Dva dny s didaktikou matematiky 2019

Sborník příspěvků

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Praha, 14.–15. 2. 2019

Organizátor:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky,
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Společnost učitelů matematiky, pobočný spolek JČMF

Programový a organizační výbor:

Naďa Vondrová (předsedkyně)
Antonín Jančařík
Darina Jirotková
Michaela Kaslová

Editorka:

Naďa Vondrová (e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz)

Programový a organizační výbor děkuje studentům a doktorandům za pomoc při organizaci konference.

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.

Vyšlo v roce 2019. Systémem LaTeX zpracovala Zuzana Kastnerová.

ISBN 978-80-7603-110-4

Obsah

ÚVOD

Dva dny s didaktikou matematiky z jiného úhlu pohledu

Změnila tato konference za léta své existence něco? Jistěže ano. Ze změn se zaměřme na jeden z posunů. Na počátku bylo patrné, že někteří účastníci zaměňují pojmy didaktika a metodika. Nyní, po čtyřiadvaceti letech můžeme konstatovat, že pojetí konference ovlivnilo v tomto směru část učitelské populace. Metodiku chápeme jako jistý návod, jak postupovat v práci s učebnicí a k ní přidruženým didaktickým materiálem v rámci určitého filosofického směru. Metodiky se opírají o didaktiku oborovou i obecnou, avšak pohled na výuku je provázán na zásady plynoucí z filosofie vzdělávání a koncepce daný materiálů. Jsou zpravidla produktem jedince, nebo úzké skupiny autorů. Metodika také zpravidla zmiňuje pouze klady doporučovaných postupů. Jinak chápeme význam didaktiky, její roli ve vyučování i v přípravě a dalším vzdělávání učitelů. Didaktika oboru je značně obecnější, vždy zmiňuje východiska, prezentuje různé proudy, trendy, tendence jak z pozice výhod, tak i úskalí. Didaktika matematiky je dynamický obor, který bere v úvahu změny podmínek ve vzdělávání, proměny žáka, učitele i společnosti, vidí souvislosti ve vývoji.

Vztah obecné didaktiky a didaktik oborů (zde didaktiky matematiky) je permanentně řešen na mezinárodní úrovni. V odborné literatuře najdeme tři hlavní proudy: jedni nadřazují obecnou didaktiku didaktice oborů, druzí vidí vztah zcela opačně. Třetí skupina vychází z toho, že obecná didaktika zobecňuje to, co spojuje všechny didaktiky oborů, v tomto smyslu je tedy užší než jednotlivé didaktiky, nemůže tedy v žádném případě nahradit ani jednu oborovou didaktiku. Na druhé straně obecná didaktika umožňuje oborovým didaktikám definovat to, co je pro ně specifické, podílí se tak i na interpretacích žákovských reakcí i na hodnocení učitele daného oboru. Bez komparace didaktiky matematiky, obecné didaktiky a didaktik dalších oborů není možné hovořit o existenci výjimek i v rámci obecné didaktiky (platí ve většině oborových didaktik, ale…), tedy není možné prezentovat míru obecnosti v obecné didaktice. To jsou argumenty, které hovoří o rovnocennosti postavení či proměnlivosti v pozici nad a podřazenosti jednoho vůči druhému. Koncepce této konference umožňuje onen dialektický pohled na strukturu didaktik.

Sborníky ze Dvou dnů s didaktikou matematiky mohou sloužit jako vhodný zdroj ke sledování vývoje proměn z pohledu na výše zmíněné vztahy.

Michaela Kaslová

za programový a organizační výbor konference

ZVANÁ PŘEDNÁŠKA

Šikana učitele

Téma, o kterém se (ne)mluví

Magdalena Richterová

Učitelé patří vedle horníků a lékařů mezi nejrizikovější profesní skupinu. Zatímco u učitelů s praxí od 1 do 10 let trpí neurotickými problémy 8,3 % učitelů, u těch s praxí 20 a více let je to kolem 30 %. (Průcha, 1997) Jako první ze stresorů specifických pro školní prostředí jsou uváděny lidské stresory, především žáci, kteří se často chovají jinak, než je učitelem očekáváno.

Takovým neočekávaným sociálně patologickým chováním je právě šikana. Na šikanu učitele je často pohlíženo jako na profesní i lidské selhání. Nahlédněme do složitých mechanismů vzniku šikany učitele, která je pro mnohé stále nepochopitelná, tedy ponižování, zesměšňování dospělé osoby dítětem. Představme si hlavní příčiny zakrývajícího systému šikany, jejího odhalení a řešení.

Obecně u šikany nalezneme jeden základní a velmi důležitý znak. Záměrnost. Pokud bychom hledali synonyma, mohli bychom ho nahradit slovy schválnost, úmyslnost, vědomost, samoúčelnost. Právě slovo *samoúčelnost* používá Kolář (2001) ve svých publikacích o šikaně. Význam této slovní složeniny je *účel samotný*. V případě šikany je účelem právě šikanování samotné. Můžeme tedy vyloučit taková chování, kde účelem aktu není šikana, ale jiný cíl. Cíl něco získat, něčemu zabránit, mít z něčeho prospěch.

Druhým velmi zajímavým a důležitým znakem je moc. Získání moci a převahy. Kolář (2001) používá označení *nerovnováha sil*. Právě moc je velmi úzce propojena s předchozím znakem záměrnosti. Pokud ten, který ubližuje, pocítí moc nad druhou osobou, získává ve vztahu pozici nadřazenosti, důležitosti. Často právě tento opojný pocit moci rozhoduje o dalším vývoji chování agresora, na jehož pozadí můžeme hledat strach, frustraci či nudu.

S mírnou nadsázkou lze říci, že každý z nás má jistou míru připravenosti k šikanování. Připravenost k povyšování se, ponižování někoho, k útoku na lidskou důstojnost, týrání, k lidské krutosti. Na otázku Proč? nám může odpovědět psychologie. Hledáme a upevňujeme si pozice. Pozice silných a slabých v sociálních skupinách, ve kterých zastáváme různé role. Pokud jsme se zmiňovali o připravenosti k šikanování či k jinému sociálně nepřijatelnému chování, musíme dodat, že stejně tak jsme jistým způsobem připraveni pro pozici šikanovaného, oběti. O všem rozhoduje souběh okolností. Okolností vnějších, narazíme-li na skupinu silných a na nezdravé sociální klima, vnitřních, jsme-li nejistí, nevyrovnaní, právě neúspěšní, tedy cítíme se oslabení. Ony zmiňované okolnosti nás mohou postavit do pozice slabého a ve skupině, ve které nefungují správné ochranné mechanismy a je zde přítomen někdo s vysokou mírou připravenosti k šikanování, se může mechanismus šikany pomalu rozběhnout.

Vraťme se do konkrétního prostředí školy. V již zmiňované konstelaci, tedy souběhu okolností, se může ocitnout i učitel. Pro mnohé se zdá být tato situace nepochopitelná. Dospělý člověk mající autoritu již pro svůj věk, podpořenou autoritou formální z pozice učitele, je ponižován někým, kdo je výrazně mladší a v pozici, která by mu to fakticky neměla umožňovat. Podívejme se na tento vztah pohledem obou aktérů rodící se šikany. Situaci, ve které se učitel, v té chvíli oslabený již zmiňovanými vnitřními okolnostmi, a žák v jisté přesile nacházejí, můžeme nazvat zkouška odolnosti. Jsou to počáteční, mnohdy nenápadné projevy nekázně, ve kterých si oba zúčastnění vymezují pozice.

Můžeme mluvit o důležitém momentu, který rozhoduje o dalším vývoji. Žák poruší pravidla, jistým způsobem zaútočí a očekává reakci. Pokud učitel nemá sílu či prostředky se bránit a žákova míra připravenosti k šikanování je dostatečná, žák chování zopakuje. Pokud ani tentokrát nezíská učitel převahu, ba právě naopak ukáže svou slabost, je rozhodující reakce okolí, v našem případě třídy. Přidá-li se na stranu učitele, může tento obranný mechanismus šikanu zastavit. Vystavět morální bariéru, která tak dává jasně najevo, že je toto chování ve společnosti nepřijatelné. Mluvíme o zdravém klimatu ve třídě. Pokud se ovšem ostatní spolužáci přidají k agresorovi, podpoří ho, obrátí se proti učiteli, kterého tak vystaví jisté bezmoci. Ve třídě jsou nastavena jiná, ne příliš morální pravidla.

V této situaci se nabízí možné řešení. Požádat přímo či nepřímo o pomoc kolegy nebo vedení školy. Ve škole, která je i na tuto situaci připravena, může být učiteli poskytnuta pomoc v podobě hledání řešení, ale především se zde nepohlíží na projevy šikanování jako na projev slabosti, selhání, neschopnosti. S velkou pravděpodobností jsou v této škole nastavena jasná pravidla soužití, spolupráce, úcty k druhému člověku. Je tedy zřejmé, že šikanování, jako asociální chování, je zde nepřijatelné. Především vedení školy musí prezentovat jasné postoje nejen směrem k žákům a k učitelům, ale také k rodičům a k veřejnosti.

Neřešení šikany ve škole má dalekosáhlé následky. Žáci nastavují jiná pravidla chování k učitelům, protože co bylo přijatelné jednou, může být zopakováno. Šikanovaný učitel (nebudeme popisovat jiné možné následky) může také v obavě z další šikany změnit postoje a chování k ostatním žákům v dalších třídách. Každou nestandardní situaci může považovat za osobní útok proti sobě.

Kolář (2001) označuje šikanu jako onemocnění. Nevymýtíme nemoci, jen na ně musíme být připraveni. Znát příznaky, možnosti pomoci a léčby. Nejdůležitější je prevence a tou jsme my sami.

Slovo na závěr

Škola by měla vytvářet bezpečné prostředí, ve kterém učitel ví, na koho se obrátit v případě, když se sám potýká s jakýmkoliv problémem, kterým se cítí být ohrožen. Měla by mít kvalitní a funkční preventivní program, který by měl podporovat zdravé klima celé školy a ve kterém by také měly být popsány postupy řešení šikany jak pro pedagogické pracovníky, tak pro vedení školy. Zdravé klima je také to prostředí, kde učitelé o svém kolegovi před žáky nemluví s despektem. Tím totiž jako by udělovali „povolení“ k možnému šikanování.

Literatura

[1] Kolář, M. (2001). *Bolest šikanování.* Praha: Portál.

[2] Průcha, J. (1997). *Moderní pedagogika: věda o edukačních procesech.* Praha: Portál.

JEDNÁNÍ V SEKCÍCH

Adaptivní testování matematiky

Petra Bušková[1]

Adaptivní test je test přizpůsobující se každou další otázkou úrovni měřených schopností testovaného jedince. Umožňuje efektivnější testování díky absenci příliš jednoduchých či náročných otázek. Adaptivní test z matematiky ADAPTEQ, zaměřující se na některé oblasti středoškolské matematiky, může sloužit jako učební pomůcka pro studenty středních i vysokých škol. Elektronická podoba testu a mírně soutěžní prostředí dokáží řadu studentů motivovat ke zdokonalování jejich matematických dovedností.

Adaptivní test

Adaptivní testování je v porovnání s klasickými testy poměrně nová záležitost, která umožňuje testovat každého jedince individuálně na základě jeho znalostí a schopností. V ideálním případě by se tak testovaný jedinec měl vyhnout otázkám příliš jednoduchým, u kterých má poměrně vysokou pravděpodobnost chyby z nepozornosti, ale i otázkám vysoce převyšujícím jeho schopnosti, které jej mohou demotivovat. Adaptivní test by měl testovanému jedinci předkládat otázky na takové úrovni, aby bylo možné po každé odpovědi zpřesnit odhad hledané úrovně testovaných schopností daného jedince.

Adaptivní testování se využívalo už na počátku 20. století zejména v psychologii, například u inteligenčních testů. Tehdy existovalo několik modelů adaptivního testování. Jedním z nich je pyramidový model, kdy jsou otázky rozloženy dle náročnosti do tvaru pyramidy (trojúhelníku). Testovanému jedinci je předložena otázka z „vrcholu pyramidy“ a dle jeho odpovědi se posouvá k otázce napravo o parto níž (správná odpověď), případně k otázce nalevo o patro níž (nesprávná odpověď). Takto postupuje až k základně pomyslné pyramidy.

Postupem času se adaptivní testování stalo záležitostí počítačů, které dovolí flexibilněji volit otázky, a přesněji tak určovat úroveň testovaných schopností (Computerized Adaptive Testing, ve zkratce CAT). Nejčastěji se počítačové adaptivní

[1]Přírodovědecká fakulta MU, petra.buskova@gmail.com

testování zakládá na teorii odpovědi na položku (Item Response Theory, zkráceně IRT), jejíž podstatou je chápání testu ne jako jednoho celku, ale jako množiny statisticky na sobě nezávislých položek (otázek). V IRT je každá položka popsána charakteristickou křivkou, která udává vztah mezi měřenými schopnostmi a pravděpodobností správné odpovědi. Na rozdíl od klasické testové teorie je charakteristická křivka nelineární funkce, což vede ke zpřesnění výsledků. Tvar každé charakteristické křivky je dán několika parametry – nejčastěji je používán tříparametrový logistický model s parametry obtížnosti, rozlišovací účinnosti a uhádnutelnosti.

Parametr obtížnosti je jednoduše obtížnost položky (nejdůležitější z parametrů) a odpovídá úrovni měřených schopností potřebných ke správnému zodpovězení položky s pravděpodobností 50 %. Parametr rozlišovací účinnosti má vliv na strmost charakteristické křivky, přičemž položky s vyšším parametrem rozlišovací účinnosti mají strmější průběh, tedy i malý pohyb ve směru osy x (symbolizující úroveň měřených schopností) způsobí výrazný posun ve směru osy y (vyjadřující pravděpodobnost správné odpovědi na položku). Obecně lze říci, že čím vyšší je parametr rozlišovací účinnosti položky, tím kvalitnější tato položka je. Poslední z parametrů je parametr uhádnutelnosti používaný v uzavřených položkách, kde volíme z určitého počtu možností. Zřejmě pokud vybírá testovaný jedinec odpověď ze čtyř možností (z nichž všechny jsou na pohled stejně pravděpodobné), má 25% šanci uhádnutí správné odpovědi, parametr uhánutelnosti bude mít hodnotu 0,25.

Příkladem vyjádření tříparametrového logistického modelu může být

$$P_i(\theta) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta - b_i)}},$$

kde $P_i(\theta)$ značí pravděpodobnost správné odpovědi na i-tou položku za předpokladu měřených schopností na úrovni θ, a_i je parametr rozlišovací účinnosti i-té položky, b_i parametr obtížnosti i-té položky, c_i parametr uhádnutelnosti i-té položky a D je konstanta, která aproximuje logistickou křivku do tvaru co nejpodobnějšího normálnímu kumulativnímu rozložení.

Adaptivní test z matematiky – ADAPTEQ

Jak již bylo popsáno výše, adaptivní testování se používalo (a i dnes používá) zejména v psychologii. V posledních letech se tento typ testování rozšířil i do oblasti výuky jazyků (příkladem může být test COMPACT využívaný Masarykovou univerzitou k určení úrovně anglického jazyka zejména u studentů v prvních ročnících). Mohl by ale test fungovat i v matematice? Právě nalezení odpovědi na tuto otázku bylo cílem mé diplomové práce, obhájené v roce 2017, i jejího následného rozšíření.

V testovacím prostředí adaptivního testu anglického jazyka COMPACT byl vytvořen test ověřující schopnosti testovaného jedince řešit vybrané úlohy středoškolské matematiky. Pro dostatečně širokou škálu různě náročných matematických úloh bylo třeba vytvořit obsáhlou položkovou banku, z technických a časových důvodů byl výběr položek do banky omezen pouze na rovnice a nerovnice probírané na středních školách a gymnáziích. V rámci tohoto tématu byla vytvořena banka o více než 500 položkách, přičemž některé z nich jsou stavěné jako otevřené úlohy, jiné jako uzavřené. V rámci rozšíření adaptivního testu z matematiky byla přidána další témata, a to kombinatorika, pravděpodobnost a statistika, jazyk matematiky a geometrie. V současné době čítá položková banka více než 2 500 položek.

Celé prostředí ADAPTEQ v současné době není zamýšleno jako nástroj k testování a následnému hodnocení studentů, ale spíše jako studentská pomůcka. Je vytvořeno a zpřístupněno více než 30 testů o osmi až deseti úlohách, které mohou studenti opakovaně otevírat (vždy se vygeneruje jiná sada úloh) a trénovat své schopnosti v dané části středoškolské matematiky. Touto formou se mohou poměrně zábavně učit a zároveň získávat zpětnou vazbu. Na konci každého testu se vytváří statistika úspěšnosti v jednotlivých typech úloh (například rovnice s neznámou ve jmenovateli, permutace s opakováním a další) včetně jistoty, se kterou na jednotlivé typy úloh student odpovídal (za každou úlohou je položena otázka na jistotu odpovědi). Student zkrátka zjistí, které typy úloh jsou pro něj problémové, případně u kterých typů úloh si příliš nedůvěřuje, přestože jsou jeho odpovědi správné.

Konkrétní fungování testů

Jak již bylo zmíněno výše, pro vytvoření kvalitního adaptivního testu je třeba velmi obsáhlá položková banka, jinak by se mohlo stát, že se budou při opakovaném spouštění testu položky opakovat, případně nebude dostatečné množství položek určité úrovně obtížnosti. Následně je nutné, aby byla každá položka popsána svou charakteristickou křivkou, tedy aby měla vypočtené hodnoty parametru obtížnosti, rozlišovací účinnosti i uhádnutelnosti. V zájmu objektivity testu je nežádoucí nastavit parametry položky hned při její tvorbě, proto je systém vypočítává postupně z odpovědí velkého množství testovaných jedinců (v tomto případě má každá položka pevně dané parametry po vygenerování ve 100 testech). Z důvodu poměrně krátké doby fungování se test ADAPTEQ nyní nachází ve fázi výpočtu parametrů, otázky v testech se tedy ve většině případů negenerují na základě obtížnosti, ale zařazují se do testu pouze s ohledem na typ úlohy stanovený konkrétním testem.

Generování položek do testů samozřejmě není zcela náhodné. Každá položka obsahuje tzv. štítek, který ji řadí k určitému typu úloh, například k rovnicím s absolutními hodnotami nebo k výpočtům průměrů. Test je pak složen z položek s předem danými štítky, každému studentovi se při každém spuštění testu vygeneruje stejný počet úloh určitého typu, kupříkladu v testu s názvem Kombinatorika se vždy vygeneruje právě jedna úloha věnující se určení počtu variací s opakováním, právě jedna úloha na určení počtu kombinací a tak dále. Na základě rozdělení položek pomocí štítků funguje i závěrečná statistika úspěšnosti studenta.

Adaptivní test z matematiky ADAPTEQ by mohl pomoci řadě studentů nejen při přípravě na běžné písemné práce z matematiky, ale samozřejmě i při přípravě k maturitní zkoušce z matematiky či k přijímacím zkouškám na vysokou školu. Přiznejme si, že velká část dnešních studentů má mnohem blíže k internetu než k tištěné učebnici, pojďme jim proto vyjít vstříc a dát jim možnost trénovat své matematické dovednosti v jejich přirozeném prostředí a v mírně „soutěžní“ formě.

Literatura

[1] Bušková, P. (2017). *Elektronický materiál pro podporu výuky matematiky na SŠ* [Diplomová práce]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/th/k43vl/dp_buskova.pdf

[2] Jelínek, M., Květon, P. & Denglerová, D. (2006). Adaptivní testování – základní pojmy a principy. *Československá psychologie*, 50(2), 163–173.

[3] Urbánek, T. & Šimeček, M. (2001). Teorie odpovědi na položku. *Československá psychologie*, 45(5), 428–440.

Návody z matematickej kuchyne

Lucia Csachová[1]

Význam inovatívnych metód v školskej matematike je nespochybniteľný. Zaktivizovať žiakov a zmeniť ich spôsob myslenia pri riešení rôznych úloh patrí len k niektorým cieľom. Učitelia matematiky ale stále tieto metódy používajú málo, pretože ich použitie pri riešení úloh považujú za časovo náročné. V príspevku by sme chceli ukázať použitie vybraných inovatívnych metód.

V poslednom čase sa z radov odborníkov i laickej verejnosti zintenzívňuje požiadavka na používania inovatívnych metód v školstve, zameraných na zaktivizovanie žiakov. Z naozaj širokej ponuky týchto metód by sme sa chceli zamerať na nasledujúce tri: *placemat*, *cinquain* a *kľúč k trezoru s jednotkou*. Všetky tieto metódy je možné použiť v akomkoľvek predmete, nielen v matematike.

Názov metódy *placemat* pochádza z anglického slova s významom „prestieranie“ (zakrývajúce časť stola nemecký ekvivalent je Platzdekchen). Daná metóda spája brainstorming s prvkami neverbálnej komunikácie a skupinovej práce. Žiaci sa rozdelia do 4-členných skupín (prípadne 5-členných), kde každá skupina dostane papier formátu A3 rozdelený tak, ako je to na obr. 1a, a každý žiak v skupine pero inej farby. V strednom políčku sa vyskytuje impulz, čo môže byť úloha (resp. jej zadanie), otázka, problém alebo obrázok (Cafiková & Reichelová, 2013).[2] Zúčastnení majú danú úlohu v svojom príslušnom políčku na papieri vyriešiť, prípadne riešenie len navrhnúť. Keď to urobia, papier sa pootočí tak, aby dané políčko dostal susedný žiak. Ten reaguje na to, čo napísal žiak pred ním. Papier sa otáča dovtedy, kým každý žiak nemá pred sebou to, čo napísal ako prvý. Táto etapa práce prebieha len v neverbálnej rovine, žiaci nesmú rozprávať, môžu len písať. Nakoniec sa papiere rozvesia v triede a žiaci o riešeniach diskutujú. Takýmto spôsobom sa učia sformulovať svoje myšlienky a postupy, vyjadrovať sa k práci iných a diskutovať.

My sme metódu placemat použili v rámci cvičení z predmetu Didaktika matematiky pri nacvičovaní jednej z kompetencií učiteľa matematiky – schopnosti tvoriť zadania matematických úloh. Ako impulz sme vybrali obrázok z úlohy z externej časti maturity[3], ktorý predstavoval trojrozmernú situáciu, čo ale nebolo evidentné.

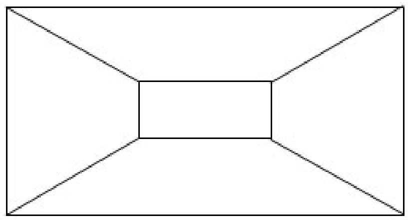
---

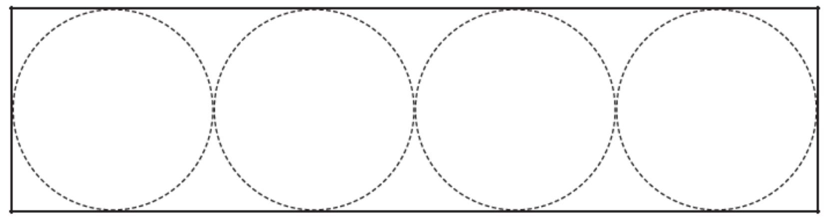
[1]Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, lucia.csachova@gmail.com

[2]S touto metódou sme sa stretli prvýkrát v uvedenom príspevku (Cafiková & Reichelová, 2013), v ktorom autorky opisujú riešenie úlohy „Koľko volejbalových lôpt sa zmestí do tejto miestnosti?“ Žiaci pritom nedostali žiadne ďalšie informácie, ktoré by im pri riešení mohli pomôcť.

[3]Obrázok pochádza zo zadania úlohy č. 13 z externej časti maturity z roku 2015. Jej zadanie bolo nasledujúce: „Štyri tenisové loptičky možno kúpiť v jednom balení v tvare valca (pozrite schému na obrázku). Každá loptička sa dotýka susednej loptičky a plášťa, prípadne podstavy valca. Koľko percent z celého vnútorného objemu valca tvorí prázdny priestor, ktorý nevypĺňajú tenisové loptičky?“ (zdroj: www.nucem.sk/dl/1669/MAT_1203.pdf)

Študentom sme pritom zadali: *Zostavte úlohu, ktorej súčasťou zadania je nasledujúci obrázok.* – obr. 1b. Zadania väčšiny študentov boli s čisto matematickým kontextom a týkali sa geometrie v rovine, niektorí študenti si úlohu ale pamätali a snažili sa sformulovať zadanie o tenisových loptičkách.





Obr. 1: a) Schéma rozdelenia papiera pre metódu placemat, b) obrázok použitý ako impulz pre metódu placemat (zdroj: www.nucem.sk/dl/1669/MAT_1203.pdf).

Ďalšou inovatívnou metódou je *cinquain* [senkén], ktorej názov je odvodený od francúzskeho „päť" a mohli by sme ho chápať ako „pätica" či „súbor piatich prvkov". Pôvodne bol cinquain básnickou formou[4], ktorá určila aj umeleckú povahu tejto metódy. Podstatou metódy je vytvorenie päťveršovej básne podľa nasledujúcich presne stanovených kritérií (Štefančínová, 2015):

1. verš tvorí jedno PODSTATNÉ MENO, ktoré vyjadruje aj názov básne,

2. verš tvoria dve PRÍDAVNÉ MENÁ, ktoré charakterizujú podstatné meno z 1. verša,

v 3. verši sú tri SLOVESÁ vyjadrujúce dynamiku podstatného mena z 1. verša,

4. verš predstavujú štyri SLOVÁ, ktoré vyjadrujú postoj alebo pocit autora k tematike básne,

a v 5. verši je jedno PODSTATNÉ MENO určujúce podstatu javu.

Napriek tomu, že školská matematika (najmä základnej školy) nepoužíva množstvo „matematických" pojmov, tvorba cinquainu „núti" autora vyjadriť sa presne a stručne k danej téme. Ako ukážku môžeme uviesť „básničky" na obr. 2.

číslo	štatistika
kladné záporné	popisná interferenčná
vynásobiť vydeliť porovnať	počítať čítať predikovať
v škole doma na písomke viem	dôležitá pre život človeka
výsledok	obrázky

Obr. 2: Cinquain vytvorený: a) študentkou učiteľstva matematiky (téma Číslo), b) vlastná tvorba autorky (téma Štatistika).

[4]Cinquain vytvorila v roku 1911 americká poetka Adelaide Craps (1878–1914).

Poslednou metódou, ktorej sa chceme venovať, je *kľúč k trezoru s jednotkou.* Podstata spočíva v tom, že učiteľ sformuluje 10 matematických výrokov, ktoré môžu byť pravdivé i nepravdivé. Pri každom výroku si žiak zapíše jeho pravdivostnú hodnotu, takže má v závere 10-miestny binárny kód. Ak je rovnaký ako kód zverejnený na konci učiteľom, tak získava jednotku. Žiaci si takto zopakujú tému a učiteľ zistí, aká je úroveň pochopenia učiva a čítania s porozumením. Namiesto výrokov môže učiteľ zadať žiakom napríklad rôzne úlohy s výberom jednej odpovede a kódom bude 10-miestny „písmenkový“ kód.

Danú metódu sme využívali na začiatku prednášok z predmetu Štatistika v rámci vysokoškolského štúdia. Reakcie študentov boli veľmi pozitívne (aj keď nedostávali za správne odpovede známky ani body), aktivitu pravidelne očakávali, a týmto spôsobom sme nielen my, ale aj študenti získali spätnú reakciu o pochopení témy z predchádzajúcej prednášky.

Poďakovanie

Príspevok bol napísaný s podporou grantu GAPF 1/12/2018.

Literatúra

[1] Cafiková, K. & Reichelová, M. (2013). Fermiho úloha riešená pomocou vyučovacej metódy placemat. In *Acta Mathematica 16* (44–49). Nitra: Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University.

[2] Štefančínová, I. (2015). *Aktivizujúce a motivujúce stratégie vo vyučovaní fyziky.* Bratislava: MPC.

Nahliadnutie do učenia (sa) pomocou Minecraftu na škole Pacinotti-Archimede v Ríme

Mária Čujdíková[1]

V príspevku sa podelím o svoju skúsenosť zo strednej školy Pacinotti-Archimede v Ríme, kde som navštívila hodinu zameranú na tvorbu 3D hier v Minecrafte. Hodinu viedol Minecraft Global Mentor Marco Vigelini, ktorý sa intenzívne venuje vzdelávaniu prostredníctvom Minecraftu a je známy v celom Taliansku. Žiaci na hodine, ktorú som navštívila, programovali v Minecrafte vlastné hry. Nešlo iba o využitie moderného nástroja, ale celkovo sa tu dalo pozorovať viacero princípov moderného vzdelávania. Verím, že prípadová štúdia, ktorú predstavím, môže byť inšpiráciou pre podobné využitie Minecraftu na školách či v neformálnom vyučovaní, ale tiež zaujímavou ukážkou nového vzdelávania, zmysluplného pre život v 21. storočí.

Na tému učenia sa vďaka hraniu videohier sa vyjadrili už viacerí odborníci (Devlin, 2011; Papert, 1995; Papert, 1998; Gee 2003, Gee 2007). Papert už v roku 1998 vyslovil: „Pozoroval som, že deti, ktoré sa intenzívne zaoberajú počítačovými hrami, často vykazujú výnimočnú úroveň vo svojich spôsoboch myslenia, a tiež v spôsobe, akým rozprávajú o učení sa.“ (Papert, 1998) Tento potenciál videohier odhaľujú aj školy, a videohry sa tak postupne stávajú súčasťou vyučovania. Jednou z hier, ktorej sa to už podarilo, je práve Minecraft. V tomto článku sa chcem podeliť o svoju skúsenosť zo strednej školy v Ríme, na ktorej sa žiaci učia v Minecrafte programovať 3D hry.

Minecraft a Minecraft Education Edition

Minecraft je jedna z najpopulárnejších videohier. Je to hra, ktorá nás vtiahne do sveta zloženého z kociek. Stretáme tu kockaté zvieratá, obklopujú nás kockaté lesy, budovy sú tvorené z kociek rôznych materiálov a aj my (teda naša postava v hre) sme kockatí. Tento svet môžeme sami rozširovať, sami tu môžeme stavať domy, námestia či celé mestá, vytvoriť vlastnú záhradu či vodnú plochu. Je to niečo ako lego, len s neobmedzeným množstvom kociek. Kocky, ktoré potrebujeme k stavbe, môžeme získať priamo vo svojom okolí. Napríklad, ak vyrúbeme strom, získame drevo, ak kopeme krompáčom do pôdy, získame hlinu... Iné kocky vieme vyrobiť tak, že spojíme kocky, ktoré už máme, a dostaneme kocku novej suroviny. V hre sa stretávame spolu s ďalšími hráčmi, vďaka čomu môžeme tvoriť aj spoločne.

[1]Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, cujdikova1@uniba.sk

Obr. 1: Zdroj: https://mojang.com/games/

Od roku 2016 Minecraft ponúka špeciálnu edíciu pre školy – Minecraft Education Edition. Tá umožňuje učiteľom, aby sami pripravovali a využívali minecraft svety. V škole na danom predmete sa potom môžu žiaci z celej triedy spolu s učiteľom alebo učiteľkou stretnúť vo vopred vytvorenom projekte. Množstvo svetov, ktoré už učitelia vytvorili a verejne sprístupnili, môžeme nájsť na https://education.minecraft.net.

Súčasťou verzie Minecraft Education Edition je tiež Code Builder, ktorý umožňuje žiakom, aby v Minecraft svete sami programovali. Žiaci si tak môžu naprogramovať dokonca celú vlastnú hru, čo je práve spôsob, akým Minecraft využívajú aj na škole Pacinotti-Archimede.

Na Pacinotti-Archimede s Marcom Vigelinim

Pacinotti-Archimede je inovatívna stredná škola so zameraním na počítačové vedy a s možnosťou orientovať sa priamo na tvorbu hier a game design. Sídli v Ríme. Je to prvá stredná škola v Taliansku, ktorá ponúka zameranie na tvorbu videohier. Škola má niekoľko počítačových učební a 3 laboratória, kde študenti pracujú s 3D tlačiarňami a inými technologickými zariadeniami. Budova školy nepôsobí práve najnovším dojmom, ale duch, ktorý tam vládne, je moderný.

Hodinu, ktorú som navštívila, viedol Marco Vigelini, člen programu Minecraft Global Mentor. Marco bol prvým v Taliansku, kto začal so vzdelávaním v Minecrafte. Pomocou Minecraftu na školách sám učí, ale vytvára aj materialy na učenie pre iných učiteľov. Tiež sa podieľa na tvorbe vzdelávacích projektov spolu s múzeami. Viac informácií o jeho projektoch môžeme nájsť na stránke www.makercamp.it. Minecraft ako nástroj na vzdelávanie v škole predstavil v roku 2014. V súčasnosti pomocou neho učí deti na základných školách vo veku od 7 do

13 rokov a tiež staršie deti práve na spomínanej strednej škole. Hovorí: „Minecraft využívam doslova na všetko a často najradšej miešam všetko dokopy – AR, VR, umenie, computational thinking, problem solving, robotiku a samozrejme matematiku.“ Za pozitívne na Minecrafte považuje, že je rovnako vhodný pre dievčatá, ako aj pre chlapcov.

Programovanie 3D hier v Minecrafte

Počas mojej návštevy na Pacinotti-Archimede som mala príležitosť sledovať priebeh hodiny zameranej na tvorbu 3D hier v Minecrafte. Predmet bol určený pre 1. ročník. Spolu s Marcom ho viedli ďalšie dve učiteľky, ktoré tam boli prítomné súčasne s ním. Na tomto predmete sa žiaci zoznamujú so základmi navrhovania a tvorby hier, od nápadu k hre cez tvorbu príbehu až po jej grafické realizovanie, programovanie a testovanie.

Obr. 2: Hodina zameraná na tvorbu 3D hier v Minecrafte

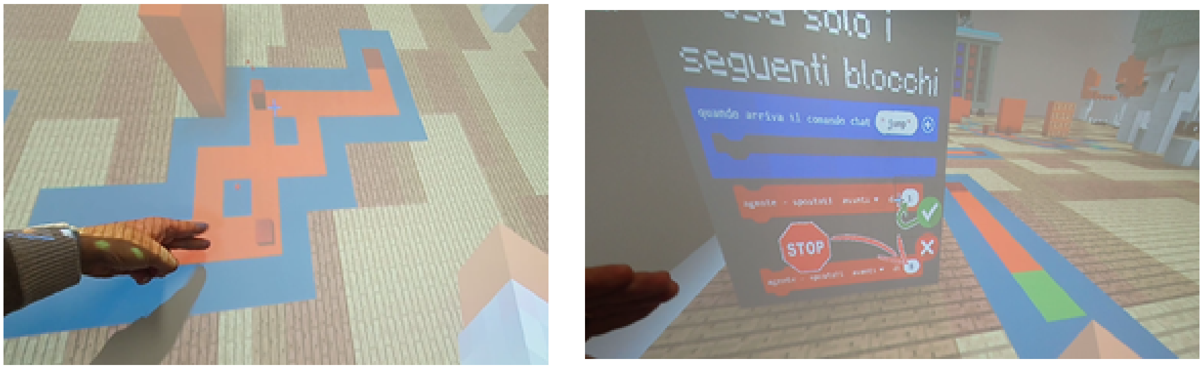
V čase, keď som bola na tejto škole, žiaci programovali vlastné hry, v ktorých sa venovali aktuálnym svetovým problémom. Tému svojej hry si mali vybrať spomedzi cieľov pre trvale udržateľný rozvoj zverejnených na stránke organizácie spojených národov (www.un.org). Žiaci sa tak okrem tvorby hier zoznamujú so súčasnými problémami, akými sú extrémna chudoba, hlad vo svete, nedostatok pitnej vody, globálne otepľovanie, rasizmus, rodová nerovnosť, ... a nezoznamujú sa s nimi pasívnym prijímaním informácií, ale tým, že sa sami aktívne snažia vymyslieť, ako tieto problémy riešiť. Naviac po naprogramovaní hry dajú možnosť aktívne sa stretnúť s daným problémom aj svojím spolužiakom či iným hráčom tým, že si budú môcť ich hru tiež zahrať, a prebrať tak rolu hrdinov, ktorí s daným problémom zápasia.

Žiaci svoje hry tvoria v skupinách, pričom jedna skupina sa skladá z troch až štyroch dvojíc. Podľa Marcových slov „základom, na ktorom je projekt založený, je vedieť, ako spolupracovať s ostatnými a porozumieť pohľadu hráča. Myšlienka vymieňať si pozície a pozerať sa na to, ako hráč hrá vašu videohru, pochádza z párového programovania.“. Pri jednom počítači vždy sedia dvaja, pričom jeden programuje a druhy skúša, ako práve naprogramovaný kód funguje a navrhuje vylepšenia. Žiaci sa vďaka spolupráci v dvojiciach a v skupinách zároveň učia tímovej práci. Rozvíjajú svoju schopnosť komunikovať, preberať spoločnú zodpovednosť a robiť spoločné rozhodnutia s ostatnými členmi skupiny, čo sú veľmi cenné kompetencie aj pre ich budúci život.

Žiaci boli počas hodiny do tvorby naplno ponorení. Vášnivo diskutovali a skúšali realizovať svoje zámery. Učitelia ich nechávali tvoriť samostatne, ale vždy ochotne pomohli, keď bolo treba. Z Marca aj z ďalších dvoch učiteliek sršal entuziazmus. Usmievali sa a šírili v triede pohodu. Vyzeralo to, že žiaci majú voči nim dôveru a neboja sa ozvať, keď potrebujú poradiť. Viackrát nastala situácia, že si niekto z nich prisadol k dvojici, ktorá požiadala o pomoc, a riešili problém spoločnými silami.

Školu som navštívila v strede januára. Žiaci mali teda za sebou už štyri a pol mesiaca vyučovania. Do programovania hier, na ktorých práve pracovali, sa pustili len týždeň predtým. Na začiatku školského roka sa v rámci tohto predmetu najskôr učili základy programovania v Minecrafte. Marco Vigelini pre nich za týmto účelom pripravil priamo minecraftové prostredie plné programátorských úloh, kde sa postupne zoznamovali s jednotlivými príkazmi a štruktúrami. Ich úlohou bolo ovládať pomocou príkazov robota, ktorý mal za úlohu prejsť určitým bludiskom. Úlohy začínali od najjednoduchších a postupne sa sťažovali. Obmedzenia ku konkrétnej úlohe boli vždy napísané na tabuli v Minecraft svete umiestnenej hneď vedľa daného bludiska.

Po prejdení cez tieto programátorské lekcie, a teda zoznámení sa zo základmi programovania v Minecrafte, žiaci pokračovali tým, že v skupinách tvorili menšie hry. Tieto hry sa potom nechali zahrať ostatné skupiny, aby získali spätnú väzbu. Zistili tak, či ich hra nie je príliš ťažká, alebo naopak príliš jednoduchá, alebo či tam nie sú niektoré veci príliš neuchopiteľné... Poskytovaním spätnej väzby sa tiež zoznámili so základmi testovania. Na to nadviazali výberom témy a začatím veľkých projektov, na ktorých pracovali v čase mojej návštevy.



Obr. 3: Projekt na oboznámenie sa základmi programovania v Minecrafte

Rozvoj matematického myslenia

Čo sa týka rozvoja matematického myslenia v rámci tohto predmetu, Marco verí, že to sa deje automaticky a že sa mu ani nedá vyhnúť. Už pri prechádzaní úvodných programátorských úloh si žiaci zároveň aj rozvíjali matematické myslenie, pretože tam potrebovali logicky uvažovať (robot mal prejsť určitým bludiskom, alebo niečo postaviť – bolo treba vymyslieť stratégiu, algoritmus, ako na to), počítať (vyrátať si počet potrebných kociek, optimalizovať material pri úlohe) či pracovať s 3D priestorom (robot sa pohyboval a staval v 3D svete). S tým všetkým pracujú žiaci aj keď programujú vlastné hry. V nich však naviac často sami pridávajú výzvy, ktorých súčasťou riešenia je matematika. Marco si myslí, že keď žiaci takto aktívne pridajú matematickú otázku, je to tiež prínosné pre rozvoj ich matematického myslenia. Považuje za obohacujúcejšie pre žiakov, ak sami vytvárajú takéto úlohy, ako keď ich iba riešia vo svete, ktorí pre nich vytvorí učiteľ alebo učiteľka. Hovorí: „Veľkým rozdielom je, keď chceš od žiaka, aby niečo vytvoril. Keď to dokáže vytvoriť, znamená to, že tú úlohu pochopil. Študent ťa môže napríklad požiadať, aby si umiestnil blok v zlomku. Ďalší študent sa ťa môže spýtať, koľko kvetov je v záhrade. Takže je to na nich. Ale akonáhle sú to oni, kto sa ťa pýta otázky, znamená to, že si oni sami už tú otázku položili a už si na ňu aj odpovedali. To je ten rozdiel, sú aktívni, nie pasívni. Je to ako keď sa tradičným spôsobom spýtaš na vytvorenie problému. Môžem ti dať problém a ty ho musíš vyriešiť. Môžem ti dať číslo a ty môžeš vytvoriť problém, ktorý je riešiteľný týmto číslom. Takže oni musia problémy vytvárať, aby boli aktívni."

Princípy moderného vzdelávania

Kalaš (2012) píše: „Väčšina z nás nedokáže prehliadať skutočnosť, že ľudská spoločnosť sa za ostatných 50 rokov zmenila viac, ako kedykoľvek predtým. Zmenil sa náš životný štýl, zmenil sa trh práce a zmenili sa požiadavky zamestnávateľov na mladých absolventov škôl – ich nových potenciálnych zamestnancov. To všetko sa premieta aj do rastúcej nutnosti (z)meniť formálne vzdelávanie žiakov a študentov, starostlivo prehodnotiť akademický obsah vzdelávania a reagovať na celkom nové potreby na úrovni zručností pre produktívny život v dnešnej – a najmä zajtrajšej – spoločnosti.“ Na tomto predmete sa mi páčilo, že išlo o vyučovanie v takomto novom duchu. Nešlo iba o využitie moderného a atraktívneho nástroja, ale predmet bol celkovo založený na modernom učení a učení sa tak, aby sa u žiakov rozvíjali kompetencie potrebné pre život v 21. storočí.

Mohli sme tu vidieť:

- Kreatívne využitie digitálnych technológií na učenie sa objaviteľským spôsobom, tým že žiaci sami niečo vytvárajú, konštruujú – v súlade s Papertovým konštrukcionizmom.
- Aktívne učenie sa, nie pasívne prijímanie informácií.
- Učiteľ nie je v pozícii niekoho, kto odovzdáva poznanie, ale je pomocníkom na dobrodružnej ceste objavovania.
- Tímová práca – spolupráca vo dvojiciach aj v skupinách.
- Prelínanie rôznych tém, rozvíjanie viacerých zručností zároveň.
- Zapájanie sa do riešenia globálnych problémov.
- Budovanie osobnostných zručností (soft skills).
- Dôraz na rodovú rovnosť, zapojenie všetkých žiakov.
- Rozvoj digitálnej gramotnosti.
- Rozvoj kritického myslenia.
- Rozvoj tvorivosti, inovatívneho myslenia.
- Preberanie vlastnej zodpovednosti za svoju prácu ako aj spoločné zdieľanie zodpovednosti v rámci tímu.

Záver

Potencial videohier na učenie sa a rozvoj rôznych kompetencii nevyhnutných pre život v 21. storočí je naozaj veľký. Verím, že si preto zasluhujú svoje miesto aj na školách, kam sa postupne dostávajú. V príspevku som predstavila príklad využitie Minecraftu na strednej škole Pacinotti-Archimede. Myslím si, že nahliadnutie do vyučovania na tejto škole môže byť inšpiráciou aj pre zmysluplné využitie Minecraftu na školách u nás. Minecraft môže byť užitočný aj na hodinách matematiky, kde sa pri vhodne pripravenom svete či aktivite môžu žiaci objaviteľským spôsobom zoznámiť s rôznymi matematickými konceptmi. Pacinotti-Archimede nám tiež dáva príklad, ako celkovo pristupovať k učeniu novým spôsobom tak, aby mala škola zmysel aj pre budúci život žiakov.

Poďakovanie

Chcem sa poďakovať Marcovi Vigelinimu a ostatným učiteľom za možnosť návštevy školy a hodiny a za ich ochotu a ústretový prístup. Za ochotu a ústretový prístup sa chcem poďakovať tiež žiakom.

Literatúra

[1] Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning.* Natick: A. K. Peters, Ltd.

[2] Gee, J. P. (2003). *What videogames have to teach us about learning and literacy.* New York: Palgrave Macmillan.

[3] Gee, J. P. (2007). *Good videogames and good learning.* Madison: University of Wisconsin.

[4] Kalaš, I. (2012). Učíme a učíme sa v 21. storočí. In *Elektronický zborník konferencie DidInfo* (35–46). Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela. Dostupné z http://www.didinfo.net/images/DidInfo/files/didinfo_2012.pdf

[5] Papert, S. (1995). The parent trap. *Time magazine*, November 13.

[6] Papert, S. (1998). Does easy do it? Children, games, and learning. *Game developer magazine*, June.

Rozvíjame kritické myslenie

Ivona Demčáková[1]

V poslednej dobe sa o pojme kritické myslenie rozpráva oveľa viac. V príspevku sa preto budeme venovať zadefinovaniu tohto pojmu a pokúsime sa popísať niekoľko metód na rozvíjanie kritického myslenia na hodinách matematiky. Porozprávame aj o výsledkoch krátkeho prieskumu medzi učiteľmi. Príspevok zakončíme svojimi skúsenostiach so spoločenskými hrami a hlavolamami na hodinách matematiky.

Zo všetkých smerov sa šíria rôzne informácie, ktoré často nie sú úplne správne – niekedy ide o omyl autora, inokedy o jeho zámer. Ak chceme tieto informácie rozlišovať, musíme sa nad nimi kriticky zamýšľať. Zamestnávatelia, školské dokumenty, ale aj široká verejnosť poslednú dobu oveľa častejšie poukazujú na potrebu kritického myslenia. Preto najlepším miestom, kde môžeme my učitelia rozvíjať kritické myslenie mladých ľudí, je škola. Rozvoj kritického myslenia je aj jednou z kompetencií, ktoré podľa štátneho vzdelávacieho programu majú učitelia na základných a stredných školách rozvíjať. „Kritické myslenie má zásadný význam pre efektívne učenie sa a pre produktívny život, a preto sme ho zaradili medzi kľúčové kompetencie.“ (Turek, 2005)

Pre kritické myslenie sú charakteristické vyššie myšlienkové procesy, ako analýza, usudzovanie, dedukcia a hodnotenie. V rámci riešenia problému človek musí uvažovať, rozhodovať sa a usudzovať. Počas uvažovania a rozhodovania človek porovnáva možnosti a rozhoduje sa podľa výhod a nevýhod jednotlivých riešení. Z preštudovaných materiálov a rôznych zdrojov informácií si človek usudzovaním vytvorí závery. Kritické myslenie sa opiera o argumenty, ktoré pozostávajú z tvrdení, dôvodov a dôkazov.

Zhrnieme si, aké vlastnosti má kriticky mysliaci človek:

- vie vybrať dôležité informácie, určiť pravdivosť týchto informácií, vie ich spracovať a overiť dôsledky,
- má schopnosť vybrať vhodné riešenie problému,
- vie podložiť svoje tvrdenia správnymi argumentmi a dokázať ich správnosť,
- dokáže zhodnotiť reálnosť svojho riešenia a výsledku,
- vie zvoliť správnu stratégiu.

[1] KMANM FMFI UK v Bratislave, ivona.demcakova@gmail.com

> Prejavom kritického myslenia sú časté otázky, ktoré človek kladie buď sám sebe, alebo svojmu okoliu. Kriticky mysliaci človek kladie otázky: Prečo? Čo sa tým myslí? Čo je dôležité? Aké sú fakty? Dá sa to overiť? (Ennis, 2011)

Výsledky dotazníka

Medzi učiteľmi matematiky sme uskutočnili malý prieskum formou dotazníka. Zaujímalo nás hlavne ich vnímanie pojmu kritické myslenie a zisťovali sme ich názor na skupinovú prácu. Dotazník vypĺňali učitelia z celého Slovenska s rôzne dlhou pedagogickou praxou.

Učitelia uviedli, že pod kritickým myslením sa určite nemyslí reprodukovanie poučiek. Chápu dôležitosť rozvíjania kritického myslenia, ale zároveň uviedli, že vedomosti z matematiky sú vo veľkej miere naučené naspamäť. Dôvodom podľa učiteľov môže byť aj, že žiaci neradi riešia úlohy, ktoré si od nich vyžadujú aplikovanie kritického myslenia. Nevýhodou pre učiteľov je, že podľa nich ani súčasné učebnice matematiky neposkytujú dostatok námetov na rozvoj kritického myslenia žiakov.

Pýtali sme sa učiteľov aj rôzne otázky týkajúce sa skupinovej práce. Skupinová práca poskytuje veľa priestoru na rozvíjanie kritického myslenia, pretože žiak dostane viac priestoru na vyjadrenia svojho názoru ako pri frontálnej výuke. Myslíme si, že riešenie úloh v skupinách je vhodným spôsobom na rozvíjanie kritického myslenia. Napriek tomu učitelia v dotazníku uviedli, že skupinovú prácu používajú menej a najčastejšie pri upevňovaní a opakovaní učiva.

Rozvíjanie kritického myslenia

Veľkým prínosom pri rozvoji kritického myslenia je využitie metódy učíme sa navzájom. Zaujímavými a netradičnými metódami sú tvorba a riešenie tajničiek, šifrovačky či rôzne varianty hier. Najdôležitejšou časťou aktivít je, aby žiaci počas nich argumentovali, vysvetľovali a využívali svoje deduktívne a induktívne myslenie, ktoré im pomôže lepšie spracovávať a vyhodnocovať informácie.

Rozvíjať kritické myslenie žiakov môžeme pomocou metód ako:

- brainstorming,
- myšlienková mapa,
- voľné písanie,
- sokratovský rozhovor,

- I.N.S.E.R.T,
- kladenie otázok,
- problem solving,
- riadené čítanie s diskusiou,
- prípadová štúdia,
- pexeso (hľadanie párov na základe sémantických vzťahov),
- tajničky a hlavolamy,
- šifrovačky,
- rôzne hry.

Niektoré metódy sa dajú na hodinách matematiky ťažšie použiť, ale viacero z nich sú ľahko aplikovateľné. Ako učiteľ však musíte nechať priestor deťom, aby diskutovali, mýlili sa a objavovali.

Spoločenské hry

Zaujímavou metódou, ako ozvláštniť hodiny matematiky, je riešenie rôznych hlavolamov a hranie spoločenských hier. Žiaci riešením hlavolamov, logických úloh, hraním hier zlepšujú svoje zručnosti nielen z matematiky. Okrem toho sa rozvíja ich logické a kritické myslenie. Hraním hier a prácou v skupinách zároveň rozvíjame ďalšie kompetencie ako spolupráca, kooperácia, tolerantnosť, či zvládanie emócií.

Momentálne nám trh ponúka široké spektrum hier, ktoré viacmenej súvisia s matematikou. Obľubujeme hry, ktoré sú rýchle a naraz ich vie hrať viac žiakov. Nevyhýbame sa ani hrám pre jedného hráča. Na našich hodinách matematiky používame hry ako *Ubongo, Mathable, Heckmeck, 6 bere, Ježkovi oči, Bobria banda, Logic, Continuo, Uno, Abaku.* Hry síce nie sú určené, aby sa pomocou nich dala vybudovať konkrétna oblasť matematiky, ale slúžia k opakovaniu jednoduchých počtových operácií, nútia žiakov rýchlo reagovať a vytvárať taktiku.

My sme hry zapájali do rôznych častí vyučovacieho procesu. Hry sa žiaci hrajú za odmenu, pred prázdninami, alebo po skončení tematickej oblasti. Kým mladší žiaci často riešia úlohy metódou pokus a omyl, starší žiaci už vo väčšej miere hľadajú systém a pokúšajú sa nájsť čo najefektívnejší spôsob riešenia úlohy. Aby sme sa nielen hrali, ale aj rozvíjali kritické myslenie, nechávame niekedy žiakov okomentovať svoj ťah či rozhodnutie. Často sa deje, že ostatní spoluhráči upozornia na nesprávny ťah a rozanalyzujú možnosti. Žiaci obľubujú hranie hier a oceňujú, že sa tieto hry s nimi aktívne hráme aj my.

Literatúra

[1] Ennis, R. (2011). *The Nature of Critical Thinking: An Outline of Critical Thinking Dispositions and Abilities.* Dostupné z http://faculty.education.illinois.edu /rhennis/documents/TheNatureofCriticalThinking_51711_000.pdf

[2] Turek, I. (2005). *Inovácie v didaktike.* Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave.

Propedeutika mnohouholníkov v primárnom vzdelávaní s využitím dynamickej geometrie

Jana Hnatová[1]

Učenie matematiky by malo byť pre žiakov (nielen) primárneho vzdelávania zaujímavé a zmysluplné. Z tohto dôvodu považujeme za dôležité viesť študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie ku korektnej modifikácii zatiaľ naivných žiackych predstáv o obsahu základných pojmov v elementárnej matematike. V príspevku sa zameriame na problematiku propedeutického zavedenia pojmu mnohouholník v primárnej edukácii s podporou virtuálnej manipulácie využívajúcej softvér dynamickej geometrie Geogebra.

K očakávaným výkonovým štandardom v primárnom vzdelávaní na slovenských základných školách patrí tiež schopnosť „manipulovať s niektorými priestorovými a rovinnými geometrickými útvarmi“ (ŠPÚ, 2015). Požiadavka „identifikovať a pomenovať mnohouholníky“ v rozsahu trojuholník, štvorec a obdĺžnik, sa prvýkrát objavuje vo Štátnom vzdelávacom programe (ďalej len ŠVP) v 2. ročníku ZŠ v oblasti matematika a práca s informáciami (ŠPÚ, 2015). Samotná konštrukcia uvedených mnohouholníkov (okrem konštrukcie trojuholníka), ich klasifikácia na základe dĺžok strán alebo veľkosti vnútorných uhlov je na Slovensku obsahom štúdia matematiky v nižšom sekundárnom vzdelávaní.

V primárnom vzdelávaní je budovanie predstáv o pojme mnohouholník postavené výsostne na propedeutickom základe. Vychádzajúc z potreby žiaka nadobúdať konkrétne skúsenosti spejúce k vytváraniu a následnému spresňovaniu predstáv o tomto pojme, pozrieme sa možnosti, ktoré poskytuje softvér dynamickej geometrie Geogebra a jeho zaradenie do výučby na primárnom stupni vzdelávania.

[1]KME, Pedagogická fakulta, Prešovská univerzita v Prešove, Slovensko, jana.hnatova@unipo.sk

Propedeutika mnohouholníkov s programom Geogebra

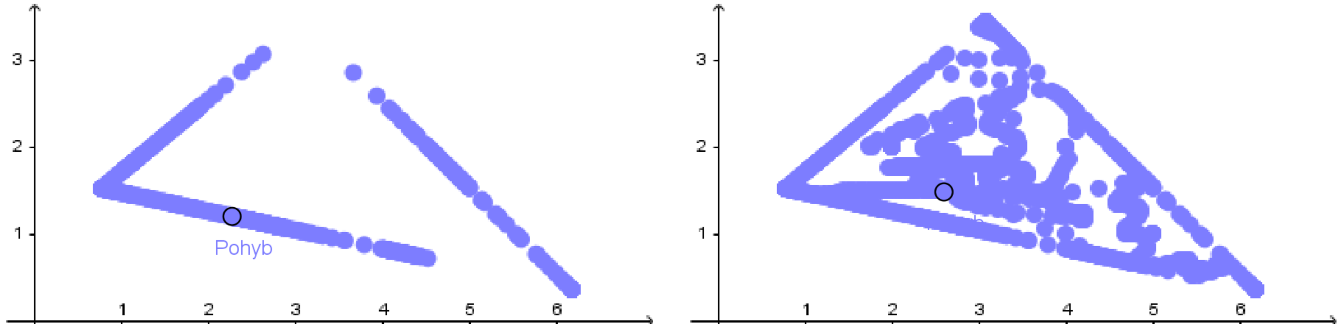
Učiteľ pri propedeutickom zavádzaní pojmu mnohouholník štandardne vychádza z jemu dostupných učebných zdrojov, metodík a veríme, že aj z vlastných poznatkov nadobudnutých štúdiom geometrie, didaktiky predmetu a skúseností získaných s prácou s digitálnymi technológiami na vysokej škole. Konkretizujme teda možnosti spredmetňovania predstáv o mnohouholníkoch nielen na haptickej, ale aj na virtuálnej úrovni manipulácie s modelmi (Žilková, 2013) v podmienkach povinne voliteľného predmetu Digitálne technológie v matematickej edukácii, ktorý je zaradený v magisterskom štúdiu učiteľstva pre primárne vzdelávanie na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity. V tomto príspevku budeme prezentovať štyri gradované verzie výkresu *Hľadá sa mnohouholník* vytvárane študentmi, ktoré sú určené žiakom 4. ročníka ZŠ s cieľom umožniť im hravou formou identifikovať „skrytý“ útvar v rovine.

Znenie: *Vytvorte výkres, v ktorom pohyb bodu v rovine nákresne umožní žiakovi identifikovať:*

- *(v.1) jeden konkrétny rovinný útvar – trojuholník (resp. štvorec, obdĺžnik).*
- *(v.2) konkrétny n-uholník z množiny pravidelných n-uholníkov (pre n* $\leq$ *10).*
- *(v.3) náhodne vybratý n-uholník z množiny pravidelných n-uholníkov.*
- *(v.4) náhodne vybratý n-uholník z množiny pravidelných n-uholníkov a poskytne:*
  - *(v.4.1) graficky spracovanú detekčnú spätnú väzbu.*
  - *(v.4.2) slovným komentárom spracovanú identifikačnú spätnú väzbu.*

Sumarizujme konštrukčné chyby, ktorých sa študenti sa pri konštrukcii výkresov dopúšťali. Signalizujú totiž existenciu závažných problémov v chápaní základných geometrických pojmov nimi samotnými. K výsledným zisteniam patria nasledujúce fakty:

- konštrukcia pravouhlých štvoruholníkov bola tendenčne nahradená konštrukciou všeobecného štvoruholníka s využitím nástroja *Mnohouholník (Polygon)* s „približne správnou“ polohou vrcholov,
- definovanie polohy bodu vzhľadom k útvaru označením obvodu útvaru, nie jeho plochy. Tak je možné pomocou stopy bodu na výkrese identifikovať len uzavretú lomenú čiaru ohraničujúcu skrytý útvar, nie však útvar samotný (obr. 1a až 1b),

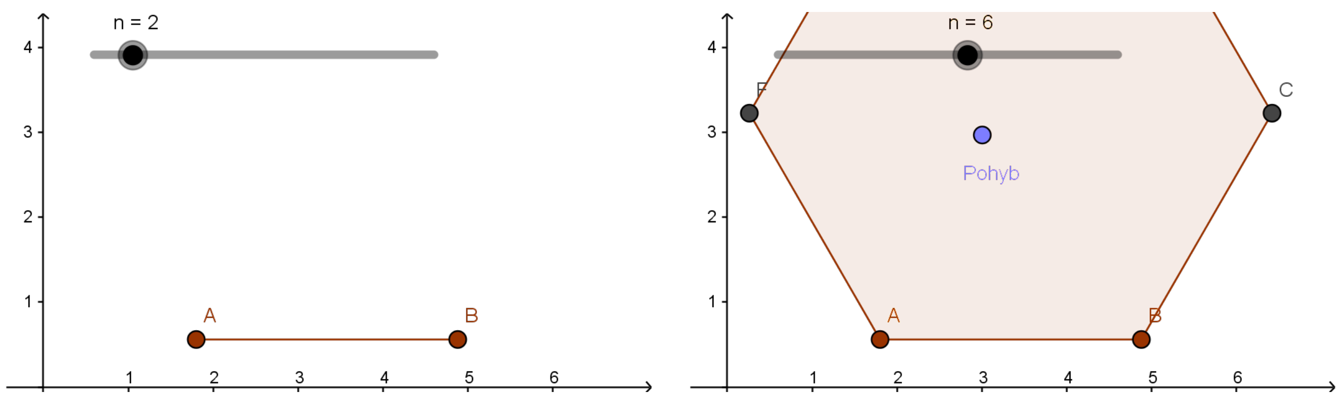


(a) (b)

Obr. 1: (a) Chybné a (b) správne zadefinovanie bodu útvaru študentmi v programe Geogebra

- chybné nastavenie minimálnej hodnotu premennej n zadávajúcej počet vrcholov pravidelného mnohouholníka v rovine (obr. 2a),

- nepremyslená voľba polohy a dĺžky strany pravidelného n-uholníka AB vychádzajúc z konštrukcie n-uholníka pomocou nástroja *Pravidelný mnohouholník (Regular Polygon)* (obr. 2b),

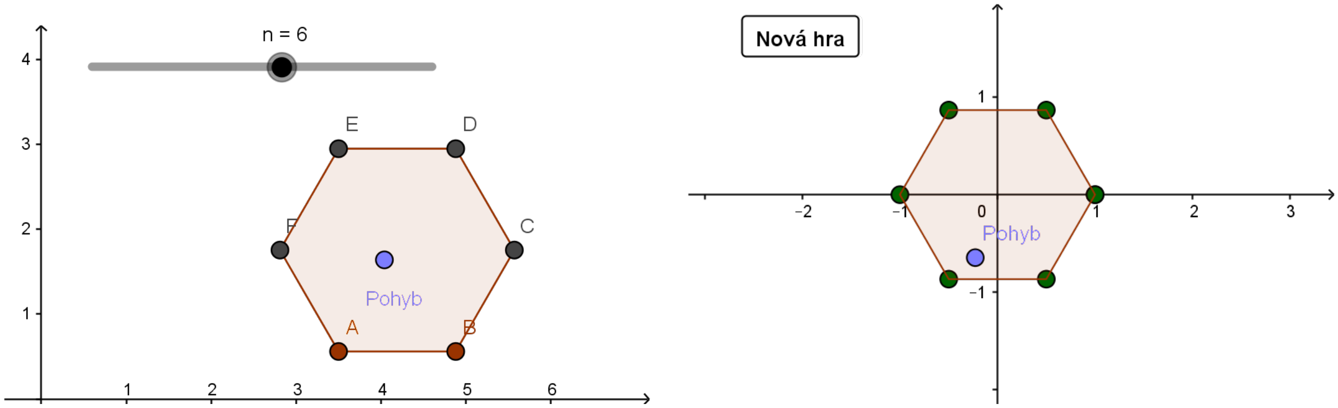


(a) (b)

Obr. 2: Chybná voľba nastavení mnohouholníka v programe Geogebra

- neschopnosť realizovať konštrukciu pravidelného n-uholníka daného stredom a polomerom opísanej kružnice pri konkrétnom zadaní n (napr. $n = 3; 8$),

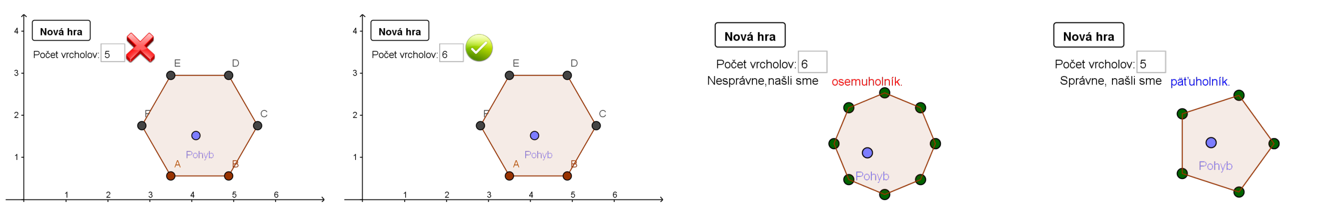
- všeobecná konštrukcia pravidelného n-uholníka s využitím jednotkovej kružnice a stredového uhla vyžadovala zásah a výklad učiteľa. Menej zdarní študenti ju do svojich výkresov neboli schopní zaradiť a zotrvávali pri konštrukcii n-uholníka použitím nástroja *Pravidelný mnohouholník* (obr. 3a, 3b),



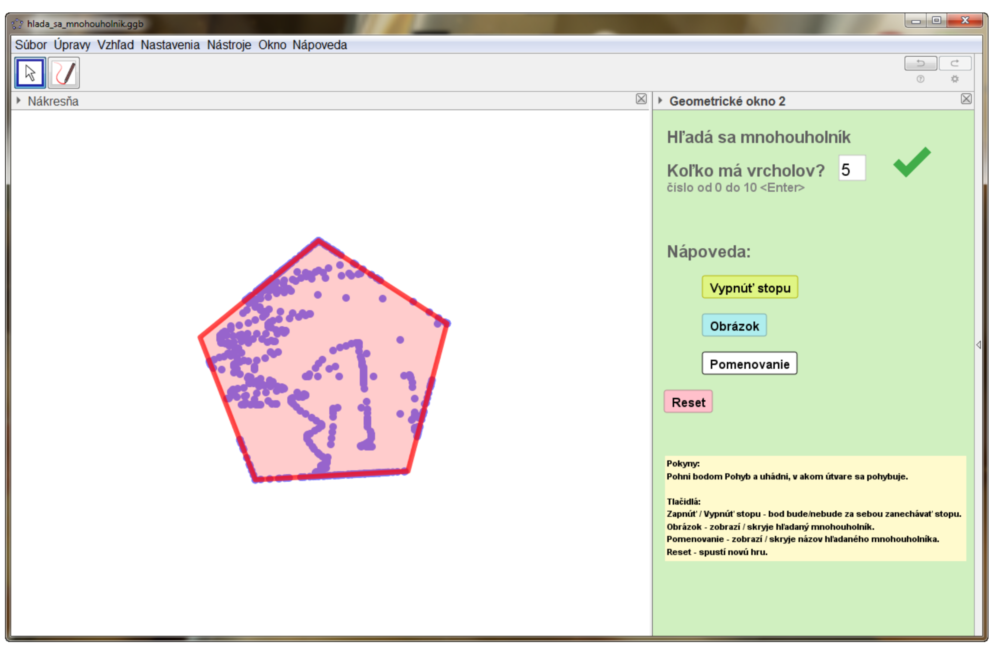
(a) (b)

Obr. 3: Rôzne prístupy ku konštrukcii mnohouholníkov v programe Geogebra

- doplnenie výkresu detekčnou spätnou väzbou bolo oproti identifikačnej spätnej väzbe študentmi preferovanejšie z dôvodu nižšej náročnosti jej spracovania (obr. 4).



Obr. 4: Spätná väzba výkresu v prostredí programu Geogebra



Obr. 5: Finálna verzia výkresu

Finálna verzia dynamického výkresu, využívajúca ovládacie okno s tlačidlami stopovania pohybu bodu, nápovede a resetu, vychádza z uvedených verzií úlohy a je pre účastníkov konferencie dostupná v GeoGebra knihe (Hnatová, 2019). Okrem náhodného výberu n-uholníka je vo výkrese náhodne generovaný i rozmer n-uholníka a jeho natočenie v rovine (obr. 5).

Žiak môže dynamický výkres využívať vo viacerých objaviteľsky orientovaných aktivitách typu: „hľadaj útvar“, „hádaj názov“, „zisti počet vrcholov“ mnohouholníka, ktoré sú prístupné v jednom spoločnom dynamickom modeli.

Učiteľovi výkres poskytuje nástroj propedeutického sprístupnenia obsahu pojmu mnohouholník, resp. n-uholník a pravidelný n-uholník. Podporuje vytvorenie explicitnej väzby na jeho pomenovanie a druhovú vlastnosťou týkajúcu sa počtu vrcholov mnohouholníka.

Záver

Využívanie digitálnych technológií vo výučbe matematiky, najme v primárnom vzdelávaní, nedovoľuje preskočiť či vynechať niektorú z etáp poznávacieho procesu. Ponúka však ďalšie možnosti získania poznatkov participujúcich na budovaní a spresňovaní pojmového aparátu, vytváraní vzájomných prepojení medzi pojmami a hľadaní detailnejších vzťahov a súvislostí medzi nimi.

Literatúra

[1] Hnatová, J. (2019). Hľadá sa mnohouholník. In *Geogebra Book Propedeutika matematických pojmov.* Dostupné z https://www.geogebra.org/m/w5mtyggj#material/dwpqeubk

[2] Repáš, V., Žilková, K. & Totkovičová, M. (2016). *Geometria pre tretí ročník ZŠ.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana.

[3] ŠPÚ. (2015). *Štátny vzdelávací program Matematika. Príloha ISCED 1.* Bratislava: ŠPÚ. Dostupné z http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf

[4] Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní.* Praha: PowerPrint.

Žákovské koncepty přímky a jejích částí

Jana Hromadová, Vlasta Moravcová[1]

Cílem příspěvku je podat stručné informace o provedeném testování žáků na konci druhého stupně vzdělávání. Zkoumali jsme, jak žáci rozumí pojmu polopřímka, resp. polopřímka opačná. V článku stručně představujeme zkoumaný vzorek žáků a průběh testování, dále podáváme přehled žákovských řešení a srovnáváme je s výsledky testování mladších žáků. V závěru upozorňujeme na možné následky nedostatečného ukotvení zkoumaného pojmu.

Představení výzkumu

V příspěvku představujeme část výzkumu, který provádí členové Katedry didaktiky matematiky MFF UK[2] pod vedením doc. RNDr. Jarmily Robové, CSc. V rámci výzkumu byli testováni žáci a studenti v uzlových bodech vzdělávání (konec prvního stupně, konec druhého stupně, maturanti). Předmětem výzkumu bylo testování žákovských konceptů geometrických pojmů jako přímka, úsečka, polopřímka, rovnoběžka, trojúhelník, kružnice, geometrická zobrazení, výška trojúhelníku aj.

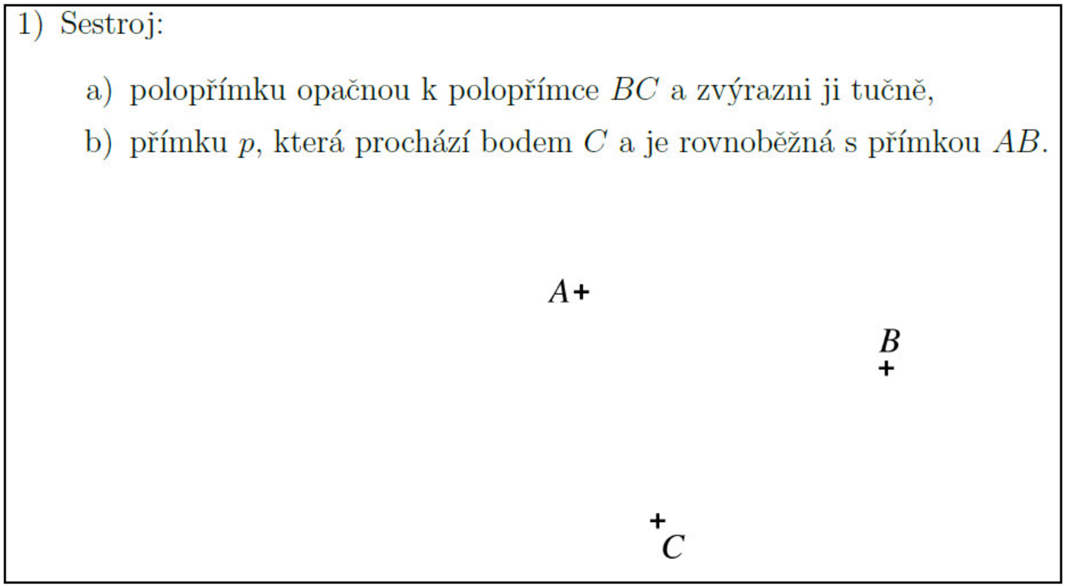
V tomto článku se věnujeme porozumění pojmu polopřímka, resp. opačná polopřímka u žáků na konci druhého stupně vzdělávání (9. ročník základní školy a odpovídající ročníky víceletých gymnázií). S pojmem polopřímka se žáci obvykle seznamují již ve 3. ročníku základní školy. V doporučeném učivu RVP ZV (MŠMT, 2017) jej ve výstupech nalezneme v 5. i 9. ročníku ZŠ, v RVP pro gymnázia (MŠMT, 2007) už však tento pojem uveden není, stejně jako nikde nenalezneme pojem opačná polopřímka.

V článku *Jak žáci znázorňují přímku a polopřímku* (Moravcová et al., 2018) jsme prezentovali výzkum, jehož se účastnili žáci 6. ročníků základních škol a prim osmiletých gymnázií. Z výsledků vyplynulo, že ze zkoumaných žáků přibližně polovina chápe pojem polopřímka správně (tj. jako neomezenou část přímky) a pouze 35 % žáků dokázalo požadovanou polopřímku nakreslit. Zajímalo nás, zda tento problém na konci druhého stupně vzdělávání stále přetrvává, či se jej daří odstranit.

Testování žáků na konci druhého stupně vzdělávání probíhalo od dubna do května roku 2018. Celkem se jej účastnilo 437 žáků, z toho 231 dívek a 206 chlapců. 180 žáků bylo ze základních škol (10 tříd), na víceletých gymnáziích jsme testovali celkem 257 žáků v devíti třídách. Vzorek škol byl vybrán na základě dostupnosti. Všechny testy zadávali členové výzkumného týmu osobně, aby nemohlo dojít k ovlivnění výsledků. Celý test obsahoval 9 úloh, z nichž některé byly otevřené,

[1]KDM MFF UK, jole@karlin.mff.cuni.cz; KDM MFF UK, morava@karlin.mff.cuni.cz

[2]Kromě autorek článku je v týmu ještě Mgr. Zdeněk Halas, Dis., Ph.D.



Obr. 1: Zadání sledované úlohy

některé uzavřené. Žáci měli na řešení celkem 20 minut. Testy byly anonymní, zaznamenávali jsme pouze, zda řešitel je chlapec, či dívka.

Testu předcházel pretest, zadaný ve dvou třídách celkem 54 žákům. Jeho součástí byly i polostrukturované rozhovory se čtyřmi náhodně zvolenými žáky. Cílem pretestu bylo odhalit, zda je nastavený časový limit dostačující a zda jsou zadání úloh pro žáky srozumitelná.

Předmětem našeho zájmu je úloha 1a (obr. 1). Úkolem žáků bylo sestrojit polopřímku opačnou k polopřímce BC a tučně[3] ji zvýraznit.

Výsledky

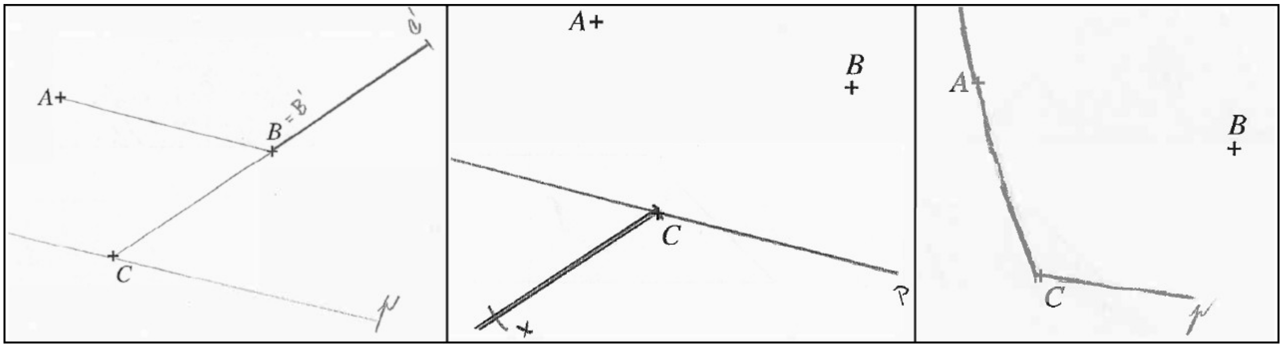
Jistou komplikaci při opravování úloh představovala skutečnost, že žáci měli do jednoho zadání vkreslovat výsledky dvou úloh. Pokud žádnou z úloh neřešili správně, nebylo vždy snadné rozhodnout, které z narýsovaných čar patří k úloze 1a a které k 1b.

Pro účely hodnocení jsme jednotlivé druhy řešení označili následujícími kódy: OK pro správné řešení[4]; *ú* pro sestrojení úsečky BC; *př* pro sestrojení přímky, tj. zřetelné přetažení za body B i C; BC, resp. CB pro zvýraznění polopřímky BC, resp. CB; CX pro sestrojení polopřímky opačné k CB; *er* pro všechna další chybná řešení a *chybí* pro případ, kdy žák nic nenarýsoval.

V šesti případech se vyskytlo zajímavé řešení (kód $B'C'$), v němž žáci sestrojili obraz úsečky BC ve středové souměrnosti se středem B (obr. 2 vlevo). Nelze říci,

[3] Abychom rozeznali výsledné řešení od pomocných čar v obrázku.

[4] Žáci buď zakreslili pouze body polopřímky opačné k polopřímce BC, nebo na narýsované přímce BC tučně zvýraznili body požadované polopřímky.



Obr. 2: Ukázky žákovských řešení.

že toto řešení je úplně špatně, protože všechny zvýrazněné body náleží hledané polopřímce, na druhou stranu lze usuzovat, že daný žák polopřímku nevnímá jako neomezený útvar.

V tabulce 1 jsou uvedeny relativní četnosti výskytu jednotlivých žákovských řešení. Zvlášť jsme vyšetřovali výsledky žáků základních škol a gymnázií, rovněž nás zajímalo porovnání výsledků dívek a chlapců.

Z tabulky 1 je zřejmé, že výrazně lépe si vedli žáci gymnázií. Správně úlohu vyřešila čtvrtina gymnazistů a pouze 6 procent žáků základních škol. Zajímavé je, že dívky byly značně úspěšnější než chlapci.

Podobně jako v testu, který byl zadán žákům 6. ročníku, znázornilo alespoň nějakou polopřímku asi 50 % žáků 9. ročníků. Pouze 17 % žáků však zakreslilo správnou polopřímku, což je výrazně méně než 35 % správných odpovědí u žáků 6. ročníků. Horší výsledek může být dán i větší náročností úlohy v porovnání s úlohou pro 6. ročník.[5]

kód	OK	BC	CB	*př*	*ú*	CX	$B'C'$	*er*	*chybí*
ZŠ	6 %	2 %	15 %	9 %	8 %	1 %	2 %	23 %	33 %
G	25 %	5 %	30 %	4 %	5 %	4 %	1 %	14 %	11 %
Celkem	**17 %**	**4 %**	**24 %**	**6 %**	**6 %**	**3 %**	**1 %**	**18 %**	**20 %**
Chlapci	12 %	4 %	27 %	6 %	8 %	3 %	2 %	17 %	21 %
Dívky	23 %	3 %	21 %	6 %	5 %	2 %	1 %	18 %	19 %

Tab. 1: Relativní četnosti výskytů jednotlivých řešení úlohy 1a

[5] V ní jsme po žácích požadovali pouze sestrojení polopřímky KM, kde body K, M byly zadány, nikoli polopřímky opačné.

Závěr

Předpokládali jsme, že na konci druhého stupně vzdělávání by žáci již měli mít pojem polopřímka dostatečně zažitý, a proto jsme zvolili těžší variantu úlohy s opačnou polopřímkou. Ze zjištěných výsledků však lze usoudit, že pojem polopřímky, popřípadě polopřímky opačné ani na konci druhého stupně vzdělávání stále není řádně ukotven. S tímto pojmem se ovšem žáci setkávají i v dalším studiu a jeho nedostatečné pochopení tak může působit potíže při zavádění nových souvisejících pojmů či při řešení úloh, v nichž se s polopřímkou pracuje (orientovaný úhel, konstrukční úlohy, množiny bodů dané vlastnosti, analytická geometrie).

Náš výzkumný tým se i nadále problematikou zabývá. Obdobný test jsme zadávali i studentům učitelství matematiky a jistě bude zajímavé výsledky porovnat s dalšími dosavadními výzkumy. Např. Chodorová a Juklová (2017) ve svém výzkumu zjistily, že s pojmy úsečka a polopřímka mají potíže nejen žáci 4. a 5. ročníků základních škol, ale i studenti učitelství pro 1. stupeň.

Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory programu *Univerzitní výzkumná centra UK*, č. NCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatura

[1] Chodorová, M. & Juklová, L. (2017). Geometrické pojmy na základní škole. *Matematika – fyzika – informatika*, 26(4), 261–271.

[2] Moravcová, V., Hromadová, J., Halas, Z. & Robová, J. (2018). Jak žáci znázorňují úsečku a polopřímku? In Bastl, B. & Lávička, M. (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2018* (105–108). Plzeň: Vydavatelský servis. Dostupné z http://www.jcmf.zcu.cz/konference/setkani2018/sbornik2018.pdf

[3] MŠMT. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: VÚP.

[4] MŠMT. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha: MŠMT.

Analýza Hejného metódy z hľadiska zmien vedeckých teórií

Ladislav Kvasz[1]

Cieľom príspevku je pozrieť sa na Hejného metódu z hľadiska teórie zmien vedeckých teórií (Patterns of Theory Change). Ukážeme, že zmeny v matematike sú štyroch druhov. Úlohou vyučovania matematiky je navodiť analogické zmeny v kognitívnom systéme žiaka. Kvalitu určitého prístupu k didaktike matematiky potom môžeme posudzovať podľa toho, ako úspešne zmeny každého z týchto štyroch druhov navodzuje. Ukazuje sa, že Hejného metóda obsahuje prostriedky na navodenie kognitívnych zmien všetkých štyroch druhov. To podľa nás ukazuje na jej potenciál pre výuku matematiky s porozumením.

Vyučovanie matematiky spočíva v tom, že v kognitívnom systéme žiakovej mysle sa snažíme vyvolať určitý systém zmien. Musíme si však uvedomiť, že takého zmeny existujú rôznych druhov. Jednotlivé druhy kognitívnych zmien sa líšia v tom, ako radikálne premeny nastávajú v myslení žiaka pri danom druhu zmien. Takéto premeny môžu siahať od *upresnenia terminológie*, keď sa žiak naučí dôsledne rozlišovať medzi blízkymi pojmami, až po *pochopenie hlbokých matematických ideí*, ako je idea dôkazu sporom alebo idea spojitosti. V príspevku vychádzame z hypotézy, že **existujú štyri zásadne odlišné druhy kognitívnych zmien v matematike**. V texte tieto druhy zmien stručne predstavíme a vysvetlíme dôsledky každého druhu pre didaktiku matematiky. Chceme tím vysvetliť potenciál, ktorý Hejného metóda poskytuje pre výuku matematiky zameranú na žiakovo hlboké porozumenie matematike. Obsahuje totiž nástroje, ktoré navodzujú v kognitívnom systéme žiaka zmeny na všetkých štyroch druhov.

1. Prehľad zmien v matematike

Aby sme si štyri druhy kognitívnych zmien v matematike mohli uvedomiť, siahneme po príkladoch z histórie matematiky. Zoberieme Euklidove *Základy* (Euklides, 2007), čo je matematický text, podľa ktorého bolo formované vyučovanie matematiky od antiky až po dvadsiate storočie. Každú zo štyroch druhov zmien budeme ilustrovať tým, že Euklidov text postavíme do kontrastu s ďalšími textami, ktoré sa od neho odlišujú zmenou daného druhu.

Prvý typ zmien nazývame **idealizácia**. Je to zmena, oddeľujúca grécku matematiku, zameranú na dokazovanie matematických tvrdení vychádzajúc z postulátov

[1]KMDM PedF UK v Praze a Filosofický ústav Akademie věd ČR v Praze, ladislavkvasz@gmail.com

a axióm, od viac menej empirickej matematiky starovekého Egypta či Babylonu, ktoré dôkaz, a teda vlastne ani matematickú idealizáciu, nepoznali. Preto ako prvý kontrast môžeme uviesť:

Euklidove *Základy* [3] verzus *Moskevský papyrus* [11].

Druhý typ zmien nazývame **re-prezentácia**. Je to zmena oddeľujúca euklidovskú *syntetickú geometriu* od karteziánskej *analytickej geometrie*. Prechod od syntetickej k analytickej geometrii spočíva v zmene spôsobu, ako *reprezentujeme* tvar, akým spôsobom vytvárame geometrické objekty. Preto ako druhý kontrast navrhujeme vziať:

Euklidove *Základy* [3] verzus Descartova *La Geometrie* [2].

Pri treťom type zmien, ktorý nazývame **objektácia** (spredmetnenie), sa nemení spôsob generovania geometrických útvarov, ale priestor, v ktorom sú tieto objekty umiestnené. Vývinová línia vychádzajúca z Euklidových *Základov* k Bolyai-Lobačevského neeuklidovskej geometrii dobre ilustruje tento typ zmien. Preto ako tretí kontrast možno vziať:

Euklidove *Základy* [3] verzus Lobačevského *O základoch geometrie* [9].

Posledný, štvrtý typ zmien nazývame **re-formulácie**. Je to typ zmien, pri ktorých sa nemení charakter viet, ktoré platia, ale spresňuje sa slovník, v ktorom sú sformulované. V prípade euklidovskej geometrie uvedieme Johna Playfaira, od ktorého pochádza dnešná formulácia piateho postulátu. Playfair bol vydavateľom Euklidových *Základov* v 18. storočí. Preto ako štvrtý kontrast navrhujeme vziať:

Euklidove *Základy* [3] verzus Playfairovo vydanie *Základov* [4, s. 87].

Po tomto stručnom náčrte, ktorý snáď pomôže predstaviť si jednotlivé druhy zmien v matematike, je dôležité si uvedomiť, že ako v histórii, tak aj u žiaka všetky štyri druhy zmien prebiehajú súčasne a sú rôzne prepletené. Ale aj uvedený stručný prehľad ukazuje, že je niečo zásadne odlišné chcieť žiakov naučiť nový reprezentačný nástroj (napríklad karteziánsku *analytickú geometriu*), ako im vysvetliť, čo je to dôkaz.

2. Pojem idealizácie

Väčšina matematikov, rovnako ako didaktikov matematiky si *proces idealizácie* vôbec neuvedomuje. Pre tých, ktorí touto zmenou prešli už v mladosti, to znamená, že sa ideálne objekty matematiky, ako sú čísla, geometrické tvary či algebraické štruktúry, nachádzajú priamo v realite. Pre nich má určitý predmet tvar v matematickom zmysle slova, a preto cieľ vyučovania matematiky vidia v tom žiakov naučiť takéto tvary rozpoznávať, pomenovať a odhaliť si ich najdôležitejšie vlastnosti. Je však nutné si uvedomiť, že najradikálnejšou kognitívnou zmenou, ktorou dieťa pri učení sa matematike musí prejsť, je naučiť sa tieto tvary vôbec vyčleniť.

Edmund Husserl bol jedným z prvých filozofov, upozorňujúcich na nesamozrejmosť idealizácie. Zásadný význam idealizácie pre porozumenie matematiky opísal Petr Vopěnka v úvodnej pasáži knihy *Rozpravy s geometrií*. Idealizácia spočíva *v schopnosti za reálnymi útvarmi uvidieť ideálne geometrické objekty*. Tento posun Vopěnka opisuje slovami:

> Geometr má před sebou list papíru prokreslený čarami rozmanitých tvarů, rovnými i křivými, vzájemně propletenými a protínajícími se v různých bodech. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek, ven z reálného světa do světa geometrického. Tak například za rovnou čarou uviděl geometrickou úsečku, uviděl ji v její úplné čistotě a spolu s ní uviděl dokonalou přímost. Od okamžiku tohoto prohlédnutí je pro něj navždy úsečka úsečkou geometrickou, a ne čarou narýsovanou podle pravítka.
>
> Byly doby, kdy jsme geometrický svět neznali. Děti, které se geometrii dosud neučili, ho neznají. Učitel jim tento svět otevře. Jeho úkol je zdánlivě nesplnitelný, neboť tento svět nemůže ani ukázat, ani nenalezne dostatek slov, jimiž by ho popsal. Může ho pouze různě navozovat, například narýsovat čáry pomocí pravítka a kružítka a říci, že se úsečkám a kružnicím podobají, avšak ukázat na nich může jen to, čím se jim nepodobají. (Vopěnka, 2000: s. 23)

Základnou a asi aj najdôležitejšou úlohou učiteľa pri vyučovaní matematiky je úloha, o ktorej píše Vopěnka.

2.1 Idealizácie v Hejného metóde – izolované modely, generický model a poznatok

Vít Hejný dospel pozorovaním detského myslenia k pochopeniu *procesu idealizácie* a toto poznanie zabudoval do základov toho, čo v (Hejný & Hejný, 1977) nazval *pojmotvorným procesom* – t. j. do teórie *separovaných modelov, univerzálneho modelu* a *objavu poznatku*.

Hlavnou tézou nášho príspevku je tvrdenie, že to, čo Vít Hejný nazval pojmotvorným procesom, je **rekonštrukcia procesu idealizácie v myslení žiaka**. Inak povedané, podľa Hejného k tomu, *aby sme u detí vybudovali autentické matematické poznanie, deti musia prejsť procesom idealizácie*. Je to radikálna téza, že základom vyučovania matematiky musí byť budovanie prepojenia sveta matematických idealít so svetom dieťaťa (Husserl by povedal „so žitým svetom“).

Idealizácia je omnoho radikálnejšia zmena než tvorba pojmov. Je to vlastne zrod matematiky, ktoré Vopěnka poeticky nazval otvorením sa geometrického sveta.

Zdá sa preto, že to, čo Hejný nazval pojmotvorným procesom, nie je o tvorbe pojmov, ale o niečom omnoho zásadnejšom. Samozrejme, pri tomto zásadnejšom procese sa menia aj pojmy, ale dochádza aj k významnejšej zmene. Aby sme pochopili k akej, potrebujeme teóriu, a to teóriu zmeny teórií (*theory of theory change*). Historicky sa proces idealizácie odohral v troch etapách: thalétovskej (Kvasz, 2014), pythagorejskej (Kvasz, 2017) a euklidovskej.

Izolované modely sú izolované preto, že jazyk prvej etapy procesu idealizácie neobsahuje prostriedky *skladobnej a deduktívnej syntézy*. Thalétova geometria dokázala opísať jednotlivé izolované objekty a ich vlastnosti, nedokázala však opísať, ako sú jednotlivé izolované objekty spájané do zložitejších celkov (t. j. *skladobnú syntézu*), a nedokázala spájať argumenty do reťazca tvoriaceho dôkaz.

Univerzálny model nie je jeden z modelov, ktorému prepožičiame univerzalitu. On sa stáva univerzálnym preto, lebo v jeho rámci je možná skladobná a deduktívna syntéza. Univerzálny model okrem toho, že dokáže namodelovať situáciu každého jednotlivého izolovaného modelu, umožňuje prvky spájať v celky a argumenty radiť do argumentačných schém. Inak povedané, *univerzálny model prináša skladobnú a deduktívnu syntézu.*

Etapa charakterizovaná **absenciou skladobnej a deduktívnej syntézy** je nevyhnutným krokom procesu idealizácie. Vít Hejný ju označil termínom separované modely a zodpovedá štádiu, v ktorom kognitívny systém žiaka je schopný vyčleniť a fixovať iba **izolovaný ideálny objekt**. Táto etapa je dôležitá; žiaci sa musia naučiť kognitívne vyčleniť, izolovať a mentálne manipulovať s izolovanými ideálnymi objektami. Keď im to neumožníme (keďže väčšina učiteľov si proces idealizácie neuvedomuje); keď na žiakov od začiatku tlačíme, aby ideálne objekty uvažovali spojené princípmi skladobnej a deduktívnej syntézy, rozrušíme proces kognitívnej fixácie ideálnych objektov a zamedzíme nástupu procesu idealizácie.

Aj druhá etapa idealizácie charakterizovaná konkrétnou skladobnou a deduktívnou syntézou je veľmi dôležitým krokom procesu idealizácie. Je to etapa, ktorú Vít Hejný označil termínom *univerzálny model.* Kognitívny systém žiaka **nie je** schopný vytvoriť skutočnú syntézu (skladobnú aj deduktívnu) a pomáha si konkrétnymi nástrojmi univerzálneho modelu.

3. Pojem re-prezentácie

Matematika existovala v histórii vo veľmi odlišných podobách. Napríklad po dobu 600 rokov sa v algebre nepoužívali symboly a algebraické úpravy mali podobu „úprav“ súvetí bežného jazyka. Historici toto štádium vývinu algebry označujú termínom *rétorická algebra.* Ani tento typ zmien si matematici väčšinou neuvedomujú a matematické objekty stotožňujú s ich dnešným spôsobom symbolickej reprezentácie. Pre dnešného matematika je preto algebraický vzťah automaticky symbolickým vzťahom. Avšak kým proces idealizácie si uvedomili iba niekoľkí jednotlivci (vo filozofii predovšetkým Edmund Husserl a v didaktike Vít Hejný), s reprezentáciou ako kognitívnou zmenou sú bežne konfrontovaní historici matematiky.

Keď porovnáme antickú geometriu reprezentovanú Euklidovou knihou *Základy* a novovekú analytickú geometriu reprezentovanú Descartovou prácou *La Geometrie*, nie je ťažké si uvedomiť, že tieto geometrie „žijú" v zásadne odlišných geometrických univerzách. Antická geometria poznala 8 kriviek (*kružnicu, elipsu, parabolu, hyperbolu, kvadratrix, konchoidu, cissoidu* a *špirálu*). Naproti tomu Newton rozlíšil iba u kriviek tretieho stupňa vyše 70 druhov (oproti 3 druhom kriviek druhého stupňa – *elipse, parabole* a *hyperbole*). Univerzum analytickej geometrie je omnoho bohatšie než univerzum geometrie syntetickej.

Každý žiak žije kognitívne v určitom matematickom univerze – pozná jeho určité typické objekty, niekoľko nevšedných a prípadne zopár záhadných objektov. Okrem univerza geometrických útvarov patrí do matematického univerza aj svet aritmetických objektov (z ktorých napríklad číslo π niektorých žiakov do tej miery fascinuje tým, že nikde nekončí, že sú schopní naučiť sa spamäti jeho sto cifier) a svet symbolických objektov (ako sú polynómy či matice). Preto druhá zásadná úloha, ktorá stojí pred učiteľom matematiky (po tom ako sa žiakovi podarilo mentálne vstúpiť do ríše matematických idealít), je previesť žiaka z geometrického univerza syntetickej geometrie do univerza analytických kriviek a plôch; z aritmetického univerza racionálnych čísel do univerza reálnych čísel a udomácniť ho v symbolickom univerze algebry.

Proces striedania jednotlivých re-prezentácií v dejinách matematiky je opísaný v knihe *Patterns of Change* (Kvasz, 2008). Ukazujeme, ako jednotlivé re-prezentácie na seba nadväzovali a ako jedna umožňovala riešiť problémy nastolené predchádzajúcou. Ku vzniku určitej re-prezentácie viedol zdĺhavý a kľukatý proces. Dnes sa jednotlivé matematické javy, objekty a vzťahy spravidla stotožňujú s ich opisom v dnešnom, plne rozvinutom symbolickom jazyku.

3.1 Výuka reprezentácií v Hejného metóde – prostredia

V Hejného metóde je proces re-prezentácií prítomný pomocou plurality prostredí, v ktorých si žiaci paralelne osvojujú určitý matematický obsah (napríklad riešenie algebraických rovníc). Tým, že sa ten istý matematický problém formuluje a rieši v diametrálne odlišných prostrediach, žiaci kognitívne zažívajú *proces vzniku* novej re-prezentácie.

Jednak sa v rámci Hejného metódy u žiakov symbolika rodí postupne, v nadväznosti na bežný jazyk, takže v ich kognitívnom systéme **dôjde k prepojeniu** *verbálnej reprezentácie problému* cez rôzne lokálne *systémov skratiek* až s jeho *symbolickou reprezentáciou.* Jedno z vysvetlení systematických problémov žiakov so slovnými úlohami pri bežnom vyučovaní, ktoré sa prejavujú neschopnosťou prepojiť verbálne zadanie slovnej úlohy s jej symbolickou reprezentáciou, spočíva v tom, že **proces** re-prezentácie je z vyučovania vynechaný. V prípade algebry *proces* re-prezentácie trval vyše dve storočia, od Regiomontana po Descarta, kým didaktika túto etapu buď úplne ignoruje a žiakom predkladá už hotovú jednu jedinú – našu modernú symboliku, alebo celý proces urýchľuje. Hejného metóda naproti tomu dáva *procesu* symbolizácie centrálne miesto, žiaci sú konfrontovaní s radom rôznych prostredí a vlastnou intelektuálnou prácou prechádzajú kognitívnou zmenou, ktorú označujeme termínom re-prezentácia.

Osvojenie si symbolického jazyka algebry je radikálna transformácia kognitívneho systému žiaka, ktorej náročnosť si didaktika matematiky nedostatočne uvedomuje. Výsledkom je bezradnosť učiteľov i žiakov tvárou v tvár slovným úlohám. Hejného metóda naopak dáva pluralite prostredí centrálne miesto v celom didaktickom systéme. Pri koncipovaní výuky nemožno zotrvávať v symbolickom univerze modernej matematiky. Úlohou didaktiky matematiky je žiakov do tohoto univerza uviesť a postupne ich v ňom udomácniť.

4. Pojem objektácie

O pojmotvornom procese vo vlastnom slova zmysle hovoríme, keď je stabilná idealizácia i re-prezentácia, teda keď sa nemení typ ideálnych objektov ani spôsob ich re-prezentácie. Samozrejme, pojmy sa menia, a to veľmi zásadným spôsobom, aj v procese idealizácie a re-prezentácie, ale vtedy je pojmotvorný proces prekrytý zmenami omnoho radikálnejšieho druhu. Pojmotvorný proces je opísaný v (Kvasz, 2008) pod názvom *relativizations*. Tento proces je dostatočne známy, nebudeme sa púšťať do jeho podrobného predstavovania.

4.1 Výuka objektácií v Hejného metóde – gradované série úloh

V Hejného metóde je dynamika objektácií prítomná vo forme **série gradovaných úloh**. Nebudeme sa tejto oblasti viac venovať, lebo výuka procesu spredmetnenia tvorí hlavný zámer *konštruktivistických prístupov k vyučovaniu matematiky.* Hejného metóda sa všeobecne radí ku konštruktivistickým prúdom, a preto proces *konštruovania pojmov* v mysli dieťaťa ako výsledok jeho samostatnej aktivity pri riešení matematických problémov je v Hejného metóde, rovnako ako v iných prúdoch konštruktivizmu, jasne rozpoznaný, dostatočne pochopený a didakticky spracovaný. Domnievame sa, že rozdiel medzi Hejného metódou a konštruktivistickými prístupmi vo vyučovaní matematiky spočíva v oblasti idealizácie a re-prezentácie, ktoré sú u Hejného metódy hlboko rozpracované.

5. Pojem re-formulácie

Re-formulácie, teda nahradenie jednej formulácie (určitého tvrdenia, definície, argumentu) inou, spravidla presnejšou, jasnejšou alebo stručnejšou, nazývame re-formuláciou. Matematici aj učitelia matematiky si re-formulácie dobre uvedomujú. Na matematike je nápadná presnosť jej jazyka a mnohí učitelia vidia svoju úlohu práve v tom, aby naučili žiakov presným formuláciám matematických poznatkov (definícií, viet a dôkazov). Žiakom tieto presné, jasné a stručné formulácie matematických poznatkov na hodinách prezentujú a skúšajú, do akej miery sa ich žiaci dokázali naučiť. Z kognitívneho hľadiska za týmto postupom môžeme vidieť presvedčenie, že žiakov možno matematike naučiť postupnosťou re-formulácií.

6. Prečo funguje Hejného metóda?

Vyššie sme sa snažili ukázať, v čom vidíme potenciál Hejného metódy pre výuku matematiky. Podľa nášho názoru je to preto, lebo **rozvíja kognitívny systém žiaka na všetkých štyroch úrovniach**, teda ako na úrovni *idealizácií*, tak aj na úrovni *re-prezentácií*, na úrovni *objektácií* a aj na úrovni *re-formulácií*. Teda vlastne žiakom podáva pomocnú ruku a neponecháva na náhodu a na individuálne danosti, či žiak procesom idealizácie dokáže spontánne prejsť (a potom sa hovorí, že má talent na matematiku), alebo z nejakých príčin v tomto procese stroskotá (a potom sa hovorí, že nemá bunky na matematiku). V skutočnosti žiadne bunky na matematiku neexistujú a ani existovať nemôžu, lebo vznik matematiky je moc mladá udalosť, než aby sa mohla zapísať do genetického kódu.

Poďakovanie

Stať je súčasťou projektu Progres Q17 *Příprava učitele a učitelské profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatúra

[1] Bachratý, H. (Ed.). (2012). *Archív Víta Hejného I.* Žilina: EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity.

[2] Descartes, R. (1637). *Geometrie.* Preložil Jiří Fiala, 2010. Praha: Oikoymenh.

[3] Eukleides (2007). *Základy, Knihy I–IV.* Preklad Františka Servíta komentovaný Petrom Vopěnkom. Nymburk.

[4] Gray, J. (1989). *Ideas of Space, Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic.* Oxford: Clarendon Press.

[5] Hejný, V. & Hejný, M. (1977). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM.* Banská Bystrica: Krajský pedagogický ústav. Přetištěno in: Bachratý, ed. 2012, s. 33–74.

[6] Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Netherlands: Springer.

[7] Kvasz, L. (2014). Thalétova matematika v zrkadle Galileovej fyziky. *Filosofický časopis*, 62(5), 643–659.

[8] Kvasz, L. (2017). Pythagorejská matematika vo svetle karteziánskej fyziky. *Filosofický časopis*, 65(4), 513–541.

[9] Lobačevskij, N. I. (1829). O načalach geometrii. In: *Polnoje sobranije sočinenij*, tom 1, GITTL, Leningrad 1946.

[10] Vopěnka, P. (2000). *Rozpravy s geometrií.* Praha: Panorama.

[11] Vymazalová, H. (2006). *Staroegyptská matematika: Hieratické matematické texty.* Praha: FF UK.

Domácí kroužek Hejného matematiky

Milena Kvaszová[1]

V příspěvku popisuji zkušenosti s domácím kroužkem zaměřeným na matematiku vyučovanou Hejného metodou. Kroužek pracuje již druhým rokem a navštěvují ho tři děti.

Setkání s Hejného metodou

Zhruba před 10 lety jsem v rámci programu 2 dnů s didaktikou matematiky navštívila ukázkovou hodinu matematiky na ZŠ Dědina. Byla jsem překvapená, jak se žáci zapojovali do řešení úloh a jak se dokázali soustředit na práci. Líbilo se mi, jak si navzájem vysvětlují to, co jim není jasné a jak spolu diskutují. Po krátké době jsem měla příležitost podílet se na vydávání prací Víta Hejného. Čím obsáhleji jsem se s Hejného metodou výuky matematiky seznamovala, nabývala jsem přesvědčení, že toto je cesta, kterou bych si přála pro vzdělávání svých dětí. Najít vhodnou školu, kde by se v našem okolí Hejného metodou učilo, se mi však nepodařilo. Rozhodla jsem se tedy, že budu touto metodou s dcerou procházet sama.

[1]KMDM PedF UK v Praze, milena.kvaszova@pedf.cuni.cz

Začaly jsme s plyšáky

Věděla jsem, že dcera potřebuje někoho, s kým bude moci o věcech diskutovat a na základě diskuze docházet k poznatkům. Přibraly jsme tedy na pomoc dva plyšáky a já jsem jim vkládala do úst pochybovačné názory a chybné odpovědi, abychom měly nad čím diskutovat. O tento náš kroužek projevil zájem syn jedné kolegyně a měly jsme parťáka, což bylo úžasné. Později se k nám přidala ještě spolužačka dcery. Scházíme se jednou týdně a společně řešíme úlohy z učebnice.

Výhody a nevýhody domácího prostředí

Doma je větší pohoda než ve škole, děti jsou uvolněné a nestresuje je případná neznalost (není to na známky). Můžeme použít všechno, co doma najdeme (např. hezky jsme si vytvořili obchod s drogerií, když jsme počítali s penězi). Už umějí počítat ze školy, to nám umožňuje probrat více úloh, na druhou stranu jim už některé věci byly „sděleny“, a nemůžeme je tedy objevovat.

Moje postřehy

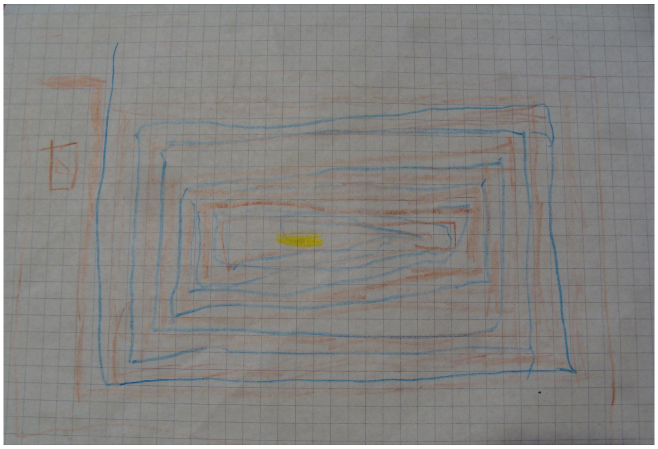
Žáci, všechno co dělají, silně emotivně prožívají. Často se smějí nebo se naopak vztekají nad úlohou, která jim hned nejde vyřešit. Třeba ji celou začmárají. Rádi používají velká čísla. Když mají sami vymyslet úlohu, je to $10\,000 + 1$ atp.

Úlohy řeší značně rozdílně. Např. když měli vytvořit bludiště, tak dcera vytvořila pravidelný obdélník se spirálovitě zatočenou cestou (obr. 1). Zatímco její kamarád vytvořil změť chodbiček (obr. 2). Když jsme to společně procházeli, nedokázala jsem najít spojitou cestu k pokladu. Upozornil mě, že v jednom označeném místě je polopropustná brána, kterou se dá projít jenom dopředu a zpátky ne.

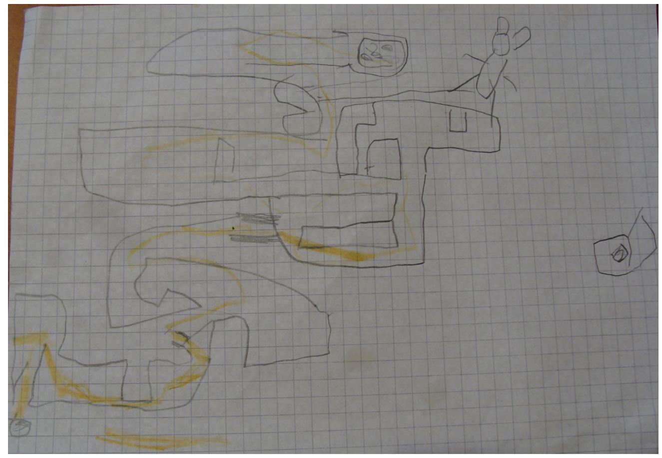
Když jeden z nich něčemu nerozumí, navzájem si to vysvětlují. Vůbec do toho nezasahuji a čekám, až si to vyjasní.

Úlohy, které se nám zdají snadné, např. překládání a vystřihování z papíru, jsou pro žáky poměrně náročným úkolem a hodně se toho naučí o překládání, symetrii a o polovině.

Nám dospělým se zdá zbytečné stále chodit po číslech, brát do rukou kostky, dřívka, barevné papíry, ale výzkumy z posledních let ukazují, že nejenom naše hlava má paměť, ale i naše tělo. V literatuře se to označuje pojmem embodied cognition, což se někdy překládá jako *vtělené poznání*. Např. studie (Scott, Harris & Rothe, 2001) zkoumající procesy zapamatování ukazuje, že lidé si z příběhu mnohem více zapamatují, když ho nejen slyší nebo vyprávějí, ale když jeho děj fyzicky zahrají. Proto je důležité, aby se žáci dotýkali předmětů, které počítají, a početní operace sami fyzicky prováděli.



Obr. 1



Obr. 2

Cíle našeho setkávání

Jsem přesvědčená, že si budování světa matematiky přenášejí i do školních hodin matematiky a sami ve škole řeší úlohy tak, jak to děláme spolu. Domnívám se, že náš domácí kroužek je pro ně velkým přínosem. Chtěla bych tedy podpořit všechny rodiče, kterým se nepodařilo zapsat děti do školy, kde se vyučuje Hejného metodou, aby s nimi pracovali doma a dávali jim podnětné úlohy, které budou rozvíjet jejich matematické myšlení a ony pak samy půjdou cestou hledání, a ne cestou přijímání hotových poznatků. Stejně tak bych chtěla povzbudit učitele, na jejichž školách není Hejného metoda uplatňována, nebo si nevěří, že by zvládli touto metodou učit všechno učivo, ať to zkusí nejprve například formou kroužku.

Literatura

[1] Scott, Ch. L., Harris, R. J. & Rothe, A. R. (2001). Embodied Cognition Through Improvisation Improves Memory for a Dramatic Monologue. *Discourse Processes*, 31(3), 293–305.

Únikové miestnosti a matematika

Vladimíra Laššáková[1]

V článku sa venujeme matematike v komerčných únikových hrách. Pri skúmaní výskytu matematických konceptov v únikových miestnostiach sme mali príležitosť zahrať si rôzne hry v 9 krajinách Európy a Ázie. Tiež sme mali príležitosť zúčastniť sa na navrhovaní a konštrukcii niekoľkých hier. Všimli sme si, že niektoré matematické koncepty sa v únikových hrách vyskytujú častejšie ako ostatné, ide najmä o koncepty z oblasti logiky a kombinatoriky. Pozornosť venujeme tiež možnostiam využitia únikových hier vo vzdelávaní, najmä vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky.

Matematika v komerčných únikových miestnostiach

Predkladáme zoznam matematických konceptov, s ktorými sme sa v únikových miestnostiach stretli (Čujdíková & Laššáková, 2017; Laššáková, 2019). Rozhodli sme sa tiež pridať niekoľko príkladov z existujúcich hier, ktoré problematiku matematiky v únikových miestnostiach môžu pomôcť lepšie uchopiť.

Riešenie sústavy rovníc alebo nerovníc v obore celých alebo racionálnych čísel

Vo viacerých únikových miestnostiach sa vyskytuje v rôznych obmenách sústava rovníc alebo nerovníc. Premenné bývajú väčšinou nahradzované rôznymi piktografickými symbolmi korenšpodujúcimi s témou miestnosti. Napríklad do miestnosti o legendárnom kuchárovi utekajúcom pred talianskou mafiou by pravdepodobne len veľmi ťažko zapadla sústava šiestich nerovníc. Úloha v hráčovi zanechá úplne iný dojem, keď sú jednotlivé premenné nahradené obrázkami potravín a nerovnice sú napísané na kuchynskom náčiní. V niektorých prípadoch sa však tvorcovia miestnosti rozhodnú označovať premenné aj písmenami. Aspektom zaujímavým z pohľadu matematiky je fakt, že je potrebné, aby si hráči uvedomili obor, v ktorom sústavy rovníc alebo nerovníc riešia. Často im riešenie výrazne zjednoduší, keď vopred vedia, že potrebujú získať celé čísla, ktoré majú určitý počet miest.

Z hľadiska didaktiky matematiky je zaujímavé sledovať, akým spôsobom ľudia interpretujú piktografické zápisy a aký má vplyv na spôsob riešenia skutočnosť, či majú hráči k dispozícii písacie potreby.

[1] Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, vladka.lassakova@gmail.com

Na ilustráciu uvádzame príklad úlohy z únikovej hry Záhada vinařství od firmy unIQue room. K zadaniu úlohy sa hráči dostanú po rozsvietení stolnej lampičky.

Obr. 1: Sústava lineárnych rovníc v únikovej hre, zdroj: unIQue room s. r. o.

Zaujalo nás sledovať, akým spôsobom hráči interpretujú zápis viacerých rôznych kvetín nakreslených vedľa seba. Častejšie sme sa stretli so situáciou, v ktorej hráči pracovali so symbolmi ako so sčítancami, len vo výnimočných prípadoch sa stáva, že hráči interpretovali symboly ako činitele.

Geometria a meranie, vzťahy v trojuholníku, uhly

Matematickým konceptom, ktorý sa často v únikových hrách vyskytuje, je meranie dĺžky. Používajú sa rôzne alternatívne meradlá – povrazy či tyče. S nameranými hodnotami sa ďalej pracuje. Stretli sme sa dokonca s potrebou z nameraných hodnôt zistiť sínus alebo kosínus uhla. V takomto prípade by však nebolo rozumné predpokladať, že hráči vzťahy v trojuholníku poznajú. Je potrebné ich nejakým spôsobom priblížiť aj ľuďom, ktorí sa s nimi nestretávajú, či dokonca nikdy nestretli.

Nešikovné začlenenie takéhoto konceptu môže pri hraní hry pôsobiť rušivo. Skryť nápovedy ku goniometrickým funkciám napríklad do príbehu o nepokojnej duši mnícha nie je jednoduché a často to nezvládne ani kolektív tvorcov s bohatými skúsenosťami.

Na orientáciu v priestore a natáčanie rôznych objektov sa často používajú uhly. Tak ako pri goniometrii, aj tu považujeme za vhodné, aby sa v mieste konania hry nachádzala vhodná pomôcka, napríklad náčrt plného, priameho alebo pravého uhla. Začlenenie konceptu uhlov považujeme na našom trhu za lepšie zvládnutý.

Postupnosti

V únikových hrách prvej generácie, t.j. hrách, ktoré nevyužívajú mikropočítače a magnetické zámky, je najčastejším výstupom úlohy kľúč alebo kód k číselnému zámku. To prirodzene otvára dvere najrôznejším postupnostiam, ktoré je možné do hry jednoducho zakomponovať. Stretávame sa s reprezentáciou prvkov postupnosti číslami alebo určitým počtom ľahko spočítateľných prvkov.

Aritmetika čísel do 10 000

V miestnostiach sme sa viackrát stretli aj s aritmetikou čísel do 10 000, kde jednoduchá úloha na sčítanie či násobenie nahradzuje priamo napísaný číselný kód.

Súčasťou úlohy býva niekedy to, že sa hráči k častiam príkladu dostávajú postupne, môžu byť ukryté alebo napísané tajným písmom.

Rizikovým faktorom je, že v stresových situáciách narastá chybovosť. To môže mať negatívny vplyv na zážitok z hry, keďže neúspech pri riešení jednej úlohy opakovane môže hráčov jednoducho znechutiť alebo frustrovať.

Kombinatorika a logika

Okrem základných konceptov ako rozhodovanie, aký objekt, nápoveda či informácia môžu byť pri riešení užitočné, sa stretávame aj s typmi úloh, kde musíme vylučovaním možností a kombinovaním podmienok prísť na správne riešenie. Ako príklad nám môže poslúžiť úloha z Vojakovej cely od spoločnosti unIQue room. Na obr. 2 vidíme počiatočné rozloženie figúrok, pri ktorých nájdení mali hráči priamo dané súradnice, kde sa má figúrka nachádzať. Už z počiatočného rozostavenia sa dá jednoznačne určiť, že nejde o žiadnu reálnu šachovú situáciu.

Obr. 2: Počiatočné rozostavenie šachových figúrok v úlohe,
zdroj: unIQue room s. r. o.

Okrem toho hráči nájdu sedem figúrok bez súradníc a nasledujúce podmienky:

- V stĺpci E nestojí žiadny pešiak.
- V stĺpci G nestojí žiadna figúrka.
- Čierny jazdec: Ak niekto ublíži čiernej kráľovnej, okamžite ju pomstím.
- 2× čierny pešiak: Stojíme po boku čierneho jazdca.
- Žiadny čierny pešiak nestojí po boku veže.
- Biela kráľovná: v riadku a v stĺpci, v ktorom stojím stoja traja strelci.
- 3× biely pešiak: Stojíme po boku bielej kráľovnej.

Nemožno predpokladať, že hráči vedia, ako sa po šachovnici môže pohybovať jazdec. V miestnosti je teda možné nájsť tiež vysvetlivku s pohybom jazdca a definíciu toho, čo pre účely tejto úlohy znamená stáť „po boku" – iba priamo susediace políčka, nie po diagonále. Riešenie úlohy (obr. 3) 4–6 člennej skupine trvá v priemere približne 15 minút.

Je potrebné uvedomiť si, že riešenie úlohy je sťažené rozmiestnením figúrok a podmienok na rôznych miestach v miestnosti. Hráč ukladajúci figúrky na šachovnicu na väčšinu nápisov nevidí. Úloha vyžaduje pomerne dobrú schopnosť kooperácie a komunikácie. Niektoré skupiny, prípadne jedinci pri riešení úlohy rezignujú, ako dôvod uvádzajú, že nevedia hrať šach. V niektorých prípadoch si demotivovaní hráči pýtajú nápovedu bez toho, aby sa úlohu pokúsili samostatne riešiť. Mohlo by byť zaujímavé porovnať, ako by sa úspešnosť úlohy zmenila, ak by boli šachové figúrky nahradené inými objektmi. Najčastejšími nápovedami sú informácie, že biela kráľovná je v riadku 3, čierny kôň je v stĺpci E a to, že figúrky na šachovnici sú umiestnené správne a stačí nečítať riešenie „hore nohami".

Za dôležitejšie ako samotný vzdelávací aspekt matematických úloh v únikových hrách považujeme význam úloh na popularizáciu matematiky. Veríme, že ak sa ľudia pri trávení voľného času stretávajú s matematikou, ktorú v danom kontexte považujú za zaujímavú, peknú alebo zábavnú, môže to dopomôcť k budovaniu pozitívneho vzťahu k nej.

Možnosti využitia únikových hier vo vzdelávacích inštitúciách

Únikové hry sú fenoménom, ktorého popularita na Slovensku neustále rastie a aj v súčasnosti sa vyskytuje snaha o ich začlenenie do výchovno-vzdelávacieho procesu. Svoju únikovú hru pripravuje viacero škôl, kompletná úniková hra s názvom

Obr. 3: Riešenie úlohy, kód 1371, zdroj: unIQue room s. r. o.

Trinásta záhrada vznikla za pomoci samotných žiakov pod vedením učiteľky Kataríny Kresáňovej v škole v Bratislave na Tilgnerovej ulici. Podľa dostupných informácií ide o aktivitu primárne určenú na suplované hodiny či voľné školské dni (Hudeková, 2017). Na efektívne začlenenie konceptu priamo do vyučovania by bolo potrebné prispôsobiť obsah aktivity tak, aby mala jasne stanovený výchovno-vzdelávací cieľ, ktorý by bol v súlade so Štátnym vzdelávacím programom.

Ako problém pri možnej aplikácii do vyučovania vnímame to, že príprava vyučovania s využitím prvkov z únikových miestností je časovo veľmi náročná. Domnievame sa, že efektívnejšie by mohlo byť využitie prenosných únikových miestností, ktoré by boli pripravované učiteľmi, odborníkmi z oblasti didaktiky v spolupráci s firmami podnikajúcimi v tomto odvetví. S podobným konceptom sa v niektorých krajinách v súčasnosti už je možné stretnúť. Za ideálnu formu považujeme predpripravené koncepty, ktoré by si učiteľ mohol podľa jednoduchého návodu zhotoviť, prípadne by mohli byť školou zapožičané alebo zakúpené.

Za výhodu považujeme, že v únikových miestnostiach pripravených priamo do vzdelávacieho procesu je možné viac sa zameriavať na vzdelávací cieľ ako v prípade komerčných únikových hier. Konceptu, ktorý chceme žiakov naučiť, môžeme venovať viac času i pozornosti, hru je možné dokonca kombinovať s inou formou vzdelávania, čo nám pomôže docieliť požadovaný efekt.

V nasledujúcej podkapitole by sme chceli osobitnú pozornosť venovať možnosti využitia únikových hier vo vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky.

Únikové hry vo vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky

Po pozornom skúmaní komerčných únikových hier, najmä ich obsahu a princípu fungovania, sme dospeli k názoru, že únikové hry by mohli byť mimoriadne prínosné vo vzdelávaní budúcich učiteľov, a to hneď v niekoľkých rovinách.

Konštruovanie matematických úloh

Príprava netradičných úloh, aké sa vyskytujú v únikových miestnostiach, a následná spätná väzba, ktorú tvorca úlohy má od hráčov riešiacich úlohu, je pre budúceho učiteľa veľmi hodnotná. Je dôležité uvedomiť si, že pokiaľ navrhujeme úlohu, ktorá bude využitá mimo vyučovací proces, jej riešitelia budú z pomerne širokého spektra ľudí, ktorých vzťah k matematike a úroveň matematických znalostí nie je možné vopred poznať. Preto považujeme za dôležité pridržiavať sa pri samotnom dizajnovaní úloh dvoch jednoduchých pravidiel:

[1] Matematika v úlohách by nemala hráčov vystrašiť a mala by byť do hry včlenená tak, aby nenarúšala atmosféru samotnej hry. Úloha by mala byť navrhnutá tak, aby do hry tematicky zapadla. Zložitosť aplikácie pravidla do veľkej miery závisí od témy konkrétnej miestnosti, napríklad do príbehu vedca sa matematické koncepty dajú včleniť menej násilne než do príbehu o kuchárovi, či dystopii sveta ovládanom mačkami.

[2] V samotnej hre by sa od hráča nemali požadovať žiadne vedomosti, na ktoré by nemal ako prísť počas samotnej hry (tzv. outside knowledge).

Často sa vedú diskusie o tom, čo je možné očakávať, že hráči poznajú, a čo už sa považuje za outside knowledge. Dizajnéri únikových hier v tomto smere nie sú jednotní. Keď problematiku zúžime na matematické koncepty, tak môžeme povedať, že väčšina hráčov a dizajnérov považuje za akceptovateľné očakávať, že hráči vedia sčítať dve čísla. Nie je však možné očakávať, že hráči poznajú napríklad goniometrické funkcie.

Skúsenosti s oboma týmito pravidlami môžu budúci učitelia zhodnotiť aj pri tvorbe iných materiálov vo svojej pedagogickej praxi. Vhodné začleňovanie úlohy do príbehu a atmosféry hry môže poskytnúť cenné skúsenosti prenesiteľné na ľubovoľnú prácu s kontextom matematických úloh. Skutočnosť, že sa pri tvorbe úloh potrebujeme vyvarovať tomu, aby hráči na úspešné zvládnutie úlohy potrebovali nejaké vstupné vedomosti, nachádza vo vyučovaní významnú paralelu v prípadoch, keď z určitého dôvodu niektorým žiakom chýbajú predchádzajúce vedomosti, na ktoré by sme vo vyučovaní radi nadviazali.

Riešením však nie je do vyučovacieho procesu alebo do únikových hier zaraďovať iba jednoduché úlohy. V prípade, že sa rozhodneme do obsahu formálneho alebo neformálneho vzdelávania zaradiť nenáročné úlohy, kognitívna nenáročnosť totiž neprispieva k rozvoju vedomostí ani kritického myslenia a má negatívny vplyv na udržanie žiadaného stavu Flow.

Ďalšie možnosti využitia únikových miestností vo vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky

Pri prevádzke únikových hier je možné sledovať pomerne širokú škálu javov, ktoré sú z pohľadu pedagogiky zaujímavé. Takéto pozorovanie by mohlo byť veľmi dobrým východiskom pre kvalitatívny výskum.

Spomeňme aspoň niekoľko príkladov výskumných otázok, pre ktoré by tento typ pozorovania mohol byť užitočný:

- Ako dlho sa človek dokáže sústrediť a čím je sústredenie ovplyvnené?
- Aké rôzne postupy sa prirodzene vyskytujú pri riešení konkrétneho matematického problému?
- Ako zmena nápovedy, prípadne formulácie ovplyvňuje úspešnosť hráčov pri danej úlohe?
- Ako ľudia reagujú na vlastný omyl?
- Aký vplyv má časový limit na úspešnosť riešenia konkrétneho problému?
- Ako ľudia spolupracujú? Aké skupinové normy ovplyvňujú úspešnosť tímov pri riešení problémov?
- Čo má vplyv na dosiahnutie a udržiavanie sa v stave Flow?

Poďakovanie

Poďakovanie patrí Univerzite Komenského za pridelenie Grantu Univerzity Komenského na podporu riešenia projektu mladých vedeckých pracovníkov: „Úniková hra ako inovatívny nástroj vo vzdelávaní budúcich učiteľov“ (UK/420/2019), ktorý bude použitý na dobudovanie únikovej miestnosti na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Literatúra

[1] Csikszentmihalyi, M. (2015). *Flow: O štěstí a smyslu života.* Praha: Portál.

[2] Csikszentmihalyi, M. (2017). *Flow a práce.* Praha: Portál.

[3] Čujdíková, M. & Laššáková, V. (2017). Úloha hier v popularizáacii matematiky. In *11. mezinárodní vědecká konference: Didaktická konference 2017* (28–36). Brno: Masarykova univerzita.

[4] Duhigg, Ch. (2017). *Rozumnejšie, rýchlejšie, lepšie.* Bratislava: Tatran.

[5] Duhigg, Ch. (2013). *Síla zvyku: Proč děláme, co děláme, a jak to změnit.* Brno: BizBooks.

[6] Hudeková, K. (2017). *Na Tilgnerovej otvorili školskú Escape Room. Žiakom pomôže rozvinúť logické myslenie aj tímového ducha.* Dostupné z https://ciernalabut.sk/3795/

[7] Laššáková, V. (2019). Escape game as an innovative tool in education of future mathematics teachers. In *Aplimat 2019: 18th Conference on Applied Mathematics Proceedings* (715–723). Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave.

[8] unIQue room s. r. o. – archív fotografií

Význam chýb v matematickom vzdelávaní

Vladimíra Laššáková[1]

Mýliť sa je prirodzené. Chyby nedokážeme so stopercentnou úspešnosťou eliminovať z nášho rozhodovacieho alebo tvorivého procesu, sú prirodzenou súčasťou procesu vzdelávania sa. Profesorka Carol Dwecková vyslovila na jednom zo svojich stretnutí s učiteľmi myšlienku, že každá chyba, ktorej sa žiak dopustí, vytvára v jeho mozgu nové synaptické spojenie (Boalerová, 2016: s. 29). V článku prinášame 5 návrhov praktických aktivít, ktorých zaradenie môže byť prínosné z hľadiska práce s chybou a emóciami, ktoré chybu sprevádzajú.

Počas učenia a doučovania žiakov sa nezriedka stretávame s tým, že pri riešení úlohy žiaci reagujú frázami ako: „to už si nepamätám, ako sa robí“, „takýto príklad sme ešte nepreberali“, prípadne „takéto príklady ma bavia, pretože si ešte pamätám

[1]Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, vladka.lassakova@gmail.com

z hodiny to, ako sa riešia“. Vysvetľovať žiakom, ktorí vnímajú matematiku ako automatizovanú aplikáciu naučených postupov, že matematika má aj svoju kreatívnu a tvorivú zložku a jej súčasťou by malo byť premýšľanie, nie je jednoduchá úloha.

Niektorí žiaci považujú za zaujímavé riešenie úloh, pri riešení ktorých pociťujú istotu, nemajú strach, že sa dopustia chyby. K matematike, ktorá by sa skladala len z takýchto úloh, by možno mali aj pozitívny vzťah. Kde je teda problém?

Z takejto matematiky sa vytráca jej kreatívna zložka. Miznú tiež možnosti jej aplikácie v reálnom svete. Mnohé problémy, s ktorými sa v rôznych životných situáciách stretávame, sú v skutočnosti matematikou presiaknuté, informácie, ktoré o danom probléme máme, sú však často neúplné. Navyše, problémy nie sú definované tak presne ako úlohy na precvičenie v zbierke úloh, v ktorých stačí bezmyšlienkovite aplikovať konkrétny naučený postup. Tento prístup nám nestačí a pokiaľ nemáme skúsenosti so syntézou naučených poznatkov, ich aplikáciou a odvahu na vytváranie vlastných postupov, zlyhávame.

Žiak, ktorý sa nebojí mýliť…

- rozvíja svoje myslenie. Výskumy mozgu ukazujú, že mozog na stretnutie sa s chybou reaguje elektronickými výbojmi a mozog rastie, pričom nezávisí na tom, či si testovaný chybu uvedomuje, alebo nie (Moser et al., 2011).

- rozumie významu poznatku, ktorý vďaka porozumeniu chybe vznikne. Význam poznatku, ktorý si jedinec vytvorí po korekcii vlastnej chyby, je jednoduchšie uchopiteľný. Dieťa si ľahko uvedomí, že by pre neho mal význam pri predchádzaní danej chybe, prípadne pri riešení podobných problémov.

- môže vytvárať teórie a spoznávať skutočnú matematickú prácu, nevyhýba sa zložitejším a neznámym problémom. Aj niektoré prvé teórie matematikov sa ukázali ako nesprávne. Považujeme preto za úplne prirodzené, že aj na hodinách matematiky by mali mať chyby a omyly svoje miesto. Riešenie akéhokoľvek zložitejšieho problému býva sprevádzané rôznymi nápadmi, z ktorých mnohé nie sú optimálne alebo sú dokonca celkom nesprávne. Často si to uvedomíme až potom, ako myšlienku alebo postup podrobíme dôkladnejšiemu skúmaniu a analýze, hodnotiacemu procesu. V niektorých prípadoch dokonca máme možnosť si problémy, ktoré budú naše riešenie sprevádzať, uvedomiť až počas toho, ako nápad realizujeme. Inak tomu nie je ani pri riešení problémov z oblasti matematiky.

- môže budovať pozitívny vzťah k matematike. Odbúranie strachu z vlastnej chyby je dôležitým krokom pri budovaní pozitívneho vzťahu k matematike alebo aspoň odbúravania toho negatívneho. Nové poznatky, pojmy a koncepty v niektorých prípadoch narúšajú štruktúru poznatkov v myslení dieťaťa. Tieto okamihy môžu u niektorých jedincov vyvolávať dokonca pocity frustrácie, a tak je namieste zamyslieť sa nad možnosťami, ako s emóciami pracovať. Porozumenie a prijatie vlastnej chyby môže slúžiť ako vhodný základ pre proces transformácie poznatkovej štruktúry.

Ak chceme, aby sa žiak naučil vnímať chyby a omyly pozitívne, ako prirodzenú súčasť vzdelávania sa a života, je dôležité vhodné vedenie zo strany učiteľa.

Učiteľ, ktorý pracuje s chybou…

- má možnosť pochopiť, čomu žiaci nerozumejú. V niektorých prípadoch chyba priamo odzrkadľuje chýbajúci poznatok alebo nesprávne uchopenie matematického konceptu v ich vlastnom myslení. Následná práca s chybou pomáha tomu, aby učenie napĺňalo individuálne potreby konkrétneho jedinca.

- získava priestor na rozvoj argumentačných schopností žiakov pri spoločnom analyzovaní chýb.

- si dokáže pripustiť vlastný omyl a nereaguje na svoje chyby negatívne. Tým dopomáha k vytváraniu príjemnej atmosféry a tvorivého prostredia, v ktorom sa žiaci neboja mýliť.

- môže porozumieť, že žiaci, ktorí sa na jeho hodinách nemýlia často, nie sú dostatočne intelektuálne stimulovaní. Nie je to niečo, za čo by sme ich mali chváliť, skôr niečo, za čo si zaslúžia naše ospravedlnenie.

Pozornosť si zasluhuje tiež možnosť zaradenia cielených aktivít, ktoré majú za úlohu prácu s emóciami, ktoré chyby sprevádzajú. Pomôcť žiakom prekonávať strach z vlastného zlyhania je dôležitá úloha. Jej zvládnutie môže mať za následok uvoľnenie kreatívneho potenciálu žiakov a zvýšenie motivácie k samostatnej práci a premýšľaniu nad úlohami a problémami, ktoré vyžadujú inovatívne myslenie nad rámec naučených postupov.

Práca s chybou na hodine matematiky

Aktivita 1: Hľadáme a analyzujeme chyby!

Na hodinách by sme mali dať priestor žiakom a žiačkam, ktorí počas riešenia urobili chybu. Boalerová (2016: s. 31) opisuje svoje postrehy z pozorovania z druhého ročníka zo školy v Šanghaji, kde dosahujú študenti najlepšie výsledky v rámci krajiny. Zaujalo ju, že učiteľ po zadaní zložitého problému vyvolával študentov, ktorí pri riešení urobili chybu. Svoje omyly prezentovali hrdo a s nadšením.

Nebojme sa ani pri spoločnom riešení úloh volať k tabuli žiakov, ktorí úlohu riešili nesprávne, chyby spoločne analyzujme. Nejde o stratu času, pretože pri analýze chýb môžeme pomôcť všetkým žiakom naučiť sa toho veľa. Ak poznáme chybu žiaka v riešení dopredu (napríklad analýza chyby z už vypracovaných zadaní), môžeme s ňou dokonca pracovať tak, aby bola v súlade so vzdelávacími cieľmi danej hodiny.

Či už pracujeme s reálnou chybou žiakov alebo s riešenými úlohami, v ktorých spoločne hľadáme chyby, mali by sme si klásť otázky ako: *Ako mohla chyba vzniknúť? Ako sa z nej môžeme poučiť všetci? O čo nás táto chyba môže obohatiť?*

Aktivita 2: Tvorba distraktorov

Za zaujímavý nápad považujeme aktivitu, v ktorej majú žiaci za úlohu vymyslieť distraktory (nesprávne možnosti do testových úloh s výberom odpovede) k úlohe, ktorú predtým vyriešili. Prvýkrát sme sa s touto aktivitou v ucelenej podobe stretli pri organizovaní učiteľského matematického sústredenia, kde bola spracovaná Mgr. Jakubom Krchňavým a Mgr. Hankou Budáčovou, PhD. ako súťažná skupinová aktivita. Aktivita mala tri fázy. Každá družinka mala dispozícii sadu úloh. V prvej mali budúci učitelia za úlohu v družinkách úlohy vyriešiť a nechať si ich skontrolovať, v druhej vymyslieť ku každej z nich štyri možnosti. V poslednej fáze riešili zvyšné zadania s možnosťami, ktoré pre nich pripravili ostatné družinky. Za správne riešenia úloh družinky získavali body, tiež získavali body za možnosti, ktorými inú družinku poplietli.

Na základe reakcií usudzujeme, že tento typ aktivity umožňuje zamýšľať sa aj nad jednoduchými úlohami v inom svetle, snažiť sa porozumieť celému procesu riešenia do väčšej hĺbky, zvažovať rôzne chyby, ktoré pri riešení môžu nastať. Aktivita študentov zaujala a reagovali na ňu pozitívne. Domnievame sa, že by mohla obzvláštniť a skvalitniť tiež vyučovací proces v nižších stupňoch vzdelávania, pretože analýzu chýb a prácu s chybou začleňujú do vyučovania prirodzene. Zo skúseností z vyučovania sme tiež postrehli, že veľká časť žiakov rada pripravuje zadania alebo úlohy, ktoré budú reálne využité, a je to pre nich motivujúce.

Práca s emóciami sprevádzajúcimi chybu

Aktivita 1: Pokrčený papier ako symbol chyby

Ako prvú aktivitu, ktorá sa venuje odbúravaniu negatívnych pocitov, ktoré vyvoláva chyba, a práci s emóciami, je aktivita, ktorú popisuje Boalerová (2016: s. 35). Žiaci majú za úlohu vziať do rúk list papiera a pokrčiť ho. Majú pri tom myslieť na nejakú chybu, ktorej ste sa v matematike dopustili a na pocity, ktoré v nich vyvolala. Pokrkvaný papier majú následne hodiť do tabule.

Keď to žiaci urobia, požiadame ich, aby išli, papiere pozbierali a vystreli ich. Následne ich necháme, aby obtiahli línie podľa toho, ako bol papier pokrčený. Počas toho, ako to robia, im vysvetlíme, že vďaka tomu, že sa chýb dopúšťajú, umožňujú, aby sa im v mozgu vytvárali nové synaptické spojenia, a že chyby sú v procese učenia sa veľmi dôležité.

Takúto aktivitu je možné zaradiť na triednickú hodinu, no podobne ako všetky ostatné aktivity, je možné zaradiť ju aj priamo na hodinu matematiky. Niekoľko minút, ktoré venujeme tomu, aby sa žiaci učili vnímať chybu ako prirodzenú súčasť učebného procesu, je dobre investovaných. Navyše je dôležité uvedomiť si, že škola je výchovno-vzdelávacia inštitúcia a učitelia na hodinách matematiky by sa nemali od výchovnej zložky tohto procesu dištancovať.

Aktivita 2: Kreslenie so zavretými očami

Zadanie aktivity je jednoduché: „Vyberte si papier a ceruzky. Nakreslite... Počas celej doby majte zavreté oči."

Ak chceme, aby nám aktivita nezabrala viac ako 5 minút, je dôležité vybrať jednoduchý motív. Tak môžeme docieliť, aby nám zostal dostatočný čas na samotný vzdelávací proces. Motív je možné prepojiť s konceptom úloh, s ktorými budeme následne na hodinách pracovať, pre efektívne umocnenie atmosféry. Pokiaľ chceme, môžeme zvoliť geometrickú figúru. Odporúčame zvoliť motív, ktorý sa nedá jednoducho nakresliť jedným ťahom.

Obrázky, ktoré pri tomto spôsobe kreslenia vznikajú, majú ďaleko od dokonalosti. Dá sa zdôrazniť, že keď sme obrázok nakreslili najlepšie, ako sme vedeli, stačí to. Že chyby, ktorých sme sa dopustili, sú prirodzené a nemali by sme ich vnímať ako niečo zlé, ale ako niečo prirodzené. Ak majú žiaci z takejto aktivity strach, možno ho odbúrať napríklad formovým kreslením, ktoré zohráva významnú úlohu v alternatívnom školstve – Waldorf.

Aktivita zároveň krásne demonštruje, čo sa môže stať, keď sa spoliehame iba na pamäť, čo sa často deje práve v prípadoch, keď sa žiaci snažia bez porozumenia naučiť naspamäť nejaký matematický koncept alebo postup riešenia nejakého druhu úlohy.

Zároveň môžeme sledovať paralelu medzi matematickým objavovaním, bádaním vo chvíli, keď ešte nie je výsledok nášho snaženia jasný a viditeľný a kreslením predtým, ako otvoríme oči. Demonštruje to, že snaženie a objavovanie je procesom, počas ktorého sa občas „strácame".

Aktivita 3: Zbierame chyby!

Aktivita sa dá vykonávať priebežne pri riešení ľubovoľných úloh. Na začiatku hodiny žiakov požiadame, aby vždy, keď si uvedomia, že sa dopustili nejakej chyby, vstali a do vopred pripravenej nádoby vhodili papierik s opisom chyby alebo poznatkom, ktorý sa vďaka chybe naučil. Žiaci môžu chyby zbierať individuálne alebo spoločne. Papieriky predstavujú nové poznatky a skúsenosti, ktoré vďaka našim omylom majú možnosť vzniknúť. V prípade, že si žiaci aktivitu obľúbia, môžeme z nádoby vyžrebovať chybu, ktorú si spoločne rozoberieme.

Pri mladších žiakoch, ktorí svoje chyby nedokážu pomenovať alebo opísať, prípadne keď na hodinách nemáme dosť času, môžeme papieriky nahradiť guličkami, ktoré budú chyby symbolizovať (Boalerová, 2016).

V prípade, že k chybám žiakov pristupujeme ako k niečomu negatívnemu, zvyšujeme riziko nárastu pasivity u žiakov. Veď kto nič nerobí, nič nepokazí. Toto riziko stúpa tiež vtedy, keď nezabránime, aby chyba žiaka mohla byť dôvodom k zosmiešňovaniu zo strany spolužiakov. Ak sa naši žiaci budú báť urobiť chybu, pravdepodobne sa budú snažiť vyhýbať sa zložitejším problémom, na ktoré nebudú hneď poznať odpoveď, problémom, kde nebudú s istotou vedieť použiť naučený postup. Buďme im príkladom v tom, ako reagujeme na svoje vlastné chyby a učme ich s chybami pracovať, na kvalitu ich matematického vzdelania a ich vzťahu k matematike to môže mať pozitívny vplyv.

Literatúra

[1] Boalerová, J. (2016). *Matematické cítenie.* Bratislava: Tatran.

[2] Dweck, C. S. (2017). *Nastavení mysli: nová psychologie úspěchu, aneb, naučte se využít svůj potenciál.* Brno: Jan Melvil Publishing.

[3] Moser, J., et al. (2011). Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-Set to Adaptive Posterror Adjustments. *Psychological Science*, 22(11). Dostupné z https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/0956797611419520

História teórie grafov v Bratislave

Milan Lekár[1]

V minulom storočí slovenská matematika utrpela značnú škodu kvôli emigrácii matematikov do zahraničia. Tento fenomén sa v zahraničnej literatúre označuje aj ako „brain drain". (Sitarčíková, 2018) Predmetom takéhoto výskumu je snaha objektívne zhodnotiť dôvody a dôsledky emigrácie matematikov. (Pronerová, 2015) V nasledujúcom príspevku budeme venovať pozornosť stručnému náčrtu histórie slovenskej matematiky v 20. storočí a tiež poukážeme na vplyv emigrácie slovenských matematikov na slovenskú matematiku. Okrem iného predstavíme najúspešnejší slovenský matematický seminár.

Začiatkom 20. storočia nebol na území Slovenska takmer žiadny systematický matematický výskum. Bolo to zapríčinené mnohými faktormi, prvým je fakt, že na Slovensku nebol dostatok odborníkov, kvôli čomu prof. Hronec, nestor slovenskej matematiky, pozýval českých matematikov, aby pomáhali na Slovensku s výchovou novej generácie matematikov. Jedným z pozvaných bol aj prof. Otakar Borůvka, ktorý pracoval na Slovensku dlhých 10 rokov bez platu. Ďalší český profesor, ktorý sa pričinil o rozvoj slovenskej matematiky začiatkom 20. storočia, bol tiež prof. Kaucky. Zmena nastala až v roku 1919, kedy bola založená najstaršia slovenská univerzita, a to Univerzita Komenského v Bratislave. Napriek vzniku univerzity už v roku 1919 matematická fakulta chýbala až do roku 1940, preto pred druhou svetovou vojnou museli slovenskí matematici študovať na českých alebo zahraničných fakultách. Prvá katedra matematiky bola založená na Univerzite Milána Rastislava Štefánika v Košiciach v roku 1937. Neskôr bola presunutá do Bratislavy a v roku 1939 bola premenovaná na Slovenskú technickú univerzitu. Napriek prítomnosti dvoch vysokých škôl v Bratislave sa systematický matematický výskum začína robiť až po druhej svetovej vojne. V 30. rokoch minulého storočia sa slovenská matematika rozvíja pod vplyvom prof. RNDr. Milana Kolibiara, PhD., ktorý spolu s prof. RNDr. Jánom Jakubíkom, DrSc. rozvíjajú najmä teóriu grafov a teóriu zväzov. (Miller, L. et al., 2017)

Ďalší zlom v slovenskej matematike prichádza v roku 1963, kedy slovenský matematik prof. RNDr. Anton Kotzig, PhD. zakladá seminár z oblasti teórie grafov a ktorý funguje doteraz. Ide tak o úspešný fungujúci seminár, historický starý už viac ako 50 rokov, na ktorom vzniklo mnoho vedeckých prác. Hoci v tomto období vzniká mnoho cenných prác z oblasti teórie grafov, pracovné podmienky neboli ideálne. Bolo tomu tak najmä kvôli politickej situácii. V roku 1968 sa udial vojenský vpád ZSSR na územie vtedajšieho Československa, ktorý bol prezentovaný komunistickou stranou ako spojenecká výpomoc zo strany Ruska. Napätá spoločenská

[1]Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, lekar.milan7@gmail.com

situácia bola spôsobená aj kvôli odpočúvaniu ľudí a rôznym nekalím praktikám členov komunistickej strany ČSSR. Tieto a mnohé iné boli hlavné dôvody emigrácie slovenských matematikov v tomto období. Jedným z ľudí, ktorý v tomto období emigroval, bol aj RNDr. Peter Horak, Ph.D., ktorý v súčasnosti pôsobí na University of Washington v Tacome a venuje sa najmä výskumu v oblasti teoretickej informatiky a diskrétnej matematiky. Ďalší matematik, ktorý emigroval, bol Pavol Hell, Ph.D., ktorý pôvodne študoval na Karlovej univerzite v Prahe, ale svoje magisterské a doktorandské štúdia dokončil už v Kanade. V súčasnosti pôsobí ako profesor na Simon Fraser University v Kanade. Zatiaľ čo spolupráca týchto matematikov so slovenskými matematikmi pred ich odchodom do Kanady bola na dobrej úrovni, po ich odchode začína upadať počet spoluprác s matematikmi, ktorí ostali na Slovensku. Je tomu tak zo zjavných a pochopiteľných dôvodov, pretože komunistická strana ČSSR nedovoľovala udržiavať dlhodobú korešpondenciu s ľuďmi v zahraničí a tiež komplikovala takýmto ľuďom návrat do Československa. Ďalší slovenskí matematici, ktorí emigrovali, boli aj prof. RNDr. Anton Kotzig, PhD., ktorý založil seminár z teórie grafov, a tiež prof. RNDr. Alexander Rosa, PhD., ktorý v súčasnosti pôsobí na McMaster Univerzity v Hamiltone a je významným odborníkom z oblasti teórie grafov. Emigrácia tak v minulom storočí spôsobila na Slovensku úbytok odborníkov a mnohí slovenskí matematici toto pokladajú za len negatívny jav, avšak isté pozitíva to predsa len prinieslo. Tým bol najmä vyšší počet ašpirantov, keďže bolo v dôsledku odchodu prof. Rosu a prof. Kotziga málo školiteľov. Ich emigrácia do Kanady totiž spôsobila, že na Slovensku ostalo menej matematikov, ale rovnaký počet študentov, ktorých bolo treba viesť. Z tohto dôvodu sa nových ašpirantov ujímajú najmä Dr. Bosák a prof. Znám, ktorí prevzali na Slovensku po odchode prof. Rosu a prof. Kotziga zodpovednosť za výchovu ďalšej generácie matematikov zaoberajúcich sa grafmi. Pozitívny dôsledok emigrácie slovenských matematikov je aj fakt, že neskôr začali pozývať slovenských matematikov na zahraničné konferencie, čo pomohlo otvoriť slovenskú matematiku a v širšom zmysle aj slovenskú vedu medzinárodnej spolupráci. Jednou z takých bola aj konferencia venovaná 80. výročiu prof. Tuthe, na ktorú pozval prof. Rosa matematikov prof. Škovieru a prof. Nedelu. Konferencia sa konala v Ontáriu, v Kanade, a prof. Škoviera spolu s prof. Nedela tam strávili takmer celý mesiac, čím získali bohaté skúsenosti a nadviazali ďalšie kontakty. Takáto medzinárodná spolupráca bola však možná až po páde komunizmu v roku 1989.

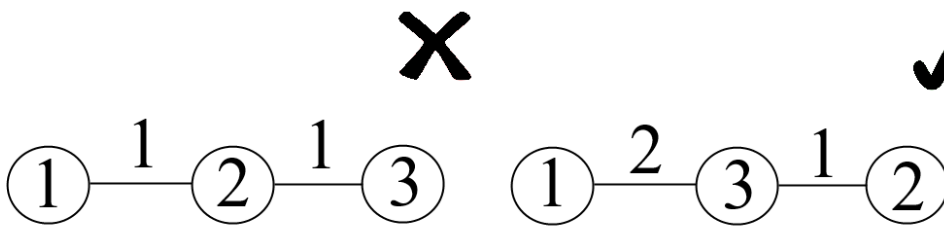
Jedným z významných problémov, ktoré možno považovať za ovocie seminára z teórie grafov, je aj problematika graciózneho ohodnotenia grafov. Definícia graciózneho ohodnotenia grafov je nasledovná:

Daný je graf $G = (V, H)$ v ktorom platí: $V = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Ohodnotenie, ktoré každému vrcholu m-vrcholovému grafu G priradí jednoznačnú hodnotu z množiny $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ tak, že žiadne dva vrcholy nemajú rovnakú hodnotu a každej hrane priradí hodnotu rovnú absolútnemu rozdielu hodnôt vrcholov s ktorými susedí, pričom žiadne dve hrany nemajú rovnakú hodnotu a platí: $H = \{1, 2, \ldots, m-1\}$ sa nazýva graciózne ohodnotenie grafu $G = (V, H)$.

V roku 1961 prof. RNDr. Alexander Rosa, PhD. vyslovil hypotézu, že každý strom (graf, ktorý neobsahuje kružnicu) je možné graciózne ohodnotiť. Dodnes ide o nedokázanú hypotézu. (Cattell, 2006) V roku 1982 publikuje spolu so svojím kolegom Huang Chang-Guey a prof. Kotzigom článok s názvom Further results on tree labellings, v ktorom sa im podarilo priniesť niekoľko ďalších čiastočných výsledkov v tejto oblasti. Tieto výsledky však už boli dosiahnuté v Kanade, a preto ich nemožno považovať za výsledky slovenskej matematiky.

Jednoduchý príklad je na obrázku dole vľavo, kde nie je znázornené graciózne ohodnotenie, pretože dve hrany majú rovnakú hodnotu, aj keď ich hodnotu je možné dostať ako rozdiel hodnôt vrcholov, zatiaľ čo graf dole vpravo spĺňa definíciu gracióznego ohodnotenia:



Samotný seminár z teórie grafov, ktorý vznikol v roku 1961, je na vysokej vedeckej úrovni a zároveň je dostupný pre študentov a tiež pre verejnosť, je teda svojim charakterom veľmi unikátny a už viac ako 58 rokov prináša veľa nových výsledkov z teórie grafov, čím slovenská škola matematikov zaoberajúcich sa grafmi významným spôsobom prispela k rozvoju teórie grafov na svetovej úrovni.

Literatura

[1] Cattell, R. (2006). Graceful labellings of paths. *Discrete Mathematics*, 307, 3161–3176.

[2] Huang, C., Kotzig, A. & Rosa, A. (1982). Further results on tree labellings. *Utilitas Mathematica*, 21, 31–48.

[3] Miller, L., Hubčíková, E., Krasňanská, Z., Kováč, M., Fedorová, K., Jirsáková, J. & Slyško, B. (2017). *Univerzita Komenského v Bratislave – 2017 V číslach, grafoch, obrazoch.* Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave. Dostupné z https://uniba.sk/fileadmin/ruk/ovv/2018/UK_v_cislach_a_grafoch_2017_sj.pdf

[4] Pronerová, I. (2015). *Pôsobenie fenoménu brain drain v slovenskej republike a motivácia odborníkov k práci v zahraničí* [Diplomová práca]. Trenčín: Vysoká škola Manažmentu v Trenčíne.

[5] Sitarčíková, A. (2018). *Únik mozgov a jeho sociálno-ekonomické efekty v podmienkach slovenskej republiky* [Diplomová práca]. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, Ekonomická fakulta, Banská Bystrica.

[6] http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=109

[7] http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=15

[8] http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=98

[9] http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=117

Spojenie Flipped Learning a Mobile Learning na hodinách matematiky

Barbora Matušková[1]

Informačno-komunikačné zariadenia, ako počítač, smartphone, tablet, ale aj internet, sú neodmysliteľnou súčasťou takmer každého z nás. Rovnako je tomu aj v prípade študentov. Dnešná generácia žiakov a študentov používa tieto zariadenia ako formu zábavy, či už vo svojom voľnom čase alebo aj v rámci povinností. V poslednej dobe sme si všimli, že študenti začínajú vyhľadávať hry, ktoré by im mohli byť nápomocné pri vzdelávaní sa alebo pri príprave na vyučovanie. V nasledujúcom príspevku sa pokúsime ukázať, ako využívať hranie mobilných matematických hier v prospech vyučovania matematiky a vzdelávania študentov.

Flipped Learning

Flipped Learning, alebo častokrát označovaný aj ako Flipped Classroom, nie je vyučovacou metódou, ale skôr modelom alebo smerom vyučovania. V podstate ide o prevrátený (Baranovič, 2012), resp. obrátený (Hanč & Tuleja, 2012) model vyučovania. Podstatou Flipped Learningu je výmena časti vyučovacej hodiny s domácou prípravou študentov. Aktivity, ktoré sa bežne vykonávajú v škole na

[1]Katedra algebry a geometrie, FMFI UK v Bratislave, barbora.matuskova28@gmail.com

vyučovaní, ako sprístupňovanie nového učiva, sa presúvajú do individuálneho samoštúdia doma a naopak domáce aktivity, ako precvičovanie počtových operácií, riešenie úloh sa robia počas vyučovania v škole.

Hlavnými propagandistami Flipped Learningu sú dvaja vysokoškolský učitelia John Bergmann a Aaron Sams. V roku 2006 sa rozhodli sprístupniť študentom svoje prednášky a následne po roku zistili, že ich hodiny sú viac praktickejšie a prospešnejšie pre ich študentov. Napriek tomu až v roku 2014 na svojej internetov stránke uviedli oficiálnu definíciu tohto modelu vyučovania: „Flipped Learning je model výučby, v ktorom sa priamy výklad vyučujúceho presúva zo skupinového vzdelávacieho priestoru do individuálneho vzdelávacieho priestoru a vzniknutý skupinový priestor sa mení na dynamické interaktívne vzdelávacie prostredie, kde učiteľ vedie študentov, ktorí aktívne aplikujú poznatky a tvorivo sa zapájajú do výučby predmetu.“ (Flipped Learning Network, 2014)

Podľa nášho názoru veľkou výhodou Flipped Learningu je, že učiteľ v rámci tohto modelu môže používať rôzne vyučovacie metódy. Dôležité je si uvedomiť, že kontaktná výučba v škole by mala byť založená na aktívnej práci študentov, či už samostatne alebo v skupinkách, kde učiteľ je len pozorovateľom a kontrolórom. Na druhej strane je domáca príprava založená na samostatnom štúdiu, kde ide skôr o transmisijne prijímanie informácií. Napriek tomu našou snahou je spríjemniť študentom aj ich domácu prípravu, a to napríklad jej netradičným zadaním v podobe zahrania sa vopred určenej matematickej mobilnej hry. Takže podľa nášho názoru je Mobile Learning metódou, ktorá môže byť uplatnená v rámci modelu Flipped Classroom.

Mobile Learning

Mobile Learning je vyučovacia metóda, ktorá sa označuje aj pod skratkou m-learning, a v podstate ide o akúkoľvek podobu učenia s pomocou tabletov a mobilných telefónov (smartphone). Okrem mobilných zariadení pri uplatňovaní tejto vyučovacej metódy potrebujeme aj vhodnú aplikáciu, prostredníctvom ktorej sa budú študenti vzdelávať. Jednou z takýchto, na matematiku vhodných, je aplikácia Apps in Math. Je voľne stiahnuteľná pre systémy Android a iOs alebo cez webovú stránku https://www.project-aim.eu/slk. Po stiahnutí už na jej požívanie nepotrebujete internetové pripojenie. Aplikácia Apps in Math obsahuje celkovo 25 matematických hier, z toho 17 je určených pre ZŠ, 6 pre SŠ a 2 hry sú určené aj pre ZŠ a SŠ. Hry sú zamerané hlavne na rozvíjanie matematického myslenia hravou formou. Podľa tematického zamerania sú rozdelené do piatich kategórií: Čísla, Funkcie, Geometria, Šanca a Logika (Kohanová et al., 2016).

Spojenie Flipped Learning a Mobile Learning

V rámci našej dizertačnej práce sa zaoberáme práve Mobile Learningom a efektívnym začleňovaním matematických mobilných hier do vyučovacieho procesu. Pri zisťovaní tejto efektívnosti zaraďujeme hry do rôznych fáz vyučovacej hodiny. Jedným z takýchto výskumov bolo aj zaradenie hry *Statistico* zo spomínanej aplikácie. Celkovo sme otestovali štyri možnosti zaradenia: v rámci domácej prípravy na vyučovanie, motivačno-expozičná fáza hodiny, opakovacia (fixačná) fáza hodiny a nezaradená mobilná hra (kontrolná skupina). Počas pozorovania vyučovacích hodín sme si všimli, že študenti, ktorí s hrou pracovali doma mimo vyučovacej hodiny, sa aktívnejšie zapájali do diskusie s učiteľom, rýchlejšie a správnejšie reagovali na otázky učiteľa, a dokonca hneď vedeli čomu neporozumeli a čo potrebujú ešte vysvetliť. Prekvapením pre nás bolo, že aj v krátkom vedomostnom teste dosiahli najvyššie priemerné skóre v porovnaní s ostatným výskumnými skupinami. Práve toto bol okamih, keď sme sa začali zaujímať aj o vyučovací model Flipped Learning.

Po dôkladnom teoretickom naštudovaní modelu Flipped Learning a na základe jeho požiadaviek sme začali pripravovať návrhy vyučovacích hodín aj spolu s materiálom určeným na domácu prípravu pre študentov. Ako vlastne prebiehala vyučovacia hodina v modeli Flipped Learning? V krátkosti si opíšeme jednu takúto vyučovaciu hodinu, ktorej téma bola „Modus a medián štatistického súboru“. V prvom rade je študentom v dostatočnom časovom intervale pred danou vyučovacou hodinou pridelený materiál určený na domácu prípravu. Najlepšie hneď po predchádzajúcej hodine matematiky. Študenti dostali za úlohu zahrať sa hru *Statistico* z mobilnej aplikácie *Apps in Math*. Cieľom hry je, aby sa študenti oboznámili s pojmami modus, medián, ale aj aritmetický priemer a ich určovaním v štatistickom súbore. Hra pozostáva z režimu učenia a hrania. Odporúčali sme študentom zahrať sa hru viackrát, pokiaľ porozumejú novým pojmom. Následne vyučovacia hodina začala diskusiou, ktorá celkovo trvala 15 minút. Učiteľ sa pýtal študentov, čomu neporozumeli, riadil celú diskusiu. Ďalších 5 až 7 minút venoval zadefinovaniu týchto pojmov a následne študenti riešili úlohy zamerané na charakteristiky polohy (aritmetický priemer, modus a medián). V závere vyučovacej hodiny vyvolala diskusia o pohovore do zamestnania a platoch veľký záujem. Učiteľ sa pýtal, ako extrémne hodnoty štatistického súboru ovplyvňujú jednotlivé charakteristiky polohy a na ktorú z nich by sa pýtali na pohovore do ich zamestnania. Danú vyučovaciu hodinu zhodnotil pozitívne aj samotný učiteľ. Mal dojem, že študenti sa viac pýtajú, viac reagujú a viac sa zaujímajú o učivo, ako na iných hodinách matematiky.

Po tejto, pre nás pozitívnej skúsenosti, sme sa rozhodli zaradiť do vyučovania predmetu matematika v rámci domácej prípravy študentov aj ďalšie hry z aplikácie *Apps in Math*. Najvhodnejšie na toto zaradenie nám prišli hry, ktoré obsahujú režim učenia pred samotným hraním sa. Zo spomínanej aplikácie sú to napríklad hry *KombiBus* (5./6. ročník ZŠ), *Čiarochôdza* (8. ročník ZŠ), *Manhattan* a *Brooklyn* (7. ročník ZŠ), *Trigono* (SŠ), *Dom z kariet* (SŠ) apod. V nižších ročníkoch osemročného gymnázia sme zaznamenali, že žiaci sa viac tešia na hodiny a so záujmom sa rozprávajú medzi sebou o hre (a teda aj o učive), ktorú si mali doma zahrať. Jedine na začiatku sme museli upokojiť rodičov, že áno občas žiaci dostanú na domácu úlohu sa zahrať hru na tablete alebo mobilnom telefóne.

Záver

Podľa nášho názoru spojenie vyučovacieho modelu Flipped Learning s vyučovacou metódou Mobile Learning na hodiny matematiky prinesie niečo netradičné a zaujímavé. Častokrát to môže byť vhodnou motiváciou pre žiakov, ktorých počítanie do zošita nudí. Taktiež si myslíme, že Flipped Learning podporuje samostatnosť študentov a rôzne učebné štýly. Študenti nám ako pozitívum uvádzali, že môžu hrou prechádzať opakovane, majú okamžitú spätnú väzbu, na základe ktorej sa rozhodnú, či budú ešte hrať, alebo porozumeli učivu v danej hre. Taktiež sa vyjadrili, že sa tešia na domácu úlohu z matematiky v podobe hry na tablete, čím sa podľa nášho názoru zlepšuje aj ich vzťah k celkovému chápaniu domácej úlohy. V neposlednom rade si myslíme, že príprava pred vyučovaním skvalitňuje vyučovaciu hodinu. Učiteľ má viac časového priestoru na precvičovanie matematických zručností, ale aj riešenie praktických, zaujímavých a problémových úloh.

V závere tohto príspevku by sme však chceli dodať, že každý model vyučovania, ako aj každá vyučovacia metóda, prostredníctvom ktorej chceme vyučovať, si vyžaduje najmä dobrú teoretickú prípravu. Predsa nie je jednoduché začať niečo používať, čo nepoznáme.

Literatúra

[1] Matušková, B. (2019). *Vyučovacia metóda Flipped Classroom na hodinách štatistiky strednej školy* [Rigorózna práca]. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.

[2] Neumajer, O., Rohlíková, L. & Zounek, J. (2015). *Učíme se s tabletem. Využití mobilních technologií ve vzdělávání.* Praha: Wolters Kluwer, a. s.

[3] Kohanová, I., et al. (2016). *Apps in Math, Metodická príručka pre učiteľov.* Bratislava: KEC FMFI UK Bratislava.

[4] Apps in Math (2015). *Project.* [online]. [cit. 2019-03-29]. Dostupné z https://www.project-aim.eu/slk

[5] Flipped Learning Network (2014). *Flipped Learning.* [online]. [cit. 2019-03-29]. Dostupné z https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/

Doučování matematiky

Gabriela Novotná[1]

Soukromé doučování se stává celosvětově významným fenoménem. Nejen v České republice patří matematika mezi nejžádanější předměty, i přesto je zde doučování matematiky věnována jen malá pozornost. Následující příspěvek shrnuje základní informace, které o doučování matematiky v České republice v současné době máme, především co se týče míry jeho využívání, formy a důsledků pro učitele z běžných škol.

Vymezení doučování

Doučování bývá nazýváno různě: mentoring, tutoring, kondice, příprava do školy nebo jednoduše doučování, někdy doplněné přívlastkem soukromé, případně individuální, jde-li o doučování jednotlivce. Liší se i jednotlivá pojetí, my se budeme držet následujícího: soukromé doučování je vymezeno jako *doučování školního* (akademického) *předmětu* (např. matematiky nebo angličtiny), které je *doplňkové* k výuce v běžné škole. To zahrnuje *soukromé doučování* (nabízené jednotlivcem) a *přípravné kurzy* (nabízené institucemi). Tato definice je inspirovaná vymezením Braye a Silové (2006), kteří navíc dodávají, že doučování je poskytované za účelem finančního zisku. Tím bychom ale přišli o případy, kdy např. učitel zdarma doučuje žáky mimo výuku, soused pomáhá známému nebo doučují členové rodiny, proto od této podmínky v naší definici upouštíme.

Co o doučování matematiky víme?

V českém kontextu toho bohužel není mnoho. O doučování na prvním stupni existují jen závěrečné práce (např. Höschlová, 2012). Na úrovni střední školy se doučováním zabýval V. Šťastný v rámci své disertační práce (2016), kde zkoumal a porovnával doučování v Praze a Moravskoslezském kraji mezi žáky čtvrtých ročníků maturitních oborů (N = 1 265). Provedl také rozhovory s poskytovateli

[1]KMDM PedF UK, gabriela.novotna@jeida.cz

doučování (N = 22) a analyzoval online nabídky doučování (N = 2 058). Na úrovni druhého stupně se kromě autorky zabývá doučováním B. Terreros, která provedla dotazníkové šetření ve Středočeském a Ústeckém kraji mezi žáky devátých ročníků (N = 1 016). Šťastný ani Terreros se nicméně nezaměřují na matematiku, zkoumají doučování na obecné rovině. Klíčová je pro ně typologie doučovaného žáka a faktory, které mají vliv na jeho účast na doučování (jako školní úspěšnost, socioekonomický status rodiny apod.). V současné době se Šťastný věnuje zkoumání doučování na druhém stupni se zaměřením na český jazyk, matematiku a angličtinu. Výsledky jeho výzkumu však ještě nejsou známy.

Autorka provedla svůj pilotní výzkum doučování matematiky v září 2018 na dvou pražských základních školách. Získala data od 142 respondentů z 6.–9. ročníku základní školy, jimž zadala otázky o doučování obecně, o doučování matematiky a o vnímání kvality svého poznání v matematice[2]. Její výsledky porovnáme s výsledky zmíněných dvou autorů.

Využití doučování

Na různých vzorcích různě starých žáků uvádějí výše zmínění autoři následující podíly žáků, kteří někdy využili soukromé doučování matematiky: Novotná – 46 %, Terreros – 62 %, Šťastný – 53 %. Nutno je však podotknout, že autoři se lišili už samotnou definicí doučování (jelikož Novotná upustila od podmínky finančního zisku). Rozdíly pravděpodobně vznikají i s ohledem na region České republiky, ve kterém byl výzkum proveden, a s ohledem na věk respondentů.

Co se důvodů pro využití doučování týče, autoři se shodují, že mezi nejčastěji volené důvody patří špatné známky a příprava na různé typy zkoušek. Novotná navíc zjistila jako dva nejčastější důvody snahu o lepší porozumění matematice a procvičení učiva (viz tabulka 1), jež Terreros a Šťastný neuvádějí (nebyly zahrnuty do výzkumu).

Forma a lektor doučování

Autoři se shodují, že nejčastěji (cca ve dvou třetinách až třech čtvrtinách případů) probíhá doučování matematiky individuálně. 38 % dotazovaných ve výzkumu Novotné uvedlo účast na skupinovém doučování (tzn. 3 a více žáků), přičemž ve třetině případů se jednalo o skupinu 10–18 žáků.

Co se osoby lektora týče, Novotná a Šťastný prezentují podobné výsledky: v asi 58 % se jedná o učitele (typicky z jiné základní nebo střední školy), v asi 28 %

[2] Více informací o dotazníku a o výsledcích výzkumu bude k dispozici v příspěvku autorky ve sborníku z konference CERME11 (předpokládané vydání 2019).

Důvod	%
Chtěl/a jsem matematice lépe porozumět.	56,3 %
Chtěl/a jsem si učivo lépe pamatovat a procvičit.	48,4 %
Měl/a jsem špatné známky, protože od učitele učivo nechápu.	43,8 %
Chtěl/a jsem se připravit na přijímací zkoušku na gymnázium nebo střední školu.	42,2 %
Rodiče chtěli, abych na doučování chodil/a.	31,3 %
Měl/a jsem špatné známky, protože jsem zanedbával/a učení a přípravu do školy.	25,0 %
Chtěl/a jsem se dozvědět víc, než se dozvím ve škole.	15,6 %
Ve škole učivo nestíhám.	10,9 %
Chodili i spolužáci.	6,3 %
jiné	4,7 %

Tab. 1: Důvody pro využití doučování podle Novotné.

o studenta nebo žáka, zbytek pak tvoří známí, příbuzní a další lektoři. Nejčastěji dochází k osobním setkáním s lektorem u něj nebo ve škole.

Souhlas s tvrzeními

Jako zajímavost přikládáme vyjádření žáků z výzkumu Novotné ke čtyřem výrokům o doučování matematiky (viz tabulka 2). Žáci vyjadřovali u každého výroku míru souhlasu pomocí Likertovy škály (1 – zcela souhlasím, 2 – souhlasím, 3 – nevím, 4 – nesouhlasím, 5 – zcela nesouhlasím; viz tabulka 2, ** značí statisticky významný rozdíl mezi skupinami na hladině významnosti 1 %).

tvrzení	průměr	žáci s douč.	žáci bez douč.
Doučování matematiky využívají jen slabí žáci.	3,72	3,89	3,57
Je těžké být v matematice úspěšný bez využití doučování.	3,51	3,12**	3,84**
Doučování matematiky umožňuje rozvíjet talent.	2,49	2,57	2,42
Je ostuda chodit na doučování matematiky.	4,52	4,55	4,49

Tab. 2: Míra souhlasu s výroky pomocí Likertovy škály.

Dotazovaní žáci většinově nesouhlasili s výrokem „je ostuda chodit na doučování matematiky“ (průměr 4,52), což může být vnímáno jako pozitivní z několika důvodů. Zaprvé, nebudou se pravděpodobně bát o doučování projevit zájem, když ho budou potřebovat. Zadruhé, nebudou se bát o doučování mluvit, což je výhoda především pro naše výzkumné účely. Zatřetí, někdo, kdo na doučování dochází, by neměl být ostatními znevýhodňován, šikanován či by se mu neměli vysmívat.

Jen ve výroku „je těžké být v matematice úspěšný bez využití doučování“ se projevil statisticky významný rozdíl mezi respondenty, kteří v dané době využívali doučování matematiky, a respondenty bez doučování. Odpovědi obou skupin žáků se průměrně pohybovaly mezi „nevím“ a „nesouhlasím“, nicméně žáci, kteří se doučování neúčastnili, s výrokem nesouhlasili častěji. To může opět poukazovat na to, že žáci vnímají doučování matematiky jako přínosné, na druhou stranu nemusí být podle nich znevýhodňující neúčastnit se ho.

Hodnocení zbývajících dvou výroků se pohybovala kolem průměru, bez významného rozdílu mezi žáky s doučováním matematiky a bez něj.

Shrnutí a důsledky

Jaké závěry by si z tohoto článku mohl odnést učitel? Předně to, že velká část běžných žáků využívá doučování. Nejedná se jen o žáky slabší, ba naopak, často jde o žáky nadprůměrné, hlavně ve spojení s přípravou na přijímací zkoušky na gymnázia. Doučování tak bezesporu ovlivňuje výuku v běžné škole a prohlubuje rozdíly mezi jednotlivými žáky.

Mezi nejčastější důvody k využívání doučování patří snaha zlepšit známky nebo připravit se na přijímací zkoušky. Často tedy může docházet k pouhému memorování naučených algoritmů a typických postupů řešení, které mohou žáka ještě více odradit od snahy o hlubší pochopení látky.

Lektorem většinou bývá učitel, který se s žákem setkává osobně, což přináší možnost dobré a individuální pomoci konkrétnímu žákovi. Nutné je však podotknout, že i kvalita lektorů může být různá[3], s čímž by měl učitel v běžné škole počítat.

Doučování je také silně závislé na socioekonomických podmínkách v rodině a v regionu, jak ukazují nejen zmíněné výzkumy. Ne každý si tedy může doučování dovolit, i když by ho třeba potřeboval. Opět se tak mohou prohlubovat nerovnosti mezi žáky. Doučování rozhodně patří mezi fenomény, které by neměly být opomíjeny, a měla by mu být věnována větší pozornost.

[3]Toto je navíc podpořeno tím, že provozování lektorské činnosti je volná živnostenská činnost. Mnoho lektorů také poskytuje doučování neformálně a „na černo“.

Poděkování

Výzkum a článek byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt č. 424119).

Literatura

[1] Bray, M. & Silova, I. (2006). The Private Tutoring Phenomenon: International Patterns and Perspectives. In Silova, I., Bdien, V. & Bray, M. (Eds.). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports* (27–40). New York: Open Society Institute.

[2] Höschlová, M. (2012). *Rozsah a příčiny doučování na prvním stupni ZŠ* [Diplomová práce]. Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/95095/.

[3] Novotná, G. (2019, únor). *Pupils' perception of their understanding in mathematics and its connection to private supplementary tutoring.* Příspěvek prezentovaný na konferenci CERME11, Utrecht.

[4] Terreros, B. (2018). Soukromé doučování z pohledu žáků českých základních škol. Výsledky dotazníkového šetření u žáků 9. tříd ZŠ ve Středočeském a Ústeckém kraji. *e-Pedagogium*, 2018(3), 78–92.

[5] Šťastný, V. (2016). *Fenomén soukromého doučování jako stínový vzdělávací systém v České republice* [Disertační práce]. Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/133187/.

Rozvoj schopnosti učiť sa v matematike na 1. stupni ZŠ

ALENA PRÍDAVKOVÁ[1]

Schopnosť učiť sa je jedným z determinantov úspešného riešenia matematických úloh. Ak sú u žiaka viditeľné prejavy nedostatočne rozvinutej schopnosti učiť sa, je dôležité túto stránku jeho myslenia rozvíjať, napríklad aj využitím úloh z matematiky. V príspevku je predstavený koncept exekutívne funkcie ako súčasť myslenia a učenia sa. Prezentovaná je konkrétna úloha pre žiakov 1. stupňa základnej školy ako prostriedok rozvoja myslenia. Predstavené sú príklady inštrukcií zameraných na uvedomenie si použitého postupu riešenia úlohy, na verbalizáciu myšlienkových procesov, ako aj na aktivovanie vybraných exekutívnych funkcií.

Učenie sa a matematika

Do vyučovania matematiky na 1. stupni základnej školy je vhodné zaraďovať činnosti zamerané na uvažovanie o vlastnom myslení, argumentácii, znalostiach, zručnostiach a postupoch použitých v procese riešenia úloh. Takýmto spôsobom je možné v myslení žiakov rozvíjať tzv. metakognitívne procesy. Spomenuté procesy sú aktívne pri riešení matematických problémov vtedy, ak žiaci zaznamenávajú ako premýšľajú, dokážu argumentovať, premyslieť a vysvetliť zvolený postup riešenia, uvedomia si, že niečomu nerozumejú (Frobisher & Frobisher, 2015). Metakognitívne riadenie je tak jedným zo znakov dobrého myslenia a učenia sa (Fischer, 2011) a rozvoj týchto zručností je najdôležitejšou súčasťou učenia sa.

Jedným z dôvodov neúspešnosti žiakov pri riešení úloh z matematiky môže byť aj deficit v oblasti myslenia – nedostatočne rozvinuté exekutívne funkcie. Ide o mentálne procesy, ktoré riadia a kontrolujú tie kognitívne procesy, ktoré sú najviac aktívne v procese učenia sa. Predstavujú prerekvizitu pre školský výkon a poskytujú základ pre učenie sa (Meltzer, 2018).

V psychológii existuje niekoľko klasifikácií a systémov exekutívnych funkcií. V procese učenia sa majú dôležité zastúpenie predovšetkým kontrola pozornosti, inhibícia, pracovná pamäť, plánovanie, kognitívna flexibilita, sebaregulácia. Ak má žiak nedostatočne rozvinuté exekutívne funkcie, môže to mať za následok aj zlyhanie v matematike.

[1]Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta, Katedra matematickej edukácie, alena.pridavkova@unipo.sk

Žiak môže mať problémy v oblastiach, ako napríklad:

- triedenie informácií, identifikovanie dôležitých údajov (slovné úlohy, aplikačné úlohy zamerané na zbieranie a zaznamenávanie údajov, čítanie a interpretácia údajov z tabuliek, grafov),
- problém s udržaním množstva detailov v pracovnej pamäti (písomné násobenie – udržanie čiastkových súčinov v pamäti),
- problém flexibilne prepínať medzi prístupmi (rôzne spôsoby počítania spamäti; napríklad odčítanie jednociferného čísla od dvojciferného čísla s prechodom cez 10 – graficky, rozkladom menšiteľa, rozkladom menšenca),
- problém s plánovaním postupu pri riešení úloh (konštrukčné úlohy, úlohy kombinatorického charakteru, logické problémy),
- problém nájsť a použiť nové stratégie pri riešení úloh (kombinatorika, problém so schopnosťou poučiť sa z chýb).

Uvedené nedostatky korešpondujú s prejavmi slaboprospievajúceho žiaka, ktorý nedokáže zamerať a udržať pozornosť, podržať informácie v pamäti, nie je schopný plánovať kroky vopred ani kontrolovať svoj postup. Neúspech v matematike je zapríčinený aj zníženou úrovňou myslenia v danej oblasti (Kovalčíkova et al., 2016).

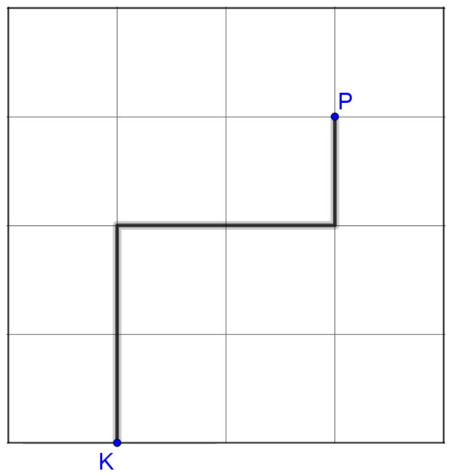
Pri riešení matematickej úlohy sú aktívne niektoré exekutívne funkcie. Na to, aby žiak úspešne zvládol riešenie úlohy, problému, je dôležité, aby: (1) porozumel zadaniu úlohy, (2) zapamätal si potrebné údaje, informácie, prípadne výsledky čiastkových operácií (pracovná pamäť), (3) naplánoval etapy riešenia a ich postupnosť (plánovanie), (4) zvolil si primeraný vhodný postup, stratégiu a (5) priebežne kontroloval a reguloval zvolené postupy (kontrola pozornosti, sebaregulácia).

Matematická úloha ako prostriedok rozvíjania schopnosti učiť sa

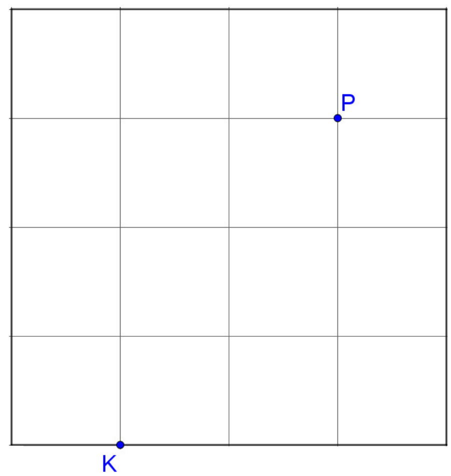
Uvádzame ukážku matematickej úlohy pre žiakov 1. stupňa základnej školy z oblasti geometrie, ktorá využíva námet pohybu v štvorcovej sieti a znázornenia cesty z jedného bodu do druhého. V štvorcovej sieti rozmerov 4×4 sú znázornené dva body, medzi ktorými je naznačená cesta (lomená čiara). Úlohou žiaka je pozorne sa pozrieť na cestu (čiaru, obrázok) a na základe vytvorenej mentálnej predstavy (v pracovnej pamäti) nakresliť cestu do štvorcovej siete, kde sú vyznačené len dva body (začiatok a koniec cesty). Kontext úlohy je možné prispôsobiť konkrétnej skupine žiakov. Uvádzame príklad zadania úlohy, návrh otázok a inštrukcií učiteľa, ktoré sú žiakovi zadávané so zámerom rozvíjania metakognitívnej dimenzie myslenia a možnosti gradácie úlohy.

Úloha: *Na obrázku je nakreslená cestička, ktorou prešiel panáčik Kamil z domu k svojmu kamarátovi Petrovi. Pozri sa pozorne na cestičku.*

Žiak sa pozerá na obrázok (obr. 1) cca 10 sekúnd. Potom učiteľ predloží pred žiaka obrázok (obr. 2), na ktorom sú vyznačené len dva body, a povie:
Nakresli takú istú cestičku, ako si videl na obrázku.



Obr. 1



Obr. 2

Úlohou žiaka je na základe toho, čo si zapamätal, znázorniť (nakresliť) rovnakú cestu. Pôvodný obrázok už pritom nemá k dispozícii. V krátkodobej pamäti si vytvorí mentálny obraz cesty, ktorý pretransformuje do výstupu vo forme nakreslenej čiary (cesty). Po skončení práce žiaka je priestor venovaný spätnej väzbe, kedy je jeho riešenie porovnávané s pôvodným zadaním (obr. 1). Pri analýze vytvoreného riešenia učiteľ zadáva žiakovi inštrukcie a otázky, ktoré sú orientované na vysvetlenie postupu použitého pri riešení úlohy, na verbalizáciu myšlienkových procesov, ako aj na uvedomenie si prípadných chýb.

Príklady inštrukcií a otázok metakognívneho charakteru:
Povedz, čo máš urobiť. Čo je tvojou úlohou?
Myslíš, že si to urobil správne? Vysvetli, ako si postupoval. Čo je potrebné si všímať?
Kde si urobil chybu? Prečo si sa pomýlil?
Vedel by si poradiť spolužiakovi, ako má postupovať pri riešení takejto úlohy? Na čo musí dávať pozor? Stretol si sa už s takouto úlohou? Kde? Zopakuj, čo bolo pri riešení dôležité? Čo si sa naučil? Kde to môžeš využiť?

Dôležité je, aby otázky boli zadávané postupne, po jednej a žiak mal dostatočný časový priestor na to, aby odpovedal na položenú otázku, a verbalizoval tak svoje myšlienkové postupy.

Možnosti gradácie úlohy

Uvedenú úlohu je možné transformovať na úlohy vyššej úrovne náročnosti viacerými spôsobmi, napríklad:

- využitie štvorcovej siete iných rozmerov ($n \times n$, kde n je viac ako 4),
- v zadaní je znázornená zložitejšia cesta,
- na obrázku v zadaní je znázornených viacero ciest, ktoré sú odlíšené napríklad farebne; žiak si má všimnúť jednu z nich a potom ju nakresliť,
- zmena pravidiel pohybu v štvorcovej sieti (dovolený je pohyb nielen vo vodorovnom a zvislom smere, ale aj po uhlopriečkach),
- úlohou je danú cestu zakódovať (napríklad pomocou šípok).

Záver

Matematická úloha predstavuje prostriedok pre rozvíjanie schopnosti učiť sa. Ak žiak (aj slaboprospievajúci) má priestor na to, aby počas riešenia matematickej úlohy verbalizoval svoje myšlienky, postupy, uvedomoval si tak prípadné chyby a následne o nich diskutoval, potom u neho rozvíjame nielen kognitívnu, ale aj metakognitívnu stránku myslenia. Učitelia by si mali uvedomiť, že aj pri vyučovaní matematiky je možné stimulovať metakognitívnu dimenziu myslenia žiakov, ktorá predstavuje dôležitý predpoklad pre rozvíjanie schopnosti učiť sa. Môžu to realizovať napríklad zadávaním otázok, ktorých príklady boli uvedené vyššie.

Exekutívne funkcie, ako riadiace mentálne procesy, sú aktívne a dôležité aj pri činnostiach realizovaných v bežnom živote. Ak sú tieto elementy myslenia rozvíjané v škole, tak žiak sa stáva úspešnejším aj pri činnostiach vykonávaných mimo školy. Napríklad pracovná pamäť je dôležitá pri nakupovaní, na zapamätanie si číselného kódu (napr. vo forme SMS) pri zadaní platby. Kontrola pozornosti je zapojená napríklad v procese riešenia úloh typu *nájdi n rozdielov medzi dvoma obrázkami*, či pri vyhľadávaní spojov v cestovnom poriadku. Plánovanie je aktivované napríklad pri príprave na vyučovanie (zbalenie vecí do školskej tašky), je dôležité pre plánovanie jednotlivých činností počas dňa, ale aj pri takých udalostiach akou je rodinná oslava.

Poďakovanie

Príspevok bol vypracovaný v rámci grantového projektu *APVV-15-0273 Experimentálne overovanie programov na stimuláciu exekutívnych funkcií slaboprospievajúceho žiaka – kognitívny stimulačný potenciál matematiky a slovenského jazyka.*

Literatúra

[1] Fischer, R. (2011). *Učíme děti myslet a učit se.* Praha: Portál.

[2] Frobisher, L. & Frobisher, A. (2015). *Didaktika matematiky I. Porozumieť. Riešiť. Počítať.* Bratislava: Raabe.

[3] Kovalčíková, I., et al. (2016). *Diagnostika a stimulácia kognitívnych a exekutívnych funkcií žiaka v mladšom školskom veku.* Druhé, rozšírené vydanie. Prešov: Vydavateľstvo PU v Prešove.

[4] Meltzer, L. (Ed.). (2018). *Executive function in education. From Theory to practice.* Second edition. New York: Guilford Press.

Pythagorova věta v pojetí Peer Instruction

Tomáš Zadražil[1]

Tento příspěvek si klade za cíl představit možnost využití metody Peer Instruction při výuce konceptu Pythagorovy věty na úrovni výuky matematiky v osmém ročníku. V úvodu příspěvku je nejprve představena metoda Peer Intruction. Následující část pak obsahuje potřebné materiály pro realizaci vlastní výuky Pythagorovy věty pomocí Peer Instrution. Veškeré úlohy a aktivity prezentované v příspěvku byly opakovaně využity v reálné výuce v terciích šestiletého gymnázia, tj. se žáky na úrovni osmého ročníku základní školy.

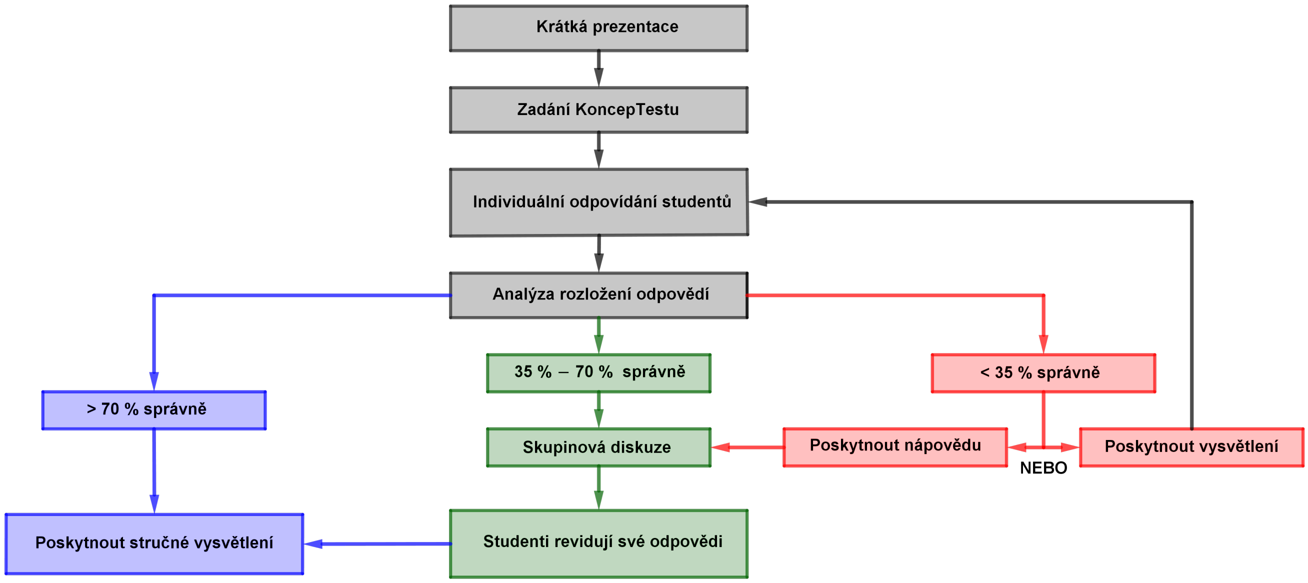
„You can forget facts but you cannot forget understanding. – Eric Mazur"

Metoda Peer Instruction

Následující popis metody Peer Instruction je včetně obrázku doslovně převzat ze (Zadražil, 2018):

„*Peer Instruction* (dále jen *PI*), jak ji ve své knize (Mazur, 1997) popsal Eric Mazur, je metoda aktivního učení stojící zejména na skupinové diskuzi vyvolané složitější konceptuální otázkou, takzvaným *KoncepTestem*. Hodina vyučovaná podle *PI* je obvykle členěna do několika bloků. Schematickou strukturu jednoho takového bloku si můžeme prohlédnout na obrázku 1.

[1] V současnosti student doktorského studia na KDM MFF UK, tomas.zadrazil@gmail.com



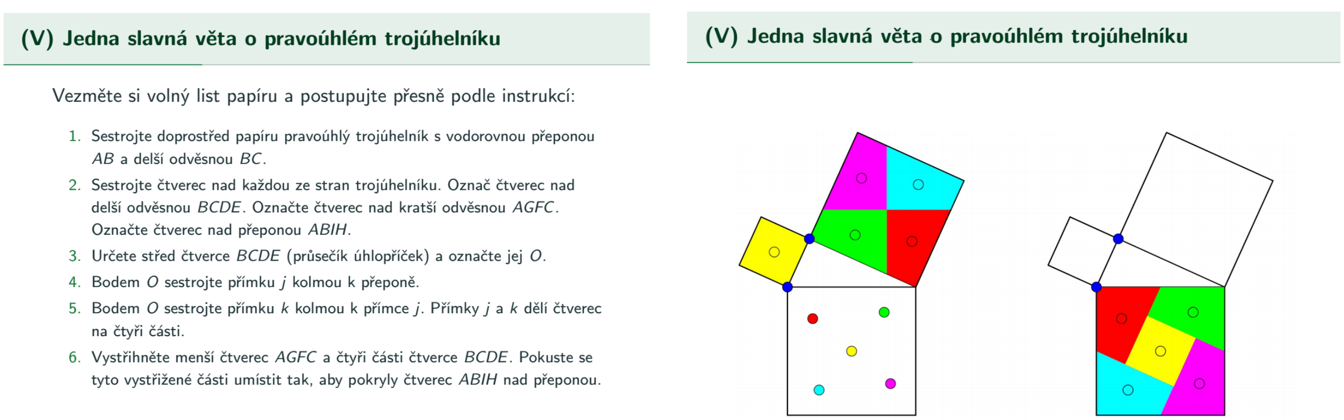
Obr. 1: *Peer Instruction* – schéma jednoho bloku

Každý blok je zahájen krátkou prezentací zvoleného konceptu. Při svém výkladu se instruktor snaží vyvarovat poskytnutí vzorce nebo jiné, na paměti založené, berličky. Po prezentaci následuje zadání *KoncepTestu* cíleného na prohloubení porozumění představovanému konceptu. Studentům je poskytnut krátký čas na individuální promyšlení odpovědi. Následně jsou vyzváni k hlasování prostřednictvím hlasovacích karet, clickerů nebo chytrých zařízení. Na základě rozložení relativních četností studentských odpovědí buď instruktor stručně vysvětlí správnou odpověď, přejde ke skupinovým diskuzím, nebo se pokusí prezentovaný problém ještě jednou vysvětlit. Ve fázi skupinových diskuzí se studenti snaží přesvědčit své kolegy o správnosti své volby, přičemž jsou instruktorem vybízeni ke zdůvodňování – nikoli pouze k pouhému konstatování. Výzkumy ukazují, že je student mnohdy schopen danému konceptu snáze porozumět na základě výkladu svého spolužáka, nežli na základě výkladu samotného instruktora (Vickrey et al., 2015). Studenti, kteří čerstvě diskutovanému konceptu porozuměli, si totiž živě pamatují, jaké to bylo pojmu nerozumět a jaké kroky museli učinit, aby se porozumění dobrali. Naproti tomu instruktor sám často trpí takzvanou „kletbou vědomosti“ (Mazur, 1997), neboť danému konceptu dobře rozumí a dávno si již neuvědomuje nesnáze na cestě k porozumění. Skupinové diskuze jsou ukončeny revidujícím hlasováním studentů a stručným vysvětlením správné odpovědi. Prakticky vždy dojde k znatelnému navýšení hlasů ve prospěch správné odpovědi (Mazur, 1997), (Vickrey et al., 2015).

Popsaný blok zabere přibližně 10–15 minut. Za jednu vyučovací hodinu jsme tímto způsobem tedy schopni probrat 3 až 4 koncepty. Je proto zřejmé, že abychom dosáhli stejného objemu učiva jako u klasické výuky, musíme část práce naložit na bedra studentům. Toho můžeme docílit například tak, že před lekcí studentům zadáme přípravné materiály k samostudiu, po jejichž nastudování budou disponovat potřebnými znalostmi pro zvládnutí lekce. Ve své knize (Mazur, 1997) Eric Mazur pro tyto účely doporučuje po bok *PI* zařadit i strategii *Just-in-time Teaching*[2].“

Pythagorova věta v pojetí *PI*

Jak jsme se dočetli v předchozích odstavcích, blok *PI* zahajujeme představením zvoleného konceptu. První setkání s Pythagorovou větou můžeme realizovat například prostřednictvím aktivity prezentované na obrázku 2a. (Hejný, 2015) Stručně řečeno, nabízená aktivita spočívá v chytrém rozdělení čtverce nad delší z odvěsen na čtyři části, kterými lze po vystřižení společně se čtvercem nad kratší odvěsnou beze zbytku pokrýt čtverec nad přeponou (viz obrázek 2b). Osobně se mi osvědčilo nechat žáky pracovat v 3–4členných skupinách, neboť se ukazuje, že poměrně neuspokojivé procento žáků není schopno samostatně následovat požadovanou posloupnost instrukcí. Jakmile jsou se svěřenou prací všechny skupiny hotovy, nechám žáky zformulovat samostatně „Pythagorovu hypotézu“. Považuji za vhodné žákům zdůraznit, že ač stejného výsledku dosáhlo nezávisle na sobě více skupin s různými pravoúhlými trojúhelníky, stále je potřeba „nově objevené“ tvrzení obhájit argumentem nezávislým na konkrétním pravoúhlém trojúhelníku. Diskuzi poté směřuji k některému ze známých důkazů Pythagorovy věty, který finálně volím podle úrovně dané skupiny žáků.



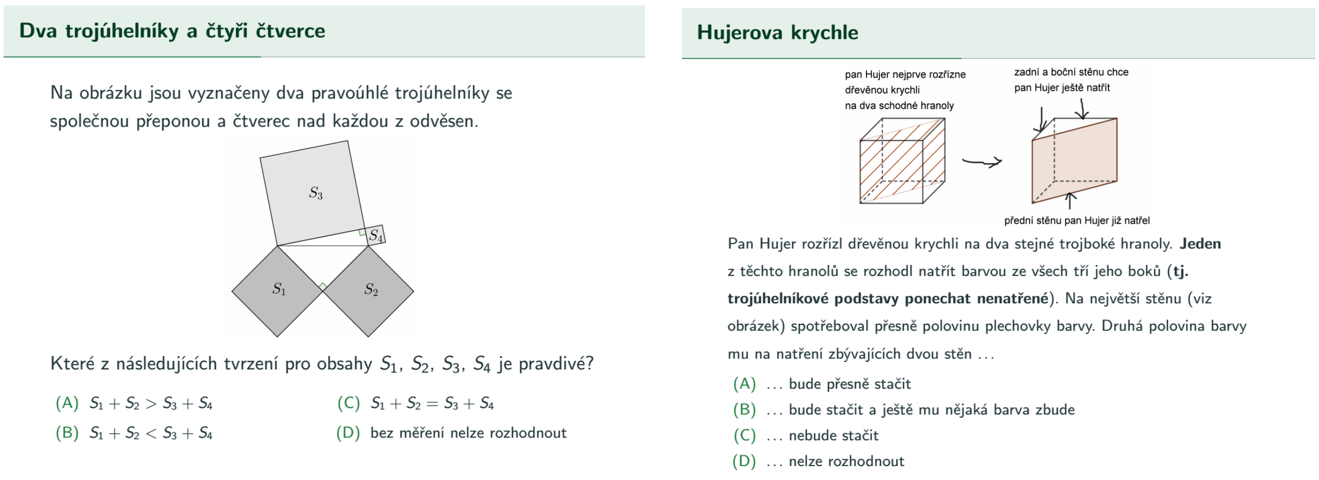
(a) Zadání pro žáky (Hejný, 2015)

(b) Správné řešení (Phelps)

Obr. 2: Aktivita pro uvedení Pythagorovy věty

[2] Just-in-time Teaching je strategie výuky založená na zpětnovazební smyčce mezi přípravným online prostředím a následným děním ve třídě. Stručně řečeno, instruktor zadá studentům skrze internet přípravné materiály provázené úkoly a otázkami, které studenti musejí vypracovat a odevzdat ještě před začátkem následující lekce. Na základě zpětné vazby poskytnuté odpověďmi studentů poté instruktor vhodně upraví obsah následující lekce. Stejně tak obsah přípravných materiálů je do značné míry uzpůsoben průběhu předešlé lekce (Novak, 1999).

Představení konceptu je završeno zadáním *KoncepTestu*. *KoncepTest* je optimálně obtížná a jednoznačně položená otázka testující porozumění jedinému konceptu či principu, která není zodpověditelná pouze na základě paměti, avšak spíše na základě porozumění (Mazur, 1997). Podle (Pilzer, 2001) je vhodné zadávat žákům alespoň dva *KoncepTesty* se stupňovanou obtížností. Pro potřeby Pythagorovy věty volím po řadě úlohy na obrázcích 3a, 3b, 4a. Úlohu na obrázku 4b obvykle zařazuji do prověrky, abych si ověřil, zda žáci skutečně porozuměli esenciálnímu obsahu Pythagorovy věty.

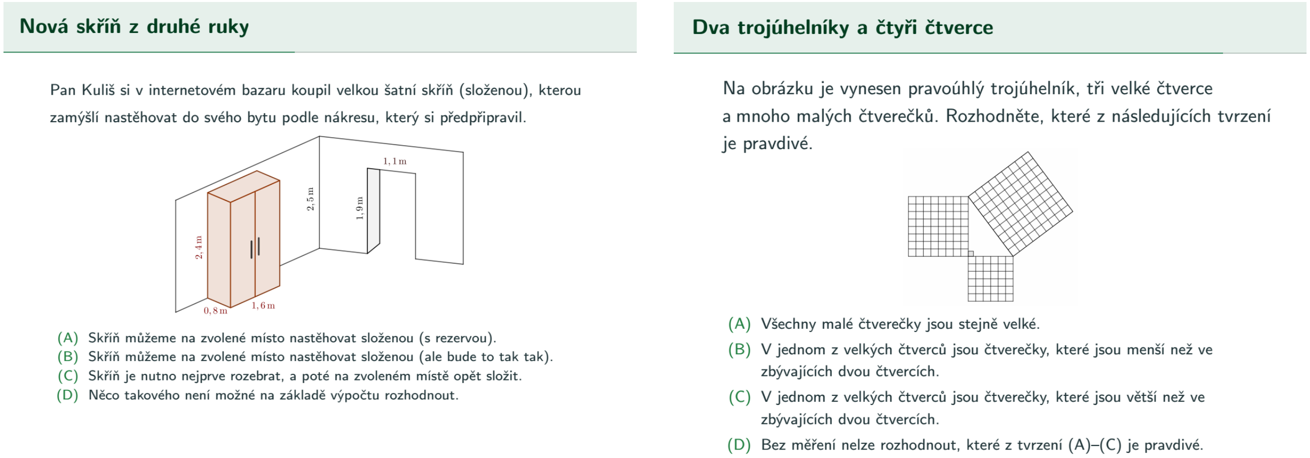


(a) *KoncepTest*01 (b) *KoncepTest*02

Obr. 3: První duo *KoncepTestů*

První z úloh (obrázek 3a) testuje porozumění Pythagorově větě na nejfundamentálnější možné úrovni, a sice na úrovni práce s obsahy čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníku. Druhou úlohu (obrázek 3b) zadávám prakticky ihned po první, neboť rovněž pracuje s obsahy čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníku, avšak v netradičním a pro žáky mnohem složitějším kontextu. Úspěšnost pro první úlohu se pohybuje okolo 100 % již v prvním hlasování, a není proto obvykle třeba úlohu postoupit skupinovým diskuzím. Naopak úspěšnost druhé úlohy bývá v prvním hlasování lehce pod 50 %. Ze skupinových diskuzí žáků jsem měl možnost odposlechnout, že na vině je zejména skutečnost, že žáci považují obdélník, který je hnědě zvýrazněn na obrázku, za čtverec, tj., že si mnohdy neuvědomují, že úhlopříčka čtverce je delší než jeho strana. Správně argumentující žáci velmi často pro demonstraci této skutečnosti využívali čtvercovou hlasovací kartu.

První i druhý z prezentovaných *KoncepTestů* se pohybují spíše na úrovni formální roviny Pythagorovy věty. Nedílnou součástí konceptuálního porozumění je však i schopnost žáků aplikovat vědomosti v netradičním kontextu. Tento aspekt porozumění Pythagorově větě testuje *KoncepTest* na obrázku 4a, který je upravenou verzí úlohy převzaté z knihy (Hejný, 2015). Má zkušenost je taková, že nezávisle na úrovni žáků se pro tuto úlohu úspěšnost v prvním hlasování pohybuje v rozmezí



(a) *KoncepTest*03 (Hejný, 2015) (b) *KoncepTest*04

Obr. 4: Ukázka dalších *KoncepTestů*

25–50 %. Vlivem skupinové diskuze se pak úspěšnost ve druhém hlasování pohybuje okolo 75–90 %. Ačkoli si při řešení úlohy prakticky všichni žáků uvědomí, že je nutné skříň dveřmi pronášet „položenou na bok“, již není mnoho těch, které by napadlo, že je skříň nutné v místnosti opět postavit. Opětovnému postavení skříně do požadované polohy pak brání výška stropu (nejkratší stěnová úhlopříčka skříně měří přibližně 252 cm; výška stropu je 250 cm). Úlohou vyvolané skupinové diskuze běžně ukazují, že pro správně odpovídající žáky obvykle není vůbec snadné obhájit své stanovisko. Situace zpravidla vyžaduje několik nákresů provázených výpočty a slovními komentáři. Chybně odpovídající žáci se totiž poměrně často příliš silně zaměří na fázi úlohy související s překonáním dveří a trvá pak poměrně dlouho, než jsou ochotni připustit, že skutečnou překážkou je až výška stropu místnosti.

Jak již bylo zmíněno dříve, poslední z prezentovaných *KoncepTestů* (obrázek 4b) obvykle žákům zadávám až ve formě testové úlohy, kde po bok klasickým učebnicovým úlohám zařazuji v poměru 1:1 právě i úlohy zaměřené na konceptuální porozumění[3]. V takovém případě položenou otázku obvykle provází i požadavek zdůvodnění zvolené varianty odpovědi. Ve skupinách, kde jsem matematiku vyučoval pomocí metody *PI*, bylo schopno poskytnout správně zdůvodněnou odpověď 65–75 % žáků.

Shrnutí a závěr

V současné době máme k dispozici poměrně pestrou paletu metod aktivního učení designovaných se záměrem pěstovat konceptuální porozumění žáků. Jednou z takových metod je právě i *PI* profesora Erica Mazura, již jsme si představili v úvodní

[3]Tento konkrétní *KoncepTest* zadávám jako součást čtvrtletní písemné práce z matematiky, a sice s přibližně 1–2 měsíčním odstupem po probrání Pythagorovy věty.

části tohoto příspěvku. Ve druhé části příspěvku jsme si pak ukázali, jak může v pojetí *PI* vypadat výuka Pythagorovy věty. Obsahem tohoto příspěvku bylo i několik *KoncepTestů* využitých v reálné výuce.

Na základě svých osobních zkušeností s výukou matematiky pomocí metody Peer Instruction[4] mohu prohlásit, že výuka baví více nejen mé žáky, ale i mě samotného. Na základě prací i mluvených projevů svých žáků mohu rovněž tvrdit, že větší část z nich velmi dobře probíraným konceptům rozumí a je schopna uspokojivě obhajovat odpovědi i na netriviální konceptuální otázky.

Každé díte je schopno a ochotno přemýšlet nad matematickými problémy. Nesmíme se pouze obávat připustit pravdivost tohoto výroku.

Literatura

[1] Hejný, M. & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

[2] Mazur, E. (1997). *Peer instruction: a user's manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[3] Novak, G. (1999). *Just-in-time teaching: blending active learning with web technology*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[4] Pilzer, S. (2001). PEER INSTRUCTION IN PHYSICS AND MATHEMATICS. *PRIMUS*, 11(2), 185–192. Dostupné z http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10511970108965987

[5] Phelps, S. *Proof Without Words*. Dostupné z https://www.geogebra.org/m/ZFTGX57r

[6] Vickrey, T., Rosploch, K., Rahmanian, H., Pilarz, M. & Stains, M. (2015). Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review. *Cell Biology Education*, 14(1), es3-es3. Dostupné z http://www.lifescied.org/cgi/doi/10.1187/cbe.14-11-0198

[7] Zadražil, T. (2018). Peer Instruction ve výuce geometrie. In *Cesty k matematice*. Praha: MatfyzPress, MFF UK.

[4]Dva roky úplné implementace *PI* – tj. procvičování většinou probíhá v klasickém pojetí, ale každý nový koncept je vyložen a následně i několikrát upevněn právě pomocí *PI*.

PRACOVNÍ DÍLNY

Dvě hry podle Teorie didaktických situací Guye Brousseaua

Tomáš Fabián[1]

Teorie didaktických situací, jejímž autorem je Guy Brousseau, vznikla koncem šedesátých let ve Francii. Postupně se stala jednou z hlavních didaktických teorií ve Francii a některých dalších zemích. Většina prací o této teorii však byla dlouho publikována především ve francouzštině a dalších románských jazycích, do českého prostředí se proto příliš neprosadila. Na výukové situace se tato teorie dívá jako na hru nebo soutěž, u níž má učitel předem promyšlená pravidla tak, aby se zodpovědnost za získání nových poznatků částečně přenesla na jeho žáky. Jak taková hra vypadá, si ukážeme na popisu jednotlivých částí, z nichž se didaktická situace skládá. Jsou to: devoluce, a-didaktická situace a institucionalizace.

Ve fázi devoluce učitel organizuje a vytváří nějakou problémovou situaci, která v sobě skrývá záměr učit žáka určitou vědomost. Učitel žákovi předává zodpovědnost za vyučovací situaci, nemůže mu však předem říci, jaká odpověď je od něho očekávána. Učitel navozuje celou didaktickou situaci, sděluje žákům pravidla, podle kterých se bude jejich další činnost odvíjet. Ve chvíli, kdy žáci pochopí, co mají dělat, učitel ustupuje do pozadí. Žáci poté přebírají aktivitu a samostatně získávají poznatky a zkušenosti, aniž by dále učitel do probíhající situace nějakým způsobem zasahoval. A-didaktická situace je pak situace, ve které se učiteli podařilo skrýt vlastní vůli a vlastní zásahy, které určují další činnost žáka. Tato fáze probíhá bez dalších zásahů ze strany učitele. Učitel působí pouze jako iniciátor situace, část zodpovědnosti za akt učení předává učitel žákovi. A-didaktická situace se dále dělí na tři části: situaci akce, situaci formulace a situaci ověřování.

Během situace akce probíhá samotná hra. Hráči, žáci, si utvářejí, ať už vědomě, či nevědomě, vlastní strategie, zvažují, jak hrát, promýšlí si postup vedoucí k vítězství. Vodítkem jim jsou především partie, které již odehráli. V druhé části, situaci formulace, již hráči své strategie diskutují s ostatními hráči, radí se mezi sebou. Situace ověřování pak je nejen hledání správných tvrzení a strategií, ale

[1] PORG, KMDM PedF UK, fabian@porg.cz

zároveň jejich odůvodňování, dokazování či vyvracení. Učitel je však stále v pozadí, do diskuze nezasahuje, vystupuje pouze jako moderátor. Tato část didaktické situace nutí žáky přemýšlet o cizích strategiích, dívat se na ně z různých úhlů pohledu.

K systematizaci vědomostí žáka za aktivní účasti učitele má přispět fáze institucionalizace. Žáci si v průběhu a-didaktické situace vytvořili řadu nových poznatků, institucionalizace má za cíl tyto poznatky správně zařadit do systému matematických vědomostí. Brousseau přiznává, že tato fáze byla nejprve ze strany výzkumníků podceňována a její důraznější zavedení si vyžádala praktická potřeba učitelů. Stejně tak žáci očekávají od učitele jisté začlenění poznatku. Učitel proto provede fázi institucionalizace: shrne a případně dokáže důležitá tvrzení, která se objevila v situaci ověřování, klade další doplňující otázky, nechá žáky hrát s obměněnými pravidly, dává objevená tvrzení do souvislostí, uvádí příklady, na kterých lze nově objevené použít, a tak dále.

„Učitel musel shrnout, co žáci měli dělat, co se naučili nebo měli naučit. Tato činnost je nevyhnutelná: výuku nelze zredukovat na organizaci situací učení se něčemu novému. Uvědomí-li si žák „oficiálně“, co je předmětem poznatku, a uvědomí-li si učitel, že se žák něčemu naučil, jedná se o velmi důležité společenské jevy a významnou fázi didaktického procesu: Toto dvojité uvědomění si je předmětem INSTITUCIONALIZACE.“ (Brousseau, 2012: s. 62)

Vše si nejlépe ukážeme na praktické ukázce dvou her vycházejících přímo z této teorie. První hra „Kdo první řekne 20?“ je převzata od Guye Brousseaua (Brousseau, 2012: s. 11), druhou hru „Vlastnosti funkcí“ jsem vymyslel sám. Uváděné příklady z her se týkají primy (Kdo první řekne 20?) a kvarty (Vlastnosti funkcí) osmiletého gymnázia, na kterém učím.

Kdo první řekne 20?

Hra má čtyři fáze: 1. Výklad postupu; 2. Hra 1 proti 1; 3. Hra skupina proti skupině; 4. Hra na objevování.

První fáze: Výklad postupu

Jedná se vlastně o fázi devoluce. Během ní učitel žáky seznámí s tím, že budou hrát hru, a vyloží jim její pravidla.

Pravidla hry:

a) První hráč řekne „1“ nebo „2“.

b) Druhý může přidat 1 nebo 2 k tomu, co řekl první.

c) Střídavě každý z hráčů říká číslo, které je o 1 nebo 2 větší než číslo, které řekl naposled protihráč.

d) Vyhrává ten, kdo řekne 20.

Brousseau dále doporučuje sehrát vzorově hry u tabule – nejprve učitel proti žáku a následně žák proti žáku. Může také postačovat pouze demonstrace několika kroků hry nebo se může ukázat, že hráči chápou pravidla i bez vzorové ukázky, a není jí proto zapotřebí.

Druhá fáze: Hra 1 proti 1

Vyložením pravidel a případně sehráním vzorové hry proběhla fáze devoluce. Začátek hry je i začátkem samotné a-didaktické situace. Hra 1 proti 1 je situace akce, ale u některých dvojic může dojít i k přechodu do situace formulace. Žáci hrají proti sobě ve dvojicích několik partií. Tato fáze hry trvá okolo deseti minut. Žáci si začínají vytvářet strategie hraní. Zpravidla se jako první objeví pravidlo 17, které hezky vyjadřuje prohlášení jedné z žaček během první fáze hry: „Vůbec tu strategii nechápu, dávám tam náhodně čísla. Jen vím, že když řeknu 17, tak už vyhraju." Podle mých pozorování se již v první fázi někteří žáci propracují ke kompletní vítězné strategii (například v primě, kde jsme hru hráli a kde bylo 24 žáků, to bylo podle jejich vlastního sdělení 8 žáků).

Třetí fáze: Hra skupina proti skupině

Žáci jsou rozděleni do dvou stejně početných skupin. Učitel náhodně zvolí z každé skupiny jednoho zástupce. Tito zástupci sehrají proti sobě hru u tabule. Po dohrání partie zvolí učitel jiné dva zástupce a tak dále. Žáci se mohou spolu domlouvat a radit mezi jednotlivými partiemi, během nich však nehrající žáci musí zůstat potichu. Při praktickém zkoušení jsem narazil na to, že žáci si již byli zpravidla vědomi toho, že je výhodné hru začínat. U tabule proto každá dvojice sehrála dvě hry – pokaždé začínal jiný žák. Žáci, kteří již objevili celou vítěznou strategii, ji rychle předali zbytku skupiny. Setkal jsem se však i s případy žáků, kteří naopak nechtěli, aby jim spolužáci strategii sdělili, a kteří si na ni chtěli přijít sami. Tato fáze hry spadá převážně do situace formulace, může se však objevit již i situace ověřování. Žáci se totiž, aby spoluhráče přesvědčili o své pravdě, snaží svá tvrzení spontánně doložit a dokázat.

Čtvrtá fáze: Hra na objevování

Čtvrtou fázi Brousseau popisuje jako fázi, kdy žáci, stále ještě rozdělení do dvou skupin, postupně objevují věty a strategie, kterými se hra řídí. Jednotlivé herní přístupy jsou pak testovacími hrami buď potvrzeny, nebo vyvráceny. Zároveň jsou žáci vedeni k tomu, aby jednotlivá tvrzení odůvodnili. V našem případě bylo hned na začátku celé fáze jedním z žáků formulováno pravidlo „Je třeba začít dvojkou" a k němu celá vítězná řada čísel od dvou do sedmnácti. Okamžitě s ním několik dalších žáků živě souhlasilo. Žáci také byli schopni podat důkaz svého tvrzení. Všimli si, že je hráč schopen zajistit, aby bylo vždy celkově za jedno kolo přičteno tři. Protože je koncová dvacítka o jedna menší než násobek čísla tři, jsou členy vítězné posloupnosti rovněž násobky tří zmenšené o jedna.

Obtížnost hry se dá zvýšit změnou nastavení pravidel. Během čtvrté fáze jsme nejprve s žáky řešili změnu vítězného čísla. Nejprve na hodnotu 25, u které žáci určili jako číslo, kterým je třeba začít, číslo jedna. Pro číslo 30 nejprve určili jako počáteční číslo vítězné posloupnosti nulu. Na otázku, co to znamená, když nulou podle pravidel začít není možné, jedna žačka odpověděla, že v tomto případě je lepší začínat jako druhý. Žáci byli schopni na základě již utvořených znalostí vytvořit i vítěznou strategii pro přičítání čísel 1, 2 nebo 3. A to i v případě, že koncovým číslem bylo 1 838. Žáci aplikovali nalezené pravidlo hledání vítězné posloupnosti s odečtením nejbližšího menšího násobku čísla čtyři. Někteří žáci při řešení této úlohy prohlásili, že je jim sice jasné, jak nalézt první číslo vítězné posloupnosti, že si však nepamatují, jak poznat, jestli je číslo dělitelné čtyřmi. Skupiny objevené vítězné strategie již všeobecně přijímaly bez toho, aby vyžadovaly jejich prověření samotnou hrou. Krátce před závěrem hodiny sami žáci přišli s problémem přičítání čísel, která nejdou bezprostředně po sobě. Konkrétně čísel 2, 3 a 5 s koncovým číslem 35. Určit, jakou má úloha vítěznou strategii, jestli vůbec, je již nepoměrně náročnější.

Počátek této fáze hry byl ještě částí a-didaktické situace. Fáze situace formulace proběhla poměrně rychle – žákům se vítěznou strategii podařilo vytvořit prakticky okamžitě. U některých dvojic totiž formulace strategie proběhla již v závěru předchozí části hry a do čtvrté fáze hráči z těchto dvojic vstupovali s již utvořenou a prakticky vyzkoušenou strategií. Žáci také byli schopni dokázat, proč objevená strategie musí fungovat, a ukázali souvislost s násobky čísla tři. Tím proběhla třetí fáze a-didaktické situace: situace ověřování. To, že žáci chápou nejen samotnou strategii hry, ale i pravidla, podle kterých byla vytvořena, se ukázalo ve druhé části čtvrté fáze hry. Žáci vytvořili s užitím těchto pravidel vítězné strategie i pro hry s upravenými pravidly. A to i v situaci, kdy koncové číslo bylo 1 838 a nebylo z časových důvodů možné správnost strategie ověřit přímo hrou. Závěrečná část čtvrté fáze v tomto případě byla fází institucionalizace.

Vlastnosti funkcí

Hra má obdobně jako předchozí čtyři fáze: 1. Zadání (fáze devoluce); 2. Hra 1 proti 1 (fáze a-didaktická situace, situace akce, případně i situace formulace); 3. Hra skupiny proti skupině (fáze a-didaktická situace, situace formulace, případně i situace ověřování); 4. Hledání neexistujících kombinací vlastností (fáze a-didaktická situace, situace ověřování, fáze institucionalizace).

První fáze: Zadání

Nejprve jsme se s žáky, na základě jejich návrhů, dohodli, které vlastnosti bude přípustné ve hře užívat. V našem případě to byly tyto: funkce sudá, lichá, periodická, rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající a negace předchozích, definiční obor a obor hodnot, konkávní a konvexní funkce, maxima a minima. Dále jsme si dohodli, jak může být daná vlastnost určena. (Například může být řečeno, že je funkce rostoucí, nebo pouze že je rostoucí na nějakém konkrétním intervalu; u průsečíků může být požadována nějaká jejich konkrétní souřadnice, ale může být také pouze stanoven jejich počet nebo třeba neexistence a tak podobně.) Stanovení vlastností a jak budou určeny samozřejmě silně závisí na aktuální úrovni znalostí žáků.

Pravidla hry:

a) Žáci se rozdělí do dvojic (ve třídě byl lichý počet žáků, byla proto jedna trojice).

b) Žáci ve dvojici budou hrát proti sobě. Každý ze dvojice vytvoří zadání, které bude obsahovat některé z vlastností funkcí, které jsme stanovili předchozí hodinu. Hráč vytvářející zadání musí sám znát správné řešení.

c) Žáci si předem domluví, kolik vlastností v zadání bude. Doporučeno je začít se dvěma vlastnostmi a postupně jejich počet zvyšovat.

d) Vytvořená zadání si vymění. Každý z hráčů má nyní za úkol načrtnout graf funkce, která má vlastnosti požadované zadáním, které dostal.

e) Kdo z obou protihráčů první vytvoří správný náčrt grafu, získává bod.

Zadání tedy například může být: Načrtni graf funkce, která je sudá a má tři průsečíky s osou x. Je vhodné s žáky vyzkoušet jedno nebo více vzorových příkladů na tabuli. Sdělená pravidla zatím nereflektují rozdělení do jednotlivých dalších fází. Další pravidla pro třetí a čtvrtou fázi jsou žákům sdělována až těsně před započetím jednotlivých fází.

Druhá fáze: Hra 1 proti 1

Během této fáze hrají žáci ve dvojicích proti sobě. Již během této fáze se ukazovalo, že žáci získávají potřebu jít jednotlivým vlastnostem víc „na dřeň“. Vlastnosti, které do této chvíle vnímali spíše intuitivně, najednou potřebovali chápat daleko precizněji. Žáci se v zadáních, která si vzájemně dávali, po několika úvodních příkladech snažili „o nachytání protihráče“. Často využívali komplikovanějších a netypických příkladů funkcí. Jako příklad může posloužit jedno ze zadání, u kterého vznikl spor mezi dvěma žáky. Funkce měla být periodická, neklesající, definičním oborem měla být všechna reálná čísla a obor hodnot měl být $\langle -5; \infty)$. Žáci jednak narazili na problém neklesající periodické funkce – tady se spokojili s tím, že funkce byla neklesající na jednotlivých periodách. Jako problematickou řešili situaci, kdy funkce na omezené části definičního oboru nabývala hodnoty nekonečno. Žáci totiž ještě neznali pojem svislé asymptoty.

Třetí fáze: Hra skupiny proti skupině

Pro třetí fázi hry se žáci rozdělili do tří skupin. Jedna ze skupin vždy byla skupina zadávající, na tabuli pak úlohu řešili vždy vybraní zástupci zbylých dvou skupin. O správnosti či nesprávnosti řešení rozhodovala skupina zadávající. V této fázi jsme odehráli celkem šest kol, tj. každá ze skupin byla dvakrát zadávající.

Čtvrtá fáze: Hledání neexistujících kombinací vlastností

Žáci zůstali rozděleni ve stejných skupinách jako ve fázi třetí. Nyní bylo jejich úkolem během pětiminutového časového intervalu sestavit co nejdelší seznam zadání, ke kterým neexistuje žádná funkce, která by ho splňovala. Tedy hledat kombinace vlastností funkcí, které funkce mít nemůže. Takovou kombinací je třeba sudá funkce s definičním oborem $(-1; 5)$. Po uplynutí časové lhůty tento seznam zástupci napsali na tabuli. Úkolem skupin nyní bylo hledat v seznamech takové kombinace, které ve skutečnosti existují. Skupiny nacházely takové řádky, ať už oprávněně, nebo neoprávněně, kdy se podle nich nejednalo o kombinaci vlastností, která by splňovala zadání. To jsme využili k diskusi nad jednotlivými vlastnostmi a ujednotili jsme si pohledy na konkrétní vlastnost napříč třídou.

Závěr

Z pohledu Teorie didaktických situací je první fáze hry, kdy jsou žáci seznámeni s pravidly hry, fází devoluce. A-didaktická situace se odehrává během první až čtvrté fáze. Podobně jako ve hře „Kdo první řekne 20?“ ve fázi hry jednoho proti jednomu je situace akce, může však docházet už i k situaci formulace. Žáci totiž někdy mezi sebou řeší spory, jestli skutečně načrtnutý graf funkce splňuje požadované vlastnosti, a diskutují spolu sporné případy a jejich vlastnosti. Situace formulace dále probíhá během třetí fáze. Ve čtvrté fázi hry jsou žáci konfrontováni s tím, jestli chápou užité vlastnosti funkcí správně. Musí je využít v novém kontextu, hledají chyby v řešení ostatních skupin a zároveň se snaží chybnost řešení dokázat nebo naopak prokázat správnost svých řešení. To je situace ověřování. Závěr čtvrté fáze byl rovněž využit k institucionalizaci, kdy byly jednotlivé vlastnosti a jejich kombinace prodiskutovány s učitelem.

Popsaný způsob organizace aktivit v hodině může nalézt uplatnění pro širokou paletu probíraných témat. Soutěžní forma je pro žáky atraktivní a evidentně je baví. Hra „Vlastnosti funkcí“ vedla žáky k potřebě lepšího poznání a pochopení těchto vlastností. Pozitivní na aktivitě bylo, že tato potřeba nevycházela z vnějšího popudu od učitele, ale z vnitřní potřeby žáků. Žáci při hře potřebují znát danou vlastnost lépe, aby byli schopni rozhodnout spory, které mezi nimi vznikají. Za celou dobu jsem nezaznamenal námitku typu „k čemu nám to bude?“. Na druhou stranu čtvrtá fáze s institucionalizací umožňují učiteli korigovat případné nesprávné názory a náhledy na jednotlivé vlastnosti.

Literatura

[1] Brousseau, G. (2012). *Úvod do teorie didaktických situací v matematice.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[2] Krůtová, M. (2013). *Didaktické situace zaměřené na výuku funkcí na 2. stupni ZŠ* [Diplomová práce]. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Sítě ve škole i mimo ni

Michaela Kaslová

Dílna vážící se k tomuto textu byla zaměřena na využití různých druhů sítí. Na metodách komparace, hledání shod a kontrastu je možné dospět k obecnějším pohledům, z kterých lze těžit ve vyučovacím procesu i kreativní části fáze příprav na hodinu.

Proč téma sítě? V českých učebnicích převládají čtvercové sítě. Výjimečně se vyskytují trojúhelníkové sítě zhruba od poloviny devadesátých let minulého století (Fortuna, SPN). Přesto se učitelé trojúhelníkovou sítí téměř nezabývají. Od 2012 do 2016 v souvislosti s vedením DP proběhlo šetření mezi 120 učiteli a ukázalo se, že s trojúhelníkovou sítí pracuje pouze jeden. Další šetření u 22 učitelů v roce 2018 bylo zaměřeno na to, proč učitelé nepoužívají jiné sítě než čtvercové. Každý z nich argumentoval různě; argumenty lze rozčlenit do čtyř skupin: a) *v matematice se používá jen čtvercová, tak proč jiné sítě* (6); b) *nevím, co s nimi dělat* (12); c) *nevím, proč jiné sítě* (8); d) *není to v RVP ani ŠVP* (3). Studenti kombinovaného studia (dalších 26 učitelů) byli překvapeni, že některé aktivity ze čtvercové sítě nelze přenést do trojúhelníkové nebo šestiúhelníkové sítě, že lze v těchto sítích tvořit jiné typy úloh než ve čtvercové, že umožňují zobecnění a podobně. Tato sonda vyústila v intenzivnější zařazování úloh s různými sítěmi jak do výuky na UK, tak do kurzů dalšího vzdělávání i do práce s dětmi v MŠ a se žáky na ZŠ.

1. Představy o sítích ve školním prostředí

Před tímto seminářem jsme položili stejný dotaz dětem v mateřských školách, na 1. a 2. stupni a jejich učitelům: „Co tě/vás napadne, když se řekne síť nebo sítě?“ Odpovědi **dětí ve věku 4 až 8 let** mají výraznou shodu: *rybářská, na sport (když se hraje...), záchranná, houpačka, obrázky* (v MŠ na sítě zavěšují obrázky), *sítko* (je otázka, zda jde o vizuální podobnost, nebo o specifickou jazykovou spojitost). **Žáci ve věku 9–13 let** vázali svoji odpověď na jiné kontexty: (síť) *sociální, volejbalová, síťovka na nákup, dálniční, čtvercová, krychle, radarová* (otec pracuje na letišti), *záchranná v lyžování* nebo *na lešení*. **Učitelé** měli bohatý rejstřík, existuje síť: *souřadnic, čtvercová, dopravní, komunikační, telekomunikační, letecká, dálniční, silniční, vodní, vodovodní, odpadní, těles, vykopávková, do oken, na vlasy / na drdol / na klobouku, na motýly, proti komárům, na kočárek, na pečeni (i z pobřišnice vepře), na nákupní síťovku, v cedníku, konfidentů, spolupracovníků, partyzánská, využití vztahů (rozhodit sítě mezi známé), nákupních center nebo bankomatů (na daném území), na tričko nebo punčochy (síťované).* Zde, podobně jako u účastníků dílny, se projevily generační a oborové i zájmové rozdíly. Vazba na matematiku je v minoritě. Pokud uvažujeme „tvar“ sítě, pak se v odpovědích všech tří skupin vyskytuje pouze čtvercová síť. K výčtu příkladů si můžeme klást řadu otázek, jednou z nich je zajisté ta, která by zjišťovala, jak dalece učitelé využívají bohatých představ vázaných na slovo sítě v momentě, kdy žáka uvádějí do práce v prostředí sítí v matematice.

Co je odpovědím na principu asociace společné? Jde o propojení určitých míst, bodů, uzlů, osob. Tato propojení hrají buď klíčovou pozici, nebo jsou významná pro roli hranice, případně zábrany. Jak je tomu v zahraničí? V učebnicích a didaktických materiálech Itálie, Francie, Švýcarska, Belgie, Německa a v dalších zemích najdeme minimálně sítě obdélníkové, ale i jiné, jako např. kosočtverečnou, kosodélníkovou i nepravidelné ve stylu pavučin (např. Polsko), se zvlněnými linkami (např. Itálie). Sítě se od sebe v didaktických materiálech liší, některé jsou ohraničené, dalo by se říci „v rámečku“, jiné naznačují pokračování mimo potištěnou plochu, jako by naznačovaly přechod směrem do nekonečna. Dokonce v takových sítích se dají zkoumat určité představy o nekonečnu u malých dětí (např. Marchini).

2. Sítě

Vymezení pojmu síť variuje podle kontextu, ne každé vymezení postihuje všechny používané typy. Ve školním prostředí uvažujeme sítě v euklidovské rovině, zpravidla sítě pravidelné.

U sítí jde vždy o usnadnění orientace v rovině, případně v prostoru; jde o popis situace v rovině, návod či záznam změn. Mluvíme-li o sítích **v rovině** (vhodnější pro školní práci), pak sledujeme dominantně:

a) **linky** (čáry, spojnice, cesty, ...);

b) **uzlové body** (křižovatky, průsečíky, ...);

c) **plochy** (pole) vymezené/á čarami (jednotkové – shodné, nebo nepravidelné; nemusí být stejně „orientované“, např. u lichoběžníkových sítí).

Mluvíme-li o **souřadnicích** v rovině, pak jde o uspořádané dvojice zpravidla grafických kódů (mohou být i nečíselné). Rozlišujeme souřadnice: a) **bodu**; b) **pole** (jak v naší didaktické literatuře rozlišuje např. Kuřina). Pro mladší děti jsou snazší souřadnice pole než souřadnice bodů. V prostoru lze mluvit i o souřadnicích uzavřeného prostoru (např. krychlového). Ne vždy je nutné uvažovat u sítí existenci souřadnic. Existují aktivity v sítích, které by naopak systém souřadnic blokoval.

Rovněž existují sítě jak v euklidovských, tak neeuklidovských rovinách. Vedle pravidelných sítí najdeme v praxi i sítě nepravidelné. Zde se nabízí možnost nechat žáky takové sítě vyhledávat.

Do orientace v sítích lze používat: a) čtveřice kódů (dvojice souřadnic); b) šipky; c) barvy; d) další.

3. Aktivity – výběr

Veškeré aktivity jsou vyzkoušené v praxi, řada z nich byla již publikována (viz zdroje).

U vybraných charakteristik jsou některé aktivity rozepsány podrobně, jiné naznačeny. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme sítě v rovině tvořené na principu shodných trojúhelníků/n-úhelníků.

3.1 Šestiúhelníkové sítě

3.1.1. Práce s poli sítě – autorská hra (M. Kaslová) **Hledej možnosti** (lze i v jiné síti) do polí se vepíší čísla (přirozená, celá, zlomky) nebo algebraické výrazy. Cílem je najít co nejvíce možností, jak projít „skrze síť" z jedné strany na druhou a přitom dosáhnout předem zadaného čísla / algebraického výrazu. Učitel zadá, jakou operaci má/může řešitel použít; např. pro první ročník sčítáním dosáhnout čísla 10; pro sedmý ročník v práci se zlomky odčítáním, sčítáním a násobením a dělením dosáhnout ve výsledku 1. Smíme se pohybovat jen do strany nebo šikmo či rovně vpřed, nikdy nesmíme couvat, ani se vracet na pole, kterým jsme již jednou prošli.

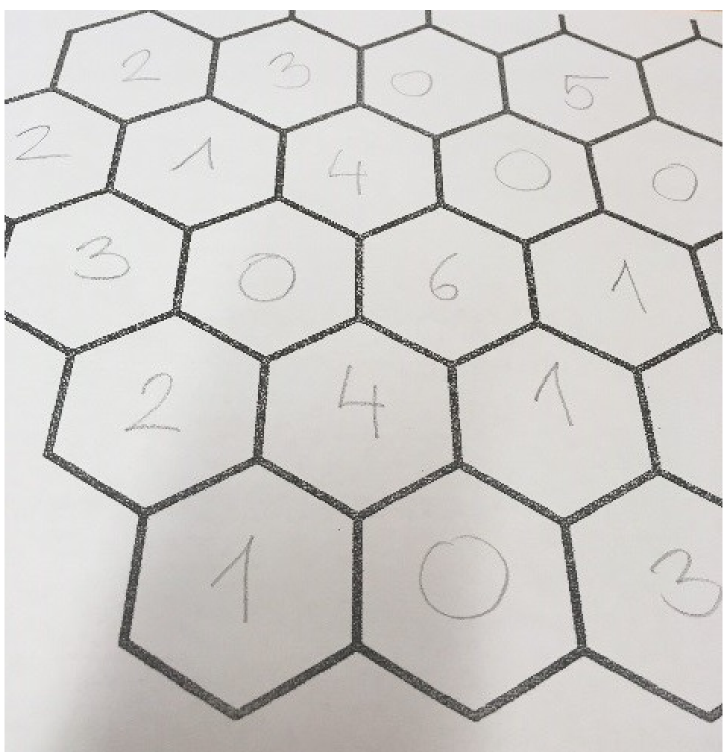


Foto MK

3.1.2 Směr a zadané součty čísel v polích v jednom směru (bez zalomení) (přejato z novin francouzských a belgických křížovek)

3.1.3 Trasy přes pole ze středu A do středu B – více užití (autorská MK)

3.1.4 Součty hodnot polí kolem specificky vyznačených uzlových bodů – tvorba (autorská MK)

3.1.5 Problém tří/čtyř barev

3.1.6 Shodná zobrazení: symetrie, rotace, posunutí

3.1.7 Parketáže s rytmem ve všech třech směrech (Kaslová, 2003)

3.1.8 Útvar o ploše n, kde n je přirozený násobek jednotkového útvaru – co nejvíce řešení

3.1.9 Mozaiky dle diktátu se zohledněním barvy a polohy kamene (autorská MK)

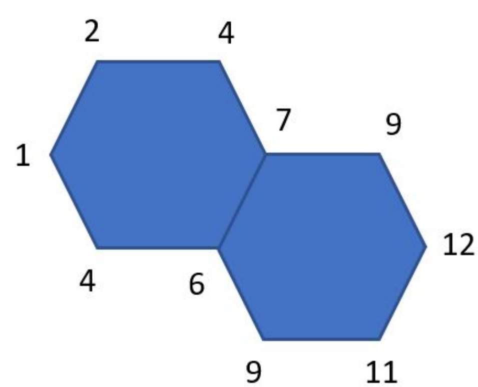
3.1.10 Sítě těles – zkoumáme, která tělesa získáme

3.1.11 Mnohoúhelníky (autorská MK) Kolika-úhelníky (ne)lze vyznačit v dané síti?

3.2 Práce s uzlovými body

3.2.1 Funkční závislosti mezi hodnotami propojených uzlových bodů (autorská MK) – objevení a použití při zaplňování hodnot bodů nebo tvorba.

Ukázka principu – VÝŘEZ a):



3.2.2 Posbírej A) součet / B) součin (autorská MK) hodnot polí, kterými projdeš bez vracení (každým polem nejvýše jednou I) bez skoků, II) se skoky přes jeden/dva: a) 100 (nebo jiný násobek sta); b) celé číslo (hodnoty uzlových bodů jsou desetinná čísla); c) zlomek větší než jedna polovina a menší než čtyři pětiny (hodnoty uzlových bodů jsou zlomky); d) záporné číslo / menší než mínus tři; e) číslo, které je druhou/třetí mocninou libovolného přirozeného čísla; f) symetrické číslo; g) prvočíslo / složené číslo / číslo rozložitelné na součin tří prvočinitelů; h) číslo rozložitelné na součet druhých mocnin; i) sudé/liché číslo.

3.2.3 HRA SOUSEDÉ – autorská hra MK inspirovaná švýcarskou hrou se „čtvercovými útvary“ (složenými z n čtverců podobně jako krychlová tělesa z jednotkových krychlí) dvou barev: červené a bílé. Hrají dva hráči – na šestiúhelníkové ploše tentokrát s dvoubarevnými šestiúhelníkovými kameny, z každé strany jedna barva (červená/bílá). Hráči střídavě pokládají své kameny na plochu. Pokud se nově položený kámen dotkne stranou (ne vrcholem) protihráčova položeného kamene, pak se jeho barva změní (přetočením) na barvu právě hrajícího hráče. Vítězem je ten, jehož barva pokrývá větší plochu.

3.2.4 Podle předpisu (autorská MK): a) najdi trasu z místa A do místa B tak, aby tvá cesta; b) formuluj předpis nebo popis pravidelnosti trasy k hotové síti; c) vytvoř síť tak, aby v ní existovala alespoň jedna trasa popsatelná předpisem/pravidelností, rytmem.

3.2.5 Pravidelné dělení plochy šestiúhelníku na menší shodné části – využití ve shodných zobrazeních, v práci se zlomky, vytvořením sítí pro zobrazení krychlových těles či kompozic z krychlí.

3.2.6 Nepravidelné dělení na stejné části s cílem respektovat zadané podmínky (autorská MK) – každé nové pole má svoji hodnotu (každá část jednotkového celku má jinou hodnotu); možné podmínky: a) zvolíme speciální uzlové body a ty mají mít hodnotu podle toho, které části šestiúhelníků mají vrchol v tomto uzlu, hodnotu je nutné určit; b) zvolit hodnoty nových polí tak, aby zvolené body měly hodnotu rovnou součtu (součinu) těch polí, která v něm mají vrchol; c) při zadaném dělení šestiúhelníků hledáme různá natočení částí a zkoumáme, kolik nejvíce a kolik nejméně částí má v daném uzlu vrchol (badatelská činnost) s tím, že hledáme, jak dalece závisí náš závěr na způsobu dělení šestiúhelníku na části.

3.3 Práce se spojnicemi

3.3.1 Cesty (Kanada, Francie, Německo, Polsko, ...) – trasy, délky, hodnoty, možnosti.

3.3.2 Jednosměrky – bludiště (autorská MK): a) najdi všechny trasy...; b) uprav tak, aby existovala jen jedna trasa; c) sestav systém jednosměrek.

3.3.3 Escher a sítě – měníme tvary spojnic (inspirace pracemi v muzeu v Haagu a dílnou F. Roubíčka) změnou tvaru spojnic s využitím shodné rozložitelnosti vznikají nové jednotkové útvary (lze dohledat na internetu).

3.4 Práce se souřadnicemi

3.4.1 Jak určit/zavést souřadnice bodu v různých sítích jako problémová situace.

3.4.2 Jak určit/zavést souřadnice pole a proč (proč nepracovat s bodem), důraz na přesahy.

3.5 Kosodélníkové a kosočtverečné sítě

3.5.1 Úlohy v této síti na principu kontrastu (porovnání sítí, propedeutika zlomku, práce s poměrem, se společným dělitelem, nestandardní model dělení se zbytkem, obvod a obsah).

3.5.2 Grafy v síti a statistika – ukázky manipulativních technik v médiích.

3.6 Trojúhelníkové sítě

3.6.1 Trojúhelníky rovnostranné

- *Kolik různých trojúhelníků lze vyznačit v síti s využitím linek sítě?* (autorská a výzkum MK) – vede k diskusi, co znamená různých, objevení nezávislosti na poloze trojúhelníka.

- *Lze vyznačit pravoúhlý trojúhelník s vrcholy v uzlových bodech v této síti?* Nemluvíme o využití linek (autorská a výzkum osmdesátá léta MK). Vede k diskusi, průprava k práci s výškou; příprava na zavedení obsahu trojúhelníka.

- *Vyznač různé trojúhelníky v síti s využitím linek a porovnej jejich obsahy, jednotkový útvar je pole sítě* (autorská a výzkum osmdesátá léta MK). Vede k objevování závislostí.
  Podobně porovnej jejich obvody.

- Práce se **střední příčkou** trojúhelníka; např. výroba hry Indiánská čelenka – hledáme všechny rovnostranné trojúhelníky, ve kterých je „středový trojúhelník“ vždy bílý, „rohové trojúhelníky“ jsou barevné; při vybarvování používáme tři různé barvy a hledáme všechny možnosti vybarvení (10).

- **HRA** (autorská MK) Dva hráči – každý má jednu barvu, střídavě vybarvují v síti pole trojúhelníka libovolné velikosti v síti tak, že každý nový trojúhelník se musí dotýkat aspoň bodem již zakresleného trojúhelníka (vlastního nebo protihráče). Vyhrává hráč s větším vybarveným polem.

- Souřadnice bodu/pole v této síti a *diktáty* (bez využití vektorů/šipek). (MK výzkum)

- *Vyznač:* a) dvojice rovnoběžek s využitím linek v této síti; b) dvojice kolmic s využitím uzlových bodů a hledej jejich různé polohy; terapeutická role (ověřeno MK) pro pochopení nezávislosti natočení těchto dvojic v rovině.

- *Vyhledáváme* v okolí *trojúhelníkové prostorové sítě*; např. bývají součástí různých konstrukcí.

3.6.2 Trojúhelníky pravoúhlé rovnoramenné – lze tvořit různé hry, odkrýt vztahy mezi trojúhelníkem, čtvercem, obdélníkem.

3.6.3 Trojúhelníky pravoúhlé různostranné – jde zpravidla o značné překvapení, že i takovou sítí pokryjeme rovinu.

3.7 Nepravidelné sítě

3.7.1 Nepravidelná trojúhelníková síť – HLEDÁNÍ středu Evropy/ČR (inspirováno přednáškou prof. M. Komana, 1994), zjednodušení pro ZŠ: dané území rozdělíme na přibližně stejně velké trojúhelníky, u nich určíme těžiště, ta propojíme opět v trojúhelníky, u kterých určíme těžiště vyššího řádu. Tak pokračujeme, dokud nezískáme poslední těžiště. Pokud před posledním krokem získáme pouze dvě těžiště, hledáme střed úsečky dané těmito dvěma body.

3.7.2 Sítě poskládané z různých n-úhelníků – lze zadat vyhledávání/tvorbu takových sítí.

3.8 Sítě a reálné situace (např. šev na míči představuje spojnici mezi uzlovými body sítě; archeologie; skenování; globus).

3.9 Sítě s přesahem do polytechnického vzdělávání a IT – lze využít pro úvod do programování.

Závěr

Příspěvek přináší náměty, které je možné využít v práci s dětmi/žáky ve věku od 4,5 roku po 16 let. Prezentuje aktivity, které byly zařazeny do dílny, avšak je zřejmé, že sítě jako prostředí otvírají dveře tvořivosti.

Literatura

[1] Kaslová, M. (2018). *Sítě v rovině a v prostoru.* Studijní didaktický text konference Malá škola matematických dovedností (4 strany). Jihlava: NIDV.

[2] Kaslová, M. (1996). *Inovativní postupy.* Praha: UK PedF.

[3] Kaslová a kol. (1999–2000). *Barevná matematika pro prvňáčky (druháky, třeťáky, čtvrťáky, páťáky).* Praha: SPN.

[4] Kaslová, M. (2015, 2016, 2017, 2018). *Úlohy pro 5. ročník soutěže Pangea.*

[5] Kaslová, M. (2019). *Přesahy matematiky a zeměpisu.* Projekt MŠMT MG 95.

[6] Kaslová, M. (2002). Trojúhelníková síť na 1. st. ZŠ jako diagnostický i rozvíjející nástroj. In M. Ausbergerová, J. Novotná & V. Sýkora (Eds.) *Sborník konference 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 147–154). Praha: JČMF.

[7] Kaslová, M. (2003). *Rytmizace, pravidelnosti, závislosti.* Praha: RAABE.

[8] Kaslová, M., et al. (2005). *Sbírka úloh z matematiky pro 2. a 3. ročník ZŠ.* SPN.

[9] Kaslová, M., et al. (2010). *Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník ZŠ.* SPN.

[10] Kaslová, M. (2010). *10 sešitů pro 1.–5. ročník: série PROCVIČUJEME MATEMATIKU.* Praha: SPN.

Další zdroje

[1] Davídek, M. rukopis DP Trojúhelníkové sítě v matematice na prvním stupni. (nedokončeno)

[2] Marchini, C. (2005). Pojetí nekonečna u dětí předškolního věku (přednáška na UK).

[3] HRY v trojúhelníkové síti: např. Halma, TransEvropa, TransAmerika, ...

[4] HRY v šestiúhelníkové síti: např. plástvová stavebnice.

Motivační kontexty slovních úloh

Hana Moraová, Jarmila Novotná[1]

Výzkum v oblasti slovních úloh (Moraová, 2018) ukazuje, že slovní úlohy v mnoha řadách českých učebnic matematiky obsahují kontexty zadání slovních úloh, které tematicky neodpovídají běžnému životu a zájmům současných žáků. Jedním z důvodů může být to, že mnoho ze zkoumaných učebnic, které jsou stále ve školách hojně používány, pocházejí z 90. let 20. století a reflektují spíše realitu života konce 80. let. Také výzkum mezi studenty učitelství a v elektronických materiálech (Moraová, 2014 a Moraová, 2017) ukazuje, že tendence je vytvářet slovní úlohy ve velmi konzervativních kontextech.

Cílem dílny bylo seznámit její účastníky s výsledky výzkumu kontextů slovních úloh v učebnicích matematiky a také jim nechat dostatečný prostor pro tvorbu vlastních slovních úloh, přičemž pozornost měli cíleně věnovat tomu, aby byly slovní úlohy zasazeny do nových, žákům a každodennímu životu blízkých kontextů.

Slovní úlohy patří ke kritickým oblastem ve výuce matematiky (Vondrová & Žalská, 2013). Jde o učivo, které je u mnoha žáků velmi neoblíbené. Přitom slovní úlohy jsou prostorem ve výuce matematiky, kde máme možnost žákům ukázat, že matematika je užitečný nástroj pro řešení běžných, každodenních situací a problémů. Podmínkou, aby slovní úlohy sehrály tuto roli, ale je, aby jejich kontext vycházel z každodenních zkušeností žáků, jejich zájmů a problémů, které ve svém životě řeší.

Další důvod, proč bychom se měli zamýšlet nad kontextem slovních úloh, vyplývá ze studií vlivu kontextu zadání na úspěšnost v řešení (Moraová & Novotná, 2013, Novotná & Chvál, 2018, Vondrová et al., 2019). Tyto studie ukazují, že nezvyklost formulace zadání slovní úlohy, a to včetně jejího kontextu, může vést k tomu, že žáci zadání pečlivěji čtou a místo automatického použití naučeného algoritmu hledají vlastní postupy řešení.

Výzkum nematematického (kulturního) světa učebnic matematiky (Moraová, 2018) se zaměřil na učebnice matematiky od pěti různých kolektivů autorů a zkoumal (mimo jiné), v jakých kontextech jsou zasazeny slovní úlohy, které žáci v těchto učebnicích řeší.

Ve všech zkoumaných řadách učebnic chybí např. zástupci menšin. Chybí také obrazy jiných rodin než těch, kde žijí maminka, tatínek a dvě děti. Nejsou v nich obrazy městských seniorů. Pokud se babičky a dědové objeví, dědové jsou na zahradě, babičky na venkově, nejlépe v kuchyni. To může odpovídat dětství dnešních čtyřicátníků, ale rozhodně ne dnešní školní mládeže.

[1]Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, hana.moraova@pedf.cuni.cz, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Téma	**Coufalová a kol.**	**Odvárko a Kadleček**	**Šarounová a kol.**	**Herman a kol.**	**Molnár a kol.**
Profese	16,35 %	11,59 %	10,53 %	24,56 %	11,76 %
Volný čas dětí	16,35 %	13,77 %	11,58 %	14,04 %	20,59 %
Škola	5,77 %	10,14 %	13,68 %	5,26 %	7,35 %
Nakupování	15,38 %	10,14 %	6,32 %	15,79 %	13,24 %
Finance	6,73 %	5,07 %	6,32 %	3,51 %	8,82 %
Věda	5,77 %	1,45 %	8,42 %	12,28 %	0,00 %
Kutilství	5,77 %	28,26 %	7,37 %	15,79 %	5,88 %
Šití	3,85 %	0,00 %	5,26 %	1,75 %	0,00 %
Příprava a konzumace potravin	7,69 %	1,45 %	0,00 %	3,51 %	2,94 %
Sport	3,85 %	7,25 %	22,11 %	3,51 %	19,12 %
Automobily	2,88 %	2,17 %	2,11 %	0,00 %	7,35 %
Ostatní	9,62 %	8,70 %	6,32 %	0,00 %	2,94 %

Tab. 1: Podíl jednotlivých kategorií nematematických slovních úloh s osobami (Moraová, 2018)

Oblast profesní je další problematickou oblastí. Jak ukazují výsledky analýzy, celkově převládají v profesích muži a chybí více obrazů vysokoškolsky kvalifikovaných osob.

V zadáních chybí městské volnočasové aktivity – dnešní mládež navštěvuje kroužky, hraje na hudební nástroje, učí se cizí jazyky. Na výletech a na táborech už tolik času netráví. Děti žijí ve světě moderních technologií a online prostředí. Tato témata chybí v učebnicích zcela. Opomíjeným tématem jsou letní dovolené, které často zaznívají jen okrajově. Běžnější je dnes také stravování mimo domov, nakupování online apod. (Moraová, 2018)

Výzkum kontextů slovních úloh, které tvořili studenti učitelství a učitelé z praxe na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích (Moraová, 2014), i výzkum kontextu slovních úloh v online elektronických materiálech na portálu www.veskole.cz (Moraová, 2017) vedl k podobným zjištěním.

Budoucí učitelé vytvářeli v rámci výzkumu slovní úlohy zasazené do velmi stereotypních prostředí. Za 117 slovních úloh od budoucích učitelů 1. stupně jich 69, tedy 59 %, bylo formulováno v kontextu jídla a potravin. V odevzdaných slovních úlohách nechyběly ani jiné tradiční kategorie, např. kutilství, celkem pět úloh. V jedné tatínek tapetuje, v jedné řeže dříví, v jedné dolévá benzín do sekačky. Ve dvou hoši vyrábějí draka.

V případě učitelů z praxe také převládly slovní úlohy o jídle, kterých bylo 36 z celkového počtu 102 (tedy 35 %). Dvě slovní úlohy patřily do kategorie Kutilství.

Celkově byla škála kontextů širší a větší podíl měly čistě matematické slovní úlohy. Objevila se také větší mezipředmětová provázanost (přírodopis, zeměpis, fyzika).

Ve výzkumu slovních úloh v online prostředí, ve kterém by se dal předpokládat vyšší podíl aktuálních kontextů, bylo analyzováno 60 souborů s celkem 162 slovními úlohami. Analýza těchto úloh opět prokázala, že jejich svět je obydlen českou rodinou s oběma rodiči, dvěma dětmi a případně prarodiči na venkově. Neúplné rodiny i menšiny v slovních úlohách chybí. Přitom podle statistik končí rozvodem každé druhé české manželství.

Obdobně jako u slovních úloh vytvořených studenty učitelství v rámci kurzu na Jihočeské univerzitě bylo hlavním tématem jídlo a potraviny (52 %). 10 % se zaměřilo na peníze a financování, 7 % na prostředí školy, 6 % úloh souviselo se zvířaty (toto téma se v předchozí studii neobjevovalo) a dalších 6 % s koníčky.

Jako překvapivé se jeví, že je poměrně málo slovních úloh zasazeno do prostředí peněz a financí: 10 %, ale v předchozí studii (Moraová, 2014a) pouhá 3 %. Ještě více ale zaráží, že se ve slovních úlohách neobjevují žádná technologická zařízení, a to přesto, že právě pro ně jsou slovní úlohy určeny.

Všechny výzkumné studie tedy ukazují, že svět, ve kterém žáci řeší matematické úlohy, není jejich světem. Přitom, jak upozorňují Meany a Lange (2013), rizikem toho, že se svět prezentovaný ve školní matematice rozchází se světem každodennosti, je, že žáci mohou mít velké problémy používat každodenní znalosti matematiky běžně používané doma a mimo školu ve školním prostředí, protože nepoznají, že spolu matematika doma a ve škole souvisí. Školní matematika je pro ně jiným světem odtrženým od reality a jen těžko si k ní hledají cestu.

Ukazuje se, že je nezbytně nutné, aby nejen autoři učebnic, ale také učitelé matematiky věnovali kontextu slovních úloh dostatek pozornosti a snažili se prostředí, ve kterých se používá matematika, neustále inovovat a přizpůsobovat zájmům a každodennímu životu konkrétních skupin žáků. Pro autory učebnic jde o úkol velmi nesnadný, neboť učebnice se píše tak, aby sloužila minimálně 12 let, během kterých se společnost změní. Pokud ale učitelé vytvářejí vlastní úlohy do svých hodin, měli by kontextu zadání věnovat náležitou pozornost.

Proto bylo cílem dílny na konferenci upozornit učitele z praxe na tuto problematiku a ukázat jim, že mají dostatek invence a představivosti, aby připravovali zajímavé slovní úlohy v neotřelých kontextech.

Průběh dílny

Dílna byla záměrně postavena tak, aby její účastníci nejprve vytvořili první sérii slovních úloh, poté své úlohy představili dalším účastníkům na dílně. Teprve dalším krokem bylo seznámit je s výsledky výzkumu kontextu slovních úloh ve vybraných učebnicích matematiky a porovnat jimi využité kontexty slovních úloh s kontexty běžnými ve vybraných učebnicích matematiky. Posledním krokem potom bylo vytvořit sadu úloh ke geometrickému zadání, v této fázi již záměrně zasazenou do nových, současných kontextů.

Aktivita 1 (úvodní)

Z číslic 2, 3, 5, 7 sestavte výraz tak, aby každá z číslic byla použita právě jednou a výsledek byl roven 10. Povoleno je pouze čísla uzávorkovávat, měnit jejich pořadí a čísla sčítat, odčítat, násobit a dělit.

K výrazům navrhněte slovní úlohy, pro něž je výraz matematickým modelem.

Už při sestavování výrazů v první části aktivity byli účastníci velmi aktivní. Podařilo se jim vytvořit více než 10 různých výrazů splňujících zadané podmínky. Delší debata proběhla k otázce, zde je možné, aby byl ze zadaných číslic sestaven takový výraz, aby výsledek byl záporný.

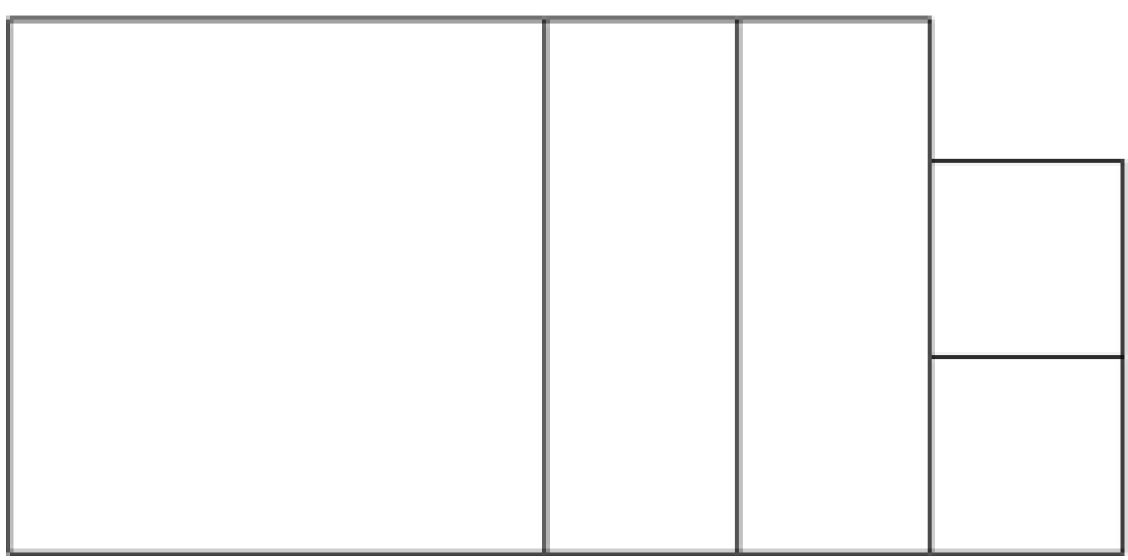
Poté účastníci přešli k tvorbě vlastních slovních úloh. Pracovali ve skupinách a každá skupina se snažila sestavit alespoň tři slovní úlohy.

Mezi kontexty vytvořených úloh se objevila i témata moderních technologií a sociálních sítí, sportu, nakupování a útraty (kolegyně ze Slovenska pracovala v eurech), i když takových slovních úloh nebylo mnoho.

Po společné diskuzi a představení výsledků relevantních studií účastníci přistoupili k dalšímu úkolu, aktivitě 2.

Aktivita 2

K tomuto obrázku navrhněte slovní úlohu s kontextem zajímavým pro vaše žáky.



Tradiční školní zadání by mohla být např. (při zadání délek jednotlivých stran a jejich částí)

- Kolik metrů pletiva je třeba k oplocení celého vyznačeného pozemku?
- Kolik metrů cestiček mezi záhony na pozemku je? (Lze uvažovat pouze cestičky uvnitř pozemku nebo i cestičku po obvodu pozemku.)

Poznámka: I tato zadání mohou podpořit kreativitu žáků, mohou být pro některé žáky motivující.

Mezi úlohami navrženými účastníky dílny se při této aktivitě téměř neobjevily podobné tradiční školní úlohy. Vzhledem k představeným výsledkům výzkumu (Moraová, 2018) účastníci hledali hlavně úlohy s velkým motivačním potenciálem pro současnou mládež, např. úlohy z prostředí ZOO, úlohy se sportovní tématikou, z oblasti finanční matematiky nebo z využívání ICT.

Závěrečná poznámka

Dílna jednoznačně ukázala, že pokud učitelé pracují s kontextem slovních úloh uvědoměle, jsou schopni vytvářet slovní úlohy ve velmi zajímavých prostředích, která jsou pro žáky motivující a jsou blízká jejich každodennosti. Inovativnost vytvořených slovních úloh byla podle našeho názoru i podle výpovědí jednotlivých účastníků důsledkem toho, že účastníci si tuto dílnu vybírali záměrně, po seznámení se s jejím názvem i obsahem (abstraktem). Mezi účastníky dílny byli dva autoři připravované řady učebnic pro nakladatelství eTaktik i kolegyně ze slovenské univerzity, která se tématu dlouhodobě věnuje. To vše ovlivnilo práci skupinek při tvorbě první sady slovních úloh, kde jsme mohli sledovat kombinaci tradičních i velmi neotřelých kontextů zadání.

Literatura

[1] Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Lávička, M. & Potůček, J. (2011). *Matematika pro 6. ročník základní školy.* Praha: Fortuna.

[2] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E. & Šimša, J. (2012). *Matematika. Úvodní opakování.* Praha: Prometheus.

[3] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E. & Šimša, J. (2012). *Matematika. Kladná a záporná čísla.* Praha: Prometheus.

[4] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E. & Šimša, J. (2012). *Matematika. Dělitelnost.* Praha: Prometheus.

[5] Meany, T. and Lange, T. (2013). Learners in Transition between Contexts. In M.A. (Ken) Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *The Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 169–201). New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.

[6] Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., Slouka, J. & Růžičková, B. (2007). *Matematika 6. Učebnice s komentářem pro učitele.* Olomouc: Prodos.

[7] Moraová, H. (2014). Non-mathematical content of mathematics word problems posed by teacher trainees. In M. Houška, I. Krejčí & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Efficiency and Responsibility in Education* (ERIE 2014) (463–470). Praha: CULS.

[8] Moraová, H. (2017). Do Authors of Online Electronic Materials for Teaching Mathematics use Their Potential to use Non-Stereotypical Cultural Settings? *The Electronic Journal of e-Learning*, 15(3), 235–243. Dostupné z www.ejel.org.

[9] Moraová, H. (2018). *Nematematický svět učebnic matematiky pro 6. ročník základních škol a v oblasti finanční matematiky* [Disertační práce]. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[10] Moraová, H. & Novotná, J. (2013). Impact of non-standard cultural assignment of word problems on 6th grade pupils' performance. In R. Kvasnička (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference. Efficiency and Responsibility in Education* (ERIE 2013) (441–448). Praha: CULS.

[11] Novotná, J. & Chvál, M. (2018). The impact of the order of numerical data and context in word problem assignment on pupils' performance in their solution. Předneseno na ECER 2018, Bolzano, Itálie. Dostupné z https://eera-ecer.de/ecer-programmes/conference/23/contribution/44062/.

[12] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2011). *Matematika 1 pro 6. ročník základní školy. Opakování z aritmetiky a geometrie.* Praha: Prometheus.

[13] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2010). *Matematika 2 pro 6. ročník základní školy. Desetinná čísla. Dělitelnost.* Praha: Prometheus.

[14] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2010). *Matematika 3 pro 6. ročník základní školy. Úhel, trojúhelník. Osová souměrnost. Krychle a kvádr.* Praha: Prometheus.

[15] Vondrová, N. & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy. In M. Rendl & N. Vondrová (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (63–126). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[16] Šarounová, A., Mareš, J., Růžičková, J. & Väterová, V. (2008). *Matematika 6. 1. díl.* Praha: Prometheus.

[17] Šarounová, A., Mareš, J., Růžičková, J. & Väterová, V. (2009). *Matematika 6. 2. díl.* Praha: Prometheus.

[18] Vondrová, N., et al. (2019, v tisku). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Karolinum.

Matematické úlohy inšpirované žonglovaním I.

Michal Zamboj[1]

Matematické popisy žonglovania vznikli v druhej polovici dvadsiateho storočia a našli svoje aplikácie v matematických štruktúrach, ale i vo fyzike a informatike. Špeciálne zápis pomocou celočíselných postupností sa od konca 20. storočia teší obľube v žonglérskej komunite. V tomto článku budeme riešiť praktické úlohy, s ktorými sa žongléri stretnú pri overovaní a vytváraní nových trikov. Oboznámime sa tak elementárnym spôsobom s matematickou teóriou žonglovania.

Loptičky či kužele víriace vzduchom vo veľkolepých vzoroch a pod nimi v rytmickej spleti vlastných rúk dirigent tohto chaosu. Aj takto vyzerá tradičná predstava žongléra (druhá je klaun a tretia kúzelník). My sa pokúsime tento súbor pohybov rozkódovať pomocou matematického popisu, ktorý vznikol v osemdesiatych rokoch minulého storočia tromi na sebe nezávislými skupinami matematikov, ktorých záľuba bola práve žonglovanie. Tieto skupiny tvorili Paul Klimak zo Santa Cruz, Bent Magnusson a Bruce „Boppo“ Tiemann z Los Angeles — Caltech v USA a Adam Chalcraft, Mike Day a Colin Wright z Cambridge v Anglicku. V súčasnosti sa tento popis žonglovania pomocou celočíselných postupností nazýva *siteswapový zápis* a používa ho žonglérska komunita po celom svete. V tomto príspevku sa budeme opierať o knižku Burkarda Polstera (2003) a autorovu diplomovú prácu (Zamboj, 2014), či kratší článok (Zamboj, 2018).

[1]Katedra matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK, michal.zamboj@pedf.cuni.cz

Než však pristúpime k praktickému matematickému žonglovaniu, je vhodné čitateľovi aspoň stručne obhájiť naše nasledovné riadky. Jednou z hlavných úloh matematiky je presné popisovanie javov odohrávajúcich sa v našej realite. Za takýto jav môžeme považovať napríklad žonglovanie, v ktorom popisujeme jednotlivé triky. Matematický popis na základe jasne stanovených pravidiel rozšíri žonglovanie o akýsi univerzálny jazyk, a to tak, že ktokoľvek sa zoznámi s týmto jazykom (a pochopí ho), bude v ňom môcť komunikovať presnú informáciu o žonglérskych trikoch. Takže miesto toho, aby si žongléri vymýšľali nejednoznačné názvy trikov, ako napríklad „bocian“ a „čáp“, uvedú jednoznačný popis „88441“. Takáto teória by znela utopisticky, ak by reálne nefungovala, a je pravdou, že už mierne pokročilí žongléri sa dorozumievajú práve takýmito postupnosťami a stráca sa tak, okrem iného, jazyková bariéra. Popisom javu sa z matematického pohľadu nič nekončí, ale naopak, všetko práve začína. Odhaľovanie vlastností žonglovania za pomoci daného popisu je vlastne tvorba a dokazovanie matematických viet. Vďaka takýmto vlastnostiam môže žonglér overiť, či zapísaný trik je možné zažonglovať, ako vytvoriť nový trik alebo aj koľko trikov a za akých podmienok je vôbec možné žonglovať. Matematik si môže ďalej povšimnúť radu súvislostí, ktoré pozná z inej, alebo z viacerých matematických teórií, a dostáva tak spoločný model – žonglovanie, ktoré prevádza ich jednotlivé pojmy medzi sebou. Na jednu stranu sa teda žonglér ozbrojí arzenálom matematických princípov, ktoré intuitívne používa, a naopak, matematik dostáva aplikáciu a prepojenie abstraktných teórií. Matematická teória žonglovania takto podáva manifest pracovných metód samotnej matematiky.

Siteswapový zápis

Model

Aby bol popis žonglovania jednoduchý, je dôležité na úvod zvoliť jeho jednoduchý (ale dostatočne bohatý) model, ktorý môžeme v ďalších krokoch generalizovať. V širšom zmysle dnes ako žonglovanie označujeme akúkoľvek pohybovú manipuláciu s predmetom. V tomto článku sa zameriame na klasické „hádzacie“ žonglovanie s loptičkami (rovnako dobre by nám však poslúžili aj iné predmety). Preto bude naším cieľom popísať hody loptičiek, resp. zmeny ich poradia. Bruce „Boppo“ Tiemann na príklade zmeny vyhadzovania troch loptičiek, napr. modrá, žltá, červená, modrá, žltá, červená ... modrá, červená, žltá, modrá, červená, žltá odvodzuje aj vznik slova siteswap (site = strana, swap = zámena).

Prvou, a azda najťažšou, bádateľskou úlohou je uvedomiť si z pohľadu pozorovateľa, ktoré prvky žonglovania sú pre naše skúmanie významné a naopak, ktoré môžeme eliminovať. Asi nás nezaujíma, či žonglér zrovna niekam kráča alebo stojí na mieste, ani to, či si občas hodí nejakú loptičku poza chrbát. Náš model totiž nie je závislý na pohybe žongléra, ale na pohybe loptičiek, t.j. predstavíme si žongléra stojaceho na mieste a jeho ruky majú pevné pozície v priestore. Navyše čas medzi chytením loptičky a jej vyhodením bude v našom modeli nulový.[2] Bolo by trúfalé skutočnému žonglérovi zakazovať hádzať viac loptičiek z jednej ruky naraz, alebo hádzať oboma rukami súčasne. Náš matematický žonglér je síce prostý, avšak ideálny, a preto mu pridáme ďalšie obmedzenia. Hádzaniu viacerých loptičiek z jednej ruky zamedzíme podmienkou, že na každý úder je chytená a hodená nanajvýš jedna loptička, a ak je loptička chytená, je následne hodená na ten istý úder. Aby žonglér nehádzal oboma rukami súčasne, môžeme obmedziť počet jeho rúk. Takéto radikálne chirurgické riešenie vlastne znamená, že ani počet rúk nie je podstatnou vlastnosťou žonglovania. My však, pre lepšiu predstavu žongléra s dvomi rukami, budeme miesto toho uvažovať, že ruky žongléra sa striedajú, a to do konštantne oddelených úderov v čase. Napokon, aby sme sa vyhli rozporu s tým, že žonglér môže mať v jednej ruke viac loptičiek, tak nemôže začať ani skončiť žonglovať, a teda jeho sizyfovský údel je, že vždy žongloval a nikdy neprestane.

Kaskády a fontány

Keď už sú jasne vymedzené pravidlá žonglovania, môžeme sa pustiť do popisu jednotlivých trikov. Nášmu modelu, samozrejme, vyhovuje aj základné žonglovanie s tromi loptičkami, tzv. kaskáda, pri ktorej žonglér zakaždým hádže loptičku oblúkom do druhej ruky. Loptičky sa striedajú pri opakovanom vyhadzovaní pravou P a ľavou Ľ rukou:

$$\ldots, \text{P modrá, Ľ žltá, P červená, Ľ modrá, P žltá, Ľ červená, P modrá}, \ldots$$

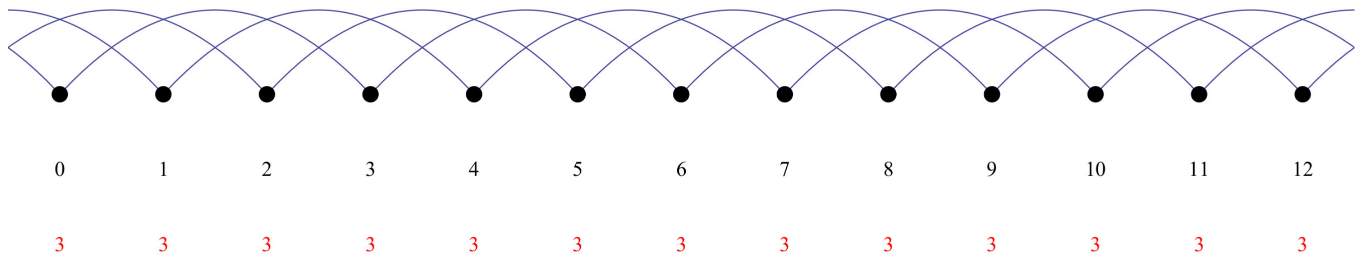
Žonglovanie kaskády sa pokúsime popísať pomocou jednotlivých *hodov* — pohybov loptičiek od vyhodenia až po dopad. Nepotrebujeme však ich polohu v každom časovom momente, ale úplne nám postačí čas vyhodenia a čas dopadu. Ak upriamime náš pohľad na modrú loptičku, vidíme, že dopadla na 3. úder od vyhodenia. Následne (na ten istý úder) je vyhodená a dopadne znovu za 3 údery:

$$\ldots, \text{P modrá, Ľ —, P —, Ľ modrá, P —, Ľ —, P modrá}, \ldots$$

Počet úderov medzi vyhodením a dopadom loptičky pri danom hode nazveme *výška hodu*. Na každý úder teda žonglér vyhodí loptičku hodom o nejakej výške. V našej kaskáde je každý hod o výške 3. Ak hody zapíšeme do postupnosti za seba, dostávame našu prvú (nekonečnú) žonglovaciu postupnosť

$$\ldots 3333333 \ldots$$

[2]Tento zdanlivý časový podvod na reálnom žonglérovi sa pri praktickom prevedení napraví rozložením časovej chyby do pohybu rúk žongléra a času držania loptičky, je však nutné pamätať na to, že konštruujeme matematický, a nie fyzikálny model, naše loptičky teda nemajú nárok na zrážanie sa, ako by tomu bolo v skutočnosti.



Obr. 1: Základný diagram kaskády s tromi loptičkami. V prvom riadku je očíslovanie jednotlivých úderov a v druhom riadku sú výšky hodov. (Zamboj, 2014: s. 5)

Takto vytvorenú postupnosť môžeme doplniť tzv. *základným diagramom* (obr. 1), ktorý vytvoríme tak, že žonglér sa bude v čase hýbať dopredu (akoby kráčal) a zboku premietneme trajektóriu žonglovaných loptičiek na kolmú priemetňu. Ak sa pozrieme na základné žonglovanie so štyrmi loptičkami, tzv. fontánu, všimneme si, že proces je analogický. Pri fontáne so štyrmi loptičkami hádžeme na každý úder loptičku do rovnakej ruky, z ktorej je vyhodená (tj. v každej ruke žonglujeme oddelene po dve loptičky) nasledovne:

…, P modrá, Ľ žltá, P červená, Ľ zelená, P modrá, Ľ žltá, P červená, …

Na každý úder je teda vyhodená loptička hodom výšky 4 a celkovo máme:

$$\dots 444444444 \dots$$

Rovnakým spôsobom dostávame popis kaskád pre 5, 7, 9, … a fontán pre 6, 8, 10, … loptičiek.[3] Vráťme sa ešte k výškam menším než 3. Ctený čitateľ si už určite dokáže predstaviť postupnosť opakujúcich sa hodov o výške 2:

…, P modrá, Ľ žltá, P modrá, Ľ žltá, P modrá, Ľ žltá, P modrá, …,

ktorá odpovedá žonglovaniu s dvoma loptičkami. Opakujúce sa hody o výške 1 predstavujú prehadzovanie si jednej loptičky z ruky do ruky. A nakoniec, hod o výške 0 znamená, že žiadna loptička na daný úder nedopadne a teda žiaden nový hod nie je prevedený.[4] Z tohto výpisu je očividná prirodzenosť zápisu pomocou výšok hodov v tom zmysle, že základný žonglovací vzor o n loptičkách, pre $n \in \mathbb{N}_0$, je zapísaný konštantnou postupnosťou $\dots nnnnn \dots$ Zostrojenie základných diagramov týchto postupností je vhodným cvičením. Zrejmé je tiež pozorovanie, že hody o nepárnych výškach dopadnú vždy do druhej ruky a hody o nenulových párnych výškach dopadnú do rovnakej ruky, z ktorej vyhadzujeme.

[3] Pre výšky hodov väčšie než 9 je zvykom používať označenie písmenami $10 = a, 11 = b, \dots$

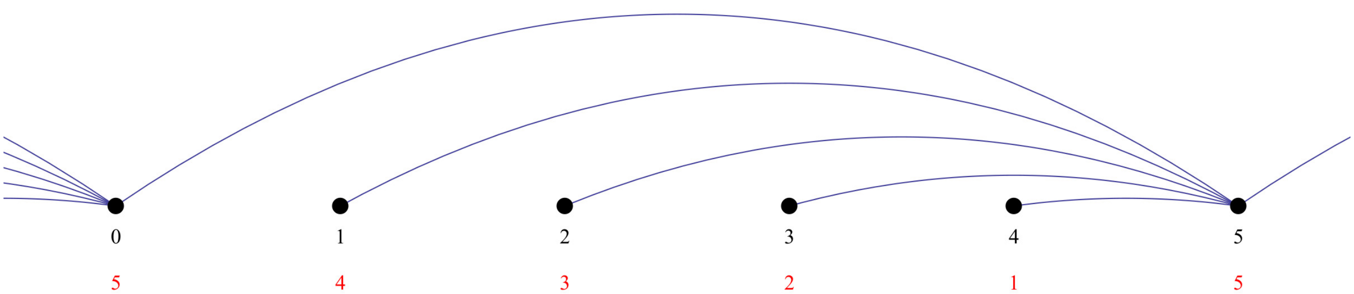
[4] Naša domnienka je, že čitateľ na tomto mieste hádže hody o výške 0, ale radi ho touto miestnou poznámkou vyprovokujeme k vyskúšaniu si aj ďalších hodov.

Žonglovacie postupnosti

Nie je prekvapivé, že sa matematici pri popise žonglovania pokúsili zamiešať výšky hodov. Zásadná otázka teda je, akým spôsobom overiť, že nejaká celočíselná postupnosť výšok hodov sa dá zažonglovať tak, aby spĺňala podmienky nášho modelu. V zásade to znamená, že musíme ošetriť, aby na žiaden úder nedopadla viac než jedna loptička. Ak by sme na nejaký úder i, pre $i \in \mathbb{Z}$ hodili hod o výške n, $n \in \mathbb{N}_0$, ktorý dopadne na úder $i + n$, určite na ďalší úder $i + 1$ nemôže nasledovať hod o výške $n-1$, pretože by dopadol taktiež na úder $(i+1)+(n-1) = i+n$ a loptičky by dopadli naraz. A dokonca ani na úder $i + k$, pre $n \geq k \in \mathbb{N}_0$, nemôžeme z rovnakého dôvodu vyhodiť loptičku hodom o výške $n-k$, pretože by dopadla rovnako na úder $(i+k)+(n-k) = i+n$. Predošlé riadky ozrejmuje opakujúca sa postupnosť hodov o výškach

$$\ldots 54321 \ldots,$$

ktorú nie je možné zažonglovať, pretože všetky loptičky by dopadli na 5. úder od prvého vyhodenia (obr. 2).

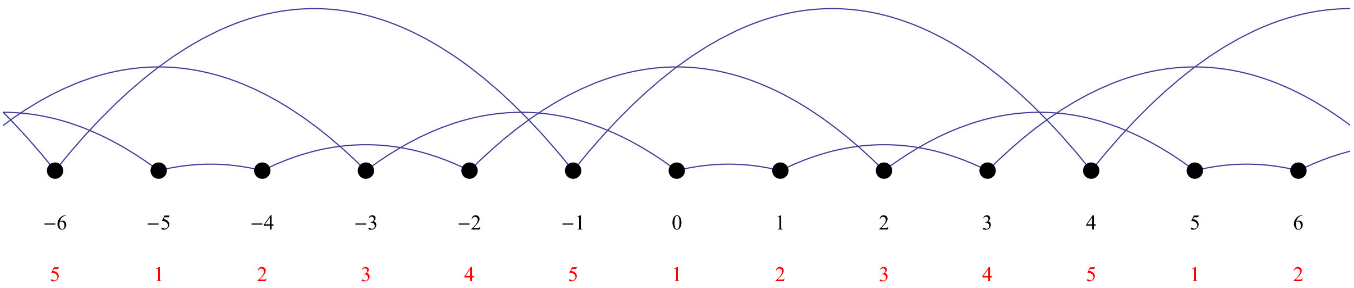


Obr. 2: Základný diagram opakujúcej sa postupnosti 54321. Všetky loptičky dopadnú na 5. úder (začíname na úder 0).
(Zamboj, 2014: s. 12)

Jednou z možností ako vytvoriť postupnosť výšok hodov, ktorá sa dá zažonglovať[5], je skonštruovať základný diagram, ktorý spňuje všetky predpoklady modelu žonglovania. To znamená, ža na každý úder dopadne a je vyhodená nanajvýš jedna loptička, tj. do každého bodu označujúceho úder v čase smeruje a vychádza z neho nanajvýš jeden oblúčik (v prípade hodu o výške 0 žiaden oblúk do daného úderu nesmeruje ani z neho nevychádza). Ako príklad uveďme komplikovaný trik s tromi loptičkami s opakujúcou sa postupnosťou hodov

$$\ldots 12345 \ldots \text{(obr. 3).}$$

[5]Pre lepšiu predstavu doporučujeme čitateľovi všetky použité postupnosti zapísať v danom tvare do nejakého žonglovacieho simulátoru voľne dostupného online na internete.



Obr. 3: Základný diagram opakujúcej sa postupnosti 12345 splňujúcej predpoklady modelu žonglovania.
(Zamboj, 2014: s. 8)

Pri praktickom žonglovaní sa venujeme najmä opakujúcim sa trikom, šlo by však samozrejme vytvárať aj triky, ktoré sa neopakujú, nebudeme sa im však v tomto úvodnom článku venovať. Miesto toho, aby sme ďalej písali nekonečné postupnosti opkujúcich sa trikov, sa môžeme obmedziť na ich pravidelne opakujúcu sa zložku — reprezentanta. Reprezentant žonglovacej postupnosti je najkratšia podpostupnosť, ktorá sa periodicky opakuje. Predošlý trik teda zapíšeme jednoducho ako 12345. Fontána so 4 loptičkami je opakovanie sa hodov o výškach . . . 44444 . . . a jej najkratšia opakujúca sa podpostupnosť je 4. Analogicky pre ďalšie kaskády a fontány. Ďalšie príklady žonglovacích postupností (tj. postupností, ktoré sa dajú žonglovať), ktorých základné diagrami ponechávame na aktivite čitateľa, sú napríklad opakujúce sa postupnosti 423, 531, 441, 24 s tromi loptičkami a 7531, 645, 88441 s viacerými loptičkami. Každá sústava naväzujúcich oblúkov (*orbita loptičky*) odpovedá hodom jednej loptičky, a preto nám na zistenie počtu loptičiek v danej postupnosti stačí spočítať počet týchto sústav v diagrame. V postupnosti 12345 sú tri takéto orbity. Orbita prvej loptičky je vytvorená postupnosťou hodov o výškach:

$$\ldots 1, 2, —, 4, —, —, —, 3, —, —, 1, 2, —, 4, —, —, \ldots$$

Orbita druhej loptičky:

$$\ldots —, —, 3, —, —, 1, 2, —, 4, —, —, —, 3, —, —, 1, \ldots$$

A napokon orbita tretej loptičky:

$$\ldots —, —, —, —, 5, —, —, —, —, 5, —, —, —, —, 5, \ldots$$

Zásadné pozorovanie, ktoré možno získať z konštrukcie základného diagramu, je to, že aby na každý úder dopadla nanajvýš jedna loptička, musí platiť, že do každého bodu, označujúceho úder v čase, smeruje nanajvýš jeden oblúk. To znamená, že každá loptička dopadne na úder označnený iným celým číslom. Započítaním úderov o výške 0 vlastne tvrdíme, že každému celočíselnému úderu je priradený práve jeden dopad. Kombinatoricky povedané, údery dopadov loptičiek vytvoria permutáciu celých čísel (všetkých úderov v čase). Časy dopadov loptičiek dostaneme tak, že k úderu vyhodenia pripočítame výšky hodov, napr. v postupnosti 12345 dostávame:

úder vyhodenia	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
výška hodu	...	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	...
úder dopadu	...	0	2	4	1	3	5	7	9	6	8	10	12	...

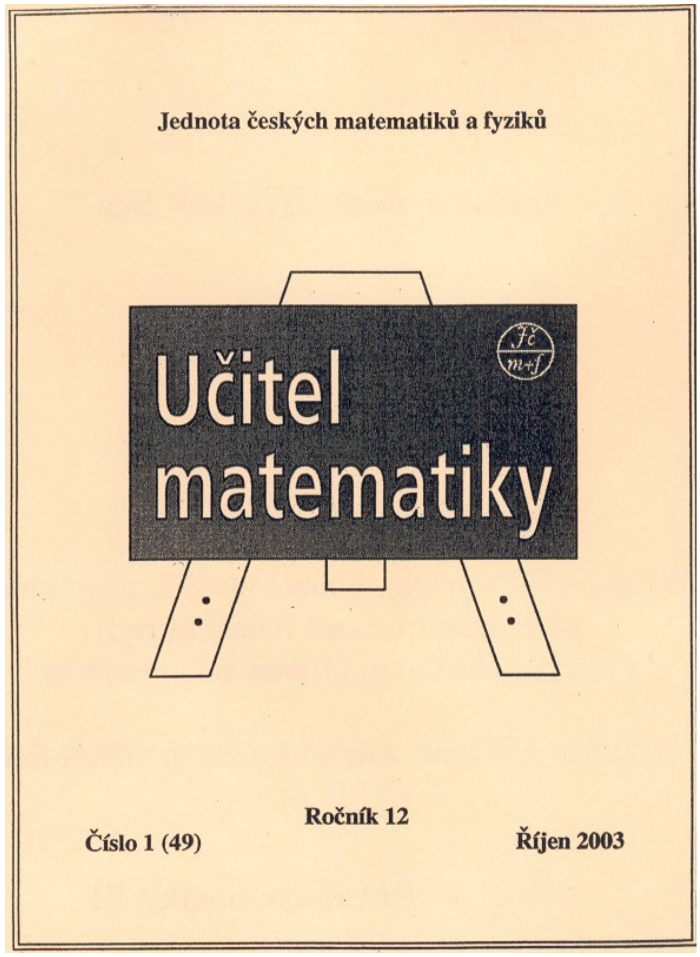
Ako dôsledok dostávame tvrdenie, že postupnosť nazývame žonglovacou postupnosťou, ak je postupnosť dopadov permutáciou celých čísel.

Literatúra

[1] Polster, B. (2003). *The Mathematics of Juggling.* New York: Springer – Verlag.

[2] Zamboj, M. (2014). *Matematická teória žonglovania* [Diplomová práca]. Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.

[3] Zamboj, M. (2018). Žonglování s matematikou, matematika v žonglování. In *Sborník příspěvků Elixír do škol*, 1–5. Dostupné z https://elixirdoskol.cz/_files/200000617-e8462e9409/2018_mtz_prispevek_Elixir.pdf



Časopis *Učitel matematiky*, vydávaný *Jednotou českých matematiků a fyziků*, vkročil již do 28. ročníku. Snahou redakce je přiblížit náplň časopisu skutečným potřebám učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Nechceme vydávat „akademické“ periodikum o teoretických otázkách vyučování, ale živý časopis, reagující na problémy učitelů matematiky.

Časopis uveřejňuje nejen „matematické“ články, ale rovněž články o vztahu matematiky a umění, o historii matematiky, o alternativním školství, staré i nové úlohy a zajímavé příklady, aktuální informace o dění ve školství, o matematické olympiádě, o seminářích, letních školách a dalších akcích pro učitele, informace o nových učebnicích, recenze atd.

Časopis vychází čtyřikrát ročně v rozsahu 64 stran. Podrobnější informace o časopisu jsou dostupné na wwww.suma.jcmf.cz/ucitel.

Administrace časopisu:

Veronika Holická – pro členy JČMF

Předplatné a distribuci pro nečleny JČMF zajišťuje Myris Trade s. r. o.

Vedoucí redaktorka: Jana Příhonská

Dva dny s didaktikou matematiky 2019. Sborník příspěvků.

Editor:	Naďa Vondrová
Sazba:	Zuzana Kastnerová, systémem LaTeX
Počet stran:	113
Vydala:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, v roce 2019
Místo vydání:	Praha

Příspěvky nebyly recenzovány. Za obsah příspěvků odpovídají autoři.
Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7603-110-4