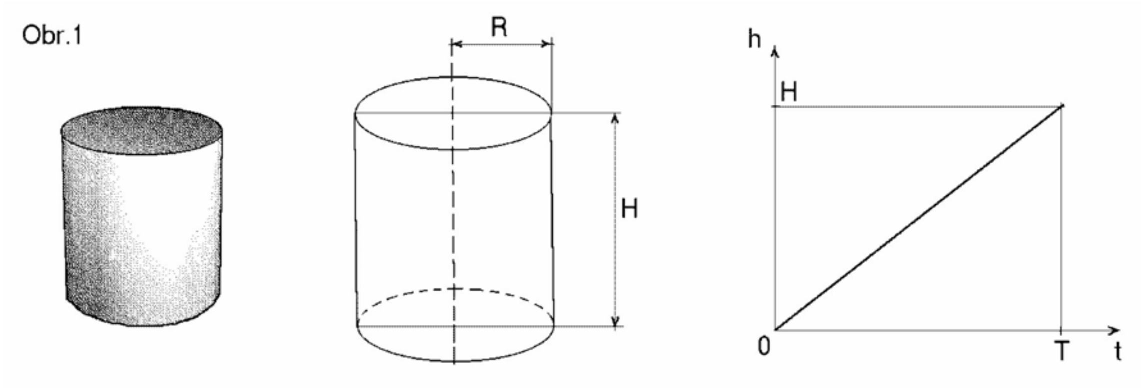
Příspěvek k rozvoji funkčního myšlení studentů

Petr Eisenmann[1]

Tento příspěvek si klade za cíl poskytnout materiál, který může ve výuce matematiky sloužit k motivaci, ilustraci i hlubšímu porozumění základním pojmům a idejím diferenciálního a integrálního počtu a rozvoji funkčního myšlení. Podnětem k sestavení tohoto celku byla zmínka o kreslení a interpretaci grafů reálných funkcí ve [Schmidt 1993].

[1] *PF UJEP, Ústí nad Labem, eisenmannp@pf.ujep.cz*

Výchozí situací je naplňování nádoby tekutinou. Na úvod uvažujme těleso tvaru **rotačního válce** s poloměrem podstavy R a výškou H. Nechme do této nádoby shora přitékat konstantním přítokem Q kapalinu a ptejme se: *Jak vypadá závislost výšky hladiny na čase?*



Je zřejmé, že se jedná o lineární funkci (viz obr. 1), jejíž graf prochází počátkem soustavy souřadnic. Nechť se válec naplní za čas t do výšky h. Objem $V(h)$ této části je zřejmě roven

$$V(h) = \pi R^2 h = Qt.$$

Z této rovnice získáváme hledanou lineární funkci

$$h(t) = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot t,$$

která splňuje jak uvedenou počáteční podmínku $h(0)= 0$, tak i fakt, že v čase naplnění celého válce

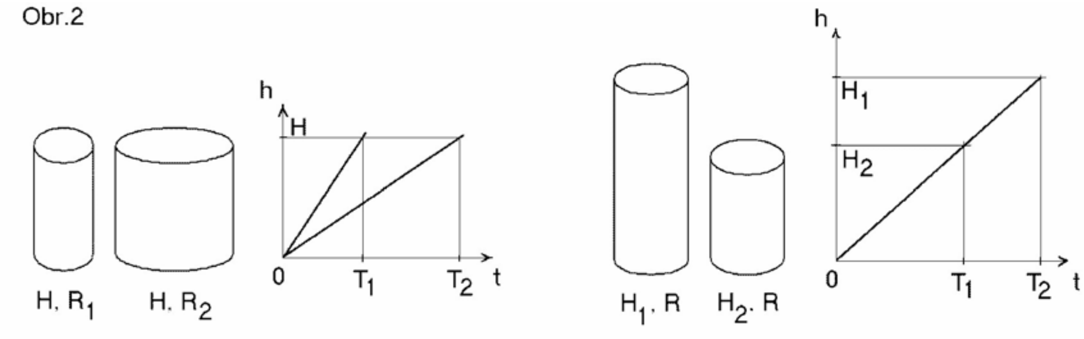
$$T = \frac{\pi R^2 H}{Q}$$

platí

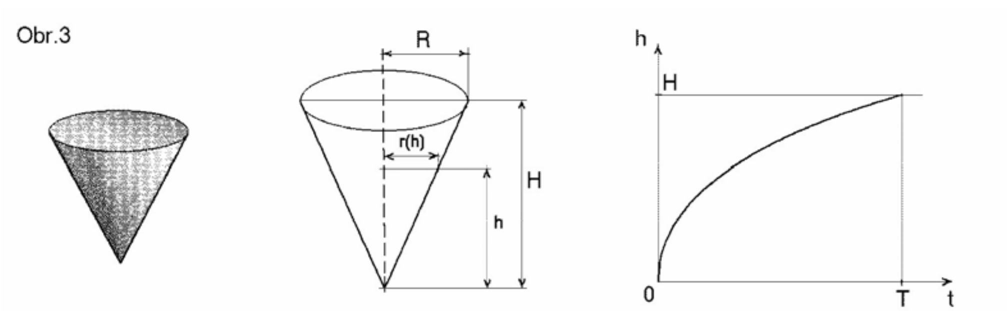
$$h(T) = H.$$

Za pozornost stojí, že podíl objemového přítoku Q a obsahu kolmého průřezu πR^2 vyjadřuje rychlost zvyšování hladiny, která je v tomto případě konstantní. Definičním oborem funkce $h(t)$ je uzavřený interval $\langle 0,T\rangle$, oborem hodnot uzavřený interval $\langle 0,H\rangle$.

Z metodického hlediska má význam nechat studenty nakreslit do jednoho souřadnicového systému obrázky grafů funkcí $h(t)$ pro dva válce lišící se jedním parametrem (viz obr. 2).



Obraťme nyní pozornost k **rotačnímu kuželi** (viz obr. 3). Jak bude zde vypadat průběh naplňování? Jaká elementární funkce jej bude popisovat?



Zřejmě platí

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(r(h))^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(h \cdot \frac{R}{H}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2} \cdot h^3.$$

Z rovnosti

$$V(h) = Q \cdot t$$

dostáváme hledanou funkci

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3H^2Q}{\pi R^2} \cdot t}$$

vyjadřující závislost výšky hladiny h na čase t. Zřejmě i ona vyhovuje okrajovým podmínkám h(0) = 0 a $h(T) = H$, kde doba naplnění je

$$T = \frac{\pi R^2 H}{3Q}.$$

Podle očekávání je to funkce rostoucí. Nemělo by nás překvapit ani to, že je konkávní - kužel takto na špičku postavený se přece s rostoucí výškou rozšiřuje a hladina tedy bude stoupat stále pomaleji. Takové úvahy mohou pozitivně přispívat k rozvoji funkčního myšlení a studenti by měli mít možnost je ve výuce provádět.

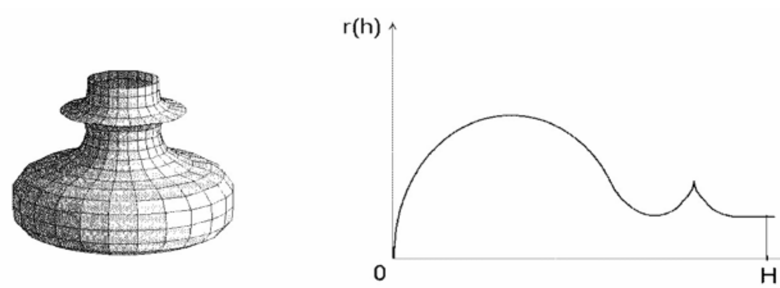
Zastavme se nyní na okamžik u chování této funkce v okolí počátku. Jakou tečnu má funkce $h(t)$ v tomto bodě zprava? Z obrázku 3 je zřejmé, že jí je svislá osa h. Ano, vždyť korektně řečeno, platí $h'_+(0) = \infty$. Tuto úvahu lze využít ve výuce k propedeutice infinitezimálního počtu. Nevlastní derivace funkce $h(t)$ v okolí počátku přece odpovídá tomu, že rychlost zvyšování hladiny je v „nekonečně malé špičce" kužele nekonečné velká.

I zde lze opět kreslit do jednoho systému obrázky grafů funkcí $h(t)$ pro různé kužely, komolý kužel, válec a „vepsaný kužel" atd.

Čtenář už jistě cítí, že čas nazrál pro obecné řešení celého problému.

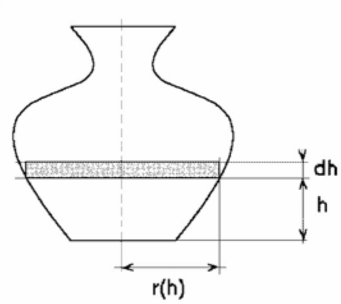
Nechť tedy je $r(h)$ spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle 0,H \rangle$, která je na intervalu $(0, H)$ kladná. Nazývejme ji nadále **tvarovou funkcí**. Rotací grafu této funkce kolem osy nezávisle proměnné h vznikne rotační těleso s objemem QT a výškou H (viz obr. 4).

Obr.4



Dojde-li při naplňování tohoto tělesa konstantním přítokem kapaliny Q ve výšce h za elementární čas *dt* k elementárnímu přírůstku objemu *Qdt* (viz obr. 5), je možné jej aproximovat objemem elementárního válečku o poloměru $r(h)$ a výšce *dh*.

Obr.5



Z rovnice $Qdt = \pi r^2(h)dh$(1) dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{\pi r^2(h)}, \tag{1}$$

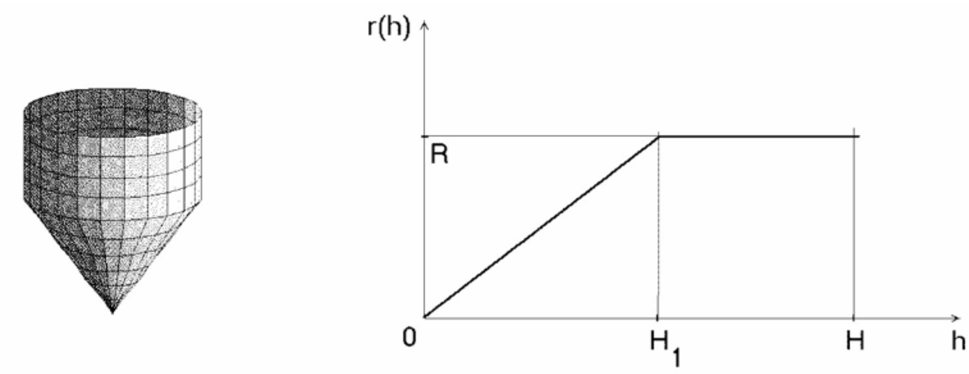
jejímž jedním partikulárním řešením je hledaná funkce $h(t)$, kterou budeme nazývat **výšková naplňovací funkce**. K ní inverzní funkcí na intervalu $\langle 0,H \rangle$ je tzv. **časová naplňovací funkce** $t(h)$, která udává, za jaký čas se těleso naplní do výšky h.

Čtenář si může sám vyzkoušet, že diferenciální rovnice (1) vede u již elementárním způsobem vyřešeného válce a kužele ke správným výsledkům.

Jaké vlastnosti má naplňovací funkce obecně? Vzhledem k tomu, že se jedná o navzájem inverzní funkce, budeme se nadále vyjadřovat například pouze o výškové naplňovací funkci $h\ (t)$.

Za prvé: Funkce h (t) je *diferencovatelná*, tedy i *spojitá*.

Obr.7



Tento závěr plyne ze spojitosti funkce na pravé straně rovnice (1) a tedy i spojitosti funkce $h'(t)$. Podívejme se v této souvislosti na těleso z obrázku 7. Tvarová funkce $r(h)$ je pro studenty cenným příkladem neelementární funkce

$$r(h) = \frac{R}{H_1} \cdot h, \qquad \text{pro } h \in \langle 0, H_1),$$
$$r(h) = R, \qquad \text{pro } h \in \langle H_1, H \rangle.$$

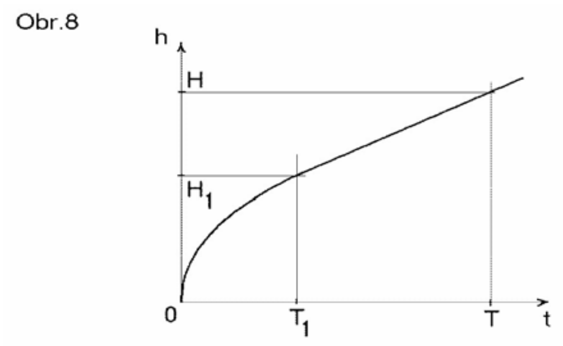
Těleso samo je složeno z kužele o výšce H_1 a na něj navazujícího válce o poloměru R. Z hlediska rozvoje funkčního myšlení bude přínosné, zkusí-li studenti odhadnout tvar naplňovací funkce ještě před výpočtem. I funkce $h(t)$ bude zřejmé „složená“ z již výše určené naplňovací funkce pro samotný kužel a válec. Vzhledem k tomu, že v čase naplnění kužele T_1 je hladina ve výšce H_1, je třeba umístit počátek grafu lineární naplňovací funkce pro navazující válec do bodu $[T_1, H_1]$. Funkce $h(t)$ bude rovněž neelementární, ale diferencovatelná na celém intervalu $(0, H)$ (viz obr. 8).

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3H_1^2Q}{\pi R^2} \cdot t}, \qquad \text{pro } t \in \langle 0, T_1) \,,$$

$$h(t) = H_1 + \frac{Q}{\pi R^2}(t - \frac{\pi R^2 H_1}{3Q}), \qquad \text{pro } t \in \langle T_1, T \rangle \,,$$

kde

$$T_1 = \frac{\pi R^2 H_1}{3Q} \quad \text{a} \quad T = \frac{\pi R^2 H_1}{3Q} + \frac{\pi R^2 (H - H_1)}{Q}.$$



Bude užitečné, ověří-li si studenti, že funkce $h(t)$ splňuje opravdu vše, co od ní očekáváme. Platí:

$$h(0) = 0 \,, h(T_1) = H_1 \,, h(T) = H \,, \lim_{t \to T_1^-} h(t) = H_1.$$

Rovnost

$$h'_-(T_1) = h'_+(T_1) = \frac{Q}{\pi R^2}$$

dále potvrzuje skutečnost obsaženou v rovnici (1), že totiž derivace výškové naplňovací funkce $h(t)$ (rychlost přibývání hladiny) závisí pouze na poloměru tělesa v dané výšce $r(h)$, tedy možná překvapivé zjištění, že kruhová hladina daného poloměru přibývá stejně rychle v tělesech libovolných tvarů. Táž rovnost vyjadřující diferencovatelnost funkce $h(t)$ v bodě T_1 splňuje naše očekávání: Při spojité změně poloměru se i rychlost zvyšování hladiny mění spojitě.

Za druhé: Funkce $h(t)$ je *rostoucí*. Plyne to z názoru i z rovnice (1), jejíž pravá strana je na intervalu $(0, H\ )$ větší než nula. Derivace výškové naplňovací funkce $h(t)$ je tedy na intervalu $(0,T\ )$ kladná a funkce $h(t)$ rostoucí.

Třetí a čtvrtý závěr lze vyvodit z rovnice

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{2Q^2}{\pi^2}\frac{1}{r^5(h)}\frac{dr}{dh},$$

kterou obdržíme po zderivování rovnice (1) podle času. Protože znaménko 2. derivace výškové naplňovací funkce podle času ovlivňuje pouze znaménko derivace tvarové funkce podle výšky, lze vyslovit následující tvrzení.

Je-li tvarová funkce r(h) *rostoucí (resp. klesající), je výšková naplňovací funkce h*(t) *konkávní (resp. konvexní).*

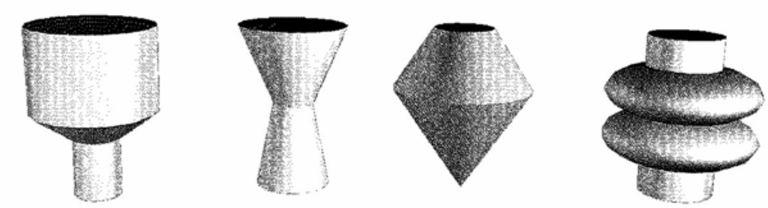
Tato věta je v souladu s naším očekáváním. Jestliže se těleso při naplňování rozšiřuje ($r(h)$ je rostoucí), rychlost zvyšování hladiny se zmenšuje ($h(t)$ je konkávní). Jestliže se naopak se zvyšující hladinou těleso zužuje (klesající $r(h)$), bude hladina stoupat stále rychleji (konvexní $h(t)$).

Přímým důsledkem této věty je další tvrzení:

Má-li tvarová funkce r (h) *ve výšce* h_0 *lokální extrém, má časová naplňovací funkce t* (h) *v této výšce* h_0 *inflexní bod.*

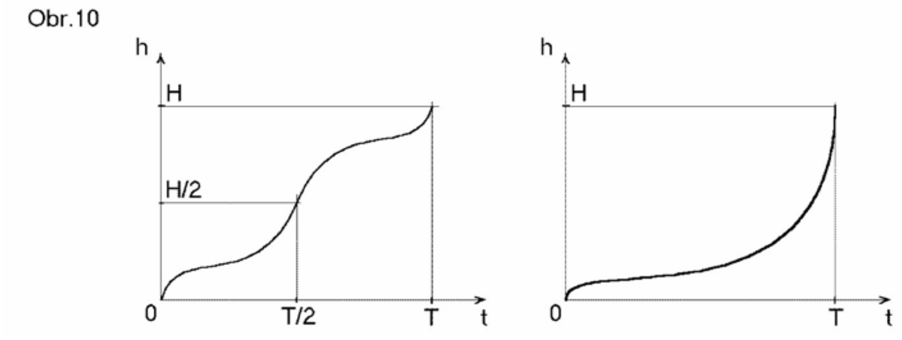
Nakreslete si v této souvislosti graf výškové naplňovací funkce $h(t)$ u prostředních dvou těles z obrázku 9!

Obr. 9



Čtveřice právě uvedených vět nám umožňuje bez potíží načrtnout obrázky grafů naplňovacích funkcí u různých těles. Dovedete je nakreslit pro všechna tělesa z obrázku 9?

Pro rozvoj funkčního myšlení studentů bude přínosné, budeme-li postupovat i opačně, tj. načrtneme-li tvar těles, která mají naplňovací funkce tvaru zachyceného např. na obrázku 10.



Lze jistě vyvodit či z obrázků grafů vypozorovat celou řadu dalších souvislostí mezi vlastnostmi tvarové funkce $r(h)$ a chováním naplňovacích funkcí $h(t)$ a $t(h)$. Je například patrné, že symetrická tělesa podle roviny kolmé na rotační osu mají středově souměrnou naplňovací funkci.

Závěrem chci vyjádřit přesvědčení, že prezentace uvedeného problému ve výuce může přispět k motivaci či hlubšímu pochopení pojmů *funkce*, *inverzní funkce*, *konvexní* a *konkávní funkce*, *spojitost* a *diferencovatelnost funkce*, *lokální extrém*, *parametrický systém funkcí*. Výhodou je i to, že se dá prezentovat v téměř libovolné šíři – přes pouhé intuitivní kreslení obrázků grafů navzájem si odpovídajících naplňovacích a tvarových funkcí až po vytváření a dokazování hypotéz u závěrem zmíněného (a jistě ne jedinečného) zobecnění. Navíc může pozitivně posloužit rozvoji funkčního myšlení studentů.

Literatura

Schmidt, G. : Kommt das auch in der Arbeit dran?, Der *Mathematikunterricht 39* (1993), 10 – 28

Projekty v hodinách matematiky (6.–9. ročník ZŠ)

Miroslav Hricz[1]

Na Dva dny s didaktikou matematiky 2003 jsem připravil dílnu „Projekty v hodinách matematiky“.

V rámci výuky matematiky se snažím maximálně využít žákovskou aktivitu, tvořivost i schopnost pracovat samostatně či spolupracovat ve skupině. To umožňuje mj. projektová metoda. Žákovský projekt dle [6]:

[1] *ZŠ U Santošky 1, Praha 5, www.santoska.cz, miroslav.hricz@santoska.cz, miroslav.hricz@centrum.cz*

- je část učiva, jejíž osvojení směřuje k dosažení určitého cíle
- se vyznačuje otevřeností v procesu učení
- je sestaven tak, že program učení není před prováděním projektu do všech jednotlivostí pevně stanoven, takže žáci nemohou projektem projít jako fixním a shora daným
- vzniká a je realizován na základě žákovské odpovědnosti
- souvisí s mimoškolní skutečností, vychází z prožitku žáků
- vede ke konkrétním výsledkům.

1. Projekt „Slovní úlohy"

Slovní úlohy provází žáky druhého stupně základní školy ve vyučování velmi často. Nacházejí je jednak v hodinách matematiky, ale též v jiných vyučovacích předmětech. Přestože mnohé tyto úlohy spojují běžný život s tím školním, bývají pro žáky velmi obtížné. Často už jen skutečnost, že žák má řešit slovní úlohu, může být stresující a příčinou neúspěchu. Toto byla východiska pro přípravu projektu „Slovní úlohy" pro žáky 7. třídy v roce 2002. Podobný projekt byl realizován již v lednu 2001 a je popsán v [8].

Cílem projektu je procvičení početních operací, které žáci již znají, ale také propedeutika učiva 8. ročníku – slovní úlohy řešené rovnicí. Projekt byl volen jako dlouhodobý (začátek dubna – pilotní úloha, v průběhu května – realizace dalších úloh). Řešení byla použita i v 8. ročníku při výuce kapitoly „slovní úlohy řešené rovnicí". Vhodné úlohy jsem vybíral z dostupné literatury, učebnic a pracovních sešitů. Projekt byl zadáván jako uzavřený. Úlohy ovšem umožňovaly žákovskou tvořivost a možnost vytvářet různé interpretace řešení.

Pilotní úloha byla řešena žáky jednotlivě, další část projektu řešili žáci ve skupinkách. Byl připraven následující harmonogram realizace:

- začátek dubna – pilotní úloha, řešena jednotlivě
- květen – řešení ve skupinách, sada prvních čtyř úloh
  – další úlohy, dle výběru žáků
- prezentace výsledků – před třídou, argumentace jednotlivých skupin
- k výsledkům projektu se vrátíme v 8. ročníku

Realizace projektu probíhala ve škole v pěti vyučovacích hodinách matematiky. Předpokladem bylo, že se žáci některými úlohami budou zabývat i doma (mimo školu). Pilotní úloha byla zadána ústně celé třídě a žáci se nad řešením zamýšleli samostatně. Další úlohy už řešili ve skupinkách.

V úterý 2. dubna 2002 jsem zadal následující pilotní úlohu: *Ve skladu bylo v pondělí ráno 25. března 2 850 beden zboží. Zboží se ze skladu vydává nejpozději ve 13 hodin. Zásoby se pravidelně doplňují vždy v úterý a ve čtvrtek ve 14 hodin. Kolik beden bude ve* *skladu dnes (úterý 2. dubna) v 16 hodin? Vypočítej průměrný denní stav zásob ve skladu ve 13 hodin. Znázorni pomocí vhodného diagramu.*

Žáci nejprve chvíli nechápavě kroutili hlavou, ale pak se pustili do řešení. Řešili samostatně. Jejich odpovědi na první otázku by se daly rozdělit do dvou skupin. Jedni říkali, že takový nesmysl nelze vůbec řešit, druzí přicházeli s konkrétními výsledky. Občas se objevili formulace „kdyby přivezli/odvezli určitý počet, pak. . . “ Vše jsme zapisovali na tabuli. Trvalo asi 10 minut, než někdo řekl, že je málo informací. Připustil jsem, že je to pravda. Další informace jsem byl ochoten poskytnout pouze jako odpověď na konkrétní dotaz. To už nebyl problém. Do konce hodiny bylo zadání na světě. Žáci dostali za úkol řešit doma. Za týden jsme v hodině matematiky věnovali řešením asi 10 minut. Vybraná řešení byla vystavena na nástěnkách.

Řešení dalších úloh probíhalo v květnu. Byla zdůrazněna důležitost myšlenkových pochodů a schopnosti vysvětlit je. Mimořádně nebyl kladen důraz na zápis. Žáci pracovali v maximálně čtyřčlenných skupinkách. Rozdělení do skupin nebylo nijak ovlivňováno a bylo plně v režii žáků. A nutno podotknout netrvalo snad ani minutu. Vzniklo sedm čtyřčlenných skupin. Vzhledem k časovým možnostem jsme věnovali řešení úloh 3 vyučovací hodiny. Proto se na některé úlohy nedostalo.

První hodinu dostali žáci list 1 se čtyřmi úlohami. Další hodinu dostali zbývající 3 listy (celkově 15 úloh). Nabízím stručný komentář k některým řešením.

Oráč s koňským povozem zorá pole za šest dní. Traktorista zorá totéž pole za dva dny.

a) Jaký zlomek pole zorá oráč za jeden den?

b) Jaký zlomek pole zorá traktorista za jeden den?

c) Jak velkou část pole zorají oba dva za jeden den?

d) Za jak dlouho zorají celé pole, jestliže budou orat současně?

Řešení a), b), c) pro většinu žáků nebyl větší problém. Výhodou byla práce ve skupinkách. Vždy byli schopni vysvětlit si a obhájit svá řešení. Někteří žáci měli problém s úlohou d). Po vysvětlení jedné ze skupin pochopili, že lze vyjít z výsledku úlohy c).

Ondra a Honza se při prázdninovém pobytu na chatě rozhodli, že půjdou do kina. Chata, v níž je ubytován Ondra, je 2 km od kina, Honza bydlí v chatě 3,5 km od kina. Protože Ondra má kino blíž, vyšel o 20 minut později než Honza. Vzdálenost ušel Ondra za 20 minut. Oba dorazili ke kinu současně.

a) Který z kamarádů šel rychleji?

b) Jakou rychlostí šel Honza?

Tato úloha byla pro žáky komplikovanější. Jako matoucí se ukázal údaj 20 minut, což vedlo často k odpovědi a): „Honza i Ondra šli stejně rychle“ nebo „Honza šel rychleji, protože ušel delší vzdálenost za stejnou dobu jako Ondra kratší vzdálenost“. Pouze jedna skupina měla správné řešení s jednoduchým zápisem:

> Honza . . . . . . 3,5 km za 40 minut
>
> Ondra . . . 2 km za 20 minut . . . 1km za 10 minut
>
> Honza by musel ujít vzdálenost za 35 minut, ušel ji za 40 minut. Proto šel Ondra rychleji.

> Nádoba s vodou měla hmotnost 11 kg. Po odlití poloviny množství vody byla její hmotnost 6 kg. Vypočtěte hmotnost prázdné nádoby.

Řešení úlohy bylo téměř bezproblémové. Pouze jedna skupina vznesla připomínku, že 6 kg není polovina z 11 kg.

> Vašek má v prasátku 46 mincí s hodnotami 2 Kč a 5 Kč. Celkem v něm má 149 Kč. Kolik kterých mincí má?
>
> Věra má v kasičce 17 mincí s hodnotami 2 Kč a 5 Kč. Kolik kterých mincí v ní může mít, jestliže víme, že v ní není více než 58 Kč?

Tyto dvě úlohy žáci často řešili zkusmo, většina z nich zapisovala údaje do tabulky.

Třída, ve které byl projekt realizován, je v matematice spíše podprůměrná (přišla na 2. stupeň do 6. ročníku jako sloučená, z původních dvou pátých tříd odešlo mnoho dětí na gymnázium, tato skutečnost ovlivňuje i kvalitu znalostí a schopností žáků). Realizaci projektu žáky i výsledky, ke kterým docházeli (byť se na některé úlohy nedostalo), hodnotím jako úspěšnou. Žáci pochopili, že je dobré hledat souvislosti mezi jednotlivými úlohami a že úlohy nemusí být vždy řazeny podle náročnosti. Také si opět potvrdili tezi, že neplatí: „čím delší zadání, tím složitější a náročnější řešení“. Tyto informace jsem získal po skončení projektu z odpovědí žáků v jednoduchém dotazníku. Některé části projektu budu příště modifikovat (předpokládám realizaci tohoto projektu i v roce 2003/04 – opět v 7. ročníku). Například bych omezil počet dotazů při získávání informací v pilotní úloze, v prospěchově slabé třídě jsem to záměrně neudělal. Více bych určoval, které úlohy se budou řešit, zvýšil počet skupin (dvojice, trojice), možná zařadil některé složitější úlohy.

2. Projekt „ZOH Salt Lake City 2002“

Součástí učiva matematiky je i kapitola Statistika. Učitelé se jí často obávají, „odučí“ ji jen formálně. A přitom se děti se statistikou, zpracováváním dat, tabulkami, grafy apod. setkávají téměř denně. Mimo jiné ve sportu. Cílem projektu, který spojuje výuku matematiky a zájem dětí o sport, je zpracování dat, ale též upevnění schopnosti žáků spolupracovat ve skupinách, diskutovat, prosadit svůj názor, přistupovat na kompromisy, uznat chybu, prezentovat své myšlenky, výsledky své práce apod. V roce 2002 jej řešili žáci dvou paralelních tříd 8. ročníku. Zajímavé bylo i srovnání práce v obou třídách.

Projekt byl volen jako dlouhodobý, začínal v lednu, dále probíhal po dobu trvání olympiády (8.2.–25.2.) i po jejím skončení. Realizován byl ve vyučování (v hodinách matematiky, rodinné a výtvarné výchovy) i mimo něj. K přípravě tohoto projektu mne vedly dvě skutečnosti. První je kapitola Statistika v učivu 8. ročníku ZŠ a druhý je konání Zimních olympijských her v Salt Lake City. Projekt začínal diskusí, pokračoval řešením pilotní úlohy a skupinovou prací (úlohy ze Sady 1 a Sady 2). Úlohy byly zadány jako uzavřené, přesto byla možná tvořivá práce žáků. Harmonogram realizace a zadání (Sada 1 a 2) projektu je popsán v [9].

Realizace projektu „ZOH Salt Lake City“ začala v lednu 2002 diskusí o vztahu sportu a matematiky, která trvala jednu vyučovací hodinu. 8. února 2002 pokračovala otázkou „Čím je významný dnešní den?“. Diskutovalo se opět téměř celou hodinu, přičemž padlo i slovo statistika. V závěru diskuse bylo hlasováním rozhodnuto, že třídy budou zpracovávat pouze hokejový turnaj (v obou třídách zcela jednoznačný výsledek hlasování). Na následujících téměř 20 dní byl uložen úkol sbírat informace, sledovat zápasy a informace. 25. února (první hodina matematiky po skončení olympijských her) byla zadána pilotní úloha:

> Ve středu 20. února 2002 ukončili naši hokejisté své působení na ZOH 2002 prohrou s Ruskem. Jediný gól zápasu padl v jeho 25.minutě (bylo odehráno 24:48). Jaká část zápasu byla odehrána ve chvíli, kdy padl gól? Jaká část zápasu zbývala do jeho konce?

Pilotní úloha předpokládala různorodost žákovských řešení a tento předpoklad se též naplnil. Milým překvapením bylo, že žáky tato různorodost nijak nevyvedla z míry a vedla k diskusi o tom, jak jednotlivé skupiny postupovaly.

Na další hodině věnované projektu (cca 20 minut) byly zadány úlohy ze Sady 1. Tyto úlohy žáci řešili ve skupinách, které si sami vytvořili. Nebylo stanoveno žádné omezení pro jejich sestavení. Po týdnu obdrželi žáci úlohy Sady 2.

Po skončení práce a odevzdání prací jsme se vrátili k projektu asi po měsíci. V hodině rodinné výchovy žáci diskutovali o možnostech využití zjištěných a zpracovaných informací. Obě třídy se rozhodli pro transparent zachycující tyto informace a vyvěšený na chodbě. V jedné třídě byly vytvořeny dvě skupiny, druhá třída pracovala jako jedna skupina.

Projektu bylo věnováno 5 hodin matematiky (2 hodiny diskusní, 1 hodinu řešení pilotní úloha, 2 hodiny – části, diskuse, prezentace dílčích výsledků), 2 hodiny rodinné výchovy a 2 hodiny výtvarné výchovy. Výsledky prezentovali žáci spolužákům z jiných skupin a zpracované informace pak vyvěsili na chodbu. 1.část první úlohy projektu byla zadána hned po skončení olympiády, za týden sada 1, za další týden sada 2. Projekt byl úspěšný a kapitolu Statistika nikdo z žáků nepovažuje za nudnou.

Pilotní úloha byla řešena ve skupinách. Žáci ji řešili různými způsoby – použili procenta, zlomky či desetinná čísla. Žáci ostatním sdělovali své postupy a sami došli k závěru, že některá řešení jsou stejná, jen jinak vyjádřená.

Úlohy Sady 1 byly řešeny ve skupinách, pro jejichž vytvoření nebyla stanovena žádná omezení. Úlohy Sady 2 byly řešeny v maximálně čtyřčlenných skupinách – jednotlivé skupiny mohly spolupracovat. Zároveň bylo dovoleno měnit složení skupin. Spolupráce skupin byla žádoucí a výhodná. Nebylo v silách jednoho žáka sesbírat všechny potřebné podklady pro vyřešení úloh .

První třída (říkejme jí třeba 8. D) vytvořila pro závěrečné zpracování jednu skupinu. Vybírali materiály pokud možno od co nejvíce žáků, vystavili i méně podařené práce. Nutno podotknout, že žáci si práci rozdělili a opravdu velice dobře spolupracovali. Společně pak vyvěsili vytvořený transparent na nástěnku na chodbě školy.

Ve druhé třídě (říkejme jí 8. E) byl patrný rozdíl v práci skupin. Tato třída vytvořila v závěrečné fázi projektu 2 skupiny. První skupina kladla důraz (zejména chlapci) na úhledné grafy a digramy, většinou zpracované na počítači. Někteří chlapci měli sklon práci pouze dirigovat a řídit (vystřihni, nalep, dokresli apod.). Zbylým členům skupiny se to však nelíbilo a přiměli je k aktivnější spolupráci. Na chodbě však transparent připevňovala jen část skupiny. Druhá skupina vybrala naopak více obrázků než informačních materiálů, více však zvažovali různé varianty a vyslechli názor každého z členů. Společně pak vyvěsili výsledek své práce.

Z diskuse se žáky o souvislostech sportu a matematiky je patrné, že děti vnímají statistiku jako součást života (statistika zápasů, statistické zpracování voleb apod.). V hodinách matematiky se s tímto pojmem zatím nesetkali. Statistické zpracování (tabulky, grafy, diagramy) znají od 6. třídy, kdy se společně potkáváme v hodinách matematiky. Pojmy *statistické šetření*, *statistický soubor*, *rozsah souboru*, *modus*, *medián* jsem nevysvětlil já, ale žáci si jejich vysvětlení vyhledali sami. Někteří hledali na internetu, v encyklopediích, všechny pojmy se však daly nalézt v učebnici Matematika s Betkou 3 pro 8. ročník základní školy. Žáci zpočátku učebnici nepoužili, protože „nepředpokládali, že by tam toto vysvětlení našli“.

Moje působení (role učitele) bylo následující. Do diskuse na téma Sport a matematika jsem příliš nezasahoval, všechny diskusní příspěvky byly věcné. Do diskuse 8. února jsem vstoupil několika otázkami „Čím je významný dnešní den?“ „Bylo by možné připravit projekt, který by spojoval ZOH a matematiku (resp. statistiku)?“ V závěru diskuse žáci obou tříd hlasováním rozhodli, že budou zpracovávat pouze hokejový turnaj. Připravil jsem úlohy Sady 1 a sady 2 a 25. února jsem zadal pilotní úlohu. Při práci skupin byl učitel spíše v pozadí.

Při realizaci projektu jsem spolupracoval se dvěma kolegyněmi. Já sám jsem vyučoval matematice v obou třídách a rodinné výchově v jedné z nich (8. E – 23 žáků). Jedna z kolegyň vyučovala rodinné výchově v druhé třídě (8. D – 21 žáků) a druhá výtvarné výchově v obou třídách. Jednalo se o kolegyně, se kterými jsem spolupracoval i v oblasti zájmové mimoškolní činnosti (školní KLUB SANTOŠKA – odpolední činnost, sportovní turnaje, vědomostní soutěže, víkendové a letní pobyty – www.sweb.cz/santoska.klub).

Cílem projektu bylo upevnit schopnost žáků spolupracovat ve skupinách, prosadit svůj názor, přistupovat na kompromisy, prezentovat své myšlenky a výsledky své práce. To se, myslím, podařilo. Je možné pozorovat rozdíly v práci tříd nebo i skupin v jedné třídě. Ty byly patrné zejména v závěrečné fázi realizace při prezentaci. Mé celkové hodnocení práce žáků bylo pochvalné. Je obdivuhodné, kolik volného času a energie někteří žáci věnovali sbírání, třídění a zpracovávání materiálů. I sami žáci byli s výsledkem své práce, který stále visí na chodbě naší školy, velmi spokojeni.

3. Zjišťování názorů spolužáků

Žáci 9. třídy v hodině rodinné výchovy při diskusi na téma Rodina navrhli vytvořit dotazník, zadat jej žákům 8. tříd, poté vyhodnotit a výsledky zpracovat. Tvorba dotazníku byla náročná, padlo mnoho návrhů, probíhala výměna názorů. Učitel byl spíše v roli pozorovatele. Nakonec se žáci shodli na této verzi. Paralelní třída v ročníku připravila dotazník na téma Drogy. O průběhu a výsledku vyhodnocování bych rád referoval na některém příštím setkání učitelů matematiky.

Rodina – dotazník

Jsem chlapec – dívka	věk:
1. Pod pojmem rodina si představuji	• manžel, manželka • rodiče(manžel, manželka) a děti • něco jiného – napiš co . . . . . .
2) Kolik máš sourozenců?	. . . . . .
3) Chceš mít přítele, přítelkyni Pokud ano – chceš s ním v budoucnu žít ve společné domácnosti? Pokud ano – v manželství ? Chceš mít vlastní děti ? Chtěl (a) bys adoptovat děti?	ano – ne ano – ne ano – ne ano – ne, pokud ano, kolik . . . ano – ne, pokud ano, kolik . . .
Myslíš si, že jsou tvé nároky na partnera/partnerku vysoké?	
Děkujeme za vyplnění dotazníku.	

Dílna se uskutečnila 14.2. a zúčastnilo se jí 15 zájemců. Po představení následujících projektů se rozproudila diskuse. Například o tom, jak ovlivňovat tvorbu skupin, kdy zařazovat do výuky problémové úlohy, projekty či podobné metody výuky.

Závěrem chci zdůraznit, že se při realizaci projektů opět potvrdilo, že projektová metoda má své místo ve vyučování matematice. Jedná se o motivující a účinnou formu výuky. Žáci prokazovali schopnost spolupracovat ve skupině, dohodnout se, argumentovat, vysvětlovat své myšlenkové pochody atd. A měli velkou radost z toho, když se jim dařilo. Zasloužili si pochvalu, neboť řešení projektů a zpracovávání jejich výsledků věnovali mnoho času i energie.

Literatura

[1] Kubínová, M. (2002): *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti*. PedF UK Praha.

[2] Novotná, J. (2000): *Analýza řešení slovních úloh*. PedF UK Praha.

[3] Kubínová, M., Novotná, J. (1998): *Projekty ve vyučování matematice na základní škole*. Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň.

[4] Novotná, J. a kol. (1996 – 1998): *Matematika s Betkou 1–3, ušebnice matematiky pro 6.–8. ročník Scientia*, Praha.

[5] Novotná, J. a kol. (1998): *Matematika s Betkou 1 – 4, pracovní sešit k učebnicím matematiky pro 6. – 9. ročník*. Scientia, Praha.

[6] Kubínová, M., Stehlíková, N. (2001): *EMTISM – Module D: Pupil/student projects in school mathematics*. PedF UK, Praha.

[7] Hricz, M. (2000): Matektelé aneb projekty v hodinách matematiky. *Sborník semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2000*. KMDM PedF UK Praha.

[8] Hricz, M. (2001): Zajímavá žákovská řešení matematických úloh. *Sborník semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2001*. KMDM PedF UK Praha.

[9] Hricz, M. (2002): Projekt „ZOH Salt Lake 2002“. *Sborník semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2002*. KMDM PedF UK Praha.

Úlohy s nejistými daty — nové podněty pro vědu a výzva pro školskou matematiku[1]

Jan Chleboun[2]

Rozvoj matematického modelování a numerických metod vede v posledních letech k tomu, že se stále větší důraz klade na posouzení kvality matematického modelu a příslušného přesného i numerického řešení.

Zajímá nás, jak velké nepřesnosti vůči skutečnosti se dopouštíme tím, že ji modelujeme jistým způsobem, např. rovnicí určitého typu a složitosti. Studujeme vlastnosti přesného řešení a jeho závislost na parametrech modelu. Zabýváme se vztahem mezi přesným řešením a jeho numerickým přiblížením, zejména chybou, která takovou aproximací vzniká. Obecně se v této souvislosti hovoří o *validaci* („Používáme správné rovnice?“) a *verifikaci* („Řešíme rovnice správně?“), viz např. [1], [2].

Součástí úsilí o posouzení nepřesností a jejich zdrojů je i snaha o *ucelenou* analýzu toho, jak je výsledek modelování ovlivněn nejistotou v údajích, které do modelu vstupují. Často se vyskytují situace, kdy vstupní data (např. materiálové koeficienty v rovnicích, okrajové podmínky, zatížení aj.) nejsou známa přesně, protože jsou obtížně měřitelná, nebo dokonce hypotetická.

Nejisté vstupy, tj. různé možné hodnoty vstupních údajů, se ovšem projeví tím, že vznikne množina řešení. Tedy množina sestávající z řešení generovaných těmi vstupy, jež v rámci nejistoty považujeme za přípustné (možné).

Je-li nejistota v datech nápadná a závažná, nelze před ní zavírat oči. V praxi často používaným postupem je najít řešení aspoň pro *několik vzorků* z množiny přípustných dat, vytvořit „optimistický“ a „pesimistický“ scénář chování modelu. Odpovědnější a také ovšem obtížnější je *důsledné propátrání* množiny přípustných vstupů a využití dalších informací, které o této množině máme – mohou být známy pravděpodobnosti či váhy vstupů nebo informace podobného charakteru. V těchto souvislostech se uplatňuje teorie pravděpodobnosti a modelování metodou Monte Carlo, teorie fuzzy množin, Dempsterova-Shaferova teorie, případně metoda nejhoršího scénáře, viz např. [2], [3], [4], [5].

Horší situace nastává, když je nejistota nenápadná nebo opomíjená. Například v technické praxi se běžně používají tabulky, v nichž jsou jednotlivé materiálové koeficienty (vlastnosti) vyjádřeny jedním číslem. Přitom tato hodnota byla odvozena z měření (nejčastěji je jejich průměrem), má tedy jistí (ale neuvádění) rozptyl. Navíc parametry jsou obvykle měřeny za zjednodušujících podmínek, jež se liší od skutečných, složitých podmínek, v nichž se materiál používá. Podobně v jiných oborech lidské činnosti, výrazně

[1]Příspěvek vznikl při práci na grantovém projektu 201/02/1058 Grantové agentury České republiky.
[2]*MÚ AV ČR a ústav technické matematiky, Fakulta strojní ČVUT, chleb@math.cas.cz*

např. v lékařství, je zvykem počítat jen s *průměry* a neptat se, jak vlastně vznikly a jakou mají vypovídací schopnost. V praktických aplikacích matematiky se tak často setkáváme s paradoxní situací, kdy se provádějí stále složitější výpočty a na základě jejich výsledků činí stále důležitější rozhodnutí, aniž by se odpovědně brala v potaz neurčitost vstupních dat a závažné důsledky z toho plynoucí.

Tento rozpor začíná být alespoň v odborném světě více pociťován a motivuje hlubší studium nejistot. Zdá se tedy, že posuzování vlivu nejistoty a neurčitosti nejen ovlivňuje směr výzkumu v matematice, jak o tom svědčí zvýšený počet publikací na toto téma, ale bude se muset stát i nezbytnou součástí *odpovědného používání* matematických modelů. Cesta k tomuto cíli však nebude snadná, protože setrvačnost lidského myšlení a zažitého způsobu jednání je značná.

Autor tohoto příspěvku si matně pamatuje školu základní před třiceti a střední před pětadvaceti lety a není si vědom toho, že by jej kdy škola upozornila na to, že svět je plní nejistých dat, ale že přesto nemusíme propadat zoufalství, protože i s nejistotami lze počítat. Autor neví, jaká je dnešní výuka matematiky a fyziky, ale obává se, že v ní všechna auta jezdí přesně definovanou rychlostí, dělníci pracují celý den stejně usilovně a síla působící na lano se soustavou kladek je známa na mnoho desetinných míst. Nebylo by však vhodné aspoň někdy zabrousit do světa nejistých dat, do světa, v němž se denně pohybujeme?

Aniž bychom usilovali o ucelenou koncepci, spokojme se s několika příklady použitelnými a modifikovatelnými ve výuce.

Jízda městem (metoda Monte Carlo). Na tabuli vyznačíme místa A a B a spojíme je trasou s několika světelnými křižovatkami (cca deseti). Vzdálenost mezi A a B je 5 km, což znamená 6 minut jízdy autem (dodržujeme předpisy), ale na křižovatkách se můžeme zdržet, pokud nemáme zelenou. Průjezd křižovatkou modelujeme vrhem kostky, např. 1, 2, 3 – zelená (zdržení 0 minut), 4, 5, 6 – červená (zdržení 1 minuta), nebo 1, 2 – žádné zdržení, 3, 4 – jedna minuta, 5, 6 – dvě minuty. Žáci mohou městem „projíždět“ samostatně nebo ve dvojicích, zapisují si zdržení na jednotlivých křižovatkách a spočítají zdržení celkové.

Úlohu zakončíme tím, že na tabuli sestavíme přehled celkových zdržení, nakreslíme histogram a s žáky se nad ním zamyslíme. Už před pokusem je vhodné s žáky určit, jaké nejkratší a nejdelší zdržení může nastat (metoda nejhoršího scénáře).

Na střední škole (kde se snad základy statistiky a pravděpodobnosti probírají(?)) tak můžeme ilustrovat relativní četnost a rozdělení pravděpodobnosti a pokusit se předem odhadnout, jaké zdržení bude nejčastější.

Starosti Bořka Stavitele. Bořek má panu Novákovi postavit dřevěnou zahradní besídku, jejíž plochá střecha má mít plošný obsah 10 m^2. Pan Novák souhlasil s Bořkovým projektem, ale zároveň dal najevo, že za materiál na besídku chce zaplatit co nejméně. Bořek připravil čtyři varianty a teď o nich přemýšlí. Starosti mu dělá především zima, bojí se, aby besídka vydržela zátěž sněhu a ledu, ale nechce zbytečně utrácet za materiál. Bořek si pamatuje, že loni najednou nachumelilo i půl metru prachového sněhu (hustota 100 kg/m^3) a že letos i předloni se dalo týdny sáňkovat a lyžovat, protože starého sněhu bylo dobrých 20 cm (hustota 400 kg/m^3) a dlouho ležel. Bořkovy stavební varianty se liší nosností konstrukce a ovšem i cenou: besídka z levné laťoviny jistě snese 750 kg sněhu a bude stát 1 900 korun; kombinace latěk a trámků přijde na 2 500 korun a unese zátěž o hmotnosti 1 200 kg; celá besídka ze štíhlých trámků sice stojí 3 000 korun, ale odolá 1 500 kg sněhu; nejdražší varianta, za 4 600 korun, bude i nejodolnější, neuškodí jí ani 1 900 kg. Poraďte Bořkovi a panu Novákovi, kterou ze čtyř variant mají postavit.

Úloha záměrně nevede k jednoznačnému řešení. Všechny konstrukce snesou i tak neobvyklou nadílku čerstvého sněhu (500 kg), s jakou se Bořek setkal loni. Bořek by však měl počítat s tím, že na střeše se může navrstvit aspoň 20 cm starého sněhu (800 kg), což v kraji není nijak zvláštní a což nejlevnější varianta neunese. Též však nelze vyloučit, i když by to bylo výjimečné, že na cca 20 cm starého sněhu jednorázově připadne cca 50 cm sněhu nového (celkem 1 300 kg), čemuž nevyhovuje ani druhá varianta. Ještě vyjímečnější situace by nastala, kdyby na starý sníh dvakrát za sebou napadl příval nového sněhu (celkem 1 800 kg), to by snesla jen nejdražší konstrukce. Vzhledem k malé pravděpodobnosti výskytu takové zimy se jako vhodný kompromis mezi odolností a cenou jeví třetí varianta, ale, je-li pan Novák z těch, kdo dávají přednost pocitu jistoty před uspokojením z ušetřeních peněz, rád zaplatí nejdražší variantu.

Žáci by si měli mj. uvědomit, že posuzování výsledků, které model poskytuje, se děje prostřednictvím nějakého *kritéria*, v našem případě je jím nosnost konstrukce, a že do procesu rozhodování mohou vstupovat i těžko matematicky vyjádřitelné vlivy, v našem případě osobní postoj pana Nováka k riziku abnormálního průběhu zimy.[3]

Investice (metoda nejhoršího scénáře). Pan Novák zvažuje investici 10 000 korun do investičního fondu. Přečetl si analýzu dlouhodobého výhledu ziskovosti fondu, podle níž se v příštím roce výnos odhaduje na -1% až $+3\%$, v dalším roce na $+2\%$ až $+4\%$, a konečně v třetím roce na -1% až $+6\%$. Pana Nováka zajímá, jak po třech letech může vypadat jeho nynější investice za předpokladu, že skutečný výnos bude v odhadovaných mezích.

Jde o modifikaci úlohy nejhoršího scénáře: kromě scénáře nejhoršího (nastane v případě nejnižších výnosů) nás zajímá i scénář nejpříznivější (nastane v případě nejvyšších výnosů). Úloha je usnadněna tím, že budoucí hodnota investované částky závisí *monotonně* na výnosech v jednotlivých letech, investice se zhodnocuje tím více (méně), čím vyšší (nižší) je roční výnos. Pro vypočítání možných mezí budoucí hodnoty dnes investované částky tedy stačí počítat jen s dolními a horními mezemi ročních výnosů.

[3] Žáci, kteří toto pochopí, by v běžném životě měli získat určitou ostražitost vůči „optimálním variantám“, o nichž hovoří sdělovací prostředky, aniž by čtenáře informovaly o kritériu použitém pro stanovení oné optimálnosti. Téma je také vhodnou příležitostí k pomoci češtině, totiž boji proti logickému nesmyslu – výrazu „nejoptimálnější“.

Nejhorším scénářem je kombinace -1% v prvním roce, $+2\%$ v druhém roce a -1% v třetím roce. Pro pana Nováka by to znamenalo, že z dnešní investice 10 000 korun by po třech letech bylo 9 997,02 korun. Nejlepší scénář sestává z výnosů $+3\%$, $+4\%$ a $+6\%$, čemuž odpovídá výsledek 11 354,72 korun. Jelikož odborníkovy odhady ročních výnosů nejsou doplněny další informací, je nejhorší a nejlepší scénář vše, co z dostupných dat bezprostředně získáme. Pan Novák může uvažovat o tom, že pesimistické a optimistické meze ročních výnosů jsou méně pravděpodobné než „zlatá střední cesta“, a spočítat např. chování své investice při průměrných ročních výnosech, ale tím do vstupních dat projektuje vlastní přesvědčení.

Žáci by si z řešení tohoto typu příkladů měli odnést poznatek, že při nejistých vstupech daných jen dolní a horní mezí, lze aspoň určit dolní a horní mez možného výsledku, přičemž úvahy a výpočty usnadňuje monotónní závislost na vstupních datech. Také by si měli uvědomit, že ke vstupním datům leckdy přidáváme další subjektivní předpoklady, které sice mohou být logické a správné, avšak i tak by ve výsledné analýze vlivu nejistoty mělo být patrné, které závěry byly získány z dat z původního zdroje a které po naší doplňující interpretaci.

Závěr

Problémové úlohy s nejistými daty jsou realitě blíže než úlohy s daty idealizovanými, tj. přesnými. Řešení úloh s nejistotami sice obvykle zabere více času a bývá i náročnější na logické myšlení než řešení standardních slovních úloh, ale přináší žákům nový a prakticky využitelný pohled na aplikace matematiky.

Literatura

[1] AIAA, *Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations*. AIAA Guide G-077-1998, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 1998.

[2] Ben-Haim, Y. a Elishakoff, I., *Convex Models of Uncertainties in Applied Mechanics*. Studies in Applied Mechanics, Vol. 25, Elsevier, Amsterdam, 1990.

[3] Elishakoff, I. (ed.), *Whys and Hows in Uncertainty Modelling; Probability, Fuzziness and Anti-optimization.* CISM Courses and Lectures No. 388, Springer-Verlag, Wien, New York, 1999.

[4] Hlaváček, I., *Reliable solution of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type with respect to the uncertainty in coefficients*. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 30, 1997, 3879–3890, Proceedings of the WCNA-96.

[5] Natke, H. G. a Ben-Haim, Y. (ed.), *Uncertainty: Models and Measures*. Mathematical Research, Vol. 99, Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[6] Roache, P. J., *Verification and Validation in Computational Science and Engineering.* Hermosa, Albuquerque, 1998,

Komunikace v geometrii[1]

Darina Jirotková, Graham Littler[2]

Cíl pracovní dílny

Pracovní dílna byla zaměřena na některé možnosti práce s geoboardem a čtverečkovaným papírem[3] v hodinách geometrie prvního stupně ZŠ s důrazem na různé typy komunikace. Cílem bylo ukázat nezastupitelnou roli komunikace pro rozvoj hlubšího porozumění geometrickým pojmům, vztahům a jevům. Byly realizovány čtyři aktivity, hry, které vyžadovaly různé typy komunikace.

Partneři verbální komunikace bývají psychology nazýváni podle svých rolí: komunikátor – autor mluvené či psané řeči a recipient – příjemce sdělení. Činnost komunikátora se nazývá kódování a recipienta dekódování (Mareš, Křivohlavý, 1995). My zvolíme vzhledem k charakteru úloh terminologii použitou v Hurtové (1991) vysílač a přijímač.

Hra na vysílače a přijímače I. – zvuková forma verbální komunikace

<u>Materiál:</u> Každý účastník má k dispozici jeden geoboard s devíti „hřebíky“ (3x3) a barevnou gumičku.
<u>Scénář:</u> Účastníci dílny pracují ve dvojicích a sedí zády k sobě. Jeden ze dvojice vymodeluje pomocí gumičky libovolný obrazec (označme jej A). Potom svůj obrazec ústně popíše svému partnerovi. Přitom smí volit jakékoliv prostředky ústní komunikace kromě přesného geometrického názvu obrazce, pokud tento nějaký má. Druhý partner, přijímač, podle popisu modeluje na svém geoboardu obrazec (označme jej B), který má být samozřejmě shodný s obrazcem A. Přijímač nesmí klást žádné otázky, může pouze říci „potřebuji více informací“ nebo sdělit „mám to hotovo“. Po tomto sdělení si partneři své obrazce na geoboardech porovnají. V případě, že obrazce A a B nejsou shodné, oba partneři pak diskutují o tom,

- v čem se obrazce liší,

[1] Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 309/2002 A PP/PedF.

[2] *PedF UK Praha, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz, Univ. of Derby, UK, graham.littler@msn.com*

[3] Geoboardem rozumíme desku (dřevěnou, plastovou), na které jsou rozmístěny „hřebíky“ do tvaru čtverce např. 3x3, 5x5 apod. tak, že jednotlivé hřebíky jsou mřížovými body čtvercové sítě. Slouží jako pomůcka pro modelování rovinných geometrických obrazců.

- zda došlo někde v komunikaci k nedorozumění,
- která instrukce vysílače byla nejednoznačná a vedla k možnosti odlišné interpretace a
- jak byla přijímačem dekódována,
- čím byla instrukce nejednoznačná a
- jak by měla znít, aby byla jednoznačná,
- která instrukce vysílače, ačkoliv byla správně a jednoznačně formulována, byla chybně dekódována.

Partneři si v další hře vymění role.

Komentář: Úkolem vysílače bylo kódování graficky znázorněného obrazce do slov. Úkolem přijímače bylo ústní sdělení dekódovat. Následná společná diskuse byla vedena těmito otázkami:

Jakým způsobem byl obrazec kódován? Proč vysílač volil daný útvar? Jak vnímali obrazec, když jej zrovna tvořili? Jak se změnilo jejich vnímání obrazce, když jej začali popisovat?

V diskusi bylo zmíněno několik zajímavých kognitivních jevů:

1. Dvojí způsob kódování obrazce – buď procesuálně, nebo konceptuálně

   V prvním případě byl různým způsobem popsán postup, jak obrazec sestrojit. Například „Vyznač vlevo dole bod. Pak jdi tři kroky nahoru a jeden doprava. Vyznač další bod. . . . “ Ve druhém případě byl obrazec popisován pomocí některých vlastností, a to jak globálních, například „Má tvar domečku, který je na geoboardu umístěn našikmo.“ tak i analytických, například „Obrazec má čtyři strany, dvě a dvě sousední strany jsou stejně dlouhé, . . . “ apod.

2. Schopnost empatie

   Při volbě způsobu kódování se účastníci v roli vysílače snažili zohlednit úroveň a schopnosti přijímače. Volili takové prostředky, o nichž se domnívali, že jsou přijímači srozumitelné a jemu přiměřené. Rovněž tak při dekódování obdržené informace v roli přijímače zohledňovali úroveň vysílače a často si kladli otázku „Jak to mohl myslet?“ nikoliv „Jak tomu rozumím já?“

3. Převaha estetického hlediska při tvorbě obrazce

   Účastníci dílny se shodli na tom, že při tvorbě obrazce je nenapadlo uvažovat o počtu vrcholů, pravých úhlech či rovnoběžnosti stran, ale byli vedeni pouze estetickým hlediskem. Obrazec se jim z nějakého důvodu líbil, nebo jim připadal něčím zvláštní.

4. Změna vnímání obrazce při komunikaci

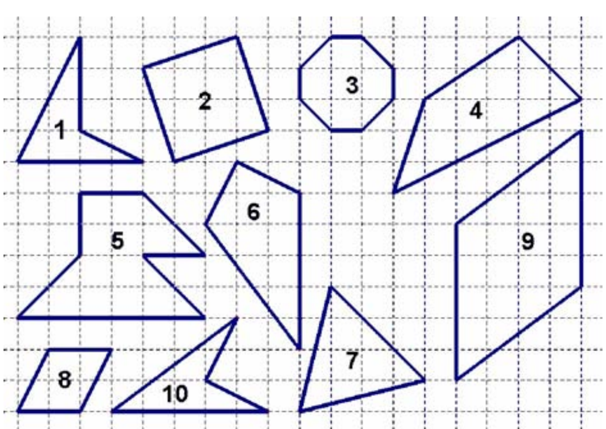
   Až při společné diskusi si účastníci uvědomili, že teprve nutnost komunikovat o obrazci je dovedla od globálního vnímání obrazce k analytickému. To znamená, že si začali všímat vlastností jako je například počet vrcholů, stran, přítomnost ostrého či tupého úhlu, rovnoběžnost či kolmost stran apod. až tehdy, když hledali, jak obrazec co nejvýstižněji popsat.

Hra na vysílače a přijímače II. – písemná forma verbální komunikace

Materiál: Každý účastník má k dispozici jeden geoboard 3x3, tečkovaný papír[4], čistý papír a psací potřeby.
Scénář: Účastníci dílny pracují ve dvojicích a sedí zády k sobě. Každý ze dvojice vymodeluje pomocí gumičky na geoboard „svůj“ nový obrazec – A. Potom jej písemně na čistý papír popíše. Přitom smí volit jakékoliv prostředky písemné komunikace, tedy i znaky, kromě přesného geometrického názvu obrazce, pokud tento nějaký má, a kromě nakreslení obrazce. Písemný popis si oba partneři vymění a kreslí podle nich obrazec na tečkovaný papír – B. Žádná ústní komunikace není dovolena. Nakonec oba porovnají dvojici obrazců – jeden vymodelovaný na geoboardu (A) a druhý nakreslen na tečkovaném papíru (B). Jestliže si obrazce A a B neodpovídají, diskutují obdobně jako v případě hry I.
Komentář: Oba partneři v této hře jsou ve stejnou dobu nejdříve v roli vysílače, a pak v roli přijímače. Nedostávají tedy žádnou okamžitou zpětnou vazbu o tom, jak srozumitelný je jejich způsob kódování pro přijímače, a nemohou jej tedy v průběhu komunikace měnit či upřesňovat. To vede k otázce, která byla společně diskutována. Která z forem komunikací písemná či ústní, je snazší pro vysílače a která pro přijímače.

Následná společná diskuse směřovala k odhalení efektivního způsobu písemného kódování, a to k šipkovému zápisu mřížového útvaru na čtverečkovaném papíru (viz Hejný, Jirotková, 1999). Efektivnost tohoto zápisu spočívá v tom, že tím, že je ikonický, je srozumitelný i mladším žákům a není závislý na dorozumívacím jazyce. Tento šipkový zápis je velmi vhodnou přípravou na zavedení souřadnic.

Hra SOVA pro skupiny – komunikace ve skupině



Obr. 1

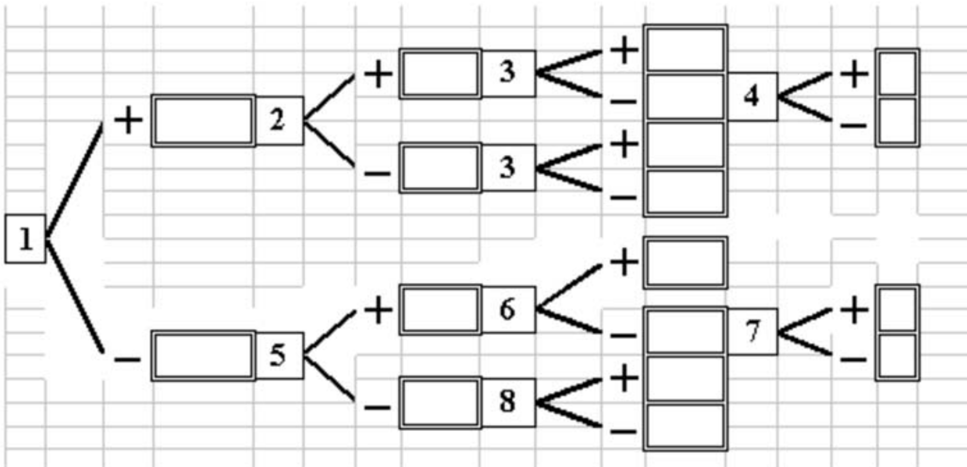
Materiál: Každý účastník má k dispozici list čtverečkovaného papíru s deseti vyznačenými mřížovými obrazci (viz obr. 1).
Scénář: Účastníci jsou rozděleni do dvou skupin a hrají hru SOVA (viz Jirotková, 2002, s. 29).
Komentář: Tato modifikace hry SOVA (oba hráči jsou skupiny osob) je zaměřena zejména na komunikaci uvnitř skupiny. Ta se týká nejdříve volby objektu, a pak hledání a popisu vhodných vlastností obrazců a dekódování informace obdržené od protihráče.

Více nebudeme o této hře psát, neboť mnohé bylo napsáno v článku Jirotková (2002).

[4]Tečkovaným papírem rozumíme papír, na kterém jsou vyznačeny pouze mřížové body čtvercové sítě.

Hra SOVA pro jednotlivce – neverbální komunikace

<u>Materiál:</u> Každý účastník má k dispozici kromě obrázku s deseti objekty hry SOVA z minulé hry (obr. 1) další list papíru se schématem uvedeným na obrázku 2 a se seznamem osmi otázek. Jedná se o úplnou strategii hry SOVA.



Obr. 2

Otázky:

1. Prochází alespoň jedna osa souměrnosti útvaru jeho vrcholem?
2. Má útvar alespoň dvě úhlopříčky, které jsou uvnitř útvaru?
3. Má útvar právě dvě dvojice shodných sousedních stran?
4. Je v útvaru alespoň jedna dvojice protějších vnitřních úhlů, jejichž součet je menší než přímý úhel?
5. Jsou alespoň dvě strany útvaru na sebe kolmé?
6. Existují v útvaru alespoň dvě úhlopříčky, které se překrývají?
7. Existuje v útvaru alespoň jedna trojice vnitřních úhlů, pro které platí, že součet jejich velikostí je menší než $180°$?
8. Je obsah útvaru vyjádřen sudým číslem? (Jednotka obsahu je jeden čtvereček.)

<u>Scénář:</u> Účastníci dílny pracují individuálně. Do prázdných rámečků doplňují čísla útvarů, které vyhovují buď kladné (+) nebo záporné (–) odpovědi na otázku, která je ve schématu uvedena číslem.
<u>Komentář:</u> Nevýhodou hry SOVA pro dva hráče je, že po několika opakováních jedné hry si hráči vytipují účelné otázky, a ty pak v každé další hře opakují. Aby hra sloužila svému vzdělávacímu cíli, je třeba nejen obměňovat objekty hry, ale také modifikovat její formu. Zde uvedená hra je jednou možností. Její výhodou je, že autor otázek, učitel, může v jednotlivých otázkách použít mnoha vlastností objektů hry a může se zaměřit na ty vlastnosti, na které z nějakého důvodu potřebuje obrátit pozornost žáků. Je třeba

dodat, že z hlediska komunikace má tato forma hry nevýhodu, a to, že osoba, která úkol řeší, nekomunikuje verbálně. Tím tato forma hry SOVA málo přispívá k rozvoji komunikačních dovedností hráčů.

Literatura

Hejný, M., Jirotková, D. (1999). *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou.* PedF UK, Praha

Hurtová, J. (1991). *Štúdium komunikácie v matematike.* Diplomová práce. MFF UK, Bratislava

Jirotková, D. (2002). Hra ANO-NE a čtverečkovaný papír. In D. Jirotková, N. Stehlíková, *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* UK v Praze, PedF ve spolupráci s JČMF, s. 28–34

Jirotková, D. (2002). Využití geoboardu ve vyučování geometrii na prvním stupni ZŠ. In D. Jirotková, N. Stehlíková, *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* UK v Praze, PedF ve spolupráci s JČMF, s. 98–102

Mareš, J., Křivohlavý, J. (1995). *Komunikace ve škole.* Masarykova univerzita, Brno

Prožitkem k poznání[1]

Michaela Kaslová[2]

O vyučování matematiky se v laické veřejnosti soudí, že je to pouze otázkou rozumu, trpělivosti, pozornosti a vůle. Současně je tato představa pro některé ekvivalentem nudy a dřiny. Snad i proto se tak často volá po matematice hrou. Proč? Protože se zapomnělo, že **vyučování nikdy není oproštěno od emocí**. Emoce, které vyučování provázejí, mohou být ovšem i pozitivní. Jde o vyvolání takových prožitků, na kterých lze i dále stavět, a to jak v oblasti rozumové, tak emocionální.

Experimentování je jen jedním z nástrojů, které tato strategie využívá. Kooperativní řešení úkolů, nestandardní prostředí a netradiční pomůcky patří k dalším. Úskalí spočívá v tom, že by se mohly emoce vázat na jevy nepodstatné, nežádoucí. Lze je překonat jednak připraveností, jednak vhodnou zpětnou vazbou. Následné ukázky by měly být

[1]Příspěvek byl podpořen VZ J13/98:114100004.

[2]*PedF UK Praha, kaslovam@pedf.cuni.cz*

mimo jiné i příkladem toho, že **prožitkové vyučování** lze použít v hodinách matematiky s náznakem gradace i zpětné kontroly.

Námět 1

Téma: Poznáváme jednotky měření – plošné jednotky. Odzkoušeno na čtvrtých třídách a učitelích matematiky.
Prostředí A: Atrium u Národního divadla
Prostředí B: Karlovo náměstí
Prostředí C: tělocvična školy
Organizace: práce v šestičlenných skupinách
Pomůcky: poznámkový blok a tužka

Úkoly:

A. Práce ve skupinách po 5 (6) žácích

1. Jedna skupina dostane za úkol postavit od sebe 2 členy na 10 m, ostatní diskutují, kontrolují, pak mají podobně jako první skupina postavit dvojici žáků vzdálených10 m od sebe, ale v různých směrech (ne rovnoběžně s první).

   Pozn. Diskuse o dlažbě, které lze k odměření využít (čtvercová dlaždice o straně cca 80 cm).
2. Vybraná skupina má doplnit dvojici na čtveřici vymezující čtverec o straně 10 m. Ostatní vymezují stejné čtverce kdekoliv v prostoru atria tak, aby se čtverce nepřekrývaly.

   Pohyb čtverců v ploše – vybraný žák podle pokynů učitele, nebo sám učitel stojící ve vrcholu jednoho ze čtverců se pohne libovolným směrem, ostatní ve čtverci se musí pohnout tak, aby zůstal čtverec zachován.

   Podobně reagují i další skupiny (krok vpřed, úkrok stranou, krok přes úhlopříčku dlaždice apod.)
3. Seznámení s pojmem ar.

   Skupiny mají za úkol vymezit plochu 1 aru tak, aby to nebyl čtverec. Skupiny se poradí, a pak pracuje vždy jen jedna, ostatní diskutují o jejich práci.

   Pozn. Podle vyspělosti žáků můžeme zabrousit do historie. Ar od slova area, který měl význam plocha, prázdný pozemek, nádvoří, vnitřek atria.
4. Určení plochy. Pozorujeme plochu atria. Skupiny odhadují celkovou plochu atria a snaží se svůj odhad podložit argumenty.
5. Ar ve svislé poloze. Skupiny pozorují fasády Nové scény a zkušeny Národního divadla. Pokoušejí se na nich vymezit plochu jednoho aru a toto vymezení jednoznačně popsat, podložit argumenty.

B. Práce ve dvojicích

1. Odhady 10 m na výšku, na šířku a to v různých vzdálenostech. Například 10 m od stromu dál, od sochy k nám, 10 m na domě, na věži a to jak od země, tak od shora apod.
2. Odhad šířky náměstí, výšky Novoměstské věže.
3. Odhad plochy Karlova náměstí.

   Poznámka: Po každé činnosti hledání nejlepších odhadů a porovnání strategie při určování odhadu. Lze připojit i poznámky z historie o velikosti náměstí v Čechách a ve světě.

C. Jednotlivci

1. Lehneme si v tělocvičně na záda (např. při relaxaci v závěru hodiny). Provádíme odhady šířky, délky stropu. Klademe otázky typu: je – není plocha stropu 2 ary? O kolik by se musel strop tělocvičny změnit (do šířky, délky), aby jeho plocha byla . . . arů?
2. Ve stoji se ptáme žáků, jakou plochu má podlaha tělocvičny. Zde mají někteří žáci obtíže uvažovat o tom, že stejnou jako strop, poněvadž neuvažují o tom, že jsou „uvnitř tělesa podobného kvádru“, nedovedou promítnout strop do podlahy, mají problémy vyhledávat analogie apod.

Organizační poznámka: Je možné použít i **techniku předsunuté expozice** (je možné u „půlených“ hodin, nebo v době, kdy je zvýšená nemocnost). Aktivit předsunutého expozice, které jsou poměrně detailně propracované předem, se zúčastní jen část třídy, na kterou je přenesena zodpovědnost za to, že dané téma zvládnou i nepřítomní. V tomto případě se předpokládá, že zúčastnění budou ve stejném prostředí rozděleni do skupin žáků dříve chybějících a v rámci těchto skupin budou organizovat stejné nebo obměněné aktivity tak, aby jejich členové byli schopni na konci odpovídat na dotazy (ústně nebo písemně). Žákům – učitelům musí být ovšem jasno, co a proč je nutné předat. Také by měla být jasná terminologie, aby bylo zřejmé, kde v následující komunikaci budou moci použít vlastní jazyk a kdy ne.

Námět 2

Téma: Plošné geometrické útvary. Odzkoušeno na žácích třetích a pátých ročníků a na studentech PedF UK.
Prostředí: třída
Organizace: práce ve skupině a ve dvojicích
Pomůcky: nůžky, barevné desky z PVC, zpětný projektor

Úkoly se opírají o spojení estetických zážitků ve spojení s plošnými útvary. Měly by napomoci k rozlišení plošných a prostorových útvarů tam, kde oba světy trojrozměrný a dvojrozměrný z nejrůznějších důvodů splývají.

1. Vytváříme skládanku z různých dílů různých barev. Vystříhejte každá skupina 2 (3, 4, 5) stejné díly stejné barvy: kruhové, obdélníkové apod. Další díly můžeme mít

v zásobě jako série kruhových dílů různých velikostí. Šikovnější si dělají náčrtky na folie a stříhají pak oba listy naráz. Musí najít techniku, která jim zaručí shodné útvary.

2. Sestavte návrh vitráže, dílky se mohou překrývat. Rám může být zadán. Lze spojit s vlastivědou. Výsledky práce rovnáme mezi dva listy průsvitných „bílých desek“, a pak je promítáme na projektoru. Vybranou kompozici lze udělat jako reprodukci podle diktátu.
3. Umíte pojmenovat všechny díly? . . .
4. Vyberte si deltoid a kruh, dva deltoidy, dva trojúhelníky a pokaždé chceme, aby překrytí tvořilo trojúhelník, čtverec, obdélník, n-úhelník pro co největší n. Výsledky práce promítáme, diskutujeme o nich. Můžeme je nechávat vedle sebe a ukazujeme, že mohou být trojúhelníky různých tvarů, v různých polohách i barvách. Toto je zážitek, který zpravidla vede k tvořivosti i mimo hodinu matematiky. Vyhovuje i chlapcům, kteří neradi črtají, rýsují kvůli nižší úrovni drobné motoriky.
5. Z deseti jmenovaných dílů máme komponovat co největší trojúhelník. Tentokrát nejde o překrývání, ale o celek, kam patří každá část promítnutého obrazu.

   Žáci musí intuitivně pracovat s úhlem, s uvědoměním si, že strana čtverce je úsečka a ne křivka. Pokud chtějí uplatnit estetická, nejen ekonomická hlediska, trvá to déle. Úloha má více řešení. Jsou situace, kdy úloha mít řešení nemusí.

   Technická poznámka: dílky lze slepovat izolepou a mít poskládaný celek trvalejšího charakteru.

Námět 3

Téma: Poznávání vlastních rozměrů. Odzkoušeno na dětech předškolního věku, žácích druhých a třetích ročníků ZŠ a studentech PedF UK.
Prostředí: třída a chodba školy nebo školní zahrada, nebo tělocvična
Organizace: práce ve dvojicích nebo v trojicích, oblečení kalhoty nebo leginy
Pomůcky: noviny, knoflíky, lepenka, nůžky, fix, případně balicí papír a vodové barvy

Úkoly (nevyčerpáme všechny):

1. Obkreslete se na noviny nebo balicí papír (upažit poníž, stoj mírně rozkročný). Lze ve stoje u zdi, kde je lepenkou při lepen, nebo v leže na zemi. Postavu vystřihneme a komentujeme. Pozor, většina má o sobě rozměrově jiné představy. U dospělých žen navíc o šířce boků a délce nohou.
2. Vezměte si knoflíky a umístěte je na obličej tam, kde si myslíte, že máte oči, nos, ústa. Pozn.: Většina je umísťuje jinam.

   Při zpochybnění a podnětu ohmatat si dlaněmi a prsty vlastní obličej, někteří začnou části obličeje poměřovat a přenášet tyto vztahy na papír. Ostatní kopírují, což nevadí. Nenapovídáme. Pak mají za úkol si obličej zakreslit. Ve výtvarné výchově lze tyto osoby ozdobit, obléci, pomalovat.

3. Výzdoba třídy – nalepit panáky vedle sebe. Pak se ptáme: kolik takových osob by se vešlo na sebe při stavbě lidské pyramidy? Kolik by jich tvořilo řetěz podél stěny třídy, kdyby leželi jeden za druhým pata – hlava? Kolik by se jich vešlo na žíněnku?

   Toto lze opět spojit s historií, jak se dříve měřilo aneb mírou všech věcí je člověk.

Závěr

Při práci s jednotkami chceme vždy, aby si žák nejdříve jednotky měření vybavil, pantomimicky ukázal, naznačil, nebo představu slovně popsal. Tato cvičení jsou nutná před převody jednotek. Proč? To snad není nutné uvádět. Hezké a příjemné zážitky ve vyučování matematice.

Skládání z papíru – symetrie a podobnost[1]

Jana Kratochvílová, Darina Jirotková[2]

Úvod

Vzdělání v geometrii bylo považováno ve starém Řecku za nezbytnou průpravu pro královnu věd – filosofii. Nápis na slavné Platónově akademii „Nevzdělaný v geometrii nevstupuj“ byl toho výmluvným důkazem. Geometrie byla považována za prostředí, ve kterém lze „trénovat“ mozek, rozvíjet schopnosti jako odhalování souvislostí, tvoření, formulování a ověřování hypotéz, argumentování apod. Bohužel tento status geometrie v moderní době vymizel ze škol a geometrie se mnohdy stává samostatný předmět oddělený od ostatní matematiky, který je pouhou snůškou pouček a vzorců, bez jejichž zapamatování si nelze řešit geometrické problémy. Velmi často se geometrie ve škole zaměňuje za rýsování a přesnost rýsování určuje žákovu úspěšnost v geometrii. Není tedy divu, že je geometrie mnohem méně oblíbená část matematiky než aritmetika či algebra. Tento pocit převládá, podle našich průzkumů, u učitelů jak 1. stupně, tak i 2. stupně základních škol. Bariéru mezi geometrií a ostatními matematickými disciplínami podporují i osnovy a následně i mnohé učebnice, které zužují geometrii pouze na trénink jistých geometrických pojmů, schopnost dosazovat do vzorců a schopnost konstrukce pomocí pravítka a kružítka. Neláska učitelů ke geometrii se samozřejmě promítá do jejich přístupu k výuce geometrie, která je pak ryze instruktivní a to vše se přenáší na jejich žáky či studenty. Administrativní zásahy jako je ubírání hodin tomuto předmětu činí z tohoto problému začarovaný kruh.

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 309/2002 A PP/PedF.
[2]*PedF UK, jana.kratochvilova@pedf.cuni.cz, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

Realizovanou pracovní dílnou jsme chtěli nepatrným dílem přispět k řešení této situace. Záměrem dílny bylo nabídnout účastníkům zajímavé geometrické prostředí, které je neobyčejně vhodné rovněž pro rozvoj komunikačních a manipulativních dovedností, kromě tradičního rozvíjení prostorové představivosti, schopnosti orientace v prostoru, schopnosti třídit jevy podle jistých kritérií, rozvoje pojmotvorného procesu apod. Dalším cílem této pracovní dílny bylo inspirovat učitele k hledání dalších zajímavých prostředí pro geometrii základní školy.

Ilustrace

Obě autorky byly inspirovány pracovní dílnou vedenou prof. B. Wollringem z Univerzity v Kasselu v rámci mezinárodní konference SEMT'01 [Wollring, 2001]. Na této dílně několika ilustracemi bylo prezentováno skládání z papíru jako zajímavé prostředí pro vyučování geometrie. Nejednalo se pouze o návody, jak složit jisté zajímavé objekty z papíru, ale též o obohacení tohoto didaktického prostředí např. tím, že tyto objekty (díky náročnosti či objemnosti) mohou v rozumném čase vzniknout pouze při skupinové práci a tudíž skupina se musí dohodnout o postupu práce, a tím dochází ke komunikaci o geometrii. Jednu z těchto ilustrací autorky použily pro svoji dílnu na Dvou dnech s didaktikou matematiky 2003.

Obsah dílny

Účastníci dílny se rozdělili do čtyř 4-5tičlenných skupin. Každá z nich dostala barevné papíry, nůžky, arch papíru A1, lepidlo a hvězdičku složenou z papíru (viz obr. 1[3]). V první části dílny byly skupinám zadány následující úkoly:


Obr. 1

1. Společně odhalit, jakým způsobem je hvězdička složena, a složit si svou hvězdičku.

2. Zaznamenat proces skládání vytvořením návodu z meziproduktů hvězdičky tak, aby nezasvěcený mohl podle něj hvězdičku složit. Podmínkou bylo do něj nic nevpisovat, tzn. ani čísla označující, jak jednotlivé kroky skládání na sebe navazují, ani slova popisující činnost při skládání.

Ve druhé části dílny si účastníci jednotlivých skupiny jednak porovnali své návody, ověřili jejich srozumitelnost, vyměnili své zkušenosti ze skupinové diskuse nad tvorbou návodu a také se zamýšleli nad aplikací tohoto didaktického materiálu do vyučování nejen geometrie, ale i výtvarné či pracovní výchovy.

Komentáře

1. Odhalení, jak je hvězdička složena, bylo poměrně obtížné. Obtížnost spočívala v tom, že hvězdička je ze dvou částí, které jsou nepřímo shodné. Ty jsou pak do sebe jistým způsobem zasunuty. Pokud se účastníci dílny rozhodli hned od počátku soustředit na dekompozici hvězdičky, aby zjistili, jak vypadá vstup procesu skládání, tj. jaký tvar papíru na hvězdičku potřebují, tak stěží mohli postřehnout, jakým způsobem se do sebe

[3] Oba uvedené obrázky byly převzaty z materiálů prof. Wollringa.

Obr. 2

skládají její dvě části. Proto museli celý proces rozkladu obdržené hvězdičky několikrát opakovat. Účastníci dílny poměrně rychle zjistili, že k zahájení skládání je třeba dva shodné obdélníky. Ovšem problémem bylo, že se nejednalo o jakékoliv obdélníky, nýbrž o obdélníky o stranách v poměru 1:2 neboli o dva obdélníky tvořící čtverec. Oba obdélníky jsou dále skládány symetricky, čehož si též někteří nevšimli. Teprve nezdar mnohdy vícekrát opakovaný při hledání finální podoby hvězdičky, tj. hledání způsobu, jak jsou její dvě části do sebe složeny, způsobil objev symetrie. Za zmínku stojí i jev, který se objevil u většiny skupinek. Byla jím nepřesnost skládání, což způsobovalo překážky při skládání či alespoň nepěkný vzhled hvězdičky.

2. Největší překážkou pro vytvoření návodu (viz ukázku na obr. 2) hned na počátku byla podmínka, že nelze nic vpisovat do návodu a že návod se skládá pouze z meziproduktů hvězdičky. Přesto, že tato podmínka byla jasně vyslovena, některé skupiny se nedokázaly vyhnout tomu, že vepsaly alespoň čísla do návodu. Dalším problémem ve skupině bylo domluvit se, které kroky procesu skládání jsou pro neverbální komunikaci důležité, a tudíž se mají znázornit, jakými meziprodukty se mají reprezentovat a jak tyto meziprodukty rozvrhnout na papír. Například ten krok, co byl jednomu účastníkovi natolik zřejmý, že by jej nevyznačoval, tak druhému se jevil jako zásadní. To vedlo k diskusi s argumenty pro a proti a ke společnému rozhodnutí, zda uvažovaný krok procesu skládání vyznačit tak, aby komunikovaný proces byl jednoznačný.

3. Účastníci dílny byli překvapeni, jak moc se některé návody od sebe lišily. Například jedna skupina zaznamenala proces skládání na papír položený na šířku, a sice v časové posloupnosti tak, jak hvězdičku sami skládali. Nejdříve znázornili krok po kroku, co se musí udělat s jednou částí hvězdičky. Poté podobně popsali, co se musí udělat s druhou částí hvězdičky, a nakonec způsob složení obou částí. Ostatní skupiny zaznamenaly celý postup na výšku papíru a skládání obou částí hvězdičky zaznamenaly paralelně. Jedna skupina vytvořila návod pro složení hvězdičky větší než byla původně zadaná.

4. Všechny skupiny se shodly na tom, že při práci na návodu došlo k diskusím, při nichž jejich členové zcela přirozeně používali jednak zavedené geometrické pojmy vztahující se jak k označení mnohoúhelníků a vlastností (např. obdélník, poměr, symetrie), ale i nezavedené výrazy popisující proces skládání (přelož na polovinu, vlož tento cíp hvězdičky do druhé části). Pokud někdo nepoužíval zavedenou geometrickou termi-

nologii, obvykle se dostal do komunikačních problémů. To znamená, že se brzy střetl s nedorozuměním a musel několikrát vysvětlovat, co tím vlastně myslí.

5. Při následné debatě o tom, pro jak staré žáky je toto skládání vhodné, se vyjasnilo, že skládání hvězdičky a tvorba návodu jsou přínosné jak pro žáky 1. stupně, tak i 2. stupně. Pouze s tím rozdílem, že u žáků 1. stupně se mimo jiné jedná o propedeutiku symetrie a podobnosti (v případě, že žáci složí různě velké hvězdičky), kdežto na 2. stupni by žáci tyto pojmy měli používat již s plným porozuměním.

6. K této diskusi jedna z autorek mohla přidat svou zkušenost při skládání hvězdičky se žáky 4. a 7. ročníku ZŠ. Ve 4. ročníku si žáci během jedné vyučovací hodiny na základě návodů vytvořených jinými dětmi zkonstruovali několik hvězdiček. Jedna žákyně si vytvořila tři poměrně malé hvězdičky různých velikostí, což též ukazovalo na její zručnost ve skládání. V 7. ročníku byly vymezeny dvě vyučovací hodiny s tím, že žáci mají k dispozici hotovou hvězdičku a mají ve skupinách odhalit způsob, jak je hvězdička složena. Dále měli vytvořit svoji vlastní hvězdičku a pokusit se o vypracovaní návodu. Na konci druhé vyučovací hodiny většina žáků neměla hvězdičku složenu. Problémem byla jejich nevelká zručnost, dále neviděli symetrii obou částí hvězdičky, přičemž učivo o osové souměrnosti již bylo probíráno. Tudíž autorčina původní předpověď, že skládání hvězdičky žákům 7. ročníku půjde snadněji, nebyla správná. Navíc použité komunikační prostředky nejsou závislé na věku žáků. Účastníci dílny tuto zkušenost obohatili svými zážitky z vyučování a konstatovali, že dovednost skládat z papíru u starších žáků na rozdíl od mladších žáků postrádají. Pravděpodobně je to dáno tím, že na 1. stupni ZŠ je tato činnost daleko více trénována v nematematických předmětech například v pracovní či výtvarné výchově.

Závěr

Nabízí se otázka, zda aktivity, které vymizely ze škol a které bezesporu rozvíjejí mnohé kognitivní schopnosti z oblasti geometrie, nejen prostorovou představivost, jsou nahrazeny ve starším školním věku něčím jiným, kvalitativně lepším. Pokud ne, hledejme taková vhodná pracovní prostředí v geometrii, abychom u žáků rozvíjeli nejenom geometrickou představivost, ale též kultivovali jejich schopnost komunikace ať verbální či neverbální. S tím samozřejmě souvisí rozvoj hlubšího porozumění geometrickým pojmům a procesům.

Literatura

Wollring, B. (2001). Working environments for the geometry of paper folding in the primary grades. In: *Proceedings SEMT'01*, Eds. Jarmila Novotná, Milan Hejný, Charles University in Prague, Faculty of Education, pp. 177–178.

Modelína a geometrické zkušenosti

Marie Kupčáková[1]

V úvodu do stereometrie je modelína malým zázrakem. Umožňuje žákům a studentům zprostředkovat s minimálními finančními nároky různé i netriviální geometrické pojmy. Dokonalý obrázek ani virtuální model nenahradí hroudu tvárné hmoty. Pracovali jsme s ní ve vyučování od prvé třídy základní školy, přes všechny ročníky druhého stupně, v prvém ročníku gymnázia a ve studiu učitelství všech stupňů škol na PdF Univerzity Hradec Králové a většinou jsme zaznamenávali spontánní radost, zvídavost a živou soutěživost. Řešitelé mnohdy získávali prostorové geometrické zkušenosti nutné pro rozvoj geometrické představivosti tímto přirozeným způsobem poprvé.

Ve svém příspěvku nabízím metodickou posloupnost modelování prostorových útvarů, která byla určena studentům učitelství matematiky. Lze ji však brát pouze jako inspiraci a podle potřeby obměňovat. Průvodní slovo je samozřejmě zkráceno.

K práci je potřeba modelínu JOVI (není lepivá), oboustranně zahrocená párátka, plíšek na řezání a papír jako podložku. Sestavené modely není třeba hned rozebírat, k některým se lze vracet (záleží na návaznosti, která je vybrána).

.

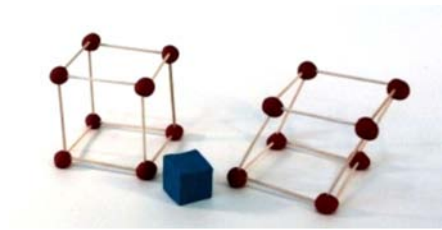
Úloha – obr. 1 a obr. 2

- Seznamte se s modelínou, vymodelujte **kouli**, z koule vyřežte **krychli (hexaedr)**. item Z odřezků vytvořte štíhlý váleček, nařežte jej na kousky a z nich si připravte kuličky velké asi jako plané třešně. To budou vrcholy mnohostěnů. Párátka (špejle) budou hrany.
- Vymodelujte žebrový neboli hranový model krychle (kolik potřebujete vrcholů, kolik hran).
- Proměňte model krychle v **rovnoběžnostěn**.

Při rozdávání pomůcek se vždy najde pár jedinců, kteří bleskově vymodelují něco pro zasmání (obr. 1) a atmosféra je navozena.

[1] *PedF UHK, marie.kupcakova@uhk.cz*

Obr. 1



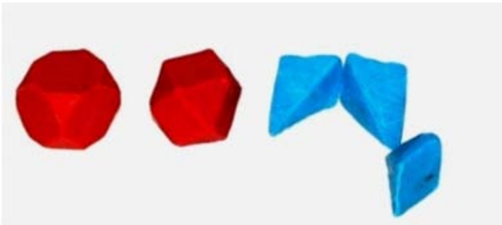
Obr. 2

Úloha – obr. 3

- Odřežte vrcholy krychle tak, aby ve všech stěnách zůstaly pravidelné osmiúhelníky.
- Veďte řezy tak, aby ve stěnách krychle zůstaly čtverce.
- Vymodelujte znova krychli a rozřežte ji na tři shodné jehlany.

Prvé dva úkoly směřují k vyvození pojmu **polopravidelné mnohostěny**, speciálně **archimedovské mnohostěny**, které vzniknou ořezáním vrcholů a hran pravidelných mnohostěnů.

Prvému mnohostěnu říkáme **ořezaná krychle**. Druhý se nazývá **kubooktadr**, protože jsme jej mohli získat jednak ořezáním krychle (kubus), nebo ořezáním **pravidelného osmistěnu** – **oktaedru** (můžeme jej také takto vymodelovat).



Obr. 3

Poslední úkol je motivačním pro ty studenty, kterým se zdálo zařazení modelíny do semináře nepatřičné, avšak tento úkol není triviální. Často trvá i čtvrt hodiny, než se objeví prvé řešení. Připravujeme si důkaz vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

Úloha – obr. 4

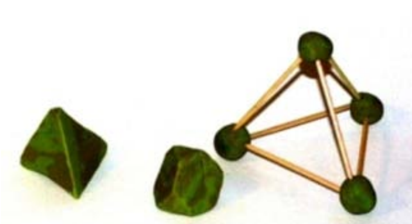
- Vymodelujte **pravidelný čtyřstěn** – **tetraedr** (vyřežte jej třeba z koule nebo vytvarujte v prstech).
- Odřežte jeho vrcholy tak, aby ve stěnách zůstaly pravidelné šestiúhelníky.
- Vymodelujte hranový model tetraedru. Porovnejte jeho pevnost s pevností hranového modelu krychle.

Úkol vymodelovat čtyřstěn patří k jistým „chytákům“. Často se jako řešení objeví čtyřboký jehlan. Když je jasné, co je to čtyřstěn, dá modelářům dost přemýšlení, jak jej vytvarovat. Také **ořezaný tetraedr** leckoho potrápí.

Úloha – obr. 5

- Připravte si válec s průměrem asi 3 cm a nařežte z něj dva nízké válce (asi 4 mm). Vymodelujte plášť **rotačního válce** jako **přímkovou plochu**, připravené destičky budou podstavami válce.
- Položte dlaň na horní podstavu a šikmo ji posuňte. Jak se bude jmenovat nový útvar?
- Vraťte podstavu zpět a otáčejte ji kolem osy tělesa. Jaký útvar vzniká?

Rotační válec můžeme nazývat **kolmý kruhový válec**. Odpověď na otázku pak zní – vymodelovali jsme **šikmý kruhový válec** (v deskriptivní geometrii jej často zobrazujeme). Třetí útvar bývá v určitých (politických) obdobích spontánně nazýván Temelín. Vcelku trefné označení, protože chladicí věže atomových elektráren skutečně mají podobu **jednodílného rotačního hyperboloidu**.



Obr. 4

Obr. 5

Úloha – obr. 6

- Vymodelujte plný rotační válec.
- Řežte jej dvěma rovnoběžnými šikmými řezy (jako veku). Řezné plochy jsou podstavami tělesa. Jaký mají tvar? Je to stejný typ válce, jako v předcházející úloze?
- Vyřežte z válečku **pravidelný čtyřboký hranol**.
- Vyřežte z něho **pravidelný osmiboký hranol**.

Málo studentů se dosud setkalo s jiným než rotačním válcem. Ten námi vymodelovaný je **šikmý eliptický válec**. Jeho podstavami jsou elipsy, kdežto v předcházející úloze to byly kruhy.

Osmiboké hranoly řada studentů chybně vyřezává už po zadání úlohy Ú3.

Úloha – obr. 7

- Vymodelujte **rotační kužel**.
- Řežte jej tak, aby byla v řezu elipsa (kružnice), parabola, hyperbola. Co je to **komolý kužel**?

Pro většinu studentů je pojem kuželosečka spojen buďto s rovnicí, nebo definicí kuželosečky jako množiny bodů jistých vlastností. Je proto vhodné předvést kuželosečky také jako průsečné křivky roviny a rotační plochy kuželové.

Obr. 6

Obr. 7

Úloha – obr. 8

- Vymodelujte plný **komolý pravidelný čtyřboký jehlan**. Čím začnete?
- Vytvořte hranový model **pravidelného pětibokého jehlanu**.
- Vymodelujete ze shodných špejlí **pravidelný šestiboký jehlan**? (pouze přemýšlejte)

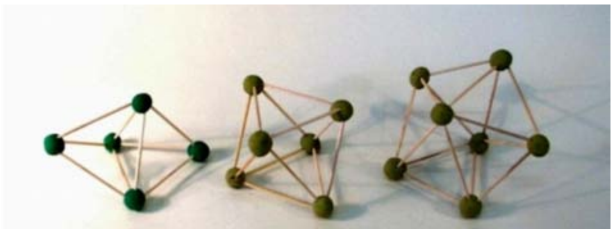
Je dobré zastavit se u pozapomenutého původu slova „komolý“. Podle Etymologického slovníku jazyka českého (ČAV 1971) to znamená bezrohý – dokonce „gomoľa“ byla označována bezrohá kráva. Modelujeme tedy jehlan bez „rohu“. V geometrii se slovo „roh“ už dávno nepoužívá, musíme říci, že odřízneme vrchol jehlanu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.

Obr. 8

Je zajímavé, jak málo studentů dokáže pouze z představy rozhodnout, jak by to bylo s pravidelným šestibokým jehlanem, který by měl všechny hrany stejně dlouhé.

Úloha – obr. 9

- Mnohostěny, jejichž povrch tvoří pouze rovnostranné trojúhelníky, se nazývají **deltastěny**. Doplňte hranové modely čtyřstěnu, čtyřbokého jehlanu a pětibokého jehlanu tak, abyste dostali **konvexní deltastěny**.
- Jakou valenci mají vrcholy těchto deltastěnů?



Obr. 9

Doplníme hrany a vrcholy a dostaneme trojici nových mnohostěnů. Všímáme si, že jedině v **pravidelném osmistěnu** (**oktaedru**) se v každém vrcholu sbíhá stejný počet hran (vrcholy mají stejnou valenci). U **delta – šestistěnu** a **delta – desetistěnu** tomu tak není.

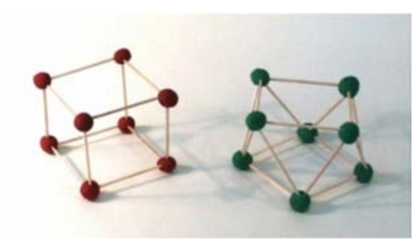
Úloha – obr. 10, obr. 11

- Vymodelujte **pravidelný pětiboký hranol**.
- Vymodelujte **čtyřboký antihranol**.
- Vymodelujte **pětiboký antihranol**.
- Podívejte se ještě jednou pozorně na ležící osmistěn.

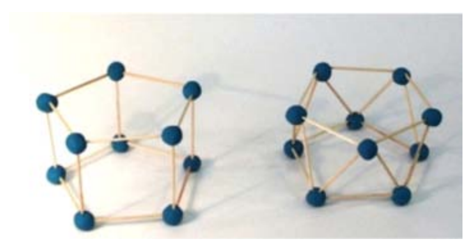
Uvažujme n-**boký hranol** se stejnými délkami hran. Je konvexní, všechny jeho stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky (2 pravidelné n-úhelníky a n čtverců) stýkající se v každém vrcholu stejným způsobem. Takové hranoly (**prizma**) patří mezi **polopravidelné mnohostěny** a je jich nekonečně mnoho. Čtyřboký hranol s těmito vlastnostmi již máme vymodelovaný (krychle).

Pootočením jedné podstavy o $180°/n$ kolem osy hranolu a doplněním pláště tak, aby jej tvořily rovnostranné trojúhelníky, dostaneme n-**boký antihranol** (**antiprizma**). Všechny takové antihranoly (bude jich nekonečně mnoho) jsou polopravidelnými mnohostěny. Jejich povrch tvoří 2 pravidelné n-úhelníky a $2n$ rovnostranných trojúhelníků.

V tomto novém úhlu pohledu vidíme oktaedr jako trojboký antihranol.



Obr. 10

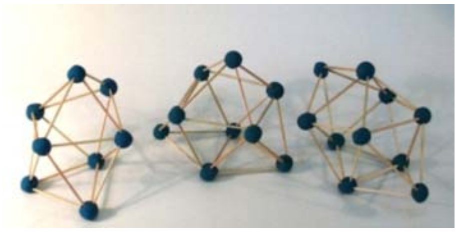


Obr. 11

Úloha – obr. 12

- Doplňte čtyřboký antihranol tak, abyste dostali konvexní deltastěn.

Musíme být připraveni na to, že se mohou ve skupině objevit tři různá řešení (a je dobře, když se najdou). Spočítáme stěny a tři nové mnohostěny pojmenujeme jako **delta – dvanáctistěn**, **delta – čtrnáctistěn** a **delta – šestnáctistěn**. Čtyři deltastěny jsme měli už dřív; delta – čtyřstěn (Ú4), delta – šestistěn, delta – osmistěn, delta – desetistěn (Ú9).



Obr. 12

Úloha – obr. 13

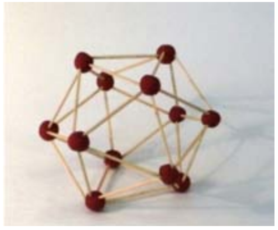
- Konvexních deltastěnů je právě osm. Který schází? Vymodelujte jej.

Schází deltastěn, který dostaneme doplněním pětibokého antihranolu. Je to poslední konvexní deltastěn, **delta - dvacetistěn**, který však častěji nazýváme **pravidelný dvacetistěn** nebo z řečtiny **ikosaedr**.

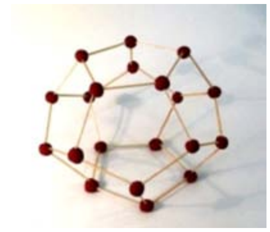
Úloha – obr. 14

- Během řešení předcházejících úloh jsme vymodelovali čtyři konvexní mnohostěny, které patří mezi platónské, tedy **pravidelné mnohostěny**. Chybí pátý pravidelný mnohostěn. Který to je? Jaké má stěny? Vytvořte jeho hranový model.
- Jaké vlastnosti má každý pravidelný mnohostěn? Formulujte definici pravidelného mnohostěnu.

Zopakujme si: modelovali jsme již tetraedr, hexaedr, oktaedr, ikosaedr a chybí **pravidelný dvanáctistěn – dodekaedr**. Jeho stěny jsou navzájem shodné pravidelné pětiúhelníky stýkající se po třech v každém vrcholu.



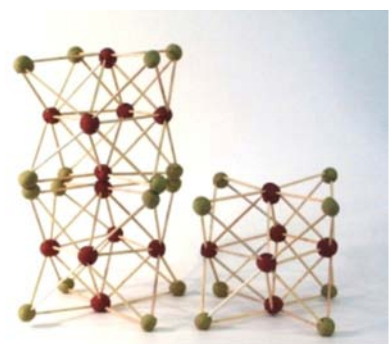
Obr. 13



Obr. 14

Úloha – obr. 15

- Vraťte se k pravidelnému osmistěnu. Připojte nad každou jeho stěnu pravidelný čtyřstěn. Na nový vrchol použijte modelínu jiné barvy.
- Vymodelovali jste nekonvexní útvar – tzv. **Keplerovu stellu octangulu** – hvězdu osmicípou. Jaký tvar by měla krabička, do které bychom ji mohli zabalit?
- Postavte nyní všechny vymodelované hvězdy vedle sebe a na sebe. Zdá se, že vyplňují prostor, ale zůstala mezi nimi prázdná místa. Jaký mají tyto mezihvězdné prostory tvar?



Obr. 15

Každou stellu octangulu (vytvořenou z jednoho osmistěnu a osmi čtyřstěnů) bychom mohli vepsat do krychle, ty pak lze v prostoru řadit vedle sebe i nad sebe. Uvnitř zůstávají konvexní mnohostěny, které mají 12 shodných hran a 6 vrcholů – jsou to osmistěny. Tedy celý prostor lze vyplnit pravidelnými čtyřstěny a pravidelnými osmistěny.

Věřím, že učitelé si sami vymyslí a připraví další úlohy a že čas, který byl v geometrii věnován modelování, se určitě vrátí. A když ne – nabídli jsme žákům či studentům zážitek, který se vrývá do paměti.

Literatura

Kupčáková, M.: Modelování těles – návrhy úloh pro geometrické praktikum (1), *Učitel matematiky*, roč. 7, č. 3(31), str.160 – 167 + příloha

Kupčáková, M.: Modelování těles – návrhy úloh pro geometrické praktikum (2), *Učitel matematiky*, roč.8, č.1(33), str. 27 – 36 + příloha

Kupčáková, M.: *Geometrie ve světě dětí i dospělých*, Gaudeamus 2001 (skripta PdF UHK)

Dvě matematické kultury?

Zpráva o dílně „Je možné naučit řešit úlohy?“[1]

František Kuřina, Hana Lišková[2]

Na tradiční *Dva dny s didaktikou matematiky 2003* jsme připravili pracovní dílnu o řešení úloh. Dílna se uskutečnila ve čtvrtek 14. 2. 2003, trvala 90 minut a pracovalo v ní asi 20 učitelů. Pro každého z nich byl připraven text [1] vydaný katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity v Hradci Králové. Tato brožura v rozsahu 15 stránek obsahovala odstavce:

1. Úvod
2. Vzdělávací proces a řešení úloh
3. Co a jak testují nejlepší gymnázia ČR
4. Úlohy k řešení
5. Závěr.

Dílna byla organizována ve dvou částech. V první jsme hodnotili několik vybraných úloh z publikace [2]. Tato část dílny byla podnětem k příspěvku, který zde publikujeme. V druhé části jsme se soustředili na diskusi o 4 úlohách z brožury [1]. První dvě úlohy byly klasickou aplikací ve škole probírané teorie (úlohy 1 a 7), další dvě „o dotyku čtyřstěnů“ vyvolala živou diskusi. Zbývajících 6 úloh jsme doporučili zájemcům k samostatnému promyšlení.

Publikace „Řešené testy nejlepších gymnázií ČR“

Knihu [2] uvádějí „zaměstnanci nakladatelství Pierot“ předmluvou, z níž citujeme

„Vážení rodiče, . . . aby se Vaše děti mohly dobře připravit k přijímacím zkouškám, vybrali jsme pro Vás testy těch opravdu nejlepších škol v republice. Pokud je žák zvládne, určitě uspěje v přijímacím řízení na kterékoliv jiné škole.“

Ponecháváme bez komentáře smysl a oprávněnost těchto slov. Nám vůbec nejde o hodnocení úrovně výuky a vůbec ne o rozhodování, které gymnázium je nejlepší. Jde nám o to ukázat, s jak rozdílnými matematickými požadavky přistupují dvě různé školy k absolventům základních škol, jaké od nich očekávají vědomosti a dovednosti. Nepřímo tak dokládají, co je pro příslušnou školu důležité, jakou matematickou kulturu vlastně chce pěstovat. Termín kultura zde nebudeme vysvětlovat, jeho intuitivní smysl asi každý učitel matematiky cítí; zájemce o tuto problematiku odkazujeme na publikaci [4].

Kniha [2] informuje na 199 stránkách o přijímacích testech z českého jazyka, matematiky, případně jiných předmětů na šesti pražských gymnáziích (Gymnázium Christiána Dopplera, Gymnázium Jana Keplera, První obnovené reálné gymnázium, Akademické

[1] Práce vznikla s podporou grantu GAČR 406/02/0829

[2] *Univerzita Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz; VOŠP a SPgŠ Litomyšl, liskova@lit.cz*

gymnázium Štěpánská, Gymnázium na Vítězné pláni a Gymnázium Voděradská). My se zde soustředíme na informace o přijímacích testech z matematiky na Gymnázium Jana Keplera a První obnovené reálné gymnázium.

Test z matematiky na GJK

V úvodu se zdůrazňuje ([2], str. 27), že obtížnost testu nepřekračuje úroveň ZŠ. Celkem se skládá test z 19 úloh, sedm z nich má klasickou formu, u dvanácti jsou předloženy možnosti A, B, C, D, E pro volbu odpovědí. Uveďme zde příklady úloh. Texty úloh žádným způsobem neupravujeme, některé úlohy stručně komentujeme.

1. *Na obrázku je lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$), průsečík jeho úhlopříček je E. Obsah trojúhelníku ABE je 72 cm^2 a obsah trojúhelníku CDE je 50 cm^2. Vypočítejte poměr výšek PE a QE v trojúhelnících ABE a CDE. Svůj výpočet zdůvodněte.*

(Text úlohy doprovází obrázek lichoběžníku.)

Vzhledem k tomu, že žáci ZŠ neznají větu o poměru obsahů podobných útvarů, jeví se nám úloha velmi náročná.

2. *Kulatý stůl má průměr 1m a výšku 75 cm. Je pokryt čtvercovým ubrusem o rozměrech 140 cm $\times$ 140 cm tak, že střed ubrusu a střed stolu se kryjí. Jak vysoko nad zemí je nejnižší cíp ubrusu? Proveď'náčrt situace.*

Tuto úlohu považujeme za vhodnou. Žák si musí představit situaci a použít základní poznatky, které má znát.

3. (6. úloha testu) *Do karty odpovědí doplňte chybějící termíny.*
Ropa vznikla v průběhu mnoha miliónů let rozkladem organizmů za .... vzduchu. Ropa je směsí nejrůznějších .... s různě dlouhými přímými i rozvětvenými ....
(7. úloha testu) *Topný olej, který vzniká při zpracování ropy, může obsahovat 1,3 $\%$ síry. Vypočítejte hmotnost oxidu siřičitého, který unikne do okolí spálením deseti tun tohoto paliva. (Molární hmotnost síry je 32 g/mol a kyslíku 16 g/mol).*
A) 26 kg. (Celkem je nabídnuto 5 výsledků.)

Obě předcházející úlohy předpokládají znalosti z chemie. Přesto, že jsme přesvědčení o nutnosti výuky jednotlivých předmětů ve vzájemných vztazích, nemyslíme si, že test z matematiky měl prověřovat úroveň poznatků z chemie.

4. (9. úloha testu) *Které tvrzení platí o řešení rovnice:*

$$16x^3 + 24x^2 + 9x = 0$$

A) *jedno řešení* $\frac{3}{4}$, B) *jedno řešení* $\frac{4}{3}$, C) *tři řešení* $\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}$, D) *právě jedno řešení* 0, E) *dvě řešení* $-\frac{3}{4}, 0$.

Vzhledem k tomu, že řešení kvadratických rovnic není v osnovách základní školy a otázka počtu řešení se obvykle upravuje konvencí o násobnosti kořenů, považujeme úlohu za zcela nevhodnou.

5. (11. úloha testu) *Operace $*$ je definována předpisem:*

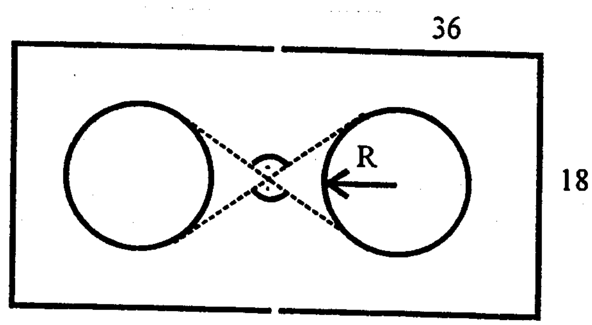
$x * y = \frac{x-y}{2}$, $x * 5 = -3$. (V textu je chybně uvedeno $x * d$).

Čemu se rovná $x * 7$?

A) $-2, 5, \ldots$ (Celkem je nabídnuto 5 výsledků.)

Ani tuto úlohu nepokládáme za vhodnou. Její jádro tkví v „algebraickém formalismu“, který není v souladu s matematikou základní školy; např. význam symbolu $=$ je v této úloze pro žáka zcela nezvyklý.

6. (13. úloha testu) *Na obrázku 1 (kóty v metrech) je nakreslena dráha („osmička“) pro drezúru koní. Kolik metrů ujde kůň, když tuto dráhu absolvuje desetkrát?*



Obr. 1

A) $10R(4 + 3\pi)m, \cdots$

Tato úloha je po obsahové stránce vhodná. Formulace, které zdůrazňují rozměry „hřiště“, o něž vůbec nejde, a geometricky nesprávný obrázek by se neměly u přijímacích zkoušek vyskytovat.

7. (15. úloha testu) *Z výrazu $f = \frac{ab}{a+b}$ vypočítej a.*

A) $\frac{bf}{b-f}, \cdots$

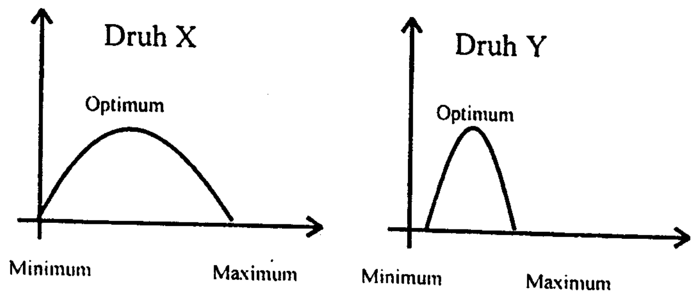
Úloha je dosti náročná, „rovnice“ tohoto typu se obvykle na ZŠ neřeší.

8. (19. úloha testu) *Tolerancí označujeme schopnost živých organizmů snášet určité rozpětí libovolného faktoru prostředí. Prohlédněte si pozorně graf na obr. 2 vyjadřující toleranci dvou druhů organizmů k danému faktoru a rozhodněte, která tvrzení jsou platná.*

A) *Druh X je na daný faktor choulostivější než druh Y.*

B) *Druh X je k danému faktoru přizpůsobivější, a proto bude v daném areálu početnější.*

C) *Druhy X a Y si budou na daném stanovišti tvrdě konkurovat.*



Obr. 2

Úloha má zjišťovat grafickou gramotnost budoucích studentů. Podle našeho názoru k tomu nejsou uvedené grafy vhodné.

Další úlohy testu se týkají řešení rovnic, úprav algebraického výrazu, grafu lineární funkce, procent a slovních úloh.

Test z matematiky na PORG

Test obsahuje 15 úloh, které se tematicky váží k desetiboji. Informace o tomto odvětví sportu jsou uvedeny v tabulce o výkonech Šebrleho a Dvořáka.

Uveďme některé typy otázek z testu.

Který z atletů zvládl lépe první tři disciplíny?

O kolik bodů je lépe zvládl?

Matematicky nejnáročnější úkol se týká této otázky:

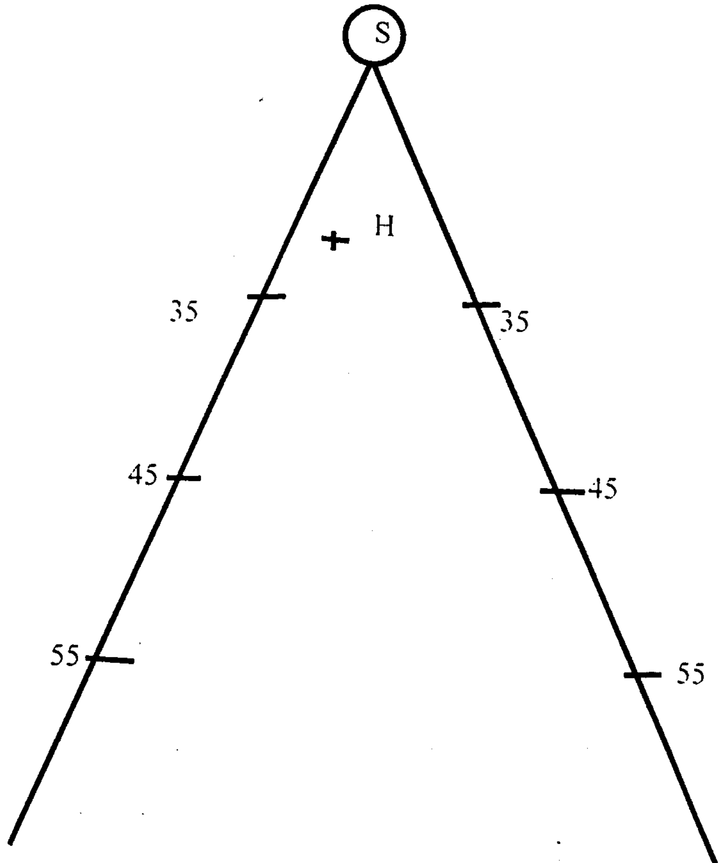
Kdyby chtěl někdo překonat Šebrleho světový rekord alespoň o 4 body, kolik bodů by musel průměrně získat v každé disciplíně?

V testu se vyskytuje i úkol „logického?“ charakteru:

Napiš šest smysluplných informací o Kanadě, kde se konalo mistrovství světa. Informace mohou být libovolné, musí však být pravdivé a mít nějakou informační hodnotu. Správně: O jiných zemích by bylo správně třeba: V Brazílii se mluví hlavně portugalsky. V Číně žije nejvíce lidí na světě. Chybně: V Číně žije hodně lidí. V Argentině jsou velká města. V Kanadě je Edmonton.

Úlohy tohoto typu stěží mohou přispívat k posouzení úrovně porozumění textu nebo dokonce matematické gramotnosti žáků.

Příklad „geometrické úlohy“: *Zakresli do obrázku* (kruhové výseče, který je předtištěn) *jedno místo, na které mohl dopadnout Dvořákův disk při pokusu zachyceném v tabulce, a označ ho* D*. (S přesností si nelam hlavu.)*



Obr. 3

Ani autoři úlohy si s přesností hlavu nelámali: stupnice na výseči je „podivuhodně nerovnoměrná.“

Závěry

Jak si vysvětlit, že školy v podstatě stejného typu testují připravenost pro studium u absolventů základních škol pracujících podle jednotných osnov tak rozdílným způsobem? Podle našeho názoru patrně tím, že každé z gymnázií chápe smysl matematické přípravy na základní škole jinak, má patrně i jinou koncepci matematické kultury, kterou bude u svých budoucích studentů rozvíjet.

První obnovené reálné gymnázium vůbec „nepřihlíží k prospěchu žáků na základních školách“, neprověřuje ani úroveň matematických dovedností např. v řešení rovnic, v úpravách algebraických výrazů, v řešeních úloh o procentech nebo v geometrii. Tomuto ústavu jde pouze o úroveň „zdravého selského rozumu“ a schopnost pozorného soustředění se budoucího studenta, naučené vědomosti a dovednosti jakoby nebyly pro další studium potřebné. Nechceme a ani nemůžeme rozhodovat, zda je to správné. Patrně je to z hlediska úspěšného působení školy vyhovující.

Gymnázium Jana Keplera prověřuje naopak mimo úroveň řešení běžných typů úloh z matematiky základní školy i vědomosti, které osnovy základní školy přesahují.

Kniha [2], která byla podnětem k těmto úvahám, vysílá jistý signál rodičům žáků, kteří končí povinnou docházku i žákům samotným. Není účelem této stati posuzovat, jaké tyto signály jsou. Kniha však může určitým způsobem ovlivnit i učitele základních škol. Pomáhá dotvářet jejich přesvědčení o tom, co je pro jejich absolventy důležité.

Z textu řady úloh je možné učinit si představu i o úrovni jazykové kultury některých našich gymnázií.

Podle našeho názoru není v současné době hlavní úkol podporovat individuální charakter jednotlivých škol, ale spíše považujeme za důležité stanovit závazná kritéria pro úroveň absolventů. Delegování tvorby osnov na jednotlivé školy, jak to zamýšlí Bílá kniha ([3]), by tomu ovšem neprospělo. Rovněž v otázce stanovení zásad pro další rozvoj vzdělanosti v našem státě pokládáme za důležité formulovat obecně platná kritéria pro hodnocení žáků, které by nebylo založeno především *na všestranné diagnóze jejich dosavadního vývoje*. Máme obavy, že přes řadu velmi pozitivních trendů otevírá realizace myšlenek Bílé knihy v praxi i možnost faktického snížení úrovně vzdělanosti u nás.

Literatura

[1] Kuřina, F.: *Je možné naučit řešit úlohy?* Katedra matematiky Pedagogické fakulty UHK, Hradec Králové 2003

[2] Šulc, P.: *Řešené testy nejlepších gymnázií ČR.* Pierot Praha 2003

[3] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* MŠMT, Tauris. Praha 2001

[4] Kuřina, F.: Kultura školské matematiky. In Zhouf, J. (ed.), *Sborník referátů z konference „Ani jeden matematický talent nazmar“*. Hradec Králové 2003, v tisku.

Metody řešení a komunikace[1]

Carlo Marchini[2]

Komunikace

K osvětlení toho, o čem mluvíme, pokusme se vytvořit modely komunikace a vysvětlit, jak ovlivňují řešení. Komunikace předpokládá alespoň dva aktéry, *vysílač* a *přijímač* spojené vzkazem, zprávou. Takovýto model byl nabídnut před mnoha lety Jacobsonem.

[1]Přeložila Michaela Kaslová

[2]*University of Parma, Italy, carlo.marchini@unipr.it*

Zpráva má jeden směr a udává rozdíl mezi příjemcem a vysílačem. Zpráva může mít různý charakter, může být: verbální, ikonická, gestická a podobně.

Tento jednoduchý model musí být zpřesněn a prohlouben. Vysílač musí být vybaven aparátem pro tvorbu zpráv a dalším pro jejich vysílání. Právě tak přijímač musí mít aparát na příjem zpráv, jejich rozluštění a zpracování toho, co bylo ve právě obsaženo. Příjemce musí často užít aktivity v souslednosti a v souvislosti s předchozími, musí být tedy vybaven operačním aparátem.

Můžeme použít vhodnou metaforu: satelit vynesený na oběžnou dráhu je řízený ze země. Pozemní stanice je vysílačem a satelit přijímačem. Zpráva vyslaná ze Země díky elektromagnetickým signálům dosáhne satelit, a to funguje díky tomu, že byla například satelitu upravena dráha. Pozemní stanice pro to, aby mohla vysílat signály, musí být vybavena vysílací anténou a satelit anténou pro příjem. Transformace zprávy se odehrává podle dispozic uvnitř satelitu. Analyzujme, jak probíhá vysílání zprávy. Vyberme jeden vysílací kanál; například na bázi elektromagnetického vlnění v prostoru, nebo telefonický kabel, nebo prostor k vysílání tónů. Například satelitní anténa je předurčena ještě před vysíláním pro příjem pouze určitého typu signálu dané frekvence a také nepřijímá nežádoucí signál, který by mohl poničit zařízení. To se také předvídá při vysílání. Signál má svůj vlastní jazyk, kód, ve kterém reaguje aparát, který ho vytvořil. Ale toto se daří jen tehdy, pokud vysílač a přijímač používají stejný kód. Nestačí, aby vedoucí pracovník pozemního střediska řekl nahlas, že se satelit musí posunout vpravo, tyto příkazy musí být kodifikovány domluveným způsobem, pak satelit provede danou operaci. Pozemní personál rozhodne, že je třeba uhnout doprava, tento příkaz bude zakódován domluveným způsobem a vyslán k anténě, která přijímá zprávy na bázi elektromagnetických vln dané frekvence.

Zpráva přichází do satelitu, je dekódována a toto zpracování vede satelit k tomu, aby aktivoval pulsary, které tento satelit pohnou vpravo. Toto je pouze model, i když dost výstižný, a může být užitečný pro analýzu některých obtíží komunikace a individualizovat některé jevy spojené s komunikací.

Didaktická komunikace

Po dlouhou dobu měl ve škole úspěch typicky transmisivní model: vysílač jako učitel, přijímač jako žák a zpráva to, co učitel předával jako učební látku. Týká se to ovšem modelu, který má mnohé limity a který se jeví jako neadekvátní.

(a) Učitel může být nahlížen jako vysílač. Jeho možnost vypracovávání zpráv je založena na znalostech argumentů, na knihách, ve kterých hledá, na nástrojích, pomůckách, které si připravuje. Pak přichází fáze kódování, kdy učitel připravuje hodinu, organizuje ji z hlediska časového, rozhoduje se čím začít, co zařadit potom, jaký typ jazyka (kódu), se rozhodne použít, (slovní, symbolický, gestický). Na základě tohoto výběru, tak jako vysílač, zvolí písemný projev, mluvený, obrázek, pohyb apod. Ale jednou se ve třídě stane, že si učitel všimne změny klimatu. Všimne si, že klima není tak vhodné k plnění cílů dané lekce nebo lekce předpokládané, plánované. V takovém případě již není učitel vysílačem, ale stává se přijímačem. Musí tomu tedy přizpůsobit kód, který předtím zvolil pro to, aby mohl uskutečnit svoji didaktickou aktivitu. Dalším významným momentem je ten, kdy se učitel stává přijímačem, a to je moment hodnocení. Jakmile vyšle své zadání s použitím určitého kódu, například slovního, žákovi, musí ho žák převést do jiného kódu, například symbolického nebo grafického. A ten je pak hodnocen.

(b) Schematizace žáka jako přijímače je příliš zjednodušující. Na základě nedávných didaktických výzkumů není učení pouhou reprodukcí, jinak by totiž přístroje zachycující hlas nebo videokamery, které také opakují perfektně, co zaznamenaly, musely být nejlepšími studenty. Učení se neprojevuje prováděním úkolů, které byly zadány. Nikdo by neposuzoval jako učení to, co dělá přístroj na přípravu expressa, který je oproti tomu specializován na přípravu hrnku kávy. Podle francouzských modelů řazených ke konstruktivismu se učení realizuje v přímém kontaktu s žákem s tím, že jsme v „a-didaktické situaci", ve které učitel zůstává do jisté míry v pozadí. Jinak řečeno žák není pasivním přijímačem, ale ze své vlastní vůle vysílá signály učiteli způsobem chování po celou hodinu, zájmem o argumentaci, důkazy apod.

(c) Programování satelitu je dílem těch samých techniků, kteří ho později používají jako přijímač. Programování žáka nezávisí na učiteli, ani na prvních letech školní docházky. Když to později nastane, mluvíme o didaktické úmluvě „contract didactique" (viz Brousseau).

(d) Žák není pouze v škole, ale je začleněn mezi své blízké. Přítomnost a význam tohoto typu interakce byl osvětlen ve studiích týkajících se kooperativního učení a sociálního konstruktivismu. V této fázi každý žák získává i vysílá zprávy sloužící k učení. V takových případech není kód determinován učitelem, ale je produktem společné řeči, volné úmluvy mezi blízkými, a pouze následně je upravován k potřebám učitele.

(e) Role kódu by měla být dále hlouběji analyzována. Jazyková analýza strukturalismu (De Saussure) vyčlenila aspekty jako je intonace, intenzita, výška tónu, objem, které jsou parciálně zastoupeny v pragmatické komunikaci, takové aspekty mají velký didaktický význam. V didaktické komunikaci je kód zaznamenáván vyučujícím, i když tvoří tentýž předmět učení, ale není zaznamenán studentem.

(f) V socio-konstruktivním kontextu není žák vyzýván k tomu, aby opakoval, navíc didaktická filosofie vytváří situaci destabilizace, moment, kdy naučené kódy nejsou adekvátní, nejsou vhodné k dekódování zprávy, což je chápáno jako souslednost epistemiologických překážek. Obohacení vnitřního i vnějšího jazyka (nejen pasivní a aktivní slovní zásoba) se rozvíjí jen v rámci vymezené oblasti následného rozvoje.

Metody řešení

V základech filosofie didaktického sociálního konstruktivismu je jedním nástrojem, jehož cílem je realizace déle trvajícího a vědomého učení, problém pojatý jako příležitost k myšlení a k užití znalostí. Rozdíl mezi cvičením a problémem je založen na adekvátnosti kódů známých žákovi. Pro žáka může být problémem také cvičení, pro něž nemá v daném okamžiku nástroje pro řešení. Rozdíl mezi cvičením a problémem je tedy závislý na osobě, která je vyzvána k jeho řešení nebo provedení, nezávisí na otázce. Problém musí být nahlížen z širšího hlediska, nejde pouze o školní matematický problém, i když role matematického problému je dost významná.

Při interakci ve dvojici a především malých skupinách předpokládaných v kooperativním učení lze konstatovat, že fáze analýzy problému již od počátku obsahuje propojení předložená společně skupinou. Není jasné, co se má propojit. Podle mé interpretace jde o společnou představu (imagini mentali). V tento moment musí proběhnout fáze heuristické explorace, ve které ještě jednou musí každý (by měl) přispět do diskuse, do nové konstrukce nebo rekonstrukce spojené (sdílející) se starými mentálními obrazy. Na základě modelu komunikace se každý současně vyskytuje jako vysílač a přijímač a komunikace se stane významná, pouze pokud jsou všechny komunikační kódy v souladu. Na konci všichni souhlasí s nabídnutým řešením a prostřednictvím mluvčího reprezentují závěr této fáze, ve které je dokompletován kód sociálně přijatý a adaptovaný na každého z členů skupiny. V závěrečné diskusi celé třídy za přítomnosti učitele je jedinečná příležitost k ověření adekvátnosti kódu.

Vyvstává otázka, proč by měla být užitečnější interakce ve dvojicích než transmisivní cesta, ve které má učitel zaručeně vyšší kulturní úroveň než kamarád ve skupině a kdy tedy učitel musí zasahovat s větší efektivitou než žákův kamarád. Jedna z možných odpovědí je, že takovým způsobem se tvoří přesný jazyk, odpovídající situacím, a co je velmi významné, ne opakováním, reprodukcí, ale učením, v akci.

Tak se vyzdvihne význam verbalizace procesů řešení. Pouze jsou-li tyto procesy vysvětleny, přispějí pozitivním způsobem k pochopení (konstrukci toho, čemu říkám vím). Kdyby býval například Fermat neřekl, že řešení jeho problému bylo jednoduché, ale dlouhé a byl by býval přestavil metodu řešení, jistě by býval zanechal matematice a matematikům roky k uzoufání.

Jaká očekávání má matematická komunikace

Jak již bylo řečeno, matematická komunikace by mohla způsobit bezradnost učitele nebo toho, kdo bude učit. Není to učitel, kdo je řemeslníkem, strůjcem učení, žák se učí, i když on není přítomen. Učitel nemá způsob jak interreagovat se žákem, poněvadž nezná způsob, jakým by opravdu spolupracoval (spolureagoval). Dělá něco pozitivního, daří se mu rozvíjet kompetence (někdy i talenty) tím, že vnáší do vzdělávání rozvoj schopností algoritmických a přináší žákovi vybavení nástroji.

Podle mého mínění základní roli lze přičíst mentálním obrazům.

Historické kořeny problému mentálních obrazů pravděpodobně první, který přestavil dobře uspořádanou teorii toho, čemu říkáme mentální obrazy, byl Aristoteles. Problém, který tehdy vysvětloval, byl, jak dosáhnout objektivní znalosti universálií (ideí) bez zdůrazňování toho, že existují ve světě Hyperurania, jak navrhoval Platon. Sofisté tvrdili, že znalost byla založena výlučně na smyslovém vnímání, což znemožňuje všeobecné pravdy, což je dáno jedinečností vnímání. Tímto Sokrates oponoval teorii pojmu: matematické pojmy a metafyzické pojmy vytvářejí nepochybné jistoty a stavějí se oproti nevěrohodnosti (nejsou věrné) znalostí získaných na základě smyslového vnímání. Tímto způsobem považoval za možnou komunikaci mezi lidmi a přičítal vědě (matematice) a filosofii univerzální hodnotu.

Aristoteles tak jako Sokrates přijímal to, že člověk má intelektuální znalosti obecných pojmů a specifických imanentních pojmů (in re - tkvících v samé podstatě věci) a také pojmů matematických a metafyzických, ale na rozdíl od Platona neodmítá přínos smyslového vnímání. K ověření toho, co pozoruje, a toho, co je jedinečné, vlastní danému smyslu, nevytváří intelektuální znalost objektů, které jsou přijaty chybějícím smyslem. Kromě toho potvrzuje, že znalost vzniklá smyslovým vnímáním je lepší než znalost vzniklá intelektuální cestou: smysly zapisují na Tabulu rasu (prázdnou desku) intelektu tak, že spolupracují takovým způsobem, který je vlastní lidskému intelektu.

Zůstává otázka, jak se odvozují pojmy od smyslových vjemů. Aristotelova hypotéza říká, že existuje specifická inteligence, která vytváří intelektuální znalost pojmů (myšlenky, podstaty věcí). Používá pro to metaforu: bez světla oči nevidí předměty. Jestliže se světlo aktivního intelektu a předměty nahradí fantasma, ověří se přítomnost pojmů v duši. Aristoteles píše v díle O duši:

„Předměty vnímatelné působí na naše smysly, stejným způsobem působí fantasma na náš intelekt, proto v duši není intelekt, nejsou-li tam fantasma[3]. V intelektu jsou pojmy díky podstatě abstrakce. Totéž se děje matematickými entitami obsaženými v látce, ale které jsou chápané jako abstrakta a oddělené od hmoty samé. V naší společné zkušenosti nejsou věci vnímatelné bez rozměrů, proto pochopitelné aspekty, pokud existují v abstrakci jako matematické entity nebo reprezentují vlastnosti vnímatelných věcí, existují i ve formě vnímatelné. Pojmy nejsou fantasma, ale bez fantasmat není možné mít pojmy.“

Tato prezentace je koherentní s dosaženými výsledky výzkumů zaměřených na mentální obrazy. Například Fichsbein v roce 1993 uvedl k definici pojmu: „Jedna symbolická reprezentace (téměř vždy verbální) použitá v abstraktním myšlení, obsahuje obecnější význam odpovídající jedné množině konkrétních reprezentací s odvoláním na to, co tyto mají společného.“ Tentýž autor definuje mentální obraz jako „smyslovou reprezentaci jednoho objektu nebo jednoho jevu“.

Je dost snadné kontrolovat, jaký respekt k Aristotelově terminologii zůstává, i když byl termín fantasma nahrazen mentálními obrazy.

Neoplatonský filosof Prokles v 5. století dal filosofický význam tomuto tématu. Mezi jeho díly je kniha komentující první knihu Eklidových Základů. V ní řeší jeden delikátní problém základů geometrie. Hypoteticko deduktivní formulací v knize Základy (Elementi) opustil Euklides ve studiu Geometrie její původní filologický význam – měření

[3]Poznámka překladatele: termín fantasma má v češtině specifický význam a je užíván pouze v psychoanalýze, jde o specifický druh představ, které nemají odraz v realitě; zde jde o historický termín blízký slovu představa.

Země. Útvary, o kterých se Euklides zmiňuje, již nejsou konkrétní útvary nakreslené v písku nebo na desce, jsou to geometrické útvary. Vyvstává problém, zda takové útvary existují a v případě kladné odpovědi, kde. Jedna „bezelstná naivní“ odpověď takzvaná platonicko eukleidovská říká, že takové útvary jsou spolu uloženy ve stejném světě Hyperurania, ve kterém žijí ideje. Ale takovým způsobem to nemůže být. Platon mluvíval o myšlence koule sama o sobě dokonalé. Tedy jedinečné! To samé platí pro další geometrické útvary, každý je jedinečný. Jeden jediný trojúhelník (což napadal J. Lock), jediná kružnice atd. Vidíme nyní, jak dělá konstrukce středu úsečky AB. Konkrétní konstrukce jedné úsečky s použitím části osy úsečky získáme bod, který ji půlí. S Euklidovskou úsečkou to není možné takovým způsobem: opišme dvě kružnice o stejném poloměru jako je úsečka, a to kolem krajních bodů úsečky. Veďme přímku průsečíky těchto kružnic (takto jsme našli osu úsečky). Průsečík přímky s úsečkou AB je hledaný střed. Konstrukce, kterou jsem popsal slovy, není na papíře, díky popisu případně bez reprezentace, se děje v neviditelném světě (hyperuraniu), ve kterém existuje jediná kružnice. Prokles prohlašuje, že taková konstrukce se vytváří v naší představě a že geometrické útvary mají svoji reálnou existenci tak jako myšlenky a konkrétní objekty, ale jsou jiného charakteru a nacházejí své místo v mysli, v takové možné volnosti podoby vyvolává představy. Ještě jednou jsme u toho, čemu dnes říkáme mentální obrazy.

Význam mentálních obrazů v učení. Podle Aristotela tvorba mentálních obrazů (fantasmat) má společné kořeny s humanitou a díky tomu je možné vytvořit objektivní znalost. Relevance mentálních obrazů v učení geometrie byla zcela prokázána v mnohých výzkumech. Ale není korektní zúžit oblast aplikace na geometrii. V některých případech jsou komplexní situace, které mohou být znázorněny prostřednictvím obrázku, například Eulerovy a Gorgonnovy reprezentace sylogismů. V některých jiných případech to není možné.

Mentální obrazy reprezentují základ, díky kterému se může zrodit komunikace. Jsou takové, které se stávají používanými učitelem, když se z důvodu motivace odvolávají na zkušenost žáka. Mentální obrazy se rozvíjejí kompletním způsobem v pojmech (objektivních), způsobem nekompletním ve víře v pojmy a v individuálních snech, projektech, a jsou tedy dobrým východiskem.

Také ve škole interakce ve dvojicích je možná jen tehdy, když dojde k souladu v tom, o čem jsme mluvili. Z pohledu problému (úlohy) spočívá fáze dekódování textu v individualizování adekvátních mentálních obrazů a ve sledování použití pojmů. Avšak není řečeno, že jedna představa odpovídá jedinému pojmu, může nastat taková situace, kdy se student splete v použití pojmu, i když individualizoval konkrétně obraz, o kterém měl vypovídat.

Fáze řešení v sociálním konstruktivismu je založena na transformaci víry v pojmy, na převodu mentálních obrazů na nové pojmy, a tudíž na konstrukcích nových mentálních obrazů, na základě jedné neznámé situace, že vznikají nové představy, které jsou pak transformovány na nové pojmy.

Jeden jednoduchý příklad (hra „Na schovaný předmět“) ukazuje, jak se pracuje s mentálními obrazy. Proto potřebujeme, aby žádný z přítomných si nic nepsal k tomu, co se říká. V neprůhledném sáčku jsou uloženy předměty: malá hračka, disketa, guma na gumování, dvě pera, lístek na autobus. Nikomu je neukáži. Nyní vytáhnu jeden objekt a uložím ho jinam, aniž by ho bylo vidět. V sáčku jsou právě teď: hračka, disketa, guma, dvě pera. Když se ptám, co jsem vyndal ze sáčku, banální odpověď zní, že jsem vyndal lístek na autobus.

Řešení je založeno na porovnání, ale čeho? Na porovnání slov, která jsem vyslovil (Roscelin de Compiege)? Nebo na mentálních obrazech? Sledujte, že jste neviděli ani jeden z předmětů, které jsem jmenoval a o to méně ten, který jsem vyndal ze sáčku. Přesto jste výborně porozuměli tomu, o čem jsme ve hře mluvil. To proto, že máme „spolusdílené“ mentální obrazy či spíše obecný pojem o těchto objektech. Avšak v sáčku byla dvě pera a nenamítali jste, že se tímto způsobem spojily vaše pojmy v jeden, protože platonické pero je jediné.

Tato hra má svoji jazykovou dohru, protože popis objektů v sáčku může být zadán žákovi a přesný jazyk se stane nezbytným, jsou-li objekty podobné a je-li třeba je odlišit. Například bych mohl doplnit informace, které jsem prve zadával, že první pero bylo modré a druhé červené. A zdalipak jsou dvě lžíce v téže sadě příborů (po 6 nebo 12 kusech) stejné? Další závěr je takový, že je třeba vnést do konstrukce mentální obrazy. A co kdyby byl v sáčku čtverec, obdélník, lichoběžník? Nebo další matematické objekty: derivace, nespojitá funkce, funkce spojitá a funkce konstantní?

Metody řešení II

V teorii řešení úloh Polya označil četné procedury řešení. To samé presentoval Laktos, když vysvětloval metodu kontroly (k pochopení, použití) falsifikovaných či překroucených výsledků. Pokud analyzujeme pečlivě tyto metody, je snadné tvrdit, že kterákoli z nich je založena na přítomnosti mentálních obrazů, více či méně rozpracovaných ve formě představ. Například analogické myšlení není závislé na dobře ustáleném představě, je dáno tím, že z nich těží pro odhalení problému a pro jeho řešení, použití analogie je možné, poněvadž dva pojmy, ten popsaný a ten determinující, mají společný mentální obraz. To také umožní komunikaci ve dvojici a mezi učitelem a žákem.

Literatura

Aristotele: 1973, *Dell’anima*, Laterza, Bari.

Fischbein, E. 1993, The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139 – 162.

Lakatos, I. 1976, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge.

Marchini, C. 1993, Quale Logica per la scuola elementare, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 16 n. 11/12, 1017 – 1040.

Polya, C. 1945, *How To Solve It*, Princeton University Press, Princeton.

Za zlatým řezem

Magdalena Prokopová[1]

„Geometrie má dva poklady: Pythagorovu větu a zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.“ Johannes Kepler

Z historického hlediska sehrál zlatý řez velmi důležitou roli. Zabývalo se jím mnoho matematiků. Spis o něm sepsala pravděpodobně i Pythagorova žena Theano (5. stol. př. Kr.). Eukleides (kolem 300 př. Kr.), podle Servítova překladu, zformuloval úlohu o „poměru krajní a střední“ ve Druhé knize svých Základů [Servít 1907]. Po Eukleidovi to byli hlavně Hypsikles a Pappos (kolem 300 po Kr.). Velkou pozornost mu věnovali v období renesance především architekti, sochaři či malíři. Termín *zlatý řez* pochází snad od Leonarda da Vinci (1452-1519) [Bečvář, Fuchs 1994].

Tento článek obsahuje krátké seznámení s danou problematikou a náměty, které lze zahrnout do výuky jako motivační či zpestřující prvek nebo může posloužit jako materiál pro zájmové kroužky.

Původní problém

Připomeňme si krátce matematickou podstatu problému. Úkol by mohl znít takto:

Úsečku délky ***a*** *rozděl na dvě různé části tak, aby poměr délky celé úsečky* ***a*** *k délce její větší části* ***x*** *byl roven poměru délky* ***x*** *k délce menší části* ***(a-x)****, tj. aby platilo*

$$a : x = x : (a - x).$$

Úlohu můžeme řešit jak geometricky, tak algebraicky. Oba způsoby řešení vedou k dalším zajímavým problémům, a tak se vydáme po obou cestách.

Algebraické řešení

Původní poměr délek úseček si můžeme vyjádřit následující rovnicí:

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

[1]*Katedra matematiky a didaktiky matematiky PedF UK, Katedra matematiky PF UJEP, prokopova@pf.ujep.cz*

Jejím řešením dostáváme dva kořeny

$$x_1 = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = a\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Druhý z kořenů nevyhovuje zadání, neboť je záporný a my hledáme délku úsečky. Čistě formálně s ním ale pracovat můžeme a jak později uvidíme, bude to pro nás i zajímavé. Použitím prvního kořene dostaneme hledaný zlatý poměr

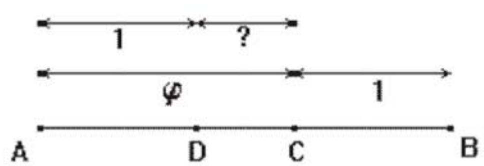
$$\frac{a}{x_1} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

s číselnou hodnotou přibližně $\varphi = 1,618$. Použitím druhého kořene dostaneme jakýsi „pseudozlatý poměr“

$$\frac{a}{x_2} = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Jedinečnost čísla φ a ψ

Číslo φ má mnoho zajímavých vlastností. K jedné z nich můžeme dospět řešením úlohy „o rozdělení rozdělené úsečky“.



Uvažujme úsečku AB, kterou bod C rozděluje ve zlatém řezu tak, že úsečka AC je delší než usečka CB. Rozdělme úsečku AB bodem D znovu zlatým řezem tak, že bod B bude krajním bodem delší z obou vzniklých úseček. V jakém poměru budou délky úseček AC a AD? Snadno nahlédneme, že bod D dělí úsečku AC opět zlatým řezem. Z toho vyplývá následují vlastnost

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.$$

Tuto vlastnost má jedině číslo φ a ψ, což lze velmi snadno dokázat řešením příslušné kvadratické rovnice.

Zlatý obdélník

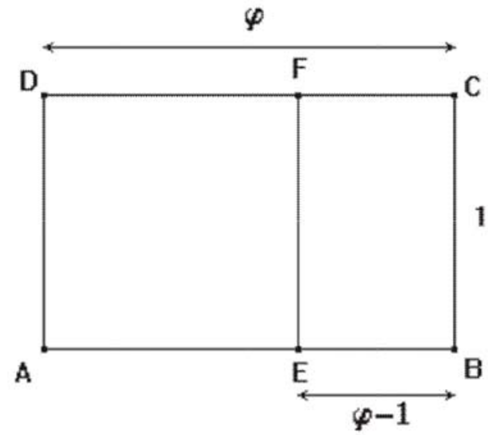
Právě objevenou vlastnost čísla φ můžeme využít při zkoumání vlastností tzv. zlatého obdélníku, tj. takového obdélníku, jehož délky stran jsou ve zlatém poměru.

Oddělíme-li od obdélníku čtverec o straně délky kratší strany obdélníku, tak jak je to naznačeno na obrázku, vzniklý obdélník bude opět zlatý.

Ověření je nasnadě. Je také zřejmé, že tento úkon můžeme libovolněkrát opakovat a nově vzniklé obdélníky budou opět zlaté.

Námět: Spojíme-li tři zlaté obdélníky tak, že každý je kolmý na zbylé dva, můžeme si vytvořit pravidelný dvacetistěn. Vrcholy zlatých obdélníků totiž tvoří vrcholy pravidelného dvacetistěnu. Jeho hrany můžeme vytvořit např. pomocí bavlnky. Lze to udělat tak, že každou hranu projdeme jen jednou? Jaká je délka hrany pravidelného dvacetistěnu, když znáte délku strany zlatého obdélníku?

Racionalita čísla φ



Když už jsme se blíže s číslem φ seznámili, bylo by záhodno zjistit, z jakého oboru čísel je. Zdá se, že jde o číslo iracionální, ale to musíme dokázat. Máme na výběr opět několik důkazových prostředků. Jedním z nich je ten, kde využijeme výše zmíněné vlastnosti zlatých obdélníků.

Předpokládejme, že číslo φ je racionální, tzn. že existují přirozená nesoudělná čísla $m,\ n$ taková, že $\varphi = \frac{m}{n}$, kde $d(m,\ n) = 1$. Nic nám nebrání, abychom zkonstruovali obdélník, jehož strany budou mít délky právě m a n. Jak předpokládáme, tento obdélník bude zlatý. Podle předcházející úvahy musí být i obdélník se stranami n a $(m-n)$ zlatý, tj.

$$\varphi = \frac{n}{m-n},$$

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{m-n}.$$

Odtud $n|m^2$. To jsme ale dospěli ke sporu s předpokladem, že $d(m,\ n) = 1$.

Mocniny čísla φ a Fibonacciho posloupnost

Zůstaňme ještě chvíli u zajímavých vlastností zlatého čísla. Vypočtěme několik prvních mocnin (příp. záporných) čísla φ.

φ^{-1}	φ^0	φ^1	φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7
φ-1	1	φ	$\varphi+1$	$2\varphi+1$	$3\varphi+2$	$5\varphi+3$	$8\varphi+5$	$13\varphi+8$

Snadno můžeme objevit pravidelnost ve tvaru $k$té mocniny čísla φ a obecně zapsat rekurentní vztah

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi^{k-1}.$$

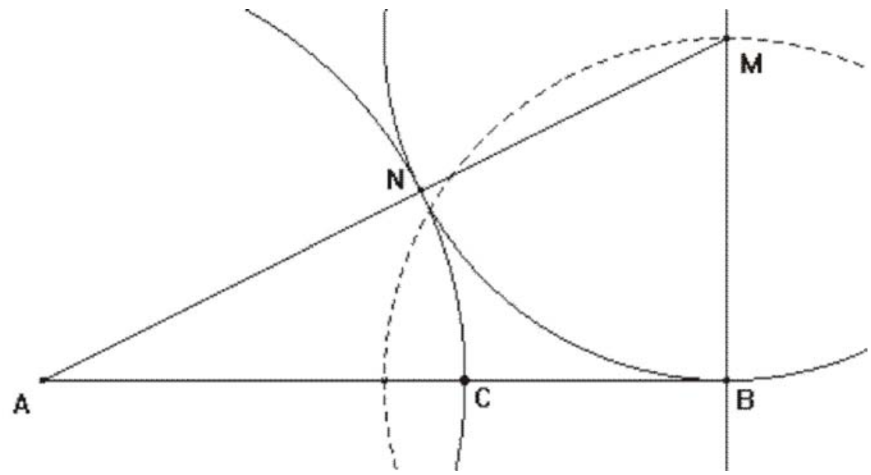
S připomenutím známé Fibonacciho posloupnosti, pro kterou platí stejné rekurentní pravidlo a jejíž první dva členy jsou $F_1 = 1,\ F_2 = 1$, můžeme $k$tou mocninu čísla φ zapsat jako

$$\varphi^k = F_k \cdot \varphi + F_{k-1}.$$

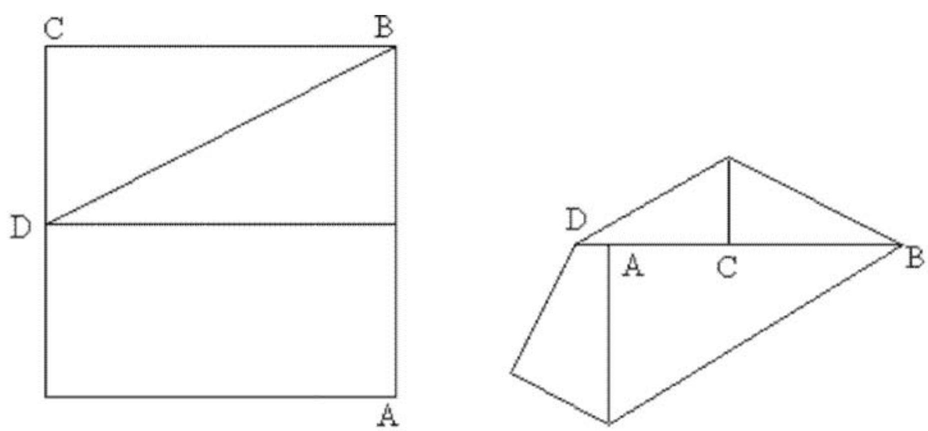
Námět: Pracujte stejně s číslem ψ a najděte vztahy mezi čísly φ a ψ.

Geometrická konstrukce

Vraťme se nyní ke slibovanému geometrickému řešení původní úlohy. Sestrojme bod M, který leží na kolmici k úsečce AB vedené bodem B ve vzdálenosti $\frac{1}{2}|AB|$ od bodu B. Dále sestrojme bod N, který je průsečíkem kružnice se středem v bodě M a poloměrem $|MB|$ a spojnice bodů A a M.
Povedeme-li nyní kružnici se středem v bodě A bodem N, průsečík s úsečkou AB je hledaným bodem C, který dělí úsečku AB zlatým řezem. Zajímavou úlohou je, dokázat, že tato konstrukce opravdu vede k rozdělení dané úsečky ve zlatém řezu.



Úlohy lze řešit i pomocí skládání papíru. Papír tvaru čtverce přeložíme na půl a znovu rozložíme. Podle obrázku přehneme stranu DC na přehyb BD. Na závěr přeložíme stranu BA na stranu BD, kde ji bod C rozdělí ve zlatém poměru.



Opět bychom měli ukázat, že tento postup skutečně vede ke konstrukci zlatého řezu.

Námět: Podobné úlohy můžeme vyslovit tak, že známe již delší (AC) či kratší (CB) z obou úseček a máme zkounstruovat úsečku původní (AB). Proveďte tyto konstrukce pomocí pravítka a kružítka, resp. pomocí papíru a vyslovte příslušné důkazy.

Zlatý trojúhelník

Jistě nám nic nebrání, abychom si zavedli i jiné „zlaté útvary“, např. zlatý trojúhelník. Nejprve se zamysleme, jaká definice bude vhodná. Návrh by mohl znít:

Definice 1: Zlatý trojúhelník je takový trojúhelník, jehož jedna strana je ke druhé ve zlatém poměru stejně jako jeho druhá strana ke třetí.

Záhy však zjistíme, že takový trojúhelník neexistuje. Strany takto definovaného trojúhelníku totiž nesplňují trojúhelníkovou nerovnost. Zlatý trojúhelník je ve skutečnosti definován takto:

Definice 2: Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trpjúhelník, jehož základna ku ramenu je ve zlatém poměru.

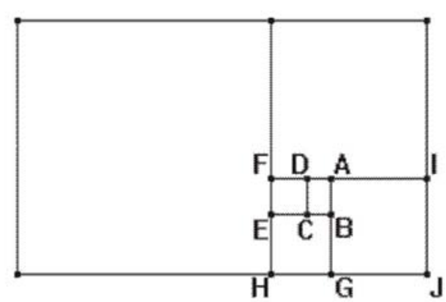
Tento trojúhelník můžeme dělit, podobně jako zlatý obdélník, na menší zlaté trojúhelníky. Máme-li zlatý trojúhelník ABC, kde AB je jeho základna, potom stačí najít bod D náležející straně AC a $|AD| = |AB|$. Trojúhelník DAB je podobný trojúhelníku ABC a tudíž je také zlatý. Ještě zajímavější je z tohoto hlediska pravidelný pětiúhelník, kde strana ku úhlopříčce jsou ve zlatém poměru, stejně tak úhlopříčky se vzájemně dělí zlatým řezem. Průsečíky úhlopříček jsou vrcholy dalšího pravidelného pětiúhelníku. Můžeme se například ptát, v jakém poměru jsou strany původního a takto nově vzniklého pětiúhelníku. Vlastnosti pravidelného pětiúhelníku by ovšem vystačily na samostatný článek.

Námět: Zkoumejte vlastnsti pravidelného pětiúhelníku a vlastnosti trojúhelníku se stranami délky $\sqrt{\varphi}$, 1 a φ jednotek.

Několik úloh

Úloha 1

Mějme zlatý obdélník $ABCD$ o stranách délky 1 a φ jednotek. Sestrojme čtverec nad jeho delší stranou. Již víme, že vzniklý obdélník $ABEF$ je zlatý. Opakujme tento postup znovu, znovu získáme zlatý obdélník. Pokračujme takto $n$krát.



Nyní si představme, že stojíme v bodě A a začneme obcházet kolem zlatých obdélníků dokola jako po spirále tak, abychom prošli všechny strany všech zlatých obdélníků. Kolik jednotek bude měřit naše cesta, obejdeme-li n zlatých obdélníků?

Řešení

Vyjdeme-li z bodu A, bude naše cesta následující:

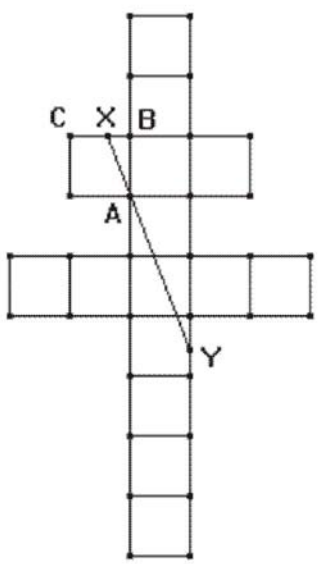
$$A\ B\ C\ D\ A\ B\ E\ F\ A\ G\ H\ F\ I\ J\ \dots$$

Délka cesty v daných jednotkách bude potom

$$O_n = 1 + \varphi + 1 + \varphi + (\varphi + 1) + \varphi + (\varphi + 1) + (2\varphi + 1) + (\varphi + 1) + (2\varphi + $$
$$+1) + (3\varphi + 2) + (2\varphi + 1) + (3\varphi + 2) + (5\varphi + 3) + \ldots + (F_n\varphi + F_{n-1}) =$$
$$= 1 + \varphi + 1 + \varphi + \varphi^2 + \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \varphi^3 + \varphi^4 + \ldots + \varphi^n =$$
$$= 2 + 3\sum_{i=0}^{n} \varphi^i = 2 + 3\frac{\varphi({}^n - 1)}{\varphi - 1} = 2 + 3\varphi^2(\varphi^n - 1).$$

Úloha 2

Podobně můžeme vyslovit úlohu tak, že budeme obcházet zlaté obdélníky, tentokrát však směrem dovnitř. Vyjdeme opět od obdélníku se stranami 1 a φ jednotek. Další obdélník bude mít velikost stran $\varphi - 1$ a 1 jednotka. A tak dále. Jaká bude délka naší cesty, obejdeme - li všechny zlaté obdélníky, které lze postupným vpisováním získat? Řešení je obdobné jako v předcházející úloze, jen tentokrát sčítáme nekonečnou řadu.



Úloha 3: Lotrinský kříž

Lotrinský kříž se skládá z 15 jednotkových čtverců. Bodem A je vedena přímka XY, dělící kříž na dvě části o stejném obsahu. V jakém poměru dělí bod X úsečku BC?
Řešení najde čtenář v [Kowal 1975].

Na závěr

Problematika zlatého řezu je neuvěřitelně bohatá. K řešení problémů spjatých se zlatým poměrem lze využít nejen geometrie, ale i algebry, matematické analýzy nebo teorie grafů. Nabízí tak široké základy pro pohled do světa matematiky. Je silným motivačním prostředkem. Díky tomu ji lze snadno použít v rozšiřujícím učivu matematiky na střední i základní škole či v zájmových kroužcích. Toto téma je také vhodné pro různé mezipředmětové projekty s historií, biologií či výtvarnou výchovou. Jednou z lákavých otázek je zlatý poměr na lidském těle. Poměr výšky celé postavy ku výšce k pupíku se totiž blíží číslu φ. Studenti tak mohou provést statistické měření (na sobě, svých spolužácích, rodičích) a podle svých možností ho vyhodnotit. Své závěry mohou pak porovnat s proporcemi nejslavnějších uměleckých děl jako je např. socha Davida od Michelangela Buonarrotiho (1475-1564).

Literatura

Bečvářová, M. *Eukleidovy Základy. Jejich vydání a překlady.* Prometheus, Praha 2002.

Bečvář, J., Fuchs, E. *Historie matematiky I.* JČMF, Brno 1994.

Kowal, S. *Matematika pro volné chvíle.* SNTL, Praha 1975.

Servít, F. *Eukleidovy základy (Elementa).* JČMF, Praha 1907.

Struik, D. J. *Dějiny matematiky.* Orbis, Praha 1963.

Znám, Š. a kol. *Pohl'ad do dejín matematiky.* SNTL, Bratislava 1986.

Grafy v učivu základní školy

Jana Příhonská[1]

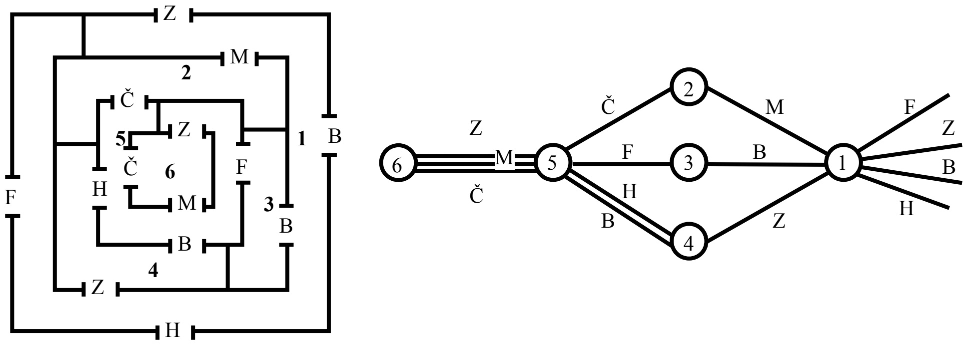
Námětem dílny bylo předložení souboru úloh, kde bylo ukázáno možné využití grafů v učivu základní školy. Soubor byl rozčleněn do tří částí, které na sebe navazovaly. První část se týkala vlastního zavedení grafů pomocí tzv. bludišť barevných bran, druhá část byla zaměřena na ilustraci grafového kódování u několika aplikačních úloh a třetí část obsahovala sérii úloh aplikačních, které byly řešeny výhradně za použití grafů. Pojem „grafové kódování" není možné nalézt v žádné dostupné literatuře. Zavádíme jej pro naše účely a vyjadřuje víceméně záměr o přeformulování zadané úlohy do grafové podoby. Snahou přitom je obsáhnout co možná nejširší oblast matematiky a vzájemně propojovat různé tématické okruhy s ohledem na praktickou využitelnost. Soubor předložených úloh a jejich řešení je možné použít jako propedeutiku základních pojmů z teorie grafů.

Vzhledem k omezenému prostoru pro prezentaci úloh a jejich řešení, uvádím dále vždy jen ukázku některých úloh s řešením a poté pouze zadání některých problémů.

Úlohy typu bludiště barevných bran

Zde vycházíme z [He], kde jsou zmíněná bludiště popsána. Grafické řešení úloh tohoto typu uvádím na následujícím příkladě.

[1] *TUL v Liberci, jana.prihonska@vslib.cz*

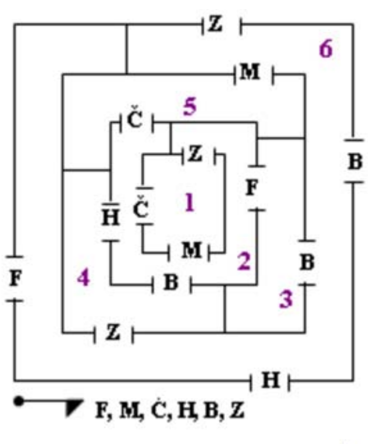


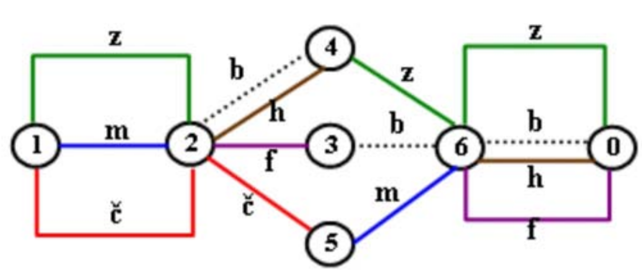
Obr. 1

Bludiště je charakteristické svými barevnými bránami, které lze odemknout pouze klíčem stejné barvy. Pod zadaným bludištěm jsou vždy uvedeny klíče, které máme k dispozici a které musíme použít pouze v daném pořadí. Grafické řešení bylo ukázáno na několika příkladech. Abychom mohli vytvořit graf daného bludiště, očíslujeme jednotlivá nádvoří (ohraničený prostor v bludišti, kam je možné se dostat spojovacími dveřmi) v bludišti podobně, jak je ukázáno na obrázku. Uzel v daném grafu potom odpovídá stejně očíslovanému nádvoří, hrana se shodně označenou barvou odpovídá spojovacím dveřím mezi jednotlivými nádvořími. Místo indexování jednotlivých hran je možné používat barevných čar shodných s barvami klíčů. Je vhodné použít ještě jeden uzel, který reprezentuje vnější prostředí a který shodně označujeme jako „0“.

Zadání úloh je pro všechny úlohy tohoto typu stejné: projít z vnějšku do středu bludiště při použití zadaných klíčů. Každá z úloh obsahuje dále ještě dílčí úkoly, které se vztahují k danému bludišti.

Pro ilustraci uvádím pouze jedno bludiště, které patří mezi komplikovanější a na jehož řešení je zřejmá výhodnost grafové formulace problému (viz obr. 2).





Obr. 2 Obr. 3

Řešení:

Na obr. 3 vidíme příslušný graf.

Trasa procházení je následující: 0 – f – 6 – m – 5 – č – 2 – h – 4 – b – 2 – z – 1

Dílčí úkoly:

1. Změnilo by se řešení v předchozím případě, jestliže byste měli k dispozici univerzální klíč, kterým se dá odemknout kterákoli brána? Pokud ano, napište jak, pokud ne, zdůvodněte svoji odpověď.

   Počet možných tras, vedoucích do středu bludiště, se mnohonásobně zvětší.

2. Jaký klíč můžete ztratit, abyste se při použití zbylých klíčů v daném pořadí dostali do středu bludiště?

   Ztratit nelze žádný klíč.

3. Při jakém pořadí klíčů F, M, Č, H, B, Z se určitě nikdy nedostanete do středu bludiště?

   Stačí si všimnout barev, které se nemohou vyskytovat následně za sebou.

   Jsou to např. kombinace začínající F – Č, M – Č, F – Z – Č, F – B – Č . . . , M – H (resp. Č, B, Z, F) a další.

4. Změňte pořadí daných klíčů (F, M, Č, H, B, Z). Uměli byste určit počet všech různých možností pořadí klíčů? Pokuste se o to. Počet všech možných pořadí je dán počtem permutací ze šesti prvků, tj. $P(6) = 6! = 720$ možností.

Ilustrace grafového kódování

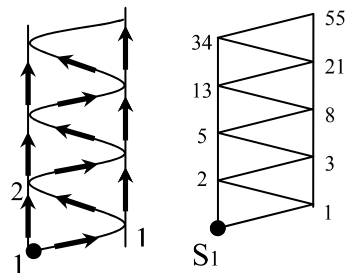
Pro ilustraci jsem vybrala úlohy, z jejichž řešení je patrný význam námi zavedeného grafového kódování. Úlohy člením po skupinách buď z hlediska použité metody řešení (např. prohledávání grafu) či z hlediska tématického celku, kterého se týkají. U některých uvádím pouze zadání, řešení je možné nalézt v uvedené literatuře.

I. Hledání počtu cest v daném grafu

Ú1: Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny – cesta se samými zatáčkami, doprava, doleva (viz obr. 4). Z míst, v nichž se serpentiny ohýbají, můžeme na výstupu pokračovat i přímou cestou.

Úkol: Ke každému bodu, ve které se cesty větví, napiš, kolika způsoby se tam turisté mohou dostat. Nebudou se přitom nikdy vracet, půjdou stále vzhůru, ve směru daném některou ze šipek. Na první dvě rozhraní jsou již správná řešení napsána. Ke startu je připsána 1, protože nikde před startem nebylo rozcestí a dalo se tam dostat pouze jedinou cestou.

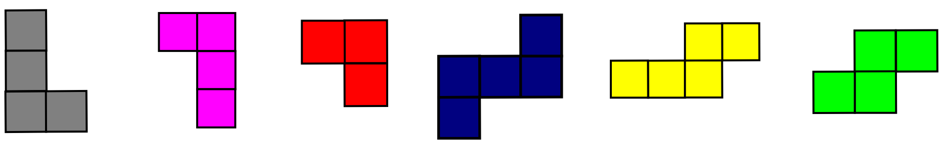
Řešení: Pro zjišťování čísla, které se připíše k dalšímu rozcestí, si pomůžeme překreslením plánku jako grafu. Do každého následujícího bodu se dostaneme pouze přes předcházející body, a to součtem počtu cest, které vedou do obou předcházejících dohromady. Počet cest vedoucích do vrcholu je na obr. 4.



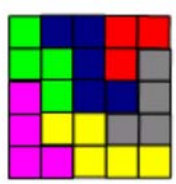
Obr. 4: Plánek a jeho graf

II. Úlohy typu polynomin

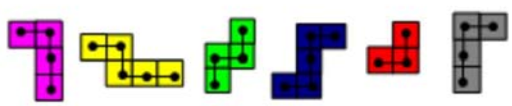
Ú2: Z daných šesti dílů sestavte čtverec 5x5.



Řešení: Jedno z možných řešení vidíme na obr. 5. Je zřejmé, že otáčením o 90˚ získáme další tři řešení. „Grafové kódování" umožní každému z dílů přiřadit graf– čtverečku odpovídá uzel, dva uzly spojíme hranou tehdy, pokud mají čtverečky společnou stranu. Pro lepší názornost jsou příslušné grafy umístěné přímo do daného dílu (obr. 6).



Obr. 5

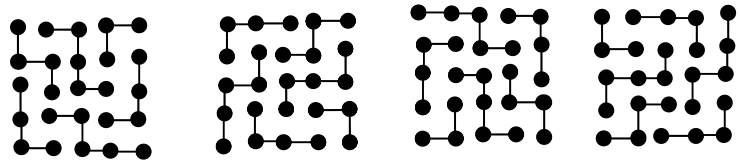


Obr. 6

Úlohu je možné přeformulovat následovně:

Do čtvercové sítě 25 bodů umístěte 6 daných grafů tak, aby žádné dva neměly ani jeden společný uzel a byly využity všechny body dané sítě.

Řešení: je evidentní z obr. 7.



Obr. 7

III. Pravděpodobnostní úlohy – [Pl]

Ú3: Jak simulovat hod klasickou hrací kostkou?

Problém 1: Klasická hrací kostka má pravidelný tvar krychle, na každé stěně je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Představme si, že kostku ztratíme a potřebujeme simulovat hod kostkou pomocí 4 koulí různé barvy. Koule umístíme do urny a táhneme 2 z nich. Tažené koule nevracíme zpět.

Problém 2: Máme k dispozici 4 stejné koule. Jak je možné nyní simulovat hod kostkou?

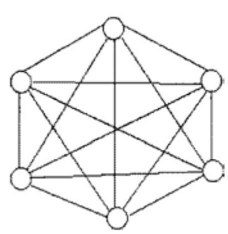
Problém 3: K dispozici máme 3 koule různé barvy. Jak nyní můžeme hod kostkou simulovat?

IV. Úlohy se sportovní tématikou

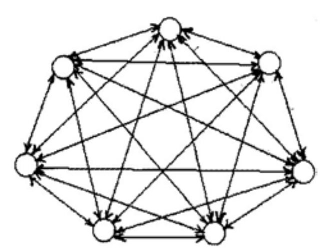
Problém 1: Na turnaji ve volejbale hraje šest družstev systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se celkem odehraje?

Řešení: Jde o vytvoření úplného neorientovaného grafu na šesti uzlech, jak ukazuje obrázek – počet hran je 15. Při výpočtu je možné využít kombinačních čísel $\binom{6}{2} = 15$ (obr. 8).

Problém 2: Do soutěže v košíkové bylo zapojeno 7 družstev ze 7 různých měst. Kolik zápasů bylo sehráno, když se hrálo v sídelním městě každého družstva?



Obr. 8



Obr. 9

Řešení: Jedná se o vytvoření úplného orientovaného grafu. Vzhledem k podmínkám úlohy jsou šipky obousměrné. Celkový počet zápasů je dvojnásobný, tj. v našem případě 42 (obr. 9).

V. Hledání Eulerovského tahu

Ú4: Přes řeku Pregelja vede sedm mostů, z nichž pět vede na ostrov (O). Situace je zakreslena na obrázku 10.

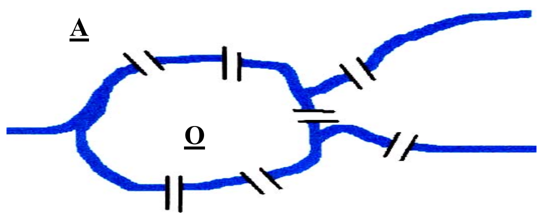
1. Bylo by možné udělat si takovou procházku, při níž by se všechny mosty přešly pouze jednou a žádný nebyl vynechán? Svoji odpověď zdůvodni.

2. Jak musíme jít, když má procházka začít a skončit v bodě A, žádný most se nesmí vynechat a co nejméně mostů se má projít dvakrát?

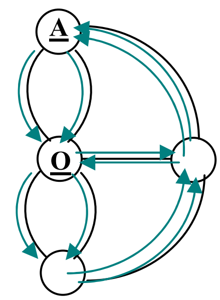
Řešení:

1. Obrázek 10 je možné překreslit pomocí grafu (obr. 11), kde hrany odpovídají mostům a jednotlivé oblasti, které řeka vzájemně odděluje jsou uzly. Ostrov a výchozí místo jsou v grafu shodně označené.Hledáme eulerovský tah. Ten však vzhledem ke stupňům jednotlivých uzlů neexistuje, tedy procházka možná není.

2. Jedno z možných řešení je barevně vyznačeno přímo do grafu.



Obr. 10



Obr. 11

Literatura

[He] Hejný, M.: *Barevná bludiště*. PedF UK, Praha 1998.

[Pl] Plocki, A.: *Pravděpodobnost kolem nás. Počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*. Ústí nad Labem, 2001.

[Př] Příhonská, J.: Teorie grafů v učivu základní školy. In: *Sborník Mezinárodní věd. konf. „Matematika v príprave učiteľov 1.st. ZŠ“*, Liptovský Trnovec, 2001.

[Pří] Příhonská, J.: Řešitelské strategie s využitím teorie grafů v učivu základní školy. In: *Sborník Mezinárodní věd. konf. „Matematika v přípravě učitelů primární školy“*. Olomouc, 2002.

Grafické kalkulačky a propedeutika funkcí

Jarmila Robová[1]

Grafické kalkulačky se již téměř dvacet let používají ve výuce matematiky u nás i ve světě na různých typech škol. Postupně získané zkušenosti ze školské praxe ukazují, že hlavní přínos zařazení této pomůcky do vyučování spočívá ve zvýšení názornosti vyučování, vizualizaci některých pojmů, odstranění mechanických a zdlouhavých postupů a také v možnosti experimentování a modelování s matematickými objekty. Školská témata, ve kterých je grafický kalkulátor vhodným pomocníkem, souvisejí především s pojmem funkce. Pedagogické experimenty potvrzují, že studenti používající grafické kalkulačky dosahují lepších výsledků při:

- pochopení obecných vlastností funkcí
- čtení a interpretaci grafických informací (z grafu funkce získají více poznatků)
- přiřazování grafů funkcí k jejich předpisům
- porozumění souvislostí mezi grafickou, numerickou a algebraickou reprezentací problému

Zkušeného pedagoga tyto závěry nijak nepřekvapí, neboť ze své praxe dobře ví, že studenti potřebují pro osvojení nových pojmů a vztahů dostatek konkrétních zkušeností i modelů, jinak dochází k formálnímu osvojení látky bez hlubšího porozumění. Grafická kalkulačka je učební pomůckou, která snadno a rychle zprostředkovává názorné modely předkládaných pojmů a vztahů v řadě témat, avšak učitelé často hledají vhodné metodické postupy pro začlenění této pomůcky do vyučování matematiky.

Úvod

Pracovní dílny, která byla věnována propedeutice funkcí za podpory grafických kalkulaček, se zúčastnili učitelé základních, středních i vysokých škol. V úvodu dílny byly probírány základní dovednosti při práci s grafickou kalkulačkou, které by si uživatel této pomůcky měl osvojit. Jde především o numerické dovednosti (např. problém zobrazení iracionálních čísel) a další dovednosti, které souvisejí s nastavením rozsahu souřadnic na obrazovce kalkulačky (např. problém zobrazování nespojitých funkcí). Zvládnutí těchto dovedností je nezbytným předpokladem k tomu, aby studenti na obrazovce kalkulačky dokázali zobrazit tzv. kompletní graf dané funkce, tj. graf s význačnými vlastnostmi zkoumané funkce (nulové body, extrémy aj.).

V další části dílny byly diskutovány možnosti využití grafických kalkulaček ve školské matematice při různých činnostech:

[1] *MFF UK, Praha, robova@karlin.mff.cuni.cz*

- jako pomůcky při zavádění nových pojmů, které mají grafickou reprezentaci a lze je tedy zobrazit na obrazovce kalkulačky
- jako nástroje pro „experimentování v matematice“, kdy studenti na základě vlastní činnosti s matematickými objekty formulují poznatky, které následně učitel ve společné diskusi zpřesňuje
- jako efektivního prostředku pro vícenásobnou reprezentaci zkoumaného problému (numerickou, grafickou a algebraickou)

Konkrétní příklady využití grafické kalkulačky

Na obrazovce grafické kalkulačky lze snadno zobrazit všechny běžné způsoby zadání funkce – funkčním předpisem, tabulkou funkčních hodnot i grafem. Jednoduchým způsobem lze také demonstrovat grafickou reprezentaci některých základních pojmů jako je pojem *rostoucí* a *klesající funkce* (pouhým pohybem kurzoru po grafu funkce můžeme zkoumat vzájemný vztah mezi hodnotami nezávislé i závislé proměnné) či pojem *prosté funkce* (s využitím tzv. „horizontálního testu“).

Grafickou kalkulačku je vhodné využívat nejen k ilustraci zaváděných pojmů, ale také k tomu, aby se studenti na základě vlastní činnosti postupně seznamovali s některými vlastnostmi elementárních funkcí. Účastníci dílny proto postupně řešili následující příklady, v nichž byly ukázány možnosti formulování problémů z této oblasti.

Příklad 1

a) Zobrazte grafy funkcí $f_1 : y = x$, $f_2 : y = 2x$, $f_3 : y = 3x$ v rozsahu souřadnic $\langle -4, 4\rangle \times \langle -10, 10\rangle$ a zkoumejte, co mají grafy společného a v čem se liší.
b) Jaký vliv má koeficient u proměnné x na graf funkce?
c) Zkuste odhadnout na základě předchozího pozorování, jak vypadají grafy funkcí $f_1 : y = -x$, $f_2 : y = -2x$, $f_3 = -3x$. Zkontrolujte pomocí kalkulačky svůj odhad.
d) Jak bude vypadat graf funkce $f : y = ax$, kde a je konstanta?

Příklad 2

a) Zobrazte grafy funkcí $f_1 : y = x + 1$, $f_2 : y = x + 2$, $f_3 : y = x + 3$ např. v rozsahu souřadnic $\langle -3, 3\rangle \times \langle -4, 6\rangle$ a zkoumejte, co mají grafy společného a v čem se liší.
b) Jaký vliv má přičítaný koeficient 1, 2 a 3 na graf funkce?
c) Zkuste odhadnout na základě předchozího pozorování, jak vypadají grafy funkcí $f_1 : y = x - 1$, $f_2 : y = x - 2$, $f_3 = x - 3$. Zkontrolujte pomocí kalkulačky svůj odhad.
d) Jak bude vypadat graf funkce f: $y = x + b$, kde b je konstanta?

Příklad 3

Určete průsečíky grafů následujících funkcí s osami x i y.
a) $y = x - 1$
b) $y = 2x + 4$
c) $y = 3x + 5$

Příklad 4

Zobrazte grafy funkcí:
a) $f_1 : y = x + 1$, $f_2 : y = -x + 2$,
b) $f_3 : y = -2x + 3$, $f_4 : y = 0,5x - 2$
c) $f_5 : y = 2x/3 + 1$, $f_6 : y = -3x/2 - 2$
v rozsahu souřadnic $\langle -15, 15\rangle \times \langle -10, 10\rangle$. Jaká je vzájemná poloha grafů v každé dvojici? Jaký je vztah mezi koeficienty u proměnné x v každé dvojici? (Pozor na rozsah souřadnic!)

Na základě řešení těchto příkladů byly pro účastníky dílny připraveny další úlohy k samostatné práci, ve kterých měli účastníci vytvořit sadu příkladů na zkoumání vlivu jednotlivých koeficientů a, b, c z předpisu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) na graf této funkce. Postupně měly být zkoumány grafy funkcí $y = a \cdot x^2$, $y = x^2 + c$, $y = (xb)^2$, $y = (xb)^2 + c$, $y = a(xb)^2 + c$.

S využitím předchozích pozorování byly formulovány závěry pro tvar grafů některých polynomických funkcí $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, jejichž speciálním případem jsou lineární i kvadratické funkce:

- pro $n = 1$ existují pouze dva možné typy grafu

- pro $n = 2$ také existují dvě možnosti pro tvar grafu

Vzhledem k tomu, že řešení předchozích příkladů zabralo více času, než bylo předpokládáno, byly v závěru dílny pouze nastíněny další možnosti využití uvedených postupů při zkoumání vlastností a grafu kubické funkce.

Příklad

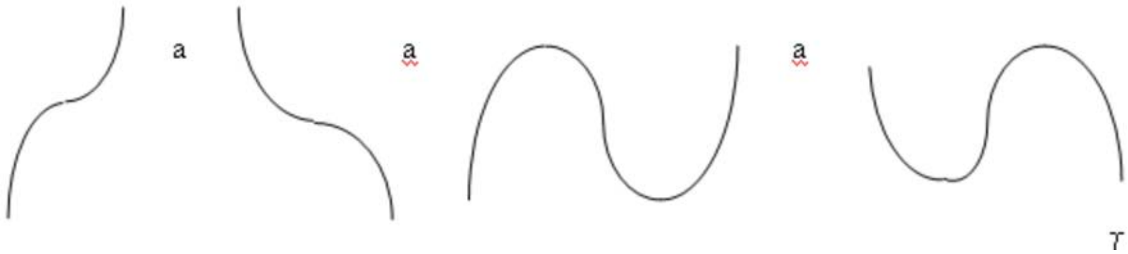
Zkoumejte pomocí kalkulačky, jaké jsou možné typy grafů pro kubickou funkci
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, kde $a \neq 0$, a, b, c, $d \in \mathbf{R}$.

Návod pro řešení

– nejdříve zkoumejte funkce $y = ax^3$

– dále funkce $y = ax^3 + bx^2$
– nakonec zkoumejte funkce $y = ax^3 + bx^2 + cx$ (absolutní člen d způsobí jen vertikální posuv grafu)

- pro $n = 3$ existují čtyři možnosti pro tvar grafu



Závěr

Grafická kalkulačka je užitečný pomocník ve výuce matematiky v případě, že je používána racionálně (vím, kdy je rozumné ji použít a kdy naopak řešit problém klasickou metodou) a zodpovědně (za řešení problému jsem zodpovědný já a ne kalkulačka a vím, co mohu od kalkulačky očekávat).

Literatura

[1] Demana, F. – Waits, B. K. – Clemens, S. R.: *Precalculus Mathematics. A Graphing Approach.* Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1994

[2] Robová, J.: Vyšetřování vlastností elementárních funkcí s využitím grafického kalkulátoru (1. a 2. část). *Matematika-fyzika-informatika*, 9 a 10, 1999–2000, č. 4 a č. 5

[3] Robová, J.: Osvojování pojmů s využitím výpočetní techniky. In.: *Sborník příspěvků XIX. Mez. kolokvium o řízení osvojovacího procesu*, VVŠ PV Vyškov, 2001

Didaktická hra STAVÍME DŮM aneb Proč bychom jen rýsovali . . .

Filip Roubíček[1]

Dílna věnovaná problematice stereometrických kompetencí žáků základní školy byla koncipována jako praktická ukázka skupinových aktivit s žáky. Cílem dílny bylo seznámit její účastníky s didaktickou hrou *Stavíme dům* – aktivitou zaměřenou na rozvoj některých geometrických dovedností, jako jsou modelování a zobrazování trojrozměrných objektů a také komunikačních dovedností v rámci vyučování geometrii.

Úvod

Geometrie je považována za nejkonkrétnější a s realitou nejvíce spjatou část matematiky. Děti přicházejí do školy s řadou geometrických - stereometrických zkušeností. Prostor je dětem bližší než rovina, protože jsou s ním v neustálém kontaktu. Setkávají se se situacemi, kdy je třeba vymodelovat, nakreslit nebo popsat trojrozměrný objekt, nejprve ve svých hrách, později ve vyučování geometrii a budou se s nimi setkávat i nadále. Jednou z možností, jak tyto zkušenosti náležitě využít pro rozvoj některých geometrických kompetencí, je zařazovat do vyučování geometrii aktivity, při nichž žáci pracují se stavebnicí.

Didaktická hra *Stavíme dům*

Aktivita, s níž byly účastníci dílny seznámeni, byla původně určena k experimentálním účelům v rámci zkoumání problematiky znakových reprezentací geometrických objektů (Roubíček, 2002). Poté byla v upravené podobě používána i v hodinách geometrie. Hra *Stavíme dům* je založena na spolupráci tří žáků v rolích zákazníka, architekta a stavitele. Zákazník slovně popíše architektovi model domu, architekt vytvoří na základě jeho popisu nákres a stavitel podle jeho nákresu sestaví model. Žáci se v těchto rolích střídají. Jejich úkolem je získat dva modely téhož domu.

Žáci mají k dispozici dvě stejné stavebnice, centimetrová měřítka a listy papíru se čtvercovou sítí. Stavebnici tvoří modely různých geometrických těles, pomocí kterých lze modelovat reálné stavby. Obsahuje modely krychlí, kvádrů, trojbokých hranolů, jehlanů a dalších atypických těles pro modelování střech. Tvary a rozměry stavebnicových dílů jsou navrženy tak, aby bylo možné díly snadno kombinovat (některé modely lze sestavit i více způsoby) a vytvářet z nich rozmanité stavby a také aby jejich pravoúhlé průměty byly snadno zobrazitelné ve čtvercové síti.

Didakticky nejzajímavější částí této aktivity je komunikace mezi žáky v rolích zákazníka a architekta. Připomíná rozhovor po telefonu, neboť žáci na sebe navzájem nevidí –

[1]*MÚ ČSAV, roubicek@math.cas.cz*

jsou odděleni zástěnou nebo sedí zády k sobě. Tento způsob komunikace je pro žáky ve vyučování geometrii nejen neobvyklý, ale v případě popisování trojrozměrného objektu poměrně náročný (zvláště nesmí-li architekt vstupovat do zákazníkova popisu svými dotazy). Učiteli může poskytnout cenné informace o úrovni žákova osvojení geometrických pojmů a poznatků.

Žákům na prvním stupni, pro něž by bylo zobrazování trojrozměrného objektu na základě jeho slovního popisu příliš obtížné, je možné úkol zjednodušit vynecháním role architekta. Žáci tedy pracují ve dvojici: žák v roli zákazníka model popisuje a žák v roli stavitele sestavuje model podle jeho popisu. Protože oba žáci pracují se stejnou stavebnicí, mohou se snadno přesvědčit o shodnosti svých modelů jejich porovnáním.

Program a realizace dílny

Dílna zahrnovala čtyři na sebe navazující aktivity, které vycházejí z výše popsané didaktické hry *Stavíme dům*. Při jejich prezentaci, zaměřené na vlastní prožitek, byl uplatněn *třífázový model procesu učení*, tj. model tvořený fází evokace (E), fází uvědomění si významu (U) a fází reflexe (R) (Košťálová, 2003). S tímto modelem jsem se seznámil v kurzu *Čtením a psaním ke kritickému myšlení*, který pořádalo občanské sdružení Kritické myšlení na škole, kde vyučuji.

1. Fáze evokace

Dílna byla uvedena následujícím úkolem: *Prohlédněte si soubory předmětů na lavicích označených písmeny A, B, C, D a pojmenujte tyto soubory. Lístečky s názvy souborů nalepte na tabuli, a potom si přečtěte, co napsali ostatní.* Cílem této nenáročné aktivity bylo evokovat prostřednictvím různých modelů a předmětů určitého tvaru geometrické pojmy *krychle, kvádr, hranol* a *jehlan*. Vybavení si těchto pojmů bylo důležité pro navazující skupinovou aktivitu.

2. Fáze uvědomění si významu

Hlavní část dílny tvořily dvě skupinové aktivity. Při první aktivitě účastníci dílny vytvořili trojčlenné skupiny a ve skupinách si rozdělili role zákazníka, architekta a pozorovatele. Jednotlivé role byly popsány následovně:

Zákazník

- Sedí zády k architektovi tak, aby neviděl jeho nákres domu.
- Sestaví model domu (doporučuje se použít 4 až 6 stavebnicových dílů).
- Popisuje architektovi, jak dům vypadá (tj. tvar domu včetně rozměrů).
- Na sdělení popisu domu má 5 minut.

Architekt

- Sedí zády k zákazníkovi tak, aby neviděl jeho model domu.
- Naslouchá zákazníkovi - na nic se ho neptá.

- Popis řídí slovy „Počkej. Zopakuj. Nerozumím.“ apod.
- Vytváří nákres domu podle zákazníkova popisu.
- Kreslí od ruky na papír se čtvercovou sítí.

Pozorovatel

- Sedí nebo stojí tak, aby mohl dobře sledovat činnost zákazníka i architekta.
- Jejich činnost nekomentuje, pouze pozoruje.
- Zaznamenává průběh komunikace a strategie, které používají.
- Nezasahuje do jejich rozhovoru.
- Sleduje čas.

V rolích se účastníci střídali následovně: zákazník → architekt → pozorovatel → zákazník. Každá skupina měla k dispozici dvě stejné stavebnice (popis viz výše), centimetrová měřítka a listy papíru se čtvercovou sítí.

Při druhé aktivitě nejprve účastníci v trojčlenných skupinách společně vytvořili nákres a popis modelu domu, který sestavili. Potom si skupiny nákresy a popisy svých modelů navzájem vyměnily tak, aby každá skupina pracovala s nákresem a popisem dvou různých modelů, a měly za úkol sestavit jednak model podle nákresu, jednak podle popisu.

3. Fáze reflexe

Závěrečnou aktivitou dílny byla písemná reflexe. Každý z účastníků se měl zamyslet nad tím, jaké strategie použil při práci on a jaké by použili jeho žáci. Poté následovala diskuse, ve které účastníci sdíleli své prožitky a poznatky z dílny a hovořili o významu jednotlivých aktivit a možnostech jejich uplatnění ve vyučování.

Závěr

Dílna byla uzavřena jejím zhodnocením. V hodnocení se účastníci vyjadřovali k tomu, co si uvědomili, co jim vrtá hlavou a co je inspirovalo.

- Uvědomili si, že popsat trojrozměrný objekt není tak snadné, jak by se mohlo na první pohled zdát („není jednoduché přesně říci i jasné věci“) a že je třeba rozvíjet komunikační dovednosti (jako jsou volba strategie nebo používání terminologie).
- Vrtá jim hlavou, kde získají stavebnici pro tyto geometrické aktivity.
- Inspirovalo je propojení různých aktivit, metoda „jeden popisuje – druhý kreslí“, práce ve skupinách . . .

Literatura

Košťálová, H. Efektivní vyučování respektuje přirozené procesy učení. *Učím s radostí.* Praha: o. s. Kritické myšlení a Step by Step ČR, 2003, s. 25–34.

Roubíček, F. *Sémiotické reprezentace ve vyučování geometrii* (Disertační práce). Praha: PedF UK, 2002.

Další příspěvky

Vnímání jevu nekonečno v geometrii budoucími učiteli 1. stupně ZŠ[1]

Darina Jirotková[2]

Nekonečno jako provokující pojem

Nekonečno patří k nejnáročnějším jevům nejen matematiky, ale i filosofie. Ve všech dobách pojem nekonečno a s tím související zvláštní kvalita některých jevů jako je nevyčerpatelnost, neskončitelnost, neomezenost, znepokojoval mnohé velké myslitele. Tím, že vždy provokoval mnoho kontroverzních názorů, tvořil důležité směry lidského poznání. Výsledky, k nimž se velcí matematici a filosofové dopracovali, patří k intelektuálně nejhlubším myšlenkám lidstva. „Žádná jiná otázka nikdy neprobouzela tak hluboce lidského ducha, žádná jiná myšlenka nepodněcovala tak hodně jeho intelekt, žádný jiný pojem nevyžadoval doposud více objasnění než pojem nekonečno.“ – prohlásil vynikající německý matematik David Hilbert koncem 19. století. Pojem nekonečno rovněž provokoval nejrůznější pocity, strachem a obavami z bloudění počínaje, přes pocit nemohoucnosti, úcty a konče touhou proniknout do neznámého a překonat meze nepoznatelného.

Ve školské matematice se s jevem nekonečna setkáváme velmi sporadicky a povrchně. Neznáme žádnou českou ani zahraniční učebnici základní ani střední školy, která by tomuto pojmu věnovala zvláštní pozornost. Rovněž žádné učební osnovy nevyčleňují pojmu nekonečno žádný tematický celek, ani nezdůrazňují kognitivní činnosti, které by přispěly k rozvíjení porozumění jevu nekonečno. Přitom se jev nekonečna vyskytuje v mnoha kontextech jak aritmetických, tak geometrických. Například o posloupnosti přirozených čísel se řekne, že nemá žádný konec, že jde stále dál a dál. O přímce se ve škole říká, že vede na obě strany do nekonečna, a o rovině, že jde do nekonečna všemi směry apod. Hlouběji se jev nekonečnosti v žádném kontextu nezkoumá, pravděpodobně proto, že je to jev velmi náročný. Pro nedostatečně připraveného a navíc autoritativního učitele mohou být rozhovory o něm i choulostivé, mohou se pro něj stát nebezpečným pohybem na tenkém ledě a hrozbou oslabení jeho autority. Domníváme se, že tak jako v historii, kde zkoumání jevu nekonečna vedlo mnohdy přes důrazná odmítnutí a nepřijetí nových

[1]Příspěvek byl vytvořen v rámci grantu GAUK 316/2001/APP/PedF
[2]*PedF UK Praha, darina.jirotkova@pedf.cuni.cz*

myšlenek k pozoruhodnému rozvoji lidského intelektu, mohou diskuse provázející uvažování nad jevy nekonečnými v rámci školské matematiky přispět i ke kognitivnímu rozvoji žáka. Podle naší celkem bohaté zkušenosti jak se žáky různého věku, tak i se studenty – budoucími učiteli jsou debaty o jevu nekonečna většinou velmi přitažlivé. Avšak od učitele vyžadují důkladnou přípravu a hluboké promýšlení jevu nekonečna v různých kontextech, k čemuž může například pomoci vnitřní dialog s vhodnými knížkami (Kuzansky, 1979, Peter, 1958, Pospíšil, 1948, Vopěnka, 1989, Zlatoš, 1995). Rovněž je důležité, aby měl učitel dobře promyšlenu strategii řízení takové diskuse. K tomu je dobré, když má alespoň základní znalosti o tom, jak žáci vnímají jev nekonečna, co která jejich vyjádření znamenají nebo mohou znamenat, které myšlenky je oslovují a které ne a jaké modely jevu nekonečna a jaké kontexty motivují jejich zvídavost.

O našem výzkumu

Jsme přesvědčeni, že zkoumáním procesu chápání pojmu nekonečno v různých kontextech se nám otvírá přístup do světa zvláštních a kvalitativně odlišných mentálních činností, které se týkají neexistujících jevů, které postrádají přímé empirické zkušenosti a které jsou založeny na zkušenostech s jevy existujícími.

Je nutno podotknout, že zcela původním záměrem zadaného úkolu v rámci výzkumu: *Napiš vlastními slovy, co si představuješ pod pojmem přímka* bylo získat písemnou informaci o tom, jak naši posluchači chápou daný geometrický pojem přímka a jak dokáží své geometrické myšlenky formulovat. Druhým cílem bylo dovést studenty k hlubšímu zamyšlení nad pojmy, které běžně intuitivně užívají. Avšak již při prvních analýzách studentských odpovědí nás velice zaujalo to, jak mnoho studentů použilo v popisu geometrického objektu slovo „nekonečno“ a jeho různé odvozeniny. Další analýzy jsme tedy zaměřili na tento jev.

Zpočátku byli do výzkumu zapojeni pouze studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ Pedagogické fakulty v Praze, později jsme pro možnost porovnání rozšířili výzkum i na studenty oborové matematiky a v poslední době zejména také na žáky základní školy od 5. do 9. třídy. Pracovali jsme se žáky na třech základních školách v Praze a na dvou v Derby a Nottinghamu ve Velké Británii, přičemž jsme použili takové spektrum úloh (viz níže), které nám umožnilo lépe prokreslit představy žáků či studentů o nekonečnu a které také přivedly řešitele k hlubšímu promýšlení problému.

Slovo nekonečno čeští žáci či studenti (nikoliv však angličtí) používají zcela samozřejmě, i když v jejich smyslových zkušenostech přímá zkušenost s nekonečnem z reálného světa zcela schází. Do slova nekonečno jsou promítány zkušenosti z reálného světa a mentálními procesy jako je abstrakce, absolutizace, idealizace se vytváří myšlenkový konstrukt. V tomto smyslu slovo nekonečno v našem článku používáme. Neřešíme tedy otázku, co je nekonečno, jaké má postavení v různých matematických strukturách, jaké představy studentů jsou správné nebo chybné. Budeme se však snažit představy žáků či studentů o pojmu nekonečno v geometrickém prostředí nějak charakterizovat, budeme hledat a popisovat jevy, které zkoumanou představu vytvářejí, a studentské odpovědi podle těchto jevů třídit.

Studenti z UK ve svých písemných pokusech o vymezení pojmu přímka nepoužili slovo nekonečno ani v jednom případě z 27 dotázaných žáků 5. ročníku. Důvody pro to jsme našli dva. Jeden je jazykový – slovo nekonečno v hovorové mluvě je spíše vyjádřeno jako bez konce (endless). Druhý důvod spočívá v koncepci výuky geometrie v UK, ve které se nerozlišuje důsledně mezi pojmy úsečka a přímka.

Odpovědi studentů

Připomeňme zde stručně metodu analýz studentských písemných odpovědí na původní výzvu *Napiš vlastními slovy, co si představuješ pod pojmem přímka*, která byla vypracována autorkou článku pod vedením M. Hejného (Jirotková, 1999, Jirotková, Littler, 2003). Ze všech odpovědí studentů jsme nejdříve vybrali ty, v nichž se objevovalo slovo nekonečno, nekonečný, nekonečně apod., ale také slovo konečno v různých odvozeninách, pochopitelně ve smyslu své absence (jako „nemá konec“, „bez koce“, „nekončící“ apod.), a rozložili je na jednoduché myšlenkové jednotky. Ty, které byly podobného významu, jsme seskupili a reprezentovali je jedinou autentickou výpovědí. Po dlouhém hledání, jak tyto dále třídit, jsem zvolili hledisko gramatické. Do první skupiny – A jsme zařadili všechny výpovědi, v nich se vyskytlo podstatné jméno nekonečno. Do druhé skupiny – B jsme zařadili všechny výpovědi, v nichž se vyskytlo přídavné jméno nekonečný a jeho tvary, nebo příslovce nekonečně. Do třetí skupiny – C jsme zařadili ty výpovědi, v nichž existence konce byla popřena.

Toto kritérium třídění se ukázalo být velmi vhodné, neboť umožnilo odhalit mnoho dalších jevů popisujících porozumění pojmu nekonečno, jako je například potenciálnost či aktuálnost nekonečna, nekonečno jako proces nebo lokalita, a to pouze jediná nebo jedna z mnoha možných.

Je zajímavé nahlédnout do historie a podívat se do kultury Starého Řecka, o jaké roli nekonečna zde svědčí různá gramatická vyjádření. Pojem nekonečno se objevoval již u Aristotela, ale pouze jako filosofická kategorie s potenciálním charakterem a nikoliv jako objekt matematiky. Nekonečno se jako podstatné jméno mohlo objevit pouze v mytologii, teologii a metafyzice, neboť „nekonečno přísluší pouze do říše bohů“ a pouze bohové mají schopnost vidět věci mimo realitu.

Jako přídavné jméno popisující nějaký objekt bylo použito později při popisu absolutna jako je vesmír, bytí, prostor a čas, a to ve smyslu odmítnutí jejich reálné existence.

Ve formě příslovce způsobu je nekonečno použito k popisu mentálních činností, jako například prodloužit, dělit, přidávat, pokračovat, aproximovat, . . .

V Řecké matematice se nekonečno mohlo objevit pouze jako příslovce „nekonečně“, které bylo vázáno na proces (Moreno, 1999). Diskusi o možnostech uvažovat o nekonečnu jako matematickém objektu otevřel až Bolzano svou prací Paradoxy nekonečna (1851). O legální „pobyt“ aktuálního nekonečna v matematice, které bylo vyjádřeno podstatným jménem, se zasloužil teprve Cantor až v roce 1877svojí teorií množin.

Soubor úloh vhodných k diagnostice i k diskusi o nekonečnu se žáky

Výše zmíněnou etapu výzkumu jsme ukončili formulací souboru úloh, který jsme jednak použili jako nástroj našeho dalšího výzkumu pro diagnostiku představ žáků či studentů o pojmu nekonečno, ale také se tento soubor úloh osvědčil jako vhodný k diskusím se žáky různého věku, ale i se studenty – budoucími učiteli. Úlohy lze snadno modifikovat pro různé věkové kategorie tak, aby odpovídaly úrovni geometrických poznatků řešitelů.

Úloha 1.

Adam a Boris diskutují. Rozhodni, které z dětí má pravdu.
Adam: „Přímka má dvě nekonečna. Když jdu jedním směrem, přijdu do nekonečna. Když jdu opačným směrem, přijdu také do nekonečna.“
Boris: „Jenže obě ty nekonečna jsou totéž. Takže přímka má pouze jediné nekonečno. V něm se uzavírá jako kružnice.“

Pravdu má: Proč?

Úloha 2.

Tři dívky diskutují. Rozhodni, která z nich má pravdu.
Cecílie: „Dvě rovnoběžné polopřímky končí ve dvou různých nekonečných bodech.“
Dana: „Nesouhlasím. Končí ve stejném nekonečném bodě.“
Eva: „Ani jedna z vás nemá pravdu. Polopřímka jde pořád, nikde nekončí.“

Pravdu má:

Proč?

Úloha 3.

Je dána úsečka AB. Představme si, že ji prodloužíme 2krát, 3krát, . . . , tisíckrát, . . . , nekonečně mnohokrát.

Napiš, co vznikne: . . . .

Úloha 4.

Je dána úsečka AB, ale bez krajních bodů A, B. Představme si, že ji opět prodloužíme 2krát, 3krát, . . . , tisíckrát, . . . nekonečně mnohokrát.

Napiš, co vznikne: . . . .

Porovnej objekty, které vznikly v úloze 3. a 4. Jsou stejné?

Úloha 5.

Franta tvrdí, že umí napsat nejmenší kladné reálné číslo. Je to možné?

Pokud si myslíš, že ANO, napiš které je to číslo . . . .

Pokud si myslíš, že NE, napiš proč.

Úloha 6.

Je dána úsečka AB. Uvažujme všechny možné pravoúhlé trojúhelníky ABC, kde body A, B jsou krajní body dané úsečky. Sestroj ten z uvedených trojúhelníků, jehož obsah je (a) největší, (b) nejmenší možný. Co nejpřesněji popiš polohu bodu C. Co nejpřesněji popiš polohu bodu C.

Úloha 7.

Je dána přímka b a bod A, který na ní neleží. Uvažujme všechny možné čtverce $ABCD$ s vrcholem B na přímce b. Sestroj ten z uvažovaných čtverců, jehož obsah je (a) nejmenší, (b) největší možný. Polohu bodu B v obou případech co nejpřesněji popiš. (c) Načrtni úhlopříčku AC a BD a střed čtverce $ABCD$, který je řešením úlohy (b). Pokud se některý prvek nevejde na papír, naznač šipkou směr jeho pohybu.

Analýza úlohy 6. a 7.

Věnujme trochu pozornosti dvěma z úloh – 6. a 7., neboť otázka (a) u obou daných úloh patří ke standardním úlohám geometrie druhého stupně ZŠ. Po příslušné modifikaci je lze zařadit i do geometrie prvního stupně ZŠ. Zde otázky (a) plní klimatickou roli, neboť dají řešiteli příležitost uvažovat tak, jak se běžně při řešení geometrických úloh uvažuje. Nevyžadují žádné abstraktní spekulace a svojí náročností nepřesahují standardní geometrické úlohy a jsou spíše triviální. Je zřejmé, že těžiště úloh tkví ve spekulativních otázkách (b), jejichž zařazením se úloha stává úlohou netradiční (použito v intuitivním slova smyslu).

Ukážeme některé výsledky analýz úlohy 7., ve kterých řešitel vyjadřuje své představy o přímce a zejména o „nekonečnu na přímce“, proto, aby je čtenář mohl porovnat s výsledky ve zmíněných článcích (Jirotková, 1999, Jirotková, Littler, 2003).

Analýza zadání úlohy č. 6

Je zřejmé, že obsah trojúhelníku závisí na výšce, když strana trojúhelníku příslušná k uvažované výšce je konstantní. Odpověď na otázku (a) je jedy jednoduchá. Výška trojúhelníku ABC je nejdelší v tom případě, když bod C leží na ose úsečky AB.

Obsah trojúhelníku ABC je tím menší, čím kratší je úsečka AC, resp. BC, resp. výška trojúhelníku. Tím je úloha redukována na jednodušší úlohu – najít na polokružnici bod C tak, aby úsečka AC (resp. BC, resp. výška) byla nejmenší možná. Řešení této úlohy úzce vázáno na řešitelovu představu o tom, jak jsou uspořádány body na kružnici, v těsném okolí jednoho bodu, na nekonečně malé úsečce, která je našimi smysly bez použití například zvětšovacího skla neuchopitelná. Tomuto typu nekonečna budeme říkat nerozlišitelně malé nekonečno neboli infinitesimální nekonečno.

Analýza zadání úlohy č. 7

Je zřejmé, že obsah čtverce bezprostředně závisí na velikosti jeho strany AB. Odpověď na otázku (a) je triviální. Úsečka AB je nejkratší v tom případě, když AB je kolmá k b.

Těžiště úlohy tkví v otázce (b).

Obsah čtverce $ABCD$ je tím větší, čím delší je úsečka AB. Tím je úloha redukována na jednodušší úlohu – najít na přímce b bod B tak, aby úsečka AB (resp. vzdálenost bodu B od A) byla největší možná. Pak je řešení této úlohy úzce vázáno na řešitelovu představu o přímce, na představu o tom, co se děje s přímkou, když tato mizí za obzor.

Snad nejpřesvědčivěji tuto myšlenku vyjádřila respondentka Cecílie, studentka – budoucí učitelka na prvním stupni ZŠ, když napsala:

„sestojím čtverem tak, aby B ležel na b. S ctverce $= a^2 \Rightarrow$ velikost čtverců závisí na straně $a \Rightarrow$ musím hledat nejkratší a nejdelší vzdálenost bodu A od přímky“

(Poznámka. Přítomnost „překlepů“ je signifikantní pro orientaci energie na podstatu úlohy.)

Úsečka AB se může neomezeně zvětšovat, když se bod B po přímce b vzdaluje ať již na jednu nebo na druhou stranu. Problém je usoudit a vypovědět něco o výsledku tohoto procesu. Naše usuzování můžeme řídit těmito otázkami:

– Může proces „vzdalování“ se bodu B po přímce b skončit?

– Jestliže ano, v jakém místě bude pak bod B?

– Jak lze toto místo popsat?

– Jak bude v tom případě vypadat čtverec $ABCD$?

– Jak lze ten čtverec sestrojit?

Odpovědět na položené otázky můžeme v tom případě, když si vytvoříme představu o tom, co se bude dít s bodem B, když dojde do „nejvzdálenějších míst“ přímky b.

Nejvzdálenější bod na přímce

Představy, s nimiž se setkáváme ve filosofických pracích a v odpovědích studentů, lze rozdělit do tří skupin:

I. Nepřipouští řešení úlohy. Nutno rozlišovat tři případy:

Ia. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) neexistuje.

Ib. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) nelze najít (určit, popsat).

Ic. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) neumím najít (určit, popsat).

II. Bod B leží za obzorem. (S pojmem obzor pracujeme ve smyslu P. Vopěnky: „**Obzor** je hranicí našeho pohledu a je rovněž ho vykládat jako hranici nevlastní. Zároveň je však mezí, oddělující osvětlenou část světa od části neosvětlené. **Konec** – ustrnutí, **hranice** – pobídka k návratu, **mez** — pobídka k překročení.“ (1989, s. 446)

Tím pádem je bod B nedostupný smyslovému vjemu a stejně tak čtverec $ABCD$. Je to objekt existující, ale nevnímatelný smysly. Jediné, co vnímat můžeme, je tendence vzdalujícího se bodu B, když je tento ještě před obzorem.

IIa. Tato tendence je vyjádřená slovesem označujícím pohyb.

IIb. Tato tendence je vyjádřená slovním spojením „co možná“, nejdále, největší, nejvzdálenější, nejmenší apod., nebo „čím dále“, větší, menší apod.

III. Bod B leží na pevném místě přímky b, toto místo je označeno symbolem ∞ a nazýváme je „nekonečno“.

V dalším se podíváme, jak jsou tyto představy konkretizovány v odpovědích studentů. Z didaktického hlediska nás zajímají dvě věci:

a) vysvětlení mechanismu vzniku příslušné představy,

b) nalezení prostředku, jak tuto představu dále kultivovat.

Záměrně zde nepoužíváme slovo reedukovat. Běžný přístup učitele k uvedené představě studenta je osnován na tezích: daná představa je zcela mylná a učitel ji musí korigovat. My tento uvedený přístup učitele považujeme za ne zcela vyhovující. Jestliže se studentova představa jeví z hlediska učitelovy interpretace jevu nekonečno jako chybná, je nutné si uvědomit, že tento náročný abstraktní pojem nelze studentovi jednorázově vysvětlit, že představa o nekonečnu se musí v kognitivní síti studenta dlouhodobě vyvíjet. Pak jistě dojdeme ke korekci tohoto názoru. Žádná představa se nedá vytvořit bez příslušných zkušeností. Čím je pojem abstraktnější, tím větší spektrum zkušeností jeho kvalitní představa vyžaduje. Abstraktní pojem, který je osnován na malém vzorku zkušeností, je nedokonalý, stěží však můžeme říct, že chybný. Je vývojovým stadiem. Bude-li spektrum příslušných zkušeností obohaceno, změní se (zkvalitní) i příslušná abstraktní představa. Právě dodání takovýchto zkušeností do kognitivní sítě studenta máme na mysli, když mluvíme o kultivaci. Poznamenejme, že způsob, kterým příslušné zkušenosti studentovi dodáváme, by měl být spíše konstruktivní (kladením otázek) než instruktivní (přímé vysvětlení).

Příklady studentských výroků

Ia. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) neexistuje.

Anička: „Největší čtverec je asi nesmysl protože přímka je nekonečná – čím dál umístím bod B tím větší bude obsah S (na obě strany).“

Ib. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) nelze najít (určit, popsat).

Barbora: „největší čtverec (s největším obsahem) nejde podle mne najít. (Přímka je nekonečná).“

Cecílie: „největší vzdálenost nelze určit, přímka nemá ani začátek ani konec $\Rightarrow$ jde do nekonečna.“

Poslední ukázku zapíšeme jako trojici myšlenek, neboť si zasluhuje podrobnou analýzu.

Dana:	„největší $<$čtverec$>$: nelze určit;“	(a)
	„B můžeme po přímce posouvat do nekonečna;“	(b)
	„protože přímka ~~nemá~~ nekonečná.“	(c), (c’)

(Slovo nemá je škrtnuté.)

Komentář k ukázce Dana.

Slova vložená do závorek $<>$, jsou naše interpretace.

Původní výrok „protože přímka nemá <konec(?)>“ označíme (c). Korigovaný výrok „protože přímka <je> nekonečná“ označíme (c’).

Rozbor příčin škrtnutí slova „nemá“ nás dovedl k potřebě upřesnit a diferencovat dva způsoby popisu pohybu. Budeme je ilustrovat ukázkou. Výroky „Jdu na sever“ (S) a „Jdu na západ“ (Z) nemají stejný charakter. Sever je určen pevným bodem zeměkoule – severním pólem. A tedy pohyb na sever je tímto bodem omezen a ukončen. Západ je určen pouze směrem. Jít na západ je činnost neomezená, žádným místem neukončená. Výrok „Jdu do nekonečna.“ lze chápat oběma způsoby:

Cíleně – „Jdu k cíli“ (jako u výroku S); předpokládám tedy, že nekonečno je pevné místo, k němuž jdu. Představu, že přímka obsahuje nekonečno jako hraniční bod, interpretujeme jako představu aktuálního nekonečna.

Směrově – „Jdu směrem“ (jako u výroku Z); směr mého pohybu je stále určen, ale neexistuje cíl, ke kterému bych mohl dojít a možnost chůze tak vyčerpat. Představa, že na přímce neexistuje žádné pevné místo s označením „nekonečno“, je představa potenciálního nekonečna.

Výpověď „přímka je nekonečná“ můžeme tedy interpretovat dvěma odlišnými způsoby – cíleně nebo směrově (explicitně to uvádí Cecílie).

Vraťme se zpátky k příčině škrtnutí slova „nemá“, tedy ke změně (c) → (c’). Domníváme se, že Dana jej škrtla v důsledku konfliktu myšlenek (b) a (c). Při psaní myšlenky (b) si Dana nedostatečně uvědomila, že slova „do nekonečna“ chápe směrově. Při psaní myšlenky (c) se paměťová stopa „do nekonečna“ spojila s představou cílové interpretace a vyvolala konflikt: jak mohu jít do nekonečna, když přímka nemá konec? Uvedený konflikt je pouze zdánlivý, protože slovo „nekonečno“ ve výroku (b) je nekonečnem směrovým, s možností, potencí stále pokračovat v nějakém pohybu, a to nazýváme nekonečno potenciální. Uvedený výrok se nám jeví jako nadějný vstup do diskuse na semináři. Bylo by vhodné ukázat studentům celý výrok a vyzvat je, aby komentovali pravdivost či nepravdivost jejích myšlenek. Přítomnost konfliktu je dobrým příslibem kultivace těch představ, které se v našem výzkumu ukázaly jako nejvyspělejší.

Ic. Bod B (nebo objekt s ním vázaný) neumím najít.

Franta: „Čtverec nakreslit neumím. Nemám tak velký papír.“

Příklady ze skupiny II. (Vědí, že existuje obzor a pustí bod B za obzor. Silně zdůrazňují pohyb.)

IIa. Hana: „čím je B více vzdáleno od A, tím je čtverec větší. B musíme posouvat do nekonečna“

IIb. Eva: „– aby byl čtverec co největší, potřebuji zvětšit stranu AB, proto zvolím bod B na přímce, co nejdál od bodu A. → v nekonečnu“

Ve všech uvedených odpovědích se vyskytují obě tyto myšlenky: bod B, pokud je před obzorem, se vzdaluje od bodu A, a proto se obsah čtverce zvětšuje. Tento proces dospěje do terminální situace, bod B bude v nekonečnu. Uvedené nekonečno leží již za obzorem, protože ani v náznacích není ukázáno, jak jej lze přesněji lokalizovat. Svět za obzorem není dostupný popisu používajícího objekty před obzorem. Toto je jediná skupina těch, kteří mají víru, že za obzorem něco je.

Mechanismus: Podstata mechanismu vzniku a rozvoje těchto představ leží v oblasti metakognice. Je to zkušenost s omezeností nejenom našich smyslů, ale i našeho rácia. Jevy světa nás obklopujícího a stejně tak jevy konstruovaných abstraktních světů jsou dvou typů – ty, které jsou nám dostupné ať již smyslově nebo spekulativně, a ty, které jsou nám takto nedostupné a jsou uchovány pouze naší vírou. Aplikováno na náš příklad – pohybující se bod před obzorem je jevem dostupným, nekonečno za obzorem jevem nedostupným a existenci mu přiznáváme pouze vírou.

Kultivace: Výchozí základní paradigma o polaritě rácia a víry nenahlížíme jako něco vadného. Nedostatkem tohoto pohledu je jistá rezignace na možnost analýzy jevu nekonečno. Úlohou učitele je ukázat studentovi některé nadějné případy spekulace o pojmu nekonečno a povzbudit jej k samostatné aktivitě v tomto směru.

Příklady ze skupiny III.

Jana: „Největší obsah čtverce bude když bod B bude ležet v nekonečnu."

Mechanismus: Člověk, který se nad jevem nekonečno nezamýšlel, nahlíží na geometrické jevy pouze jako na jevy konečné, což vyplývá z jejich možnosti vizualizace. Přímka je pro něj dostatečně dlouhá úsečka Při zacházení s pojmem přímka žák opakovaně nabývá následující zkušenost. Nakreslí omezenou přímou čáru, na které na rozdíl od úsečky nejsou vyznačeny koncové body. V případě potřeby tuto čáru příslušně prodlouží. Tedy akce prodlužování je manuální zkušeností, která zakládá pojem přímka. Přímka se tak stává výsledkem (oboustranného) prodlužování úsečky. Ve shodě se zkušeností s jinými činnostmi z reálného světa, které mají začátek i konec, si žák přímku představuje jako úsečku, která má začátek i konec ve dvou bodech nejvíce vzdálených a označených ∞. Potvrzení uvedeného mechanismu nacházíme v mnoha odpovědích z původního experimentu, které byly typu: „přímka: úsečka, jejíž oba krajní body jsou v nekonečnu".

Kultivace: Za nejvýznamnější charakteristický prvek uvažované představy považujeme tu skutečnost, že student si není vědom obzoru. Nemá zatím zkušenost se situací, kdy vztahy před obzorem při nekonečném prodlužování mění svoji kvalitu. Proto je potřebné o takové situace obohatit jeho zkušenostní spektrum.

Literatura

Jirotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 43, č. 4, s. 326–334

Jirotková, D., Littler, G. (2003). Student´s concept of infinity in the context of a simple geometrical construct, In Pateman, N. A., Dogherty, B. J., Zilliox, J., (Eds.) *PME*

27+PME-NA 25, Honolulu, Colledge of Education, University of Hawaii, USA, vol. 3, pp. 123–132

Kuzansky, M. (1979). *O učenej nevedomosti.* (překlad A. Valentovič). Pravda, Bratislava

Moreno, L., Waldeg, G. (1999). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational studies in Mathematics*, Vol. 22, Kluwer Academic Pub., pp. 211–231

Peter, R. (1958). *Hry s nekonečnom.* Osveta, Martin

Pospíšil, B. (1948). Nekonečno v matematice. *Cesta k vědění.* 48, JČMF Praha

Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*, Panorama, Praha

Zlatoš, P. (1995). *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou (Úvahy o množinách, nekonečně, paradoxoch a Gödelových vetách).* IRIS, Bratislava

Elektronická zbierka úloh

Ingrid Mindaková[1]

Na Ústave matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach je vytváraná **elektronická zbierka úloh zo stredoškolskej matematiky**. Táto zbierka zatiaľ obsahuje asi 600 úloh zaradených k téme *Funkcie* a k téme *Rovnice, nerovnice a ich sústavy* k podtéme *Kvadratické rovnice a nerovnice*, ale na dopĺňaní ďalších tém sa intenzívne pracuje.

Minimálne hardwarové a softwarové požiadavky pre aplikáciu sú počítač s procesorom aspoň 80486DX; minimálne 8 MB pamäte RAM; grafická karta VGA; systém Windows 95, 98 alebo Unix; prístup na Internet a nainštalovaný prehliadač Intemet Explorer 4.0 a vyšší alebo Netscape Navigator 4.6 a vyšší.

Zbierka úloh je optimalizovaná pre prehliadač Intemet Explorer a je prístupná na Internete na adrese **Školského informačného servisu**: `http://kekule.science.upis.sk` alebo priamo na serveri `http: //kma07.science.upjs.sk/zbierka/`.

Po spustení zbierky na adrese `http://kekule.science.upjs.sk` sa objaví hlavná stránka užívateľskej časti zbierky. Užívateľ má právo prezerať, vyberať úlohy podľa zvolených kritérií, vytlačiť úlohy a takisto stiahnuť si úlohy s kompletným riešením vo formáte Word 95. Zbierka sa ovláda kliknutím na odkazy alebo príslušné políčka formulárov. Hlavná stránka zbierky obsahuje 4 položky: **Úvod** (hypertextový odkaz späť na úvodnú stránku pre používateľa), **Matematika** (odkaz na stránku, ktorá ponúka

[1]*PF UPJŠ, Košice, mindakova@pobox.sk*

výber tém stredoškolskej matematiky), **Informatika** (odkaz na stránku, ktorá ponúka výber tém stredoškolskej informatiky), **Napíšte nám** (odkaz na stránku s e-mailovými adresami správcov zbierky).

Kliknutím na odkaz **Matematíka** sa dostaneme do ponuky tém učiva stredoškolskej matematiky. Tuje možné vybrať tému, ku ktorej chceme vyberať úlohy. Výber témy (ako aj výber podtémy a elementu učiva) potvrdíme kliknutím na tlačidlo **Potvrď výber**. Objaví sa stránka sponukou podtém a potom sponukou elementov učiva, ktoré patria k zvolenej podtéme. Po výbere elementu učiva nasleduje stránka na výber didaktických fimkcií a poznávacích úrovní. Odporúčame vyberať úlohy podľa jednej didaktickej funkcie a jednej poznávacej úrovne (je možné vybrať úlohy podľa viacerých didaktických funkcií a viacerých poznávacích úrovní, ale keďže je v zbierke zaradených ešte málo úloh, tak sa môže stať, že z databázy nebudú vybrané žiadne úlohy).

Po potvrdení výberu sa na nasledujúcej stránke objavia všetky úlohy spĺňajúce zvolené kritériá a tlačidlo ponúkajúce **tlač** zadaní vybraných úloh. Vedľa zadania úlohy sa nachádzajú 4 tlačidlá: **info o úlohe** (kto úlohu vložil, dátum poslednej modifikácie), **návod na riešenie úlohy**, **výsledok úlohy**, **download** (možnosť stiahnutia word-ovského súboru, ktorý obsahuje zadanie, návod, riešenie a výsledok vybranej úlohy).

Ak Vás zaujala myšlienka využívania našej elektronickej zbierky úloh, chceli by sme Vás požiadať o zapojenie sa do experimentu, ktorý je zameraný na zistenie využiteľnosti tejto zbierky úloh vpraxi. Vašou úlohou by bolo podľa možností **používaťzbierku úloh** a zostaviť stručnú **dokumentáciu využívania elektronickej zbierky úloh**. Dokumentácia zahrňa

- kópie sérií úloh, ktoré ste použili na vyučovacích hodinách;
- dátum, kedy ste sériu použili;
- názov tematického celku, pri výučbe ktorého ste sériu zaradili na vyučovaciu hodinu;
- formy práce so sériou (či mal každý študent k dispozícii kópiu série úloh alebo ste s ňou pracovali len Vy,. . .);
- poznámky k úlohám;
- návrhy úprav zadaní úloh;
- reakcie študentov;. . .

Užívateľské prostredie bolo vytvorené pred dvoma rokmi ako diplomová práca a nie vo všetkých aspektoch splňa naše terajšie požiadavky. V tomto smere privítame Vaše pripomienky a návrhy týkajúce sa vylepšenia používateťskej časti zbierky úloh. Takisto budeme radi, ak nás upozornite na chyby v úlohách a ak navrhnete úlohy, ktoré by podľa Vás mali byť do zbierky zaradené. V závere našej spolupráce Vám položíme niekoľko otázok formou dotazníka.

Ak máte otázky týkajúce sa používania elektronickej zbierky úloh alebo máte záujem o spoluprácu s nami, prosím, kontaktujte nás na adrese mindakova@pobox.sk.

Některé komunikační jevy v hodinách matematiky[1]

Naďa Stehlíková[2]

Pokusíme se přehledově podat zprávu o některých komunikačních jevech, k nimž nezřídka dochází v hodinách matematiky a které výrazně ovlivňují kvalitu a rozsah toho, co se žáci/studenti naučí. Byly identifikovány výzkumem zabývajícím se interakcemi ve třídě, a v české literatuře, pokud je autorce známo, zatím popsány nebyly. Domníváme se, že si je často učitelé ani studenti neuvědomují, a nemohou tak brát v úvahu jejich účinky na vyučování.

Soustředíme se na tři z nich, a to Topaze efekt, Jourdain efekt a „funneling“ efekt.

Topaze efekt

Topaze efekt pojmenoval Brousseau (Brousseau, 1997). Jedná se o jev, při němž učitel (či učební text) *podává odpověď přímo ve své otázce*. Jméno pochází z hry od Marcela Pagnola[3] s názvem „Topaze“. Topaze byl učitel v soukromé internátní škole a chtěl, aby jeho žáci prospívali. V jedné scéně hry diktuje něco slabšímu žákovi, a to takovým způsobem, že se mu snaží co nejvíce napovědět, některá slova téměř hláskuje. Postupně se tak ztrácí jeho původní úmysl naučit děti pravopisu.

Učitel je veden těmi nejlepšími úmysly, ovšem způsob, který volí, vede sice k produkci správné odpovědi, ne nutně však i ke správnému pochopení látky. Zodpovědnost za podstatnou část látky je na učiteli. Ten se snaží stále lehčími otázkami vést žáky k odpovědi na původní otázku, která se však neustálým rozmělňováním ztratila ze žákova obzoru.

<u>Ilustrace 1:</u> První příklad se vztahuje k příběhu, který je publikován v monografii Hejný & Kuřina (2001), str. 24–27. Jedná se o příběh označený A.

Chlapec řeší u tabule následující úlohu:

> V tramvaji jelo 31 lidí. Na zastávce 4 osoby vystoupily a 13 osob přistoupilo. Kolik lidí jelo dále?

Učitelka, místo aby vedla žáky k objevu tím, že upozorní na sémantiku (vystoupily – ubylo, přistoupilo – přibylo), zdůrazňuje pouze předponu „-vy“ a „-při“. Tím dětem v otázce přímo napoví, kdy mají sčítat a kdy odčítat, když odhlédneme od toho, že jim současně vytváří špatný spoj. Autoři uvádějí příklad jiné úlohy, v níž pak předpona „-při“ působí jako antisignál (tj. navádí ke sčítání, ale správně je odčítání):

---

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 309/2002/A PP/PedF.

[2]*PedF UK Praha, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

[3]Marcel Paul Pagnol, 1895–1974, francouzský spisovatel, producent a režisér.

> Do tramvaje přistoupilo 5 lidí, takže teď jich tam je 21. Kolik lidí jelo v tramvaji předtím?

Ilustrace 2: Druhý příklad pochází z autorčiny experimentální činnosti. Při sérii experimentů s Janou, studentkou vysoké školy, měla tato zkoumat netradiční aritmetiku a řešit v ní různé úkoly. Když měla Jana řešit lineární rovnice v netradiční aritmetice, pronesla autorka poznámku: „Můžeme vlastně někdy říci, že to nemá řešení?" Slovo „vlastně", autorkou zdůrazněné, jasně naznačuje, že to říci nemůžeme, a Jana to také tak pochopila.

Ilustrace 3: Z vlastní praxe víme, že otázka „Je to všechno?" u úlohy, kdy má student např. nalézt několik řešení rovnice, nevyzní neutrálně, ale jako nápověda, že tomu tak není. Studenti na ni často reagují slovy „Asi ne, když se takto ptáte". Je těžké najít nějaký ekvivalent, který by nic nenaznačoval. Snad otázka „Jak bychom ukázali, že to je všechno?" by mohla být pociťována jako neutrální.

Ilustrace 4: Další ukázka pochází z vlastní výše zmíněné experimentální činnosti autorky. Při zavádění operace dělení si Jana uvědomuje souvislost s převrácenými čísly. Experimentátorka položila otázku „Existují převrácená čísla pro všechna čísla z této aritmetiky?", čímž okamžitě navozuje pochybnost, zda tomu tak je. Mnohem vhodnější by byla otázka „Jak můžeme hledat převrácená čísla?", při jejímž plnění by Jana k výše zmíněnému poznatku dospěla sama.

Jourdain efekt

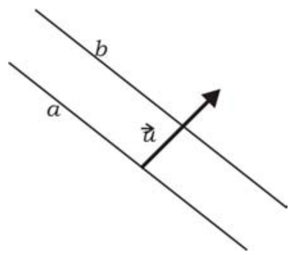
Jourdain efekt byl opět popsán Brousseauem (Brousseau, 1997) a spočívá v tom, *že triviální činnosti dáváme vědecké jméno*. Jméno pochází ze hry od Moliéra[4] jménem „The Cit turned Gentleman" („Měšťák šlechticem."). Hra se zabývá hříchem marnivosti. Pan Jourdain je prostý, nepříliš vzdělaný muž, který se velmi touží stát členem vyšší společnosti alespoň způsoby a vzděláním, když jím není rodem. Najme si tedy učitele hudby, tance, šermování a filozofie. Jourdain efekt se vztahuje ke scéně, kdy se pan Jourdain při vysvětlování rozdílu mezi poezií a prózou dozvídá, že, aniž si toho byl vědom, mluvil vlastně celý život prózou.

Ilustrace 1: Sierpinska (Sierpinska, 2000) uvádí, že k tomuto jevu dochází vždy, kdy pojmenováváme činnost studentů matematickými pojmy, které vyžadují složitou pojmovou činnost, aniž máme nějaký důkaz, že k ní opravdu došlo. Např. řekneme, že student vydělil jeden zlomek druhým a přitom by bylo přesnější říci, že student změnil znak dělení na znak násobení, převrátil druhý zlomek a použil paměť, aby našel součin dvou čísel nad a pod zlomkouvou čárou.

Ilustrace 2: K podobnému jevu došlo v době tzv. modernizace matematiky. Brousseau (1997) uvádí příklad, kdy se žáci po určité manipulaci s barevnými obrázky dozvěděli,

[4]Moliér, vlastním jménem Jean-Baptiste Poquelin, 1622–1673, francouzský herec a autor divadelních her.

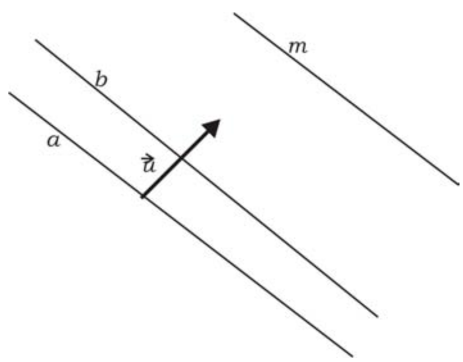
že „právě objevili Kleinovu grupu“. Zatímco žáci se zabývali konkrétními, částečnými úkoly, jejich učitel za nimi viděl celou matematickou strukturu.



Obr. 1

Ilustrace 3: V rámci předmětu Analytická geometrie II se studenti zabývají geometrickými transformacemi. Předpokládá se, že syntetický přístup ke shodnostem mají zvládnutý z předchozího ročníku. Na dotaz o rozkladu posunutí na osové souměrnosti, Pavel rozložil posunutí o vektor $\vec{v}$ na dvě osové souměrnosti $s_a \circ s_b$ podle obrázku 1. Vyučující si učiní závěr, že Pavel chápe větu:

Pro libovolnou translaci $t_{\vec{u}}$ a osové souměrnosti s_a, s_b platí $t_{\vec{u}} = s_a \circ s_b$, právě když jsou přímky a, b kolmé na směr translace a jejich orientovaná vzdálenost je rovna polovině velikosti translace.



Obr. 2

Za chvíli má však Pavel řešit úlohu, v níž má složit posunutí o vektor $\vec{v}$ a osovou souměrnost s_m. Chápe sice, že by pro zjednodušení situace měl posunutí rozložit na dvojici osových souměrností, není však schopen odpoutat se od toho určitého rozložení, při němž jsou dvě osy osových souměrností nakresleny kolmo na umístění vektoru (obr. 2). Nechápe, že z výše zmíněné věty plyne, že jednu z os a, b můžeme volit kolmo ke směru translace libovolně a druhá je tak jednoznačně určena. Má jen znalost jednoho případu, byť toho „nejběžnějšího“.

Jedná se také o případ formální znalosti matematiky.

„Funnelling“ efekt

Efekt zvaný „funnelling“ (Wood, 1998) je do češtiny obtížně přeložitelný. Z mnoha významů slovesa „funnel“ je asi nejblíže posílat, předávat, zužovat se; podobně podstatné jméno „funnel“ znamená nálevka, trychtýř. Laicky řečeno, jev „funnelling“ znamená, že učitel rozdělí řešení složitějšího matematického problému na jednodušší kroky, v nichž stačí aplikovat algoritmy. Provede pak studenta celým řešením krok po kroku a když tento dospěje ke správnému výsledku, často se mylně domnívá, že student pochopil celý problém. Ten se zatím soustředil pouze na jednotlivé kroky řešení, jednotlivé kroky algoritmu.

Ilustrace 1: Voigt (1985) uvádí případ, kdy se učitel, který upřímně věří, že vyučuje v konstruktivistickém duchu pomocí otevřených problémů, ve skutečnosti naváděl studenty ke správnému řešení pomocí nepřímých narážek a neverbálních nápověd (docházelo k „funnelling“).

Ilustrace 2: Druhý příklad uvádí Wood (1998). Jim řeší úlohu $9 + 7$. Zde je úryvek z hodiny:

Jim: *14.*

Učitelka: *Dobrá. 7 plus 7 je 14. 8 plus 7 je jen přičtení jedné ke 14, což je . . . ?* (tázavě)

Jim: *15.*

Učitelka: *A 9 je o jednu víc než 8. Takže 15 plus 1 je . . . ?*

Jim: *16.*

Učitelka nechce poskytnout Jimovi správnou odpověď, ale snaží se na ni Jima přivést. Ovšem činí to tak, že Jim si její snahu může interpretovat takto: „Mám přičíst 1 k číslu, které mi učitelka říká.“ Učitelka chtěla Jima přivést na strategii, která by mu umožnila podobné úlohy řešit bez pomoci, ovšem místo toho Jimovi stačilo doplňovat čísla v systému, který mu zřejmě nebyl vůbec jasný.

Závěr

Cílem příspěvku bylo seznámit pedagogickou veřejnost s některými jevy, ke kterým podle našich zkušeností často dochází v hodinách matematiky na různých stupních škol. Věříme, že obeznámenost s podobnými jevy může přispět ke zvýšení citlivosti učitele k podobným situacím a ke zlepšení jeho práce.

Literatura

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Hejný, M., Kuřina, F. (2001.) *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál, Praha.

Sierpinska, A. (2000). *The ‘Theory of Didactic Situations’. Lecture notes for a graduate course with samples of students’ work*. Montreal, Concordia University.

Voigt, J. (1985). Patterns and Routines in Classroom Interaction. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 69–118.

Wood, T. (1998). Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funnelling or Focusing? In Steinbring, Hl, Bartolini Bussi, M. G., Sierpinska, A. (eds.), *Language and Communication in the Mathematical Classroom.* NCTM, Reston, 167–178.

Zajímavé vlastnosti druhých mocnin v netradiční aritmetice[1]

Naďa Stehlíková[2]

Úvod

Podíváme se na jednu z oblastí zkoumání netradiční aritmetické struktury, tzv. zúžené aritmetiky (zde nadále A_2), a navážeme tak na již publikované příspěvky zaměřené na jiné oblasti (např. Stehlíková, 2001a; 2001b; Ťupová, 2001; Ulrychová, 2003).

Zúžená aritmetika

Autorem netradiční aritmetické struktury, v rámci které se budeme nadále pohybovat, je Prof. Milan Hejný. Nejdříve si zavedeme základní pojmy.

Základem zúžené aritmetiky je zobrazení $r : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, tzv. *redukce*, které je zavedeno takto:

- když $n < 100$, $n \in \mathbf{N}$, pak $r(n) = n$,
- když $n \geq 100$, rozdělíme číslo odzadu na dvojčíslí a ty spolu sečteme. Pokud je výsledné číslo větší než 99, opět ho rozdělíme odzadu na dvojčíslí a ty spolu sečteme atd.

Např. $r(171) = r(1+71) = 72$, $r(1\,356) = r(13+56) = 69$, $r(8\,869) = r(88+69) = = r(157) = r(1+57) = 58$, $r(57\,865) = r(5+78+65) = r(148) = r(1+48) = 49$

Nechť $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ je množina prvních devadesáti devíti přirozených čísel. Pomocí redukce r zavedeme binární operace z-sčítání $\oplus$ a z-násobení $\otimes$ v A_2 takto:

$$\forall x, y \in A_2, x \oplus y = r(x+y) \text{ a } x \otimes y = r(x \cdot y).$$

Např. $78 \oplus 56 = r(134) = 35$, $7 \otimes 55 = r(385) = 88$.

Symbol A_2 bude nadále používán pro označení množiny i struktury $A_2 = (A_2, \oplus, \otimes)$. Čísla z množiny A_2 budeme nazývat z-čísla. Pokud neřekneme jinak, budeme nadále pracovat výhradně v množině A_2.

Zaměříme se na druhé mocniny z-čísel a jejich strukturu.

[1]Příspěvek byl vytvořen v rámci grantu GAUK 316/2001/APP/PedF
[2]*PedF UK Praha, nada.stehlikova@pedf.cuni.cz*

Úkol první: najděte všechny druhé mocniny v A_2

Jednoduchými výpočty dospějeme k následující tabulce druhých mocnin (symbol x^2 znamená $x \otimes x$).

x^2	x	x^2	x	x^2	x
1	1, 10, 89, 98	34	23, 32, 67, 76	67	34, 43, 56, 65
4	2, 20, 79, 97	36	6, 27, 39, 60, 72, 93	70	13, 31, 68, 86
9	3, 30, 36, 63, 69, 96	37	35, 46, 53, 64	81	9, 24, 42, 57, 75, 90
16	4, 40, 59, 95	45	12, 21, 45, 54, 78, 87	82	26, 37, 62, 73
22	11, 88	49	7, 29, 70, 92	88	22, 77
25	5, 50, 49, 94	55	44, 55	91	17, 28, 71, 82
27	15, 18, 48, 51, 81, 84	58	16, 38, 61, 83	97	14, 41, 58, 85
31	25, 47, 52, 74	64	8, 19, 80, 91	99	33, 66, 99

Z tabulky okamžitě vidíme řešení rovnice $x^2 = a$, kde x, $a \in A_2$. Tato rovnice má v A_2 v závislosti na parametru a žádné, 2, 3, 4, nebo 6 řešení (na rozdíl od řešení v $\mathbf{R}$).

V tabulce je také možné vyčíst některé zajímavé vlastnosti.

- Z-číslo a z-číslo k němu opačné ($\overline{a}$ je opačné číslo k číslu a, právě když $\overline{a} = 99 - a$) mají stejnou druhou mocninu. Analogie s aritmetikou celých čísel je zjevná (např. $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$).
- Z-čísla se stejnými číslicemi mají stejnou druhou mocninu $49^2 = 25$, $94^2 = 25$).
- Z-čísla typu B a $B0$, kde B je číslice $1, 2, \ldots, 9$, mají stejnou druhou mocninu $5^2 = 25$, $50^2 = 25$).

Máme-li již nějaké zkušenosti s redukcí, uvědomíme si, že druhé a třetí pravidlo lze vyjádřit jedním společným pravidlem: Z-čísla a a $10 \otimes a$ mají stejnou druhou mocninu (při z-násobení deseti se v z-čísle změní pořadí číslic).

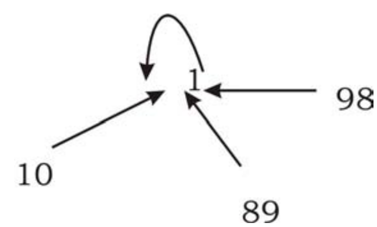
Úkol druhý: má množina druhých mocnin v A_2 nějakou strukturu

Tento úkol můžeme řešit různými způsoby. Např. se můžeme ptát, jaké je rozmístění druhých mocnin v rámci všech z-čísel. Uspořádáme všechna z-čísla v tabulce a vyznačíme druhé mocniny.

1	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10
11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20
21	**22**	23	24	**25**	26	**27**	28	29	30
31	32	33	**34**	35	**36**	**37**	38	39	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	**55**	56	57	**58**	59	60

61	62	63	**64**	65	66	**67**	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	**82**	83	84	85	86	87	**88**	89	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	**99**	

Zdá se, že podobně jako v tradiční aritmetice ani tady se nám nepodaří najít nějakou zjevnou zákonitost. Zkusíme to tedy jinak. Vytvoříme graf, kde z-čísla budou uzly, a tyto spojíme šipkou, která bude vyjadřovat vztah ‘být druhou mocninou’. To už vypadá zajímavě. Brzy dospějeme např. k tomu, že čísla 1, 10, 89 a 98 jsou spojena způsobem patrným z obr. 1.



Obr. 1

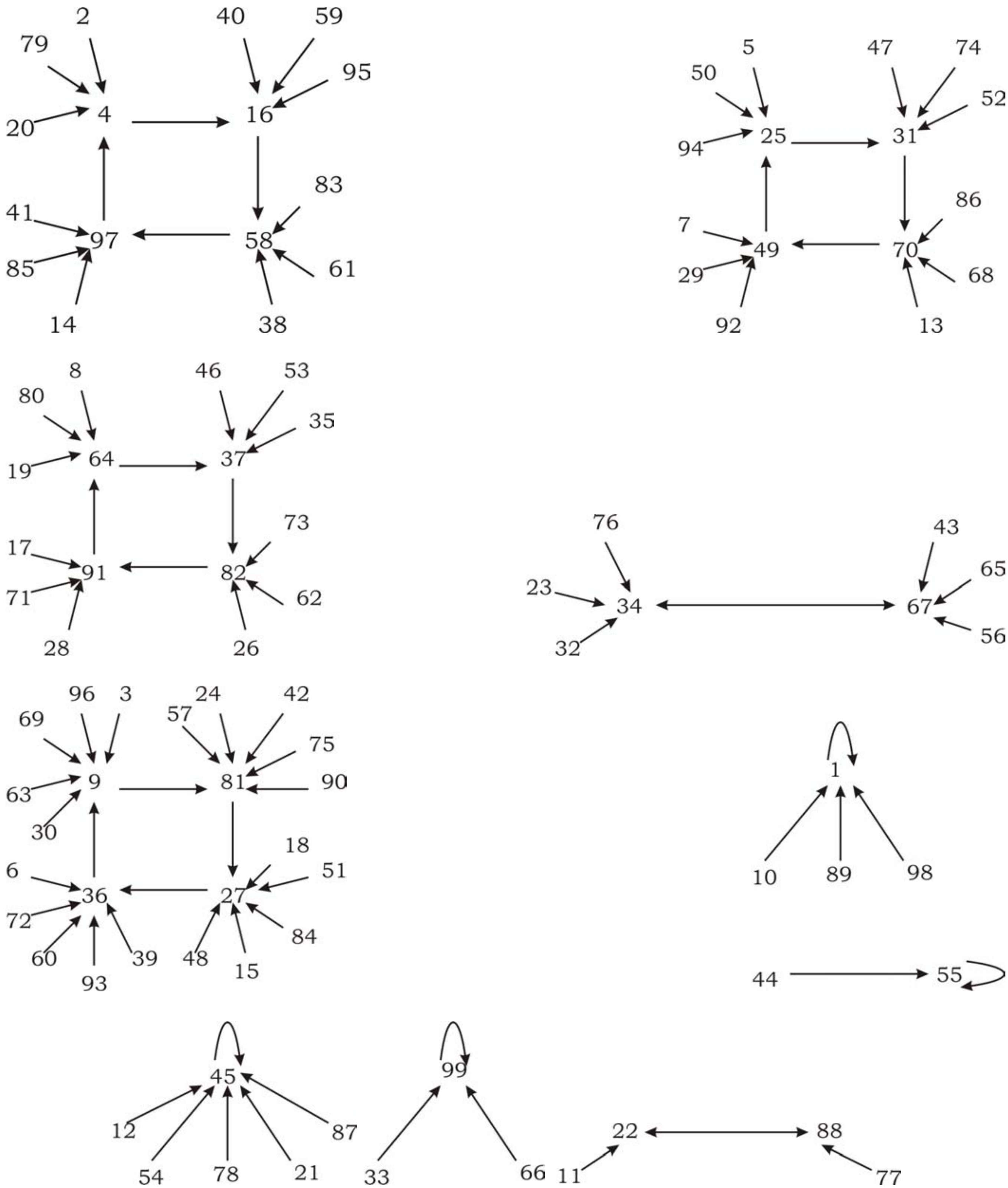
Při troše trpělivosti se nám podaří zjistit, že všechna z-čísla se dají vyjádřit podobným způsobem a že tvoří jakési klastry (obr. 2). Teď už máme pocit, že do struktury druhých mocnin začínáme vidět.

Úkol třetí: zkoumejte diagram druhých mocnin

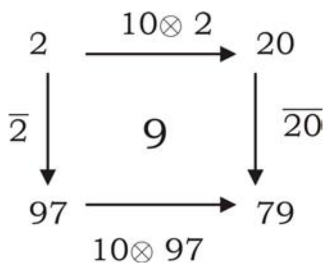
Nasnadě je otázka, podle jakého kritéria se dají klastry rozdělit. Jedním z nich je rozdělení na dělitele nuly (tedy násobky tří nebo jedenácti, kromě čísla 99) a 99 na jedné straně a ostatními čísly na straně druhé. Podle druhých mocnin, které tvoří základ klastru, můžeme klastry rozdělit na ‘čtyřúhelníkové’, ‘úsečkové’ (ty, které tvoří řešení soustavy rovnic $a^2 = b \Leftrightarrow b^2 = a$, tedy dvojice $(34, 67)$, $(22, 88)$) a ‘se smyčkou’ (takové, které tvoří řešení rovnice $a^2 = a$, tedy 1, 55, 45, 99.

Další otázka, kterou můžeme řešit, je, jakým způsobem dopočítáme všechny druhé odmocniny nějakého z-čísla, pokud známe jednu z množiny jeho druhých odmocnin, např. víme-li, že do množiny druhých odmocnin čísla 4 patří číslo 2. Zbylá čísla dopočítáme za použití vztahů uvedených v řešení prvního úkolu jako: $\overline{2} = 97$, $2 \otimes 10 = 20$, $97 \otimes 10 = 79$ (symbolicky na obr. 3).

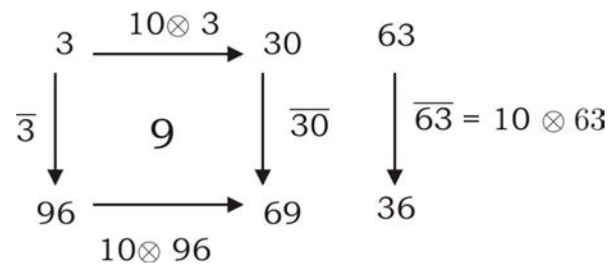
Tato metoda však bude fungovat jen pro čísla, která nejsou děliteli nuly ani 99. Uděláme-li si podobné schéma např. pro číslo 9, dostaneme dva oddělené ‘útvary’ na obr. 4. Je možné najít nějaké pravidlo, jak jsou spojeny?


2 40 59
79 95
20 4 16
41 97 58 83
85 61
14 38
5 47 74
50 52
94 25 31
7 49 70 86
29 68
92 13
8 46 53
80 35
19 64 37
17 91 82 73
71 62
28 26
76 43
23 34 67 65
32 56
96 3 24 42
69 57 75
63 9 81 90
30
6 36 27 18 51
72 84
60 93 39 48 15
1
10 89 98
44 55
45 99
12 87
54 78 21 33 66
22 88
11 77

Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Po určitém experimentování můžeme dospět k následující tabulce, v niž jsou zaznamenány všechny součiny mezi čísly z množiny druhých odmocnin čísla 9 (operace z-násobení je komutativní, nemusíme tedy doplňovat celou tabulku).

$\otimes$	3	30	96	69	36	63
3	9	90	90	9	9	90
30		9	9	90	90	9
96			9	90	90	9
69				9	9	90
36					9	90
63						9

Je zajímavé, že získáme pouze dva součiny, a to číslo 9 a 90. Lze tuto tabulku uchopit i jiným způsobem? Jedním z nich je např. dvojice rovnic $3 \otimes x = 90$, $3 \otimes y = 9$ (místo čísla 3 můžeme dát libovolné číslo z množiny druhých odmocnin čísla 9). Po jejich vyřešení dostaneme množiny řešení $x_1 = 30$, $x = 63$, $x_3 = 96$ a $y_1 = 3$, $y_2 = 36$, $y_3 = 69$, což jsou druhé odmocniny čísla 9.

Dáme-li dohromady oba výše uvedené příklady, dostáváme následující tvrzení: Nechť A je množina všech z-čísel, které mají stejnou druhou mocninu, tedy $A = \{x \in A_2, x^2 = = a, a \in A_2\}$. Pak $x, y \in A$, právě když $x \otimes y \in \{a, \overline{a}, 10 \otimes a, \overline{10 \otimes a}\}$, kde $\overline{a}$ je opačný prvek k a.

Například, víme-li, že $2^2 = 4$, pak $x = 2$, $a = 4$. Vyřešením čtyř rovnic $2 \otimes y = 4$, $2 \otimes y = 95$, $2 \otimes y = 40$, $2 \otimes y = 59$, dostaneme druhé odmocniny čísla 4, tedy $\{2, 97, 20, 79\}$.

Podobně, víme-li, že $3^2 = 9$, pak $x = 3$, $a = 9$. V tomto případě máme pouze dvě rovnice (protože $\overline{9} = 10 \otimes 9$ a $9 = \overline{10 \otimes 9}$) $3 \otimes y = 9$, $3 \otimes y = 90$. Řešením jsou druhé odmocniny čísla 9, tedy $\{3, 36, 69, 30, 63, 96\}$.

Lze ověřit, že tvrzení platí pro všechny druhé mocniny v A_2. Zůstává otázka, zda nelze najít nějaký 'elegantnější' způsob dopočítání druhých odmocnin v A_2. To zatím zodpovědět neumíme.

Úkol čtvrtý: zkoumejte čísla z jednotlivých klastrů z hlediska vlastností algebraických struktur

Multiplikativní tabulka, která vznikla při řešení předchozího úkolu, nás inspirovala ke zjišťování, zda některé množiny čísel z diagramu druhých mocnin a odmocnin netvoří aditivní či multiplikativní grupu.

Podařilo se nám najít pouze tři multiplikativní grupy.

$\{a^2\}$, kde $a \neq 99$ není dělitel nuly	$\{1, 4, 16, 25, 31, 34, 37, 49, 58, 64, 67, 70, 82, 91, 97\}$, jednotkový prvek je 1
$\{a^2\}$, kde a je množina dělitelů nuly bez násobků 11	$\{9, 27, 36, 45, 81\}$, jednotkový prvek je 45
$\{a^2\}$, kde a je množina dělitelů nuly bez násobků 3	$\{22, 55, 88\}$, jednotkový prvek je 55

Úkol pátý: řešte kvadratické rovnice

Teď, když umíme v A_2 ‘odmocňovat’, můžeme se podívat na řešitelnost kvadratických rovnic v A_2. Problematika kvadratických rovnic v A_2 je poměrně složitá a vyžaduje větší úsilí než předchozí úkoly. Bez řešení uvedeme několik otázek, kterými bychom mohli začít tuto oblast zkoumat.

- Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in A_2$:

  $x^2 \oplus 4 \otimes x = 99$, $2 \otimes x^2 \oplus 3 \otimes x = 99$, $9 \otimes x^2 \oplus 33 \otimes x = 99$,

  $x^2 \oplus 2 \otimes x \oplus 6 = 99$, $7 \otimes x^2 \oplus 6 \otimes x \oplus 93 = 99$, $9 \otimes x^2 \oplus 2 \otimes x \oplus 66 = 99$.

- Popište obecné řešení kvadratických rovnic.
- Klasifikujte kvadratické rovnice v A_2 podle počtu jejich kořenů.
- Zjistěte, zda pro kořeny kvadratické rovnice v A_2 platí Viètovy vztahy.
- Zkoumejte vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice v A_2.

Závěr

Tímto příspěvkem jsme se snažili ukázat na některé možnosti, které v sobě skrývá zúžená aritmetika. Pokud již čtenář v průběhu řešení úloh objevil, že se vlastně jedná o „skryté“ kongruence modulo 99, kde je místo čísla 0 číslo 99, může tohoto faktu využít ke zjišťování dalších vlastností zúžené aritmetiky. Naše zkušenosti však ukazují, že studenti raději vymýšlejí své vlastní strategie řešení a postupy, než aby nejdříve studovali kongruence a pak aplikovali poznatky na svou konkrétní strukturu (samozřejmě pokud již poznatky o kongruencích nemají). Navíc je číslo 99 složené číslo a většina matematických knih se zabývá kongruencemi, kde je modulo prvočíslo.

Naše znalosti zúžené aritmetiky jsou dosud neúplné a stále se objevují nové otázky, které by mohly být řešeny.

Literatura

Stehlíková, N. (2001a). Pythagorejské trojice – námět na samostatné žákovské experimenty. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*, PedF UK Praha, 69–73.

Stehlíková, N. (2001b). Zúžená aritmetika – most mezi elementární a abstraktní matematikou. In Burjan, V., Hejný, M., Jány, Š. (eds.), *Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras*. Exam, Bratislava, 67–72.

Ťupová, M. (2001). Pythagorejské trojice v netradiční aritmetice. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*, PedF UK Praha, 74–78.

Ulrychová, M. (2003). Magické čtverce v netradiční aritmetice. V tomto sborníku.

Magické čtverce v netradiční aritmetice[1]

Michaela Ulrychová[2]

V tomto příspěvku se budu věnovat rozpracování jedné oblíbené partie rekreační matematiky, magických čtverců, v netradiční aritmetice, tzv. zúžené aritmetice. Do určité míry tak naváži na příspěvky Ťupová (2001b) a Stehlíková (2001), které byly zaměřeny na pythagorejské trojice.

Zavedení zúžené aritmetiky je uvedeno v příspěvku Stehlíková (2003) v tomto sborníku.

Přípravná úloha

Definujte z-rozdíl $\ominus$ a z-dělení $\oslash$ v A_2.

Řešení: Operaci z-rozdíl $\ominus$ můžeme zavést např. jako přičtení opačného čísla:

$$\forall a, b \in A_2, a \ominus b = a \oplus \overline{b}, \text{ kde } \overline{b} \text{ je opačné číslo k } b \text{ a } \overline{b} = 99 - b$$

[1]Příspěvek byl podpořen grantem GAUK 316/2001/A PP/PedF.

[2]*PedF UK v Praze, ulrychova.michaela@centrum.cz*

Operaci z-dělení $\oslash$ můžeme zavést jako násobení inverzním číslem:

$$\forall a, b \in A_2, \text{ kde } a \neq 99 \text{ není dělitel nuly}; b \oslash a = b \otimes a^{-1}$$

Inverzní prvky získáme z řešení rovnice $x \otimes x^{-1} = 1$ (inverzní prvky neexistují pro číslo 99 a dělitele nuly, což jsou násobky čísla 3 a 11).

Magické čtverce[3] v A_2

Na úvod zaveďme magické čtverce v množině A_2. Magický čtverec v A_2 je takový soubor čísel z A_2 uspořádaných do tvaru čtverce, že z-součet čísel v každém řádku, v každém sloupci a v každé úhlopříčce je týž.

Magické čtverce se rozdělují podle počtu čísel v jednom řádku. Počet čísel v jednom řádku se nazývá **řád čtverce**, který budeme značit n. V tomto textu se omezíme na řád z množiny A_2. Magické čtverce dělíme na **sudé** a **liché** (podle řádu magického čtverce).

Z-součet čísel v každém řádku, v každém sloupci a v každé úhlopříčce nazveme **konstanta** magického čtverce. Konstantu magického čtverce v $\mathbf{N}$ budeme značit k, konstantu magického čtverce v A_2 budeme značit k'.

Úloha 1

Vypočítejte z-součet čísel v každém řádku, v každém sloupci a v každé úhlopříčce, magického čtverce na obr. 1.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Obr. 1

Řešení: Tento součet je roven číslu $r(176) = 77$.

[3]Magickými čtverci v běžné aritmetice se zabývají např. publikace Bachelová (1992), Coufal (1995), Kowal (1995), Maláč & Kurfürst (1981), Müller (1965), Novoveský (1971), Sedláček (1960).

Úloha 2

Nechť je zadán magický čtverec 4. řádu v oboru přirozených čísel (obr. 2). Převeďte tento čtverec do A_2 a vypočítejte jeho konstantu.

102	304	257	137
222	152	230	196
176	223	150	251
300	121	163	216

Obr. 2

3	7	59	38
24	53	32	97
77	25	51	53
3	22	64	18

Obr. 3

Řešení: Převedeme čísla z magického čtverce v **N** na čísla z množiny A_2 (tedy redukujeme všechna čísla čtverce) (obr. 3).

Konstanta tohoto magického čtverce je $k' = 8$. Vypočítáme-li konstantu původního čtverce, dostaneme $k = 800$, tedy $k' = r(k) = r(800) = 8$.

Poznámka: Vyskytují-li se v magickém čtverci v **N** čísla mimo množinu A_2, po zredukování těchto čísel na čísla z množiny A_2 dostaneme magický čtverec v A_2 a jeho konstantu k' najdeme jako redukci konstanty k. Vlastně tím říkáme, že nezáleží na tom, zda uděláme redukci jednotlivých sčítanců a ty sečteme, nebo nejprve vše sečteme a pak zredukujeme:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall a_i \in \mathbf{N}; r(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \\ = r(r(a_1) + r(a_2) + +r(a_3) + \cdots + r(a_n))$$

Úloha 3

a	b	c
50	80	d
20	e	f

Obr. 4

Doplňte chybějící čísla z A_2 v magickém čtverci na obr. 4 tak, aby jeho konstanta byla 30.

Řešení: Nejprve doplníme políčka a, c, d, která jsou jednoznačně dána.

$$\begin{aligned} 20 \oplus 50 \oplus a &= 30 \\ 70 \oplus a &= r(129) \\ a &= 59 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 20 \oplus 80 \oplus c &= 30 \\ 1 \oplus c &= 30 \\ c &= 29 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 50 \oplus 80 \oplus d &= 30 \\ 31 \oplus d &= r(129) \\ d &= 98 \end{aligned}$$

Poté již obdobným způsobem dopočítáme políčka b, e, f.

$$\begin{aligned} 59 \oplus 29 \oplus b &= 30 \\ 88 \oplus b &= r(129) \\ b &= 41 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 41 \oplus 80 \oplus e &= 30 \\ 22 \oplus e &= 30 \\ e &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 20 \oplus 8 \oplus f &= 30 \\ 28 \oplus f &= 30 \\ f &= 2 \end{aligned}$$

Pro kontrolu provedeme součet ve zbylých směrech: $29 \oplus 98 \oplus 2 = 30$, $59 \oplus 80 \oplus 2 = 42$.

Zde vidíme, že daný magický čtverec nemá řešení (součet v některých směrech se nerovná číslu 30).

Úloha 4

Doplňte chybějící čísla z A_2 v magickém čtverci na obr. 5 tak, aby jeho konstanta byla 63.

72	a	42
b	87	c
d	e	f

Obr. 5

Řešení: Nejprve opět vypočítáme jednoznačně dané hodnoty čísel v políčkách f, d.

$$\begin{aligned} 72 \oplus 87 \oplus f &= 63 \\ r(159) \oplus f &= r(162) \\ f &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 42 \oplus 87 \oplus d &= 63 \\ r(129) \oplus d &= r(162) \\ d &= 33 \end{aligned}$$

Potom doplníme zbývající políčka a, b, c, e.

$$\begin{aligned} 72 \oplus 42 \oplus a &= 63 \\ r(114) \oplus a &= r(162) \\ a &= 48 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 72 \oplus 33 \oplus b &= 63 \\ r(105) \oplus b &= r(162) \\ b &= 57 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3 \oplus 42 \oplus c &= 63 \\ 45 \oplus c &= 63 \\ c &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3 \oplus 33 \oplus e &= 63 \\ 36 \oplus e &= 63 \\ e &= 27 \end{aligned}$$

Pro kontrolu provedeme součet ve zbylých směrech: $57 \oplus 87 \oplus 18 = 63$, $48 \oplus 87 \oplus 27 = 63$.

Existuje právě jedno řešení (obr. 6).

72	48	42
57	87	18
33	27	3

Obr. 6

Úloha 5

Pro výpočet konstanty k magického čtverce skládajícího se ze všech přirozených čísel od 1 do n^2 platí vztah mezi konstantou k magického čtverce a řádem n magického čtverce: $k = \frac{1}{2}n(1 + n^2)$. Zjistěte, zda podobný vztah platí i pro výpočet konstanty k' magického čtverce v A_2.

Řešení: Při převádění vzorce do A_2 můžeme postupovat např. tak, že najdeme číslo, které odpovídá v A_2 číslu $\frac{1}{2}$. Jedná se vlastně o kořen lineární rovnice $2 \otimes x = 1$, což je $x = 50$. Číslo 50 nahrazuje ve vzorci racionální číslo $\frac{1}{2}$. V A_2 tedy zřejmě platí obdobný vztah pro výpočet konstanty k' magického čtverce skládajícího se ze všech z-čísel od 1 do n^2:

$$k' = 50 \otimes n \otimes (1 \oplus n^2), \text{ kde } n \in A_2 \text{ a } n^2 = n \otimes n.$$

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. 7

Vypočítejme např. konstantu k magického čtverce 5. řádu (obr. 7): $k = \frac{1}{2}n(1 + n^2) = \frac{1}{2} \cdot 5(1 + 25) = 65$, a konstantu k' příslušného magického čtverce v A_2: $k' = $ $= 50 \otimes n \otimes (1 \oplus n^2) = 50 \otimes 5 \otimes (1 \oplus 25) = 50 \otimes 5 \otimes 26 = $ $= r(6\,500) = 65$. Tedy $k = k'$.

Úloha 6

Využitím vztahů z úlohy 5 sestavte tabulku, která bude pro daný řád n magického čtverce udávat konstantu k magického čtverce v **N** a konstantu k' magického čtverce v A_2 ($n \in \{3, 4, 5, \ldots, 99\}$).

Řešení: Např. pro $n = 3$ v **N** platí: $k = \frac{1}{2}n(1 + n^2) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 = 15$, v A_2 platí $k' = 50 \otimes n \otimes (1 \oplus n^2) = 50 \otimes 3 \otimes 10 = r(1\,500) = 15$. Další řešení udává tabulka dole.

n	*k*	*k'*	*n*	*k*	*k'*	*n*	*k*	*k'*
3	15	15	7	175	76	11	671	77
4	34	34	8	260	62	12	870	78
5	65	65	9	369	72	...	...	...
6	111	12	10	505	10			

Poznámka: Protože výše uvedený vztah pro výpočet konstanty k' magického čtverce v A_2 platí pouze pro magické čtverce skládající se ze všech z-čísel od 1 do n^2, budeme nadále pracovat s tímto typem magických čtverců.

Úloha 7

Sestavte magický čtverec 11. řádu v A_2 a vypočítejte jeho konstantu k'.

Řešení: Nejprve sestavíme magický čtverec 11. řádu v **N**. Při vytváření tohoto čtverce využijeme následujícího pravidla pro sestavování lichého magického čtverce skládajícího se ze všech přirozených čísel od 1 do n^2 (Bachelová, 1992):

Číslo 1 zapíšeme do středního čtverečku prvního řádku. Číslo 2 napíšeme v sousedním pravém sloupci posledního řádku. Další čísla se píší tak, jak za sebou následují, úhlopříčkou napravo vzhůru od čtverečku, kde je číslo 2. Když je dosaženo okraje čtverce, přejde se o řádek výše v prvním levém sloupci. Odtud se pokračuje úhlopříčkou. Když narazíme na úhlopříčce na jedničku, sestoupíme o jeden řádek dolů a opět jedeme po úhlopříčce, dokud nenarazíme na horní okraj čtverce. Pak začínáme zase o sloupec vpravo na dolním řádku atd.

Magický čtverec 11. řádu v **N** je na obr. 9.

68	81	94	107	120	1	14	27	40	53	66
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103
7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	115
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42
56	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54

Obr. 9

Potom převedeme daný magický čtverec na magický čtverec 11. řádu v A_2 (obr. 10).

68	81	94	8	21	1	14	27	40	53	66
80	93	7	20	11	13	26	39	52	65	67
92	6	19	10	12	25	38	51	64	77	79
5	18	9	22	24	37	50	63	76	78	91
17	8	21	23	36	49	62	75	88	90	4
7	20	33	35	48	61	74	87	89	3	16
19	32	34	47	60	73	86	99	2	15	6
31	44	46	59	72	85	98	1	14	5	18
43	45	58	71	84	97	11	13	4	17	30
55	57	70	83	96	10	12	3	16	29	42
56	69	82	95	9	22	2	15	28	41	54

Obr. 10

Vypočítáme konstantu čtverce $k' = 50 \otimes 11 \otimes (1 \oplus r(121)) = 50 \otimes 11 \otimes 23 =$ $= r(12\,650) = 77$.

Úloha 8

Je možné určit jednoznačně hodnotu středového čísla (čísla v políčku uprostřed magického čtverce) v lichém magickém čtverci v A_2?

Řešení: Nejprve vyjdeme z lichého magického čtverce v $\mathbf{N}$. Středové číslo s lichého magického čtverce vypočítáme podle vzorce $s = k/n$, kde n je řád magického čtverce, k je konstanta čtverce. Např. středové číslo magického čtverce 5. řádu je $s = 65/5 = 13$, protože $k = \frac{1}{2}n(1 + n^2) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (1 + 25) = 65$ a $n = 5$.

V lichém magickém čtverci n-tého řádu obsahujícím z-čísla od 1 do n^2 v A_2, kde n není dělitel nuly, ani 99, platí $s' = k' \oslash n$, kde s' je středové číslo a k' je konstanta daného magického čtverce. Pro $n = 99$ nebo n, které je dělitelem nuly, musíme vztah zapsat jako rovnici $s' \otimes n = k'$, kde $n \in A_2$, a s' získáme jako její řešení.

Pro názornost uvedeme příklady pro několik různých n.

Příklad 1: Pro $n = 3$ v $\mathbf{N}$ platí: $s = k/n = 15/3 = 5$ Dostaneme tak magický čtverec na obr. 11. V A_2 platí $s' \otimes 3 = = 15$, tedy $s'_1 = 5$, $s'_2 = 38$, $s'_3 = 71$. Dostaneme tedy 3 typy magických čtverců na obr. 12.

	5	

Obr. 11

	5	

	38	

	71	

Obr. 12

Důsledek: Chceme-li najít magické čtverce 3. řádu pro $k' = 15$ v A_2 se středovým číslem 38, vyjdeme ze „základního“ magického čtverce se středovým číslem 5 (např. čtverce na obr. 13) a ke každému číslu ve čtverci přičteme číslo 33 (neboť $33 \cdot 3 = 99$, což plyne z řešitelnosti multiplikativních rovnic v A_2, viz závěr níže, číslo 33 je pak diference mezi středovými čísly). Pak se konstanta magického čtverce zvětší o číslo 99, tj. o nulový prvek: $k' \oplus 99 = k'$. Dostaneme tak magický čtverec na obr. 14.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Obr. 13

39	34	41
40	38	36
35	42	37

Obr. 14

Kdybychom přičetli ke každému číslu tohoto magického čtverce opět číslo 33, dostali bychom magický čtverec se středovým číslem 71.

Příklad 2: Pro $n = 5$ v **N** platí $s = k/n = 65/5 = 13$. Středové číslo magického čtverce 5. řádu je 13. V A_2 platí: $s' = k' \oslash n = 65 \oslash 5 = 65 \otimes 5^{-1} = 65 \otimes 20 = r(1\,300) = 13$. Středové číslo tohoto magického čtverce je také 13.

Příklad 3: Pro $n = 7$ v **N** platí: $s = k/n = 175/7 = 25$. Středové číslo magického čtverce 7. řádu je 25. V A_2 platí $s' = k' \oslash n = 76 \oslash 7 = 76 \otimes 7^{-1} = 76 \otimes 85 = r(6\,460) = $ $= 25$. Středové číslo tohoto magického čtverce je také 25.

Příklad 4: Pro $n = 9$ v **N** platí: $s = k/n = 369/9 = 41$. Středové číslo magického čtverce 9. řádu je 41. V A_2 platí $s' \otimes 9 = 72$, tedy $s'_1 = 8$, $s'_2 = 19$, $s'_3 = 30$, $s'_4 = 41$, $s'_5 = 52$, $s'_6 = 63$, $s'_7 = 74$, $s'_8 = 85$, $s'_9 = 96$. Středová čísla tohoto magického čtverce jsou 8, 19, 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96. Magické čtverce 9. řádu v A_2 lze opět odvodit ze „základního“ magického čtverce se středovým číslem 8. Ke každému číslu ve čtverci přičteme číslo 11 (neboť $9 \cdot 11 = 99$). Pak se konstanta magického čtverce zvětší o číslo 99. Přičítáním čísla 11 bychom opět dostali magické čtverce se středovými čísly 8, 19, 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96.

Závěr: V oboru přirozených čísel existuje pro daný řád lichého magického čtverce vždy právě jedno středové číslo. Na množině A_2 existuje i více středových čísel pro daný řád lichého magického čtverce. Souvisí to s řešitelností lineární multiplikativní rovnice $s' \otimes n = k'$. Podrobněji viz Ťupová (2001a), zde si jen uvedeme, že multiplikativní lineární rovnice v A_2 může mít 0, 1, 3, 9, 11, 33 nebo 99 řešení.

Z řešitelnosti multiplikativních lineárních rovnic v A_2 také vyplývá, že pro dané n a dané k', pro které platí vztahy $k' = n \otimes s'$ a $k' = 50 \otimes n \otimes (1 \oplus n^2)$, najdu vždy s'. Lineární multiplikativní rovnice $n \otimes s' = 50 \otimes n \otimes (1 \oplus n^2)$ s neznámou s' má řešení pro každé $n \in A_2$.

Úloha 9

V oboru přirozených čísel se můžeme setkat s aritmetickým průměrem čísel. Jak souvisí středové číslo lichého magického čtverce v **N** s aritmetickým průměrem řádku, sloupce či úhlopříčky? Platí něco podobného v A_2?

Řešení: Středové číslo lichého magického čtverce v **N** se rovná aritmetickému průměru řádku, sloupce či úhlopříčky. Pro $n \in A_2$, které není dělitel nuly ani 99, je aritmetický průměr d čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_2$ definován obdobně jako v **N** $d = (a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus$ $\oplus \cdots \oplus a_n) \oslash n$.

Pro n, které je dělitel nuly či 99, je aritmetický průměr d čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A_2$ definován jako číslo, které splňuje rovnici $d \otimes n = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \cdots \oplus a_n$.

Např. pro magický čtverec 5. řádu na obr. 15 platí:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. 15

– aritmetický průměr čísel např. v 1. sloupci:
$(17 \oplus 23 \oplus 4 \oplus 10 \oplus 11)/5 = 13 = s$
– aritmetický průměr čísel např. ve 4. řádku:
$(10 \oplus 12 \oplus 19 \oplus 21 \oplus 3)/5 = 13 = s$

Úloha 10

72	a	42
b	c	117
d	27	e

Obr. 16

Vyberte vhodná čísla z čísel 3, 21, 33, 48, 57, 87 a doplňte je do obr. 16 tak, abyste získali magický čtverec v A_2. Vypočítejte jeho konstantu k'.

Zadání úlohy 10 bylo upraveno podle úlohy z Novoveský (1971, str. 196–7).

Řešení:

– součet čísel v 1. řádku se musí rovnat součtu čísel ve 3. sloupci, tj. $72 \oplus a \oplus 42 = = 42 \oplus 18 \oplus e$, a tedy $r(114) \oplus a = 60 \oplus e$, tj. $15 \oplus a = 60 \oplus e$.

Ze zadaných čísel vybereme $a = 48$, $e = 3$.

Konstanta magického čtverce je $k' = 63$.

– dopočítáme políčko c, $c = 63 \ominus (48 \oplus 27) = 87$

– dopočítáme políčko b, $b = 63 \ominus (117 \oplus 87) = 57$

– dopočítáme políčko d, $d = 263 \ominus (27 \oplus 3) = 33$

Existuje právě jedno řešení.

Literatura

Bachelová, Z. (1992). *Sbírka úloh a námětů pro práci s matematickými talenty na ZŠ.* Praha.

Coufal, J. (1995). *Zajímavé aplikace matematiky.* Vydavatel: nadace Svatoplukovy společnosti, Brunšperk.

Kowal, S. (1995). *Matematika pro volné chvíle.* Polytechnická knižnice, 114. svazek, Praha, SNTL.

Maláč, J., Kurfürst, J. (1981). *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha, SPN.

Müller, K. (1965). *Mathematik in der Schule 2.* Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Novoveský, Š. (1971). *777 matematických zábav a her.* Praha, SPN.

Sedláček, J. (1960). *Nebojte se matematiky.* Polytechnická knižnice, 17. svazek, Praha, SNTL.

Stehlíková, N. (2001). Pythagorejské trojice – námět na samostatné žákovské experimenty. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*, PedF UK Praha, 69–73.

Stehlíková, N. (2003). Zajímavé vlastnosti druhých mocnin v netradiční aritmetice. V tomto sborníku.

Ťupová, M. (2001a). *Didaktické rozpracování prostředí netradiční aritmetické struktury*. Diplomová práce, PedF UK. Nepublikováno.

Ťupová, M. (2001b). Pythagorejské trojice v netradiční aritmetice. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky, sborník příspěvků*, PedF UK Praha, 74–78.