

František Kuřina

MATEMATIKA A ŘEŠENÍ ÚLOH

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta

České Budějovice 2011

Vydává Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta.

Publikace vychází za podpory projektu GAČR 406/08/0710.

Recenzovali:

prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc.

doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.

RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

© František Kuřina 2011

ISBN 978-80-7394-307-3

Obsah

Předmluva	7
1 Matematika a společnost	9
1.1 Příběh dvou kvantifikátorů	9
1.2 O matematice	12
1.3 Lidé a matematika	16
1.4 O matematickém vzdělávání	18
2 Tři pohledy na řešení úloh	23
2.1 Pohled historický	23
2.1.1 Řešení tří neřešitelných úloh	24
2.1.2 Těžnice trojúhelníku	28
2.1.3 Výšky trojúhelníku	32
2.1.4 Pythagorova věta	37
2.1.5 Apollóniova kružnice	50
2.1.6 Heronův vzorec	53

2.2	Pohled didaktický	61
2.2.1	Deset matematických miniatur	61
2.2.2	Čtyři slovní úlohy	65
2.2.3	Řešení rovnic	70
2.2.4	Rovina a rovnice	75
2.2.5	Míchání dvou kapalin	80
2.2.6	Osa úhlu	83
2.2.7	Obraz kružnice	89
2.2.8	Obvod a obsah obdélníku	94
2.2.9	Van Hieleho úloha	98
2.2.10	Faulhaberova věta	104
2.2.11	Podivuhodný svět prvočísel	109
2.2.12	Dirichletův, Pigeonhole – nebo Schubkasten – princíp	113
2.2.13	Dva příklady z Taovy sbírky úloh	116
2.2.14	Výška a těžnice v trojúhelníku	123
2.2.15	Jak se rodí úloha	133
2.3	Pohled žákovský	141
2.3.1	Dokresli obrázek	141
2.3.2	Dvě netradiční konstrukce	148
2.3.3	Druhá mocnina přirozeného čísla	151
2.3.4	Příběh pravidelného dvanáctiúhelníku	153
2.3.5	Sonda geometrické představivosti	162
2.3.6	Stereometrická sonda	165

2.3.7	Trojúhelníky v lichoběžníku	167
2.3.8	Obsah čtyřúhelníku	173
2.3.9	Pěticípá hvězda	177
3	Závěry	185
3.1	O úlohách	185
3.2	O řešení úloh	188
3.3	O školní matematice	193
3.4	O matematické kultuře	196
	Literatura	201
	Jmenný rejstřík	209

Matematika nespočívá v symbolech a výpočtech, to jsou jen pracovní nástroje ... matematika spočívá v nápadech a hlavně v tom, jak spolu různé nápady navzájem souvisejí. Co musí nutně vyplývat z daného faktu? Cílem matematiky je porozumění takovým otázkám tím, že se odstraní zbytečnosti a pronikne se do jádra problému. Není to jen otázka zjištění správné odpovědi, spíš podstaty toho, proč vůbec existuje nějaká odpověď a proč je taková, jaká je. Dobrá matematika má nádech úspornosti a prvek překvapení, ale především má význam.

Ian STEWART ([75], s. 12)

Omyly jsou v samém základu lidského myšlení, jsou tam zabudovány, vyživují celou stavbu nad sebou jako kořenové uzlíky. Kdyby se nám nebylo dostalo daru chybování a mýlení, nikdy bychom se nedopracovali něčeho užitečného. Neboť svou cestu si hledáme tak, že volíme mezi správnými a špatnými alternativami, sázeje na ty špatné zrovna tak často jako na ty správné. Tak se bereme a dereme životem. Jsme zkonstruováni k dělání chyb, jsme kódováni pro omyly. Říká se, že se učíme „pokusem a omylem“. Proč to pořád říkáme? Proč ne „pokusem a nacházením správné cesty“ nebo „pokusem a triumfem“? Ta stará věta přežívá proto, že je nejbližší skutečnosti našeho života.

Lewis THOMAS ([81], s. 113)

Předmluva

Tato publikace, která jistým způsobem shrnuje mé nazírání na matematické vzdělávání na základní a střední škole, je určena především učitelům matematiky. Představuji v ní část elementární matematiky, nikoliv ovšem ve tvaru definic, vět a důkazů, ale ve volném vyprávění ilustrovaném příklady.

Léta 2006 – 2008 byla úrodná na původní české sbírky úloh z produkce nakladatelství *Prometheus*. Vyšla výborně didakticky zpracovaná sbírka *Daga Hrubého*, ředitele gymnázia v Jevíčku, kniha vyvěrající z praxe a školní praxi určená [36]. Docent *Emil Calda* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy napsal stylem jemu vlastním sbírku *Středoškolská matematika pod mikroskopem* [10]. A konečně naši „olympionici“ *Jaroslav Švrček* a *Pavel Calábek* vydali sbírku náročných úloh pro talentované žáky [78]. Od těchto publikací, k nimž se ještě vrátím v kapitole třetí, se má kniha liší zejména ve dvou směrech: je převážně geometrická (to je dáno mým zaujetím pro tuto oblast elementární matematiky) a u úloh neuvádím jediné řešení, ale vždy se snažím o různé pohledy na zvolený problém.

Úlohy v publikaci uváděné přirozeně nejsou původní. Pokud nejde o úlohy zcela běžné, uvádím jejich původ. Rovněž u řešení úloh odkazuji na autory (pokud je znám).

Úspěšné řešení úloh, které nemají rutinní charakter, je závislé na intelektuální úrovni řešitele. Při řešení úloh jde téměř vždy „o pokračování“, o to, „jak to bude dál“. Toto pokračování není, s výjimkou zcela jednoduchých úloh, určeno. Přitom řešení úlohy není prioritně otázkou logiky, ale spíše otázkou intuice a tvořivosti. Proto je řešení úloh tak zajímavé, proto je řešení úloh podstatné pro studium matematiky. I proto může být studium matematiky pro někoho obtížné. K překonávání těchto obtíží by měla má kniha, která vznikla v rámci řešení projektu GAČR 406/08/0710, přispět.

Přeji Vám dobrou pohodu při četbě knihy.

Autor

V Hradci Králové 20. 4. 2011

Poděkování

Děkuji recenzentům publikace doc. Nadě Stehlíkové, Ph.D., prof. Jiřímu Cihlářovi, CSc. a dr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc. za cenné připomínky, které přispěly k zlepšení textu.

Děkuji Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity za pohotové vydání knihy, řešitelce projektu 406/08/0710 doc. Aleně Hošpesové za zařazení problematiky do grantu a doc. Jiřímu Vaníčkovi, Mgr. Václavu Šimandlovi a Miroslavu Bartyzalovi za pomoc při technickém zpracování rukopisu.

František Kuřina

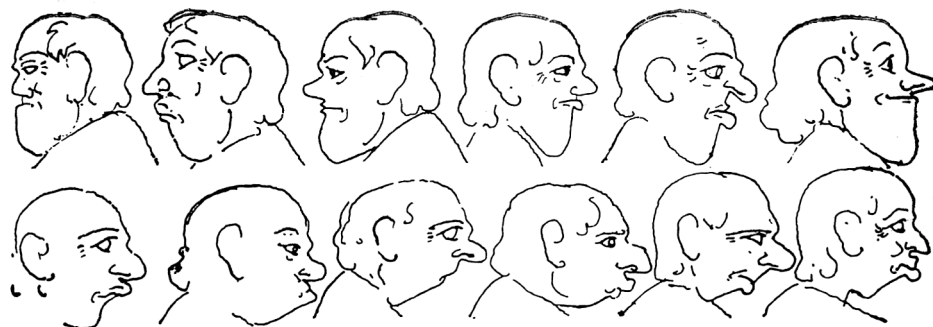
Kapitola 1

Matematika a společnost

1.1 Příběh dvou kvantifikátorů

Karel Čapek napsal ve stati *Každý a všichni* ([17], s. 158): . . . na první pohled vypadá stejně, prohlásíme-li, že „všichni lidé mají nos“, nebo že „každý člověk má nos“. Obojí kategoricky vypovídá soubytnost člověka a nosu. Ale je-li v obojím případě stejná soubytnost, není stejný nos. Řeknu-li, že všichni lidé mají nos, zjeví se mi jakýsi pomyslný, obecný a velikánský nos, orgán se dvěma dírkami a žádnou osobní zvláštností, nos, abych tak řekl, udělaný z pojmové sádry. Ale řeknu-li, že každý člověk má nos, znamená to už, že má svůj nos, osobní, hrbolatý, hák, bambuli, velký, lesklý, všetečný, orlí, studený nebo teplý nosánek, nos, rypák či chobot, zkrátka že každému přísluší jeho vlastní, personální, ryze soukromý nos, ježž někam strká, na jehož špičku nevidí a na němž lidé čtou, co chce říct. Nos každého člověka prostě a venkoncem není nos všech lidí.

Jak tuto „rozmanitost tvarů“ vidí výtvarníci, připomeňme kresbou Rodolpha Töpffera z jeho publikace *Essay de physiognomie* z r. 1845 (obr. 1, reprodukováno podle knihy [29], s. 383).



Obr. 1

Čapek s mimořádným jazykovým citem navozuje otázku, se kterou se setkává student obvykle na začátku studia matematiky, když poznává, že v matematických formulacích záleží na pořadí kvantifikátorů.

Převeďme citované Čapkovy věty do jazyka matematiky. Označíme-li výrokovou formu

člověk má nos symbolem CmN ,
 kvantifikátor *každý* symbolem $\forall$,
 kvantifikátor *existuje* symbolem $\exists$,

pak větu

Každý člověk má nos můžeme zapsat $\forall C \exists N[CmN]$,

kdežto věta

Všichni lidé mají nos má tvar $\exists N \forall C [CmN]$.

Že jde o různé výroky prokázal Čapek neobyčejně přesvědčivě.

Připomeňme neplatnost komutativity kvantifikátorů několika příklady.

Známa poučka *Každému trojúhelníku lze opsat kružnici* znamená *Ke každému trojúhelníku existuje kružnice, která je mu opsaná*. Samozřejmě ovšem neplatí: *Existuje kružnice opsaná libovolnému trojúhelníku*.

Každý žák základní školy ví: *Ke každému přirozenému číslu existuje číslo větší*. Neplatí ovšem: *Existuje přirozené číslo větší než libovolné přirozené číslo*, neboť *největší přirozené číslo neexistuje*.

Možná, že potíže s vyjadřování „kvantifikovaných vztahů“, které mohou studenti na začátku studia matematiky mít, spočívají v tom, že kvantifikátory, zvláště kvantifikátor existenční, mohou být formulovány různými způsoby, např. slovy „můžeme“, „lze“, ...

Ačkoliv naznačená problematika náleží k základům matematické gramotnosti studenta, existuje vysokoškolský matematický text z roku 1978, v němž můžeme číst:

Funkce $f(x)$ je shora omezená $\Leftrightarrow \forall x \in D(f) \exists K \in R [f(x) \leq K]$, ačkoliv samozřejmě správná definice zní

Funkce $f(x)$ je shora omezená $\Leftrightarrow \exists K \in R \forall x \in D(f) [f(x) \leq K]$.

Snad je to jen tisková chyba (v textu se však objevuje v různých modifikacích šestkrát).

Důvody, proč jsem zařadil do tohoto textu úvahy o kvantifikátorech, jsou ovšem „globálně didaktické“. Co tím rozumím? Jedním z problémů, které v praxi řeší didaktika matematiky, je otázka rozsahu a hloubky probírané matematiky např. na základní škole nebo na

gymnáziu (které není nijak specificky zaměřeno). Skutečnost, že matematiku patrně bude každý ve svém životě potřebovat, to na straně jedné, ale i že studium matematiky kultivuje člověka, vede k heslu „*Matematika pro všechny*“, tedy k přesvědčení o účelnosti jednotného matematického vzdělávání pro celou populaci. Faktický neúspěch takovýchto snah nás orientuje k realističtějšímu přesvědčení vyjádřenému heslem „*Matematika pro každého*“. Podobně jako Čapkův nos pro všechny je udělaný „z pojmové sádky“, je nutně neživotným monstrem jednotná matematika vhodná pro všechny. Naší snahou by mělo spíše být najít rozsah i pojetí školní matematiky náležitě diferencované podle zájmů, možností, potřeb a nadání jednotlivých typů studentů, tedy matematiku „šitou na míru“ těm, jimž je určena. Nezastírám, že je takovéto pojetí obtížně realizovatelné, jsem však přesvědčen, že je to schůdná cesta k tomu, aby matematiku chápala a oblíbila si ji, jako něco potřebného a účelného, větší část populace. Realizace takovéhoho přístupu k matematice je jen zčásti možná opatřeními „shora“. Věřím však, že náležitě vzdělaný učitel matematiky, který chápe problémy a potřeby svých studentů, najde individuální cesty k matematice, s nimiž budou spokojeni studenti, jejich rodiče i společnost.

1.2 O matematice

Jaký charakter má ona oblast lidské aktivity, která se nazývá MATEMATIKA? Je to technika, věda nebo umění? Je zřejmé, že na takto položenou otázku nemůžeme očekávat ani odpověď jednoduchou, ale ani odpověď jednotnou. Již proto ne, že matematika se vyvíjí v celé kulturní historii lidstva a zasahuje dnes snad do všech oblastí života.

Názory, které zde uvádím, nejsou pokusem o nějakou definici matematiky. Jsou pouze jakýmsi postoji několika autorů a nezastírám,

že jejich výběr je spíše věcí mého vkusu než nějakých objektivních kritérií.

Dirk J. Struik, klasik historie matematiky, se ve svém díle *Dějiny matematiky* vyjadřuje obrazně: *Matematika je velkým dobrodružstvím myšlení; v jejích dějinách se zrcadlí mnohé z nejhlubších myšlenek bezpočtu generací lidstva* ([77], s. 5) ... *Matematika ... vznikala při popisu kvantitativních jevů světa a rozvíjela se ve dvou metodických liniích – jako abstraktní teorie snažící se o axiomatickou systematiku a jako abstrakce řešení konkrétních ekonomických, astronomických, zeměměřických, technických a jiných požadavků* ([77], s. 228).

Tento pohled na matematiku je patrně výstižný, neboť po padesáti letech od jeho publikování zdůrazňuje *W. T. Gowers* ve sborníku *Matematika: hranice a perspektivy* [30], který byl vydán ke *Světovému roku matematiky 2000*: *Každému matematikovi jsou dobře známé dvě matematické kultury. Jednu vytvářejí matematici, kteří považují za svůj cíl řešit problémy, druhí se zabývají výstavbou teorií. Tyto cíle jsou ovšem navzájem svázány, neboť*

1. *Cílem řešení problémů je lépe rozumět matematice.*
2. *Cílem matematických porozumění je umět lépe řešit problémy.*

Kupodivu tyto ideje, které charakterizují vědeckou matematiku, korespondují i s matematickým vzděláváním. Student lépe porozumí matematice, řeší-li vhodné úlohy a po probrání určitého matematického celku může řešit další okruh úloh nebo řešit úlohy známé vhodnějším způsobem.

Z univerzitního studia matematiky jsou známy historické složky matematické vědy: *matematická analýza, geometrie, algebra, teorie pravděpodobnosti spolu s matematickou statistikou*. Nověji k nim přibývá oblast *matematických struktur, matematická logika, základy matematiky* a komplex, který *Miroslav Katětov* nazývá v publikaci [38]

matematika činnosti (obory související s *kybernetickými přístupy*, včetně *teorie výpočetních systémů a procesů*). Tato překrývající se hlediska respektují především poznatkové sféry – souhrny příslušných axiomů, definic a vět, tedy to, co bychom mohli nazvat *předmět matematiky*. Jsou ovšem možná i hlediska jiná, která zdůrazňují spíše přístupy k matematice než její obsah. Matematiku tak můžeme chápat např. jako *systém formálních dedukcí* nebo jako *ideální techniku* či *metodu předpovídání pomocí formálních kalkulu* (Vopěnka [84]).

Americký matematik australského původu *Terence Tao* formuluje podnětné názory na otázku *Co je dobrá matematika?* [79]. Připomeňme zde některé z jeho myšlenek.

Dobrou matematiku bychom mohli charakterizovat jako

- (i) Dobré matematické řešení problémů.
- (ii) Dobrá matematická technika.
- (iii) Dobrá matematická teorie.
- (iv) Dobrý matematický vhled
- (v) Dobrý matematický výsledek.
- (vi) Dobrá matematická aplikace.
- (vii) Dobrý matematický výklad.
- (viii) Dobrá didaktika matematiky.
- ...
- (xii) Dobré matematické vztahy s veřejností.
- ...

Je pozoruhodné, že za složku matematiky, dokonce dobré matematiky, považuje tento autor i tradiční didaktické či dokonce společenské problémy (vii, viii, xii). Podobně zdůrazňuje i *Katětov*, že *do matematiky jako vědy patří také metody, a to jak metody důkazové, tak metody vytváření matematických pojmů, matematických systémů*

a teorií, metody vyhledávání nadějných cest pro dokazování vět a řešení problémů, a také metody vyhledávání závažných a perspektivních problémů a témat vědecké práce ([38], s. 3). Je zajímavé, že tyto složky matematiky se zpravidla v matematických monografiích neobjevují. Matematici nám, učitelům matematiky, nedávají obvykle dobrý příklad, neboť z definic v monografiích nepoznáme, jaké myšlenkové procesy vedly k jejich přijetí, důkazy vět jsou obvykle formulovány jinak, než jak byly vymyšleny. Předvádějí nám elegantní svět teorií, do něho nepatří popis myšlenkových procesů, nápadů a omylů, které jeho vznik doprovázely. Vědecké texty jsou záznamem výsledků myšlení, nikoliv záznamem procesu myšlení. Matematické vzdělání by však podle mého názoru mělo být ovlivňováno spíše hledáním cest ke struktuře, než popisem hotové struktury.

Není patrně náhodou, že dva matematici světového jména, kteří zdůrazňují roli řešení problémů v matematickém vzdělávání, jsou maďarského původu *Paul Halmos* a *George Polya*. Maďarsko má snad světově největší tradici v kultivaci talentů a s tím související organizací soutěží v řešení matematických úloh.

Halmos např. zdůrazňuje: V čem je skutečné jádro matematiky? V axiomech, ve větách, v důkazech, v pojmech, v definicích, v teoriích, ve vzorcích, v metodách? Matematika by jistě nemohla existovat bez těchto součástí, jsou všechny podstatné. Nicméně já si vážně myslím, že žádná z nich není jádrem matematiky, že hlavním oprávněním matematikovy existence je řešení problémů, že skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení ([31]).

Připomeňme na závěr tohoto oddílu, že zamyšlení nad otázkou „dobré školské matematiky“ jsem publikoval v článku [46].

1.3 Lidé a matematika

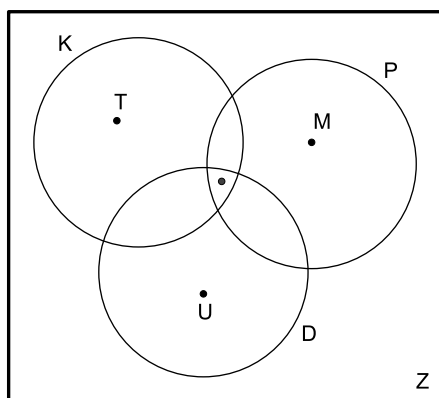
Naše civilizace spjatá s vědou a technikou se nemůže bez matematiky obejít. Přitom nejde prioritně o sofistikovanou matematiku, ale o takovou matematiku, která pomáhá člověku prostřednictvím speciálních věd porozumět přírodě a společnosti. Anglický matematik *I. Stewart* to vyjádřil lapidárně: *Náš svět spočívá na matematických základech a matematika je nevyhnutelně vnořena do naší globální kultury ... Kdyby matematika, včetně toho, co na ní spočívá, musela náhle z našeho světa zmizet, lidská společnost by se zhroutila* ([75], s. 38, 39).

Jaké části matematiky jsou užitečné?, ptá se jiný anglický matematik *G. H. Hardy* a odpovídá si:

Především je to podstatná část školní matematiky, aritmetika, elementární algebra, elementární euklidovská geometrie, diferenciální a integrální počet ... Dále je užitečná značná část univerzitní matematiky, totiž ta její část, která je ve skutečnosti rozvitím školní matematiky dokonalejší technikou. ... Musíme mít rovněž na paměti, že jistá zásoba vědomostí navíc vždycky znamená výhodu a že postavení těch nejpraktičtějších matematiků by bylo ztížené, kdyby jejich znalosti představovaly jen holé, nezbytné minimum ([32], s. 120, 121).

Jaký je vztah lidí k matematice?

Jsou lidé, kteří matematiku potřebují při výkonu svého povolání (technici, fyzici, chemici, ekonomové, finančníci, přírodovědci, lékaři, ...). Soubor těchto osob označme *K* (*konzumenti matematiky*). Lidé, kteří produkují nové matematické ideje, tvoří jistě početně menší skupinu, kterou označíme *P* (*producenti matematiky*). Učitelé matematiky na všech stupních škol obvykle matematiku neprodukují, nelze ani říci, že matematiku potřebují jako např. inženýři. Tuto skupinu osob označme *D* (*distributoři matematických idejí*). Označíme-li soubor všech osob *Z*, můžeme výsledky předchozí úvahy zakreslit do dia-



Obr. 2

gramu podle obr. 2. Jsou ovšem lidé, kteří náležejí do všech tří z uvažovaných skupin; jistě např. řada vysokoškolských učitelů matematiky aplikuje matematiku v praxi a objevuje přitom nové matematické poznatky. Na druhé straně jsou lidé, které bychom jen stěží mohli zařadit do některé ze tří uvažovaných skupin, nechceme-li považovat za aplikaci matematiky přepočtení částky placené v samoobsluze nebo změření rozměrů rozbitého okna. Každý člověk je však často ve svém životě postaven do situace, kterou dosud neřešil a na jejímž řešení má zájem. Každý člověk řeší určité problémy. Modifikací problémů jsou otázky a úlohy, které hrají důležitou roli jak v matematickém vzdělávání, tak i v matematice samotné. Této problematice se budeme věnovat ve druhé kapitole. Zde si všimneme otázky, zda matematické vzdělání pro konzumenty, producenty a distributory matematiky má být jednotné. Jsem toho názoru, že např. matematické vzdělání inženýra se má lišit od vzdělání teoretického matematika i učitele matematiky. Pro technika je matematika nástrojem, který používá v praxi a vnitřní struktura matematiky není pro něho prvořadá. Proto si v jeho matematickém vzdělávání můžeme dovolit mnohé důkazy jen naznačit, nebo

dokonce vynechat, pokud nemají zásadní význam pro porozumění matematickému obsahu. Vzdělání technika by mělo směřovat přímočaře k aplikovatelným výsledkům. Učit aplikovat matematiku je ovšem důležitá netriviální složka matematiky každého konzumenta. Profesionální matematik by však měl poznat do hloubky logickou strukturu studované oblasti, její pojmovou vytríbenost a souvislosti jednotlivých oblastí matematiky.

Pro učitele matematiky je zásadně důležitá geneze matematických pojmů – a to jak z hlediska jejich historického vývoje, tak i z hlediska psychologických možností porozumění pojmům. Matematické vzdělávání učitele by mělo věnovat pozornost „cestám k matematice“, ne jen matematice jako hotové, úsilím generací vědců precizně formulované a logicky skloubené disciplíně. Všude, kde je to možné, bychom měli dávat přednost procesům definování, dokazování a hledání řešení před hotovými definicemi, důkazy a řešeními.

Formulace *věta se dokazuje, pojem se zavádí, úloha se řeší . . .*, s nimiž se někdy můžeme v praxi setkat, navozují falešné představy, že *důkazy, definice a řešení úloh* jsou objektivně dány a nejsou závislé na „*tvůrcích*“. Jak historií matematiky, tak didaktickou praxí lze doložit, že definice jsou vhodnými či méně vhodnými konvencemi, že důkazy záleží podstatně nejen na „okolí věty“ (na stavbě studované teorie), ale i na zkušenostech a invenci autora. Tím spíše jsou takto subjektem řešitele ovlivněna řešení úloh. Jsem přesvědčen, že tyto úvahy platí na každé úrovni „matematické vědy“ a naše publikace by měla vyznít na jejich obhajobu.

1.4 O matematickém vzdělávání

Školu utvářejí žáci a učitelé. Tyto dvě skupiny jsou formovány společností a podmínkami, v nichž žijí. Zbožná přání školských reforem se

vždycky realizují ve třídách a patrně vždycky deformovaně. V nezdravé společnosti se nemůže dlouhodobě rozvíjet zdravá škola.

Uveďme dva příklady.

Americký spisovatel *Philip Roth* napsal:

Tady v Americe pošetilosti narůstají hodinu od hodiny. Všechny vysoké školy rozjely doplňující programy, aby děti naučily, co mají umět už v deváté třídě. Studenti prosazují svou nedostatečnost jako výsadu. Nedokážu se to naučit, takže je s tím něco v nepořádku. A taky je něco v nepořádku s tím nemožným učitelem, který to chce učit ... Už neexistují měřítka .. pouze názory ... ([69], s. 261).

Německá autorka *Juli Zeh* podává zdrcující obraz mládeže v současné společnosti slovy:

Tihle mladí lidé po ničem netouží, nemají žádné přesvědčení, o ideálech ani nemluví, neusilují o konkrétní povolání, nechtějí mít ani politický vliv, ani šťastné manželství, nechtějí mít ani děti, ani domácí zvířata, ani vlast a netouží ani po dobrodružství nebo revoltě, ani po klidu a míru v tradičním duchu. Volný čas a pracovní čas jsou stejně namáhavé a liší se především tím, zda peníze vydělávají, nebo vydávají ... Tahle mládež se už přestala zajímat o průmyslově vyráběnou módu, identitu, hrdinské vzory a obrazy nepřítele ... ([93], s. 271).

A tato mládež nám (nebo snad jen jim?) sedí v lavicích škol a poslucháren vysokých škol. Vzdělávat ji musíme. Můžeme také probudit její poznávací aktivitu? Jistá část mládeže bude snad vždycky k poznávání světa tíhnout. Jak vzdělávat tu zbývající část? To je patrně těžko řešitelný problém. Máme násilím nutit bez valných výsledků všechnu mládež ke studiu poměrně rozsáhlých oblastí z různých oborů, nebo máme být pouze k dispozici těm, kteří mají o poznávání zájem? Zúžení vzdělávání na aktivní zlomek mladé generace je lákavé. Ale nemá snad pravdu *Johann Wolfgang Goethe*:

*Aj, to se poddá, to je zvyk
 dětátko rovněž odmítne
 prs matčin v první okamžik
 a pak mu rádo přivykne.
 A tak i vám se naposledy
 nebude chtít od nader vědy ([28], s. 92).*

Ačkoliv jsou i v naší dnešní škole „hodné děti a horliví šprti“, roste i u nás *neukázněnost, neúcta, neurvalost, neochota se něčemu naučit, spolu s vulgárností, kouřením marihuany a těhotenstvím nezletilých děvčat*, rysy, které jsou podle *Nonny Auské* typické pro americkou školu ([3], s. 230). Uvedené charakteristiky nejsou doloženy statisticky, ani jinak „vědecky“, toto nebezpečí však patrně všichni pociťujeme. Realita školního prostředí a ideál, v němž se má např. podle autorů Bílé knihy [60] uskutečňovat v „střednědobém horizontu“ reforma naší školy, je jedním z dilemat našeho vzdělávacího systému.

Vím, že máme dobré školy, dobré žáky a studenty a věřím, že i většina našich učitelů je dobrých. *Petr Pitha* k této problematice napsal: *Učitel může mnohé ovlivnit, nic však nemůže zařídit. Kdyby život společnosti byl určován školami, byli by učitelé zodpovědní např. za fašismus v Německu, za komunismus v jeho zvrácenosti v Rusku, za terorismus v Irsku atd. I když sdílím Komenského optimistickou víru v sílu výchovy, uvědomuji si, že výchova je toliko jednou silou, která ve světě působí. Škola dává základ života, nikoli celek života. Škola přispívá k rozvoji společnosti, ale je také stavem společnosti určována a jejím vývojem nesena, často proti svým záměrům a snahám, někam, kam se nechce dostat. Při pohledu na vynikající snahu i výsledky nějaké malé venkovské školy mám vždy neúprosně smutnou představu, že tato škola bude celkovým proudem společnosti stržena někam úplně jinam, než kam sama směřuje. Mravenec, který celý den pospíchá na sever po zádech slona houpavě směřujícího na jihozápad, je bolestně přesnou*

paralelou mnoha kvalitních učitelů v málo kvalitní společnosti ([64], s. 32).

Platí-li všeobecně, že práce je požehnáním, pokud není dřinou, stane-li se jí však, může snadno přejíti v kletbu, platí to tím spíše pro práci, kterou ukládá škola mládeži. Na správném pracovním ovzduší proto velmi záleží. Práce školní nemá být provázena pocitem tísně, což snadno nastane, není-li práce přiměřena žakovým silám, nebo není-li správně rozdělena a neovládne-li jí pořádek. Žák této tísní uhýbá – je v tom často jen zdravý pud sebezáchovy – tím že práci zanedbává. Avšak nedbání školních povinností je osudné nejen žakovu školnímu prospěchu, nýbrž i – a to je neméně závažné – jeho výchově mravní a podlamuje to zároveň mravní působení školy; její prostředí ztrácí výchovný vliv. Musí proto práce ukládaná žákům býti správně odměřována, aby nepřesahovala síly průměrného žáka.

Bohumil BYDŽOVSKÝ ([9], s. 250)

Matematika je řešení problémů. Řešení úloh a problémů by mělo být ohniskem žakova matematického života. Ač to může být někdy bolestně frustrující, žáci i jejich učitelé by měli být stále zapojeni do tohoto procesu. Měli by mít nápady, ale i pociťovat nedostatek nápadů, měli by objevovat pravidelnosti, formulovat domněnky, konstruovat příklady a protipříklady, vymýšlet argumenty a diskutovat o výsledcích. Specifické techniky a metody budou pak přirozeně vyrůstat z tohoto procesu, tak jak tomu bylo i v historii, nebudou izolované, ale budou organickým produktem problémového pozadí.

Paul LOCKHART ([55], s. 60)

Kapitola 2

Tři pohledy na řešení úloh

2.1 Pohled historický

V tomto odstavci uvedu pohled na šest geometrických témat ovlivněný historickými podněty, nebudu se však pokoušet o výklad skutečné historie jejich řešení. Témata byla vybrána tak, aby úzce souvisela se školskou matematikou a ilustrovala závislost řešení problému nejen ve vývoji vědy v příslušném období, ale i na zaměření „tvůrců“.

Pro osvěžení paměti připomínám na obr. 1, kdy žili řeční autoři, jejichž problémy se zde budeme zabývat. Nezasvěcenému čtenáři se může zdát, že šlo o současníky, ve skutečnosti však uvažujeme o matematice tvořené v pětisíciletém období.



Obr. 1

2.1.1 Řešení tří neřešitelných úloh

Úlohy, kterými se zde budeme zabývat, jsou tři klasické problémy řecké geometrie:

Trisekce úhlu: Konstrukce polopřímek, které dělí daný úhel na tři shodné části.

Kvadratura kruhu: Konstrukce čtverce, který má stejný obsah jako daný kruh.

Duplicita krychle: Konstrukce krychle, která má dvakrát větší objem než daná krychle.

Setká-li se s těmito úlohami technik, bez problémů je vyřeší. Bude patrně postupovat takto:

Má-li daný úhel velikost α , vypočítáme velikost jeho třetiny $\frac{1}{3}\alpha$ a sestrojíme např. pomocí úhloměru úhel této velikosti.

Má-li kruh obsah $S = \pi r^2$, pak pro stranu x hledaného čtverce platí $x^2 = \pi r^2$ neboli $x = r\sqrt{\pi} = r.1,77\dots$. Čtverec má stranu numericky určené velikosti x a můžeme ho sestrojit.

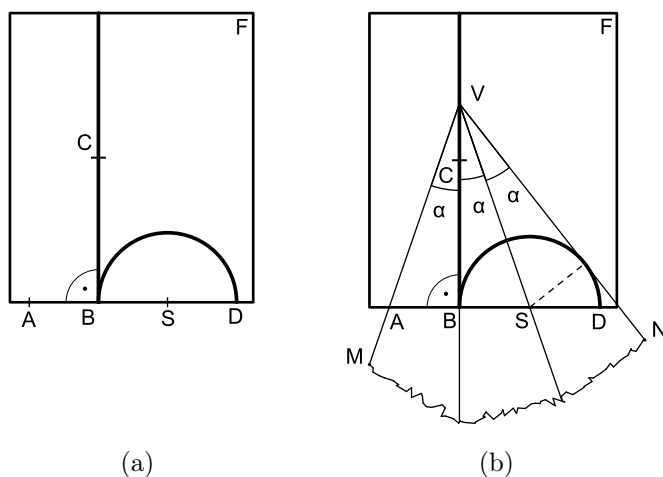
Má-li krychle objem $V = a^3$, pak máme podobně pro objem hledané krychle $x^3 = 2a^3$, neboli $x = a\sqrt[3]{2} = a.1,26\dots$

Při řešení jakéhokoliv úkolu potřebujeme vědět, jaké „nástroje“ máme k dispozici, jaké technické nebo myšlenkové prostředky můžeme při jeho řešení použít.

Zmíněné tři úlohy měly být řešeny pouze pomocí pravítka a kružítko tzv. *euklidovskými konstrukcemi*, přičemž se pravítko a kružítko použije pouze „standardním“ způsobem, tj. pravítko ke konstrukci spojnice dvou bodů a kružítko k narýsování kružnice s daným středem a daným poloměrem, délky úseček měřit nemůžeme. Přes čtené

pokusy tyto úlohy nikdo nevyřešil a teprve v 19. století se podařilo na základě hlubokých algebraických úvah dokázat, že zmíněné úlohy jsou euklidovsky neřešitelné. Poučení o této problematice lze najít např. v *Žluté knize* Milana Hejného [33].

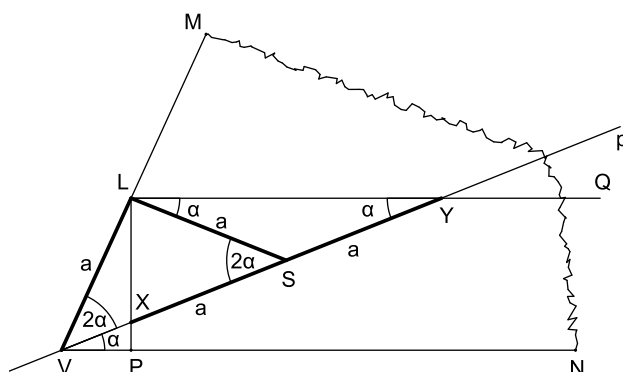
Klasické problémy řecké geometrie jsou produktem doby, kdy se geometrie osvobodila od řemeslně pojatého měřictví. *Geometrie nevznikla proto, aby řešila praktické úlohy. Na to stačilo měřictví samo. . . a umělo se s nimi vypořádat často uspokojivěji než geometrie* (Vopěnka [85], s. 39). *Prokázaná nemožnost vyřešit klasické geometrické problémy očekávaným způsobem, to je nalezením příslušných euklidovských konstrukcí, je netriviálním záporným poznatkem, jehož získání bylo provázeno některými jevy, jež takové poznatky obvykle přinášejí. Je to poznatek rozčilující, s nímž se někteří lidé dodnes nejsou schopni smířit* ([85], s. 317).



Obr. 2

Uveďme nyní několik řešení klasických problémů při použití „neklasických“ prostředků.

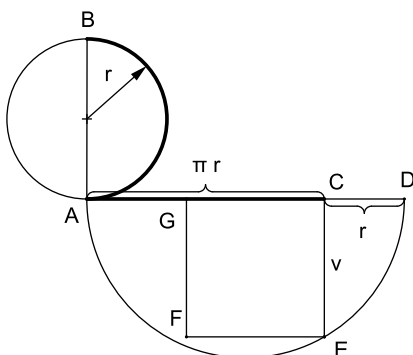
Velmi jednoduchý „trisektor“ si můžeme zhotovit přerýsováním pravého úhlu ABC a polokružnice s průměrem BD ($AB \simeq BS \simeq SD$) na průhlednou fólii F podle obr. 2a. Užití tohoto zařízení na trisekci úhlu MVN je nakresleno na obr. 2b.



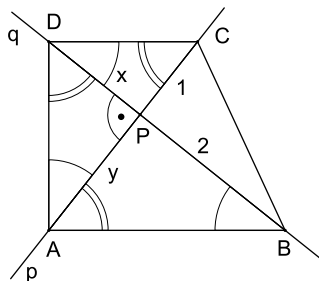
Obr. 3

Další možnost rozdělení úhlu MVN na tři shodné části využívá pravítka, na němž lze vyznačit určitou úsečku. Postupujeme tímto způsobem. Na rameni VM zvolme libovolně bod L a sestrojme pravý úhel PLQ , jehož rameno LQ je rovnoběžné s VN a LP je kolmé k přímce VN . Na hraně p pravítka vyznačme úsečku XY se středem S , tak, že $VL \simeq XS \simeq SY$. Umístíme nyní hranu p tak, aby procházela bodem V , bod X aby ležel na rameni LP a bod Y na rameni LQ . Pak je podle obr. 3 úhel NVY třetinou úhlu MVN .

Takřka „automatickou“ kvadraturu kruhu si můžeme přiblížit pomocí „odvalení“ modelu kruhu po přímce. Bod B se při odvalení poloviny kruhu po přímce dostane do bodu C tak, že úsečka AC má



Obr. 4



Obr. 5

délku πr . Připojíme-li k této úsečce úsečku CD velikosti r , můžeme podle Euklidovy věty o výšce sestrojít čtverec $CEFG$, jehož obsah je $v^2 = \pi r^2$ (obr. 4).

Duplicitu krychle můžeme provést pomocí manipulace se dvěma pravými úhly. Nejdříve si všimněme lichoběžníku $ABCD$, jehož rameno AD je kolmé k základnám AB , DC a jehož k sobě kolmé úhlopříčky AC a BD se protínají v bodě P . Trojúhelníky APB , DPA , CPD jsou podobné a je-li $|CP| = 1$, $|BP| = 2$, platí v označení podle obr. 5

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{x} = \frac{2}{y}$$

neboli

$$x^2 = y, y^2 = 2x.$$

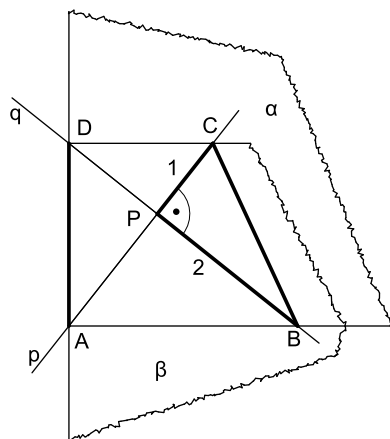
To ovšem znamená, že

$$x^4 = 2x$$

neboli

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

Podaří-li se tedy „sestrojit“ lichoběžník $ABCD$, bude určena délka hrany hledané krychle. Ačkoliv to není možné provést euklidovsky, ukážeme, že je to možné manipulací se dvěma pravými úhly α, β modelovanými např. „rohy“ obdélníků z průhledné fólie. Umístíme trojúhelník BCP a přímky p, q (obr. 6). Nyní pohybujeme úhly α, β tak, aby jedno rameno úhlu α procházelo bodem B a jeho vrchol A ležel na přímce p , a jedno rameno pravého úhlu β procházelo bodem C a jeho vrchol D ležel na přímce q . Úsečka AD je částí ramen obou pravých úhlů. Po chvíli experimentování se umístění podaří a úsečka DP má velikost $\sqrt[3]{2}$.



Obr. 6

2.1.2 Těžnice trojúhelníku

V úvahách o vlastnostech těžnic trojúhelníku budeme vycházet ze znalosti vlastností střední příčky trojúhelníku, zejména věty

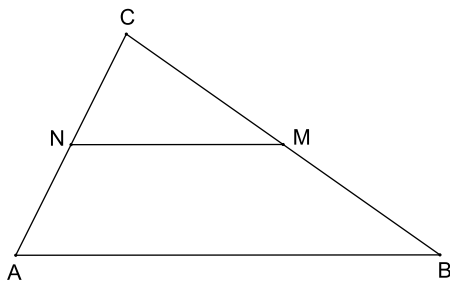
S: Jsou-li M, N po řadě středy stran BC, AC trojúhelníku ABC , pak pro střední příčku MN platí (obr. 7):

$$\begin{aligned} MN &\parallel AB \\ |MN| &= \frac{1}{2}|AB| \end{aligned} \quad (1)$$

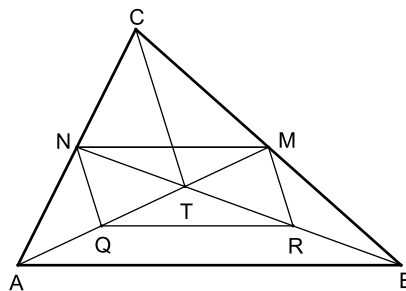
Dokážeme nejdříve větu

T: Jsou-li M, N po řadě středy stran BC, AC trojúhelníku ABC , pak pro průsečík T těžnic AM, BN platí

$$\frac{|AT|}{|TM|} = \frac{|BT|}{|TN|} = \frac{2}{1} \quad (2)$$



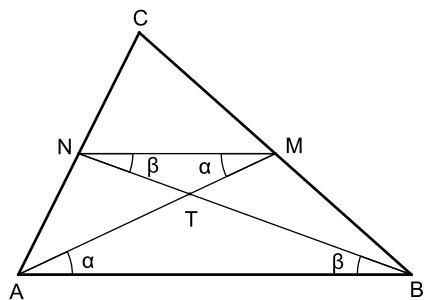
Obr. 7



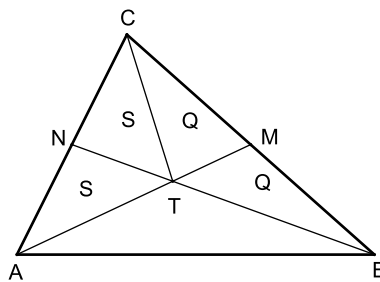
Obr. 8

1. důkaz věty **T** (*H. S. M. Coxeter*, [15], s. 25)

Sestrojíme středy N, M stran AC, BC (obr. 8) trojúhelníku ABC , střední příčky NQ, MR trojúhelníků CTA a CTB rovnoběžné se stranou CT . Z vlastností těchto příček vyplývá, že čtyřúhelník $NMRQ$ je rovnoběžník, jehož úhlopříčky se půlí. To ovšem znamená, že platí (2).



Obr. 9



Obr. 10

2. důkaz věty T (na základě podobnosti)

Protože je přímka MN rovnoběžná s AB (obr. 9), jsou střídavé úhly α a střídavé úhly β shodné a trojúhelník MNT je podobný trojúhelníku ABT , přičemž poměr podobnosti je v důsledku (1) roven číslu $\frac{1}{2}$. Platí tedy (2).

3. důkaz věty T (autorem je britský školák)

V označení podle obr. 10 platí: Trojúhelníky NTC a NTA mají též obsah S (mají shodné základny NC , NA a touž výšku). Z téhož důvodu mají stejný obsah Q i trojúhelníky MCT a MBT . Protože trojúhelníky MCA a NCB mají stejný obsah (polovina obsahu celého trojúhelníku ABC), platí

$$2S + Q = 2Q + S$$

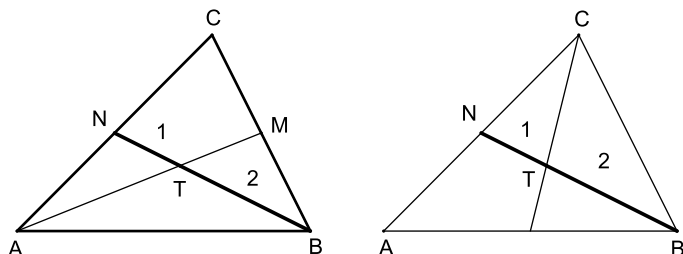
neboli

$$S = Q$$

Poměr obsahů trojúhelníků ATC a TMC je tedy $2 : 1$ a protože mají stejnou výšku ke straně AM , platí (2).

Důsledkem věty T je věta M :

V libovolném trojúhelníku procházejí těžnice týmž bodem.



Obr. 11

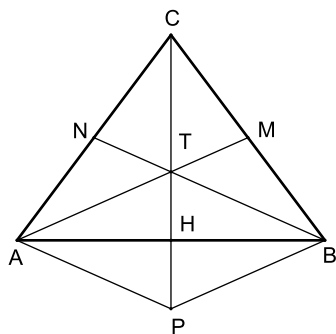
To nahlédneme snadno, aplikujeme-li větu T na dvě dvojice těžnic podle obr. 11.

Snad nejelegantnější důkaz věty o těžišti trojúhelníka (spojení vět T a M) uvádí *Eduard Čech*:

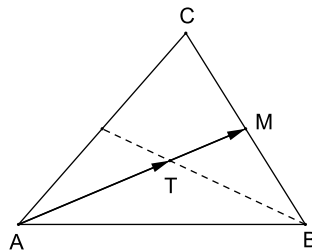
4. důkaz (věty T a M) ([19], s. 74)

Sestrojíme průsečíkem T těžnic AM a BN přímkou CT a na ní sestrojíme bod P tak, aby T byl středem úsečky CP (obr. 12). Protože NT je střední příčka trojúhelníku ACP , je $AP \parallel BT$, protože MT je střední příčka trojúhelníku BCP , je $BP \parallel AT$. Čtyřúhelník $APBT$ je tedy rovnoběžník, H je střed strany AB a platnost vztahu (2) je rovněž zřejmá.

Máme-li k dispozici aparát vektorového počtu, můžeme studované věty o těžišti ověřit pouhým výpočtem.



Obr. 12



Obr. 13

5. důkaz

Vypočítejme souřadnice bodu T , pro něž platí $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (obr. 13). Protože M je střed úsečky BC , platí

$$M = \frac{1}{2}(B + C),$$

$$T - A = \frac{2}{3}(M - A),$$

$$T = A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}(B + C) - A \right) = \frac{1}{3}(A + B + C),$$

nezávisle na tom, z kterého vrcholu trojúhelníku vyjdeme.

2.1.3 Výšky trojúhelníku

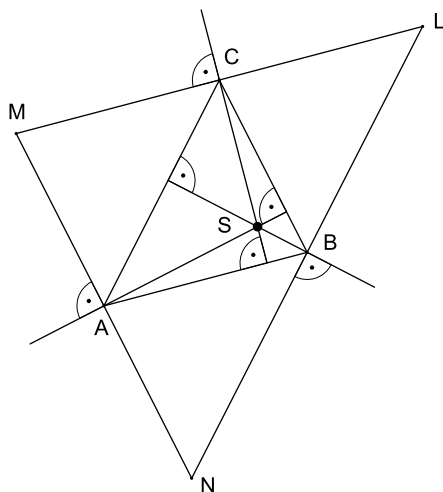
Věta o průsečíku výšek libovolného trojúhelníku nebyla patrně známa Euklidovi a řecké matematice vůbec. Poprvé ji snad dokázal teprve *Leonard Euler* (1707 – 1783). Větu oceňoval pro její eleganci a netri-viálnost *Albert Einstein* (1879 – 1955).

Všimněme si tedy několika důkazů věty

Výšky libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem.

1. důkaz (*C. F. Gauss* (1771 – 1855), citováno podle [4], s. 41)

Sestrojíme-li každým vrcholem trojúhelníku ABC přímkou rovnoběžnou s jeho protější stranou, dostaneme trojúhelník LMN , v němž jsou výšky původního trojúhelníku osami stran (obr. 14). Protože osy stran trojúhelníku mají společný bod (střed kružnice trojúhelníku opsané), protínají se v jednom bodě i výšky trojúhelníka ABC .



Obr. 14

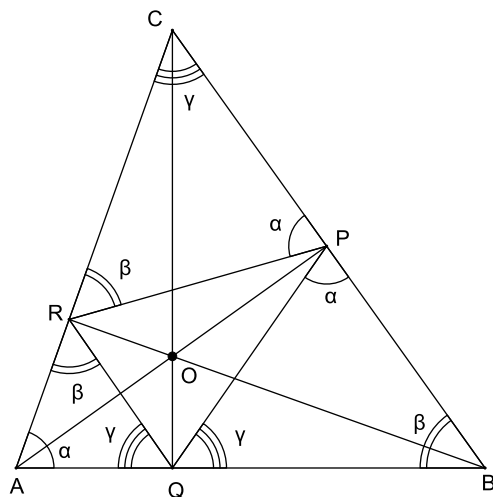
Ukažme, že na podobné „záměně rolí“ můžeme založit další důkaz.

2. důkaz (pro ostroúhlý trojúhelník ABC)

Sestrojme v ostroúhlém trojúhelníku ABC se stranami a, b, c paty výšek P, Q, R podle obr. 15. Vzhledem k tomu, že platí

$$|AR| = c \cos \alpha, |AQ| = b \cos \alpha,$$

je trojúhelník ARQ podobný trojúhelníku ABC . Analogické výsledky pro trojúhelníky BQP, CRP umožňují nahlédnout, že výšky trojúhelníku ABC jsou osami úhlů trojúhelníka PQR a protínají se tedy ve středu O kružnice jemu vepsané.



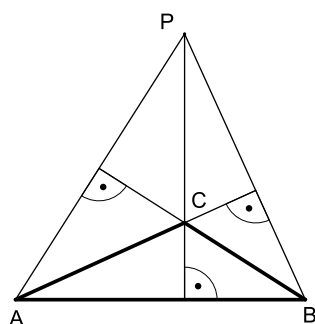
Obr. 15

Připomeňme, že v 1. důkazu nebylo nutné se zabývat otázkou, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý nebo tupoúhlý. Místo případné modifikace důkazu 2. pro tupoúhlý trojúhelník uveďme další důkaz.

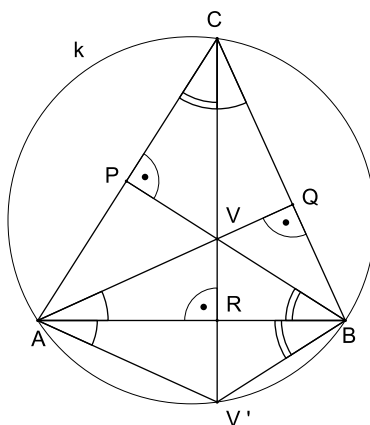
3. důkaz (Věta o průsečíku výšek pro tupouhlý trojúhelník)

ABC je libovolný tupouhlý trojúhelník s tupým úhlem u vrcholu C . Označme P průsečík jeho výšek z vrcholů A , B (obr. 16). Trojúhelník ABP je ostroúhlý a průsečík jeho výšek je bod C . To ovšem znamená, že výšky trojúhelníku ABC se protínají v bodě P .

Další důkaz uveďme v modifikaci pro ostroúhlý trojúhelník.



Obr. 16

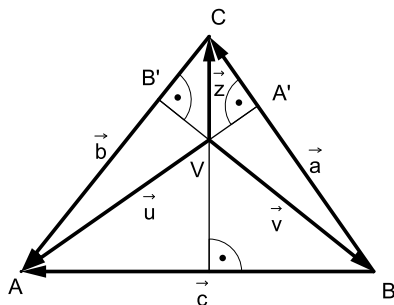


Obr. 17

4. důkaz

V ostroúhlém trojúhelníku ABC sestrojíme výšky AQ , BP , CR (obr. 17), kružnici k jemu opsanou a průsečík V' výšky CR s kružnicí k . Vzhledem k tomu, že na obrázku stejně označené úhly jsou shodné, jsou polopřímky AQ a BP obrazy polopřímek AV' , BV' v souměrnosti podle osy AB . Výšky AP a BP se tedy protínají v bodě V výšky CR . Tento bod je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC . Shodnost stejně

označených úhlů je zřejmá: $|\angle ABP| = |\angle ACR| = 90^\circ - |\angle BAC|$, úhly ACV' , ABV' jsou obvodové úhly příslušné na kružnici k témuž oblouku AV' . Podobně lze zdůvodnit i shodnost úhlů BAQ , BCR a BAV' .



Obr. 18

5. důkaz (pomocí vektorového kalkulu)

Interpretujme některé úsečky na obr. 18 jako umístění vektorů. Je-li V průsečík výšek AA' , BB' , pak pro skalární součiny vektorů $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ platí

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0. \quad (3)$$

Dále platí

$$\vec{z} = \vec{a} + \vec{v}$$

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{b}.$$

Násobíme-li tyto rovnosti po řadě skalárně vektory $\vec{b}$, $\vec{a}$ dostaneme

$$\vec{z} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Sečtením těchto rovností a úpravou vzhledem k (3) dostaneme

$$\vec{z} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0.$$

Protože

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

platí

$$\vec{z} \cdot \vec{c} = 0$$

a vektor $\vec{z}$ je kolmý k vektoru $\vec{c}$. To ovšem znamená, že průsečíkem V výšek AA' , BB' prochází i třetí výška trojúhelníku.

2.1.4 Pythagorova věta

Proč je pro pravoúhlý trojúhelník charakteristické, že druhá mocnina velikosti jeho největší strany je rovna součtu druhých mocnin velikostí jeho zbývajících stran?

Tato otázka se táhne patrně celou kulturní historií lidstva.

Dokonce i v dobách, kdy nebyla geometrie matematickou disciplínou, ale praktickým měřictvím, byl tento problém řešen. Dokladem toho je úvaha *Petra Vopěnky* v hypotetické příručce pro napínače provazů ([22], s. 21). Důkaz, který zde autor uvádí, je běžný v našich učebnicích geometrie a v této publikaci je uveden na prvním místě. Rovněž *Josef Úlehla* píše v dějinách matematiky: *Byli to tesaři a stavitelé, kterým nejdříve napadnouti musila odvislost stran a úhlů v trojúhelníku pravoúhlém* [83].

Příklady toho, jak v průběhu historie řešili lidé takovéto problémy, jsou neobyčejně poučnými doklady matematické invence a matematické kultury.

Úvodem poznamenejme, že ačkoliv *Pythagoras ze Samu* žil v létech 580 – 510, považuje se za prokázané, že Pythagorovu větu znali staří

Babyloňané kolem roku 1700 před Kristem. Dnes je tématika Pythagorovy věty zpracována v několika monografiích. Klasickou knihou je *Lietzmannovo* dílo z roku 1911 [54] a americká publikace *Loomisova*, která je u nás nedostupná [56] a obsahuje údajně 371 důkazů Pythagorovy věty. Dobrý přehled o naší problematice lze najít v německé publikaci *Anna Marie Fraedrichové* [25] a americké knize *Eli Maora* [57].

Důkazy, které uvedeme, nebudou řazeny chronologicky, spíše budeme sledovat ideje, které jsou pro vývoj dokazování charakteristické. V celém tomto odstavci se bude jednat o důkazy těchto dvou vět:

Věta Pythagorova

Jsou-li a , b velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku, pak

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (4)$$

Věta obrácená k větě Pythagorově

Platí-li pro velikosti stran a , b , c v trojúhelníku

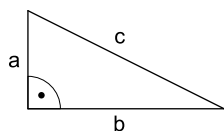
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

je tento trojúhelník pravoúhlý, c je velikost jeho přepony, a , b jsou velikosti jeho odvěsen.

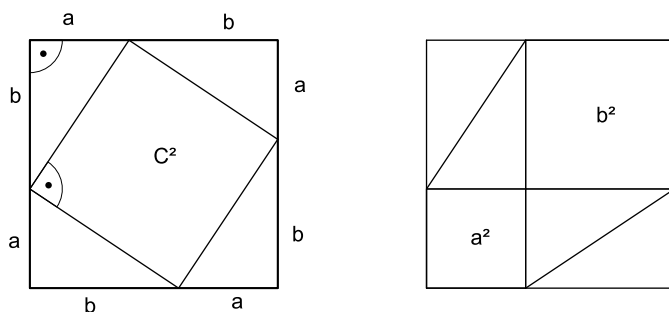
1. důkaz (neznámý čínský a neznámý indický autor)

Umístíme-li shodné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a , b a přeponou c (obr. 19) do čtverce se stranou délky $a + b$ dvěma různými způsoby podle obr. 20, vidíme, že platí Pythagorova věta. *Více než*

slova nás přesvědčí pohled na obrázky ([22], s. 21). Je ovšem třeba ověřit, že čtyřúhelník v levé části obr. 20 je čtverec.



Obr. 19



Obr. 20

Tento důkaz asi z 2. století před Kristem je typickým příkladem „důkazu beze slov“, metody, kterou v posledních letech rozvíjí zejména americký matematik *Roger B. Nelsen* (Proofs without words, PWWs) zejména v knihách [61], [62] a [2].

Vyjádríme-li skutečnost, že jsme pokryli čtverec o straně $a + b$ čtyřmi shodnými pravoúhlými trojúhelníky s odvěsnami a , b a přeponou c algebraicky, dostaneme z prvního obrázku

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4 \frac{1}{2} ab + c^2$$

neboli

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Máme-li dokázanu větu Pythagorovu, můžeme dokázat i větu k ní obrácenou.

Předpokládejme, že pro trojúhelník T_1 platí $a^2 + b^2 = c^2$ a sestrojme pravoúhlý trojúhelník T_2 s odvěsnami a, b . Protože pro tento trojúhelník platí Pythagorova věta, je $a^2 + b^2 = c^2$. Trojúhelníky T_1, T_2 se shodují ve všech stranách a jsou tedy shodné. Protože je trojúhelník T_2 pravoúhlý, je pravoúhlý i trojúhelník T_1 . Tím je věta obrácená k větě Pythagorově dokázána.

Tak, jak to obvykle chápou žáci, a jak to bylo někdy chápáno i v historii, vyslovíme ekvivalenci:

Pro každý trojúhelník ABC platí

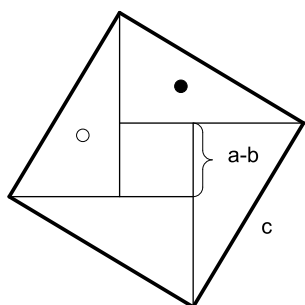
$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \Leftrightarrow AC \perp BC$$

2. důkaz (neznámý čínský a indický autor)

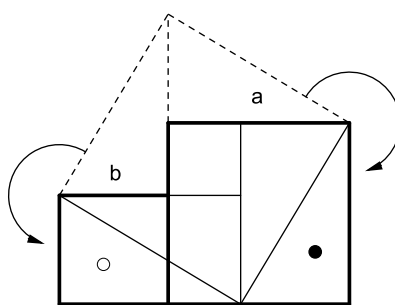
V označení podle obr. 19 můžeme vyjádřit obsah čtverce o straně c podle obr. 21 takto:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

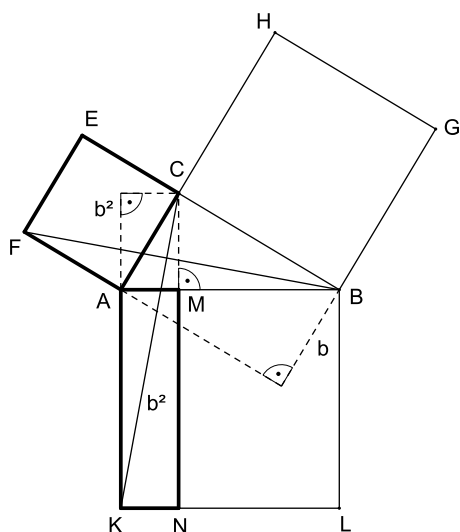
Přemístíme-li označené trojúhelníky do nové polohy podle obr. 22, je výsledek rovněž zřejmý.



Obr. 21



Obr. 22

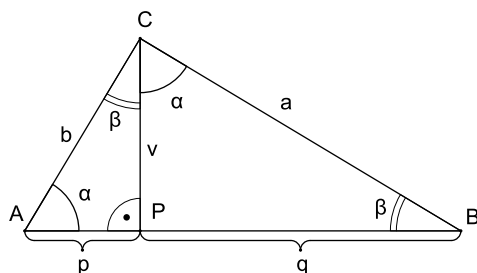


Obr. 23

3. důkaz (Euklides, 3. st. př. Kristem)

V označení podle obr. 23 má trojúhelník FAB obsah $\frac{1}{2}b^2$ (základna $|FA| = b$, výška k této základně je rovněž b). Protože jsou trojúhel-

níky FAB a CAK shodné (shodují se ve stranách $|FA| = |CA| = b$, $|BA| = |AK| = c$ a úhlech FAB a CAK), má i trojúhelník CAK obsah $\frac{1}{2}b^2$. To je ovšem polovina obsahu obdélníku $AKNM$ (neboť $|AK| = c$ je základna tohoto obdélníku i trojúhelníku AKC a výška tohoto trojúhelníku je rovna velikosti úsečky AM). Obdélník $AKNM$ má tedy obsah b^2 . Podobně lze dokázat, že obdélník $BLNM$ má obsah a^2 . ($\frac{1}{2}a^2$ je obsah trojúhelníku GAB i s ním shodného trojúhelníku CBL .) Je tedy $c^2 = a^2 + b^2$.



Obr. 24

4. důkaz (podobnost trojúhelníků)

Protože platí podle vět *uu* v označení podle obr. 24: $\triangle APC \sim \triangle ACB$, $\triangle BCP \sim \triangle BAC$, platí

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b}, \frac{a}{q} = \frac{c}{a}$$

neboli

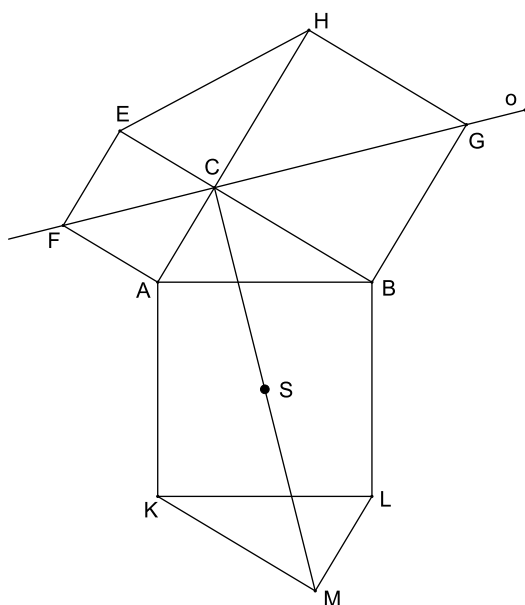
$$b^2 = cp, a^2 = cq.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$a^2 + b^2 = c(q + p) = c^2.$$

5. důkaz (*Leonardo da Vinci* (1452 – 1519))

Umístíme trojúhelník KLM shodný s trojúhelníkem BAC podle obr. 25.



Obr. 25

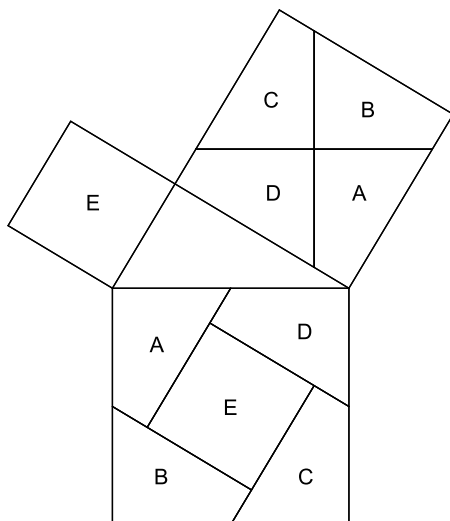
Ukážeme, že šestiúhelník $ABGHEF$ má stejný obsah jako šestiúhelník $ACBLMK$. Tyto šestiúhelníky nejsou sice shodné, ale shodné jsou jejich poloviny, tj. čtyřúhelníky $FABG$ a $CAKM$. Čtyřúhelník $FABG$ je polovinou šestiúhelníku $FABGHE$, neboť v osové souměrnosti podle osy $o = FG$ přejde tento čtyřúhelník do čtyřúhelníka $FEHG$. Čtyřúhelník $CAKM$ je polovinou šestiúhelníku $ACBLMK$, neboť ve středové souměrnosti se středem S přejde tento čtyřúhelník do čtyřúhelníku $MLBC$. Čtyřúhelník $FABG$ je shodný se čtyřúhelníkem $CAKM$, neboť druhý z těchto čtyřúhelníků vznikne z prvního otočením kolem středu A o 90 stupňů. Rovnost obsahů uvažovaných

šestiúhelníků ovšem znamená $a^2 + b^2 + ab = c^2 + ab$, tedy platnost rovnosti (4).

Řada důkazů Pythagorovy věty se opírá o možnost rozložit čtverce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku na části a z nich pak složit čtverec nad přeponou. Uvedme z nich jeden, snad nejelegantnější.

6. důkaz (*H. Perigal* (1830), *H. E. Dudeney* (1917))

Přímky vedené středem čtverce nad delší odvěsnou dělí tento čtverec na čtyři shodné čtyřúhelníky A, B, C, D , které je možné přemístit do čtverce nad přeponou podle obr. 26 tak, že zbývá místo právě pro čtverec E nad kratší odvěsnou. Podrobnější zdůvodnění přenechávám čtenáři. Je tedy obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.



Obr. 26

Některé důkazy Pythagorovy věty vycházejí z možnosti vypočítat dvěma způsoby obsah určitého rovinného útvaru. Za všechny uveďme důkaz, jehož autorem je 20. prezident Spojených států.

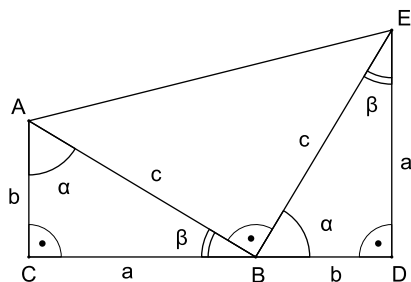
7. důkaz (*J. A. Garfield* (1850))

Připojíme-li k trojúhelníku ABC shodný trojúhelník BED podle obr. 27, dostaneme lichoběžník $ACDE$, jehož obsah můžeme vypočítat podle vzorce (poloviční součet základů násobený výškou) nebo jako součet obsahů tří trojúhelníků. Platí tedy

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

neboli

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Obr. 27

Z důkazů, které využívají dílčí geometrické poznatky, připomeneme důkaz, který se zakládá na mocnosti bodu ke kružnici.

8. důkaz (mocnost bodu ke kružnici)

Umístíme-li pravoúhlý trojúhelník SMA do kružnice k s poloměrem c podle obr. 28, dostaneme podle věty o mocnosti bodu M ke kružnici k

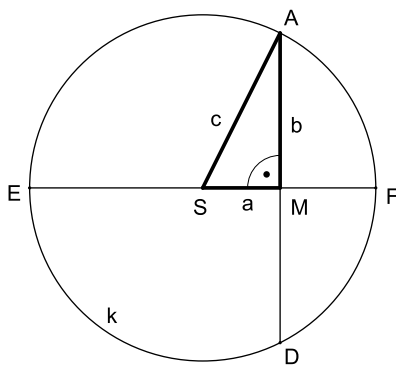
$$|AM| \cdot |DM| = |EM| \cdot |MF|,$$

$$b^2 = (c + a)(c - a),$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

neboli

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

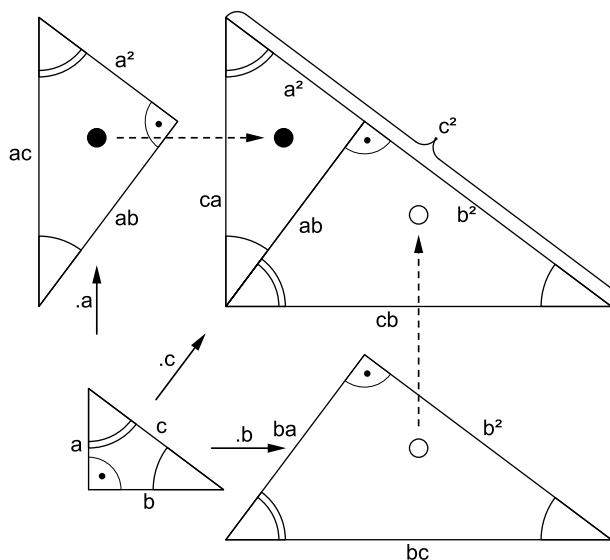


Obr. 28

Na konec úvah o Pythagorově větě uvedme tři pozoruhodné důkazy.

9. důkaz (*Frank Burk*, 1999, [62])

Zvětšíme-li pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a , b a přeponou c postupně a -krát, b -krát a c -krát (obr. 29), můžeme z prvních dvou trojúhelníků složit třetí a tedy $c^2 = a^2 + b^2$.



Obr. 29

10. důkaz (Bernard Bolzano (1781 – 1848) [7])

Označme S obsah trojúhelníku ABC , S_1 obsah trojúhelníku APC , S_2 obsah trojúhelníku BPC (obr. 30). Protože poměr obsahů dvou podobných trojúhelníků je roven druhé mocnině poměru jejich podobnosti, platí

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b^2}{c^2}, S_1 = S \cdot \frac{b^2}{c^2},$$

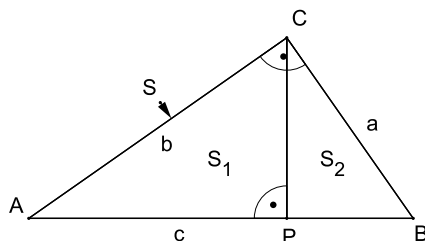
$$\frac{S_2}{S} = \frac{a^2}{c^2}, S_2 = S \cdot \frac{a^2}{c^2},$$

Z rovnosti $S = S_1 + S_2$ dostaneme

$$S = S \cdot \frac{b^2}{c^2} + S \cdot \frac{a^2}{c^2},$$

tedy

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Obr. 30

11. důkaz

Sestrojíme-li čtverec nad přeponou x pravoúhlého trojúhelníku s úhly α, β , platí pro obsah S tohoto trojúhelníku podle obr. 31

$$S = \frac{1}{2}x^2 \cos \alpha \cos \beta = kx^2, \quad (5)$$

kde číslo k závisí jen na velikostech úhlů α, β .

Protože pro obsahy S, S_1, S_2 platí podle obr. 30

$$S = S_1 + S_2, \quad (6)$$

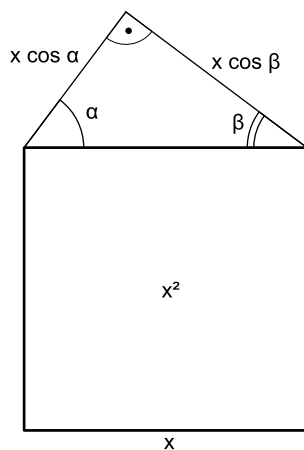
je podle (5) a obr. 32

$$S = kc^2, S_1 = kb^2, S_2 = ka^2$$

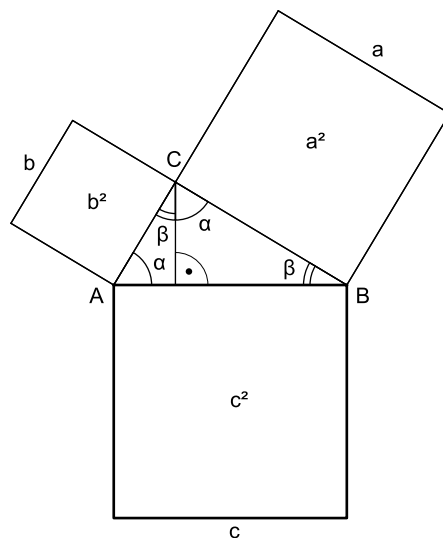
a rovnost (6) můžeme přepsat na tvar

$$kc^2 = ka^2 + kb^2.$$

Platí tedy pythagorejská rovnost (4).



Obr. 31



Obr. 32

To je idea důkazu, která patrně náleží George Polyovi [66].

Podíváme-li se na jedenáct zde naznačených důkazů Pythagorovy věty, můžeme si všimnout, že italský polyhistor *Leonardo da Vinci* vypráví zcela jiný „příběh“ důkazu Pythagorovy věty než např. americký prezident *Garfield*, že náš *Bernard Bolzano* aplikuje jiné poznatky z matematiky než např. Američan *George Polya*. Příběhy důkazu téže matematické věty mohou být velmi rozdílné, měly by však být zajímavé a přirozeně musí být logicky správné.

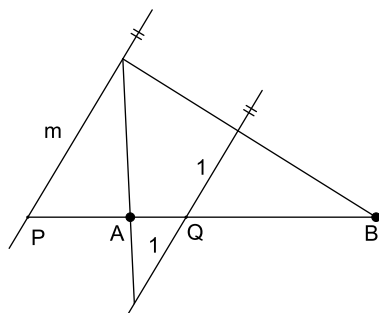
2.1.5 Apollóniova kružnice

Od jednoho z velkých helénistických matematiků, *Apollónia z Pergy* (260 – 170 před Kristem), pochází úloha, jejíž dvě řešení zde připomeneme.

Úloha zní:

Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají od daných bodů P , Q poměr vzdáleností rovný číslu m ($m \neq 1$).

Zřejmé je, že hledaná množina bude souměrná podle přímky PQ a dva její body na přímce P , Q nalezneme konstrukcí podle obr. 33.



Obr. 33

Máme určit množinu všech bodů X roviny, pro něž platí

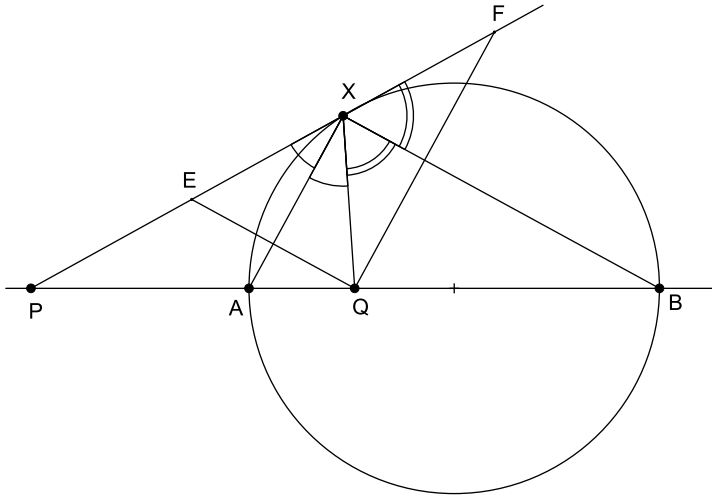
$$\frac{|PX|}{|QX|} = m. \quad (7)$$

Je-li X jeden z takovýchto bodů, který neleží na přímce PQ , sestrojíme osu vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu X trojúhelníku PQX a průsečíky těchto os s přímkou PQ označíme A , B (obr. 34).

Sestrojme dále podle obr. 34 body E, F přímky PX tak, že $QE \parallel BX$ a $QF \parallel AX$. Zřejmě je $|EX| = |QX| = |FX|$ a platí

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \frac{|PX|}{|FX|} = \frac{|PA|}{|QA|} = m,$$

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \frac{|PX|}{|EX|} = \frac{|PB|}{|QB|} = m.$$



Obr. 34

Body A, B tedy náležejí hledané množině a vzhledem k tomu, že $AX \perp BX$, náleží bod X kružnici k s průměrem AB .

Ukažme dále, že pro libovolný bod X kružnice k platí (7). K bodům A, B , pro něž platí

$$\frac{|PA|}{|QA|} = \frac{|PB|}{|QB|} = m,$$

sestrojme na přímce PX body E, F tak, že platí

$$\frac{|PA|}{|QA|} = \frac{|PX|}{|FX|} = m,$$

$$\frac{|PB|}{|QB|} = \frac{|PX|}{|EX|} = m.$$

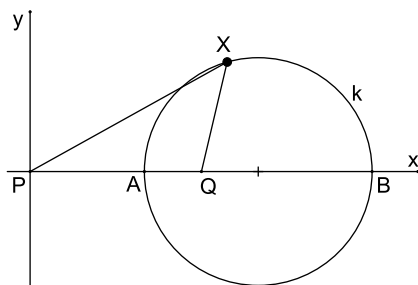
Je tedy $|EX| = |FX|$ a protože $EQ \perp QF$ je EF průměr kružnice, která prochází bodem Q .

To znamená, že platí $|FX| = |QX|$ a rovnost (7) je prokázána.

Množina všech bodů roviny, které mají od daných dvou bodů daný poměr vzdáleností, se nazývá *Apollóniova kružnice*.

Protože Apollónius neměl vhodný algebraický kalkul, nemohl úlohu vyřešit způsobem, který nyní připomeneme.

V kartézské soustavě souřadnic podle obr. 35 hledáme množinu všech bodů $X[x, y]$ roviny, které mají od bodů $P[0, 0]$, $Q[q, 0]$, ($q > 0$), poměr vzdáleností rovný číslu m ($m \neq 1$).



Obr. 35

Pro hledané body má tedy platit

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x - q)^2 + y^2}} = m.$$

Protože tuto rovnost můžeme upravit na tvar

$$\left(x - \frac{m^2 q}{m^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2 q^2}{(m^2 - 1)^2},$$

je hledanou množinou kružnice se středem $S\left[\frac{m^2 q}{m^2 - 1}, 0\right]$ a poloměrem $r = \frac{mq}{|m^2 - 1|}$.

2.1.6 Heronův vzorec

Někdy kolem počátku našeho letopočtu dal *Heron z Alexandrie* dohromady příběh svého vzorce

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (8)$$

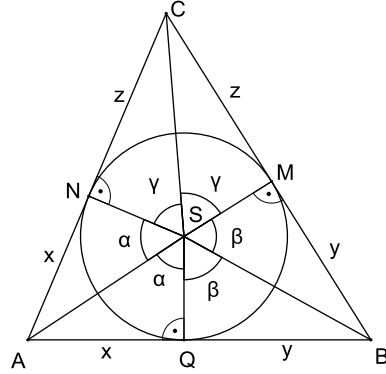
pro obsah trojúhelníku se stranami délek a, b, c ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$).

S obdivem nad Heronovou intuicí a důvtipem, nad skutečností, že nemá k dispozici „žádnou matematickou vědu“ (využívá pouze podobnost trojúhelníků), zde jeho důkaz zprostředkovaný *M. Cantorem* [13] připomenou.

1. důkaz

V trojúhelníku ABC se stranami a, b, c je $k(S, r)$ kružnice vepsaná, která se dotýká stran trojúhelníku v bodech M, N, Q . Pro úsečky x, y, z a úhly α, β, γ (v označení podle obr. 36) platí:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ x + z &= b \end{aligned} \quad (9)$$



Obr. 36

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi. \quad (10)$$

Řešíme-li soustavu (9) vzhledem k neznámým x, y, z , dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a \\ y &= \frac{1}{2}(a + c - b) = s - b \\ z &= \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c \end{aligned} \quad (11)$$

Sestrojíme trojúhelníky ABP a SUQ podle obr. 37 ($AB \perp BP$, $SP \perp AS$, $U \in AB \cap SP$).

Podle konstrukce je čtyřúhelník $APBS$ tětíkový a v důsledku rovnosti (10) je $\angle APB = \gamma$. V důsledku podobnosti trojúhelníků

$$\triangle ABP \sim \triangle CMS, \quad (12)$$

platí

$$\frac{|BA|}{|BP|} = \frac{|CM|}{|SM|} = \frac{|BH|}{|SQ|}, \text{ kde } |BH| = |CM| = z.$$

Platí tedy

$$\frac{|BA|}{|BH|} = \frac{|BU|}{|UQ|} \quad (16)$$

a tedy i

$$\frac{|BA|}{|BH|} + \frac{|BH|}{|BH|} = \frac{|BU|}{|UQ|} + \frac{|UQ|}{|UQ|}$$

neboli

$$\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|BQ|}{|UQ|}. \quad (17)$$

Rovnost (17) ovšem můžeme upravit na tvar

$$\frac{|AH|^2}{|BH| \cdot |AH|} = \frac{|BQ| \cdot |AQ|}{|UQ| \cdot |AQ|} \quad (18)$$

Protože podle Euklidovy věty pro trojúhelník ASU platí

$$|UQ| \cdot |AQ| = |SQ|^2,$$

můžeme rovnost (18) přepsat na tvar

$$(|AH| \cdot |SQ|)^2 = |AH| \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot |BH|, \quad (19)$$

neboli

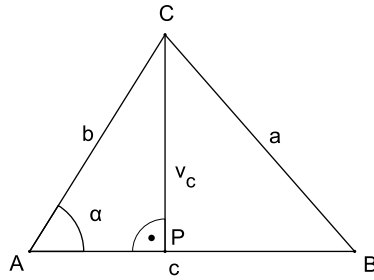
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

protože $|AH| = x + y + z = s$. Dnešní středoškolák může odvodit Heronův vzorec téměř samostatně, jak připomeneme v dalším textu.

2. důkaz

Pro obsah trojúhelníku ABC můžeme využít vzorce

$$S = \frac{1}{2}c \cdot v_c, \quad (20)$$



Obr. 38

kde ovšem je nutné vyjádřit výšku v_c pomocí délek stran a , b , c (obr. 38). K tomu můžeme využít kosinové věty pro trojúhelník ABC a Pythagorovy věty pro trojúhelník APC :

$$|AP| = b \cos \alpha, v_c^2 = b^2 - b^2 \cos^2 \alpha, \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$v_c = b \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2}. \quad (21)$$

Pouhou algebraickou úpravou převedeme vyjádření pro výšku v_c na tvar

$$v_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (22)$$

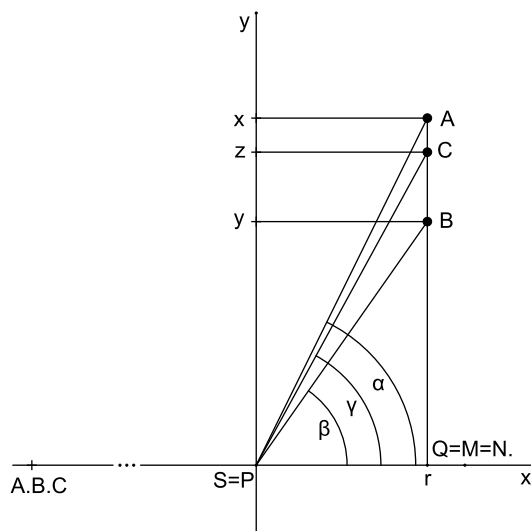
z něhož užitím vzorce (20) dostaneme výsledek (8).

Elegantnější důkaz Heronova vzorce s využitím komplexních čísel uveřejnil nedávno *Miles Dillon Edwards* [21]. Naznačme jeho postup.

3. důkaz

Přemístíme ve zvětšení trojúhelníky SNA , SQB a SMC z obr. 37 do Gaussovy roviny podle obr. 39, potom platí pro komplexní čísla A , B , C

$$A = r + xi, B = r + yi, C = r + zi. \quad (23)$$



Obr. 39

Vzhledem k tomu, že součet amplitud komplexních čísel je podle (10) roven číslu π , je součin $A.B.C$ reálné číslo. Imaginární složka komplexního čísla $A.B.C$ je tedy nulová:

$$r^2(x + y + z) - xyz = 0.$$

To znamená, že platí

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \quad (24)$$

Protože podle obr. 37 je $S = rs$, $s = x + y + z$, můžeme vzhledem k rovnosti (11) upravit rovnost (24) na Heronův vzorec.

Společnost, která sama sebe definuje skrze „vědění“, by se dala chápat jako společnost, v níž rozum, úsudek, rozvaha, prozíravost, dlouhodobé shromažďování argumentů a zkoumání hypotéz konečně převážily nad iracionalitou, ideologií, pověřčivostí, domýšlivostí, chtivostí a bezduchostí. Pohled na jakýkoliv segment stávající společnosti však ukazuje, že vědění této společnosti nemá nic společného s tím, co se od antických dob asociuje s takovými ctnostmi, jako je rozum, úsudek, praktický důvtip a konečně moudrost ... vědění jednotlivce není shodné s tím, co má kdo v hlavě. V paměti uchovávaná data jakéhokoliv druhu ještě nejsou věděním. Lidé s fenomenální pamětí, schopní zapamatovat si nesčetné podrobnosti, takzvané chodící encyklopedie, lidé schopní vyluštit každou křížovku, toho ve vyšším smyslu moc nevědí.

Konrád Paul LIESSMANN ([53], s. 22)

... zobecnění soudobých inovačních tendencí, jak se u nás prosazuje, ukazuje, že se zatím těžiště jednostranně přesouvá na zájem o otázky pedagogického procesu, jeho prostředky a metody. Nepřiměřeně je potlačována kategorie obsahu vzdělávání a vyučování. Obsah je tak vlastně odtrhován od jeho zprostředkování. ... Naše soudobá pedagogická a psychologická teorie neodpovídá dostatečně učitelům na otázky, které fakticky musí stále řešit: jak dochází k osvojování nového vědění, jak se osvojování systému pojmů mění s novými věcnými vztahy a kontexty, v čem spočívá jejich struktura a kvalita abstrakce a zobecnění, jak žáci konstruují a rekonstruují pojmové struktury, v čem spočívá význam kontinuity vědění aj.

Jarmila SKALKOVÁ ([73], s. 54)

2.2 Pohled didaktický

Úlohy zde uváděné souvisejí velmi úzce s matematikou základní a střední školy a jsou zcela elementární. Volil jsem je tak, aby vynikla možnost různých přístupů k jejich řešení.

2.2.1 Deset matematických miniatur

Při řešení úloh je často důležitý vhodný nápad, o který můžeme celé řešení složitější úlohy opřít. Uvedme zde několik úloh, které spočívají celé na jediné myšlence. Podle mých zkušeností mohou úlohy tohoto typu studenty spíše zaujmout než náročnější úlohy, které se vyskytují např. v matematické olympiádě. Takovýmito miniaturami můžeme nejen podněcovat zájem studentů, ale do jisté míry i testovat úroveň jejich matematického nadání.

M1: Mocnina jako součet *Určete počet sčítanců v rovnosti*

$$a^n = a + a + \dots + a.$$

(n , a jsou přirozená čísla).

K řešení si stačí uvědomit, že $a^n = a^{n-1} \cdot a$. Z této rovnosti je patrné, že počet sčítanců je a^{n-1} .

M2: *Kterými přirozenými čísly menšími než 15 je dělitelné každé číslo zapsané pomocí dvou stejných trojic číslic? Jedná se tedy např. o čísla*

$$128128, 973973, 100100, 333333, \dots$$

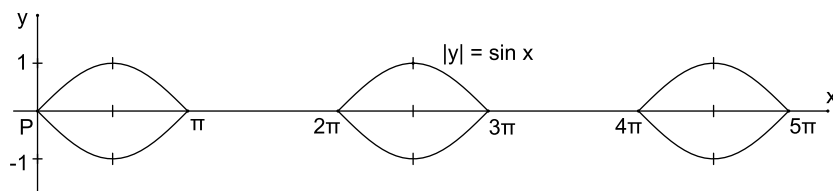
Označíme-li libovolné trojčíslo písmenem t , můžeme uvažovaná čísla psát ve tvaru tt . Protože $tt : t = 1001 \cdot m$, je každé tt číslo dělitelné každým dělitelem čísla 1001, tedy čísly 7, 11 a 13.

M3: *Existují shodné geometrické útvary takové, že jeden je částí druhého, ale druhý není částí prvního?*

Počáteční odhad, že takové útvary neexistují, se opírá o představu, že hledané útvary jsou omezené (mnohoúhelník, kruh, ...). Rozšíříme-li svůj pohled na útvary neomezené, dojdeme k řešení (např. 2 pravé úhly s rovnoběžnými rameny).

M4: *Načrtněte v kartézské soustavě souřadnic množinu všech dvojic $[x, y]$ reálných čísel, pro něž platí $|y| = \sin x$.*

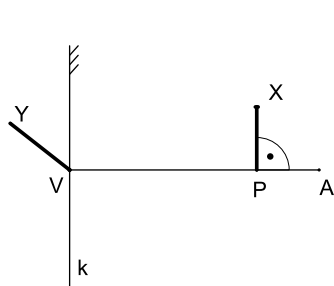
Uvážíme-li, že v horní polorovině s hranicí v ose x se jedná o graf funkce $y = \sin x$, v dolní pak o graf funkce $y = -\sin x$, je výsledek podle obr. 1 zřejmý.



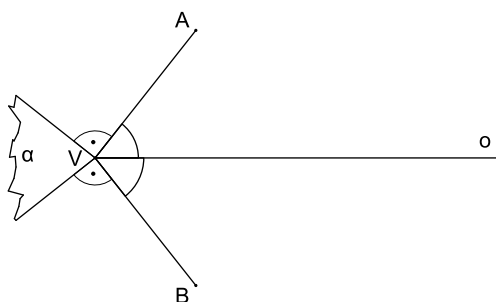
Obr. 1

M5: *Určete množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daných polopřímek VA , VB .*

První reakce řešitelů, že výsledek je osa úhlu AVB , je nesprávná. K řešení úlohy je potřeba si uvědomit, co znamená vzdálenost bodu od polopřímky. Protože tuto vzdálenost měříme různě v opačných polorovinách s hranicí k v označení podle obr. 2, je správný výsledek sjednocení úhlu α s osou o podle obr. 3.



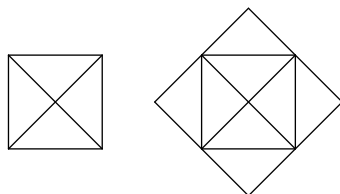
Obr. 2



Obr. 3

M6: *Sestrojte čtverec, který má obsah rovný dvojnásobku obsahu daného čtverce.*

Úloha je jednoduchou aplikací Pythagorovy věty, lze ji však řešit i bez její znalosti podle obr. 4.



Obr. 4

M7: *Sestrojte kruh, jehož obsah je roven součtu obsahů daných kruhů s poloměry r_1 , r_2 .*

Z rovnosti $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi x^2$ plyne, že poloměr x hledaného kruhu je přeponou pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami r_1 , r_2 .

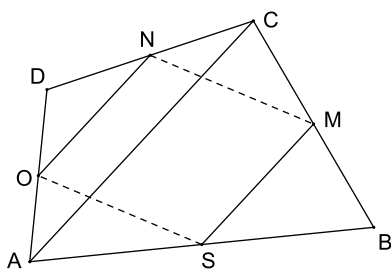
M8: *Dokažte, že středy stran libovolného čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.*

K důkazu si stačí všimnout, že v označení podle obr. 5 jsou úsečky MS a NO jako střední příčky trojúhelníků ABC a ACD rovnoběžné a shodné.

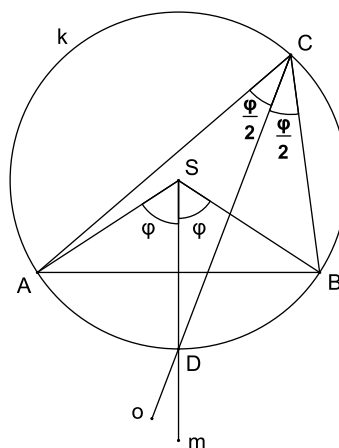
M9: *Dokažte, že osa libovolného úhlu trojúhelníku a osa protilehlé strany procházejí týž bodem kružnice trojúhelníku opsané.*

Tvrzení je zřejmé, jestliže osa strany a osa úhlu splývají (to nastává u rovnoramenného trojúhelníku). Nejsou-li strany AC , BC trojúhelníku ABC shodné, jsou osy m , o (v označení podle obr. 6) různoběžné.

Průsečík D osy m strany AB s kružnicí k trojúhelníku opsané je středem oblouku AB a středové úhly ASD , BSD jsou shodné. Jsou tedy shodné i příslušné obvodové úhly ACD , BCD což ovšem znamená, že bodem D prochází i osa o úhlu ACB .



Obr. 5



Obr. 6

M10: V libovolném trojúhelníku ABC sestrojte kružnici k s průměrem AB a kružnici m s průměrem BC . Dokažte, že průsečík D kružnic k, m je bodem přímky AC .

Tvrzení plyne z toho, že úhly BDA a BDC jsou podle Thaletovy věty pravé.

2.2.2 Čtyři slovní úlohy

Slovní úlohou obvykle rozumíme slovy popsanou situaci z běžného života nebo určité oblasti poznání, v níž hledáme odpověď na položenou otázku. Úlohy tohoto typu se obvykle zařazují do učebnic matematiky pro základní školy, velmi pěkně obsahově i metodicky je zpracována např. sbírka úloh, jejímiž autory jsou *Emil Kraemer, František Hradecký a Vítězslav Jozífek* [43]. K některým úlohám, které zde uvedu, jsem našel podnět právě v této knize.

Úloha 1 *Ve třídě je a děvčat a b chlapců. Kolik procent děvčat a kolik procent chlapců je ve třídě?*

Celkový počet žáků ve třídě je $a + b$, 1 % počtu žáků třídy je $\frac{a+b}{100}$, a děvčat tedy představuje $a : \frac{a+b}{100} = \frac{100a}{a+b}$ procent. Podobně vypočítáme, že počet chlapců je $\frac{100b}{a+b}$ procent.

V praxi se může stát, že žák úlohu, v níž se vyskytují „písmena ve významu čísel“, vzdává a neumí si s ní poradit. V tom případě je možné formulovat úlohu „konkrétnější“, např.:

Ve třídě je 14 děvčat a 6 chlapců. Kolik procent děvčat a kolik procent chlapců je ve třídě?

Paralela numerického výpočtu s algebraickým zápisem usnadní pochopení úlohy

Celkový počet žáků třídy je $100 \% \dots\dots 14 + 6 = 20 \dots\dots a + b$

Jedno procento je $\frac{20}{100} = 0,2 \dots\dots\dots \frac{a+b}{100}$

Procento děvčat je $14 : \frac{20}{100} = 1400 : 20 = 70 \dots\dots a : \frac{a+b}{100} = \frac{100a}{a+b}$

Úloha 2 *Zboží bylo nejdříve o p % zlevněno a pak opět o p % zdraženo. Porovnejte původní cenu z tohoto zboží s jeho výslednou cenou m .*

Původní cena z se po zlevnění snížila na novou cenu

$$n = z - \frac{zp}{100} = z \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Nová cena n po zdražení vzrostla na cenu

$$m = n \left(1 + \frac{p}{100}\right) = z \left(1 - \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = z \left(1 - \frac{p^2}{10000}\right).$$

Protože $1 - \frac{p^2}{10000} < 1$ je $z > m$.

Úlohu opět můžeme konkretizovat. Je-li např. $z = 100$ Kč a zlevnění i zdražení v téže výši je o $p = 10$ %, máme

$$n = 100 \text{ Kč} - 10 \text{ Kč} = 90 \text{ Kč},$$

$$m = 90 \text{ Kč} + 9 \text{ Kč} = 99 \text{ Kč}.$$

To ovšem odpovídá výsledku

$$m = 100 \cdot \left(1 - \frac{100}{10000}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 100 \cdot \frac{99}{100} = 99.$$

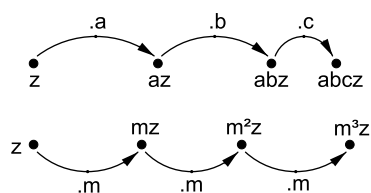
Úloha 3 V prvním roce vzrostla výroba a -krát, v druhém b -krát proti předchozímu stavu a ve třetím roce c -krát. Jaký je průměrný růst výroby v těchto třech letech?

Označme z původní objem výroby. Růst výroby je průměrný, vzrůstá-li výrobek rovnoměrně, např. v každém roce m -krát.

Přehled o objemech výroby můžeme zapsat do tabulky 1 a znázornit obrázkem 7.

	Růst výroby	Rovnoměrný růst výroby
Původní stav	z	z
Po 1. roce	az	mz
Po 2. roce	abz	m^2z
Po 3. roce	$abcz$	m^3z

Tabulka 1



Obr. 7

Z rovnosti objemu výroby po třech letech dostáváme výsledek

$$abcz = m^3z$$

neboli

$$m^3 = abc$$

$$m = \sqrt[3]{abc}.$$

Tento, tzv. geometrický průměr m je přirozeně různý od aritmetického průměru $s = \frac{1}{3}(a + b + c)$ přírůstků, který zde nemá smysl počítat.

Vzroste-li např. v prvním roce výroba dvakrát, v druhém osmkrát a ve třetím čtyřikrát, pak vzrostla v průměru v každém roce čtyřikrát ($4 = \sqrt[3]{2 \cdot 8 \cdot 4} = \sqrt[3]{64}$).

Vzroste-li výroba z za rok o p %, vzroste na $z + \frac{zp}{100} = z \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, tedy $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ -krát.

Kdyby tedy výroba vzrůstala v jednotlivých letech po řadě o p , q , r procent, můžeme její růst vyjádřit tabulkou 2.

	Růst výroby
Původní stav	z
Po 1. roce	$\left(1 + \frac{p}{100}\right) z$
Po 2. roce	$\left(1 + \frac{q}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) z$
Po 3. roce	$\left(1 + \frac{r}{100}\right) \left(1 + \frac{q}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) z$

Tabulka 2

S rovnoměrnými přírůstky se setkáváme např. v peněžnictví. Růst vkladu o 1 % ročně znamená, že vklad za rok vzroste i -krát, kde $i = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$. Po n letech by tak uložený kapitál K při tzv. složeném úrokování vzrostl na částku

$$K_n = K \cdot (i)^n.$$

V didaktické literatuře se najde poměrně málo originálních úloh. Také následující úloha je převzata z literatury ([33], s. 191); je pouze „zmodernizovaná“: místo hokynářky, která prodává vajíčka, v ní vystupuje překupník, který prodává mobily. Prodat polovinu syrového

vajíčka je stejně absurdní jako prodat polovinu mobilu – ale úloha má přesto smysl.

Úloha 4 *Překupník prodává mobilní telefony. Prvnímu zákazníkovi prodal polovinu své zásoby a ještě polovinu mobilu. Druhému zákazníkovi prodal polovinu zbytku zásoby a polovinu mobilu. Třetímu zákazníkovi prodal opět polovinu zbylé zásoby a polovinu mobilu. Nakonec mu zůstal jeden mobil. S kolika mobilními telefony začínal překupník obchodovat?*

Uvedme tři různé přístupy k řešení úlohy.

První spočívá v převedení úlohy do algebraického jazyka a její řešení známými postupy.

Označme písmenem x původní množství přístrojů, které překupník měl.

Prvnímu zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ přístrojů.

Druhému zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ přístrojů.

Třetímu zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ přístrojů.

Vyjádřeme nyní celkovou situace na „trhu“ podle textu úlohy.

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + 1 = x$$

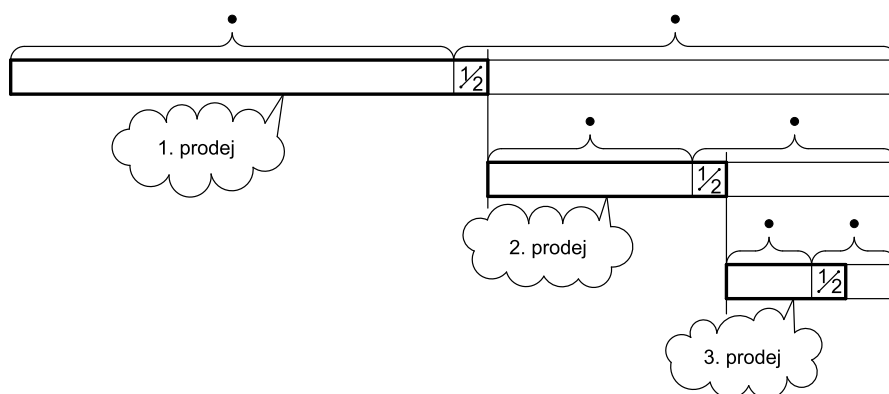
Řešením této rovnice dostaneme $x = 15$.

Původně měl překupník 15 přístrojů. Prvnímu zákazníkovi jich prodal $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$. Druhému zákazníkovi prodal $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$ mobily. Třetímu zákazníkovi prodal $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ přístroje a jeden přístroj mu zbyl.

Úlohu můžeme ovšem řešit „od konce“, např. touto úvahou.

Jeden mobil, který překupníkovi nakonec zbyl, vznikl jako výsledek posledního prodeje, tedy jako „polovina předchozího stavu bez poloviny mobilu“. To znamená, že před touto akcí měl překupník 3 mobily. Tyto tři mobily opět představují polovinu předchozího stavu bez poloviny mobilu. Předchozí stav je tedy 7. A tento počet mobilů je opět polovina předchozího (tj. původního) stavu bez poloviny mobilu. Původně měl překupník 15 mobilů.

Ze znázornění textu úlohy schématem podle obr. 8 můžeme bezprostředně číst řešení úlohy (stejná množství jsou vyjádřena svorkami).



Obr. 8

2.2.3 Řešení rovnic

Algebra poskytuje algoritmy pro řešení algebraických rovnic. Ze základní školy je známo řešení lineárních rovnic, střední škola uvádí metody řešení soustav lineárních rovnic a rovnic kvadratických. Z historie jsou známy problémy spjaté s řešením rovnic vyšších stupňů. Ukážeme,

že i při řešení rovnic se může uplatnit „umění vidět“ tak charakteristické např. pro řešení úloh geometrických. Uveďme v této souvislosti tři úlohy z pěkné publikace *Alexandra Soifera* [74] a dvě úlohy historické podle [42].

Úloha 1 *Řešte v oboru reálných čísel rovnici*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1 \quad (1)$$

Snaha po odstranění odmocnin umocněním obou stran rovnice vede k úloze složitější. Násobení rovnice číslem $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ vede ovšem k rovnici

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2 \quad (2)$$

a sečtením rovnic (1) a (2) dostaneme rovnici

$$2\sqrt{x+1} = 3,$$

která má jediný kořen

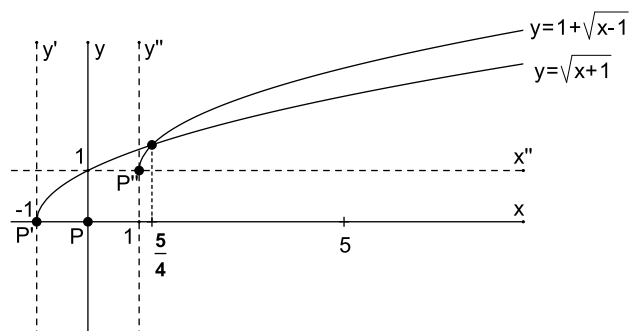
$$x = \frac{5}{4}.$$

Tento výsledek můžeme ověřit i graficky znázorněním funkcí

$$y = \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y = 1 + \sqrt{x-1} \quad (4)$$

Grafem funkce (3) je část paraboly s vrcholem $[-1, 0]$ a osou v ose x , grafem funkce $y = 1 + \sqrt{x-1}$ je část paraboly s vrcholem $[1, 1]$ a osou v přímce $y = 1$. Tyto výsledky nahlédneme posunutím soustavy souřadnice jednak do bodu $P'[-1, 0]$, jednak do bodu $P''[1, 1]$ (obr. 9).



Obr. 9

Úloha 2 Řešte v oboru reálných čísel soustavu

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= -7 \\ xy &= -2 \end{aligned} \quad (5)$$

Dosadíme-li $y = -\frac{2}{x}$, které získáme z druhé rovnice, do rovnice první, dostaneme rovnici

$$x^3 + \left(-\frac{2}{x}\right)^3 = -7,$$

kterou můžeme interpretovat jako kvadratickou rovnici s neznámou $A = x^3$. Dostaneme tak rovnici

$$A - \frac{8}{A} = -7,$$

jejímiž reálnými kořeny jsou čísla

$$A_1 = 1, A_2 = -8.$$

Odtud vyplývají pro neznámou x výsledky $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Soustava (5) má tedy řešení

$$[1, -2], [-2, 1].$$

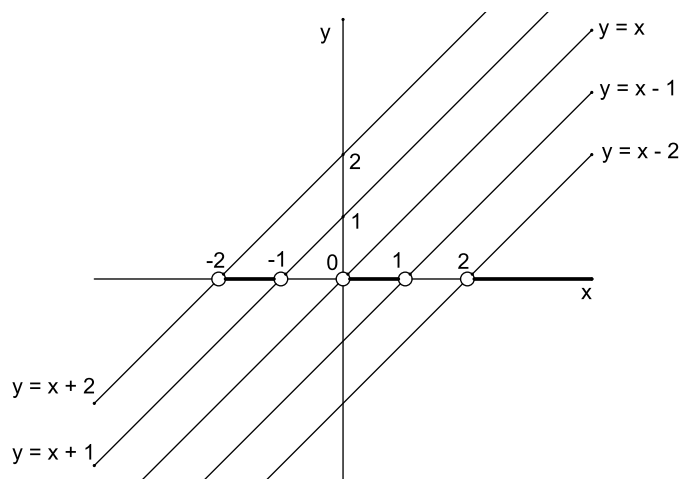
Úloha 3 Pro která reálná x platí

$$x^5 - 5x^3 + 4x > 0 ? \quad (6)$$

Protože $(x^5 - 5x^3 + 4x) = x(x^4 - 5x^2 + 4) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, můžeme nerovnost (6) psát ve tvaru

$$(x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2) > 0.$$

Z obr. 10, v němž jsou znázorněny funkce $y = x + c$, kde $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, je patrné, že řešením nerovnosti (6) jsou všechna x ze sjednocení intervalů $(-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$.



Obr. 10

Úloha 4 Rovnice *Leonarda Pisanského* – *Fibonacciho* (1180 – 1240)

Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4. \quad (7)$$

Po úpravě rovnice na tvar

$$4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x + 4,$$

můžeme položit $x^2 - 3x = A$ a řešit rovnici

$$4\sqrt{A} = A + 4,$$

která je ekvivalentní rovnici

$$(A - 4)^2 = 0.$$

Je tedy $A = 4$, což vede k rovnici

$$x^2 - 3x = 4$$

s kořeny 4 a -1 , které jsou kořeny rovnice (7).

Úloha 5 Rovnice *Girolama Cardana* (1501 – 1576)

Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$16x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \quad (8)$$

Uvědomíme-li si, že platí

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

můžeme rovnici (8) psát ve tvaru

$$16x^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$$

neboli ve tvaru

$$16x^2 = (x^2 + x + 1)^2.$$

Je tedy

$$4x = \pm(x^2 + x + 1),$$

a rovnice (8) má kořeny

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}.$$

2.2.4 Rovina a rovnice

Technik ví, že kolo se otáčí v rovině kolmé k ose rotace (jinak „hází“), rovina rovníku je kolmá k zemské ose spojující póly, vodorovná rovina je kolmá ke svislému směru.

Matematik ví, že rovinu může chápat např. jako dvojdimenzionální podprostor euklidovského trojdimenzionálního prostoru, ale že rovinu nelze definovat v klasické syntetické geometrii. Tam je základním pojmem charakterizovaným např. těmito axiomy:

- Třemi body, které neleží v přímce, prochází jediná rovina.
- Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají aspoň ještě aspoň jeden společný bod.
- Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v žádné rovině ([88], s. 15).

Algebraickou reprezentaci roviny spjatou s pohledem technika i matematika připomeňme řešením několika úloh.

Úloha 1 *Určete obecnou rovnici roviny ρ , která*

- prochází bodem $Q[1, 4, 6]$ a je kolmá k vektoru $\overrightarrow{QT} = (3, 5, 2)$,*
- prochází body $Q, M[5, 2, 5], N[1, 6, 1]$.*

Znáznorněte výsledek ve volném rovnoběžném promítání.

- V souladu s představou technika, můžeme chápat rovinu jako množinu všech bodů X prostoru, pro něž platí, že vektor $\overrightarrow{XQ}$ je kolmý k vektoru $\overrightarrow{QT}$. Bod $X[x, y, z]$ je tedy bodem hledané roviny, platí-li pro skalární součin

$$\overrightarrow{QX} \cdot \overrightarrow{QT} = 0$$

neboli

$$\begin{aligned}(x-1, y-4, z-6) \cdot (3, 5, 2) &= 0 \\ 3(x-1) + 5(y-4) + 2(z-6) &= 0.\end{aligned}$$

Obecná rovnice hledané roviny ρ je tedy

$$3x + 5y + 2z - 35 = 0$$

- b) Obecnou rovnici roviny QMN získáme z jejího parametrického vyjádření

$$X = Q + s \cdot \overrightarrow{QM} + t \cdot \overrightarrow{QN}, s \in R, t \in R$$

neboli

$$[x, y, z] = [1, 4, 6] + s(4, -2, -1) + t(0, 2, -5)$$

tak, že v soustavě

$$\begin{aligned}x &= 1 + 4s \\ y &= 4 - 2s + 2t \\ z &= 6 - s - 5t\end{aligned}$$

vypočítáme z druhé a třetí rovnice parametr s

$$s = \frac{1}{12}(32 - 5y - 2z),$$

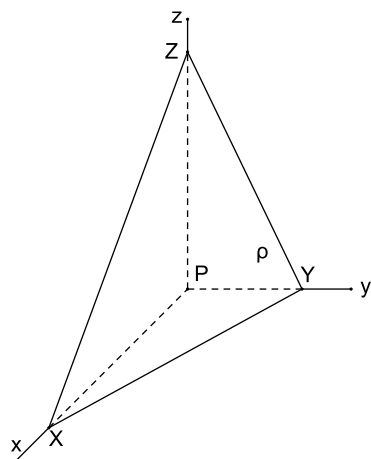
po jehož dosazení do rovnice první dostaneme obecnou rovnici

$$3x + 5y + 2z - 35 = 0. \quad (9)$$

To je stejný výsledek jako v případě a). Rovina $3x + 5y + 2z - 35 = 0$ určená body Q, M, N je kolmá k vektoru $(3, 5, 2)$, jehož složky jsou koeficienty v její obecné rovnici.

Pro znázornění roviny ρ v rovnoběžném promítání určíme souřadnice jejích průsečíků se souřadnicovými osami (obr. 11):

$$x \cap \rho = X \left[\frac{35}{3}, 0, 0 \right]; y \cap \rho = Y[0, 7, 0]; z \cap \rho = Z \left[0, 0, \frac{35}{2} \right].$$



Obr. 11

Úloha 2 Řešte početně i graficky (ve volném rovnoběžném promítání) soustavu rovnic

$$18x + 15y + 14z = 90 \quad (\alpha)$$

$$7x + 4y + 3z = 24 \quad (\beta)$$

$$16x + 17y + 10z = 80. \quad (\gamma)$$

Odečteme-li osmnáctinásobek druhé rovnice od sedminásobku první, získáme rovnici (10), odečteme-li sedminásobek třetí rovnice od šestnáctinásobku druhé, získáme rovnici (11):

$$33y + 44z = 198 \quad (10)$$

$$55y + 22z = 176. \quad (11)$$

Odečteme-li třiatřicetinásobek rovnice (11) od pětapadesátinásobku rovnice (10), dostaneme rovnici

$$1694z = 5082.$$

Řešením soustavy je bod $Q[1, 2, 3]$.

Ku grafickému řešení určíme průsečíky rovin α, β, γ se souřadnicovými osami:

$$\alpha \cap x = A[5, 0, 0], \alpha \cap y = B[0, 6, 0], \alpha \cap z = E\left[0, 0, \frac{45}{7}\right]$$

$$\beta \cap x = F\left[\frac{24}{7}, 0, 0\right], \beta \cap y = B[0, 6, 0], \beta \cap z = C[0, 0, 8]$$

$$\gamma \cap x = A[5, 0, 0], \gamma \cap y = G\left[0, \frac{80}{17}, 0\right], \gamma \cap z = C[0, 0, 8]$$

Pomocí průsečnic rovin α, β, γ se souřadnicovými rovinami určíme průsečnice

$$\alpha \cap \beta = p, \beta \cap \gamma = q, \alpha \cap \gamma = s$$

a společný bod $Q[1, 2, 3]$ všech tří rovin (obr. 12).

Úloha 3 *Řešte početně i graficky (ve volném rovnoběžném promítání) soustavu rovnic*

$$x + z = 6 \quad (\alpha)$$

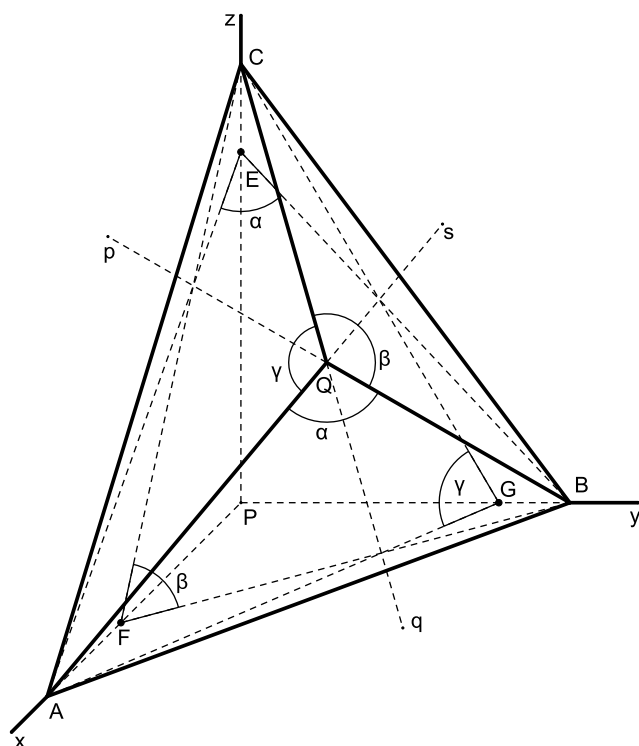
$$x + y = 3 \quad (\beta)$$

$$y + 2z = 9 \quad (\gamma)$$

Protože první rovnici můžeme interpretovat jako rovnici

$$x + 0 \cdot y + z = 6,$$

představuje tato rovnice rovinu rovnoběžnou s osou y (x, z jsou vázány podmínkou (α) , y je libovolné). Podobně usoudíme, že rovina β je rovnoběžná s osou z a rovina γ s osou x .



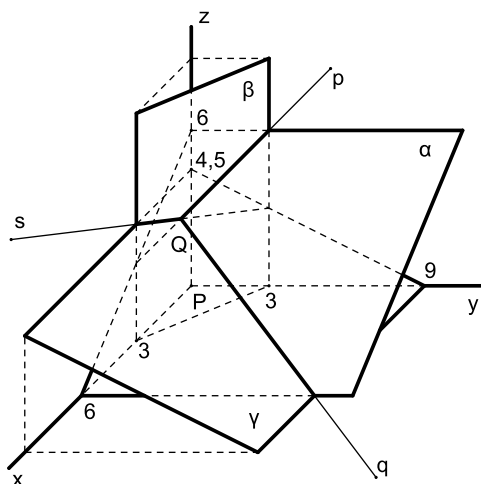
Obr. 12

Řešení soustavy je zřejmé. Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou, dostaneme rovnici (12) a řešíme soustavu

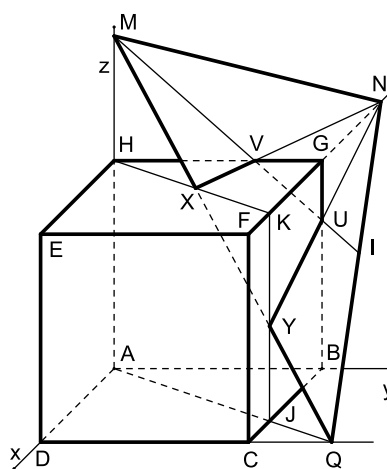
$$-y + z = 3 \quad (12)$$

$$y + 2z = 9. \quad (13)$$

Soustava má tedy jediné řešení $Q[2, 1, 4]$. Bod Q je společným bodem rovin α, β, γ , kterými procházejí podle obr. 13 průsečnice $p = \alpha \cap \beta, q = \alpha \cap \gamma, s = \beta \cap \gamma$.



Obr. 13



Obr. 14

Úloha 4 (Stefan Turnau) Určete průnik krychle $ABCDEFGH$ s trojúhelníkem MNQ . ($A[0, 0, 0]$, $B[0, 5, 0]$, $F[5; 5; 5]$, $M[0, 0, 8]$, $N[-4, 5, 5]$, $Q[5; 7; 0]$.)

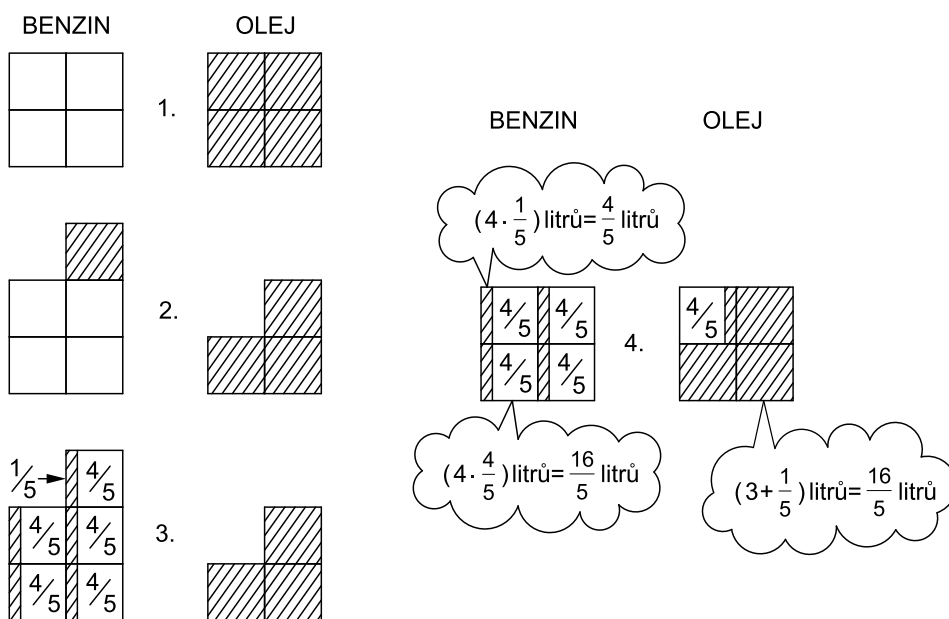
Protože žádné dva z vrcholů trojúhelníku MNQ neleží v žádné rovině stěn krychle, sestojíme např. průsečíky přímky MQ s povrchem krychle. Protože promítací rovina MAG přímky MQ protíná povrch krychle v obdélníku $AJKH$, jsou X, Y průsečíky přímky MQ s povrchem krychle (obr. 14). Průnikem roviny pravé boční stěny s rovinou MQN je přímka YN a roviny horní stěny krychle s rovinou MQN je přímka XN . Průnikem krychle s trojúhelníkem je čtyřúhelník $XYUV$.

2.2.5 Míchání dvou kapalin

Máme nádrž benzínu a stejně velkou nádrž oleje. Přelijme odměrku oleje do benzínu a důkladně zamíchejme. Odměrku směsi takto získané

přelejme zpět do oleje. Bude více oleje v benzinu, nebo benzinu v oleji? ([27], s. 43).

Představme si situaci nejdříve tak, že objem každé nádrže je 4 litry a odměrka má objem 1 litr. Celý proces můžeme znázornit obr. 15.



Obr. 15

Oleje v benzinu je tedy stejně jako benzinu v oleji.

Řešme nyní úlohu, je-li v první nádrži n litrů benzinu, v druhé n litrů oleje a odměrka má objem 1 litr.

Nalejeme-li 1 litr oleje do nádrže s benzinem, dostaneme v první nádrži $(n + 1)$ litrů směsi, v druhé $(n - 1)$ litrů oleje. Promícháme-li směs v první nádobě, bude v každém litru $\frac{1}{n+1}$ litrů oleje a $\frac{n}{n+1}$ litrů benzinu.

Celkem tedy je v první nádobě

$$(n+1) \cdot \frac{n}{n+1} \text{ litrů benzínu a } (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \text{ litrů oleje.}$$

Vrátíme-li litr směsi do druhé nádoby, bude

$$\text{v první nádrži } n \cdot \frac{n}{n+1} \text{ litrů benzínu a } n \cdot \frac{1}{n+1} \text{ litrů oleje,}$$

$$\text{v druhé nádrži } \frac{n}{n+1} \text{ litrů benzínu a } \left((n-1) + \frac{1}{n+1}\right) \text{ litrů oleje.}$$

V první nádobě je tedy

$$\frac{n^2}{n+1} \text{ litrů benzínu a } \frac{n}{n+1} \text{ litrů oleje,}$$

v druhé nádobě pak

$$\frac{n}{n+1} \text{ litrů benzínu a } \frac{n^2}{n+1} \text{ litrů oleje.}$$

Oleje v benzínu je tedy stejně jako benzínu v oleji, v souladu s prvním řešením úlohy.

Úlohu můžeme ovšem řešit i touto úvahou.

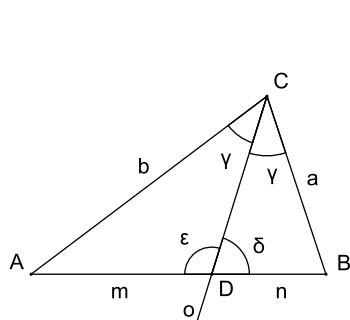
Po provedení dvou odlití je v každé nádrži stejné množství směsi a to takové jako bylo v první nádobě benzínu a v druhé oleje. Olej se do první nádrže s benzinem dostal z druhé nádoby, právě tak, jako benzin se dostal z první nádoby do druhé. Část benzínu v první nádobě byla nahrazena stejným množstvím oleje z druhé nádoby.

První řešení je vizualizací popsané procedury, druhé řešení je algoritmické, třetí řešení nazývá Freudenthal v publikaci [27] řešením pojmovým.

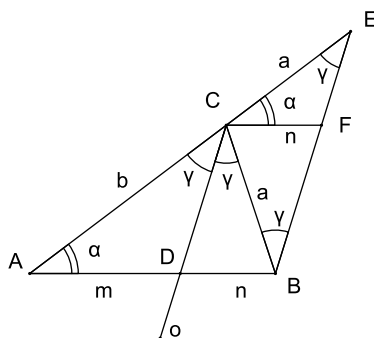
2.2.6 Osa úhlu

Dokažte, že platí: *V libovolném trojúhelníku dělí osa úhlu protilehlou stranu v poměru stran přilehlých.*

1. řešení



Obr. 16



Obr. 17

V označení podle obr. 16 máme dokázat

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a} \quad (14)$$

Podle sinové věty platí

$$\text{v trojúhelníku } ADC : \frac{m}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \epsilon}, \text{ v trojúhelníku } BDC : \frac{n}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

Protože $\delta = 180^\circ - \epsilon$, je $\sin \epsilon = \sin \delta$ a platí $\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$ neboli $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$.

2. řešení

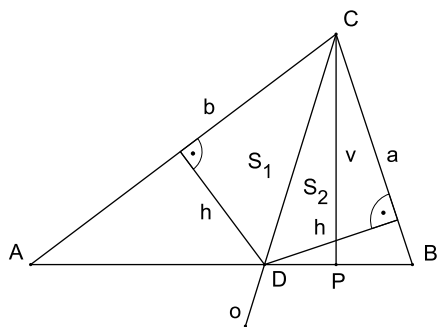
Vedeme-li bodem B přímkou BE rovnoběžnou s osou o (obr. 17), pak jsou shodné souhlasné úhly ACD , CEB i střídavé úhly DCB , CBE .

Trojúhelník ECB je tedy rovnoramenný a platí $|CE| = a$. Vedeme-li bodem C přímkou CF rovnoběžnou s přímkou AB , jsou podle věty (uu) trojúhelníky ADC , CFE podobné a platí (14).

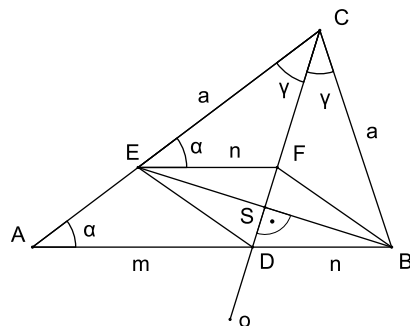
3. řešení

Protože mají trojúhelníky ADC , DBC stejnou výšku k základnám AD , DB (obr. 18), je poměr jejich obsahů roven poměru základen:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}.$$



Obr. 18



Obr. 19

Protože mají tyto trojúhelníky stejnou výšku ke stranám AC , BC (bod D leží na ose úhlu), je poměr jejich obsahů roven poměru těchto stran:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b}{a}.$$

Platí tedy $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$.

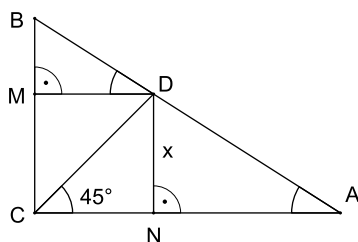
4. řešení

V osové souměrnosti s osou $o = CD$ je obrazem bodu B bod E přímky AC (obr. 19). Tento bod je i obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem v průsečíku S přímek EB , DC . V této středové souměrnosti je obrazem bodu D bod F tak, že čtyřúhelník $DBFE$ je kosočtverec. Protože je přímka EF rovnoběžná s přímkou AB , jsou trojúhelníky ADC , EFC podobné a platí $|EF| = |DB| = n$, $|EC| = |BC| = a$. Z této podobnosti plyne (14).

Další úloha se týká osy pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníku.

Úloha [20]

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami a , b označme D průsečík osy pravého úhlu s přeponou AB . Určete velikost úsečky CD .



Obr. 20

1. řešení

Sestrojíme-li z bodu D paty kolmic M , N po řadě na odvěsny a , b , jsou trojúhelníky BMD a DNA podobné a pro stranu x čtverce $DNCM$ platí (obr. 20):

$$\frac{x}{a-x} = \frac{b-x}{x}$$

neboli

$$x^2 = (a - x)(b - x).$$

Je tedy

$$ab - x(a + b) = 0$$

a

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Pro úhlopříčku CD čtverce $CNDM$ platí

$$d = \frac{ab\sqrt{2}}{a + b}. \quad (15)$$

2. řešení

Umístíme-li trojúhelník ABC do soustavy souřadnic podle obr. 21, má přímka CD rovnici $y = x$ a přímka AB rovnici $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. Průsečík D těchto přímek má souřadnice $x = y = \frac{ab}{a + b}$ a tedy platí (15).

3. řešení

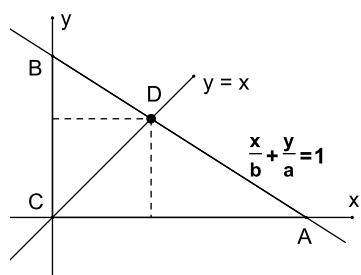
Vyjádříme dvěma způsoby obsah trojúhelníku ABC (obr. 22).

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ad \sin 45^\circ + \frac{1}{2}db \sin 45^\circ. \quad (16)$$

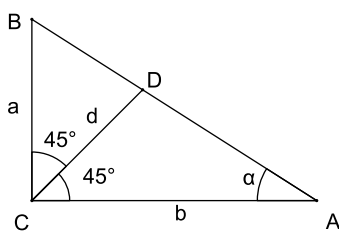
Protože $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, můžeme rovnost (16) upravit na tvar

$$ab\sqrt{2} = d(a + b),$$

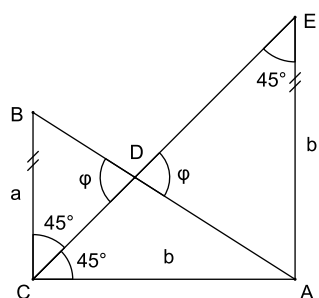
který je ekvivalentní s rovností (15).



Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23

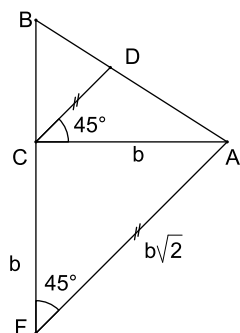
4. řešení

Vedeme-li bodem A přímku rovnoběžnou s přímkou BC a označíme-li E její průsečík s přímkou CD (obr. 23), plyne z podobných trojúhelníků CDB , EDA :

$$\frac{d}{a} = \frac{b\sqrt{2} - d}{b}$$

neboli

$$\begin{aligned} bd &= ab\sqrt{2} - ad \\ d(a + b) &= ab\sqrt{2}, \\ d &= \frac{ab\sqrt{2}}{a + b}. \end{aligned}$$



Obr. 24

5. řešení

Vedeme-li bodem A přímkou rovnoběžnou s přímkou CD a označíme-li F její průsečík s přímkou BC (obr. 24), plyne z podobných trojúhelníků BCD , BFA rovnost

$$\frac{d}{a} = \frac{b\sqrt{2}}{a+b},$$

která je ekvivalentní s (15).

6. řešení

Podle sinové věty pro trojúhelník ACD platí v označení podle obr. 22:

$$\frac{d}{|AD|} = \frac{\sin \alpha}{\sin 45^\circ}$$

neboli

$$d = \frac{|AD| \cdot \frac{a}{c}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{c} \cdot |AD| \quad (17)$$

Protože podle věty, že osa úhlu dělí protější stranu v poměru stran přilehlých, kterou jsme dokázali v první části, je

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{b}{a}$$

a tedy

$$\begin{aligned} a \cdot |AD| &= b \cdot |DB|, \\ a \cdot |AD| &= b \cdot (c - |AD|), \\ |AD| &= \frac{bc}{a+b}. \end{aligned} \tag{18}$$

Z rovnosti (18) plyne podle (17) rovnost (15).

7. řešení

Podle kosinové věty pro trojúhelník ACD platí v souladu s rovností (18) v označení podle obr. 22

$$d^2 = b^2 + \frac{(bc)^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{b^2c}{a+b} \cdot \frac{b}{c}, \tag{19}$$

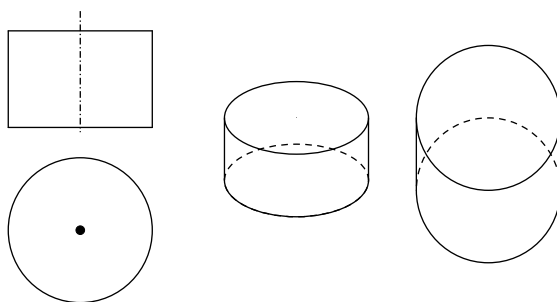
neboť $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Úpravou rovnosti (19) získáme výsledek (15).

2.2.7 Obraz kružnice

Rotační válec můžeme zobrazit např. čtyřmi způsoby podle obr. 25.

V náryse je obrazem kruhové podstavy válce úsečka, v půdoryse kruh. V názorném pohledu může být kruhová podstava zobrazena jako elipsa nebo jako kruh.

Všimněme si několika dalších příkladů zobrazení kružnice.

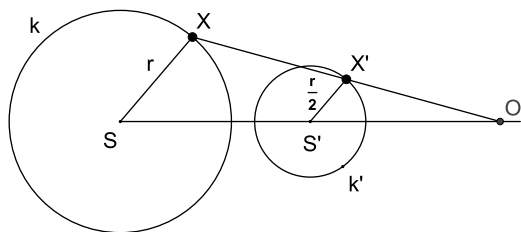


Obr. 25

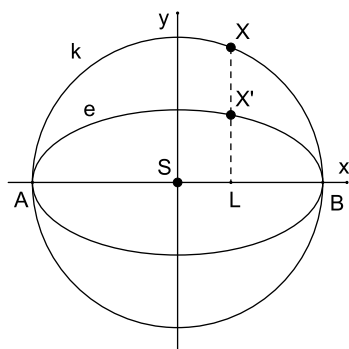
Úloha 1

Zobrazte kružnici $k(S; r)$ ve stejnolehlosti $h(0; \frac{1}{2})$.

Protože pro obraz X' bodu $X \in k$ platí: X' je bod polopřímky OX a $|OX'| = \frac{1}{2}|OX|$, je obrazem kružnice k kružnice k' . Je-li totiž obrazem středu S kružnice k bod S' , leží obraz libovolného bodu $X \in k$ na kružnici $k'(S', \frac{r}{2})$, neboť v trojúhelníku SOX je $S'X'$ střední příčkou (obr. 26). Obráceně: každý bod X' kružnice k' je obrazem určitého bodu kružnice k . Obrazem kružnice ve stejnolehlosti je tedy kružnice.



Obr. 26



Obr. 27

Úloha 2

Je dána kružnice $k(P, r)$ s průměrem AB . Sestrojte obraz kružnice k v zobrazení, které libovlnnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X' , který je středem úsečky LX , kde L je pata kolmice sestrojené z bodu X na přímkou AB (obr. 27).

Označíme-li souřadnice bodu $X'[x', y']$, pak platí $x' = x$, $y' = \frac{y}{2}$. Protože pro bod X kružnice platí v zobrazeném souřadnicovém systému

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

platí

$$(x')^2 + 4(y')^2 = r^2$$

neboli

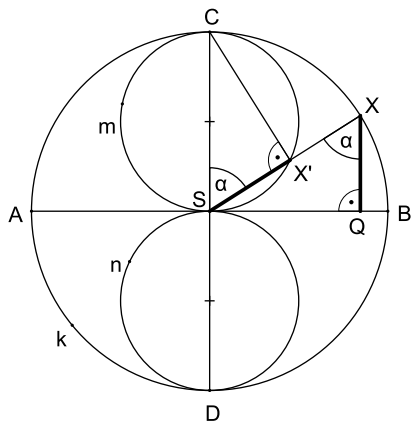
$$\frac{(x')^2}{r^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 1.$$

Obrazem kružnice k je tedy elipsa e .

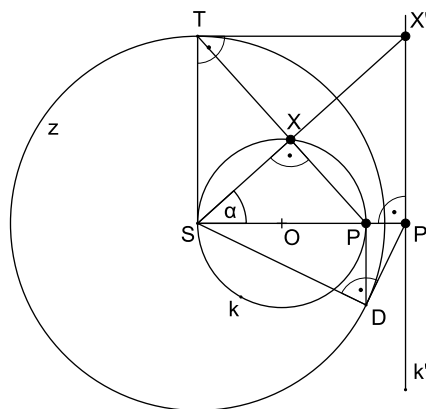
Zobrazení popsané v této úloze se nazývá afinita.

Úloha 3

Je dána kružnice k se středem S a na sebe kolmými průměry AB , CD podle obr. 28. Sestrojte obraz kružnice v zobrazení, které libovolnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X' polopřímky SX tak, že vzdálenost $|SX'|$ je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB .



Obr. 28



Obr. 29

Protože (v označení podle obr. 28) je $|SX'| = |XQ|$, $|SC| = |SX|$, $|\angle CSX'| = |\angle SXQ|$ (střídavé úhly u rovnoběžných přímek CD , XQ), jsou trojúhelníky SXQ a CSX' shodné podle věty sus. Protože je úhel SQX pravý, je pravý i úhel $CX'S$ a bod X' leží na Thaletově kružnici m s průměrem CS . Obráceně dokážeme, že každý bod kružnice m můžeme považovat za obraz některého bodu polokružnice ACB . Stejně lze uvažovat o dolní polorovině s hranicí AB .

Obrazem kružnice k jsou tedy dvě kružnice m , n .

Úloha 4

Je dána kružnice $z(S, r)$ a kružnice k , která prochází středem S . Určete obraz kružnice k v zobrazení, které libovolnému bodu X kružnice k přiřazuje bod X' polopřímky SX tak, že platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.

Připomeňme nejdříve, že obraz X' (respektive P' v označení podle obr. 29) můžeme sestrojit podle Euklidovy věty o odvěsně pro trojúhelník STX' (respektive SDP').

Sestrojíme průměr SP kružnice k a obraz bodu P a libovolného bodu X kružnice k podle textu úlohy. Protože platí

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2 = |SP| \cdot |SP'|,$$

platí i

$$\frac{|SX|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SX'|}.$$

Trojúhelníky SXP a $SP'X'$ jsou tedy podobné. Protože je úhel SXP pravý, je pravý i úhel $SP'X'$. Obraz libovolného bodu X kružnice k leží tedy na přímce k' kolmé k přímce SP' v bodě P' .

Obráceně dokážeme, že každý bod přímky $k' = P'X'$ je obrazem nějakého bodu kružnice k . Bod S ovšem v tomto zobrazení obraz definován nemá.

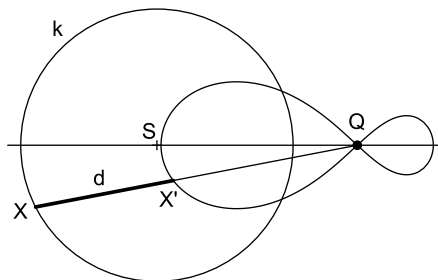
Obrazem kružnice (z níž je vyňat bod S) je přímka.

Zobrazení popsané v této úloze se nazývá, jak známo, *kruhová inverze*.

Úloha 5

Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod Q v její vnější oblasti. Sestrojte obraz kružnice k v zobrazení, které libovolnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X'

polopřímky XQ tak že úsečka XX' má danou velikost d větší než je vzdálenost bodu Q od kružnice k (obr. 30).



Obr. 30

K řešení úlohy postačí převést text do grafické podoby. Obrazem kružnice k je křivka tvaru osmičky, která je souměrná podle osy SQ .

2.2.8 Obvod a obsah obdélníku

Dokažte: *Mají-li dva obdélníky sobě rovné obsahy a sobě rovné obvody, jsou shodné.*

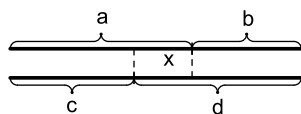
1. řešení

Označme strany jednoho obdélníku a, b , druhého c, d . Podmínky úlohy můžeme zapsat ve tvaru

$$ab = cd \quad (20)$$

$$a + b = c + d \quad (21)$$

Druhou rovnost můžeme geometricky znázornit podle obr. 31.



Obr. 31

Existuje tedy číslo x , pro něž platí

$$a = c + x, b = d - x.$$

Dosadíme-li takto vyjádřené délky a , b do rovnice (20), dostaneme

$$(c + x)(d - x) = cd$$

neboli

$$cd + x(d - c) - x^2 = cd.$$

Tato rovnost je splněna buď pro $x = 0$, pak je $a = c$ a $b = d$, nebo pro $x = d - c$. Pak je ovšem $a = d$ a $b = c$.

Obdélníky jsou tedy shodné.

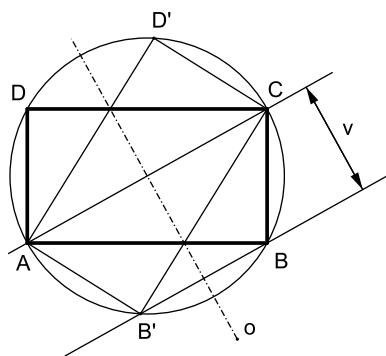
2. řešení (Vlastimil Dlab)

Umocníme-li rovnost (21) na druhou, dostaneme

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2,$$

která vzhledem k rovnosti (20) znamená, že úhlopříčky obou obdélníků jsou shodné. Sestrojíme-li úhlopříčku $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$, leží vrcholy B , D (respektive B' , D') hledaných obdélníků na Thaletově kružnici s průměrem AC . Vzhledem k tomu, že obsahy obou obdélníků jsou si rovny, jsou si rovny i vzdálenosti vrcholů B , B' od úhlopříčky

AC . Vrchol B obdélníku $ABCD$ nebo vrchol B' obdélníku $AB'CD'$ sestrojíme tedy podle obr. 32. Vzhledem k souměrnosti konstrukce podle osy úsečky AC musí být obdélníky se sobě rovnými obvody i obsahy shodné.



Obr. 32

3. řešení (absolvent průmyslové školy strojnické)

Ukažme, že soustava

$$\begin{aligned} ab &= S \\ a + b &= \frac{1}{2}o \end{aligned} \quad (22)$$

s neznámými a , b a parametry S , o má jediné řešení.

Vyjádříme-li z druhé rovnice např. a , dostaneme

$$a = \frac{o}{2} - b$$

a po dosazení do rovnice první získáme po úpravě kvadratickou rovnici

$$2b^2 - ob + 2S = 0,$$

která má sice dva kořeny

$$b_1 = \frac{o + \sqrt{o^2 - 16S}}{4}, b_2 = \frac{o - \sqrt{o^2 - 16S}}{4}, \quad (23)$$

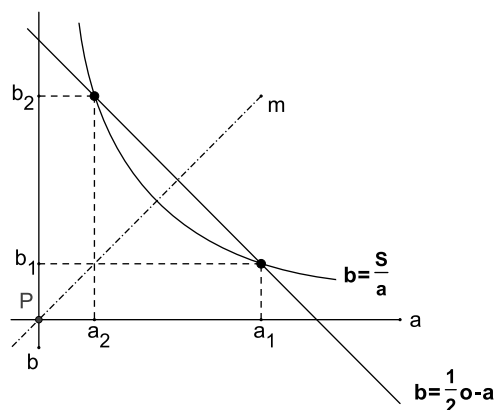
avšak

$$a_1 = b_2, a_2 = b_1,$$

takže délky stran hledaného obdélníku jsou určeny jednoznačně. Z vyjádření je rovněž vidět, že obdélník splňující podmínky úlohy bude existovat pro $o \geq 4\sqrt{S}$.

4. řešení

Znázorníme-li soustavu (22) v kartézské soustavě souřadnic podle obr. 33, je vzhledem k souměrnosti grafu podle osy m prvního kvadrantu zřejmé, že obdélníky splňující podmínky úlohy jsou shodné.



Obr. 33

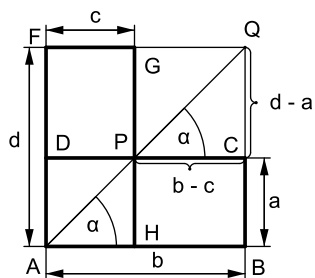
5. řešení

Přepíšme podmínky (20) a (21) na tvar

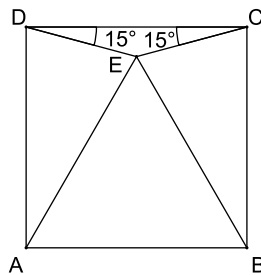
$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}, \quad (24)$$

$$b - c = d - a. \quad (25)$$

Umístíme-li obdélníky splňující podmínky úlohy do polohy na obr. 34, pak v označení podle tohoto obrázku leží body A, P, Q v přímce, neboť $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \tan \alpha$. Vzhledem k podmínce (25) to ovšem znamená, že $\alpha = 45^\circ$ a obdélníky $ABCD$, $AHGF$ jsou shodné.



Obr. 34

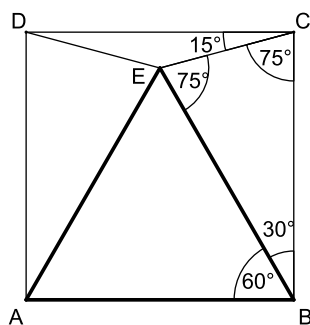


Obr. 35

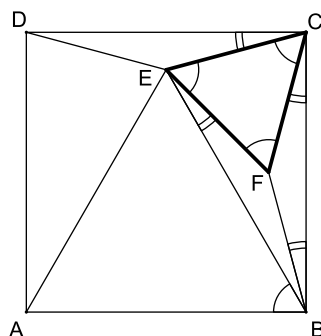
2.2.9 Van Hieleho úloha

$ABCD$ je čtverec, E bod jeho vnitřku. Dokažte, je-li $|\angle DCE| = |\angle CDE| = 15^\circ$, potom je trojúhelník ABE rovnostranný (obr. 35).

První dvě řešení pocházejí od jejího autora Van Hieleho.



Obr. 36



Obr. 37

1. řešení ([35], s. 152)

Začneme konstrukcí rovnostranného trojúhelníku ABE (obr. 36). Protože $|\angle ABE| = 60^\circ$, platí $|\angle EBC| = 30^\circ$. Trojúhelník BEC je rovnoramenný a $|\angle BEC| = |\angle BCE| = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$. Je tedy $|\angle ECD| = 15^\circ$. Protože k témuž bodu E dojdeme jak konstrukcí podle textu úlohy, tak i konstrukcí rovnostranného trojúhelníku ABE , je úloha vyřešena.

Van Hiele uvádí, že toto řešení, na které přišel jeden jeho žák, třída nepřijala a hledala řešení „přímé“. To našel jeden žák, který znal rozklad pravidelného dvanáctiúhelníku na tři shodné čtverce, které zde uvádíme v odstavci 2.3.4.

2. řešení ([35], s. 153)

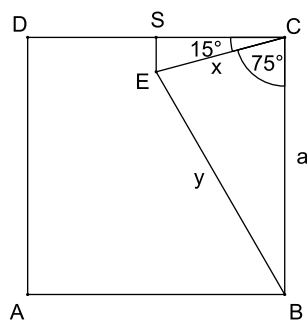
Sestrojíme rovnostranný trojúhelník ECF , který je částí trojúhelníku EBC (obr. 37). Protože podle věty (sus) je $\triangle DCE$ shodný s trojúhelníkem BCF , platí

$$|CF| = |FB|, |\angle CFB| = 150^\circ.$$

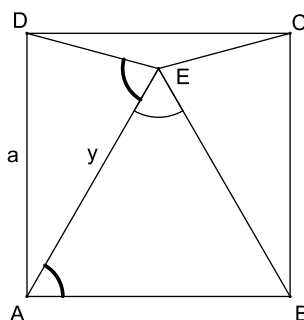
Protože i úhel EFB má velikost 150° (jak snadno spočítáme), je podle věty (sus)

$$\triangle EFB \simeq \triangle CFB$$

a platí tedy $|EB| = |CB|$, $|\angle EBA| = 60^\circ$ a trojúhelník ABE je rovnostranný.



Obr. 38



Obr. 39

3. řešení

Vypočítejme v označení podle obr. 38 velikost úsečky EB .

Identitu

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

můžeme přepsat na tvar

$$\frac{1}{4} = \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ.$$

Protože z trojúhelníku CSE plyne

$$\cos 15^\circ = \frac{a}{2x},$$

je

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{2x} \cdot \cos 75^\circ.$$

Upravme poslední rovnost formálně na tvar

$$a^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos 75^\circ.$$

Protože platí podle kosinové věty pro trojúhelník ECB

$$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos 75^\circ,$$

je $a = y$.

4. řešení (*H. S. M. Coxeter*)

Toto řešení je nepřímé. Kdyby trojúhelník AEB nebyl rovnostranný, byl by úhel AEB buď menší, nebo větší než 60° . Rozebereme podrobněji první případ.

Je-li $|\angle AEB| < 60^\circ$, pak je $|\angle EAB| > 60^\circ$. Dále je $|\angle DEA| > 75^\circ$, neboť $2|\angle DEA| + |\angle AEB| = 210^\circ$.

V trojúhelníku AEB je tedy strana EA proti většímu úhlu než strana AB a v označení podle obr. 39 platí $a < y$. V trojúhelníku AED je strana AD proti většímu úhlu než strana AE . Je tedy $a > y$. Protože obě tyto nerovnosti nemohou být splněny zároveň, nemůže být úhel AEB menší než 60° . Podobně lze dokázat, že nemůže být ani větší než 60° . Trojúhelník ABE je tedy rovnostranný.

Z pravoúhlého trojúhelníku EBS pak podle Pythagorovy věty plyne

$$y^2 = a^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 15^\circ \right)^2 + \frac{1}{4} \right].$$

Student Holub odhadl s použitím kalkulačky, že číslo v hranaté závorce je rovno 1 a že tedy platí $y = a$.

Tento odhad musíme prověřit. Protože platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

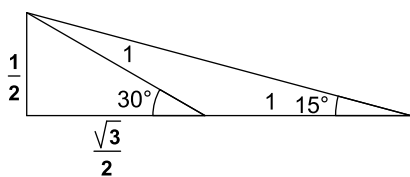
můžeme výraz v hranaté závorce upravit na tvar

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} \right)^2 + \frac{1}{4} = \left[1 - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3}) \right]^2 + \frac{1}{4} = 1.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno.

7. řešení (A. András)

Protože platí podle obr. 42 $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, je v označení podle obr. 41 a v důsledku rovnosti (26) $v = a \left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trojúhelník ABE je tedy rovnostranný.



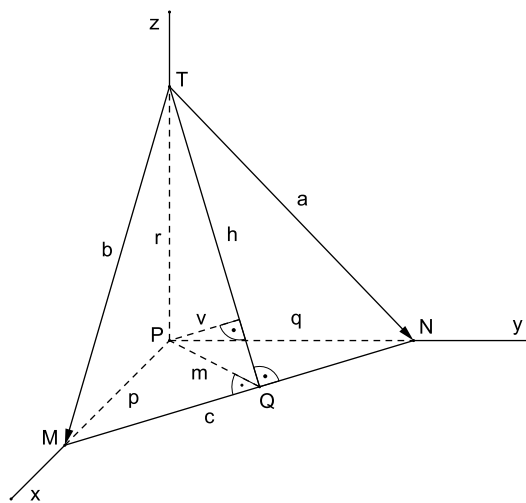
Obr. 42

2.2.10 Faulhaberova věta

Dokažte Faulhaberovu větu (zobecnění věty Pythagorovy):

Protneme-li po dvou k sobě kolmé přímky x , y , z rovinou MNT podle obr. 43, pak pro obsahy A , B , C , D trojúhelníků PMN , PNT , PTM a MNT platí

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2. \quad (27)$$



Obr. 43

1. řešení (Robert Ryden), [70]

V soustavě souřadnic podle obr. 43 označme

$P[0, 0, 0]$, $M[p, 0, 0]$, $N[0, q, 0]$, $T[0, 0, r]$.

Zřejmě platí

$$A = \frac{1}{2}pq, B = \frac{1}{2}rq, C = \frac{1}{2}pr, \quad (28)$$

$$|MN| = c = \sqrt{p^2 + q^2}, |NT| = a = \sqrt{q^2 + r^2}, |MT| = b = \sqrt{p^2 + r^2},$$

$$D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (29)$$

Vypočtěme

$$D^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} =$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}.$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu vyjádření pro a, b, c podle (29), vyjde „pouhou“ algebraickou úpravou

$$D^2 = \frac{p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2}{4} = A^2 + B^2 + C^2.$$

2. řešení

Označme h výšku TQ trojúhelníku MNT , m výšku PQ trojúhelníku MNP (obr. 43). Protože

$$mc = pq, c^2 = p^2 + q^2, h^2 = m^2 + r^2,$$

je

$$m^2c^2 = p^2q^2, m^2 = \frac{p^2q^2}{p^2 + q^2}, h^2 = \frac{p^2q^2}{p^2 + q^2} + r^2 = \frac{p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2}{p^2 + q^2}.$$

Pro obsah D trojúhelníku MNT tedy platí

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{4}c^2h^2 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2) \cdot \frac{p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2}{p^2 + q^2} = \\ &= \frac{p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2}{4} = A^2 + B^2 + C^2. \end{aligned}$$

3. řešení

Vypočítejme objem čtyřštěnu $MNPT$ dvěma způsoby:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}pqr = \frac{1}{6}pqr \quad (30)$$

$$V = \frac{1}{3}D \cdot v \quad (31)$$

kde D je obsah trojúhelníku MNT , v je vzdálenost počátku P od roviny MNT .

Protože pro vzdálenost bodu $B[x_0, y_0, z_0]$ od roviny $ax + by + cz + d = 0$ platí vzorec

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

a rovina MNT má analytické vyjádření

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

platí pro vzdálenost v počátku od roviny MNT :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}{p^2q^2r^2}}} = \frac{pqr}{\sqrt{p^2q^2 + q^2r^2 + p^2r^2}}$$

Srovnáním vztahů (30) a (31) dostaneme

$$\frac{1}{3}Dv = \frac{1}{6}pqr$$

neboli

$$D = \frac{1}{2} \frac{pqr}{v} = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}.$$

Je tedy podle (28) $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$.

4. řešení (*Svatopluk Zachariáš*)

Protože pro obsah trojúhelníku, jehož strany jsou umístěními vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|,$$

kde $\vec{u} \times \vec{v}$ je vektorový součin těchto vektorů, můžeme pro vektory

$$\overrightarrow{TM} = (p, 0, -r), \overrightarrow{TN} = (0, q, -r)$$

a jejich vektorový součin

$$\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TN} = (rq, pr, pq)$$

vypočítat

$$|\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TN}| = \sqrt{r^2 q^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}$$

a pro obsah D trojúhelníku TMN tak dostáváme

$$D^2 = \frac{1}{4}(p^2 q^2 + q^2 r^2 + r^2 p^2) = A^2 + B^2 + C^2.$$

Promítněme přímku PT pravoúhle do roviny MNT . Protože je PT kolmá k rovině PMN , je PT kolmá k přímce MN a pravoúhlý průmět TL je kolmý k MN (pravoúhlý průmět pravého úhlu, jehož jedno rameno je částí průmětny). Je tedy (v označení podle obr. 44) QT výškou trojúhelníku MNT a QP výškou trojúhelníku MNP . V pravoúhlém trojúhelníku QPT platí podle Euklidovy věty o odvěsně

Vynásobíme-li tuto rovnost číslem $\frac{1}{4}|MN|^2$, dostaneme

Označíme-li obsah trojúhelníku MNL jako A_1 , můžeme rovnost (32) interpretovat jako rovnost

Podobně můžeme odvodit

$$C^2 = C_1 D, \quad (35)$$

kde B_1 a C_1 jsou obsahy trojúhelníků NTL a MTL . Sečtením rovností (33), (34) a (35) dostaneme

$$A^2 + B^2 + C^2 = D(A_1 + A_2 + A_3) = D^2.$$

Tento důkaz je ovšem přímou analogií důkazu Pythagorovy věty pomocí vět Euklidových, který jsme uvedli jako 4. důkaz v odstavci 2.1.4.

2.2.11 Podivuhodný svět prvočísel

Množina prvočísel, přirozených čísel, které mají právě dva dělitele, je nekonečná. K libovolné skupině $p_1, p_2, \dots, p_k$ prvočísel můžeme totiž sestavit další prvočíslo, které v této skupině není. Všimněme si čísla $s = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. Číslo s buďto je prvočíslem (a protože je větší než libovolné z čísel $p_1, p_2, \dots, p_k$, není v této skupině), nebo je číslem složeným. Pak ovšem musí být dělitelné jistým prvočíslem p . Protože při dělení čísla s libovolným z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_k$ dostaneme zbytek 1, je p nové prvočíslo. Prvočísel tedy nemůže být konečný počet. Tato úvaha, která je dosti hluboká (Jak přijít na konstrukci čísla s ?), se vyskytuje již v Euklidových Základech ze 3. století před naším letopočtem, díla, které *ovlivnilo zásadním způsobem nejen matematiku, ale evropskou vědu vůbec* ([22], s. 7). První české vydání Euklidových Základů pochází z r. 1907 [23]. Nové vydání Základů připravil a komentoval Petr Vopěnka ([22], [24]).

Některé vlastnosti prvočísel připomeneme formou úloh.

Úloha 1 *Ačkoliv není znám vzorec pro konstrukci n -tého prvočísla, lze každé prvočíslo psát ve tvaru $6k + 1$ nebo $6k + 5$. Dokažte.*

Protože při dělení přirozeného čísla číslem 6 lze získat pouze 5 zbytků, je možné každé přirozené číslo zapsat v některém z tvarů

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, \text{ kde } k \text{ je přirozené.}$$

Protože čísla $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ jsou složená, musí být prvočíslo buď tvaru $6k + 1$ nebo $6k + 5$. Že některá z těchto čísel jsou prvočísla, ukazuje příklad čísel $6 \cdot 1 + 1 = 7$, $6 \cdot 1 + 5 = 11$. Čísla tvaru $6k + 1$ nebo $6k + 5$ mohou ovšem být složená, např. $6 \cdot 4 + 1 = 25$, $6 \cdot 5 + 5 = 35$.

Úloha 2 *Uspořádejte začátek posloupnosti přirozených čísel do trojúhelníkového schématu podle obr. 45. Prvočísla zapíšte číslicemi, složená čísla vyznačte tečkou.*

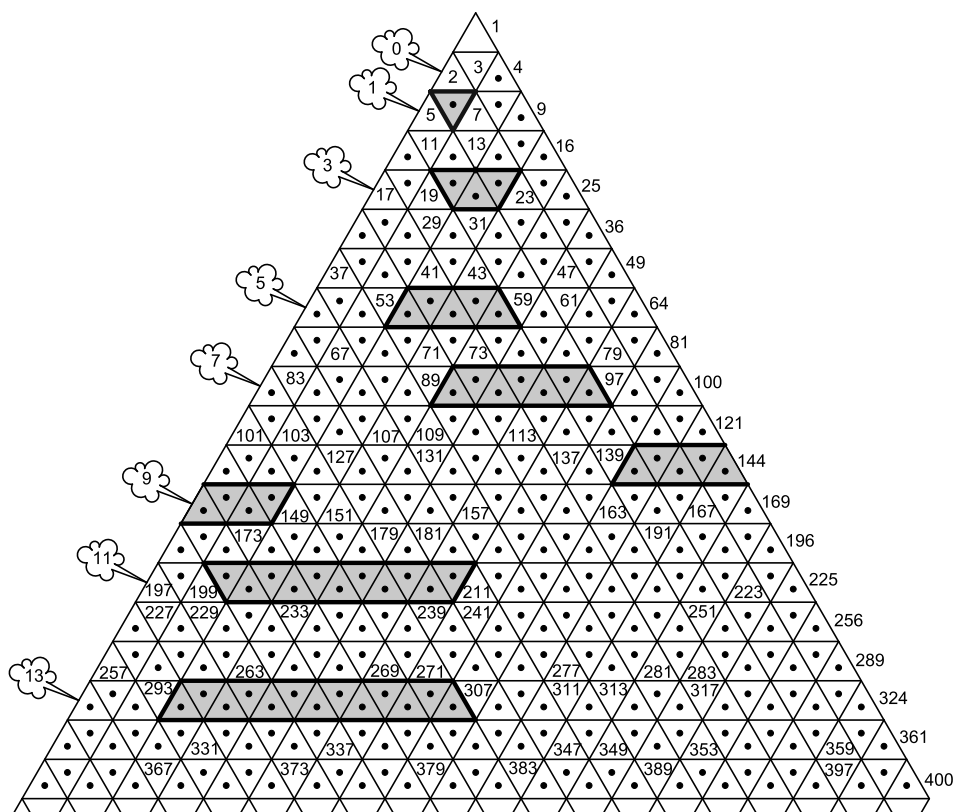
Schéma na obr. 45, které pochází od českého matematika *Jana Filipa Kulika* (1793 – 1863, [63]), může být zdrojem řady otázek. Uveďme některé.

Kterými pročíslý stačí dělit číslo n , máme-li zjistit, zda jde o prvočíslo či číslo složené?

Ukážeme, že stačí prověřovat prvočísla nejvýše rovná $\sqrt{n}$. Dělí-li totiž prvočíslo $p > \sqrt{n}$ číslo n , pak existuje prvočíslo $q < \sqrt{n}$, které rovněž dělí číslo n . Např. k určení, zda číslo 353 je prvočíslo postačí zjistit, že toto číslo není dělitelné prvočíslý 2, 3, 5, 7, 11, 13, která jsou menší než $\sqrt{353} = 18,8 \dots$.

Na obr. 45 jsou mezery mezi prvočíslý vyznačeny skupinami teček. Po levé straně trojúhelníku jsou pak zapsány délky největších mezer mezi prvočíslý. Jsou to samá lichá čísla. Bude to platit pro větší prvočísla?

Úloha 3 *Dokažte, že mezera mezi prvočíslý nemůže obsahovat sudý počet za sebou jdoucích čísel složených.*



Obr. 45

Protože každé prvočíslo větší než 2 je liché, je číslo následující po sudém počtu za sebou jdoucích přirozených čísel sudé, a nemůže být proto prvočíslem.

Z obr. 45 vidíme, že délky mezer mezi prvočísly rostou. Porostou stále?

Úloha 4 *Ukažte, že mezera mezi prvočísly může být větší než libovolné přirozené číslo.*

Konstrukci provedme např. pro mezeru, která se skládá ze 100 složených čísel. Jak získat 100 přirozených čísel za sebou, která jsou určitě čísla složenými? Takovou skupinu čísel dostaneme např. touto konstrukcí:

$$2 + 101!, 3 + 101!, 4 + 101!, \dots, 101 + 101!$$

Každé z těchto čísel je složené, čísla jdou za sebou a je jich 100. Podle úlohy 3 by ovšem po takto složených číslech následovalo číslo sudé a mezera mezi prvočísly takto konstruovaná musí obsahovat nejméně 101 čísel složených.

Nejmenší mezera mezi prvočísly má délku 1. Takováto prvočísla se nazývají prvočíselnými dvojčaty. Z obr. 45 můžeme určit např. tato prvočíselná dvojčata:

$$[3, 5], [5, 7], [11, 13], [17, 19], [29, 31], \dots, [347, 349] \dots$$

Otázka, zda je počet prvočíselných dvojčat konečný či nekonečný, je dosud nevyřešenou otázkou teorie čísel.

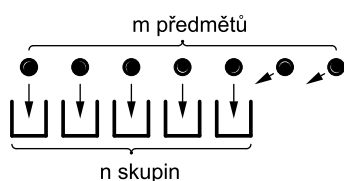
Hlubší poučení o prvočíslech je možné najít např. v nedávno vyšlé publikaci *Michala Křížka* [45].

2.2.12 Dirichletův, Pigeonhole – nebo Schubkasten – princip

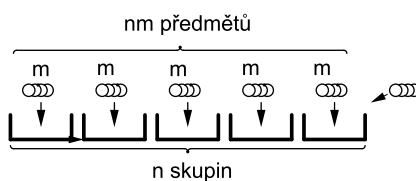
Dovolím si uvést toto téma osobní příhodou z roku 1951. V přijímacích zkouškách na matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze mi akademik *Vladimír Kořínek* položil otázku: *Na půdě jsou černé a hnědé ponožky. Kolik ponožek stačí si potmě vzít, abyste měl jistotou, že budete mít pár ponožek stejné barvy?* Když jsem správně odpověděl, že tři, obrátil se akademik na přisedícího svazáckého funkcionáře s poznámkou: *On tu úlohu znal.* A tak, ačkoliv jsem úlohu neznal a ačkoliv jsem neznal *Dirichletův princip*, jsem začal studovat matematiku.

My zde tento princip připomeneme ve třech variantách.

D1: *Rozdělujeme-li více než n předmětů do n skupin, pak je aspoň v jedné skupině více než jeden předmět (obr. 46).*



Obr. 46



Obr. 47

D2: *Rozdělujeme-li více než nm předmětů do n skupin, pak je aspoň v jedné skupině více než m předmětů (obr. 47).*

D3: *Jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n$ libovolná kladná reálná čísla, pak aspoň jedno z nich je aspoň tak velké jako jejich aritmetický průměr.*

V každé skupině $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladných reálných čísel existuje prvek a_i , pro který platí $a_i \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Kdyby totiž pro všechna i platilo, že $a_i < \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, pak by $a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

D_1, D_2, D_3 jsou zcela elementární tvrzení, která se označují jako *Dirichletův princip*. Česká terminologie dává obvykle přednost tomuto termínu, i když např. terminologie německá se nebojí názorného termínu princip *zásuvkový* a americká termínu princip *holubníku*. Na okraj připomeňme, že *Peter Dirichlet* (1805 – 1859) byl nástupcem Gaussovým a předchůdcem *Riemannovým* na univerzitě v Göttingenu. Tato trojice položila základ ke světové proslulosti německé matematiky v 19. století.

Ačkoliv je Dirichletův princip tvrzení na pohled velmi jednoduché, můžeme jeho vhodným použitím dostat velmi silné výsledky. Obvykle pomocí tohoto principu dokazujeme existenci objektů, které není možné (nebo je velmi těžké) efektivně sestavit ([8], s. 6).

Ilustrujme Dirichletův princip několika příklady.

Úloha 1

Dokažte, že v každé skupině 101 přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě budou dvě čísla s týmiž číslicemi na místech desítek a jednotek (číslo 2 zapíšeme jako 02, ...).

Na posledních dvou místech může být celkem 100 dvojic

$$01, \dots, 09, 10, 11, \dots, 98, 99, 00. \quad (36)$$

V libovolné skupině 101 čísel musí tedy být podle principu D_1 dvě čísla, jejichž zápis končí některou z dvojic (36).

Úloha 2 ([74], s. 11)

Každý bod trojdimenziálního prostoru je označen modrou, červenou nebo bílou barvou. Dokažte, že existují aspoň dva body vzdálené přesně 1 metr, které mají stejnou barvu.

Sestrojíme pravidelný čtyřstěn s hranami dlouhými 1m a zvolme libovolně jeden jeho vrchol. Ten je obarven např. barvou bílou. Zvolme další vrchol čtyřstěnu. Je-li obarven rovněž bílou, jsme hotovi. Není-li bílý, je např. červený. Přejdeme k dalšímu vrcholu. Je-li bílý nebo červený, jsme hotovi. Není-li bílý nebo červený, je modrý. Poslední vrchol musí být podle principu **D₁** obarven některou ze zbývajících barev a existence dvou bodů prostoru označené stejnou barvou je prokázána.

Úloha 3 ([8], s. 11)

Ve čtverci o straně 5 cm je libovolně umístěno 51 bodů. Dokažte, že některé tři z těchto bodů leží v kruhu o poloměru 8 mm.

Rozdělme čtverec na 25 čtverců o straně dlouhé 1 cm. Podle principu **D₂** leží aspoň v jednom z těchto čtverců aspoň 3 z daných 51 bodů. Opíšme tomuto čtverci kružnici. Protože její poloměr je $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414...}{2} < \frac{1,6}{2} = 0,8$, je tvrzení dokázáno.

Úloha 4

Dokažte, že v každém trojúhelníku je aspoň jeden úhel velikosti nejméně 60° , v každém čtyřúhelníku je aspoň jeden úhel pravý nebo tupý a v každém stouhelníku je aspoň jeden úhel velikosti nejméně 176° .

Úlohu můžeme řešit přímo, ale fakticky se přitom opíráme o zdůvodnění podle Dirichletova principu **D₃**.

Protože součet úhlů v trojúhelníku je 180° , je aritmetický průměr velikosti úhlů v trojúhelníku $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ a podle **D₃** má aspoň jeden úhel trojúhelníku velikost aspoň 60° .

Podobně odvodíme výsledek pro čtyřúhelníky: Protože $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, že aspoň jeden úhel ve čtyřúhelníku větší nebo rovný úhlu pravému.

Protože součet vnitřních úhlů v n -úhelníku je $(n - 2) \cdot 180^\circ$, je součet vnitřních úhlů ve stoúhelníku 17640° a podle **D₃** má aspoň jeden vnitřní úhel stoúhelníku aspoň 176° .

2.2.13 Dva příklady z Taovy sbírky úloh

V roce 1986 získal tehdy jedenáctiletý australský chlapec *Terence Tao* bronzovou medaili na mezinárodní matematické olympiádě, v roce 1987 mu byla udělena medaile stříbrná a v roce 1988 jako nejmladší v historii získal medaili zlatou. V roce 2006 byly „mimořádné objevy“ Terence Tao oceněny Fieldsovou medailí, nejvyšším ohodnocením výsledků dosažených v matematice, které je srovnatelné s Nobelovou cenou v matematice neudělovanou. V témže roce vydal Tao knihu o řešení matematických úloh, z níž zde uvedeme dvě ukázky.

Taylorova úloha o čtverci ([80], s. 62)

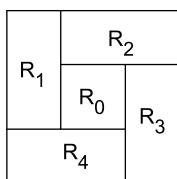
Ve čtverci jsou sestrojeny obdélníky R_1, R_2, R_3, R_4 téhož obsahu podle obr. 48. Dokažte, že čtyřúhelník R_0 je čtverec.

Uveďme nejdříve Taovo řešení.

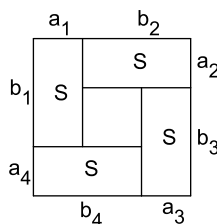
Označme délky stran „vepsaných“ obdélníků podle obr. 49.

Je-li $a_1 = a_2$, jsou všechny obdélníky shodné a pravoúhelník R_0 je čtvercem se stranou délky $b_1 - a_1$ (je-li $b_1 > a_1$).

Ukažme, že nemůže platit žádná z nerovností $a_1 < a_2, a_1 > a_2$.



Obr. 48



Obr. 49

Z obr. 49 a z podmínky, že obsahy všech obdélníků si jsou rovny, vyplývají výsledky uvedené v tabulce 3.

$a_1 < a_2 \Rightarrow b_2 > b_3$ $(a_1 + b_2 = a_2 + b_3)$	$b_2 > b_3 \Rightarrow a_2 < a_3$ $(a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3)$
$a_2 < a_3 \Rightarrow b_3 > b_4$ $(a_2 + b_3 = a_3 + b_4)$	$b_3 > b_4 \Rightarrow a_3 < a_4$ $(a_3 \cdot b_3 = a_4 \cdot b_4)$
$a_3 < a_4 \Rightarrow b_4 > b_1$ $(a_3 + b_4 = a_4 + b_1)$	$b_4 > b_1 \Rightarrow a_4 < a_1$ $(a_4 \cdot b_4 = a_1 \cdot b_1)$

Tabulka 3

Z levého sloupce tabulky vyplývá, že $a_1 < a_4$, z pravého pak $a_4 < a_1$. Předpoklad $a_1 < a_2$ vede ke sporu a nemůže nastat. Zcela stejně uvážíme, že nemůže nastat ani případ $a_1 > a_2$. Obdélníky R_1 , R_2 , R_3 , R_4 jsou shodné a úloha je vyřešena.

Pokusme se v druhém řešení vyjádřit podmínku, že pravoúhelník R_0 má sobě rovné strany. V označení podle obr. 50 (stranu čtverce považujeme za jednotkovou) můžeme ze tří vepsaných obdélníků R_1 , R_2 , R_4 tyto strany určit a jejich rovnost vyjádříme podmínkou

$$b - \frac{ab}{1-a} = \frac{ab}{1-b} - a$$

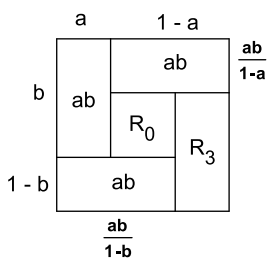
neboli

$$a + b = ab \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \right).$$

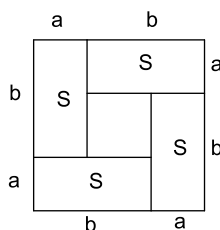
Je-li $a + b = 1$, je $1 - a = b$, $1 - b = a$ a tato podmínka je splněna.

Je-li $a + b < 1$, je $1 - a > b$, $1 - b > a$ a podmínka splněna být nemůže, právě tak, jako když je $a + b > 1$.

Obdélník R_3 , který vznikne „doplněním“ do čtverce podle obr. 50, má ovšem rovněž obsah ab .



Obr. 50



Obr. 51

Nemůžeme naši úlohu řešit následujícím způsobem?

Označme c velikost strany daného čtverce, S obsah každého z obdélníků R_1 , R_2 , R_3 , R_4 .

Protože volbou strany a_1 obdélníku R_1 jsou vzhledem k podmínkám úlohy ($a_1 + b_2 = c$, $a_2 + b_3 = c$, $\dots$, $a_1 b_1 = S$, $a_2 b_2 = S$, $\dots$) určeny jednoznačně délky stran všech dalších obdélníků, dostáváme pro každé $a < c$ jediné řešení úlohy znázorněné na obr. 51.

Srovnání dvou řešení úlohy

Mezi dosti obtížnými úlohami Taovy sbírky se vyskytuje i jedna, kterou známe z učebnice geometrie pro 8. ročník naší základní školy.

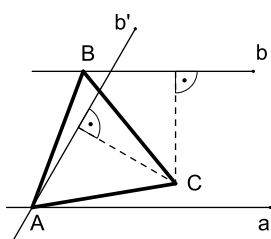
Je poučné srovnat styl výkladu řešení této úlohy od významného matematika se strohým stylem autorů učebnice.

Nejdříve uveďme text učebnice ([6], s. 67).

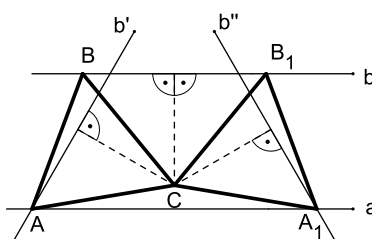
Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a , b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol A ležel na přímce a a vrchol B na přímce b .

Řešení

Rozbor (Obr. 52)



Obr. 52



Obr. 53

Předpokládáme, že jsme příklad vyřešili (obr. 52) a že $\triangle ABC$ vyhovuje podmínkám úlohy. V rovnostranném trojúhelníku ABC platí $\gamma = 60^\circ$. V otáčení $R[C; +60^\circ]$ se bod B zobrazí do bodu A a obrazem přímky b procházející bodem B je přímka b' , která prochází bodem A , je tedy $A \in a \cap b'$.

Konstrukce (Obr. 53)

1. $b'; R[C; +60^\circ] : b \rightarrow b'$
2. $A; A \in a \cap b'$
3. $B; R[C; -60^\circ] : A \rightarrow B, B \in b$
4. $\triangle ABC$

Ověření správnosti konstrukce

Bod $A \in a \cap b'$, bod B je jeho vzor v otáčení $R[C, 60^\circ]$.

Jestliže známe bod A , potom bod B dostaneme pomocí opačného otáčení k otáčení $R[C; +60^\circ]$. Protože trojúhelník ABC je rovnoramenný a jeho úhel při vrcholu C má velikost 60° , vyplývá z toho, že je rovnostranný.

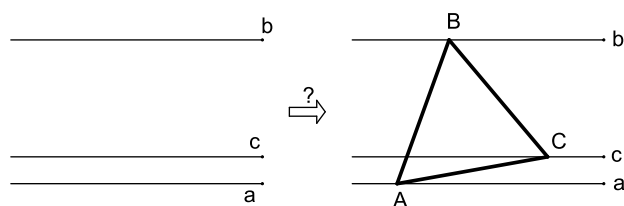
Úloha má vždy řešení, protože jestliže $a \parallel b$, potom přímky a , b' jsou různoběžné, a tedy existuje bod A i bod B . Úlohu splňuje též trojúhelník $A_1B_1C_1$.

Terence Tao postupuje takto ([80], s. 58)

Jsou dány tři rovnoběžné přímky. Sestrojte pomocí pravítka a kružítka rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy leží po řadě na daných přímkách.

Na první pohled vypadá úloha jednoduše a jasně (tak to u dobrých úloh bývá). Jakmile se však pokusíme nakreslit obrázek (zkuste to, ale nakreslete nejdříve rovnoběžné přímky), vidíme, jak ošidné ve skutečnosti je „trefit“ trojúhelník s tolika požadavky, jako je tomu u rovnostranného trojúhelníku. Vše je příliš „pevné“. Po experimentování s kružítkem, s úhlem 60° a podobně, vidíme, že by bylo třeba něco speciálního. Nicméně, pokusme se nakreslit obrázek, jak nejlépe umíme (snad můžeme nakreslit nejdříve rovnostranný trojúhelník a pak ho vygumovat) a vše označíme (obr. 54, označení zde volíme tak, aby bylo v souladu s označením v naší učebnici).

Někoho by mohlo napadnout něco vypočítat. To je možné, ale není to dobré. Skončíte patrně u vzorce pro vzdálenost bodů a to není nejlepší (a jistě ne nejgeometritější) cesta jak úlohu řešit. Tento způsob raději opustíme.



Obr. 54

Ovšem, standardní způsob řešení konstrukčních úloh je vzít něco neznámého (bod, přímku, trojúhelník nebo něco jiného) a určit možné polohy nebo jiné konstruovatelné vlastnosti tohoto útvaru.

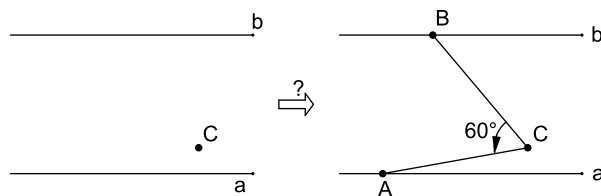
Než to však učiníme, podívejme se na obrázek a zkusme, co můžeme dělat. Jedna věc, kterou snad uvidíme je, že máme-li jeden rovnostranný trojúhelník, který je řešením, můžeme ho posunout podél přímek a požadavky úlohy budou stále splněny. Takže, např. pro trojúhelník ABC poloha bodu C na přímce c je zcela libovolná. Ovšem polohy bodů A , B již závisí na poloze bodu C . Umístíme-li bod C libovolně, nic neztratíme, starat se musíme pouze o body B a A . Přímka c již není důležitá.

Ukotvením bodu C je ovšem již trojúhelník poněkud vázán. Toto omezení znamená pro body A , B omezené množství poloh. Jakých – to ještě neznáme.

Rovnostranný trojúhelník má pouze dva stupně volnosti: orientaci a velikost. Má však dvě ukotvení: jeden vrchol, B , musí ležet na přímce b , další vrchol A musí ležet na přímce a . To by teoreticky mělo stačit k jeho umístění, ale s tak komplexním pojmem jako trojúhelník je těžké vidět jak pokračovat. Co však můžeme, je přejít od neznámého k jinému snáze postižitelnému neznámému. Nyní je neznámý rovnostranný trojúhelník. A co něco jednoduššího? Jednodušší geometrický objekt je bod. Takže bychom mohli pracovat např. s bodem B , místo

s celým trojúhelníkem. Protože je vázán na přímku b , má jen jeden stupeň volnosti. Co znamená ukotvení na B ? Rovnostranný trojúhelník se základnou AB musí mít třetí vrchol (tj. A) na a . Toto ukotvení je složité a stále zahrnuje rovnostranný trojúhelník. Je zde snazší cesta jak reprezentovat A vzhledem k bodům B, C ? Ano: A je obraz bodu B v rotaci o 60° kolem bodu C (v kladném či záporném smyslu). Problém se zredukoval takto:

Je dán bod C a rovnoběžné přímky a, b , které bodem C neprocházejí. Určete bod B na přímce b tak, aby v rotaci o 60° se středem v bodě C padl jeho obraz na přímku a (obr. 55).



Obr. 55

Nyní máme neznámý jen bod B . Je tedy méně stupňů volnosti a otázka by měla být jednodušší. Chceme, aby bod B měl tyto vlastnosti:

- a) B leží na b .
- b) V rotaci o 60° kolem bodu C přejde bod B na přímku a .

Podmínku b) nemůžeme využít, obraťme ji proto:

- b') B leží na obrazu přímky a v rotaci opačné k rotaci o 60° se středem v bodě C .

To znamená, že B leží na a' , kde a' je obraz přímky a v rotaci opačné k rotaci o 60° (v kladném nebo záporném smyslu) se středem v bodě A .

Takže dostáváme

- a) B náleží přímce b ,
- b) B náleží přímce a' ,

jinými slovy B je průnik přímek b a a' . A je to! Sestrojili jsme bod B a trojúhelník lehce dokončíme.

Pro úplnost uveďme celou konstrukci:

Zvolme na přímce c libovolný bod C a otočme kolem tohoto bodu přímku a o 60° (v kladném či záporném smyslu: pro bod B budeme mít s každým bodem C dvě řešení). B je průnik této otočené přímky s přímkou b . Otočme bod B opačně o 60° , abychom získali bod A .

Ještě poznamenejme, že stejná konstrukce řeší úlohu i v případě, že přímky nejsou rovnoběžné (pokud nesvírají úhel 60°).

Srovnáme-li dvě zde uvedená řešení úlohy o trojúhelníku, vidíme že naši autoři v podstatě uvádějí hotové řešení problému. Typické je, že v našich učebnicích se prakticky nevyskytují obrázky, které by znázorňovaly výchozí situaci. Tao se naproti tomu snaží vést řešitele přirozeným způsobem k objevu řešení.

2.2.14 Výška a těžnice v trojúhelníku

Úloha 1 *Dokažte, že platí: Jestliže výška CP a těžnice CO dělí úhel ACB trojúhelníka ABC na tři shodné části, je ABC pravouhlý trojúhelník s přeponou AB (obr. 56).*

S úlohou mám dosti bohaté zkušenosti; referoval jsem o přístupech k jejímu řešení na konferenci v Belarii [47] a vzbudila mimořádný

ohlas nejen u nás, ale například i Polsku ([48], [16]). Uvedme zde stručně několik jejích řešení. Snad v každé skupině méně vyspělých řešitelů (úlohu jsem řešil i se studenty) se našel odvážlivec, který tvrdil: *To nejde dokázat!* Na otázku *Proč* obvykle odpovídal: *V pravoúhlém trojúhelníku s ostrými úhly 40° a 50° dělí těžnice a výška ke straně AB úhel ACB na úhly 40° , 10° , 40° a tedy nikoliv na stejné části* (obr. 57). Tento řešitel se ovšem mylí, neboť nerozlišuje větu a větu obrácenou.

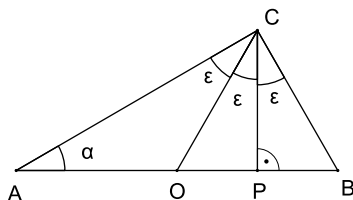
Nejdříve uvedu své řešení.

1. řešení

Protože bod O je středem strany AB a bod P středem úsečky OB , je $|AO| = 2|OP|$ (obr. 56). Protože osa úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru přilehlých stran (úloha 2.2.6), je

$$\frac{|OP|}{|AO|} = \frac{|CP|}{|AC|} = \frac{1}{2} = \sin \alpha,$$

a tudíž $\alpha = 30^\circ$, $2\epsilon = 60^\circ$ a $|\angle ACB| = 90^\circ$.

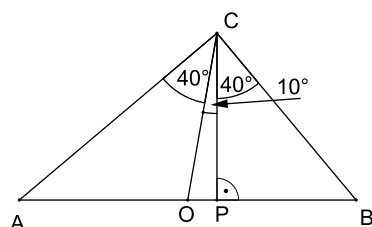


Obr. 56

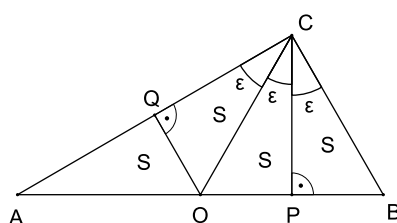
2. řešení (Jaroslav Švrček)

Je-li Q pata kolmice sestrojené z bodu O na stranu AC trojúhelníku ABC , jsou trojúhelníky COP a COQ shodné (podle věty usu) a troj-

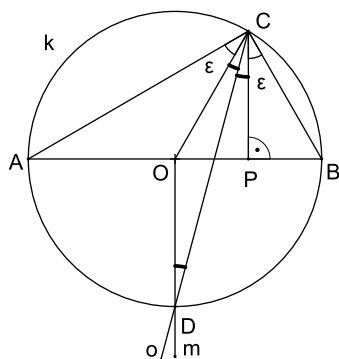
úhelníky BPC , OPC , OQC , OQA mají též obsah S (obr. 58). To ovšem znamená, že Q je střed strany AC , trojúhelníky AQO , CQO jsou shodné a $\angle OAQ$ je shodný s úhlem OCQ . Z pravoúhlého trojúhelníku APC vyplývá, že $\epsilon = 30^\circ$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý.



Obr. 57



Obr. 58



Obr. 59

3. řešení (Karel Horák)

Opišme trojúhelník ABC kružnici k . Osa m strany AB se protne s osou o úhlu ACB v bodě D kružnice k . Protože jsou přímky CP a OD rovnoběžné a osa o půlí úhel OCP (obr. 59), je $|OD| = |OC|$. Protože na přímce m leží střed kružnice opsané trojúhelníku ABC ,

je jím právě bod O . Kružnice k má tedy průměr AB a úhel ACB je podle Thaletovy věty pravý.

4. řešení (*Svatopluk Zachariáš*)

Při označení podle obr. 60 platí

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{1}{4}c \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} 2\epsilon = \frac{3}{4}c. \quad (38)$$

Protože

$$\operatorname{tg} 2\epsilon = \frac{2 \operatorname{tg} \epsilon}{1 - \operatorname{tg}^2 \epsilon},$$

je

$$\frac{3}{4}c = \frac{\frac{1}{2}c}{1 - \frac{c^2}{16}}$$

neboli

$$c^2 = \frac{16}{3}.$$

Tato rovnost ovšem může být ovšem interpretována jako tvrzení Euklidovy věty o výšce pro trojúhelník ABC . Podle věty obrácené k Euklidově větě o výšce je tedy trojúhelník ABC pravoúhlý.

5. řešení (*Andrea Betlachová*)

Z rovností (37) a (38) dostaneme vztah

$$\frac{\sin 2\epsilon}{\cos 2\epsilon} = \frac{3 \sin \epsilon}{\cos \epsilon},$$

z něhož použitím vzorců

$$\begin{aligned}\sin 2\epsilon &= 2 \sin \epsilon \cos \epsilon \\ \cos 2\epsilon &= \cos^2 \epsilon - \sin^2 \epsilon\end{aligned}$$

po úpravě dostaneme

$$\cos^2 \epsilon = 3 \sin^2 \epsilon. \quad (39)$$

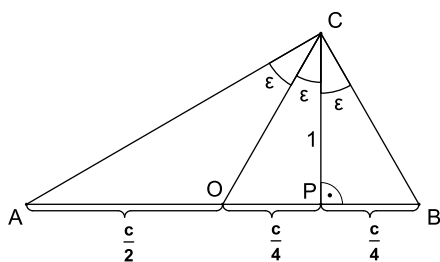
Protože

$$\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon = 1,$$

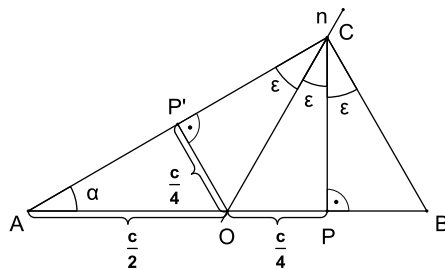
můžeme rovnici (39) upravit na tvar

$$4 \sin^2 \epsilon = 1,$$

jejíž kladný kořen je $\frac{1}{2}$. Je tedy $\epsilon = 30^\circ$.



Obr. 60



Obr. 61

6. řešení (Jan Houska)

Protože v osově souměrnosti podle osy n je obrazem bodu P bod P' strany AC je $\alpha = 30^\circ$, neboť $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (obr. 61). Je tedy podle věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku APC $\epsilon = 30^\circ$ a $AC \perp BC$.

Co je charakteristické pro proces řešení matematických úloh? Co mne vedlo k tomu, všimnout si osy úhlu v trojúhelníku ACP v prvním řešení, ale nenapadlo mě vidět v této konstrukci osovou souměrnost jak to učinil, v mnohem lepším přístupu Jan Houska v řešení šestém? Proč si všiml Karel Horák kružnice opsané trojúhelníku v řešení třetím, ale Jaroslav Švrček obsahů trojúhelníků? Jak přišli Svatopluk Zachariáš a Andrea Petlachová na nápad „zapojit“ do řešení goniometrické funkce? V otázkách, na něž neumím odpovědět, bychom mohli pokračovat. Snad však je možné si vzít jedno poučení. Řešení úloh vychází z intuice, zkušeností a znalostí řešitele a z jeho schopnosti vzpomínat, kombinovat, uvažovat, ... Rozhodně není řešení úloh pouhou aplikací logiky. K řešení úlohy výrazně přispívá vhodně nakreslený obrázek.

Při řešení naší úlohy jsme dokázali nejen, že je trojúhelník ABC pravoúhlý, ale že má vnitřní úhly 30° a 60° . Nebylo by možné předpoklady úlohy oslabit, např. tím, že budeme požadovat pouze shodnost „krajních“ úhlů?

Dostáváme se tak k nové úloze.

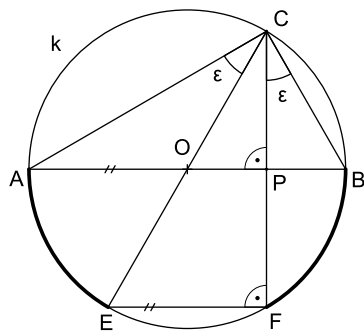
Úloha 2 V trojúhelníku ABC ($|AC| \neq |BC|$) označme CO těžnicí a CP výšku z vrcholu C . Jsou-li úhly ACO a PCB shodné a je-li výška CP částí vnitřku úhlu ACB , je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB . Dokažte.

Horákovo řešení úlohy 1 můžeme považovat za první řešení úlohy 2.

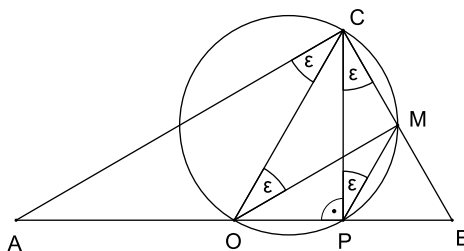
2. řešení

Opišme trojúhelníku ABC kružnici k a označme její průsečíky s přímkami OC a CP po řadě E , F (obr. 62). Protože úhly ACE a BCF jsou shodné, jsou shodné i kružnicové oblouky AE a BF . Přímka EF je tedy rovnoběžná s přímkou AB a trojúhelník EFC je pravoúhlý.

Protože kružnice k je opsaná trojúhelníku ABC , je i kružnicí opsanou trojúhelníku EFC , je její střed v bodě O . To ovšem znamená, že k je Thaletova kružnice s průměrem AB a trojúhelník ABC je pravoúhlý.



Obr. 62



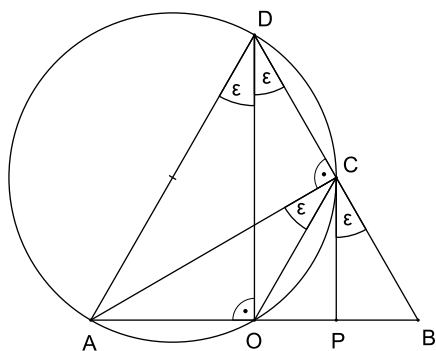
Obr. 63

3. řešení (Jaroslav Švrček)

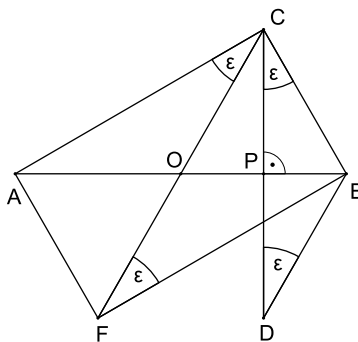
Označme O , M po řadě středy stran AB , BC trojúhelníku ABC (obr. 63). Úhly ACO a MOC jsou shodné (střídavé úhly), s nimi jsou shodné i úhly ACO a PCB (podle předpokladu úlohy) a CPM (M je střed přepony pravoúhlého trojúhelníku CPB). Kružnice, která prochází body C , M , P prochází i bodem O . Protože je úhel CPO pravý, je pravý i úhel OMC . To ovšem znamená, že $AC \perp BC$.

4. řešení (Aart Goddijn)

Prodlužme stranu BC trojúhelníku ABC do bodu D tak, aby $|AD| = |BD|$ (obr. 64). Z konstrukce plyne, že úhly ADO , ODB , PCB a ACO jsou shodné a kružnice opsaná trojúhelníku AOD prochází i bodem C . Protože $AO \perp OD$, je $AC \perp BC$.



Obr. 64



Obr. 65

5. řešení (*Milan Hejný*)

Označme D obraz bodu C ve středové souměrnosti se středem P a F obraz téhož bodu ve středové souměrnosti se středem O (obr. 65). Protože jsou úhly ACO , BFO , BCP , PDB shodné, leží na kružnici opsané trojúhelníku FCB i bod D . Její střed je průsečíkem os úseček CD a CF , tedy bod O . Úsečka AB je v důsledku toho jejím průměrem a úhel ACB je pravý.

6. řešení (*Mária Bakó*)

V označení podle obr. 66 platí:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{c}{2} - y, \operatorname{tg}(\epsilon + \delta) = y + \frac{c}{2}, \operatorname{tg} \delta = y.$$

Aplikujeme-li na tyto výsledky vzorec

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

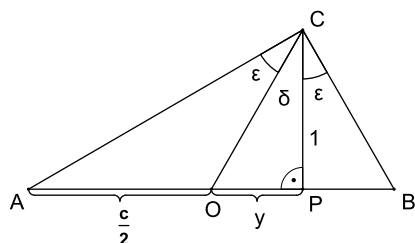
dostáváme pro y rovnici

$$y + \frac{c}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{1 - y\frac{c}{2} + y^2},$$

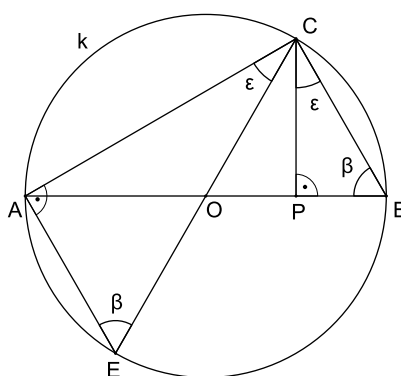
pro jejíž kladný kořen platí

$$y^2 = \frac{c^2}{4} - 1.$$

To ovšem znamená podle Pythagorovy věty pro trojúhelník OPC , že $OC = \frac{c}{2}$ a trojúhelník ABC je pravoúhlý.



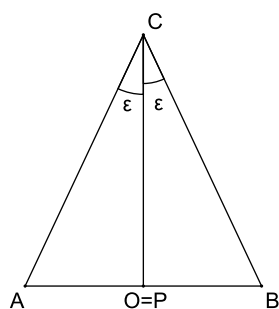
Obr. 66



Obr. 67

7. řešení (Stefan Turnau)

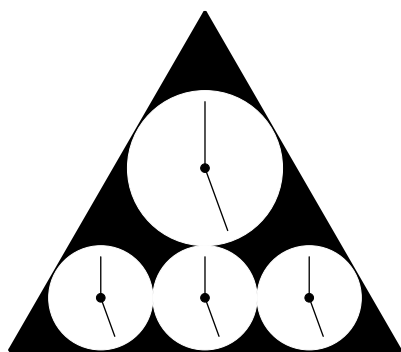
Opišme trojúhelníku ABC kružnici k a označme E její průsečík s přímkou OC (obr. 67). Protože úhly AEC a ABC jsou obvodové úhly příslušné k témuž oblouku AC kružnice k , jsou shodné a trojúhelníky AEC a PBC jsou podobné. Trojúhelník ACE je tedy pravoúhlý a střed kružnice k leží na jeho přeponě EC a ose úsečky AB , tedy v bodě O . To ovšem znamená, že $AC \perp CB$.



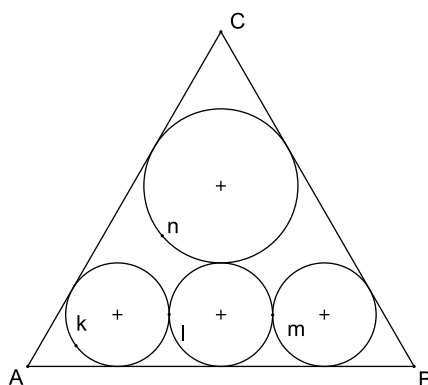
Obr. 69

2.2.15 Jak se rodí úloha

Před časem jsem si všiml na hradeckém nádraží loga jakési hodinářské firmy znázorněné na obr. 70. Jak takové logo nakreslit? Tato otázka může být formulována jako geometrická úloha.



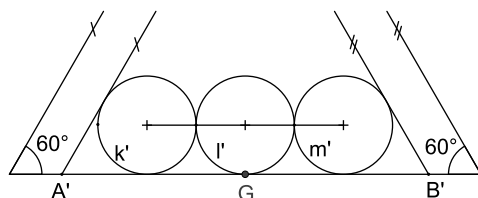
Obr. 70



Obr. 71

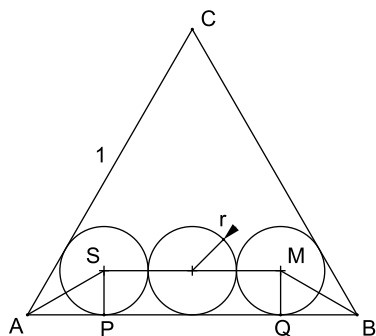
Úloha 1 *Rovnostrannému trojúhelníku ABC „vepište“ kružnice k , l , m , n podle obr. 71. Kružnice k , l , m jsou shodné.*

Úlohu můžeme řešit např. tak, že sestrojíme libovolné shodné kružnice k' , l' , m' „v řadě“ a „opíšeme“ jim rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$ (obr. 72). Tím je ovšem sestrojen obraz části řešení naší úlohy v určité podobnosti a úlohu můžeme snadno dokončit.

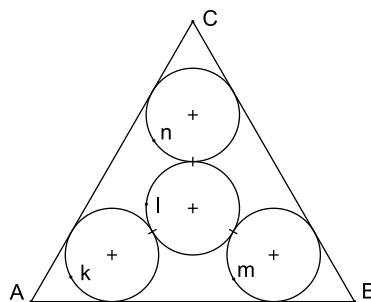


Obr. 72

Poloměr kružnice k , l , m můžeme ovšem vypočítat a sestrojit pravítkem a kružítkem. Považujeme-li délku strany AB trojúhelníku ABC za jednotku, platí v označení podle obr. 73 $|AP| = |BQ| = r\sqrt{3}$, $|AB| = |AP| + |PQ| + |QB|$. Je tedy $2r\sqrt{3} + 4r = 1$, $r = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$.



Obr. 73



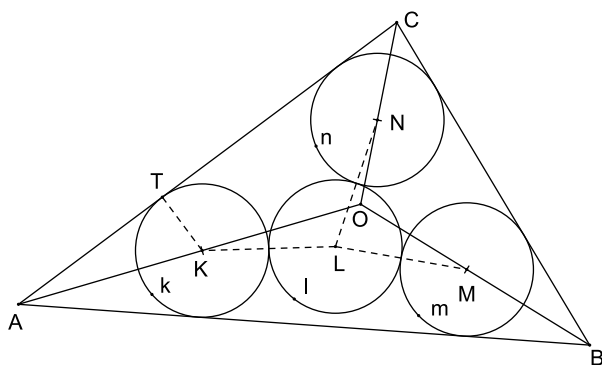
Obr. 74

Kdyby měly být kružnice k , l , m , n shodné, museli bychom vynechat např. požadavek, aby se kružnice l dotýkala úsečky AB . Dostáváme se tak k nové úloze.

Úloha 2 *Rovnostrannému trojúhelníku „vepište“ shodné kružnice k , l , m , n podle obr. 74.*

Tato úloha je ovšem velmi jednoduchá. Stačí si uvědomit, že body dotyku kružnic k , m , n s kružnicí l jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku a úlohu můžeme řešit podobností.

Mnohem zajímavější úlohu dostaneme, nebude-li trojúhelník ABC rovnostranný.

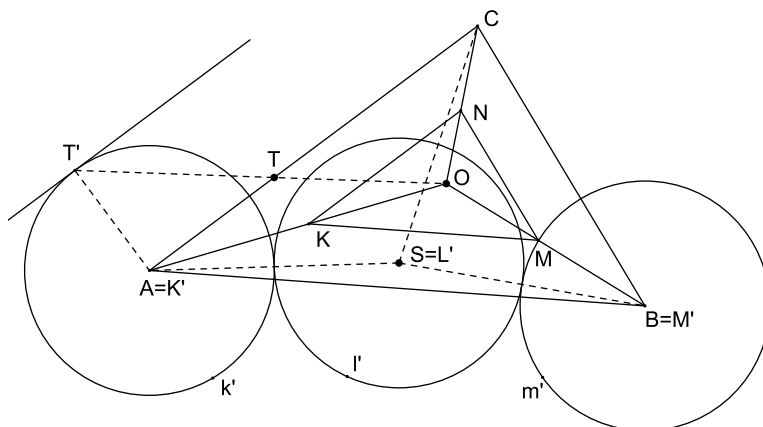


Obr. 75

Úloha 3 *V libovolném trojúhelníku sestrojte shodné kružnice k , l , m , n tak, že každá z kružnic k , m , n se dotýká dvou stran trojúhelníku a s kružnicí l má vnější dotyk.*

Naznačme řešení této úlohy, která byla zadána v naší matematické olympiádě ([92], s. 169). Střed K , M , N kružnic k , m , n leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Tyto osy se protínají v bodě O , který je středem kružnice trojúhelníku ABC vepsané (obr. 75). Vhodná stejnolehlost se středem v bodě O převádí body K , M , N do vrcholů A , B , C a střed L kružnice l do středu S kružnice trojúhelníku

ABC opsané, neboť platí $|KL| = |ML| = |NL|$. Můžeme tedy sestrojit např. obraz k' kružnice k v uvažované stejnoolehlosti (její poloměr je $\frac{1}{2}|AS|$). Protože např. obraz $A'C'$ strany AC v této stejnoolehlosti se dotýká kružnice k' v bodě T' , můžeme sestrojit bod T dotyku kružnice k se stranou AC , a tak celou konstrukci dokončit. (obr.76)



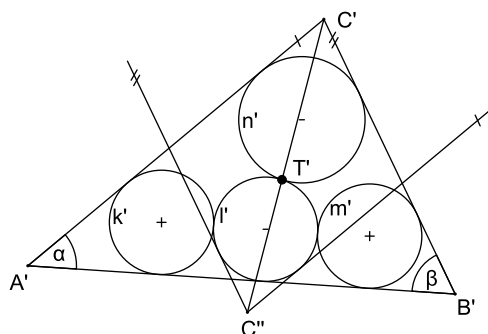
Obr. 76

Modifikace úlohy 1 pro libovolný trojúhelník není příliš zajímavá.

Úloha 4 V libovolném trojúhelníku ABC sestrojte shodné dotýkající se kružnice k, l, m , které se dotýkají strany AB a kružnici n , která má s některou z kružnic k, l, m vnější dotyk a dotýká se stran AC, BC .

Sestrojme opět obraz celé situace v nějaké podobnosti. Shodným kružnicím k', l', m' „v řadě“ opišme trojúhelník $A'B'C'$ podobný danému trojúhelníku ABC (obr. 77). Dotýká-li se kružnice n' kružnice l' v bodě T' , je tento bod středem stejnoolehlosti, která převádí kružnici n' do kružnice l' . Obrazy tečen $C'A', C'B'$ kružnice n' jsou tečny kružnice l' a jejich průsečík C'' je obrazem bodu C' v této stejnoolehlosti.

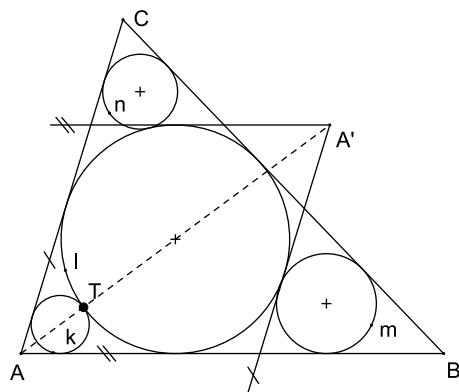
Bod T' dotyku kružnic l' a n' je tedy průsečík přímky $C'C''$ s kružnicí l' . Podobně bychom uvažili možnosti dotyku kružnic n' po řadě s kružnicemi k' nebo m' .



Obr. 77

Další modifikace úlohy o čtyřech kružnicích a trojúhelníku může znít takto:

Úloha 5 V libovolném trojúhelníku ABC sestrojte kružnici l trojúhelníku vepsanou a kružnice k , m , n , které s ní mají vnější dotyk a každá se dotýká dvou stran trojúhelníku ABC (obr. 78).

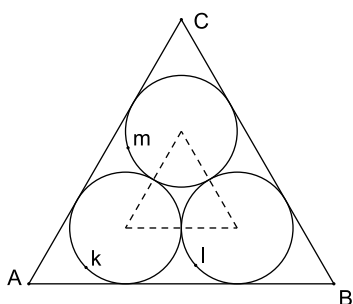


Obr. 78

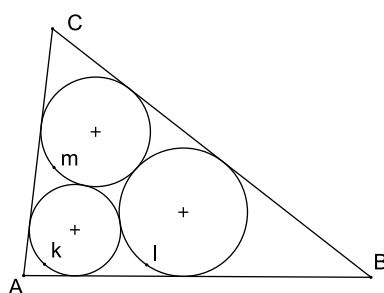
Ke kružnici l vepsané trojúhelníku ABC můžeme sestrojit každou z kružnic k, m, n pomocí stejnolehlosti popsané v úloze 4. Pro kružnici k je konstrukce bodu dotyku T kružnic k, l naznačena v obr. 78.

Jak se bude modifikovat úloha 1 pro tři kružnice?

Úloha 6 *Rovnostrannému trojúhelníku „vepište“ tři kružnice tak, aby se každá dotýkala dvou stran trojúhelníku a měla s každou ze zbývajících kružnic vnější dotyk (obr. 79).*



Obr. 79



Obr. 80

Řešení této úlohy je analogií řešení úlohy 1. Stačí třem shodným dotýkajícím se kružnicím „opsat“ trojúhelník a získat tak obraz hledané situace v podobnosti. Můžeme ovšem poloměr hledaných kružnic vypočítat a sestrojit. Považujeme-li stranu trojúhelníku za jednotku, je $r = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

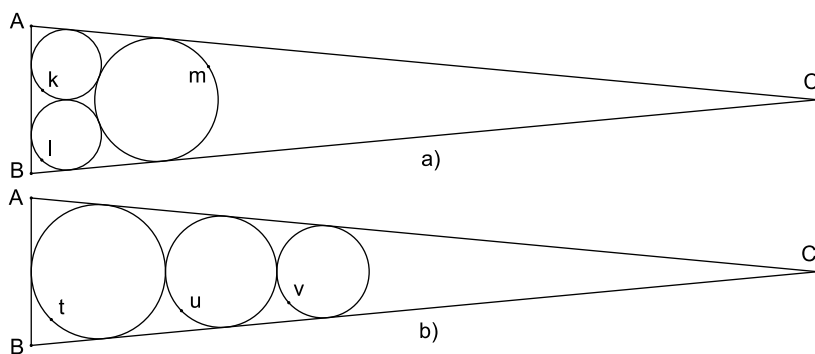
Máme-li „vepsat“ do libovolného trojúhelníku tři kružnice s vnějším vzájemným dotykem, dostaneme novou úlohu.

Úloha 7 *V libovolném trojúhelníku ABC sestrojte kružnice k, l, m tak, aby se každá dotýkala dvou stran trojúhelníka a měla vnější dotyk s každou ze zbývajících kružnic (obr. 80).*

V roce 1803 došel k této úloze Ital *Gian Francesco Malfatti* při řešení problému

Jak vyrobít z mramoru, který má tvar kolmého trojbokého hranolu tři válcovitá tělesa s maximálním objemem.

Ačkoliv představa, že 3 kruhy s celkovým maximálním obsahem můžeme z trojúhelníku vytvořit podle obr. 80 je velmi sugestivní, trvalo 126 let než *Michail Goldberg* dokázal, že je tato hypotéza mylná. Stačí si představit situaci na obr. 81: kruhy na obr. b) jistě mají celkový obsah větší než kruhy na obr. a) sestrojené v souladu s textem úlohy 7.



Obr. 81

Přesto, že je zdánlivě tato úloha prostá, nepodařilo se mi ji vyřešit. Její řešení vyžaduje znalost hlubších geometrických souvislostí a je uvedeno např. v Hadamardově geometrii ([1], s. 283). Malfattiho problém byl vyřešen teprve v roce 1990.

Představivost jako zásobník možného, hypotetického, toho co nenastalo a možná ani nenastane, avšak mohlo by nastat ... Dosažení tohoto zálivu potenciální násobnosti je nezbytné pro každou formu poznání. Básníková a v některých rozhodných okamžicích také vědcova mysl funguje podle principu spojování představ, což představuje nejrychlejší systém spojení a výběru mezi nekonečnými formami možného a nemožného. Fantazie je svým způsobem druh ... stroje, který uvažuje všechny možné kombinace a vybírá ty, které odpovídají nějakému cíli nebo jsou prostě nejzajímavější, nejpůsobivější, nejzábavnější.

Italo CALVINO ([12], s. 132)

Matematik, podobně jako malíř nebo básník je tvůrcem vzorců. Jestliže jsou jeho vzorce trvanlivější než ty jejich, je to proto, že jsou vytvořeny z idejí (myšlenek). Malíř vytváří vzorce z tvarů a barev, básník ze slov ... Matematikovy vzorce, stejně jako vzorec malíře nebo básníka musí být krásné; ideje, stejně jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem: ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa.

Matematika se vyznačuje nejdůkladnější a nejúžasnější technikou a skýtá s ničím nesrovnatelné příležitosti rozvinout čistě odborné, řemeslné dovednosti.

H. G. HARDY ([32], s.77, 74, 78)

2.3 Pohled žákovský

Na řadě příkladů z předchozích odstavců jsem se snažil ukázat, že podstatnou složkou řešení úloh je tvořivost, dobré nápady, umění vidět souvislosti. V prvních dvou tématech této kapitoly budeme sledovat z těchto hledisek práce dětí v předškolním věku a na začátku a konci povinné školní docházky.

2.3.1 Dokresli obrázek

Dětem dvou mateřských škol v nejvyšším oddělení v Hradci Králové a v Chrudimi jsme individuálně zadali úkol:

Dokresli obrázek (obr. 1).

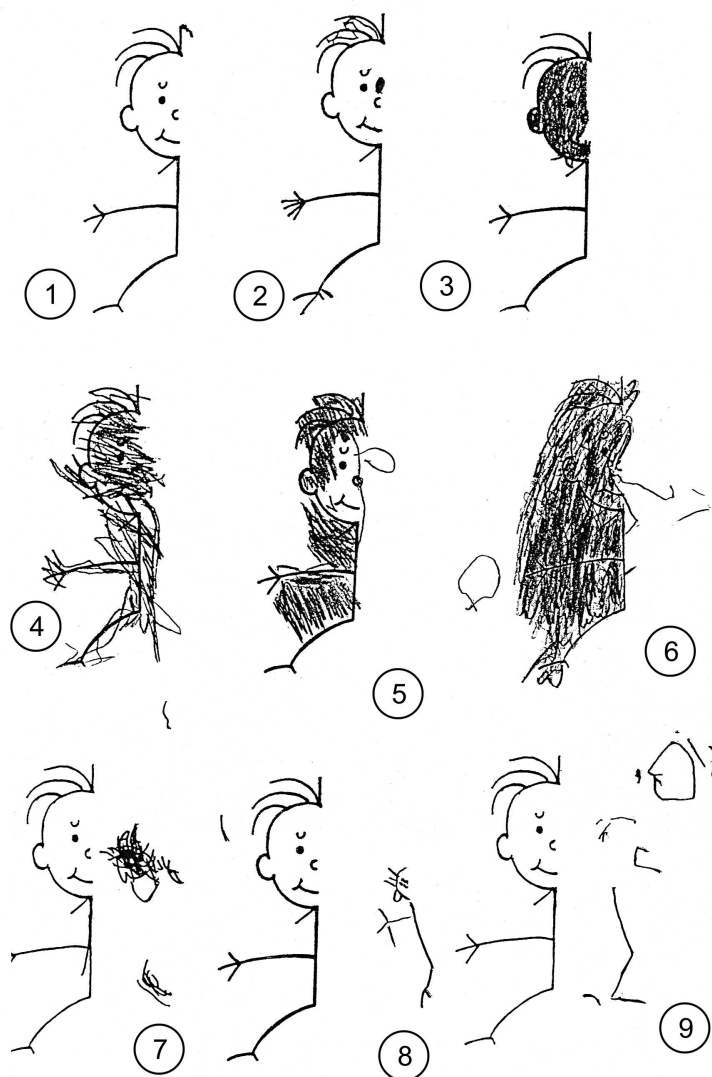


Obr. 1

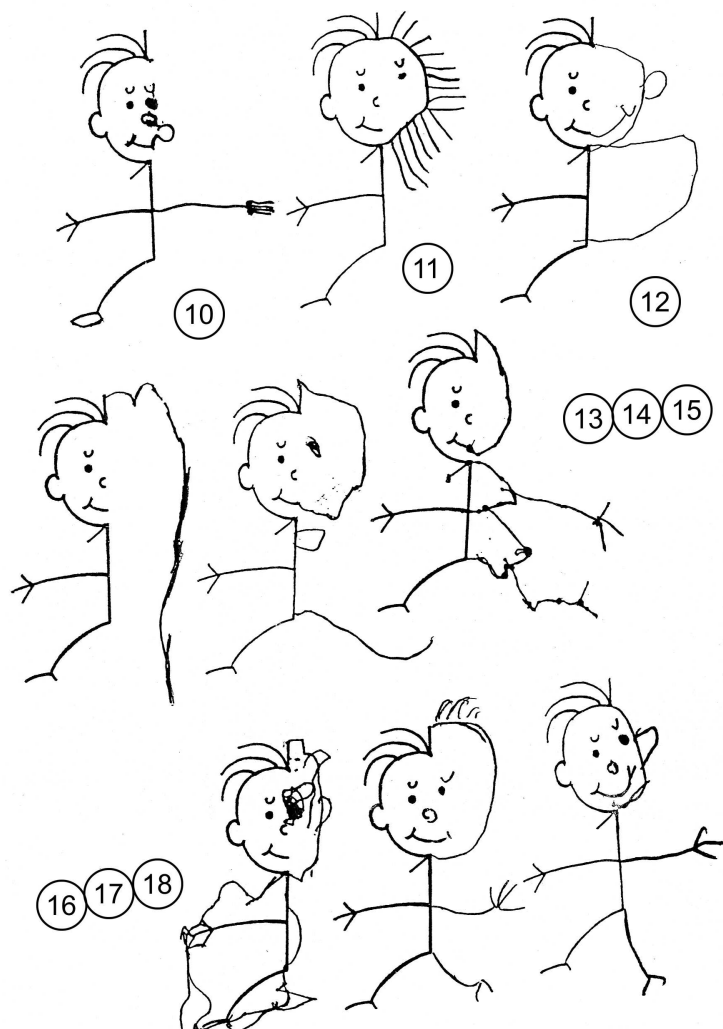
Na dětské dotazy týkající se úkolu, který mají řešit, jsme konkrétně neodpovídali, jen jsme znovu zdůrazňovali, že mají dokreslit obrázek. Záměrně jsme se vyhýbali návodu, že mají dokreslit panáka nebo že mají na druhou stranu obrázku nakreslit totéž, co je na straně levé. Jeden z našich dílčích problémů, který jsme sledovali, byla otázka,

kdy dítě pojme obrázek globálně, kdy, geometricky řečeno, přejde do druhé poloroviny. Z 36 výsledků, které jsme získali, „zůstalo v levé polovině“ 6 dětí (figurky 1, ..., 6 (obr. 2)). Klárka (1) dokresluje pouze kousek vlasů, Lucinka (2) pečlivě přikresluje prsty na noze i na ruce, druhé oko a vlasy. Zajímavé je, že Dagmar (3) vybarvuje pouze hlavu, která je plošná, na „lineárních“ částech obrázku nemá co vybarvovat. Odvážně vybarvují, patrně však záměrně jen levou polovinu, Michal, Jan a Kačka, kteří patří k našim nejmladším spolupracovníkům (kresby 4, 5, 6 (obr. 2)). Do druhé poloroviny se odvážil vstoupit velmi nesměle Tomášek (7). Kristýnka překresluje poměrně přesně celého „půlpanáčka“ (8). Čtyřletý Daniel nakreslil, jak panáček odchází pryč (9), jakoukoliv komunikaci o obrázku však odmítá.

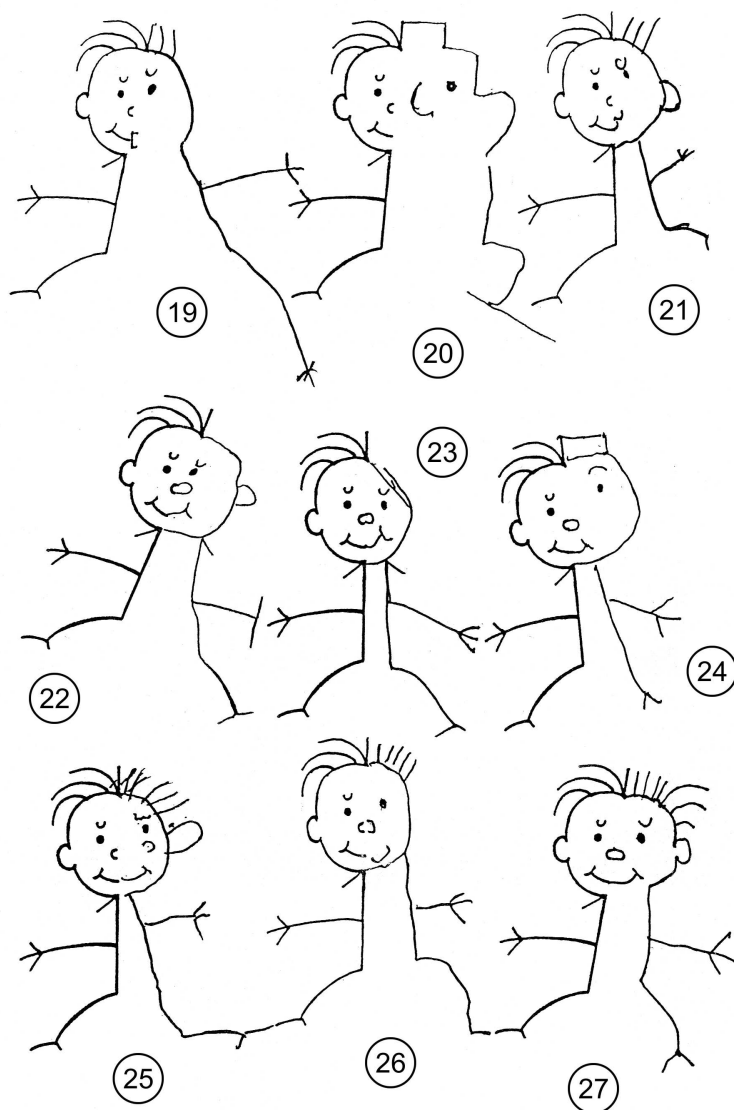
Kresby 10, ..., 18 (obr. 3)) mají tělo panáčka ve tvaru úsečky. Očekávali jsme, že to bude osa souměrnosti obrázku. Jak byl náš názor mylný, vidíme z galerie všech 36 postavíček. Pětiletý Nikolka (10) ovšem symetrii cítí a soustředí se na pečlivě provedenou ruku, čtyřletá Jana (11) se věnuje pečlivému dokreslování vlasů, Kačenka (12) nakreslila panáčkovi mohutné „břícho“ – jak se sama vyjádřila. Markétka (13) cítí potřebu kreslit v pravé části obrázku, je nejistá a končí prohlášením „já to ale neumím“. Míša a Vašek kreslí figurky v živém pohybu, s minimální mírou souměrnosti (14, 15). Trojici 16, 17, 18 můžeme interpretovat jako taneční vystoupení s mikrofonom. Pro obrázky 19–27 (obr. 4)) je charakteristická druhá svislá linie, která s porušením symetrie navozuje neobyčejně výraznou animaci postavíček (21, 22, 27). Rozpolcené bytosti se povedly Lence a Lukáškově (19, 20). Přitom Lenka kreslí téměř celý obličej do původní poloviny obrázku, Lukášek kreslí nejen druhé oko, ale i mohutný druhý nos. Šibalství vyjádřili ve svých kresbách Martin a Tereza (23, 27). To jsou dokonalé figurky. Terezčín panáček je kreslen s neobyčejným citem pro souměrnost: pěkně vykreslený obličej, souměrné vlasy i končetiny. Jediný Dalibor (28, obr. 5)) vyjádřil explicitně, že jde o panáčka, všechny



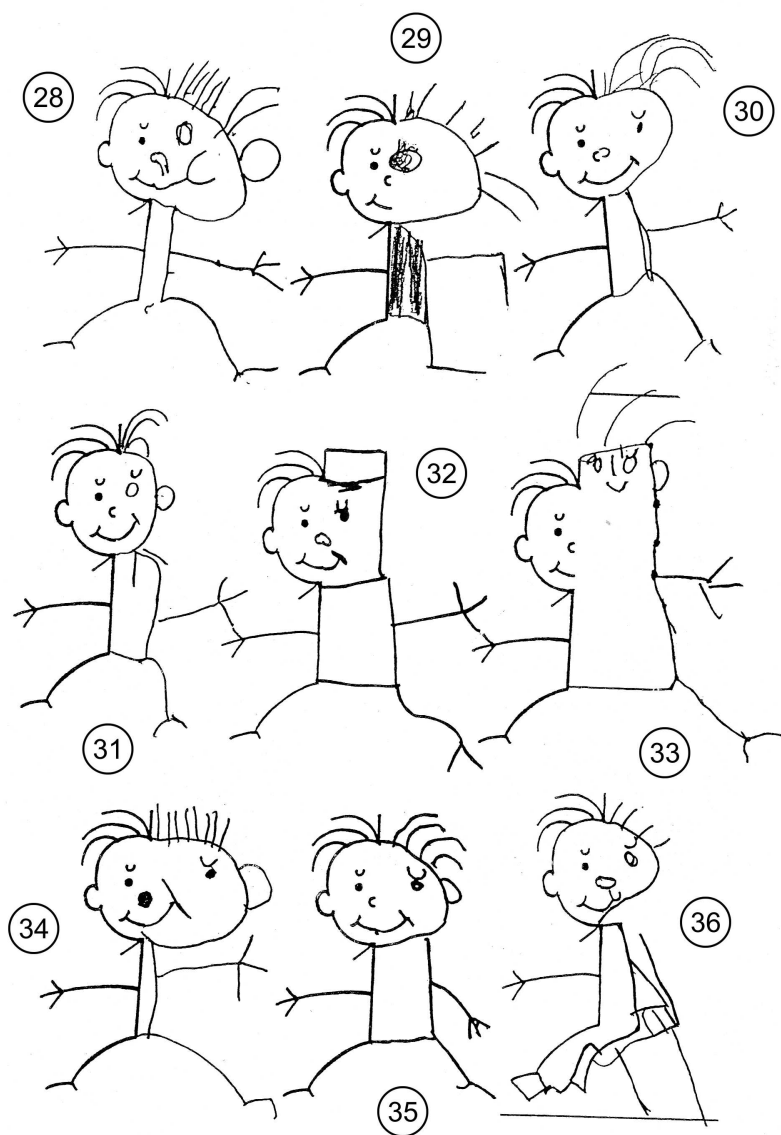
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

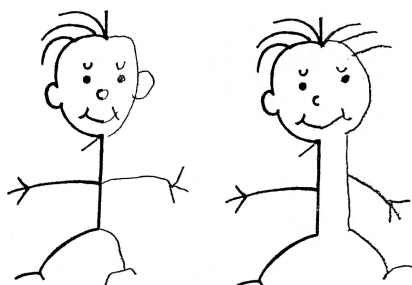
další kresby mají tělo kreslené jako uzavřenou oblast, většinou ve tvaru čtyřúhelníku. Krásné živé typy zobrazila Peťa (30) a Jakoubek (35). Pouze u dvou figurek se objevují klobouky (32 a 33), poslední klobouk se ovšem přeměnil v nový obličej. Jediný šestiletý Kubík panáčka posadil (36).

Podle našeho názoru se v obrazech projevila neobyčejně veliká míra tvořivosti. Na stejný podnět reagují různé děti různě, podle svého založení a úrovně kreslířské zručnosti. Charakteristická je výrazná animace kreseb, strohá geometrická figurka ožila a je postavičkou dětského světa.

Jak se bude dále vyvíjet dětská kresba na prvním stupni základní školy?

Abychom získali odpověď na položenou otázku, zařadili jsme v únoru stejnou úlohu na dokreslení obrázku v první až páté třídě jedné základní školy v Hradci Králové.

Výsledky byly překvapující. Dětské kresby postrádaly rysy tvořivosti a lze je rozdělit do dvou přibližně stejně početných skupin: postavy s tělem ve tvaru úsečky a postavy s tělem ve tvaru dvou úseček (obr. 6).



Obr. 6

Je možné, že již za půl roku školní docházky je dítě přeškolené na přízpůsobivého vykonavatele byť jen tušených úkolů?

Tvořivost je patrně do značné míry člověku geneticky dána, nelze ji vypěstovat. Lze ji však při vhodné péči kultivovat. Mnohé předměty, mezi něž patří např. matematika, k tomu poskytují dostatek příležitostí – a to od prvního ročníku školní docházky. Zdá se však, že tvořivost, kterou si přináší dítě z předškolního věku, škola spíše tlumí. Prostředí přízpůsobivého plnění rutinních úkolů, reprodukční charakter výuky protkaný sítí formalizmů k tomu poskytuje úrodnou půdu. Snažme se tuto stránku naší školy systematicky eliminovat.

Na ztrátu výtvarné tvořivosti v naší škole upozorňuje např. i výtvarník *Adolf Born: Většina dětí maluje bezvadně. S tím nastává konec, jakmile je škola dezorientuje* [26].

Dílčí studie o geometrické pohledu na dětskou kresbu jsme publikovali v pracích [49] a [50].

2.3.2 Dvě netradiční konstrukce

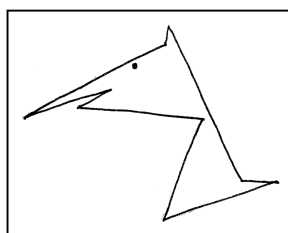
Řešení úloh je významné i pro zavádění pojmů. Dvěma úlohami řešenými žáky osmých tříd chci ukázat, že žák je schopný na základě představ pracovat i s pojmy, které nebyly explicitně zavedeny, např. definicemi.

Úloha 1 *Nakreslete mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho vnitřku (vnějšku) není vidět žádná jeho strana celá.*

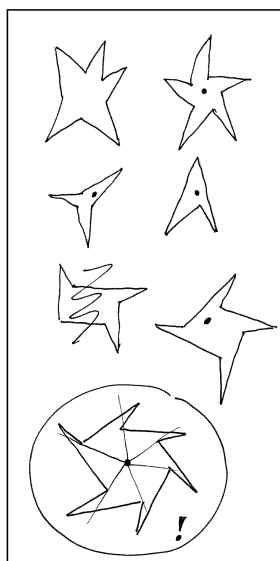
Žádný z žáků se nepozastavoval nad termíny bod vnitřku nebo vnějšku mnohoúhelníku, správně interpretovali i formulaci *strana je (není) vidět celá*. Žáci základní školy se vždy s velkým zaujetím pustili do experimentování a nejbystřejší po delší či kratší době řešení první

části úlohy obvykle našli. Starší žáci častěji po několika neúspěšných pokusech docházeli k závěru: *Takový mnohoúhelník neexistuje.*

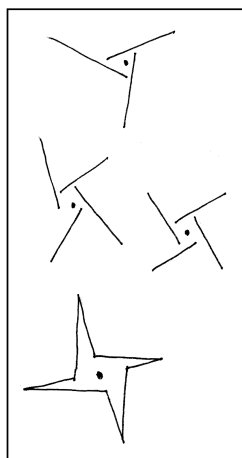
Běžná chyba při řešení úlohy spočívala „v dílčím pohledu“. Např. žák Petr úspěšně sestrojil mnohoúhelník, z jehož vyznačeného bodu nebylo vidět 7 stran, ale dvě strany „zobáku“ jsou vidět celé (obr. 7). Máme zde příležitost na neformální úrovni procvičit formulace s kvantifikátory. Pavla došla již na šestý pokus ke správnému výsledku. Proces jejího hledání a nalezení je reprodukován na obr. 8. Zajímavou metodu objevil Cyril. Nezačínal kreslit mnohoúhelníky, ale nakreslil bod s „izolovanými“ překážkami ve tvaru úseček. Došel tak rychle k řešení (obr. 9). Tomáš vytvořil postupným vylepšováním na první pokus „monstrum“, které na dalších obrázcích zjednodušoval až na čtyřcípou hvězdu (obr. 10).



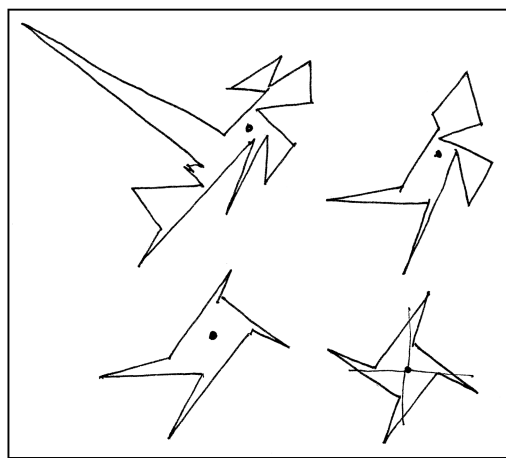
Obr. 7



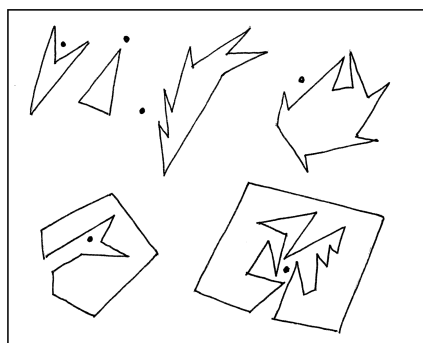
Obr. 8



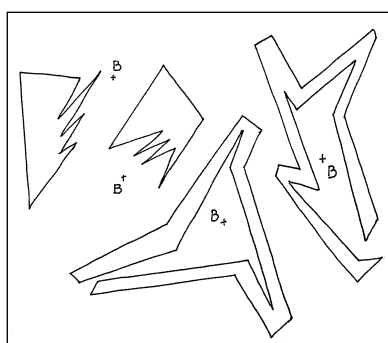
Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11



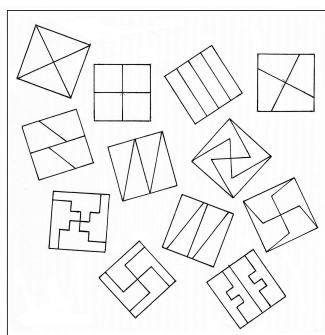
Obr. 12

Úloha s bodem vnějšku je pochopitelně obtížnější a většina žáků došla k závěru, že řešení neexistuje. Úspěšná byla již zmíněná Pavla, která i tuto úlohu vyřešila na šestý pokus (obr. 11). Žákyně Klára našla krásné řešení dokonce na čtvrtý pokus (obr. 12). Mnozí žáci

s překvapením uznali, že nakreslený útvar je sedmnáctiúhelník a že bod B náleží jeho vnějšku, ačkoliv se „tak nezdá“.

Úloha 2 *Rozdělte čtverec na čtyři shodné části*

Tuto úlohu může vyřešit snad každý žák, který má základní představy o čtverci a shodnosti. Bohatstvím výsledků a tvarů se nadchl např. dvanáctiletý Tomáš. Z jeho 35 správných výsledků zde připomenu 12 ukázek (obr. 13).



Obr. 13

Úloha rozvíjí nejen žákovské představy o shodnosti, je i propeutikou obsahu útvaru.

2.3.3 Druhá mocnina přirozeného čísla

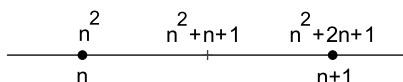
Úlohu

Dokažte, že $n^2 + n + 1$ není pro žádné přirozené n druhou mocninou přirozeného čísla

řešilo 70 gymnazistů ve věku 16–19 let.

1. řešení

Nejúspěšnější byli ti studenti, které napadlo odhadnout, jak velký kvadrát přirozeného čísla by mohl vyjít. Protože n^2 je „málo“ a $(n+1)^2$ je „moc“, je zřejmé, že žádné přirozené číslo, jehož druhá mocnina je rovna číslu $n^2 + n + 1$, nemůže existovat (obr. 14).



Obr. 14

Tímto způsobem vyřešilo úlohu 14 % řešitelů.

2. řešení

Kdyby $n^2 + n + 1$ byla druhou mocninou přirozeného čísla, které označíme např. x , muselo by platit

$$n^2 + n + 1 = x^2 \quad (1)$$

neboli

$$(x + n)(x - n) = n + 1. \quad (2)$$

Protože $n + x > n + 1$, není číslo $n + 1$ dělitelné číslem $n + x$ a přirozené číslo x splňující rovnici (1) tedy neexistuje.

Takto začali řešit úlohu 3 studenti (4 % řešitelů), úvahu o neexistenci řešení však neprovedli a úlohu nevyřešili.

3. řešení

Závěr o řešitelnosti (1) vzhledem k neznámé n ve tvaru

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4x^2 - 3}}{2}$$

vede k otázce, zda číslo $\sqrt{4x^2 - 3}$ může být liché. K tomu došli dva studenti, žádný z nich však nedokázal tento problém uspokojivě vyřešit. Rovnice

$$\sqrt{4x^2 - 3} = 2m - 1, m \in N$$

vede k rovnici

$$(m - x)(m + x) = m - 1,$$

která pro žádná x a m není splněna, neboť $m + x > m - 1$. Protože $\sqrt{4x^2 - 3}$ nemůže být liché, nemá rovnice (1) v přirozených číslech řešení.

Celkem 79 % studentů úlohu nevyřešilo. To je dosti vysoké číslo. Při řešení úlohy se projevil u některých studentů formální přístup. Např. 17 % studentů psalo: Kdyby $n^2 + n + 1$ byla druhou mocninou přirozeného čísla, musel by diskriminant kvadratické rovnice

$$n^2 + n + 1 = 0$$

být nulový. Protože však je -3 , nemá úloha řešení.

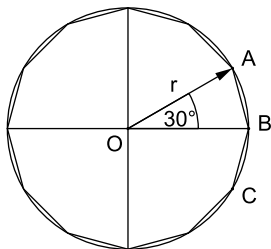
Na formalismus ve vědomostech poukazuje rovněž nápad dokazovat (a „dokázat“) tvrzení matematickou indukcí.

2.3.4 Příběh pravidelného dvanáctiúhelníku

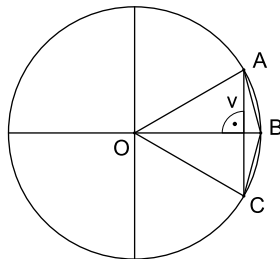
Matematická kultura člověka se neprojeví jen na řešení složitých problémů. Naopak: mnohá poučení můžeme získat na řešení jednoduchých úloh, které ovšem nabízejí více způsobů řešení.

Takovou je např. úloha

Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r (obr. 15).



Obr. 15



Obr. 16

Připomeňme nejdříve dvě řešení úlohy.

Pravidelný dvanáctiúhelník je sjednocením 12 trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABO na obr. 16.

Protože má úhel AOB velikost 30° , je trojúhelník ACO rovnostranný a polovina jeho stran $\frac{1}{2}r$ je výškou ke straně OB trojúhelníku OAB . Jeho obsah tedy je

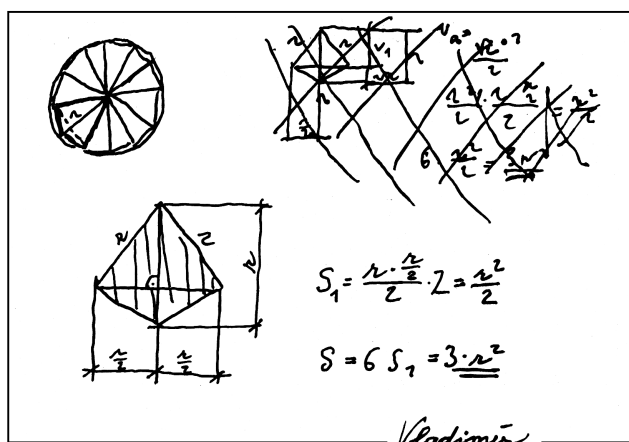
$$S_{\triangle} = \frac{1}{4}r^2$$

a obsah dvanáctiúhelníku je

$$S = 3r^2.$$

Toto řešení uvádí Vladimír (obr. 17).

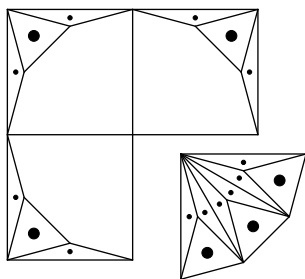
Výsledek $S = 3r^2$ je možné vidět bez počítání, důvtipným rozkladem pravidelného dvanáctiúhelníku na trojúhelníky podle obr. 18 ze 3. století z Číny.



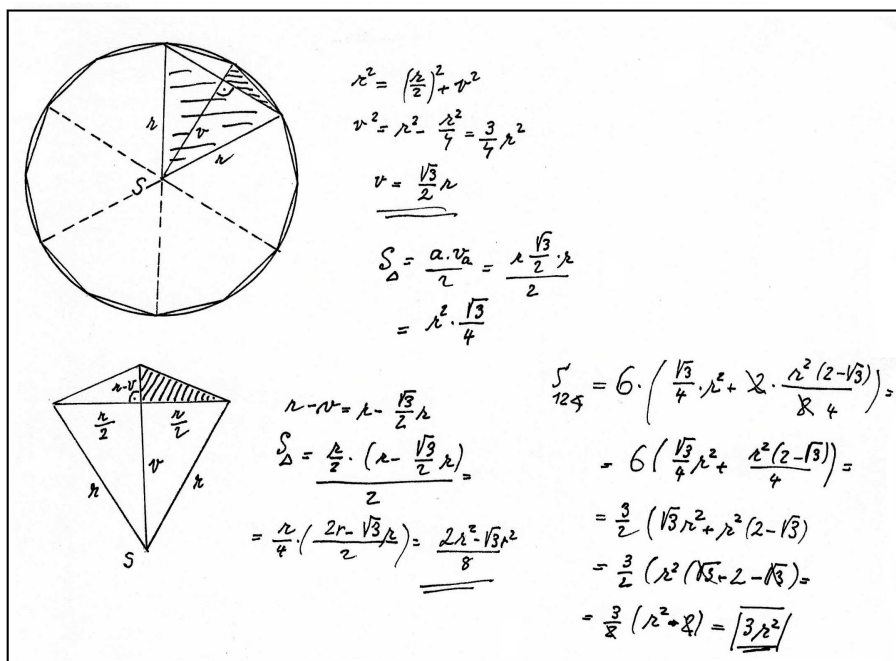
Obr. 17

Ukažme, s jakými postupy se můžeme setkat při řešení naší úlohy v praxi u absolventů středních škol.

Několika prvními příklady dokumentujeme nízkou úroveň umění vidět souvislosti a řešit úlohu jednoduše adekvátními matematickými prostředky.



Obr. 18



Obr. 19

Na obr. 19 je reprodukováno neobyčejně složité, ale správné řešení *Lucky S.*

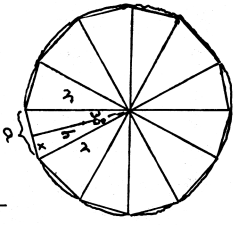
Na obr. 20 je řešení absolventky polského lycea *Moniky K.* s užitím kosinové věty.

Komplikovaný výsledek s užitím sinové věty připomínáme řešením *Petra K.* na obr. 21.

Řešení s využitím goniometrických funkcí nejsou často dovedena do konečného tvaru. Takovým je elegantní řešení *Jana H.* na obr. 22, časté je řešení, které zde uvádíme na obr. 23 (*Jitka H.*).

$a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 30^\circ$
 $a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $a^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$
 $a^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2(2-\sqrt{3})$
 $a = \sqrt{r^2(2-\sqrt{3})} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$
 $h^2 + \left(\frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = r^2 \quad x = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
 $h^2 = r^2 - \frac{2r^2 - r^2\sqrt{3}}{4}$
 $h^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4}$
 $h = \sqrt{\frac{r^2(2+\sqrt{3})}{4}} = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
 $S_A = \frac{r(2+\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}}{4} = \frac{r^2 \sqrt{1}}{4} = \frac{r^2}{4}$

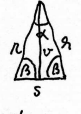
monile



$12 \cdot \frac{r^2}{4} = 3r^2$

Obr. 20

$\alpha = 360 : 12 = 30^\circ \dots \alpha$
 $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 75^\circ$
 $\beta = 75^\circ$

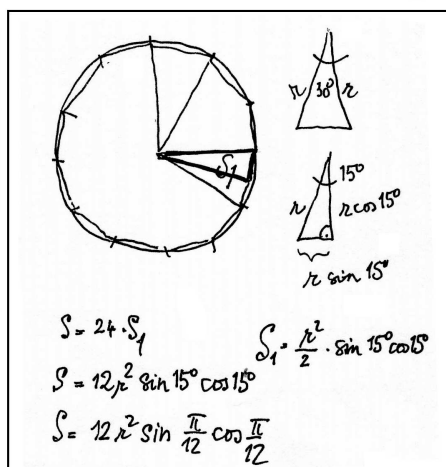


sin. věta: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{s}{r}$
 $s = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

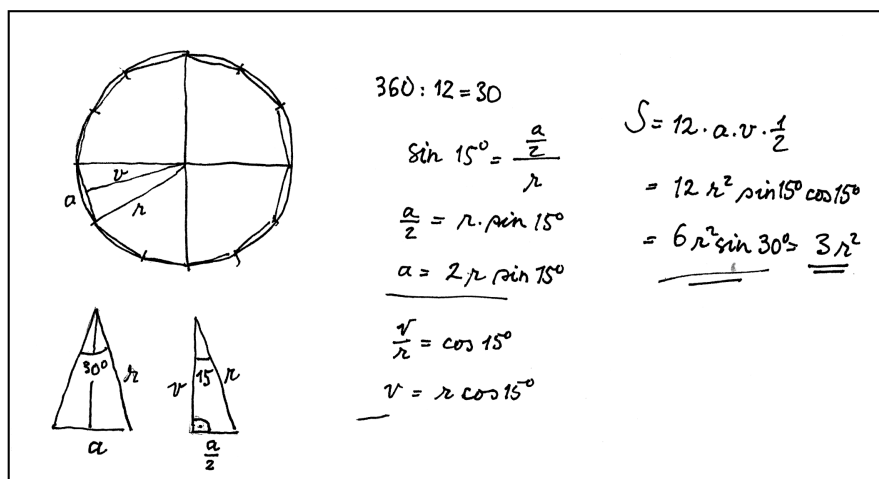
Pythagor. v. $r^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$
 $s_\Delta = \frac{s}{2} \cdot v$

$S = 6 \cdot s \cdot v = 6r \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2 \beta}}$

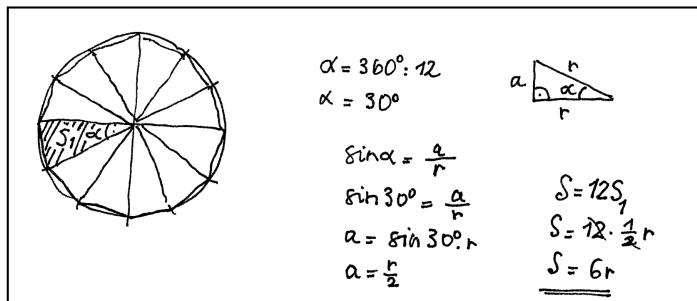
Obr. 21



Obr. 22

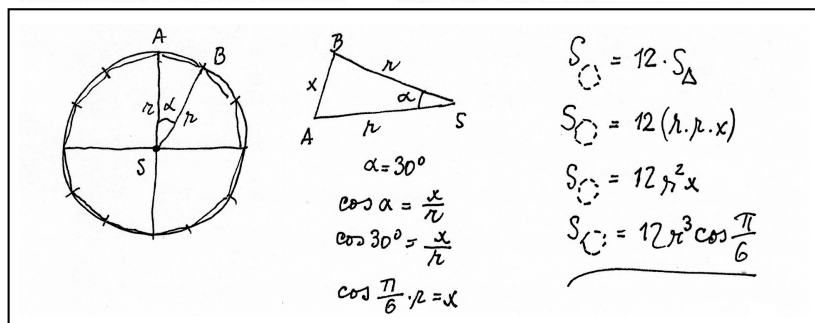
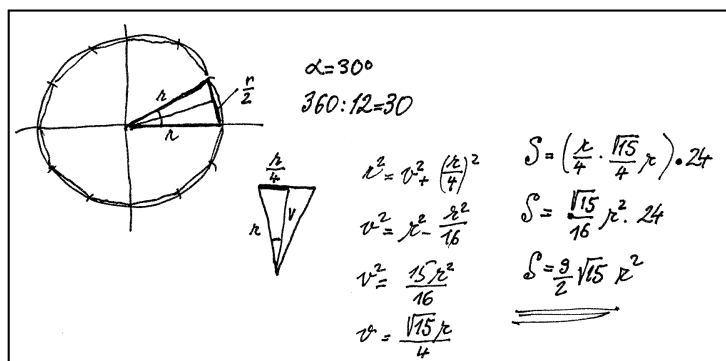


Obr. 23



Obr. 24

Obr. 25



Obr. 26

Bohužel se vyskytují i řešení, která dokumentují vážné nedostatky v matematickém vzdělání jejich autorů (*Jana N.*, obr. 24, *Jitka Z.*, obr. 25, *Filip V.*, absolvent průmyslové školy, obr. 26).

Dokladem matematické ngramotnosti *Marka K.*, který toho mnoho z matematiky „zná“, je jeho výpočet na obr. 27.

Celkově jsme „získali“ následující „správné“ vzorce pro obsah S pravidelného dvanáctiúhelníku. Přenechávám čtenáři, aby si jejich transformace na tvar $S = 3r^2$ provedl a pokusil se odhadnout cestu, jak k nim jejich autoři došli:

$$S = 6r^2 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 30^\circ}{4 \sin^2 75^\circ}},$$

$$S = 3r^2 \cdot \frac{1}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16 \sin^2 75^\circ}},$$

$$S = 12 \cdot \sqrt{\frac{r(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{2}},$$

$$S = 12 \cdot \frac{r^2}{4} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

$$S = 6r^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sin 75^\circ,$$

$$S = \frac{12r^2 \cdot \sin 30^\circ \cos 15^\circ}{2 \sin 75^\circ}$$

$$S = 12r^2 \cdot \sin 75^\circ \cos 75^\circ,$$

$$S = 12r^2 \cdot \sin 15^\circ \cos 15^\circ,$$

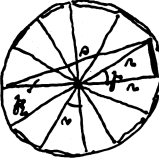
$$S = 6r^2 \sin 30^\circ,$$

$$S = 3r^2.$$

$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \cos \gamma$




$c^2 - a^2 = b^2 - 2ab \cos \beta$





$r^2 + a^2 = r^2 - 2ar \cos \gamma$
 $a^2 = -2ar \cos \gamma$
 $a = \sqrt{-2ar \cos \gamma}$
 $r^2 = \frac{2ar \cos \gamma}{4} = N a$

$r^2 + \frac{2ar \cos \gamma}{4} = N a$

$r^2 - a^2 = r^2 - 2ab \cos \gamma$
 $a^2 = 2ab \cos \gamma$

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$
 $P = \frac{1}{2} \sqrt{-2ar \cos \gamma} \cdot \left(r^2 + \frac{2ar \cos \gamma}{4} \right)$

$P_{\text{úhelníkové}} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2ar \cos \gamma} \left(r^2 + \frac{2ar \cos \gamma}{4} \right) \right)$

$P_{\text{úhelníkové}} = 6 \cdot \sqrt{2ar \cos \gamma} \cdot \left(r^2 + \frac{2ar \cos \gamma}{4} \right)$
 $= 6 \cdot \sqrt{2r^2 \cos \gamma} \cdot r^2 - 3 \sqrt{2r \cos \gamma} \cdot r^2 \cos \gamma$

Marek

Obr. 27

2.3.5 Sonda geometrické představivosti

Sto dvanácti studentům, převážně z gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové, 20 studentům Univerzity v Hradci Králové, 27 studentům Pedagogického institutu v Černigově a 18 studentům univerzity v Tallahassee na Floridě jsme zadali tuto úlohu:

Nakreslete a popište těleso, které vznikne otáčením obdélníku a) kolem jeho strany, b) kolem jeho úhlopříčky.

Úloha vyžaduje pouze znalost pojmů obdélník, jeho strana a úhlopříčka a pojem otáčení kolem přímky v intuitivním pojetí. Úkolem bylo nakreslit a popsat vzniklé těleso. Zařazením této úlohy jsme se snažili nejen zhodnotit úroveň představ o tělese, ale také poznat grafickou a verbální kulturu studentů.

Je pozoruhodné, že 13 % našich řešitelů nepoznalo v tělese z první části úlohy válec a ani těleso uspokojivým způsobem nenakreslilo. Jen 7 našich studentů nakreslilo geometricky správný obrázek druhého tělesa, jeden z nich pro názornost ještě zdůraznil soustavu poledníků (obr. 28), jeden student nakreslil jeho půdorys a nárys (obr. 29).

Vzhledem k tomu, že v USA řešili úlohu studenti na počátku a v Rusku na konci učitelského studia, nelze výsledky srovnávat. Přesto je pozoruhodné, že 40 % ruských respondentů nakreslilo v podstatě správný výsledek úlohy b. Na obr. 30 reprodukuje za všechny kresbu Taťány Ž.

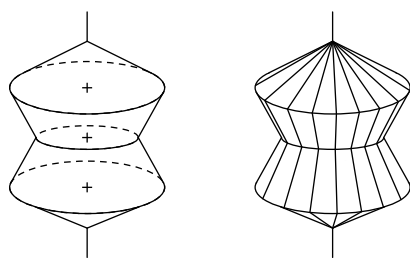
Dvacetiletá *Melinda M.* podala z amerických studentů nejlepší výkon, jehož kopie je na obr. 31 i s komentářem. Žádný americký student nenakreslil těleso lépe. Reakce *Phila S.* je na obr. 32.

Správný výsledek úlohy b) byl formulován např. slovy:

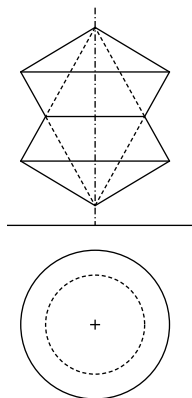
sjednocení dvou kuželů a dvou komolých kuželů,

vyskytly se ovšem např. i formulace:

*několik propojených kuželů,
čtyřkužel, ...*



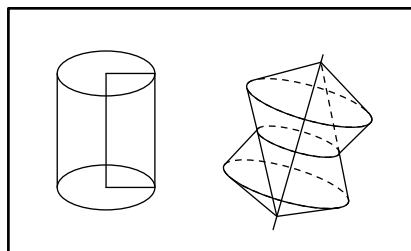
Obr. 28



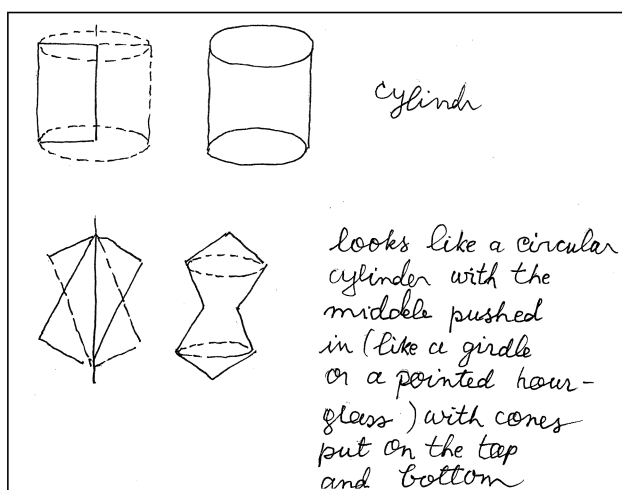
Obr. 29

Někteří respondenti viděli v tělese např. *cívku, káču* nebo *trychtýř nahoře se sbíhající do vrcholu*, americká Melinda si povzdechla „*vypadá to jako válec v pase stažený nebo jako zašpičatěné přesýpací hodiny s kuželi nahoře a dole*“, Phil vidí *míč na americký fotbal*. . . A jeden náš student konstatoval: „*Ještě mi nikdo neřek, co to je. Něco divného.*“

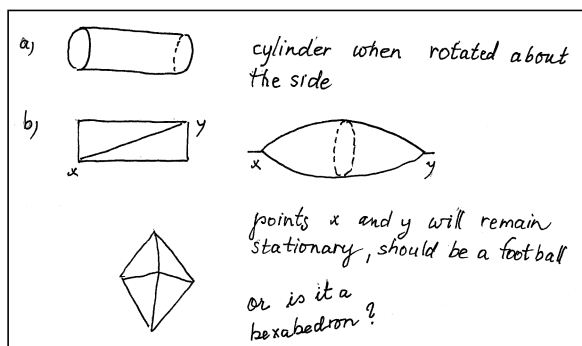
Podle mého názoru se na řešení projevuje známý fakt. Škola věnuje malou pozornost stereometrii a zcela se zanedbává geometrické kreslení.



Obr. 30



Obr. 31

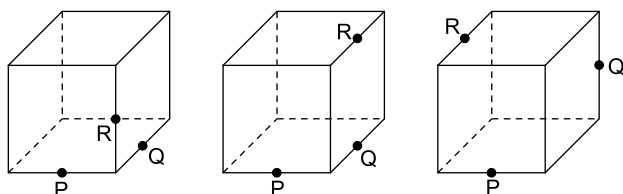


Obr. 32

2.3.6 Stereometrická sonda

Témuž okruhu studentů jako v sondě o geometrické představivosti jsme zadali úlohu

Překreslete obrázky a sestrojte průnik (řez, společnou část) roviny $\rho = PQR$ a krychle. P , Q , R jsou středy hran (obr. 33).



Obr. 33

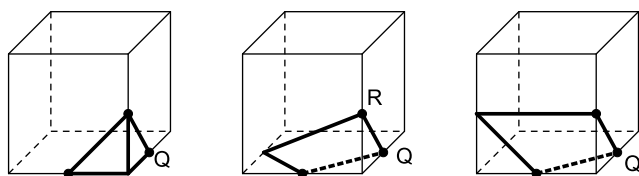
Jedná se tedy o typickou stereometrickou úlohu o vzájemné poloze geometrických útvarů (roviny a krychle). K řešení je třeba znát, aspoň na intuitivní úrovni, základní vztahy prostorové geometrie, zejména věty o průniku dvou rovin, o určenosti roviny a o průsečnici roviny se dvěma rovnoběžnými rovinami.

Přes nevhodnost srovnávání výsledků u studentů různých kategorií a jistě i při ne zcela identických podmínkách pro vypracování řešení, uveďme, že pouze 4 % českých studentů vyřešilo správně všechny tři úlohy, zatímco ruští studenti byli úspěšní v 18 % a z amerických účastníků šetření nevyřešil třetí úlohu nikdo.

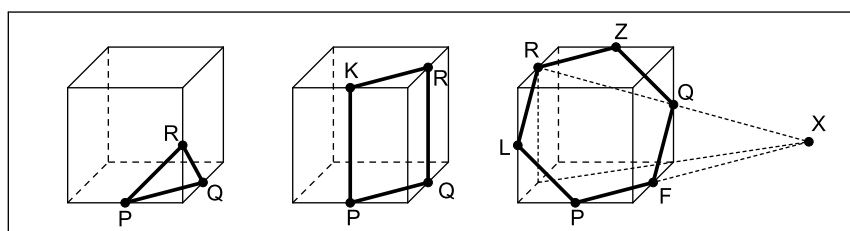
Je zarážející, že potíže dělaly i první dvě modifikace úlohy (obr. 34).

Ze správných řešení ruských autorů reprodukuje práci *Niny K.* na obr. 35.

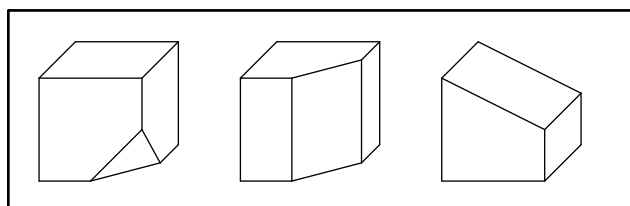
Nejlépeším Američanem byl *Bob N.* s výsledkem reprodukováným na obr. 36.



Obr. 34



Obr. 35

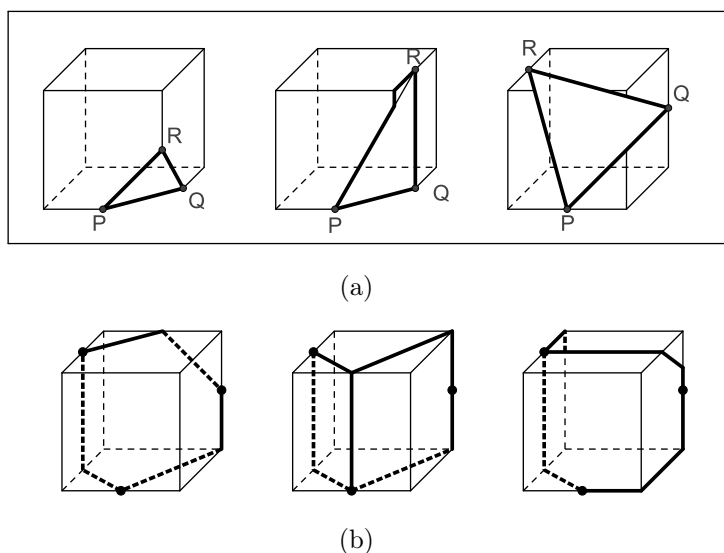


Obr. 36

Typický příklad nedostatku prostorového vnímání připomínáme obr. 37a *Melindy M.*

Sonda potvrdila známou věc: stereometrické vzdělání je problémem v mnoha zemích. Podle mého názoru bychom měli věnovat hlubší

péči této problematice, včetně kreslení a rýsování již na základní škole. Příčiny nedostatků v úlohách na obr. 37b netkví v neznalosti stereometrických pouček, ale v nedostatečném vnímání prostoru.



Obr. 37

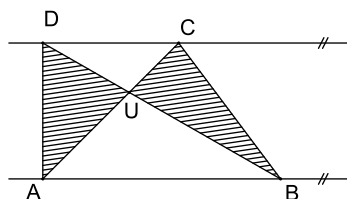
2.3.7 Trojúhelníky v lichoběžníku

Všimněme si poučení z řešení následující úlohy u 140 našich středoškoláků.

U je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB (obr. 38). Mají trojúhelníky ADU a BCU stejný obsah? Odpověď zdůvodněte.

Jádrem nalezení důkazů mnoha matematických vět je určení cest od předpokladů k tvrzení. To obvykle vyžaduje umět si představit

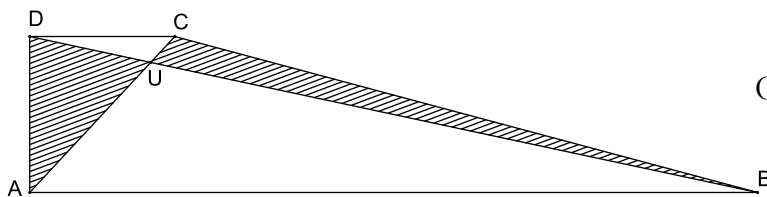
nově danou situaci. Bylo tomu tak i v naší úloze. Proto ji považuji za dosti obtížnou. Před zadáním úlohy jsem znal pouze jedno její řešení, studenti našli celkem šest odlišných důkazů našeho tvrzení, o nichž se zde stručně zmíním. Řešení úlohy vyžaduje pouze znalost základních vzorců pro obsah trojúhelníku, některá řešení jsou založena na podobnosti.



Obr. 38

74 % řešitelů úlohu vůbec nevyřešilo, pouze 10 % studentů podalo úplné a správné řešení. Neúspěch při řešení úlohy nebyl způsoben neznalostí logiky (např. metod dokazování), ale nízkou úrovní představivosti, neschopností vidět souvislosti a nahlédnout situaci z nového pohledu.

Kladnou odpověď na položenou otázku ovlivnila analogická úloha, kterou si někteří řešitelé formulovali pro obdélník. Je zajímavé, že nikdo nepřišel na kladnou odpověď zprostředkovanou rovnoramenným lichoběžníkem, zápornou odpověď vyvolal v několika případech lichoběžník s rameny „velmi odlišných délek“ (obr. 39). O názorné představě se nelze vždy spolehlivě opřít.



Obr. 39

Představivost, umění vidět, má pro hledání důkazů v matematice, a patrně i obecněji pro matematickou tvořivost značný význam. Jedna z metod, kterou bychom chtěli v této situaci zdůraznit, je metoda pohledu na situaci „od konce“, z hlediska cílů úlohy, z hlediska dokazované věty. V několika případech lze doložit, že studenti, kteří vycházeli z předpokladu, že trojúhelníky ADU a BCU mají stejný obsah a položili si otázku „Co z toho plyne?“, byli úspěšní. Zdá se, že heslo vyjadřující lidovou moudrost „*Hloupý končí na začátku, chytrý začíná od konce*“ má didaktické uplatnění.

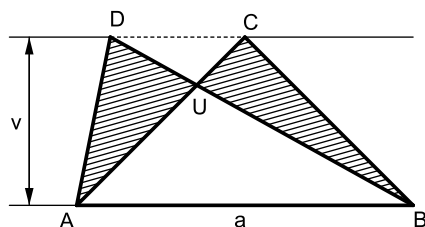
Všimněme si nyní studentských řešení úlohy.

Řešení 1

Trojúhelníky ABC a ABD , které mají stejné obsahy (mají společnou základnu AB a touž výšku – vzdálenost přímek AB a DC), jsou po řadě sjednoceními nepřekrývajících se trojúhelníků

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \triangle ABU \cup \triangle AUB, \\ \triangle ABC &= \triangle ABU \cup \triangle BUC \quad (\text{obr. 40.})\end{aligned}$$

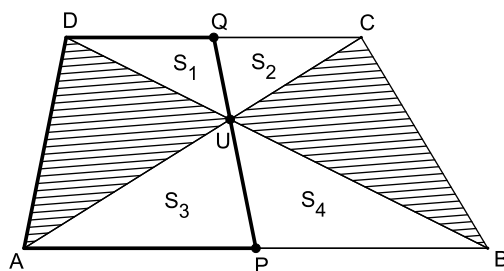
Z toho plyne, že trojúhelníky AUD a BUC mají stejný obsah.



Obr. 40

Řešení 2

Tři studenti rozdělili lichoběžník $ABCD$ úsečkou PQ (P, Q jsou středy základů) na dva lichoběžníky téhož obsahu (obr. 41). Protože trojúhelníky APU a BPU mají též obsah, a podobně lze dokázat, že i trojúhelníky CQU a DQU mají sobě rovné obsahy, mají též obsah i trojúhelníky ADU a BCU . Má-li být důkaz úplný, je třeba prokázat, že přímka PQ prochází bodem U (to ovšem žádný z řešitelů neprovedl).

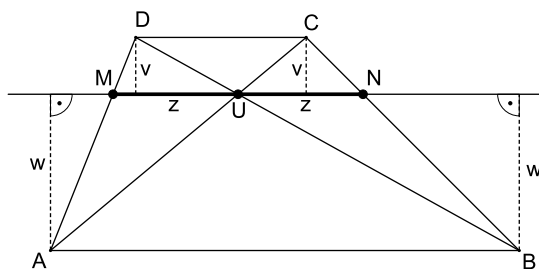


Obr. 41

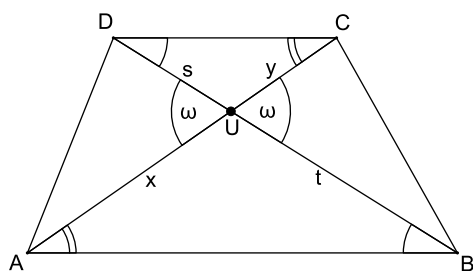
Řešení 3

Všimneme-li si, že bod U je středem příčky MN rovnoběžné se základnami lichoběžníku, vidíme v označení podle obr. 42, že mají stejný obsah trojúhelníky MUD a NUC ($\frac{1}{2}zv$) i trojúhelníky MUA a NUB ($\frac{1}{2}zw$) a tedy i trojúhelníky ADU a BCU . Tvrzení, že $|MU| = |UN|$ je ovšem opět potřeba dokázat (např. pomocí stejnolehlosti). To naši řešitelé vzali z názoru.

U dalších tří řešení naznačme, podobně jako někteří studenti, pouze „postup od konce“. Vlastní důkaz je pak již rutinní záležitostí.



Obr. 42



Obr. 43

Řešení 4

Z rovnosti obsah trojúhelníků ADU a BCU plyne podle vzorce

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

pro obsah trojúhelníku v označení podle obr. 43:

$$\frac{1}{2}sx \sin \omega = \frac{1}{2}ty \sin \omega$$

neboli

$$sx = ty,$$

tj.

$$\frac{s}{y} = \frac{t}{x}.$$

Tato rovnost je zřejmá na základě podobnosti trojúhelníků AUB a CUD . Obrácením postupu získáme řešení naší úlohy.

Řešení 5

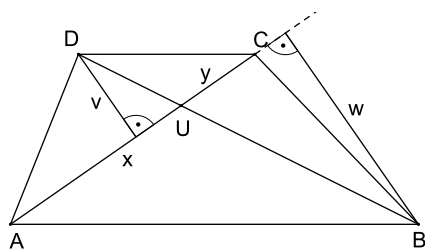
V označení podle obr. 44 plyne z rovnosti obsahů uvažovaných trojúhelníků

$$xv = yw.$$

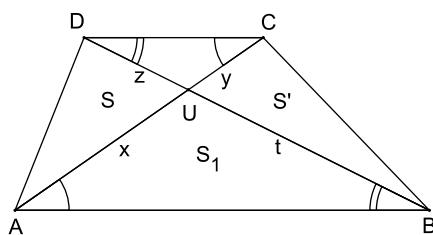
Toto tvrzení je ekvivalentní s rovností

$$\frac{x}{w} = \frac{y}{v},$$

která plyne z podobnosti trojúhelníků AUB a CUD . Další postup je zřejmý.



Obr. 44



Obr. 45

Řešení 6

Protože trojúhelníky ABU a BCU mají touž výšku ke stranám AU a UC , platí pro jejich obsahy v označení podle obr. 45

$$\frac{S'}{S_1} = \frac{y}{x}.$$

Protože trojúhelníky ADU a ABU mají touž výšku ke stranám DU a UB , platí

$$\frac{S}{S_1} = \frac{z}{t}.$$

Pro poměr obsahů S' a S tedy platí

$$S' : S = \frac{y}{x} : \frac{z}{t}.$$

Má-li platit $S' = S$, musí platit

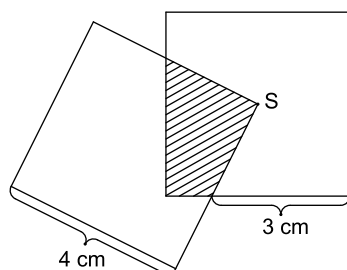
$$\frac{y}{z} = \frac{x}{t}.$$

Protože je tato rovnost důsledkem podobnosti trojúhelníků AUB a CUD , je další postup důkazu zřejmý.

2.3.8 Obsah čtyřúhelníku

Všimněme si úlohy:

Vypočítejte obsah vyšrafovaného čtyřúhelníku, který je průnikem shodných čtverců podle obr. 46. S je střed čtverce.



Obr. 46

Studenti učitelství matematiky pro základní školu našli řadu postupů jak úlohu řešit.

V úloze jde o výpočet obsahu čtyřúhelníku, který je průnikem dvou čtverců. Protože jeho obsah nemůžeme určit přímo, je nutno najít cestu k provedení výpočtu, což dává řadu příležitostí k uplatnění představivosti.

Z matematického hlediska nevyžaduje řešení žádné znalosti přesahující učivo základní školy.

K řešení můžeme přistupovat trojím způsobem.

1. Rozdělením čtyřúhelníku, jehož obsah hledáme.
2. Doplněním čtyřúhelníka na mnohoúhelník, jehož obsah umíme vypočítat.
3. Globálním pohledem.

Celkem 56 % studentů úlohu nevyřešilo. Toto procento je patrně dosti vysoké. Za hlavní příčinu této skutečnosti považují nízkou úroveň představivosti, neboť při řešení je podstatná otázka: Jak jinak se můžeme dívat na vyšrafovaný čtyřúhelník? Většina neúspěšných řešitelů si nedokázala vybavit vhodný přístup ke geometrické situaci.

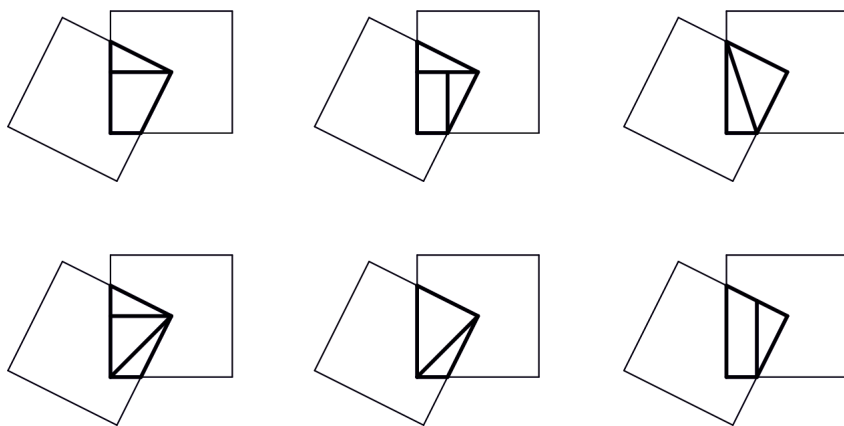
Komentujme nyní správná řešení úlohy.

Na obr. 47 jsou znázorněna rozdělení čtyřúhelníku na části, jejichž obsahy lze vypočítat na základě údajů daných v textu.

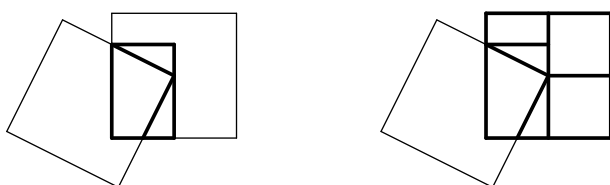
Výpočet obsahu čtyřúhelníku doplněním na obdélník nebo čtverec uvedli dva řešitelé (obr. 48).

Na obr. 49 jsou reprodukována řešení založená na představě o přemístění. Otočíme-li vyšrafované trojúhelníky o 90° kolem středu S , je zřejmé, že obsah hledaného čtyřúhelníku je roven $\frac{1}{4}$ obsahu čtverce

o straně 4 cm. Tento postup, který se opírá o celkový pohled na geometrickou situaci, jsme nazvali globální.

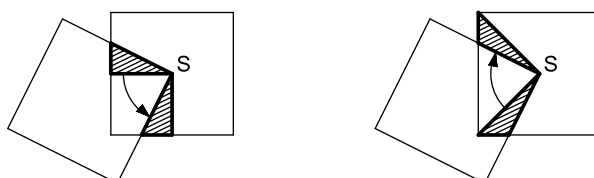


Obr. 47



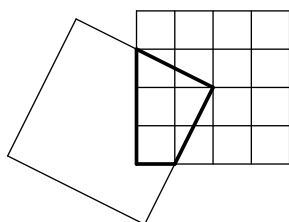
Obr. 48

Obr. 49

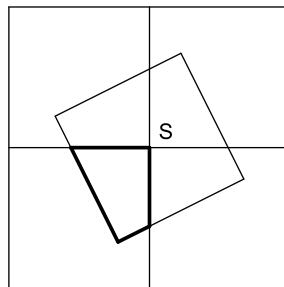


Na konec uveďme dvě velmi jednoduchá řešení.

První spočívá v doplnění jednoho čtverce čtvercovou sítí, z níž je patrný výsledek. Nápad takřka triviální umožní vidět situaci zcela nově (obr. 50).



Obr. 50



Obr. 51

Popišme nyní poslední řešení. Doplníme-li původní obrázek dalšími třemi čtverci podle obr. 51, je ihned vidět výsledek.

Řešení úlohy přineslo i několik poučných negativních výsledků. Považujeme za doklad nízké úrovně matematické kultury, potřebuje-li absolvent střední školy k určení strany čtverce z jeho úhlopříčky sinovou větu podle obr. 52:

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ}$$

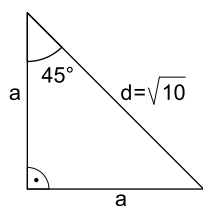
$$a = d \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ}.$$

Jiný student určuje délku úsečky x podle obr. 53 kosinovou větou.

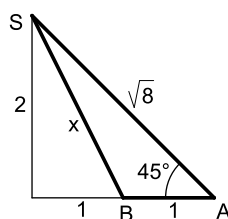
$$x^2 = \sqrt{8^2} + 1^2 - 2\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ$$

...

$$x = \sqrt{5}.$$



Obr. 52



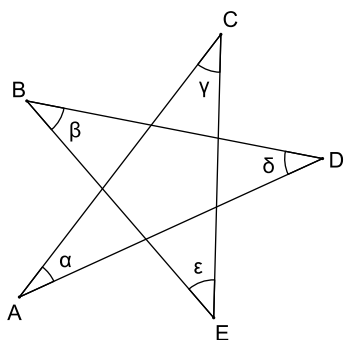
Obr. 53

Úspěšnému řešení úlohy přirozeně napomáhá nakreslit si přehledný obrázek. Je to prvek matematického jazyka, kterému bychom měli ve škole rovněž věnovat péči.

2.3.9 Pěticipá hvězda

Úlohu, o níž nyní podáme zprávu, řešilo 70 studentů gymnázia ve věku 16–19 let.

Dokažte, že všechny pěticipé hvězdy kreslené podle obr. 54 mají stejný součet velikostí označených vnitřních úhlů u vrcholů. Určete tento součet.



Obr. 54

1. řešení

Snad nejelegantnější řešení úlohy se opírá o nápad všimnout si součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku DHK podle obr. 55. Protože úhel DHK je vnějším úhlem v trojúhelníku ACH , má velikost $\alpha + \gamma$, protože DKH je vnějším úhlem v trojúhelníku EBK , má velikost $\epsilon + \beta$.

Platí tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 180^\circ. \quad (3)$$

Toto krásné řešení objevilo 13 % studentů.

2. řešení

Celkem 39 % řešitelů aplikovalo větu o součtu vnitřních úhlů v pětiúhelníku podle obr. 56.

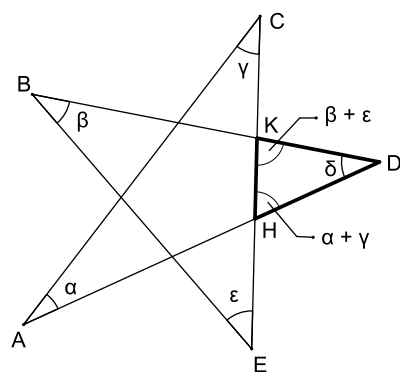
Protože platí

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + \varphi_1 &= 180^\circ \\ \beta + \epsilon + \varphi_2 &= 180^\circ \\ \gamma + \alpha + \varphi_3 &= 180^\circ \\ \delta + \beta + \varphi_4 &= 180^\circ \\ \epsilon + \gamma + \varphi_5 &= 180^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

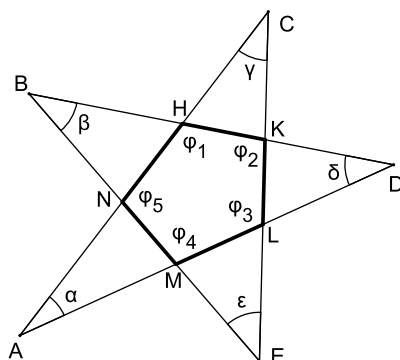
a protože součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku $HKLMN$ je

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ,$$

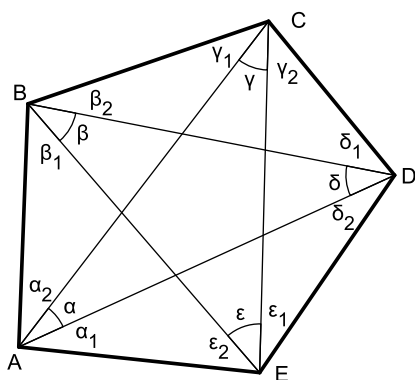
platí v důsledku rovností (4) rovnost (3).



Obr. 55



Obr. 56



Obr. 57

3. řešení

Sedm procent řešitelů dospělo k výsledku porovnáním součtu úhlů v trojúhelnících ADE , ECD , DBC , CAB , BEA a v pětiúhelníku $ABCDEF$ (obr. 57). Označíme-li symbolem S_1 součet velikostí úhlů s indexy $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \epsilon_1, \epsilon_2)$, S hledaný součet, platí

$$2S_1 + S = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ,$$

$$S_1 + S = 540.$$

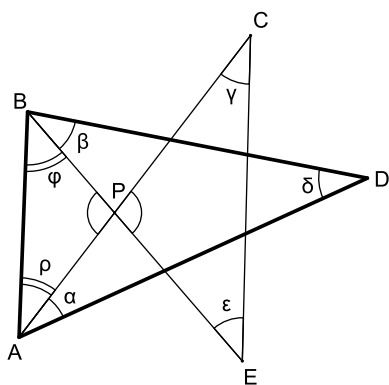
To ovšem znamená

$$2(540^\circ - S) + S = 900^\circ,$$

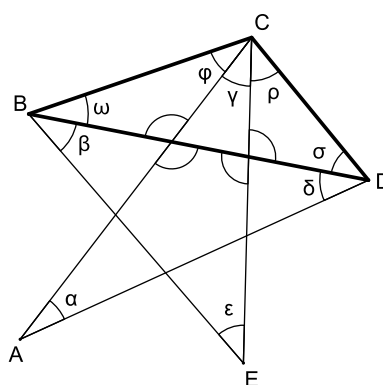
$$S = 1080^\circ - 900^\circ = 180^\circ.$$

4. řešení (student Petr K.)

Všimněme si trojúhelníku ABD (obr. 58). Protože $\varphi + \rho = \epsilon + \gamma$ (trojúhelníky PAB a PEC sice nejsou podobné, ale mají u vrcholu P stejný úhel), vyplývá z rovnosti $\alpha + (\varphi + \rho) + \beta + \delta = 180^\circ$ rovnost (3).



Obr. 58

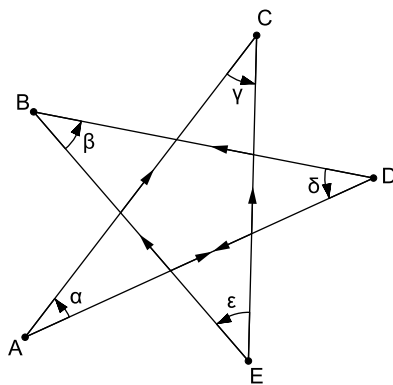


Obr. 59

7. řešení

V rotacích $r_1(A, \alpha)$, $r_2(C, \gamma)$, $r_3(E, \epsilon)$, $r_4(B, \beta)$, $r_5(D, \delta)$ přejde postupně polopřímka AD do polopřímky souhlasně rovnoběžně s polopřímkou DA . To ovšem můžeme interpretovat tak, že platí (3) (obr. 61).

Celkově vyřešilo úlohu o hvězdě 63 % účastníků šetření. Nejčastější nesprávné řešení bylo vyvoláno představou, že stejný součet úhlů z vrcholů „obecné“ pěticípé hvězdy má i hvězda „pravidelná“ a pro tu byl součet určen. Přitom se nevyskytly žádné argumenty pro oprávněnost tohoto postupu.



Obr. 61

Účinné prostředí, v němž se žáci učí (powerful learning environment), především pak školní prostředí, by se mělo vyznačovat těmito znaky:

- navozovat a rozvíjet konstruktivní, kumulativní a zacílené učení u všech žáků; vyvažovat učení prostřednictvím osobního zkoumání a objevování také systematickým školním vzděláváním a řízeným poznáváním.
- umožňovat, aby se žákovu učení v co největší míře odehrávalo v autentickém kontextu, který žákovi otevírá osobní smysl toho, čemu se učí; kontext by měl využívat různorodých zdrojů učení, různorodých učebních materiálů a nabízet možnost spolupráce mezi žáky.
- být flexibilní, přizpůsobovat se potřebám žáků, poskytovat jim adresnou pomoc, která bere v úvahu stupeň jejich samostatnosti a autoregulace a také individuální rozdíly v jejich kognitivních, afektivních a motivačních charakteristikách.

Jiří MAREŠ ([58], s. 176).

V prostředí apatie, nezájmu, lhostejnosti či dokonce bojkotu a nepřátelství nelze realizovat žádné účinné vzdělávání. Probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu. Zájem by měl být živen především úspěchy žáků v reakcích na podněty učitele. Projevem zájmu žáka jsou otázky, které klade. Aktivita učitele je tak zaměřena na rozvíjení aktivity žáka, na konstrukci poznatků v jeho duševním světě. Podle povahy žáky může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé. Při řešení takového problému můžeme přirozeně sdělovat žákovi všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na informace v encyklopediích a příručkách, avšak vše ve službě matematiky rodící se ve vědomí žáka. Konstruktivní vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh.

Milan HEJNÝ, František KURŮNA ([34], s. 208, 209, 196).

Kapitola 3

Závěry

Pokusme se na závěr formulovat shrnující pohled na úlohy, na proces jejich řešení, na jejich význam ve vzdělávání, na charakter školské matematiky a problémy s tím spojené.

3.1 O úlohách

V odstavci 2.2 jsme připomněli Halmosův názor, že jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení. Problémy a úlohy jsou ovšem i jádrem matematiky školské.

Úlohou rozumíme obvykle jakoukoli výzvu k činnosti. Matematická úloha vyzývá řešitele k matematické činnosti.

Přehled o nejběžnějších typech úloh, které se vyskytují ve školské matematice, a jim odpovídajících otázkách můžeme shrnout do tabulky 1.

Příklady na jednotlivé typy si patrně každý čtenář snadno vybaví, podrobnější zpracování problematiky uvádím v článku [51]. Protože

Úloha	Výzva	Otázka
Kalkulativní	Vypočítejte ...	Kolik?
Rozhodovací	Rozhodněte ...	Zda?
Určovací	Určete ...	Který?
Konstrukční	Sestrojte ...	Jak?
Důkazová	Dokažte ...	Proč?

Tabulka 1

v každé úloze jde o určení něčeho (čísla, rozhodnutí, množiny, konstrukce, důkazu, ...), lze všechny úlohy chápat jako úlohy určovací. Tuto ideu uplatnil *Jan Vyšín* v práci [89]. Úlohy můžeme různě modifikovat a při jejich řešení se obvykle setkáváme s řadou dalších úkolů a konvencí. Řešení rovnic se zpravidla neobejde bez kalkulací, v úlohách na určení množin všech bodů daných vlastností se nespokojujeme s popisem výsledku, ale požadujeme i důkaz, že každý bod výsledné množiny má požadované vlastnosti a body, které do množiny nenáleží, požadovanou vlastnost nemají atp.

Podle rolí, které mají úlohy hrát ve vzdělávacím procesu, můžeme rozlišit:

1. Úlohy motivační.
2. Úlohy ilustrační (příklady).
3. Úlohy procvičovací.
4. Úlohy diagnostické.
5. Úlohy kontrolní.

První tři skupiny úloh slouží ke kultivaci žákova duševního světa, poslední dvě skupiny slouží k diagnóze úrovně žakových vědomostí.

Podle náročnosti řešení úloh pro studenta lze rozlišovat

1. Cvičení.
2. Úlohy (v užším slova smyslu).
3. Problémy.

Názvy skupin, které jsem zde uvedl, vyžadují vysvětlení. U cvičení vystačíme při řešení se znalostí postupu, který je v podstatě určen textem úlohy a který by si měl student po přečtení uvědomit. Tyto úlohy mají charakter „matematického řemesla“ a jsou obvykle prostými aplikacemi jednoho nebo několika algoritmů. U úloh druhé skupiny řešitel kombinuje více algoritmů, jejich určení je podstatou řešení úlohy, jde však v nich o obvyklou aplikaci teorie. Schopnost řešit tyto dva typy úloh můžeme označit jako matematickou gramotnost studenta. Všichni, kdož absolvují příslušný stupeň školy, by měli být v tomto smyslu matematicky gramotní.

Problémové úlohy vyžadují při řešení tvořivý přístup. Postup řešení úlohy není znám, řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem. Většina úloh druhé kapitoly měla charakter problémů.

Je zřejmé, že rozlišení úloh do tří skupin není klasifikací. Úloha, kterou jeden student vyřeší na základě známého algoritmu nebo známé teorie, může u jiného studenta vyžadovat tvořivé úsilí. Problémové úlohy vyžadují hluboké soustředění, invenci a čas. I úlohy tohoto typu bychom měli zařazovat do vyučování, neměly by však být použity jako úlohy kontrolní. Typickými problémovými úlohami jsou úlohy matematických olympiád. Takovéto úlohy jsou analogiemi vědeckých problémů.

Všimněme si, jakou terminologii užívají autoři sbírek, o nichž jsem psal v předmluvě.

Dag Hrubý užívá v nadpisu a v celé knize termín cvičení, v předmluvě však píše o 1500 *úlohách*. Závidím Dagovi, že jen asi u 30 *náročnějších* z těchto úloh potřebují jeho žáci návod. *Emil Calda* píše

o sbírce *úloh*, pro něž v textu užívá označení *příklady*. To jsou v mé terminologii *problémy*, právě tak jako úlohy v práci autorů *Švrček – Calábek*, kteří razí termíny *netradiční* nebo *zajímavé úlohy*. Vidíme tedy, že i v této oblasti není terminologie školské matematiky zcela jednotná.

3.2 O řešení úloh

Úvodem připomeňme dva známé příběhy.

Významný francouzský matematik *Henri Poincaré* (1854 – 1912) popisuje zrod řešení matematického problému takto: *Dva týdny jsem se snažil dokázat, že neexistuje funkce jisté vlastnosti. Každý den jsem zasedal k pracovnímu stolu, strávil zde hodinu, dvě, probíral velké množství kombinací a nenacházel žádný výsledek. Jednou večer jsem proti svému zvyku vypil hrnek černé kávy, nemohl jsem usnout, měl jsem množství nápadů. Zdálo se mi, že se setkávají, až se nakonec dva spojily, aniž by úzce souvisely. Ráno jsem konstatoval existenci jisté třídy Fuchsových funkcí. Zbývalo formulovat výsledky, což mi zabralo jen několik hodin* [65].

Bertrand Russell (anglický filozof a matematik, 1872 – 1970) vzpomíná ve svém životopise: *Usilovně jsem se snažil vyřešit rozpor plynoucí z paradoxu holiče. Každé ráno jsem si sedl před prázdný list papíru a celý den jen s krátkou přestávkou na oběd jsem na něj zíral. Když přišel večer, papír byl často ještě prázdný ... Zdálo se mi ... docela pravděpodobné, že celý zbytek života strávím nad prázdným listem papíru. Ještě nepříjemnější bylo, že šlo o triviální rozpory a že jsem trávil čas úvahami o věcech, které se nezdají být hodné systematické pozornosti* (citováno podle [5], s. 113).

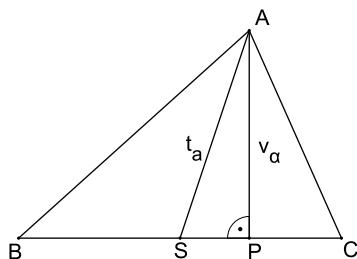
Někdy se, podle mého názoru poněkud jednostranně, zdůrazňuje role logiky při řešení úloh. Projevuje se to zejména pojetím řešení úloh (především konstrukčních) ve čtyřech fázích

1. *rozbor*,
2. *konstrukce*,
3. *důkaz*,
4. *diskuse*,

přičemž se zdůrazňuje, že „*vlastní řešení konstruktivní úlohy je deduktivní úvaha, jež má za cíl vyhledat jisté ... objekty*“ ([89], s. 144), a rozbor má tuto logickou strukturu: „*existuje-li útvar, který máme sestrojit, pak má tyto ... vlastnosti; hledáme tedy rozbořem nutné podmínky*“ ([87], s. 190).

Samozřejmě že v rozboru začínáme s předpokladem existence útvaru, který hledáme, avšak zřídka kdy jsme schopni z toho bez dalších předpokladů vyvozovat závěry. Doložme to na zcela jednoduché úloze ze základní školy.

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dána velikost a strany BC , velikost výšky v_a a těžnice t_a k této straně.



Obr. 1

V rozboru tedy budeme předpokládat, že trojúhelník s požadovanými vlastnostmi existuje (obr. 1). Vlastní úvaha pak pokračuje např. těmito cestami:

- a) *Narýsujeme-li stranu BC ($|BC| = a$) se středem S , pak bod A leží na přímce rovnoběžné s přímkou BC ve vzdálenosti v_a a na kružnici s poloměrem t_a se středem v bodě S ...*
- b) *Narýsujeme-li těžnici AS ($|AS| = t_a$), pak body B, C leží na přímce SP , kde P je průsečík Thaletovy kružnice s průměrem AS s kružnicí $k(A; v_a)$...*

Kurzivou vyznačené části úvah a, b vůbec nejsou věcí logiky, ale např. věcí zkušenosti, intuice nebo experimentování.

V rozboru kreslíme obrázek, vyznačujeme, co je dáno, co hledáme, dokreslujeme, přemýšlíme o možných souvislostech, ... až snad dospějeme k nápadu, který je klíčem k řešení úlohy. Rozbor tedy není prioritně otázka logiky. V mnoha textech našich učebnic se charakterizuje rozbor dosti volně, obvykle bez zdůraznění rozhodující role nápadu.

Podíváme-li se do klasických prací o řešení úloh, např. do knih *Georga Polyi* ([66], [67]) zjišťujeme, že zmíněné čtyři fáze řešení se zde neuvádějí. Neuvádějí se v mnoha případech ani v publikacích o matematické olympiádě (např. [92]), ani v učebnicích *Eduarda Čecha* (např. [18]).

Řešení úloh není zpravidla dáno předem jasnými pravidly či dokonce algoritmy, ale má charakter tvůrčí, proto můžeme mluvit o *umění řešení úlohy*. V literatuře se touto problematikou pochopitelně zabývala řada autorů. Chtěl bych zde připomenout především práci *Umění myslet* anglického psychologa *Grahama Wallase* [90], jejíž první vydání je z roku 1926, a na ni navazující publikaci významného francouzského matematika *Jacquesa Hadamarda* [*The Mathematician's Mind*] z roku 1944. Ideje v těchto pracech obsažené sahají ovšem, jak autoři uvádějí, až k *Hermannu Helmholtzovi* (1821 – 1894) a *Henrimu Poincarému* (1854 – 1912).

Tito autoři charakterizují tvůrčí myšlení (a řešení problémů tvůrčím myšlením je) čtyřmi fázemi, které zde připomenu počestnými anglickými názvy:

1. preparace,
2. inkubace,
3. iluminace,
4. verifikace.

V přípravné fázi řešení problému jde o studium souvislostí a poznávání vztahů. Toto poznání musí uzrát v duševním světě řešitele, aby, často po delší době a usilovné duševní práci, přišel „šťastný“ nápad, který vede k řešení problému. Takové řešení může přirozeně mít intuitivní charakter a je třeba je prověřit důkladnou logickou analýzou.

Při řešení úloh ve škole „shrnujeme“ přípravu, zrání a objevení nápadu do tzv. rozboru. Příprava řešení úlohy snad bývá někdy „vytvořena“ předchozí výukou, na zrání problému nebývá obvykle ve škole čas a nelze se proto divit, že se někdy rozbor nahrazuje návodem. Je-li řešení problémů uměním, nelze je patrně „vtěsnat“ do čtyř fází.

Řešení úloh je pochopitelně vážným problémem matematického vzdělávání. Uplatňovat přitom „kulturní“ zřetele znamená dobrou přípravu jejich řešení a správný odhad jejich obtížnosti. Formálně „naučená“ řešení nemají prakticky žádný význam.

Francouzský matematik *Gustave Choquet* popsal v publikaci *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností tvůrčí hledání vědce* takto: *Chování vědce, ať už v matematice či v experimentálních vědách připomíná chování průzkumníka v lese, hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata.*

Snad mohu po tomto přiznání vědce připomenout myšlenku *Emila Caldy*, kterou patrně ani nemyslel vážně: *Zíráme-li na obrázek představující rozbor konstrukční úlohy dostatečně dlouho a stále nic nevidíme, spojíme dva namátkově vybrané body a koukáme, jestli už něco vidíme. Jestliže ani teď nic nevidíme, spojujeme postupně další a další body tak dlouho dokud něco neuvidíme, nebo dokud nevznikne taková zmeř čar, že už vůbec nic vidět nemůžeme. V tomto případě nakreslíme původní obrázek znovu, spojíme jiné dva body a celý postup opakujeme ([11], s. 11).*

George Polya v této souvislosti píše: *Dobrý nápad je neočekávaná, náhlá změna pohledu, reorganisace dosavadního chápání úlohy vyvolaná přesvědčením, že zvolený postup povede k řešení problému.*

Podstatnou složkou řešení problémů je ovšem myšlení.

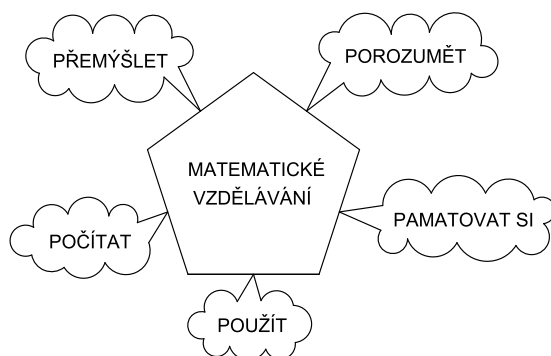
Klasik americké pedagogiky *John Dewey* přitom zdůrazňuje: *Původem myšlení jsou jisté rozpaky, zmatek nebo pochybnosti. Myšlení není žádným spontánním spalováním, nedochází k němu na základě „obecných principů.“ Vždy existuje něco, co je způsobuje a vzbuzuje. Všeobecné naléhání na dítě (nebo na dospělého), aby myslelo bez ohledu na existenci nějaké obtíže v jeho vlastní zkušenosti, obtíže, která je trápí a ruší jeho rovnováhu, je stejně nicotné jako rada, aby se samo vyzdvihlo pomocí svých tkaniček u bot (citováno podle sborníku [72], s. 96).*

Základním problémem řešení úloh je jejich atraktivnost, jako jedna z kladných složek motivace žáka. Mají-li se žáci něčemu naučit, musí se chtít učit.

3.3 O školní matematice

Inteligentní laik se při kontaktu s matematikou obvykle střetne se třemi „nepříjemnými“ skutečnostmi: zvláštním jazykem, pojmovou vytríbeností a logickou strukturou disciplíny. Pojmy zahrnují pouze to, co je explicitně formulováno v definicích, jediné významné souvislosti jsou souvislosti logického charakteru. Je to pravý opak běžného života, kde není nic definováno a vztahy a souvislosti se odvíjejí od všeho možného, málokdy však od logiky. Setkání dospělého laika s částí „hotové“ matematické disciplíny bývá zřídka úspěšné. K matematice bychom měli vést děti od útlého mládí, a to pokud možno zajímavě a přirozeně. Nikoliv předkládáním části hotové matematické disciplíny, ale její konstrukcí, která by měla vyplynout z řešení vhodných úloh.

Po celoživotních zkušenostech se mi jeví účelné zdůraznit těchto PĚT P matematického vzdělávání: pamatovat si, počítat, přemýšlet, porozumět, použít (obr. 2).



Obr. 2

Jádrem školní matematiky by mělo být rozvíjení myšlení. To vzhledem ke škole zdůrazňoval např. německý filozof *Friedrich Nietzsche*

(1844 – 1900): *Škola nemá jinou důležitější úlohu, než učit jasnému myšlení, opatrnému úsudku, konsekventním závěrům* (citováno podle [53], s. 45). A náš přírodovědec *Jan Evangelista Purkyně* (1787 – 1869) nabádá: *Měj odvahu myslet!* ([68], s. 24). Dnes bohužel *víra v ukládání dat na počítačové disky nahrazuje myšlení, všudypřítomnost informačních databází sugeruje demokratizaci vědění, ačkoliv je to fakticky velkoplošná nivelizace vědění* ([53], s. 39).

Role paměti ve vzdělávání bývá mnohými „moderními“ autory zlehčována. Paměť však je pro úspěšné matematické vzdělávání důležitá. Ačkoliv žijeme v době, kdy si lze bez potíží a rychle nalézt informace prakticky o všem a mnohé si lze odvodit, nelze se bez paměti ve vzdělávání obejít. Souhlasím se *Zdeňkem Kratochvílem*, že *člověk je do určité míry určen tím, co má ve své paměti. Paměť je dispozicí naší mysli, zakládá možnosti řeči i způsob vnímání* ([44], s. 144). Paměť hraje základní úlohu při orientaci v nejrůznějších souvislostech, v řešení úloh, *ve schopnostech získat náhled. Zvláště menším dětem je paměť tou silou, která buduje rostoucí schopnost mysli* ([44], s. 144, 157). *Paměť je uschování pochopené a posouzené věci pro budoucí použití* ([41], s. 53). *Fantazie, intuice i logika pracují se zapamatovatelnými údaji* ([71], s. 100). Řešení problémů a úloh není bez zprostředkující role paměti možné. Především na různých úlohách a hrách je možné paměť trénovat.

Zapamatování nejrůznějších faktů bez porozumění a bez souvislostí, např. jako trénink k různým „vědomostním“ soutěžím, nemá ovšem valný smysl. *Věděním se ... jednotlivosti a pojmy stávají teprve tehdy, když jsou vzájemně propojené podle logických a konzistentních kritérií natolik, že jsou ve smysluplném a přezkoumatelném vztahu* ([53], s. 25).

Počítání je tradiční charakteristická složka matematiky, která je dnes bohužel podceňována. Přitom *živá bytost, (i ta nejskromnější, např. bakterie) komputuje, to znamená, že nejenom „počítá, kalku-*

luje“, ale provádí také operace, které jsou podřízeny jisté logice a jistým pravidlům, které směřují k zachování života organismu (E. Morin). Petr Vopěnka charakterizuje počítáním celou matematiku: *Matematika je metodou předpovídání pomocí formálních kalkulů* ([84], s. 735). Přitom formálním kalkulem rozumíme hru se znaky prováděnou podle nějakých pevně stanovených pravidel.

Problémy školních numerických výpočtů jsou dnes teoreticky vyřešeny používáním kalkulátorů a počítačů, jejich systematické „zapojení“ do matematického vzdělávání však není dosud jasné.

Vraťme se ještě k otázce myšlení. Matematika jako vyučovací předmět neznamena automaticky kultivaci myšlení. Snad skýtá matematika více příležitostí k rozvíjení myšlení než jiné předměty, ale jedná se pouze o příležitost, kterou bychom měli využít. Matematika chápaná jako systém formálních dedukcí, jako systém definic, vět a důkazů nebo na elementární úrovni jako systém vzorců není nejvhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť je i příležitostí k formálnímu „zvládnutí“ matematických poznatků. Definice, věty, ba i důkazy se lze naučit, aniž bychom jim rozuměli, tento soubor „vědomostí“ lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se může zdát postačující k osvojení si minima matematiky. Takováto matematika myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, neboť proniknout do struktury vytríbené někdy i mnohogeneračním vývojem názorů na řešení určitého problému může být obtížné. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cest k matematice, jak už jsem uvedl, je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Je tedy účelné vycházet při vyučování z otázek a problémů, docházet k domněnkám a pokusům problémy řešit, poznávat aparát, který k tomu potřebujeme, včetně utváření a vymezení pojmů a cest k zdůvodňování tvrzení. Poslední tři body mého přesvědčení o charakteru matematického vzdělávání tedy spolu úzce souvisejí.

3.4 O matematické kultuře

Zmíněných 5P matematického vzdělávání tvoří základ matematické kultury člověka. Matematickou kulturu může pěstovat u svých žáků jak učitelka první třídy, tak i vysokoškolský profesor u svých doktorandů.

Člověk s dobrou matematickou kulturou je matematicky gramotný (ovládá dobře určitou oblast matematiky s jejími pojmy a metodami), dovede o matematice komunikovat různými způsoby (ovládá různé matematické jazyky) a vidí souvislosti mezi různými pojmy a různými oblastmi matematiky. O úrovni matematické kultury studenta se můžeme přesvědčit úrovní metod, kterými je schopný řešit problémy. Vynikající úroveň matematické kultury vykazuje středoškolák, který je schopen řešit např. úlohy matematické olympiády. Pojem matematická kultura přirozeně nelze definovat, budeme mu rozumět ve smyslu dobrá matematika podle *Terence Tao*, o němž jsem psal v odstavci 1.2. Pěstovat matematickou kulturu znamená učit vidět kořeny matematiky v realitě (v přírodě, ve společnosti, ale i v matematice samé), poznávat svět matematických pojmů, rozumět mu a umět ho aplikovat „kultivovaně“ a správně na řešení nejrozdílnějších problémů.

O matematické kultuře můžeme mluvit na každé úrovni zvládnutí matematiky. Určitou matematickou kulturu by měl vykazovat absolvent základní školy, jinou absolvent střední školy, na vyšší úrovni pak absolvent univerzitního matematického vzdělávání, matematickou kulturu by měl mít řemeslník, ale, pochopitelně jinou, i lékař, ba i filozof či umělec. Je přirozené, že tyto úrovně matematické kultury nemá smysl srovnávat, ale každé matematické vzdělávání, které má vyšší ambice než dovést absolventy k základní úrovni matematické gramotnosti, by mělo pečovat o kultivaci matematické kultury svých absolventů. Žák je matematicky gramotný, rozumí-li a umí použít základní učivo příslušné třídy.

Matematická kultura se přirozeně projevuje kladně nebo záporně v práci učitele ve třídě, v individuálních diskusích s nadanými žáky, z hlediska matematické kultury můžeme hodnotit učebnice matematiky i matematické monografie.

K matematické kultuře náleží přirozený přístup k učivu tak, aby nové pojmy zapadaly nenásilně do žákova rozvíjejícího se matematického světa, aby jejich pochopení neztěžoval zbytečný pomocný aparát, aby jednoduché bylo vyvozováno jednoduše.

Elementární matematika tkví svými kořeny v realitě. Kulturně koncipovaná školní matematika tuto stránku nezastírá, ale vhodně využívá. Žák by měl poznat matematiku jako disciplínu, která vyrůstá z jeho poznání světa, a ne jako nějakou umělou konstrukci, která je nejen díky svému obsahu, ale také pro svůj zvláštní jazyk normálnímu člověku cizí a nesrozumitelná. Např. proces poznávání jednotlivých objektů na straně jedné a proces shrnování určitých objektů do celků na straně druhé je zárodkem tvoření pojmů a předobrazem konstrukce množin v matematice. Množiny se nevyskytují ani v přírodě, ani ve společnosti. Jako matematické objekty jsou to myšlenkové konstrukce, podněty k jejich konstrukci jsou však často zcela přirozené. Zvolené místo můžeme považovat za množinu jeho domů, obyvatel nebo obchodů, to záleží na úhlu pohledu. Školní třídu můžeme interpretovat jako množinu žáků, jako množinu lavic, nebo jako množinu jejích sportovců. Prvky množiny mají určité charakteristické vlastnosti a zřídka jde o shrnutí libovolných objektů do jednoho celku, jak naznačuje učebnice matematiky pro gymnázia:

Množinou budeme rozumět souhrn nějakých předmětů (objektů).

„Množinové opojení“ spjaté s reformou matematického vzdělávání u nás, kdy byla zavedena „množinová matematika“ od první třídy základní školy, zákonitě zmizelo, množiny jsou dnes přirozeným zákla-

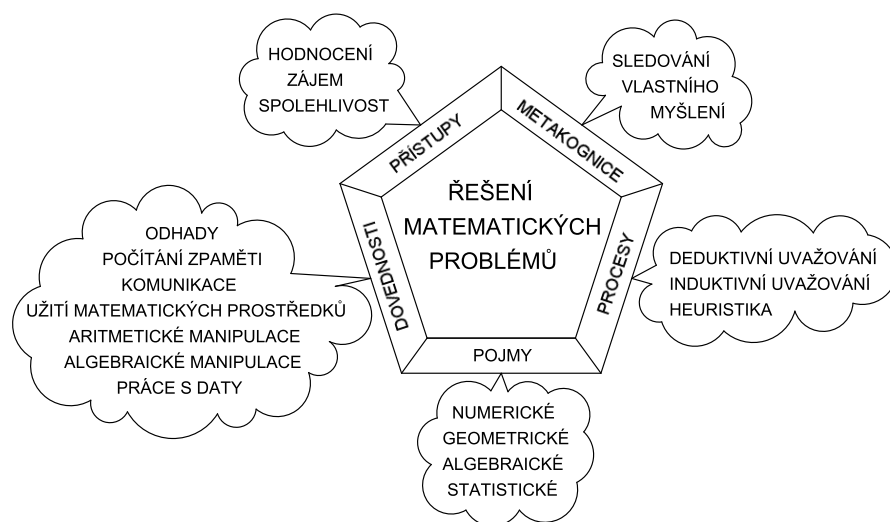
dem školní matematiky, jsou základem matematické kultury. Se zadostiučiněním můžeme konstatovat, že úlohy typu:

Doplňte za proměnnou y ve větě: „ y je přítokem Labe“ z množiny řek oboru proměnné y , $y \in \{\text{Úpa, Metuje, Orlice, Dunaj, Volha, Loučná, Don, Chrudimka, Váh, Vltava, Ohře}\}$ tak, aby věta byla pravdivá

se snad již v našich učebnicích nevyskytují.

V současné době u nás uplatňované strukturální hledisko, projevující se např. sadou učebnic matematiky pro gymnázia nakladatelství *Prometheus*, má přirozeně jisté výhody, student si však může hůře uvědomovat souvislosti různých pojmů. Za všechny jmenujme např. řešení soustav lineárních rovnic o třech neznámých a studium vzájemné polohy rovin v prostoru (viz kapitola 2) nebo užití metod analytické geometrie k řešení metrických úloh ve stereometrii.

Zcela jiný přístup ke konstrukci kurikula uplatňuje singapurská škola matematiky. Základem její stavby je řešení úloh, celá koncepce je naznačena pětiúhelníkovým schématem na obr. 3 ([91], s. 33). Je otázka, jak je v tomto pojetí zabezpečena soustavnost výkladu učiva. Nicméně neobyčejné úspěchy singapurských studentů např. v hodnocení TIMSS ([82]) a v olympiádách prokazují životaschopnost tohoto pojetí.



Obr. 3

Dějiny lidstva nejvíc formovala matematika, historie, filosofie a teologie, tedy nepraktické obory bez vlastních patentů.

Václav CÍLEK ([14], s. 156)

Matematika je krásná. Co bylo pravda včera, je pravda i dnes.

Jaroslav KURZWEIL

Učí-li učitel všechny své žáky stejným způsobem, počíná si podobně jako lékař, který by stejným způsobem léčil všechny své nemocné.

Stanislav KOMENDA ([40], s. 22)

Hnací silou matematických objevů není uvažování, ale představitost.

August de MORGAN (citováno podle Soifer [74], s. XIII)

Literatura

- [1] Adamar, Ž.: *Elementarnaja geometrija*. GU PI, Moskva 1948.
- [2] Alsina, C., Nelsen, R. B.: *Math made visual*. MAA, Washington 2006.
- [3] Auská, N.: *Český lékař v Americe*. Dita. Praha 1996.
- [4] Baltzer, R.: *Elemente der Mathematik*. G. Hirzel, Leipzig 1883.
- [5] Barrow, J. D.: *Pí na nebesích*. Mladá fronta. Praha 2000.
- [6] Bobok a kol.: *Matematika pro 8. ročník základní školy. I. díl*. SPN, Praha 1983.
- [7] Bolzano, B.: *Geometrische Arbeiten*. Královská společnost nauk. Praha 1948.
- [8] Bukovský, L., Kluvánek, I.: *Dirichletov princip*. Mladá fronta, Praha 1970.
- [9] Bydžovský, B.: *Naše středoškolská reforma*. Profesorské nakladatelství. Praha 1936.
- [10] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh. Středoškolská matematika pod mikroskopem*. Prometheus, Praha 2006.

- [11] Calda, E.: *Pedagogické zásady a termíny ve výuce $M + F$* . Prometheus, Praha 2003.
- [12] Calvino, I.: *Americké přednášky*. Prostor, Praha 1999.
- [13] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I*. Teubner, Leipzig 1894.
- [14] Cílek, V.: *Krajina z druhé strany*. Vize 97. Praha 2009.
- [15] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry. I*. Wiley, London 1961.
- [16] Czeskie zadanie i jego 10 rozwiązań. *Matematyka*, LVII, 5, 2004.
- [17] Čapek, K.: *V zajetí slov*. Svoboda, Praha 1969.
- [18] Čech, E.: *Geometrie pro I.–III. třídu středních škol*. JČMF, Praha 1943.
- [19] Čech, E.: *Geometrie pro IV. tř. měšťanských škol*. JČMF, Praha 1946.
- [20] Dam, Z.: Kilka sposobów na dwuesieczną. *Matematyka*, VII, 6, 2004.
- [21] Edwards, M. D.: A Proof of Heron´s Formula. *American Mathematical Monthly* XII, 2009.
- [22] Eukleides: *Základy I–IV*. OPS, Nymburk 2007.
- [23] *Eukleidovy základy*. Přeložil F. Servít. JČMF, Praha 1907.
- [24] Eukleides. *Základy V.–VII*. OPS. Nymburk 2009.
- [25] Fraedrich, A. M.: *Die Satzgruppe des Pythagoras*. BI, Mannheim 1994.

- [26] Flier, B.: „Maluji stejně pro děti i dospělé“ tvrdí tvůrce Macha a Šebestové Adolf Born. *Lidové noviny* 12. 9. 1998.
- [27] Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett, Stuttgart 1977.
- [28] Goethe, J. W.: *Faust*. Fr. Borový, Praha 1949.
- [29] Gombricht, E. H.: *Umění a iluze*. Odeon, Praha 1985.
- [30] Gowers, W. T.: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. Amer. Math. Soc. 2000.
- [31] Halmos, P.: Jak učit řešit problémy. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1979.
- [32] Hardy, G. H.: *Obrana matematikova*. Prostor, Praha 1999.
- [33] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1989.
- [34] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. Portál, Praha 2009.
- [35] Van Hiele, P.: *Structure and Insight*. Academic Press, London 1986.
- [36] Hrubý, D.: *Matematická cvičení pro střední školy*. Prometheus, Praha 2008.
- [37] Jeszce trzy rozwiązania – *Matematyka*.
- [38] Katětov, M.: *Některé vývojové tendence současné matematiky*. MÚ ČSAV, Praha (nedatováno).
- [39] Komárek, S.: *Příroda a kultura*. Academia, Praha 2008.

- [40] Komenda, S.: *Veřejné tajemnosti*. Olomouc 1999.
- [41] Komenský, J. A.: *Didaktika analytická*. Samcovo knihkupectví, Praha 1946.
- [42] Konforovič, A. G.: *Významné matematické úlohy*. SPN, Praha 1989.
- [43] Kraemer, E., Hradecký, F. Jozífek, V.: *Sbírka řešených úloh z matematiky pro 6. až 8. ročník*. SNP, Praha 1959.
- [44] Kratochvíl, Z.: *Výchova, zřejmost, vědomí*. Hermann a synové, Praha 1945.
- [45] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel*. Academia, Praha 2009.
- [46] Kuřina, F.: Může být školská matematika matematikou dobrou? *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 53, 2008.
- [47] Kuřina, F.: *Geometrical Thinking*. CERME 3. Bellaria 2003.
- [48] Kuřina, F.: Příběh jedné úlohy o trojúhelníku. *Matematika, fyzika, informatika*, 12, 2002.
- [49] Kuřina, F., Tichá, M., Hošpesová, A.: Geometrické zkušenosti dětí na počátku školní docházky. *Moderní vyučování* 4, 1998.
- [50] Kuřina, F., Tichá, M., Hošpesová, A.: How to Evaluate and Utilize our Children's Geometrical Experience. In: *International Symposium Elementary Maths Teaching*, Prometheus, Praha 1997.
- [51] Kuřina, F.: Matematika je řešení úloh. *Matematika, fyzika, informatika*, 3, 2003.
- [52] Kuřina, F.: *Deset pohledů na geometrii*. MÚ AVČR, Praha 1989.

- [53] Liessmann, K. P.: *Omyly společnosti vědění*. Academia, Praha 2008.
- [54] Lietzmann, W.: *Pythagorisches Lehrsatz*. Ruský překlad FM, Moskva 1960.
- [55] Lockhart, P.: *A Mathematician's Lament*. Bellevue Literary Press, New York 2009.
- [56] Loomis, E. S.: *Pythagorean Proposition*. Reston 1968.
- [57] Maor, E.: *The Pythagorean Theorem*, Princeton University Press, Princeton 2007.
- [58] Mareš, J.: Učení ve školním prostředí In: *Pedagogická encyklopedie*, Portál, Praha 1009.
- [59] Metelka, V.: *Ze života zapadlého vlastence*. Odeon. Praha.
- [60] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha*. ÚIV, Praha 2001.
- [61] Nelsen, R. B.: *Proofs without words*. MAA, Washington 1993.
- [62] Nelsen, R. B.: *Proofs without words II*. MAA, Washington 1993.
- [63] Nový, L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1961.
- [64] Piřha, P.: *Hledání učitele*. Pedagogická fakulta UK. Praha 1996.
- [65] Poincaré, H.: *Science et méthode*. Paris 1908. Ruský překlad In: O науке, Moskva 1983.
- [66] Polya, G.: *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press 1954.

- [67] Polya, G. *How to Solve It*, Princeton University Press 1945.
- [68] Purkyně, J. E.: *Útržky ze zápisníku zemřelého přírodovědce*. Academia, Praha 2010.
- [69] Roth, P.: *Lidská skvrna*. Volvox Globator, Praha 2005.
- [70] Ryden, R.: N-mids follow - up. *Mathematics Teacher*, Vol. 101, No5, 2007.
- [71] Selye, H.: *K záhadám vědy*. Orbis, Praha 1975.
- [72] Singule, F.: *Americká pragmatická pedagogika*. SPN, Praha 1990.
- [73] Skalková, J.: *Pedagogika a výzva nové doby*.
- [74] Soifer, A.: *Mathematics as Problem Solving*. Springer. Colorado Spring 2009.
- [75] Stewart, I.: *Odtud až do nekonečna*. Argo. Praha 2006.
- [76] Stewart, I.: *Čísla přírody*. Archa, Bratislava 1996.
- [77] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha 1963.
- [78] Švrček, J., Calábek, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh*. Prometheus, Praha 2007.
- [79] Tao, T.: Co je dobrá matematika. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 53, 2008.
- [80] Tao, J.: *Solving mathematical Problems*. Oxford University Press, New York 2006.
- [81] Thomas, L.: *Myšlenky pozdě v noci*. Mladá fronta. Praha 1989.
- [82] Tomášek, V. a kol.: *Výzkum TIMSS 2007*. ÚIV, Praha 2008.

- [83] Úlehla, J.: *Dějiny matematiky*. Dědictví Komenského, Praha
- [84] Vopěnka, P.: Poznámky o současné matematice. *Filosofický časopis* 19, 1971.
- [85] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií*. Panorama, Praha 1989.
- [86] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Práh, Praha 2004.
- [87] Vyšín, J.: *Geometrie pro pedagogické fakulty I.*, SPN, Praha 1965.
- [88] Vyšín, J.: *Elementární geometrie III*. Přírodovědecké nakladatelství. Praha 1952.
- [89] Vyšín, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. SPN. Praha 1962.
- [90] Wallas, G.: *The Art of Thought*. C. A. Watts, London 1945.
- [91] Wong, W. K. a kol.: Mathematics Education. *In: The Singapore Journey*. World Scientific. London 2009.
- [92] Zedek, M. a kol.: *Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie B, C*. SPN. Praha 1971.
- [93] Zeh, J.: *Hráčský instinkt*. Odeon, Praha 2006.

V Číně měl jeden nosič dvě velké hliněné nádoby. Visely na obou koncích klacku, který nosil na krku. V jedné byla prasklina, naproti tomu ta druhá byla dokonalá a vždy nesla plnou míru vody. Na konci dlouhé cesty od potoku k domu měla prasklá nádoba vodu už jen do polovičky.

Dva celé roky to takto šlo, nosič vody nosil do domu každý den jeden a půl nádoby vody. Samozřejmě dokonalá nádoba byla pyšná na svůj výkon, vždyť to dělala dokonale. Ale chudák prasklá nádoba se styděla za svou nedokonalost a cítila se uboze, protože je schopná jen polovičního výkonu.

Po dvou letech soužení oslovila nosiče: Stydím se, protože voda teče po celou cestu domů. Nosič jí odpověděl: Všimla sis, že kytky rostou jen na tvé straně chodníku a ne na straně druhé? Věděl jsem o tvém nedostatku a na tuto stranu cesty jsem rozséval semena květin. To ty jsi je každý den zalévala. Dva roky sbírám tyto krásné květiny, abych si ozdobil stůl. Kdybys nebyla taková, jaká jsi, tak by tato krása nemohla rozzářit můj domov.

Všichni máme osobité chyby. Všichni jsme prasklé nádoby. Ale tyto praskliny a chyby, které jsou v každém z nás, tak dělají náš život zajímavým a vzácným. Jen každého musíme přijmout takového, jaký je, a vidět v něm to dobré. To nejlepší přeji všem svým prasklým nádobám – přátelům.

NEZNÁMÝ AUTOR

Jmenný rejstřík

- András, A., 103
Apollónius, 23, 50
Auská, N., 20
Bakó, M., 130
Bartyzal, M., 8
Betlachová, A., 126
Bolzano, B., 47
Born, A., 148
Burk, F., 46
Bydžovský, B., 22
Calábek, P., 7, 188
Calda, E., 7, 187, 192
Calvino, I., 140
Cardano, G., 74
Cílek, V., 200
Coxeter, H. S. M., 29, 101, 102
Čapek, K., 9
Čech, E., 31, 190
Dewey, J., 192
Dirichlet, P., 114
Dlab, V., 95
Dudeney, H. E., 44
Edwards, M. D., 57
Einstein, A., 32
Euklides, 23, 41, 109
Euler, L., 32
Faulhaber, J., 104
Freudenthal, H., 82
Fraedrichová, A. M., 38
Garfield, J. A., 45
Gauss, C. F., 33
Goddijn, A., 129
Goethe, J. W., 19
Goldberg, M., 139
Gowers, W. T., 13
Hadamard, J., 190
Halmos, P., 15
Hardy, G. H., 16, 140
Hejný, M., 25, 130, 184
Helmholtz, H., 190

- Heron, 23, 53
Horák, K., 125
Hošpesová, A., 8
Houska, J., 127
Hrubý, D., 7, 187
Choquet, G., 191
Katětov, M., 13
Komenda, S. 200
Kořínek, V., 113
Kratochvíl, Z., 194
Křížek, M., 112
Kurzweil, J., 200
Kuřina, F., 184
Leischner, P., 108
Leonardo da Vinci, 43
Leonardo Pisanský, 73
Liessmann, K. P., 60
Lietzmann, W., 38
Lockhart, P., 22
Loomis, E. S., 38
Maor, E., 38
Mareš, J., 183
Morgan, A., 200
Morin, E., 195
Nelsen, R. B., 39
Nietzsche, F., 193
Pagacz, R., 132
Piřha, P., 20
Poincaré, H., 188, 190
Polya, G., 15, 49, 192
Purkyně, J. E., 194
Pythagoras, 23, 37
Roth, P., 19
Russell, B., 188
Ryden, R., 104
Struik, D. J. 13
Skalková, J., 60
Stehlíková, N., 8
Stein, M., 181
Stewart, I., 6, 16
Soifer, A., 71
řimandl, V., 8
řvrček, J., 7, 8, 124, 129, 188
Tao, T., 14, 116
Thomas, L., 6
Töpffer, R., 10
Turnau, S., 80, 131
Úlehla, J., 37
Van Hiele, 98
Vaníček, J., 8
Vopěnka, P., 14, 25, 37, 109, 195
Vyřín, J., 186
Zachariáš, S., 107, 126
Zeh, J., 19

Matematika a řešení úloh

Autor: prof. RNDr. František Kuřina, CSc.

Vydává: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Pedagogická fakulta

Vydání: první

Rok vydání: 2011

Počet stran: 210

ISBN 978-80-7394-307-3