NÁMĚTY NA PODNĚTNÉ VYUČOVÁNÍ V MATEMATICE

Naďa Stehlíková
(editorka)

Univerzita Karlova v Praze,
Pedagogická fakulta 2007

Poděkování

Partneři projektu IIATM děkují Evropské Unii za finanční podporu projektu. Děkujeme dále Pavle Polechové a Ewě Swobodě za přečtení anglického textu a užitečné komentáře.
Na překladu z anglického originálu se podílely Pavla Polechová a Jitka Polechová.

Projekt IIATM č. 112218 CP-1-2003-1-COMENIUS-2.1 byl uskutečněn s podporou Evropského společenství v rámci programu Socrates–Comenius 2.1.

Obsah tohoto projektu neodráží stanoviska Evropské unie, ani nezakládá žádnou zodpovědnost na straně Evropské unie.

Partneři projektu IIATM
Univerzita Karlova v Praze, Česká republika
Univerzita v Kasselu, Německo
Aristotelova Univerzita v Soluni, Řecko
Univerzita v Derby, Velká Británie

Autoři knihy a přiloženého DVD
Milan Hejný, Darina Jirotková, Marie Kubínová, Naďa Stehlíková (Ed.)
Brigitte Spindeler, Bernd Wollring
Marianna Tzekaki, Giorgios Barbas
Graham Littler, David Benson

©Všechna práva zaručena. Copyright této publikace v celém rozsahu patří partnerům projektu IIATM a copyright jednotlivých kapitol patří jejich autorům.

Zvláštní podmínky: Každá část textu může být šířena pomocí kopií (kniha) a tisku (DVD) institucí nebo jednotlivcem jen pro akademické účely, pokud to nebude předmětem finančního zisku. Každá část musí být reprodukována v celém rozsahu s jasnou informací o titulu, autorství a zdroji. Videa a fotografie z DVD mohou být použity jen pro akademické účely.

Tisk: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007

Poprvé publikováno: Praha, Česká republika, 2007

Publikace včetně DVD existuje i v anglické verzi *Creative Teaching in Mathematics* (UK v Praze, PedF, 2006). Anglická a česká verze nejsou zcela totožné.

ISBN 978-80-7290-342-9

Obsah

Obsah 3
Předmluva 5
Osnova knihy 9

ÚVOD 11

Transmisivní a konstruktivistický přístup k vyučování 11
Interakce 12
Srovnání stylů vyučování a interakce 14
Proces nabývání znalostí 14
Konstruktivistická metoda vyučování 23
Aktivizující matematické úlohy 24
Komunikace 26
Závěr 30
Literatura 30

PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY 31

Úvod a struktura kapitoly, matematika a historie 31
Podkapitola 0: Pravidelné rozmístění bodů na kružnici 43
Podkapitola 1: Úlohy s obrázky 48
Podkapitola 2: Nákresy ciferníků 56
Podkapitola 3: Kreslení pravidelných mnohoúhelníků do daných ciferníků 60
Podkapitola 4: Obrazové a číselné vzory v cifernících 70
Podkapitola 5: Kola aut 79
Závěr a otázka k zamyšlení – otevřený problém 90
Literatura 92

3D GEOMETRIE – TĚLESA 95

Úvod 95
Přehledy kapitoly 98
Úlohy 103
Experimenty 138

POROZUMĚNÍ ČÍSLŮM U NEJMLADŠÍCH DĚTÍ 155

Úvod 155
Cíle kapitoly 157

Podkapitola 1: Rychlé hry 164
Podkapitola 2: Fáze nácviku, reflexe 169
Podkapitola 3: Tvorba 174
Výsledky použití v praxi 177
Obecné komentáře 193
Literatura 194

PRAVIDELNOSTI VEDOUCÍ K ALGEBŘE 197

Úvod 197
Struktura kapitoly a její použití 198
Cíle kapitoly 200
Úlohy 202
Experimenty 224
Přílohy 251

ZÁVISLOSTI A FUNKCE 257

Cíle kapitoly 258
Struktura kapitoly a jak s ní pracovat 260
Kontext vyučovacích experimentů 262
Podkapitola 1: Pozorování přírodních jevů 263
Podkapitola 2: Plánujeme výlet 280
Podkapitola 3: Úlohy ze života 287
Podkapitola 4: Opakování funkcí 306
Závěr 316
Literatura 316

REJSTŘÍK 318

PŘEDMLUVA

Tato publikace vznikla ve spolupráci čtyř vysokých škol ve čtyřech různých evropských zemích. Na její přípravě se významně podíleli také učitelé a žáci základních a středních škol z těchto zemí. Je určena učitelům z praxe pro přímé použití při práci ve třídě a ačkoli je založena na teoretických základech, předkládá čtenáři teorii pouze v nezbytně nutné míře.

Projekt IIATM (Využití inovativních přístupů k vyučování matematice) byl financován programem Socrates-Comenius 2.1 od podzimu 2003 do podzimu 2006. Projekt koordinovali pracovníci Katedry matematiky a didaktiky matematiky na Univerzitě Karlově v Praze, Pedagogické fakultě.

Projekt si kladl za cíl podporovat konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, měnit roli učitele ve třídě, motivovat žáky k převzetí zodpovědnosti za své učení, umožnit žákům porozumět matematickým pojmům a udělat pro ně matematiku smysluplnější a realističtější, a tak jim umožnit zažít radost z poznávání v matematice. Úlohový materiál vypracovaný řešiteli projektu byl testován na základních školách ve čtyřech účastnických zemích: Česká republika, Německo, Řecko, Velká Británie. Spolupracující učitelé se v jednotlivých zemích pravidelně setkávali na schůzkách, kdy diskutovali o významu úloh a o různých přístupech k řešení stejných úloh tak, aby zajistili, že konečná verze zadání úloh je použitelná ve školách Evropské unie. Doufáme, že tyto naše snahy přispějí k tomu, že žáci získají pozitivnější přístup k matematice.

Kniha a DVD mohou být použity učiteli na základních a středních školách a mnoho námětů poskytnou i učitelům vysokých škol vzdělávajících budoucí učitele matematiky. Doprovodné videozáznamy jsou na DVD. Školy mohou publikaci využívat také pro potřeby dalšího vzdělávání svých učitelů. Kniha zahrnuje příklady několika matematických témat vyučovaných strategiemi, které nejsou založeny na transmisivním předávání vědomostí.

Vysoké školy a řešitelé projektu:

- Univerzita Karlova v Praze, Česká republika;
  řešitelé: Milan Hejný, Darina Jirotková, Marie Kubínová, Naďa Stehlíková
- Univerzita v Kasselu, Německo;
  řešitelé: Brigitte Spindeler, Bernd Wollring
- Aristotelova Univerzita v Soluni, Řecko;
  řešitelé: Marianna Tzekaki, Giorgos Barbas
- Univerzita v Derby, Velká Británie;
  řešitelé: Graham Littler, David Benson

Tým řešitelů na každé univerzitě připravil část knihy týkající se vytváření podnětného prostředí pro vyučování určité oblasti matematiky. Tým řešitelů na Univerzitě

Karlově zpracoval části dvě. V knize jsou tak pokryty následující matematické oblasti:

3D geometrie – Tělesa * Závislosti a funkce * Pravidelné mnohoúhelníky * Chápání čísla u nejmladších dětí * Pravidelnosti vedoucí k algebře

Jednotlivé kapitoly byly připraveny pracovníky výše uvedených univerzit společně se spolupracujícími učiteli ze škol.

Česká republika

Základní škola Školní 900, Neratovice;
učitelky: Jitka Michnová, Irena Kročáková
Základní škola Bělohorská 174, Praha;
učitelka: Blanka Větrovcová
Základní škola Ostrovní 9, Praha;
učitelky: Klára Křenková, Jana Poláchová
Základní škola U Santošky, Praha;
učitel: Miroslav Hricz
Gymázium Elišky Krásnohorské, Praha;
učitelka: Zuzana Korcová
Křesťanské gymnázium Kozinova, Praha;
učitelka: Michaela Ulrychová
Gymnázium Jana Keplera, Praha;
učitelka: Klára Horká
Základní škola Campanus, Praha;
učitelka: Marie Kubínová

Německo

Schule am Jungfernkopf, Kassel;
učitelky: Angela Becker, Kathrin Scheuch
Schule Vollmarshausen, Lohfelden;
učitelka: Brigitte Bergmann

Řecko

Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη;
učitel: Petros Oikonomou
64ο Δημοτικό Σχολείο, Θεσσαλονίκη;
učitelka: Olga Kassoti
11ο Δημοτικό Σχολείο Αμπελοκήπων, Θεσσαλονίκη;
učitel: Michalis Matsoukalidis

Velká Británie

Bishop Lonsdale Primary School, Derby;
učitelky: Sara Bull, Clare Bladon
Ripley High School, Ripley, Derbyshire;
učitelky: Sue Orchard, Sheila Rollinson

Další školy, které týmu IIATM umožnily realizovat vyučovací experimenty a nebyly formálně součástí projektu:
Základní fakultní škola Uhelný trh, Praha,
Základní škola Chlupova, Praha.

Jsme velmi vděčni všem učitelům výše uvedených škol za jejich přínos pro projekt i jejich žákům za to, že vyzkoušeli mnoho úloh uvedených v této publikaci.

Úlohy jsou určeny žákům ve věku 5 – 15 let. Jsou rozděleny do pomyslných tří skupin navzájem se překrývajících úrovní:

- úroveň A, pro žáky ve věku 5 – 8 let
- úroveň B, pro žáky ve věku 7 – 12 let
- úroveň C, pro žáky ve věku 11 – 15 let

Popisujeme tyto úrovně určitým rozpětím věku, ale učitel, který bude s knihou pracovat, zná možnosti žáků své třídy nejlépe a může například zjistit, že pro jeho devítileté žáky jsou vhodnější úlohy ze skupiny A nebo C než úlohy ze skupiny B.

Podobně ne každá úloha může být označena jako vhodná pro skupinovou nebo individuální práci, toto necháváme na učiteli. Protože klademe velký důraz na konstruktivistický přístup k vyučování, může být většina úloh použita pro skupinovou práci, neboť věříme, že se žáci učí jeden od druhého, k čemuž napomáhá diskuze mezi žáky, která přirozeně vzniká při řešení úloh. Úlohy jsou určeny pro chlapce i dívky a řešit je mohou i žáci s různými specifickými potřebami. Úlohy byly vyzkoušeny mimo jiné i v multietnických třídách a díky povaze projektu i se žáky různých kultur, takže jsme si jistí, že mohou být využity v různých sociálních kontextech. Cílem není, aby se úlohy využily přesně tím způsobem, který je zde popsán. Předpokládáme, že je učitel upraví tak, aby vyhovovaly žákům určitých jazykových a matematických schopností.

Některé úlohy jsou označeny jako úroveň T. Ty jsou určeny učitelům, aby se hlouběji seznámili s matematickým pozadím nezbytným pro řešení určité sady úloh. Podobně jsou v jednotlivých kapitolách knihy obsaženy výzvy k tomu, aby učitel práci rozvinul, navrhl podobnou sadu úkolů apod.

Doporučujeme, aby si učitelé řešili úlohy nejdříve sami, než je zadají žákům. Jistě si přitom uvědomí různé způsoby, kterými je možno určitou úlohu řešit, a budou tak lépe připraveni na nečekané otázky žáků týkající se postupu řešení úlohy.

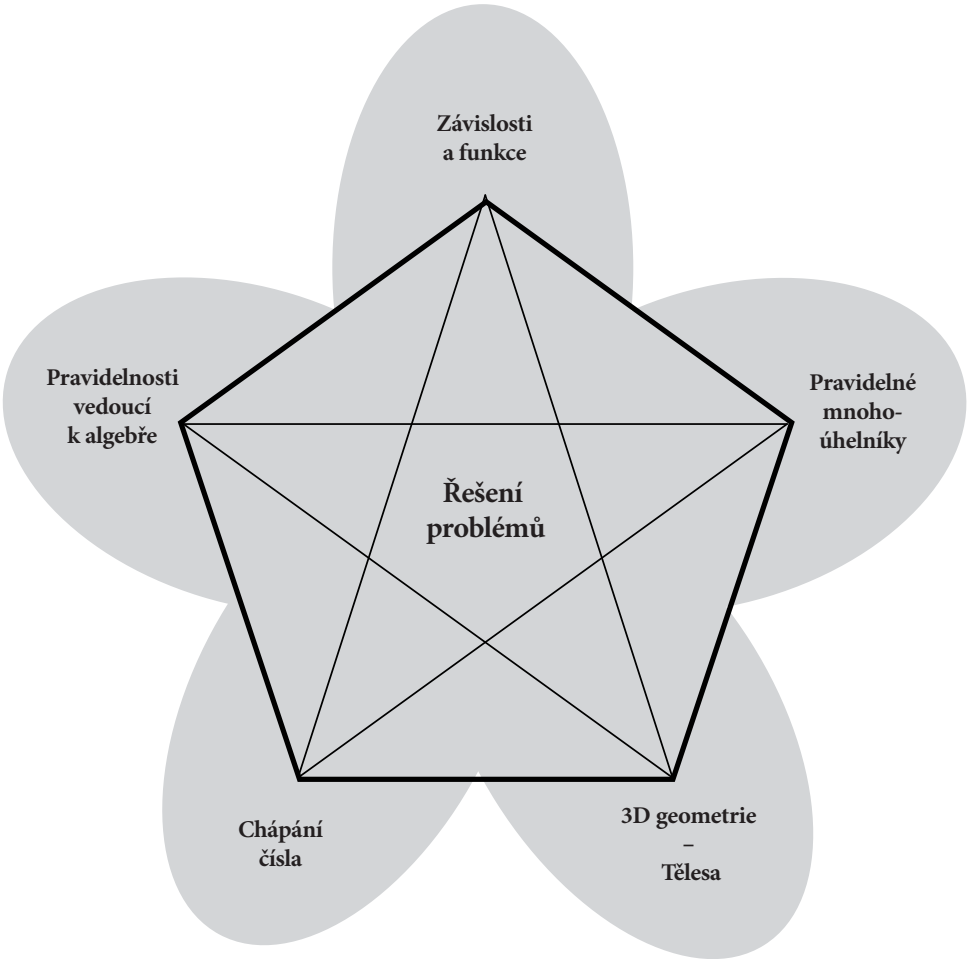
Celá publikace se skládá z knihy a DVD. Učitel může použít knihu nebo DVD samostatně, nebo obojí. Obsah knihy je také na DVD, které navíc obsahuje další materiály, obrázky a videa z vyučovacích experimentů ve školách. Pokud se čtenář podívá na určitou úlohu buď v knize, nebo na DVD, symboly mu ukážou, zda na DVD existuje nějaký doprovodný materiál. Obrázky, videa, další texty a pracovní listy umístěné jen na DVD jsou v knize uvedeny symbolem , , , v tomto pořadí. Jednotlivé kapitoly dále obsahují vnitřní hyperlinky odkazující na jinou část knihy.

Doufáme, že pro vás bude kniha a DVD užitečné.

OSNOVA

Všech pět kapitol je založeno na tvůrčím vzdělávacím přístupu k matematice, který sdílí jejich autoři.

Podobně jako Pythagorejci použijeme pětiúhelník pro symbolické zobrazení společného jádra a spojení mezi kapitolami.



„Řešení problémů" zahrnuje širokou škálu duševních činností, jako je například:

abstrakce, analýza, argumentace, artikulace, kontrola, komunikace, konstrukce, sběr dat, hodnocení, experimentování, vysvětlování, rozhodování, zevšeobecňování, uchopení, hypotéza, interpretace, vyšetřování, spojování, modelování, uspořádání, organizování, uvažování, zapisování, reprezentace, strukturace a restrukturace, ověřování atd.

ÚVOD

Milan Hejný, Graham Littler

Transmisivní a konstruktivistický přístup k vyučování

Transmisivním vyučováním rozumíme přenos (transfer) znalostí z hlavy učitele přímo do hlavy žáka. Takto může roli učitele převzít rodič, spolužák, instruktor nebo i televize, radio, počítač či knihy. Příjemce znalostí zpravidla při této formě vyučování získá ucelenou a strukturovanou jednotku poznání (kognice), otevřenou různým interpretacím jednotlivců. Koupíme-li novou pračku, která je sofistikovanější než ta, kterou jsme měli předtím, prostudujeme si návod k jejímu použití a k této informaci se stále vracíme, abychom se naučili pračku používat. Kdyby autor návodu viděl, že ho čteme více než dvakrát, jistě by si pomyslel, že jsme poněkud nechápaví, neboť by považoval návod za srozumitelně napsaný. Jedním z hlavních problémů procesu předávání znalostí je to, že někým dobře promyšlené pokyny a jejich interpretace neumožňují interpretace jiné. Příjemci si potřebují vytvořit svou představu o nové informaci a tu začlenit do struktury svých existujících znalostí. Informace nemůže být vzata z jedné mysli a pouze přenesena do jiné mysli. Musí být příjemcem rekonstruována.

Jádro procesu přijímání znalosti můžeme nahlédnout v poznámce žáka: „Pro seznámení se s procenty jsem musel vyřešit přes sto různých úloh.“ Při řešení různých úloh jsou pojmy vytvářeny postupně. Nejprve je základ pojmu velmi konkrétní a úzký, vztahuje se ke konkrétní situaci (modely budoucí znalosti jsou izolované). Postupně se základ pojmu stále více zobecňuje (modely mají obecnější význam). Nakonec si žák vytvoří abstraktní pojem – pojem procenta. Naneštěstí je proces přijímání nové informace žákem obvykle méně přímý. Žák nevyřeší stovky úloh, ale snaží se do své paměti novou informaci uložit. A často neřeší konkrétní úlohy myšlením, ale imitováním učitelovy metody.

Tato skutečnost ukazuje, že transmisivní způsob učení je destruktivní. Myšlenka vlastní konstrukce (vlastní) znalosti je přes 2 000 let stará. Socrates (v Platonově dialogu ‚Menon') pokládal svým partnerům dobře promyšlené otázky, aby se dostali k nové znalosti. Přirovnává se k porodní asistentce, která pomáhá přivést na svět děti. Pomáhal také rozvoji myšlenek, které se zrodily v hlavách jeho partnerů. Fenomenologie to popisuje jako vývoj nové znalosti z poznání nového stimulu. Tyto dva přístupy k budování znalostí nazýváme konstruktivistický a transmisivní (imitativní) přístup k vyučování.

Pedagogický styl, který je ve své podstatě stylem interaktivním, je obtížné změnit. Je uložen hluboko v naší mysli, v našich zkušenostech, pravidlech a v neposlední řadě v hodnotovém systému každého z nás. Rozhodneme-li se tento pedagogický styl změnit, znamená to, že musíme změnit značnou část podstaty osobnosti člověka. Rozhodneme-li se takovou změnu realizovat, bude to trvat několik generací, než účinně ovlivní učitelskou veřejnost. Musíme změnit mem pedagogického stylu.

Změníme-li mem, můžeme očekávat, že těžiště vyučovacích stylů se přesune od transmisivního konce spektra ke konci opačnému, konstruktivistickému. Udržování tradiční vyučovací strategie není společností vnímáno jako vážný problém, zejména rodiči ne. Komunita specialistů v didaktice se zabývá možnými změnami zejména v oblasti interakce.

Interakce

Stručně připomeneme hlavní myšlenku naší koncepce. Myšlenka, kterou budeme používat, pochází z výzkumu a vzdělávací filozofie V. Hejného. Abychom stručně myšlenku představili, popíšeme jednu jeho přednášku, která se uskutečnila v r. 1976. Zadal problém a ukázal metodiku práce. Poté vyzval posluchače ke spolupráci a nakonec definoval závěry způsobem, díky kterému všichni uvěřili, že je víceméně nalezli sami. Přirozeně to nebyla pravda. V. Hejný nám potom vyprávěl historku:

„Mám hlad. Otevírám lednici a zkouším najít něco k jídlu. Vidím polévku, párky, máslo, játrovou paštiku, mléko a sýr. Zkoumám vnitřek lednice a vidím uzenáče. Musím ho očichat. Už v té lednici nějakou dobu je. Uvažuji: 1. Polévku a párky by bylo nutno ohřát, ale na to jsem příliš líný. To tedy zamítám. 2. Chléb s máslem a paštika obsahují mnoho cholesterolu. 3. Uzenáč se musí sníst. Volím variantu č. 3."

Ve výše popsané situaci si můžeme všimnout pěti rozhodovacích stádií, které představují pět druhů duševních operací:

Evidování – jídla v lednici; *zkoumání* – jaká jídla je možno připravit; *vyhodnocení* – výhod a nevýhod každého jídla; *rozhodnutí* – která volba je nejlepší podle nějakého kritéria; *akce* – příprava jídla.

Těchto pěti operací použijeme při analýze volby učitelovy komunikační strategie. Existuje široké spektrum stylů učitelovy interakce, z nichž jsme zvolili dva extrémy – autoritativní a dialogický, abychom rámcově vysvětlili, jak ovlivňují kvalitu vyučování. Tyto dva extrémy jsou popsány v níže uvedené tabulce.

Strategie učitelova přístupu	Autoritativní styl	Dialogický styl
Evidence toho, co se děje	Předpojatá	Exploratorní
Zkoumání důvodů chování žáků	Povrchní nebo chybějící	Empatické
Vyhodnocení situace a chování žáka	Determinované	Komplexní
Rozhodnutí učitele o reakci	Definitivní	Podmíněné
Akce – učitelova reakce	Autoritativní	Dialogická

Obě tyto strategie jsou nazvány podle svého hlavního rysu. První styl představuje učitele, který při řešení problematických situací s žáky používá silně autoritativní styl. Učitel pojímá chování žáka tak, jak ho v první chvíli registruje, a snaží se rychle a objektivně reagovat. Druhý styl znamená, že se učitel snaží najít důvody žákova chování, snaží se mu porozumět.

Uvažujme nyní o každém stádiu obou stylů interakce učitele s jednotlivými žáky.

Autoritativní styl

První stádium: zaznamenání událostí je definováno jako předpojaté – učitel si předem něco o žáku myslí, má ho nějak zařazeného.

Druhé stádium – učitel jen povrchně zkoumá možné důvody žákovy reakce, případně o nich nepřemýšlí vůbec.

Třetí stádium – vyhodnocení situace a chování žáka je determinované, tj. učitel disponuje skupinou návrhů, jak na určitou žákovu akci reagovat. S touto skupinou návrhů je schopný okamžitě vyřešit většinu situací, s nimiž se setká.

Čtvrté stádium – reakce učitele na situaci je jednoznačná. O reakci se obvykle rozhoduje pod časovým tlakem a žák může být poškozen.

Páté stádium – učitelova akce je autoritativní. Učitel se ke svému rozhodnutí nevrací, natož aby připustil chybu na své straně.

Dialogický styl

První stádium je definováno jako „explorace", protože učitel vstupuje do dialogu s žákem, aby zjistil možné příčiny žákova problému či reakce.

Druhé stádium směřuje k hlubokému a empatickému zkoumání možných důvodů žákovy reakce. Důležitý je nejen aspekt empatie (schopnosti vidět situaci z žákova úhlu pohledu), ale i aspekt nestrannosti (nebrat možné agresivní nebo úskočné chování osobně). Někdy se učiteli nedaří vcítit se do žákovy situace a uvažování pro nedostatek zkušeností. Může pak uvažovat o konzultaci s někým, kdo takovou zkušenost má.

Třetí stádium je zaměřeno na komplexní povahu veškeré informace získané nejen z úhlu pohledu učitele, ale i na základě toho, jak situaci vyhodnocuje žák. Někdy je situace příliš obtížná na to, aby ji učitel vyhodnotil okamžitě a reagoval bez afektu.

Čtvrté stádium se týká podmíněnosti učitelova rozhodnutí. Učitel si je vědom toho, že může existovat další informace, která by mohla ovlivnit kvalitu jeho rozhodnutí.

Páté stádium spočívá ve hledání a uvažování odlišných názorů žáků. Žáci vědí, že mohou přinést nové názory, i když už se učitel rozhodl. Tyto zkušenosti se týkají situací, kdy se někteří žáci postaví za svého spolužáka proti trestu učitele, který vnímají jako nespravedlivý. To pomáhá ke vzájemnému upevnění vztahů.

Srovnání stylů vyučování a interakce

Styl vyučování definují dvě polarity – transmisivní styl a styl konstruktivistický, podobně jako existují právě uvedené dvě polarity pro interakci učitele s žáky, styl autoritativní a dialogický. Tyto polarity se k sobě určitým způsobem vztahují. Obecně lze říci, že konstruktivistický přístup vyžaduje dialogické interaktivní strategie a transmisivní přístup se často realizuje prostřednictvím autoritativní strategie. Setkali jsme se s učiteli, kteří vyučovali transmisivně, ale jejich zacházení s žáky bylo dialogické, ale ne s učiteli pracujícími konstruktivně s autoritativním vztahem k žákům. Nicméně takový případ nastat může.

Proces nabývání znalosti

Proces, jímž žák nabývá znalosti, je podrobně popsán v literatuře. Pro učitele je tento popis užitečný, pokud je na jedné straně dostatečně úplný a srozumitelný a na druhé straně umožňuje diagnostikovat kvalitu žákovy matematické znalosti a efektivně žákovi pomoci. V tomto smyslu je podstatné rozlišovat mezi znalostí formální a skutečnou.

Formální a skutečná znalost

Ilustrace 1. Žák sedmého ročníků byl požádán, aby zjistil obsah trojúhelníka nakresleného na papíru. Nevěděl si s tím rady. Učitel se ho zeptal, zda zná vzorec pro obsah trojúhelníka. Žák okamžitě napsal

$$P = \frac{z \cdot v}{2},$$

ale nevěděl, jak to použít. Učitel mu poradil, aby si jednu stranu vybral, zkonstruoval odpovídající výšku a změřil délku vybrané strany i výšky. Ani toto nepomohlo. Žák nevěděl, co je výška.

Tato ilustrace ukazuje, co označujeme jako formální znalost. Žák má vzorec (definici, tvrzení) v paměti, ale významu nerozumí. Opakem formální znalosti je skutečná znalost. O skutečné znalosti mluvíme tehdy, když žák chápe jednotlivé části poznatku, jejich vzájemné propojení a rozumí jim v různých kontextech.

Termíny formální a skutečná reprezentují koncové body škály. Realita je obvykle někde mezi těmito póly. Například pokud žák ve výše uvedené ilustraci ví, co je strana trojúhelníka, ale neví, co je výška, má určitou (částečnou) znalost situace.

Proces nabývání znalosti jako posloupnost pěti stádií

Náš model procesu tvorby poznatku je založen na stádiích. Začíná motivací a jeho jádrem jsou dva mentální zdvihy: první vede od konkrétní znalosti ke znalosti obecné, druhý od obecné znalosti ke znalosti abstraktní. Permanentní součástí procesu nabývání znalosti je krystalizace, tj. vložení nové znalosti do již existující matematické struktury.

Celý proces lze popsat následujícím schématem:

abstraktní znalost → krystalizace
↑ abstrakce
generický model
↑ generalizace
motivace → izolované modely

Ilustrace 2. Příběh pětileté Aničky ilustruje pět stádií procesu nabývání znalostí.

Anička ráda počítá se svou babičkou. Často na babičce loudí početní problémy.	Motivace
Během minulého měsíce počítala několikrát „2 a 3" panenek, bonbónů, jablek, knoflíků, židlí atd.	Izolované modely
Babička dala vnučce obtížný úkol: V misce jsou dvě jahody, v košíku jsou tři. Kolik jahod je to dohromady? Dívenka nemohla jahody vidět, protože miska i košík byly přikryty ubrousky.	Výzva k prvnímu mentálnímu zdvihu, ke generalizaci
Anička si pomohla prsty. Položila dva prsty na misku, tři prsty na košík a spočítala je. Řekla: „Pět jahod."	Objev generického modelu
Babička dívku pochválila a jahody odkryla.	Motivace pro druhý zdvih, abstrakci
Anička nadšeně zvolala: „Bude to pokaždé pět! Dvě a tři je vždycky pět."	Objev abstraktní znalosti
Dívčin objev ovlivní celou oblast její aritmetické znalosti. Urychlí další analogické objevy.	Krystalizace

Tato ilustrace poskytuje hlavní myšlenku procesu získávání znalosti. Člověk se nejprve setká s několika konkrétními příklady a porozumí jim. Pak nabude znalosti obecnější a abstraktnější.

Motivace

Motivaci chápeme jako napětí v mysli člověka díky rozdílu mezi existujícím a požadovaným stavem znalosti. Rozdíl vzniká díky rozporu mezi „Nevím" a „Chci

(potřebuji) vědět", nebo mezi „Toto neumím" a „Chci to umět", někdy díky jiným potřebám či rozporům.

Děti mají silnou potřebu porozumět svému okolí. Jsou zvídavé, ptají se na všechno, co vnímají. Stimulující prostředí zvídavost dětí zvyšuje. Škola však často stimulujícím prostředím není a může zvídavost dětí spíše potlačovat, místo aby ji podporovala.

Motivace dítěte poznat svět kolem sebe a jazyk dítěte je odlišný od motivace a jazyka dospělého. To často vede k nedorozumění mezi dospělým a dítětem nebo žákem. Je třeba poukázat na *dvě charakteristiky motivace dítěte.*

Motivace dítěte *se rychle mění*. Dítě se zajímá o psa, pak si hraje s kostkami, stavbu nedokončí a jde skládat „puzzle" atd. Rodiče dítěte se je snaží udržet u jedné činnosti do jejího dokončení, protože za smysl hry považují dosažení jejího cíle. Myslí si, že „taková chaotická a nesystematická práce" je nežádoucí. V tom se mýlí, protože smyslem hry dítěte není dosažení cíle hry, ale aktivita samotná, vedoucí k rozvoji různých schopností dítěte. Dítě zůstává u jedné činnosti tak dlouho, dokud jeho vnitřní motivace udržuje jeho pozornost. Jakmile toto vnitřní napětí zmizí, objeví se motivace k jiné činnosti.

Motivace dítěte je *naléhavá, urgentní.* Například dítě chce papír a nůžky a chce je teď, okamžitě. Nedostane-li, co potřebuje, zaměří svoji pozornost na něco jiného a původní potřeba zůstane nenaplněna. Dospělí mohou čekat na realizaci svých motivačních impulzů roky. Proto vnímají naléhavost dítěte jako umíněnost. Myslí si, že je-li splněn požadavek dítěte dostat hračku později, nic špatného se nemůže dít. To je opět omyl. Jakmile příslušná motivace pomine, dítě ztrácí o činnost zájem. Dospělý pak dítě kárá slovy „před chvílí jsi nutně potřebovala kočárek a teď se na něj ani nepodíváš". Podobnou naléhavost motivace lze pozorovat i u žáků. Žák, kterému se podařilo vyřešit obtížný problém, je nadšený a chce po učiteli problém další. Učitel je potěšen a slíbí, že mu další problémy přinese zítra. Nazítří už žák zájem o tyto problémy nemá.

Kvalita třídního klimatu v hodině matematiky může být hodnocena mírou vnitřní motivace žáků získávat znalosti. Na jednom konci škály jsou žáci, kteří mají matematiku rádi. Na druhém konci spektra jsou žáci, kteří se matematiky bojí a učí se ji pro známky nebo pro spokojenost učitele. Někdy se setkáváme s jinými motivacemi, jako například žákovo ušlechtilé úsilí udělat radost nemocné mamince.

Izolované modely

Modely nové znalosti se dostávají do mysli postupně a mají dlouhodobou perspektivu. Například pojem zlomku, záporného čísla, přímky, shodnosti nebo limity se rozvíjejí mnoho let na propedeutické úrovni. Pro komplexnější znalost může být stádium izolovaných modelů rozděleno do čtyř sub-stádií, jak je ukázáno níže.

Ilustrace 3. Učitelka ukazuje 6–7letým dětem odčítání 6 – 2 = 4, přičemž používá kostky. Umisťuje šest kostek na stůl, počítá je a odebírá dvě kostky zleva. Počítá

zbývající kostky. Řekne: „Šest kostek bez dvou kostek jsou čtyři kostky." Tato informace je různými dětmi vnímána různě. Podívejme se podrobněji na tři hypotetické děti.

Ben nedává pozor, hraje si s tužkou. Slyší sice, že učitelka něco říká, ale jeho myšlenky jsou jinde. Informace k jeho mysli nepronikne.

Bětka převezme informaci, ale nepřemýšlí o ní. Nerozumí, proč učitelka manipuluje s předměty na stole. Uloží výrok, který učitelka zdůraznila, do své paměti společně s vágní představou nějaké manipulace s předměty. Zpracuje ji pouze tehdy, pokud ji spojí s podobnou informací, která už v její mysli je.

Bořek rozumí všemu, co učitelka ukazuje. Pamatuje si, že když učitelka předváděla situaci „šest aut bez dvou aut", odebrala dvě auta zprava. Výsledek byl stejný, „čtyři auta". Chlapec pochopil, že výsledek počítání nezávisí na tom, zda byly předměty odebrány zprava nebo zleva, a předpokládá, že pravidlo se týká i jiných případů. V jeho paměti je umístěna myšlenka, která spojuje jeho předchozí zkušenost se zkušeností novou, a to vede k objevu – nové znalosti.

V Benově paměti se informace učitelky nezaznamenaly. Bětka přijala novou informaci a její verbální část se umístila v příslušné části její paměti. Bořek zpracoval informaci takto:

- *umístil ji* do odpovídající části své mysli k podobným paměťovým záznamům,
- *propojil ji* s některými myšlenkami, které již v jeho paměti existují, a navíc
- *obohatil ji objevem,* tj. konstrukcí nové znalosti.

Uvedená ilustrace nás vede k detailnější dekompozici stádia izolovaných modelů do čtyř *stádií*:

1. Objeví se první konkrétní zkušenost, první izolovaný model, což je zdroj nové znalosti.
2. Postupně jsou ‚sbírány' další modely, které jsou v tomto stádiu nepropojeny, jsou izolované.
3. Některé modely se začínají k sobě navzájem vztahovat a tvořit tak skupinu. Vyvíjí se pocit, že tyto modely jsou v určitém smyslu „stejné".
4. Je nalezen důvod „stejnosti", nebo lépe – korespondence mezi libovolnými dvěma modely. Tyto modely tvoří *společenství*.

Výše popsaná stádia nám mohou být užitečná, když zjišťujeme, jak se v žákově mysli postupně vyvíjí nová myšlenka. Často se stává, že se objeví nové stádium, zde neuvedené, a že některé ze zde uvedených stádií se naopak neobjeví. Například jedna dívenka v předškolním věku chápala myšlenku trojciferných čísel prostřednictvím peněz. Opakovaně se dívala na stokorunovou bankovku, dvacetikorunovou bankovku a korunu a přemístila je, čímž vytvořila 120 korun a 121 korun. Pokaždé, když položila peníze na stůl, řekla odpovídající číslo. Prostřednictvím této hry si zkonstruovala pojem trojciferného čísla za pomoci dvou modelů.

Toto stádium končí vytvořením společenství izolovaných modelů. V budoucnosti se do mysli žáka dostanou další izolované modely, které neovlivní vznik generického modelu. Pouze v něm rozliší více detailů. Když má například Anička z ilustrace 2 zjistit, kolikrát zazvonil zvonek, když ho nejprve uslyšela zazvonit dvakrát a potom třikrát, bude to pro ni nový izolovaný model, ale způsob počítání (na prstech) už je jí známý.

Generický model

Ve schématu procesu získávání znalosti je generický model umístěn nad izolovanými modely, čímž je demonstrována jeho větší univerzálnost. Generický model je vytvořen ze společenství izolovaných modelů a má k tomuto společenství dvě základní vazby:

1) označuje jak jádro tohoto společenství, tak i jádro vztahů mezi jednotlivými modely a
2) je *příkladem* nebo *reprezentantem* všech svých izolovaných modelů.

První vazba vyznačuje konstrukci generického modelu, druhá ukazuje způsob, jak model funguje.

Ilustrace 4. Pětiletá Zdeňka chce, aby jí babička koupila nanuka. Babička souhlasí: „Ano, ale koupíme nanuky každému. Kolik jich koupíme?" Zdeňka odpovídá: „Pro mě, pro bratra, maminku, dědečka, babičku a tátu." Počítá na prstech a říká: „Šest." V obchodě pak vybírá nanuky z mrazícího boxu, ale potřebný počet nezíská počítáním. Přiřazuje nanuky jednotlivým členům rodiny: „Já, můj bratr, ..." Když se jí babička zeptá, kolik nanuků vložila do košíku, odpoví „šest", ale až poté, co je nahlas spočítá.

O měsíc později pomáhá Zdeňka své mamince péct vánoční cukroví. Na prvním pekáči, který se chladí na balkóně, je pět kousků cukroví, které udělala a spočítala Zdeňka. Maminka zasouvá do trouby druhý pekáč, na němž je sedm Zdenčiných kousků cukroví, a ptá se, na kterém pekáči je kousků víc. Po určitém váhání Zdeňka odpoví: „Řeknu ti to, až budou upečené."

Ilustrace ukazuje, že proces vzniku generického modelu je složitý a dlouhodobý. V tomto případě je generickým modelem pro zjištění počtu použití Zdenčiných prstů. V první ukázce Zdeňka zjistila prostřednictvím přiřazování jmen k prstům, že rodina má 6 členů, ale tuto znalost při nákupu nepoužila. Ve druhé historce měla porovnat 5 kousků cukroví a 7 kousků cukroví. Přesto, že si mohla situaci modelovat na prstech, rozhodla se pro přímé porovnání. Je zřejmé, že generický model „prsty" se v mysli dívky ještě plně nerozvinul.

Objev generického modelu je obvykle doprovázen pocitem radosti. Můžeme to pozorovat v ilustraci 2, kde Anička objevila, že „dva předměty a tři předměty je vždycky pět předmětů".

Někdy se generickým modelem stane skupina izolovaných modelů. Společenství všech izolovaných modelů je rozdělené na třídy; každou z nich reprezentuje jeden

izolovaný model. Soubor všech reprezentantů je generickým modelem celého společenství.

Ilustrace 5. Pěkný příklad generického modelování lze najít v učebnici pro řešení rovnic islámského matematika Muhammada ibn Musa-al-Khwarizmiho, napsané v devátém století. V učebnici jsou uvažovány následující tři kvadratické rovnice:

$$x^2 + 10x = 39, \qquad x^2 + 21 = 10x, \qquad x^2 = 3x + 4. \qquad (*)$$

Záporná čísla v té době nebyla známá, proto rovnice $x^2 + px + q = 0$, pro $p, q > 0$, neměla žádný kořen. Řešit kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ bylo možné, jen když nejméně jedno z čísel p, q bylo záporné. Existují tři takové případy; jsou reprezentovány rovnicemi (*). Řešení každé rovnice (*) je příkladem pro danou třídu a celá triáda řešení je generickým modelem procesu řešení kvadratické rovnice. Matematik schopný vyřešit rovnice (*) byl schopen vyřešit jakoukoli kvadratickou rovnici. Postupoval na základě analogie, tj. využil podobnosti procesu řešení dané rovnice a odpovídající typické rovnice z (*).

Generický model může mít formu návodu, procedury, vzorce, diagramu, grafu, slova, značky, nápovědy,…

Abstraktní znalost

Schéma procesu získávání znalosti má tři patra. V přízemí je motivace a izolované modely, v prvním patře generické modely, a ve druhém, nejvyšším patře je abstraktní znalost a krystalizace.

Zdolání těchto tří pater vypadá následovně:

izolované modely → generické modely → abstraktní znalost.

Ilustrace 6. David, 7. ročník, řešil následující obtížný problém: Najdi součet prvních sta lichých čísel. David si vzal kalkulačku a počítal: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, $11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 75$. Pak sečetl $25 + 75 = 100$ a začal o tom přemýšlet. Po chvíli pokračoval v předchozí strategii. Zjistil, že $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$. Přerušil počítání, po hodině se k problému vrátil a začal jinak. Napsal $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$. Pak opsal $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ a připojil $= 5 \times 5$. Vzrušeně napsal: „Součet prvních 100 lichých čísel je $100 \times 100 = 10\,000$." (Vynechal písmeno „u" ve slově součet.)

Když byl David experimentátorem dotázán, napsal po několika pokusech výsledek v jazyce písmen:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2 \qquad (**)$$

O měsíc později řešil David podobný problém: Zjistěte součet prvních 100 sudých čísel. Napsal $2 + 4 = 6$, $2 + 4 + 6 = 12$, $2 + 4 + 6 + 8 = 20$, $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$. Pak to přeškrtl a začal vytvářet tabulku: nejprve vyplnil prvních sedm sloupců, pak další dva sloupce a nakonec poslední sloupec.

1 +	3 +	5 +	7 +	9 =	25	5 × 5	6 × 6	7 × 7	100 × 100
1	1	1	1	1		5	6	7	100
						30	42	56	10 100

Davidovo řešení ukazuje individuální stádia získávání znalosti. V prvním problému jsou konkrétní částečné výsledky izolovanými modely; nová strategie řešení vedla k objevu pravidelnosti, tj. ke konstrukci generického modelu; výzva experimentátora vedla k abstraktnímu porozumění znalosti. Druhý problém začíná David řešit stejným postupem, ale pak poznává, že může využít předchozí znalosti, protože každé sudé číslo může být napsáno jako liché číslo plus jedna. Schopnost použít výsledek získaný v odlišném kontextu ukazuje, že tato znalost (**) je na abstraktní úrovni.

Krystalizace

Po svém vstupu do kognitivní struktury začíná nová znalost hledat vztahy s již existující znalostí. Když objeví disharmonii, vzniká potřeba odstranit ji přizpůsobením nové znalosti znalosti předchozí a zároveň pozměnit předchozí znalost tak, aby byla v souladu s novou znalostí. Například nová abstraktní znalost 2 + 3 = 5 ovlivní jiné, již existující souvislosti týkající se součtu a začne je zbavovat závislosti na světu věcí: znalost 4 objekty + 2 objekty = 6 objektů změní na abstraktní znalost 4 + 2 = 6. A dojde k řadě dalších, méně viditelných změn.

Výše uvedený popis krystalizace je nepřesný ve dvou aspektech: za prvé naznačuje, že krystalizace začíná teprve po konstrukci abstraktní znalosti. Dále předpokládá, že to jediné, co je přidáno ke kognitivní struktuře a co se účastní procesu krystalizace, je abstraktní znalost. Ani jedno není pravda. Každý nový myšlenkový krok, který hraje roli ve vytváření nové abstraktní znalosti, se okamžitě stává součástí celé kognitivní struktury a hraje v krystalizaci svou roli.

Žádná znalost nebo součást znalosti, kterou žák konstruuje, nemá konečnou formu. Každá je naopak čištěna, měněna, rozšiřována,... po celou dobu. Tento permanentní vývoj znalosti je typickým znakem kvality znalosti, která není znalostí formální.

Krystalizaci zásadním způsobem napomáhá vzájemná diskuze mezi žáky. Čím hlubší je znalost, tím větší je potřeba takové diskuze. Obvykle není diskuze ukončena a totéž téma je diskutováno opakovaně, kdykoli žák objeví novou myšlenku. V našem experimentálním vyučování byl například problém Achilla a želvy otevřen v pátém ročníku a diskuze nebyla ukončena do ročníku osmého. Následující ilustrace ukazuje diskuzi o pojmu „mínus“ ve třídě.

Ilustrace 7. Eliška je chytrý a zvědavý prvňáček. Slyšela, jak se tatínek ptá maminky, kolik má u sebe peněz. Maminka odpověděla: „Mínus dvě stě. Měla jsem stovku, ale musela jsem zaplatit tři sta za telefon.” Elišku zaujalo maminčino „mínus”. Slyšela slovo mínus v souvislosti s teploměrem, ve výtahu a možná ještě někde jinde. V této chvíli se všechny tři významy slova mínus spojily a dívka zvolala: „Ty nemáš dvě stě korun.” Byla rozradostněná, skákala a dala mámě pusu. Pochopila mínus jako „ne”.

Eliščina matka, učitelka, vyprávěla tuto příhodu ve své páté třídě. Žákům se Eliščina myšlenka líbila a někteří ji začali rozvíjet dál: auto jedoucí zápornou rychlostí couvá; ‚vyhráli jsme zápas o mínus dvě branky' znamená, že jsme o dvě branky prohráli; ‚ztratila jsem mínus 100 korun' znamená, že jsem 100 korun našla atd. Tyto výroky byly žáky zapsány na vyhrazeném místě nástěnky označeném „mínus = ne".

Později jeden z žáků objevil, že tyto výroky vesměs nejsou pravdivé, protože nepoužívají správně slovo „ne". Konec konců – jít zpátky neznamená nejít, prohrát neznamená nevyhrát, najít není neztratit. Na žádost žáka učitel připojil na nástěnku slovo ‚obráceně'. Po několikatýdenní diskuzi se třída shodla na čtyřech myšlenkách:

1. Existují případy, ve kterých není vhodné používat „mínus" ve smyslu „ne" – např. „mínus modrý" je nesmysl, ale „ne modrý" je jakákoli jiná barva než modrá. Nebo „mínus dopředu" znamená „dozadu", ale „ne dopředu" může například znamenat „vlevo".
2. Mínus má smysl používat, jen pokud něco měříme.
3. Měření může být spojité nebo diskrétní. Žáci používali slova „silnice" resp. „schody" jako generické modely pro spojité resp. diskrétní prostředí.
4. Dívám-li se na sever, je sever pro mě plus a jih je mínus. Když se otočím, obojí se změní. Podobně když jdu po schodech nahoru, je to plus, jdu-li dolů, je to mínus.

Speciální pozornost by měla být věnována krystalizaci, která vede k restrukturalizaci části kognitivní struktury. Příkladem je objev záporných čísel, který nejen rozšiřuje strukturu, ale mění i některé situace. V počátcích chápání čísel nemá například výraz 3 – 5 + 4 žádný smysl, protože žáci by se snažili provádět operace tak, jak jsou napsány. Pro některé žáky je počátek výrazu příliš velkou překážkou pro jakýkoli pokus o nějaké pokračování. Ale stalo se nám, že nám šestileté děti řekly „3 není dost velké na to, abychom od něj odečetli 5, ale když dřív přičtu 4, mohu pak 5 odečíst". To může být počátek izolovaných modelů vedoucích k chápání asociativního zákona.

Po objevu záporných čísel se stanou podobné výrazy legitimními. Podobně se legitimním stane výraz $\sqrt{-1}$ po zavedení komplexních čísel. Přechod od reálných čísel ke komplexním reprezentuje hlubokou restrukturalizaci pojmu čísla.

Tím je nyní popis modelu procesu získávání znalostí u konce. V závěru se zmíníme o jednom dalším stádiu získávání znalosti. Nepatří do procesu získávání znalosti, ale je často ve vyučovacím procesu zdůrazňováno a chybně považováno za získávání znalosti. Jde o automatizaci znalosti.

Automatizace

Učitelé považují často za hlavní cíl vyučování matematice v 1. – 4. ročníku ZŠ zautomatizování základních vazeb a spojů mezi čísly pro sčítání, odčítání, násobení a dělení. Chtějí, aby jejich žáci počítali „jako na drátku ". Žák, který na otázku „Kolik je pět

krát čtyři" okamžitě odpoví „dvacet", již automaticky spojil $5 \times 4 = 20$. Znamená to, že spoj je uložen v dlouhodobé paměti a snadno se vybaví. Otázka „Kolik je pět krát čtyři" je v žákově mysli *signálem*, který okamžitě přivodí správnou odpověď „dvacet". Odpověď je rychlá a sotva spotřebuje nějakou intelektuální energii.

Automatické spoje usnadňují práci, protože uvolňují intelektuální energii pro náročnější duševní operace. Řidič řídící automaticky může mluvit se svým spolujezdcem, protože v normální situaci potřebuje pro řízení vozu jen málo duševní energie. V matematice například automatizace násobilky žákovi umožní soustředit se na organizaci násobení při násobení víceciferných čísel, protože všechny základní spoje zná. Na druhé straně tyto spoje nevypovídají nic o kvalitě vyslovené znalosti. Může být silně formální. Fakt, že žák odpoví rychle, správně a s jistotou, neznamená, že jeho odpověď je založena na odpovídající představě. Například žák „ví", že $5 \times 4 = 20$, ale nedokáže odpovědět, kolik musí zaplatit za 5 lízátek, z nichž každé stojí 4 koruny. Jeho znalost je zatížena formalismem, což je charakteristický rys formální znalosti. Na druhé straně jiný žák, který nedokáže odpovědět tak rychle, může bez problémů vyřešit slovní úlohu. Metaforicky vyjádřeno, automatizace může být agentem, který infikuje mysl žáka virem formalismu.

Důsledky popsaného modelu procesu nabývání znalostí budou nyní použity pro vyšetřování cílů a metod vyučování matematice.

Co vyplývá z předchozích úvah

Zaprvé, model procesu nabývání znalostí jasně ukazuje na jevy způsobující nemoc formalismu. Formální znalost vzniká, pokud se nerealizuje série výše popsaných stádií. Pokud jsou stádia izolovaných a generických modelů přeskočena nebo v procesu vyučování zkrácena a žákům je předkládána hotová abstraktní znalost, je výsledkem mechanické osvojení znalosti.

Tato základní teze ukazuje, jak diagnostikovat a léčit formalismus:
Diagnóza formalismu spočívá ve vyhodnocení toho, do jaké míry jsou znalosti v mysli žáka založeny na izolovaných a do jaké míry na generických modelech.

Ilustrace 8. Nyní budeme ilustrovat případ, kdy v mysli žáka neexistuje žádný model. Filip, žák sedmého ročníku, rychle a přesně odříkal větu sus o shodnosti dvou trojúhelníků. Byl požádán, aby zjistil, zda mezi pěti trojúhelníky nakreslenými na tabuli existuje nějaká dvojice shodných trojúhelníků (u každého trojúhelníka byly vyznačeny délky všech tří stran a velikost jednoho úhlu). Nevěděl, co má dělat. Učitel ho požádal, aby nakreslil dva shodné trojúhelníky sám. Filip nakreslil jeden rovnoramenný trojúhelník a po chvíli dodal, že má dvě shodné strany. Filipova interpretace slova „shodný" byla spojena s izolovaným modelem shody dvou stran rovnoramenného trojúhelníka.

Ilustrace 9. Žák má jeden generický model znalosti. Budou ukázány dva příklady.

a) Žáci 8. ročníku byli požádáni, aby zjistili délku strany c pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona byla netradičně označena jako $a = 7$, druhá strana jako $b = 4$.

Z 29 žáků šest napsalo: $c = \sqrt{65}$. Pro ně byla Pythagorova věta spojena s výrazem $c^2 = a^2 + b^2$ nikoli s porozuměním podstatě věty.

b) Žáci 3. ročníku řešili následující problém: Když jsem ztratil 20 korun, zbylo mi 130 korun. Kolik korun jsem měl před ztrátou? Několik žáků odpovědělo, že 110. Příčinou chyby byl signál „ztratil jsem", který pro ně znamenal, že mají odečítat. Tito žáci si nevytvořili model situace.

Ilustrace 10. Žák má omezený soubor modelů dané znalosti. Ukážeme tři příklady.

a) Součin dvou následujících celých čísel je 12. Jaká jsou to čísla? Problém řešilo dvacet tři patnáctiletých žáků. Pouze dva z nich objevili také řešení –4, –3. Pro zbytek celá čísla znamenala pouze přirozená čísla.

b) Gita, žákyně sedmého ročníku, měla ve svém testu tento chybný výpočet: 2/9 + 4/15 = 6/24 = 3/12 = 1/4. Pět hodin po napsání testu mluvil s Gitou experimentátor (ne učitel), kterého znala. Nejprve Gita správně s pomocí „kruhového modelu" spočítala 1/2 + 1/3. Pak byla požádána, aby chybný výpočet v testu opravila. Řekla, že neumí rozdělit kruh na 15 dílů.

c) Sestrojte trojúhelník s obsahem 1 cm^2, jehož každá strana je delší než 5 cm. Tento problém byl předložen žákům sedmého ročníku. Hana přišla k tabuli, aby ukázala, že takový trojúhelník neexistuje. Načrtla rovnostranný trojúhelník se stranami 5 cm dlouhými a řekla, že jeho obsah bude jistě větší než 1 cm^2. „Když zvětšíme jednu z jeho stran, zvětší se i obsah." Třída s tímto zdůvodněním souhlasila. Učitel se tázavě podíval a požádal žáky, aby se nad tím zamysleli. Potom mluvili o různých věcech. Po nějaké době Honza vykřikl a běžel k tabuli, aby nakreslil „nízký a dlouhý rovnoramenný trojúhelník".

Konstruktivistická metoda vyučování

Z výše uvedených poznámek již čtenář jistě poznal, že tato publikace podporuje konstruktivistickou metodu vyučování. V ní učitel hraje roli *facilitátora* učení žáků, což znamená, že žáci musejí přebírat více zodpovědnosti za své učení. Učitel proto poskytuje žákům zajímavé úlohy, které jsou pro ně výzvou. Žáci tyto úlohy zkoumají – hledají odpovědi na otázky úlohy, ale také na otázky, které při práci na úloze teprve vzniknou. Žáci používají dříve získané znalosti a zkušenosti z běžného života, čímž dojdou k novým znalostem a k propojení mezi jednotlivými znalostmi uloženými v jejich paměti. Když experimentují, aby zjistili, zda jejich výsledky podporují nebo vyvracejí jejich názory, tvoří hypotézy či dohady. K řešení některých problémů musejí používat svou schopnost úsudku a volit vhodné strategie. Jinými slovy, při konstruktivistickém přístupu nepostupují při řešení problému podle nějakého algoritmu. Při používání této vyučovací metody by se učiteli mělo běžně stávat, že na otázku položenou žákem nepodá odpověď, ale reaguje jinou otázkou, která žákovi napoví nebo ho nasměruje. Může to být formou 'Co když …..?' nebo 'Zkusil jsi ….?'.

Učitelé se nemohou pustit do této vyučovací metody, aniž by s ní sami měli zkušenost (svého učení). Potřebují emocionálně pocítit výhody této metodologie

a na vlastní kůži zažít radost objevu nové znalosti nebo porozumění znalosti dříve přijaté. Jeden z rysů tohoto způsobu vyučování, které ho odlišují od jiných, spočívá v tom, že učitel nemůže plně naplánovat (předjímat), co se v hodině stane. Hodina, která je naplánována příliš detailně, je kontraproduktivní, protože nutí učitele, aby sledoval svůj plán, místo aby se zabýval nápady, s nimiž žáci přicházejí. Při používání konstruktivistického paradigmatu by si učitel měl *před zadáním každou úlohu zpracovat* tak, aby se přesvědčil, že je připraven reagovat i na neobvyklou otázku žáka, který přistupuje k úloze jinak než on sám.

Aktivizující matematické úlohy

Jednou z nejdůležitějších charakteristik úlohy je žáky motivovat, vyzývat je k akci.

Úlohy by měly žáky povzbuzovat k řešení problémů, tvorbě hypotéz, rozhodování, rozvíjení strategie hry, stavění ze stavebnic atd. Zvolené situace by měly podporovat aktivní zapojení žáků, pomáhat jim porozumět užitečnosti požadované znalosti a dodat jim motivaci investovat čas a úsilí najít řešení.

Jinou specifickou charakteristikou aktivizující úlohy je to, že by měla zprostředkovat skutečné propojení s tou oblastí matematiky, na níž chce učitel žáky nasměrovat. Ve vyučování matematice není neobvyklé, že ačkoli jsou koncipovány a navrženy zajímavé úlohy, žáci se jimi zabývají, aniž by rozvíjeli obecnější matematické pojmy. Jedním ze záměrů této práce je vybrat v každém modulu úlohy, které navozují rozvoj určitých matematických myšlenek. Jasněji asi přiblíží tento záměr ilustrace.

V kapitole Pravidelnosti vedoucí k algebře je navržena následující úloha:

„Sestavte tabulku údajů pro délku a šířku pravoúhelníků o obvodu 20 jednotek. Určete vztah mezi parametry. Vyneste hodnoty do grafu. Popište graf. Nyní vypočítejte obsahy různých pravoúhelníků a vyjádřete obsah pravoúhelníku v závislosti například na jeho délce. Popište vzniklý graf. S použitím znalosti algebry určete funkci, která popisuje zákonitost zobrazenou grafem."

Při práci s touto úlohou mají žáci příležitost k proniknutí do různých oblastí matematiky. Otázky typu „Máme použít pouze celočíselné délky stran, nebo můžeme pracovat s jakýmikoliv čísly?" je propojují s oblastí čísel a s diskrétními či spojitými proměnnými. Otázky jako „Může být jako odpověď uznána (také) šířka 0 jednotek a délka 10 jednotek?" nebo „Je čtverec 5 jednotek krát 5 jednotek pravoúhelníkem?" je vedou k úvahám o geometrických pojmech a interpretaci otázky. Pokyn „Určete vztah" sleduje, zda mohou žáci identifikovat zákonitost, jíž podléhají zaznamenané hodnoty. Jiné problémy jako „Obsahuje graf pouze vynesené body, nebo část lomené čáry, která je spojuje, nebo čáru i body?" nebo „Jak spojit graf se vztahem?" nebo „Který pravoúhelník má maximální obsah?" vyvolají otázky týkající se vztahů a funkcí.

Mnoho úloh v této knize vyžaduje od jejich řešitelů použití nějakých materiálů k reprezentaci dané matematické situace. Reprezentace jsou základem každého matematického rozvoje a výzkum ukazuje, že externí a interní (myšlenkové) re-

prezentace jsou vzájemně propojeny. Materiály, s nimiž je možné manipulovat, kresby, pracovní prostředí atd. pomáhají žákům rozvíjet matematické myšlení, podporují reflexe žáků a jejich uvažování, pomáhají jim „vizualizovat" základní charakteristiky matematických situací. Pomáhají také propojit společné matematické prvky objevující se v různých situacích. Různé způsoby reprezentace myšlenek často vedou k vývoji různých strategií.

V řadě navržených úloh žáci pronikají do matematických myšlenek prací s konkrétním nebo zástupným materiálem. Volba materiálu je tedy významná a vazba mezi konkrétním a symbolickým byla jedním ze záměrů této práce. Například široká paleta reprezentací použitých pro počty prvků, různé materiály navržené pro sítě krychlí, prostředí „ciferníků" pro práci s mnohoúhelníky jsou navrženy tak, aby rozvíjely vhodné systémy reprezentace pro příslušné matematické myšlenky a pojmy.

Vytváření hypotéz

Vytváření hypotéz je jednou ze základních činností, které odlišují konstruktivistický přístup k učení od přístupu tradičního. Tradiční přístup poskytuje pouze hotové a správné myšlenkové produkty a nevyžaduje od žáka, aby nezávisle vytvářel nové pojmy a objevoval vztahy a pravidla zkoumáním nějakých situací. Konstruktivistické vyučování velmi silně podporuje rozvoj této schopnosti, což je několikrát diskutováno níže. Je pochopitelné, že podobně jako u fylogeneze bývají v ontogenezi hypotézy spíše vyvraceny než potvrzovány. Zde hraje důležitou roli klima třídy. Žáci musí pociťovat, že vytváření hypotéz je důležitou součástí matematického zkoumání, a poznávat, jaké údaje musí být získávány k zamítnutí či ověřování jejich hypotézy. Důležitý vedlejší výsledek vytváření hypotéz je žákova potřeba vyjádřit svou hypotézu tak jasně, aby ti, s nimiž spolupracují, plně chápali důsledky výroku. Z didaktického hlediska je jakákoli hypotéza pozitivním znakem; kvalita práce učitele může být do určité míry měřena počtem hypotéz formulovaných jeho žáky při řešení problémů.

Odvozování

Odvozování je speciálním typem duševního procesu, prostřednictvím kterého přesvědčení o jedné sadě domněnek ovlivní přesvědčení o druhé (Rips, str. 119). Cílem této činnosti je vyloučit možné pochyby (Descartes – dubito ergo cogito). Například když žák nevidí, že dvě krychlová tělesa popsaná různými plány jsou shodná, je potřeba mu nějak pomoci, aby to viděl. Jestliže mu kamarád řekne „Když sestavíš těleso a podíváš se na ně odtud..." a žák náhle shodu uvidí, pak je tento kognitivní děj zároveň dějem odvozování. V matematice je odvozování chápáno jako totéž co dokazování. Piaget ukázal, že formální dokazování může být jen vzácně rozvíjeno u žáků mladších než 11 let. Nicméně potřeba argumentovat či zkušenost s pochybnostmi rozvíjena být může. Nejefektivnější je to tehdy, když žák, který je přesvědčen o platnosti nějakého výroku, náhle pozná, že se mýlil. Je velice důležité, aby toto proniknutí do podstaty věci nebylo žákovi někým zprostředkováno, ale aby k objevu došel žák sám, třeba v diskuzi se spolužáky.

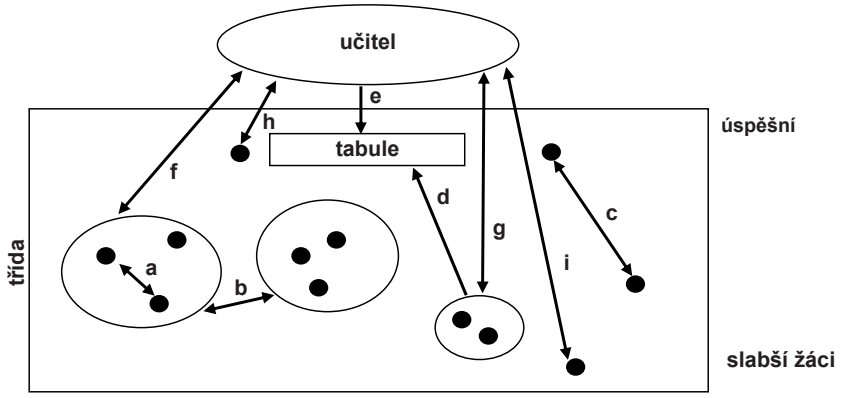
Matematické pojmy mají jasné hranice. Například pojem čtverce je přesně definován. Můžeme rozhodnout, zda jakýkoli dvourozměrný objekt v geometrickém světě je, nebo není čtverec. Didaktika matematiky jen zřídka používá precizně definované termíny. Například vyjádření „má dobrou schopnost argumentovat“ může být různými učiteli chápáno různě. Někteří mohou říci, že určitý žák tuto schopnost má, někteří řeknou, že tentýž žák ji nemá. Mlhavost většiny didaktických termínů není důsledkem naší nedostatečné znalosti, ale tkví v jádru samotného oboru. Úsilí definovat termín přesně vede nevyhnutelně k určitému zkreslení skutečnosti. Příklad tohoto jevu můžeme najít v zákoně. Je nutné určit věk, v němž se člověk stává dospělým. Ve většině zemí je stanoven na 18 let, tedy jakákoli osoba starší osmnácti let je podle zákona dospělá a podle zákona jakákoli osoba mladší osmnácti let dospělá není. Je jasné, že to neodpovídá skutečnosti.

Komunikace

a) Ústní komunikace

Pří konstruktivistickém vyučování může ve třídě dojít ke komunikaci v extrémně širokém rozsahu jazyků. Bylo by je možné kategorizovat, ale to by našim záměrům nepomohlo. Zobrazením dějů ve třídě vysvětlíme, jak této komunikaci rozumíme.

Tečky v diagramu dole označují žáky. Někteří jsou seskupeni v kruzích, přičemž tečky vně kruhů symbolizují žáky, kteří se ve třídě jeví buď jako nadprůměrní, nebo jako podprůměrní. Jednosměrná šipka označuje jednostrannou komunikaci, obousměrná šipka označuje komunikaci oboustrannou. Písmena připojená k šipkám vyznačují typ komunikace/interakce:



a) Uvnitř skupiny. Jazyk je často neformální, je to jazyk spolupráce. Často jsou pro matematické termíny používány běžné, každodenní výrazy. Vznikne-li ve skupině spor, je řešen v kooperativním klimatu, jinak by byla skupina rozložena.

b) Mezi skupinami. Zde je jazyk poněkud formálnější, protože diskuze může mít polemičtější charakter. Ve skupině existuje podpora pro všechny strany sporu.
c) Mezi slabšími žáky a žáky, kteří se v dané problematice dobře orientují. Žák, který problematice a úloze rozumí, chce pomoci slabšímu žákovi, z čehož získávají oba. Slabší žák získává znalost, vyučující žák realizuje své sociální ambice a zároveň získává vhled do své vlastní znalosti. (Jak řekl Seneca (Dopisy Luciliovi I, 7, 8.) ‚docendo discimus' – vyučováním se učíme.)
d) Od skupiny ke třídě. Skupina zbytku třídy vysvětluje, co zjistila, přičemž používá poněkud formálnější jazyk, který je v co možná nejlepším souladu s jazykem učitele.
e) Od učitele ke třídě. Učitel poskytuje informace, nasměrovává žáky a předkládá jim problémy k řešení. Na podnět učitele může reagovat jednotlivý žák, nebo tento podnět může nastartovat diskuzi, kterou učitel moderuje. V této fázi je jazyk učitele formální a může rozšířit matematický slovník žáka (např. místo výrazu „obrazec o čtyřech stranách" je použit výraz čtyřúhelník).
f) Mezi učitelem a skupinou. Není-li skupinou osloven, působí učitel jako pozorovatel. Je-li osloven, snaží se nedávat přímou matematickou odpověď; v opačném případě by postupoval proti smyslu konstruktivistického principu.
g) Mezi učitelem a jedním žákem. U nematematických otázek je cílem učitele podporovat skupinovou dynamiku. Na matematickou otázku neodpovídá učitel jinak než položením jiné otázky, a to formálním jazykem.
h) Mezi učitelem a žákem, který se v dané problematice dobře orientuje. Tato komunikace je obvykle iniciována žákem, protože chce například rozšířit zadání, dostat nové zadání nebo chce vysvětlit určitou metodu řešení problému, na kterou je pyšný. Jazyk této komunikace je na vysoké úrovni, protože učitel vidí, že úroveň matematického slovníku žáka, jeho jazyka a vhledu do problému je téměř stejná jako jeho vlastní. V tomto jazyku jsou některá slova používána pro celou sérii myšlenek a konceptů.
i) Mezi učitelem a žákem, který se v dané problematice dobře neorientuje. Učitel přizpůsobí svoji úroveň odbornosti jazyka tak, aby žákovi vyhovovala (byla mu maximálně srozumitelná). Klima komunikace musí mít podporující charakter, zejména pokud žák ve své práci nějak pokročil. Nejlépe takového žáka podpoříme, když ho necháme říci ostatním, co objevil.

Jak je vidět z diagramu a jeho vysvětlení, konstruktivistický způsob klade na učitele velké nároky. Pokud však budeme chtít analyzovat pozici učitele samotného, situace je ještě náročnější. Budeme o tom diskutovat v následující části.

Komunikace je nesmírně důležitou součástí vyučování matematice. Schopnost úspěšně komunikovat může znamenat schopnost odlišit rozdíl mezi dorozuměním/nedorozuměním a přesností. Jak bylo ukázáno dříve, komunikace může mít mnoho forem – může být mluvená, psaná, komunikace obrazem atd. Naše zkušenost nám říká, že většina komunikace, která se odehrává v tradiční hodině mate-

matiky, je jednosměrná. Nejprve od učitele k žákovi, když učitel vysvětluje práci, kterou na žácích požaduje, což se děje nejčastěji ústní formou, pokud to není psaný test nebo pracovní list. Pak od žáka k učiteli, když učitel práci žáků vyhodnocuje, což se děje většinou písemnou formou. Je to obvykle časově omezené vyhodnocení schopnosti žáka reprodukovat algoritmy, memorizovat fakta a vzorce. Věříme, že pokud učitel chce určit skutečnou úroveň matematických znalostí žáka, pak je užitečné s ním ústně komunikovat. Důsledkem je potřeba rozvíjet komunikativní dovednosti žáků; jinak jsou znevýhodněni i v případě, že mají dobré matematické znalosti. K tomu učitel potřebuje využívat a povzbuzovat všechny výše uvedené způsoby komunikace.

A. Sfard (2002) říká, že „komunikace by měla být považována nejen za pouhou pomůcku k myšlení, ale měla by být postavena s myšlením na roveň". Dobrou komunikaci mezi žáky navzájem i žákem a učitelem považujeme za cenný nástroj konstruktivistického přístupu. Napomáhá realizaci spojů mezi izolovanými znalostmi v žákově mysli a umožňuje zobecnění a propojení toho, co byly jen izolované informace (Hejný, 2000). Čím je matematický jazyk přesnější a jednoznačnější, tím je užitečnější pro tvorbu a rozvoj matematických znalostí.

b) Písemná komunikace

Opět existuje několik úrovní písemné komunikace.

1. Pravděpodobně nejvíce používanou formou písemné komunikace v hodinách matematiky jsou učebnice. Takovou knihu píše její autor s určitou představou žáka v určitém učebním prostředí. Proto by v mnoha případech měly být tyto učebnice konstruktivisticky vyučujícím učitelem „přeloženy" a jazyk, obsah i kontext přizpůsobeny jeho žákům a jejich učebnímu prostředí.

Naše moduly v této knize jsou psány nejen pod vlivem určité představy žáka a prostředí, ale také s představou určité kultury, která je součástí každé kapitoly. V některých realizacích navržených úloh je vidět, jak je učitelé z různých zemí pozměnili, aby vyhovovaly jejich prostředí. Proto doporučujeme všem svým čtenářům, aby při studiu úloh přemýšleli o tom, zda použitý jazyk odpovídá úrovni jejich třídy, zda je navržený kontext vhodný, a také o tom, co by mělo být případně změněno z důvodů kulturních rozdílů.

Naše kapitoly podporují určité způsoby a určité využití komunikace, které obvykle v učebnicích nenajdete – například využití metafory, když se hovoří o „panu Krychle" v kapitole o 3D geometrii, využití obrazového jazyka v kapitole o mnohoúhelnících a o porozumění číslům a využití materiálů a každodenní zkušenosti k zobrazení zákonitostí a tvorbě grafů v kapitole o pravidelnostech.

2. Je zřejmé, že učitel musí pro třídu připravit pracovní listy / testovací úlohy. Tato forma komunikace je obvykle syntakticky formálnější, ale měla by zohlednit úroveň matematického jazyka třídy. Třídní vývěsky a nástěnky dávají učiteli příležitost uvést ve třídě novou matematickou terminologii.

3. Při tradiční formě vyučování učitel předepisuje způsob, jímž žák zapisuje výpočty, včetně pravidel o číslech, která se pro mnoho žáků stanou algoritmy, jež je nutno si zapamatovat. Konstruktivistický učitel umožní žákům najít a používat jejich vlastní způsob zápisu řešení, který jim dává smysl, ale kterému může porozumět i někdo jiný. Například vidí-li žák jednoduchý součet 258 + 49, může napsat 258 + 50 –1 = 250 + 50 + 8 – 1 = 300 + 7 = 307.

4. Odpovídají-li žáci na otázky v testech, mají sklon používat formálnější jazyk, protože se domnívají, že učitelé mají určitou představu, jak by měli problém řešit. To je zřetelně vidět, když jsou žáci připravováni na písemné přijímací zkoušky a učitel probírá dříve řešené problémy, přičemž jim ukazuje ‚nejlepší' způsob řešení problému. Žáci se pak snaží kopírovat tento model – často bez porozumění.

5. Žáci jsou často požádáni, aby poté, co dokončili své zkoumání nebo úlohu s otevřeným koncem, své práce vystavili. Písemná forma je často výsledkem bohaté diskuze mezi členy skupiny. Co napíšou? Jaký diagram je nutné použít? Kdo píše nejlépe? Někdy může být obsah ovlivněn jejich představou toho, co je přijatelné pro učitele. V každém případě se žáci při přípravě těchto výstupů snaží použít správný matematický jazyk v co nejformálnější pro ně dostupné formě.

c) Slovníky

Je důležité, aby si učitelé uvědomovali, že z výzkumu máme důležitou informaci, která se týká problémů v komunikaci. Jde o to, že v matematice, stejně jako v řadě dalších předmětů, existují *tři* slovníky, které používají jak učitelé, tak žáci, ale rozsah použití těchto tří slovníků se značně mění s věkem a stupněm matematických znalostí.

Jsou to tyto slovníky:

> *Každodenní* slovník jak pro běžnou komunikaci, tak pro komunikaci mladších žáků, který používají místo matematických termínů – jako „hrot" pro vrchol kužele nebo „ostří" pro dominantní hranu tělesa.
>
> *Matematický* slovník, tvořený matematickými termíny a slovy, jako jsou názvy mnohoúhelníků atd. Právě tento slovník potřebuje učitel rozvíjet zároveň s rozvojem matematických znalostí žáků.
>
> *Každodenní/matematický* slovník, který obsahuje slova s určitým významem nebo významy v každodenním životě, ale s jiným významem v matematice. Příkladem je slovo „funkce", které má v každodenním životě několik významů, zatímco v matematice je význam tohoto slova velmi specifický – slovo označuje vztah mezi dvěma nebo více proměnnými.

Je důležité, že žáci se neučí pouze „papouškovat" matematický slovník, ale že rozumí, co je výrazem míněno. Například nestačí, aby žáci pouze vizuálně rozeznali krychli, ale měli by zacházet s krychlí investigativním způsobem, aby objevili její vlastnosti – 12 hran, 8 vrcholů a 6 stěn, které jsou všechny čtverci.

Závěr

Popsali jsme proces nabývání znalostí a přínos, který mají podle nás pro tento proces metody konstruktivistického vyučování. Zdůraznili jsme důležitost všech forem komunikace, a to jak mluvené, tak psané, pro rozvoj matematických znalostí žáků. Nejdůležitější pro nás je, aby kapitoly v této knize umožnily žákům rozvinout jejich znalost prostřednictvím experimentování, zkoumání, vizualizace, vytváření hypotéz, odvozování, zobecňování, sběru a prezentování dat v nějaké formě zobrazení, vyhodnocování, interpretace, diskuze, komunikace, vyvozování závěrů atd.

Literatura

Hejný, M. (2003). Understanding and Structure. In Mariotti, M. (ed.), *Proceedings of CERME 3.* Italy : University of Pisa, CD-ROM.

Jirotková, D. & Littler, G.H. (2003). Insight into pupils' structures of mathematical thinking through oral communication. In Marriotti, M. (ed.), *Proceedings of CERME 3.* Italy : University of Pisa, CD-ROM.

Rips, L. J. (1988). Deduction. In Sternberg, R. J., Smith, E. E. (eds.), *The Psychology of Human Thought*. UK : C.U.P. Cambridge, p. 119.

Seneca. *Letters to Lucilius* I, 7, 8.

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical thinking. In Cockburn, A. (ed.), *Proceedings of PME26.* UK : University of East Anglia.

V této kapitole jsou aplikovány výsledky výzkumu realizovaného v rámci grantu GA ČR 406/05/2444.

Education and Culture

Socrates

PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY

Brigitte Spindeler, Bernd Wollring

RI Úvod a struktura kapitoly, matematika a historie

RI.1 Struktura a cíl kapitoly

Tato kapitola o pravidelných mnohoúhelnících je určena pro hodiny matematiky na prvním stupni základní školy. Cílem popsaných činností je propojení geometrie a aritmetiky a vytvoření vazby ke skutečnému světu dětí. Klíčovou myšlenkou při výuce látky je propojit vysvětlování se sestrojováním pravidelných mnohoúhelníků v kontextu ciferníku hodin a kol aut.

Jsme vedeni myšlenkou konstruktivismu, jejímž cílem je podpořit vlastní činnost dětí při utváření a promýšlení problému a omezit přímé vedení a pasivní předávání informací na minimum. Dosahujeme toho vytvořením učebního prostředí, které je charakterizováno úlohami, vhodnými pomůckami a širokými možnostmi rozvíjení dovedností žáka.

Kapitola obsahuje úvod, šest podkapitol a závěrečné úlohy pro učitele. Úvod poskytuje základní informace učitelům, díky nimž lze rozhodnout o využití jednotlivých podkapitol. Podkapitoly obsahují úkoly pro žáky, jež mohou být provedeny najednou, v kombinacích či postupně. Každá je věnována zvláštnímu tématu a má vlastní účel.

Podkapitola 0: Rovnoměrné rozmísťování bodů na kružnicích. Cílem je, aby učitelé a děti našli intuitivní přístup k pravidelným mnohoúhelníkům rozmísťováním daného počtu bodů na dané kružnici tak, aby body byly rovnoměrně rozmístěny a tvořily vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Dále se děti mají naučit popsat tento způsob pravidelnosti a být schopny nastínit, jak ověřit pravidelnost rozmístění bodů.
Podkapitola 1: Úlohy s obrázky. Zde je účelem, aby děti uměly popsat, utřídit a zařadit symboly a fotografie vztahující se k pravidelným mnohoúhelníkům pomocí jejich uspořádání. Dále by měly být schopny pochopit vztah mezi abstraktními pravidelnými mnohoúhelníky a fotografiemi předmětů, jejichž struktura obsahuje pravidelné mnohoúhelníky.
Podkapitola 2: Nákresy ciferníků. Žáci se učí popsat hodiny s ručičkami a čas vztahující se k jejich každodenní zkušenosti a odkazují na ně pouze pomocí vlastních obrázků. Dále by měli ovládat popis geometrické a aritmetické struktury ciferníku s hodinami i minutami a umět použít odpovídající metodu na jejich nakreslení.
Podkapitola 3: Kreslení pravidelných mnohoúhelníků do daných ciferníků. Tato podkapitola je jádrem celé kapitoly. Účelem je, aby se žáci naučili kreslit pravidelné mnohoúhelníky s počtem vrcholů tři až dvanáct (bez sedmi-, devíti- a jedenáctiúhelníku) do nákresu ciferníku se značkami pro hodiny či minuty. Dále by měli být schopni popsat tyto mnohoúhelníky za použití vztahů mezi nimi a nakreslit je do hodinového ciferníku v mnoha možných polohách (podle Wittmanna 1996, 1997).
Podkapitola 4: Obrazové a číselné vzory v ciferníčích: Účelem je, aby se žáci naučili rozpoznat vztahy mezi číselnými vzory a geometrickými vzory v pravidelných mnohoúhelníčích a jiných mnohoúhelníčích vkreslovaných do ciferníků a také aby byli schopni vytvořit jeden vzor na základě druhého.
Podkapitola 5: Kola aut. Zde je cílem, aby žáci rozpoznali a vyznačili pravidelné mnohoúhelníky v discích kol aut. Dále by měli být s pochopením symetrických vlastností disků schopni dokreslit obrázky částečně zakrytých kol aut.

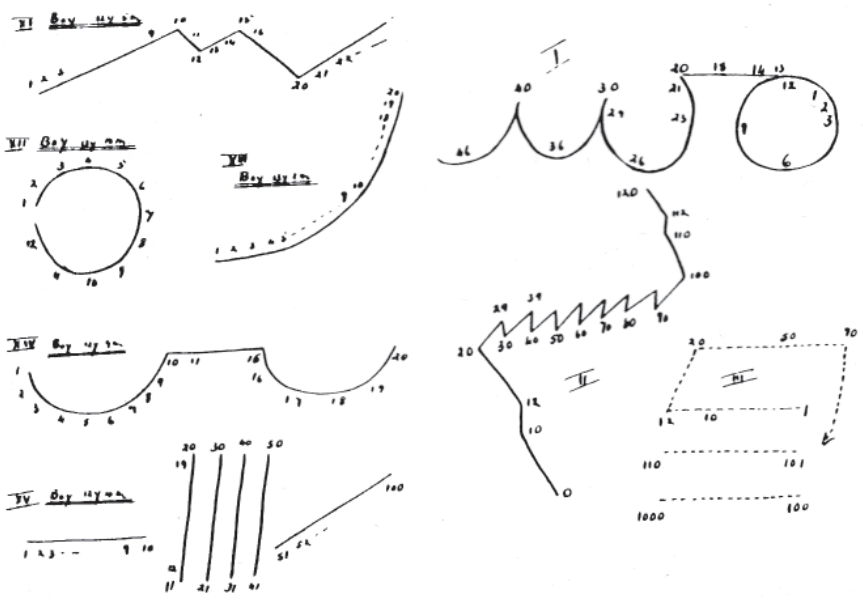
Texty v podkapitolách jsou doplněny materiálem a pracovními listy, jež jsou uloženy na DVD v adresářích (depot, Depot) Dále DVD obsahuje soubory s obrázky, videoklipy a navíc doprovodný text (v angličtině).

Podkapitoly byly vytvořeny, vyzkoušeny a upraveny ve státech účastnících se projektu IIATM (Česká republika, Německo, Řecko, Velká Británie). Některé výsledky práce žáků, studentů učitelství a učitelů jsou obsaženy v následujícím textu. Zkušební skupiny jsou vyjmenovány v příloze. Všechny texty jsou k dispozici na DVD, některé jsou tam i více rozvedeny.

Základním tématem této kapitoly jsou ciferníky hodin a do nich vkreslované mnohoúhelníky. Na podporu rozvoje abstrakce u dětí jsou obrazové vzory v daných ciferníčích dány do souvislosti se vzory čísel. Aby se rozvinul vztah k reálnému světu, jsou mnohoúhelníky kreslené do ciferníků vztaženy ke skutečným hodinám a kolům aut.

Výběrem a kombinací podkapitol si učitel může pro činnosti v hodině zvolit stupeň abstrakce i konkretizace.

Věříme, že tento přístup je plodný, protože žáci na prvním stupni mohou využít v hodině bohaté zkušenosti s koly a ručičkovými hodinami. Experimenty také ukázaly, že subjektivní obrazy čísel jsou podpořeny kruhovými strukturami s označením čísel. Obrázek RI.1 ukazuje nákresy subjektivního seřazení čísel popsané Lorenzem (Lorenz, 1997).



Obr. RI.1: Reprezentace čísel včetně kruhových struktur a ciferníků hodin (podle Lorenze)

RI.2 Popis pravidelných mnohoúhelníků

Pravidelné mnohoúhelníky jsou rovinné útvary. *Mnohoúhelník* může být definován pomocí uzavřené lomené čáry či uzavřeného řetězce úseček. V jistém smyslu jsou pravidelné mnohoúhelníky „kruhovité".

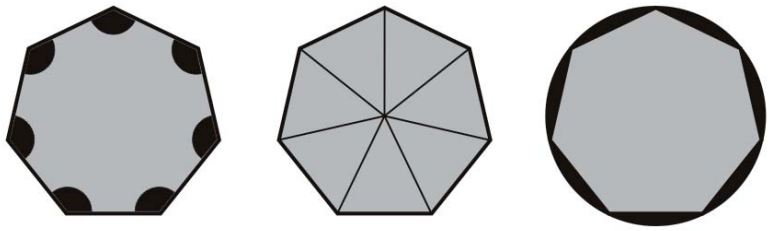
Aby bylo toto téma přístupné žákům zejména prvního stupně ZŠ, popíšeme vlastnost „být kruhovitý" několika způsoby a ověříme, zda mezi nimi je popis, který je srozumitelný žákům prvního stupně. Mezi mnoha způsoby popisu pravidelnosti mnohoúhelníků uvádíme tři, o nichž lze v rámci euklidovské geometrie prokázat, že jsou ekvivalentní.

– *RP1*. Mnohoúhelník je pravidelný právě tehdy, když jeho strany mají stejnou délku a vnitřní úhly jsou stejně velké.

– *RP2.* Mnohoúhelník je pravidelný právě tehdy, když jeho strany mají stejnou délku a jeho vrcholy jsou stejně vzdáleny od jednoho pevného bodu, jenž se pak nazývá středem mnohoúhelníku.

– *RP3.* Mnohoúhelník je pravidelný právě tehdy, když jeho strany mají stejnou délku a všechny jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Definici RP1 považujeme za méně vhodnou pro první stupeň základní školy, neboť vyžaduje pojem úhlu a znalost, jak jej změřit a zakreslit. RP2 vyžaduje pouze znalost délky a je tedy vhodnější. RP3 říká, že strany pravidelného mnohoúhelníku jsou rozmístěny na kružnici „vyváženým" způsobem. Tento popis považujeme za zvláště vhodný pro použití na prvním stupni, proto jsme pro první stupeň zvolili způsob sestrojování pravidelných mnohoúhelníků za použití daných nákresů ciferníků. Tento postup odpovídá přesně myšlence definice RP3.



Obr. RI.2: Nákres pravidelného mnohoúhelníku podle definic RP1, RP2 a RP3

Aby měl učitel lepší přehled o dané látce, uvedeme nejdříve některá zjištění o sestrojování pravidelných mnohoúhelníků dosažená v průběhu historického vývoje matematiky. To proto, že během vývoje matematiky patřily pravidelné mnohoúhelníky k tématům, na kterých se vyvíjely principy geometrie. V tomto procesu měli zcela zásadní roli následující tři lidé: Euklides, Fermat a Gauss.

Obr. RI.3, 1–3: Euclides, Fermat a Gauss

RI.3 Euklidovské konstrukce a Gaussův výsledek

Euklides žil v letech 325 až 270 př. n. l. Ve svých *Základech* jako první vytvořil axiomatickou stavbu geometrie. Euklidovské konstrukce pojmenované po něm využívají pouze pravítko (bez měřítka) a dvě kružítka. Pojem euklidovské konstrukce odkazuje spíše na principy sestrojování než omezení nástroji v technickém smyslu. Dodnes platí dohoda mezi matematiky, že pokud není řečeno jinak, vždy, když se mluví o geometrických konstrukcích v rovině, jsou míněny euklidovské konstrukce.

Euklides sestrojil rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a šestiúhelník. Nepodařilo se mu sestrojit pravidelný sedmiúhelník. To se podařilo až později za použití jiných principů – ukázalo se, že sedmiúhelník je první z pravidelných mnohoúhelníků, který nemůže být sestrojen pouze s pravítkem a dvěma kružítky.

Proč je tak důležitý pravidelný sedmi- a sedmnáctiúhelník?

Karl Friedrich Gauss žil v letech 1777 až 1855, téměř přesně o 2 000 let později než Euklides. Ve své době byl považován za matematického génia. Dne 1. června 1796 publikoval jako osmnáctiletý v časopise *Intelligenzblatt der Allgemeinen Literaturzeitung* v Lipsku svůj důkaz, jak lze sestrojit pravidelný sedmnáctiúhelník pomocí euklidovských metod.

Gauss našel základní princip, který ukazuje, které pravidelné mnohoúhelníky mohou být sestrojeny podle Euklida s pravítkem a dvěma kružítky. Využil k tomu algebry: propojil obrazové a numerické vzory. V roce 1801 publikoval svou teorii cyklotomických struktur v knize *Disquisitiones Arithmeticae*. Jedná se o algebraické struktury, které vyvinul na základě komplexních čísel.

Využití těchto výsledků pro sestrojování pravidelných mnohoúhelníků je ukázáno v tabulce RI.2, str. 37. Čtenář může přeskočit následující text a pokračovat až od tabulky.

S ohledem na euklidovskou sestrojitelnost pravidelných mnohoúhelníků publikoval Gauss následující slavný výsledek, o jehož platnosti byl přesvědčen:

> Pravidelný mnohoúhelník může být sestrojen pouze pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, když počet jeho vrcholů E je mocninou dvou, tedy $E = 2^k$, kde k je nezáporné celé číslo, či pokud počet jeho vrcholů E je násobkem mocniny dvou a konečně mnoha prvočísel Fermatova typu $F_1,..., F_m$, tedy $E = 2^k \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_m$.

Ukazuje se, že číslo 7 není prvočíslem Fermatova typu. Nicméně číslo 17 je po číslech 3 a 5 nejmenším prvočíslem Fermatova typu. Gaussův výsledek tedy ukazuje, že na rozdíl od pravidelného sedmnáctiúhelníku, pravidelný sedmiúhelník nemůže být sestrojen podle Euklida.

Obr. RI.4: Známka oslavující sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníku Gaussem

Prvočísla Fermatova typu. Pierre Fermat žil v letech 1601 až 1665, během třicetileté války, asi 150 let před Gaussem, který se kromě jiného začal znovu zabývat i Fermatovými prvočísly. Prvočíslo Fermatova typu je definováno jako prvočíslo ve tvaru

$$F(n) = 1 + 2^{(2^n)}, \text{ kde } n \text{ je nezáporné celé číslo.}$$

Bohužel, ne každé číslo tvaru $F(n)$ je prvočíslo. Tabulka RI.1 ukazuje platné výsledky.

n	2^n	$F(n)$	$F(n)$	Prvočíslo?
0	1	$1 + 2^1$	3	ano
1	2	$1 + 2^2$	5	ano
2	4	$1 + 2^4$	17	ano
3	8	$1 + 2^8$	257	ano
4	16	$1 + 2^{16}$	65 537	ano
5	32	$1 + 2^{32}$	4 294 967 297	641 • 6700417

Tab. RI.1: Prvočísla Fermatova typu

F(0), F(1), F(2), F(3) a F(4) jsou prvočísly Fermatova typu. Leč F(5) prvočíslem není, stejně jako F(6). Není známo, jaká další čísla tvaru $F(n)$ jsou prvočísla.

V roce 1830 sestrojil F. J. Richelot 257stranný mnohoúhelník. V roce 1889 předvedl J. G. Hermes v doktorské práci sestrojení 65537stranného mnohoúhelníku. Jeho práce byla přijata. Dodnes je uložena na Univerzitě v Göttingenu.

Které pravidelné mnohoúhelníky lze tedy sestrojit euklidovskými metodami? Gaussův výsledek umožňuje všechny mocniny 2, i první. Nedává žádnou podmínku pro součin prvočísel Fermatova typu. V současné době ale známe jen čísla F(0) a F(4), takže musí být pro každý počet vrcholů zvlášť ukázáno, zda daný počet vrcholů může být povoleným způsobem symbolizován těmito prvky, aby bylo možno rozhodnout, zda lze příslušný mnohoúhelník euklidovsky zkonstruovat či nikoli.

Tabulka RI.2 ukazuje, které pravidelné mnohoúhelníky jsou sestrojitelné euklidovskými metodami pro počty vrcholů E od 3 do 20. Tento výsledek by měl znát každý učitel.

P	3	4	5	6		8		10		12			15	16	17			20
EK?	A	A	A	A		A		A		A			A	A	A			A

P					7		9		11		13	14				18	19	
EK?					N		N		N		N	N				N	N	

Tab. RI.2: Sestrojitelnost pravidelných mnohoúhelníků pomocí pravítka a dvou kružítek podle Euklida
P: počet vrcholů, EK: euklidovská konstrukce. A: ano, N: ne

RI.4 Jak jsou pravidelné mnohoúhelníky skutečně sestrojovány?

Euklidovské konstrukce jsou podstatné v rámci axiomatické geometrie. Nicméně ve skutečnosti může být využito mnoha různých technických pomůcek.

Matematicky řečeno, většina z nich je založena na přibližném sestrojení s dostačující přesností. V každodenním životě jsou potřebná data pro pravidelný mnohoúhelník, který má být sestrojen, spočtena dostatečně přesně, a mnohoúhelník se tedy dá sestrojit. Technické informace o pravidelných mnohoúhelnících, vzorce pro délky a úhly, informace o opsané a vepsané kružnici a mnohem více jsou k dispozici na webové stránce (Conway, 2004). Mnoho zajímavých údajů a metod pro učitele, které se týkají pravidelných mnohoúhelníků, lze nalézt na webové stránce Hanse Walsera (Walser, 2003).

Některé „technické“ postupy zde použité postrádají paralelu k euklidovským metodám. Jedna z těchto technik popisuje, jak „rozvinout“ obvod kruhu, aby mohl být snadno rozdělen na sedm částí, a jeho opětovné „zavinutí“, po kterém lze najít pravidelný sedmiúhelník (srv. Wollring, 2003). Pro žáky i pro inženýry je tato metoda velmi přirozená. Nicméně pro matematiky, kteří se zabývají euklidovskou konstrukcí, je tato metoda nemožná či neplatná.

Dnes samozřejmě není pro žádnou automobilku technický problém vytvořit disky s 11 žebry. Je nicméně pozoruhodné, že už inženýři a řemeslníci středověku také výborně ovládali potřebné techniky. Jeden z nejkrásnějších dokladů je rozetové okno katedrály v Orvietu (Umbrie, Itálie) – obraz, který byl vytvořen úmyslně, aby přitahoval pozornost jako celá katedrála. Má, jak je možno ověřit, 22 pravidelně uspořádaných paprsků. Dvaadvacetiúhelník se však nedá sestrojit použitím euklidovských metod.

Obr. RI.5: Rozetové okno katedrály v Orvietu (Umbrie, Itálie)

RI.5 Jak mohou žáci prvního stupně sestrojovat pravidelné mnohoúhelníky?

Začneme třetí definicí (RP3). V této kapitole žáci vždy sestrojují *pravidelné mnohoúhelníky na základě zadaných kružnic*, které jsou opsanými kružnicemi mnohoúhelníků.

Jako základní pomůcka jsou dětem poskytnuty ciferníky (viz odstavec R3). Je to zejména technický nástroj, díky němuž v hodině matematiky využíváme i každodenní zkušenosti dětí s ručičkovými hodinami. V průběhu práce dětí na úlohách jsou postupně rozvíjeny úvahy o geometrických a aritmetických strukturách.

Protože platí $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, lze ciferník s vyznačenými hodinami sestrojit za použití euklidovských metod. Protože $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, vyhovuje tato metoda i pro zakreslení minut. Všechny pravidelné mnohoúhelníky, jež je možné zakreslit přímo do hodinového či minutového ciferníku, tedy mohou být také zkonstruovány euklidovskými metodami. Navíc předem daný ciferník umožňuje přibližné zakreslení i těch pravidelných mnohoúhelníků, které euklidovskými metodami zkonstruovány být nemohou.

RI.6 Výlet na zámek Castel del Monte – osmiúhelník jako symbol Evropy

Mezi pravidelnými mnohoúhelníky a technickými a vědeckými problémy jsou přirozené vztahy a je tedy přirozené se na ně v hodině podívat. Ale jsou tu i jiné vztahy. V architektuře mají často pravidelné mnohoúhelníky zvláštní symbolický význam, který vychází z dob, kdy byla daná budova postavena. Uvádíme příklad budovy, která může učitele inspirovat k vyhledání podobné. Lze u ní nalézt čtverec a osmiúhelník v mnoha variacích; budova svou architekturou představuje část evropských dějin.

Podobné znalosti vytvářejí nová propojení a mohou podpořit zkoušení nových, neobvyklých cest učení ve třídě. Zkusme se tedy teď ponořit do jiného světa a jiné doby.

V roce 1240 začal *Friedrich II. Štaufský* se stavbou zámku *Castel del Monte* v italské provincii Apulia. Stavba byla pravděpodobně dokončena v roce 1250, rok před jeho smrtí.

Půdorys budovy byl postaven jako pravidelný osmiúhelník s osmi osmiúhelníkovými věžemi umístěnými v jeho vrcholech. Věže jsou 20 metrů vysoké a mají tvar koruny. Zámek může být dodnes platným symbolem Evropy, neboť připomíná propojení evropských oblastí s jejich kulturními a náboženskými kořeny.

Fridrich II. Štaufský byl významnou evropskou osobností. Narodil se v Itálii roku 1195 jako syn císaře Jindřicha VI., syna Fridricha Barbarossy, a dědičky sicilského království. V roce 1198, když mu bylo tři a půl roku, jeho otec zemřel a Fridrich, zvaný „Puer Apuliae", se stal králem Sicílie. Po svatbě s Konstancí z Aragornu v Palermu v roce 1209 se jižní Itálie stala středem jeho života.

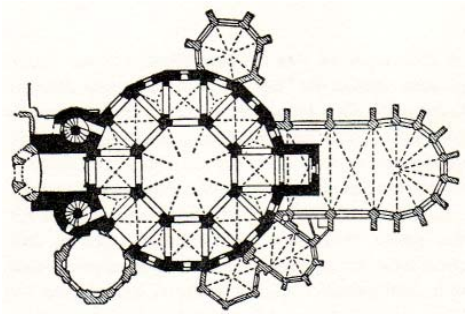
Obr. RI.6: Zámek Castel del Monte v Apulii, pohled shora

V roce 1215 byl jmenován *německým králem* v císařském *paláci v Cáchách* a během slavnosti přísahal, že se vydá na křížovou výpravu. „Fridrich II. si uvědomoval význam tohoto místa s kaplí s půdorysem osmiúhelníku, kterou postavil Karel Veliký." (Wuermeling, 2005)

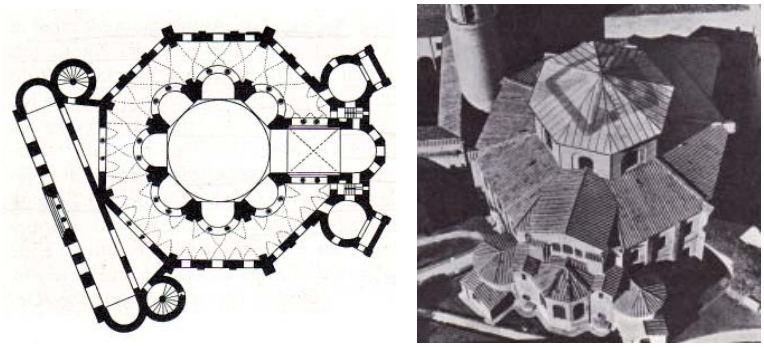
Kaple paláce v Cáchách ve tvaru uměle vytvořeného pravidelného osmiúhelníku je jádrem katedrálního komplexu v Cáchách, který patří k nejvýznamnějším v Německu. Jeho základní inspirací byla byzantská kultura. Dalším zdrojem inspirace byly *kostel na Justiniánském dvoře v Konstantinopoli* a *San Vitale v Ravenně*, oba postavené ve tvaru pravidelného osmiúhelníku v průběhu šestého století.

Trvalo ještě osm let od císařské korunovace v roce 1220 v Římě, než Fridrich II. zahájil svoji křížovou výpravu, nyní známou jako křížová výprava „císaře Fridricha II.". Křížová výprava nicméně navzdory velikosti armády nebyla příliš agresivní: císařův příchod do svaté země je poměrně mírumilovný, ve smyslu kulturní výměny. Fridrich II. si je stále vědom, že sultán Saladin daroval ve své době svobodu králi Richardovi zvanému Lví Srdce, aby mohl odejít v míru.

V únoru roku 1229 Fridrich II. uzavřel dohodu s egyptským sultánem Al-Kamilem o klidu zbraní na deset let a volném přístupu křesťanů do Jeruzaléma. Počátkem dubna roku 1229 se armáda plaví domů. Celá výprava byla pro Fridricha II. spíše čímsi jako pobytem cestovatele za kulturou či pracovní vědeckou cestou.



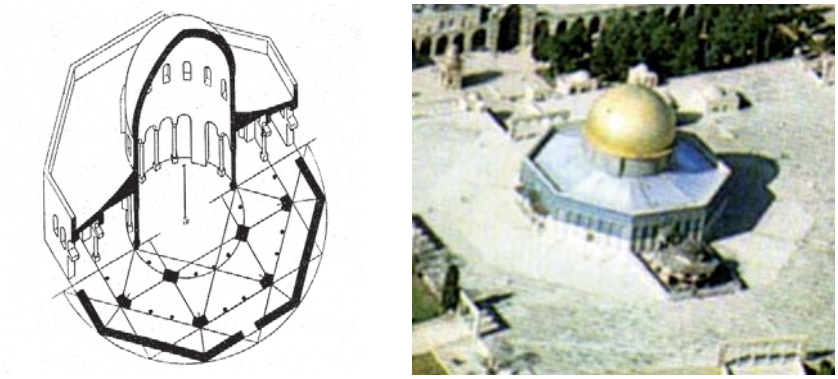
Obr. RI.7: Kaple císařského paláce v Cáchách, půdorys



Obr. RI.8, 1–2: San Vitale v Ravenně, vlevo: půdorys, vpravo: pohled shora

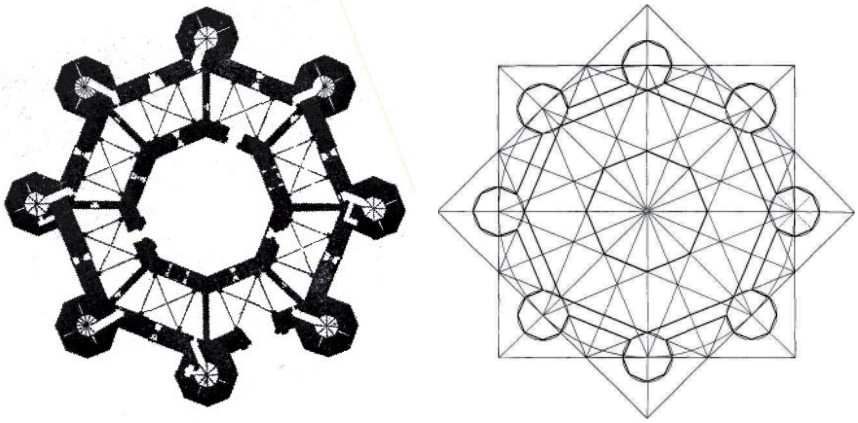
V březnu roku 1229 navštěvuje Fridrich, který se sňatkem stal *králem Jeruzaléma*, *Chrám Božího hrobu*. Navíc jako sultánův host zavítá na chrámovou horu a dostává se mu podrobného výkladu k mešitě *Al-Aksá,* ke statice osmiúhelníku a stavbě dómu. Oba půdorysy jsou založeny na pravidelném osmiúhelníku. Mešita Al-Aksá, dokončená v roce 691, je první významnou budovou islámu. Modelem pro její stavbu byl Chrám Božího hrobu.

Ve srovnání s lidmi jeho doby byl Fridrich II. pokrokovým panovníkem, intelektuálním Evropanem – rozuměl politice, právu, zajímal se o vědu a výzkum. V roce 1224 založil státní univerzitu v Neapoli a v roce 1231 lékařskou univerzitu v Salernu. Oblíbil si vyučování aritmetiky a geometrie od jednoho z nejslavnějších učenců své doby, *Leonarda Fibonacciho*, který mu věnoval svou *knihu čtverců* (Liber quadratorum).



Obr. RI.9, 1–2: Chrám Božího hrobu v Jeruzalémě (řez a půdorys); mešita Al-Aksá v Jeruzalémě (pohled shora)

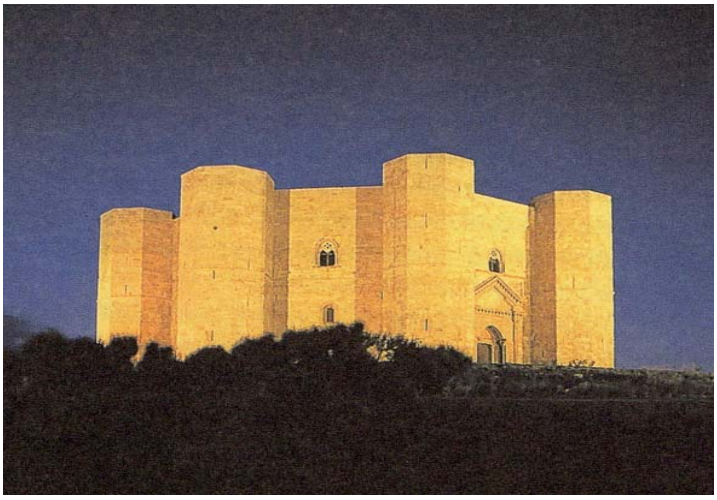
V roce 1240 začíná Fridrich stavět svůj zámek *Castel del Monte* v Apulii. Má půdorys ve tvaru pravidelného osmiúhelníku stejně jako chrám Božího hrobu v Jeruzalémě, mešita Al-Aksá i kaple paláce v Cáchách a jejich modely.



Obr. RI.10, 1–2: Zámek del Monte v Apulii (půdorys)

Novinář H. L. Wuermeling napsal: „Podobně jako na kreslicím prkně vzniká ideální plán z geometrie a matematiky – dominantní architektura, císařská myšlenka. Rotací čtverce o jednu osminu kruhu vzniká osmiúhelník. Je to budova s řeckým uměním perspektivy přímo ve středu řecké země, byzantská v půdorysu, karolinská ve svém románském stylu, normanská ve své jednoduchosti, inspirovaná Staufersem ve své velikosti, cisterciácká ve své rané gotice a arabsko-islámská svou mozaikou – magické místo, jako maják ve Středozemním moři, trigonometrický bod v měření světa a moře, přechod mezi světy křesťanství a islámu, mezi okcidentem a orientem.“ (Wuermeling, 2005)

Fridrich II. Štaufský zamýšlel zámek Castel del Monte jako „budovu století“, ač se nikdy později nestala dějištěm významných historických událostí. Dnes ji Itálie zobrazuje na svých mincích. Organizace UNESCO ji zařadila na seznam světového kulturního dědictví. Každý evropský student a učitel by ji měl znát. Je to ikona evropské myšlenky, která umožňuje propojit matematické a umělecké uvažování s obecnými evropskými idejemi.



Obr. RI.11: Castel del Monte v Apulii

Požádali jsme studenty učitelství, aby se podívali na zámek Castel del Monte jako na inspirační zdroj pro výuku. V jedné úloze si měli prohlédnout nákres z obrázku RI.10, 2 a překreslit jej. V další pokročilejší úloze byli požádáni, aby použili ideu budovy, založenou na osmiúhelníku, pro konstrukci budovy, která by byla založena na pravidelném sedmiúhelníku. Dostali jsme mnoho zajímavých nákresů a velmi pěkný prostorový model, zámek „*Castel Septima*“ (obr. RI.12).

Obr. RI.12: Model zámku „Castel Septima“

R0 Podkapitola 0: Pravidelné rozmístění bodů na kružnici

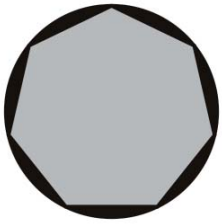
R0.1 Cíl základní podkapitoly

Cílem činností této základní podkapitoly je, aby učitelé a studenti experimentálně sestrojili pravidelné mnohoúhelníky s vrcholy, které jsou vázány na danou kružnici. Tak dosáhnou *intuitivní znalosti o tvaru a struktuře pravidelných mnohoúhelníků*. Zkušenosti vycházející z těchto cvičení podporují rozvoj základních myšlenek, na kterých jsou založena cvičení ve všech následujících podkapitolách.

R0.2 Základní úloha: Pokusy s vyvažováním bodů na kružnici

Úvod naznačuje, že mezi mnoha různými popisy pravidelných mnohoúhelníků představuje popis RP3 vhodný počátek pro koncepci učebního prostředí na základní škole.

> *RP3. Mnohoúhelník je pravidelný právě tehdy, když všechny jeho vrcholy leží na stejné kružnici a všechny jeho strany mají stejnou délku.*



Obr. R0.1: Popis pravidelného mnohoúhelníku podle definice RP3

Tento popis nevyžaduje znalost pojmu úhel, neboť kruh je předem daným prvkem konstrukce. Vyjadřuje, že *vrcholy pravidelného mnohoúhelníku jsou na kružnici rozmístěny rovnoměrně*. Začínáme tedy se s danou kružnicí a určitým počtem bodů na ní rozmístěným. Pokud považujeme body za pohyblivé, úkol spočívá v takovém jejich přesunutí, aby vznikl pravidelný mnohoúhelník. Tento přístup zapojuje do hry dva různé experimentální postupy odpovídající dvěma typům úloh:

Umisťování a posunování. Umístit, posunout a vyvážit polohu bodů na kruhu.

Ověření. Ověřit umístění souboru bodů.

Základní úloha v abstraktní verzi tedy vypadá takto:

Úloha R0.1. Je dána kružnice. Rozmístěte *n* bodů tak, aby tvořily vrcholy pravidelného *n*-úhelníku.

V následujícím textu bude tato úloha obměněna v různých verzích při zachování základní myšlenky RP3. Kontext by měl být vybírán tak, aby se vztahoval k vlastním zkušenostem a znalostem žáků. Cílem je pokusit se o „duševní souznění". Ukazuje se, že výběr kontextu má několik různých vlivů na průběh umisťování a ověřování. Uvažujme následující příklad:

Kontext „kruh s korálky". Je dán kruh s šesti posuvnými korálky na hranici. V úloze R0.1 je pak cílem posunout korálky tak, aby vytvořily šestiúhelník. V tomto kontextu je umisťování a ověřování specificky zdůrazněno či omezeno.

- *Umísťování a posunování.* Korálky nemohou být položeny na kružnici jeden po druhém, je třeba je posunout z výchozí „nevyvážené" polohy do vhodných míst. Vzhledem k tomu, že střed kruhu není vyznačen, není možné s ním pracovat. Tato verze podporuje posunování korálků po obvodu kruhu.
- *Ověřování.* Ověření tvaru šestiúhelníku a porovnání délek jeho stran je možné prostým okem. Ověření, zda dva sousední body spolu se středem kruhu tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku, lze však takto těžko provést. Naopak kruh s umístěnými korálky může být celý otočen, aby se ověřila pravidelnost korálkového šestiúhelníku.

V dané konkrétní situaci je třeba ověřit, zda se kontext „kruh s korálky" vztahuje k existujícím představám dětí a vytváří zkušenosti, které mohou být rozšířeny a použity pro danou úlohu.

Pokud použijeme myšlenky posuvných korálků, úloha spadá do skupiny, již nazýváme „*pokusy s vyvažováním*".

Úloha R0.1, 2. Pokusy s vyvažováním

Je dán kruh s *n* posuvnými body. Rozmístěte body rovnoměrně tak, aby tvořily vrcholy pravidelného *n*-úhelníku.

Vzorový kontext užívající kruhové destičky s korálky ukazuje, že úloha R0.1 vyžaduje speciální pracovní prostředí, jež poskytuje možnosti experimentování. Kreslení na papír je jen částečně vhodné. Není dostatečně pružné, i když by bylo možné vymazat či opravit části kresby (například na laminovaném papíře). Je třeba vytvořit prostředí s nižším stupněm pevných parametrů: modely bodů na kružnici by měly být pohyblivé. Strany a jejich délky by neměly být fixovány, stejně jako další úsečky – například poloměry či úhlopříčky, aby bylo možné prozkoumat strukturu obrazu.

R0.3 Učební prostředí pro rovnoměrné rozmisťování pro žáky základních škol

Pro žáky základních škol je vhodné pokus s vyvažováním zasadit do jim blízkých souvislostí. Zjistili jsme, že téměř všichni žáci spojují pobídku „seřaďte se v kruhu“ s žádostí o seřazení do vyváženého tvaru pravidelného mnohoúhelníku. Za tímto účelem vyrovnávají vzdálenosti ke svým sousedům.

Úlohy s rovnovážným rozmisťováním mají vždy stejnou základní strukturu. S pomocí vhodných pomůcek a komentáře je třeba upravit kontext tak, aby oodpovídal schopnostem a zkušenostem studentů.

Úloha R0.2. Pokus s rovnovážným rozmisťováním vytvářejícím obrazec ze skupiny žáků

Je vás sedm dětí. Seřaďte se v kruhu.

Pomůcky: Případně křída na zakreslení kruhu na podlahu

Úloha R0.3. Pokus s rovnovážným rozmisťováním figurek a inspiračním vzorem

Tady vidíte pět tanečníků v kruhu. Seřaďte pět panenek do kruhu jako tanečníky.

Pomůcky: Tančící figurky jako motivace, pět malých panenek, popřípadě kruhová podložka

Úloha R0.4. Pokus s rovnovážným rozmisťováním modelových figurek

Seřaďte těchto šest kachniček do kruhu.

Pomůcky: Šest kachniček, kruhová podložka.

Úloha R0.4 vyžaduje větší úsilí při přemisťování než úloha R0.3.

Obr. R0.2 (vlevo): Sousoší s pěti tančícími figurkami (brazilské, 4 cm v průměru), inspirace k úloze R0.3
Obr. R0.3 (uprostřed): Úloha R0.3, žák (1. třída) uspořádal pět panenek
Obr. R0.4 (vpravo): Úloha R0.4, žák (1. třída) uspořádal šest kachniček

Příkladem pomůcek mohou být figurky v kruhu, svíčky na věncích nebo narozeninových dortech, oříšky nebo sušenky na talíři, ovoce na ovocném dortu a podobně.

Příklady pro využití jazyka: Umístěte figurky tak, aby tvořily krásný věnec či pěkné kolo. Tyto panenky mají být umístěny tak, aby obraz vypadal „kulatě“. Kde by měly být umístěny čtyři svíce na adventním věnci? Jak umístíme 3 až 12 svíček na narozeninový dort?

R0.4 Pracovní prostředí pro rovnoměrné rozmisťování s využitím korkových destiček

Soudíme, že pomůcka „pracovní destička“ poskytuje dostatek volnosti ke znázornění výsledků pokusů s vyvažováním, a to nejen pro žáky prvního stupně.

> *Pracovní destička.* Pomůcky se skládají z destičky z měkkého dřeva velikosti asi 35 × 25 cm, barevných špendlíků k zabodávání do destičky a dále pracovních listů, které mohou být pomocí špendlíků na pracovní destičce připevněny. Pro vyznačení čar mohou být použity provázky či gumičky. Tento soubor pomůcek označujeme jako „pracovní destička“.

Na pracovní destičce lze špendlíky lehce upevnit a snadno změnit polohu bodů. Může být na ní umístěn pracovní list s kružnicí; pokusy s rovnovážným rozmisťováním lze provádět s využitím kružnice i bez ní. Následující úloha počítá s nákresem kružnice jako podporou.

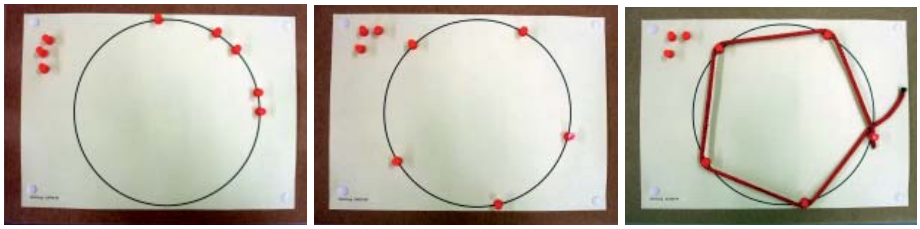
Úloha R0.5. Pokusy s rovnovážným rozmisťováním do pětiúhelníku na pracovní destičce

Umístěte pět špendlíků do kruhu tak, aby tvořily vrcholy pravidelného pětiúhelníku.

Pomůcky: Pracovní destička s pracovním listem „prázdný kruh“, špendlíky

Umisťování a posunování. Špendlíky mohou být umístěny jeden po druhém či posunuty na kružnici ke straně. Provázek může vyznačovat díly. Střed kruhu může být nakreslen či vyznačen špendlíkem, který pak může sloužit na podporu konstrukce.

Ověření. Tvar pětiúhelníku lze ověřit zrakem či porovnáním délek stran. Ke zjištění pravidelnosti obrazce lze pohybovat destičkou spolu s kruhem.



Obr. R0.5 (vlevo): Pracovní destička s kruhem a špendlíky k volnému umístění
Obr. R0.6 (uprostřed): Pět bodů je rozmístěno pravidelně, jak jen lze od ruky
Obr. R0.7 (vpravo): Pětiúhelník vyznačený na destičce provázkem

Pracovní destičky skýtají široké možnosti použití: všechna učební prostředí vedou k zobrazení, která přesahují možnostmi kreslení. Pracovní listy umístěné na destičkách podporují experimentování. „Přišpendlené“ výsledky na listech lze doplnit následnou kresbou. Výsledky dosažené pomocí pracovních destiček mohou být i uchovány.

R0.5 Vyzkoušení úloh, studenti učitelství a žáci pracují s destičkami

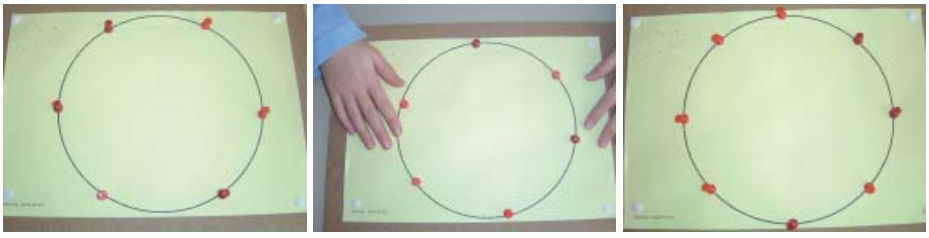
V následující úloze je využito pracovních listů:

Úloha R0.6. Umístěte šest špendlíků na kružnici tak, aby tvořily vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

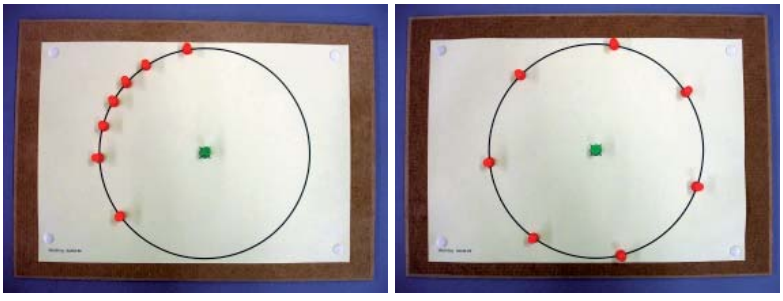
Pomůcky: Pracovní destička s pracovním listem „prázdný kruh“ bez středu, špendlíky

Úloha R0.7. Umístěte osm špendlíků na kružnici tak, aby tvořily vrcholy pravidelného osmiúhelníku. Jak můžete zjistit, že jsou umístěny správně? Pokuste se vytvořit z osmiúhelníku čtyřúhelník.

Pomůcky: Pracovní destička s pracovním listem „prázdný kruh“ bez středu, špendlíky



Obr. R0.8, 1–3: Žáci (1. třída, Sch01) pracují na úloze R0.6 a R0.7



Obr. R0.9, 1–2: Studenti učitelství (St21) pracují na úloze R0.8

Úloha R0.8. Umístěte sedm špendlíků tak, aby tvořily vrcholy pravidelného sedmiúhelníku.

Pomůcky: Pracovní destička s pracovním listem „prázdný kruh se středem“, špendlíky

Následující úloha nepředpokládá využití pracovního listu. Střed mnohoúhelníku může být navíc ještě vyznačen špendlíkem.

Úloha R0.9. Umístěte šest špendlíků, aby tvořily vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

Pomůcky: Prázdná pracovní destička, špendlíky

Obr. R0.10, 1–3: Studenti učitelství (vlevo) a žáci,1. třída (střed a vpravo) pracují na úloze R0.9

Videa 07gon PinBoard emCircle 1m09.MPG a 06gon emPinBoard wC 1m02.MPG uložená na DVD ukazují pokusy studentů učitelství (St21) s vyvažováním při použití pracovních destiček.

Videa 05gon Pupil year 1 PinBoard 1m09.MPG a 08gon Pupil year 1 PinBoard 0m33.MPG uložená na DVD ukazují pokusy žáků prvního ročníku (Sch01, Sch02) s vyvažováním při použití pracovních destiček.

Dodatek supplement k této podkapitole pokusů s rovnovážným rozmisťováním lze nalézt na DVD (v angličtině).

R1 Podkapitola 1: Úlohy s obrázky

Materiál lze nalézt na DVD v depot (text), Depot) (soubory).

R1.1 Cíle podkapitoly

Tato podkapitola se zabývá rozpoznáváním, popisováním, tříděním a zařazováním obrázků pravidelných mnohoúhelníků prostřednictvím hry. Navíc se zabývá rozlišováním objektů ze světa kolem nás, jejich popisováním, tříděním a zjišťováním, zda se vztahují k jednomu nebo k více pravidelným mnohoúhelníkům. Tato podkapitola neobsahuje sestrojování pravidelných mnohoúhelníků. Naopak v ní lze nalézt implicitní zavedení a upevnění pojmu pravidelného mnohoúhelníku pomocí práce s abstraktními a skutečnými obrazy. Smyslem je náležitě popsat pravidelné mnohoúhelníky a porovnat jejich tvar s objekty v okolním prostředí.

Budeme používat dvě různé sady karet:

– **Karty se symboly**. Karty se symboly zobrazují nákresy 3- až 12-úhelníků. Existují tři různé typy: první typ, série A, zobrazuje pravidelné mnohoúhelníky bez os a opsané kružnice. Druhý typ, série B, zobrazuje pravidelné mnohoúhelníky bez os, ale s opsanou kružnicí a konečně třetí typ, série C, je zobrazuje s osami a opsanou kružnicí.

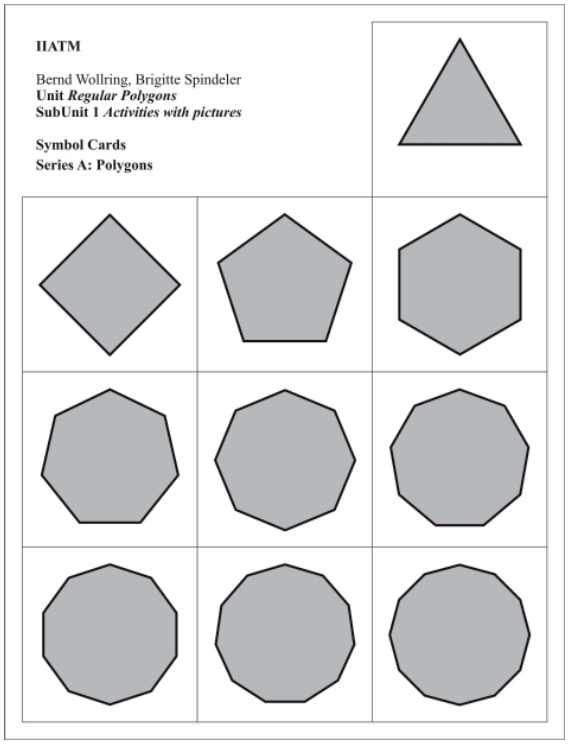
– **Karty s fotografiemi**. Karty s fotografiemi obsahují fotografie skutečných objektů. Jejich tvar se může vztahovat k jednomu či více pravidelným mnohoúhelníkům. Většina fotografií zobrazuje objekty se strukturou pravidelného mnohoúhelníku, některé ale nikoli.

R1.2 Úlohy a jejich forma

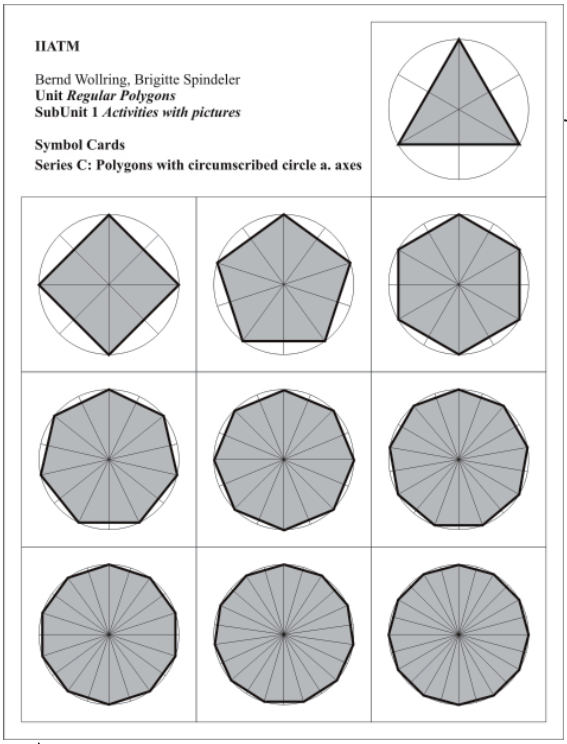
Zadání úloh pomocí sad karet. Úlohy využívající obrázky jsou upřesněny pomocí *textu k požadované činnosti* a pomocí *zvláštní sady karet*. Obojí je možno různě obměňovat.

Výběr pouze těch karet, na nichž jsou umístěny symboly. Úlohy využívající pouze karet se symboly jsou užitečné pro rozpoznávání, popis a třídění abstraktních zobrazení pravidelných mnohoúhelníků, jejich struktury a vzájemných vztahů.

Výběr pouze těch karet, na nichž jsou umístěny fotografie. Úlohy využívající karet s fotografiemi jsou vhodné k procvičení pojmu pravidelného mnohoúhelníku pomocí třídění a zařazování objektů, jež mohou být srovnávány s pravidelnými mnohoúhelníky. Tento způsob práce procvičuje rozpoznávání podstatných vlastností pravidelných mnohoúhelníků coby společných vlastností objektů, které jsou zobrazeny na fotografiích. Některé fotografie ukazují předměty odpovídající jen části pravidelného mnohoúhelníku. Zde je třeba pomocí vhodné argumentace zjistit a ukázat, který z pravidelných mnohoúhelníků se vztahuje k danému objekt



Obr. R1.1: Karty se symboly, série A



Obr. R1.2: Karty se symboly, série C

Obr. R1.3: Karty s fotografiemi, série A, list 1

Výběr z obou skupin – karty s fotografiemi a se symboly. Úlohy využívající karet s fotografiemi i symboly mohou být použity k roztřídění karet. Karty se symboly mohou sloužit jako znaky pro různé typy pravidelných mnohoúhelníků zobrazených na fotografiích.

Protože úlohy s těmito obrázky nevyužívají geometrické konstrukce, nejsou závislé na písemném záznamu. Počínaje paměťovými cvičeními mohou být karty se symboly a s fotografiemi použity již v mateřské škole či pro žáky nižších ročníků. Přiřazovací úlohy vztahující se k symetrii či vztahům mezi různými mnohoúhelníky mohou být využity i na druhém stupni.

Materiál dále umožňuje žákům a učitelům vytvoření jejich vlastních úloh, které jsou užitečné pro prohloubení práce s pravidelnými mnohoúhelníky. Naše zkušenosti ukazují, že jak práci na již existujících úlohách, tak i vytváření nových úloh je možné úspěšně uskutečnit s žáky a učiteli na prvním stupni.

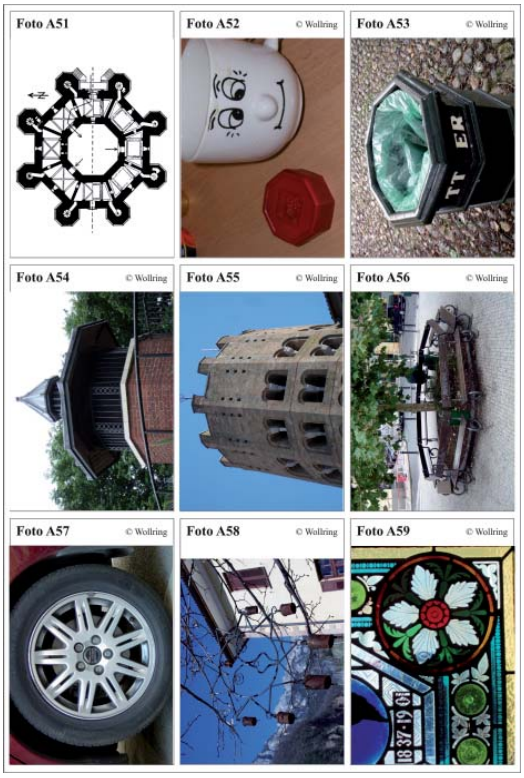
Zadávání úloh pomocí činností. Následující úlohy poskytují nabídku možných činností s obrázkovými kartami. Jak je naznačeno výše, každou úlohu je možno provést s různě vybranými kartami.

Úloha R1.1. Kolik vrcholů mají mnohoúhelníky na obrázcích?

Úloha R1.2. Je počet vrcholů sudý nebo lichý?

Úloha R1.3. Je počet vrcholů menší či větší než šest?

Úloha R1.4. Najděte všechny obrázky, které mají něco společného s číslem tři.



Obr. R1.4: Karty s fotografiemi, série A, list 5

Úlohy jako R1.1 – R1.4 lze použít při soutěžních hrách, kde dva hráči ukazují karty jeden druhému. Zprvu lze karty (za účelem podpoření objevování a rozvoje početních dovedností) ukazovat bez časového omezení. Po dostatečném procvičení může být doba ukázání karty časově omezena. Nakonec mohou být karty ukazovány velmi rychle. Pokud je karta rozpoznána správně, dostane ji posuzující žák, jinak si ji nechá žák, jenž ji ukázal. Je také možné nejdříve použít pouze karty se symboly do počtu vrcholů 6, čímž se podpoří určování typu mnohoúhelníku vhledem. Na podporu systematických početních dovedností a geometrického rozlišování je možné použít mnohoúhelníky s počtem vrcholů 6 až 12. Zjistili jsme, že jak děti, tak dospělí rozpoznávají karty se symboly bez os rychleji a bezpečněji než symboly s osami.

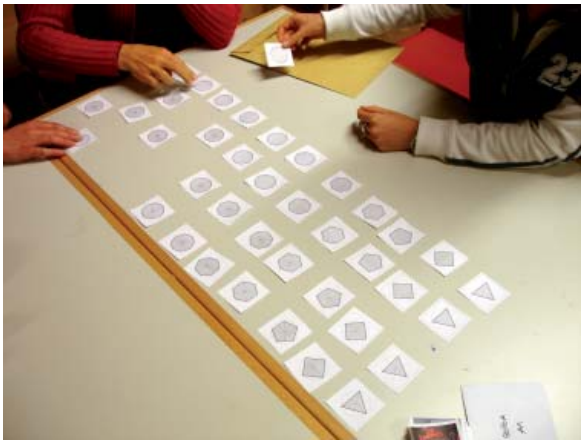
Úloha R1.5. Roztřiďte karty.

Úloha R1.6. Jak jste je roztřídili a proč?

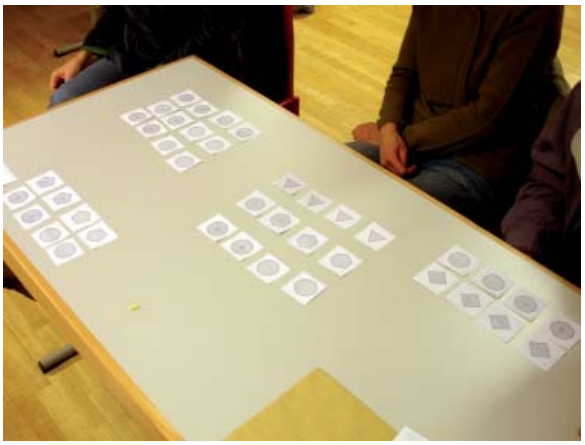
Náročnější úloha vznikne, použijeme-li pro úlohy R1.5 a R1.6 pouze karty s fotografiemi. První způsob vyžaduje výběr fotografií, kde lze poměrně dobře určit všechny vrcholy a pravidelnost tvaru mnohoúhelníku. „Obtížnější fotografie“ nejsou pro počáteční cvičení vhodné. Tato úloha podporuje rozvoj pojmu ekvivalentních tříd a také může snadno vést k pochopení vztahů mezi pravidelnými mnohoúhelníky, když dvě děti porovnávají svá různá třídění fotografií či pokud rozlišují a třídí společně.

Tyto úlohy lze upravit tak, aby byly vhodné pro všechny věkové skupiny, počínaje mateřskou školkou. Účinnou podporou, pomáhající nejen žákům, ale i učitelům, je vytvoření zvláštního místa, kam jsou vytříděny všechny fotografie, jež nelze na první pokus přiřadit k žádné kartě se symbolem. Zprvu je zde mnoho karet; později jsou karty s postupujícími zkušenostmi odstraňovány a přiřazovány ke kartám se symboly.

Paměťové hry. Paměťové hry vytváří bohatou skupinu úloh. Většina dětí ví, jak je hrát, protože se s podobnými hrami již setkala. Obvykle se každý obrázek vyskytuje ve stejné podobě na dvou různých kartách a jsou tedy třeba dvě stejné sady karet. Pro náš účel jsou nicméně výhodná jiná pravidla, kdy se dvojice karet tvoří nikoli ze stejných karet, ale z karet se symboly shodujícími se v určité význačné vlastnosti. Tyto paměťové hry nazýváme „smíšená paměť", neboť dvojice karet mohou být tvořeny různými reprezentacemi mnohoúhelníků. Zde jsou některé příklady paměťových her, jež lze hrát s vhodnými sadami karet:



Obr. R1.5, 1–2: Třídění karet se symboly u učitelů 1. stupně



Úloha R1.7. Paměť, Pravidlo 1

Dvojice karet je přijata, pokud jsou na kartách stejné obrázky.

Úloha R1.8. Paměť, Pravidlo 2

Dvojice karet je přijata, pokud karty zobrazují stejný mnohoúhelník.

Úloha R1.9. Paměť, Pravidlo 3

Dvojice karet je přijata, pokud mnohoúhelník na jedné kartě lze nalézt v mnohoúhelníku na kartě druhé. (Například čtverec v osmiúhelníku.)

Úloha R1.10, Paměť, odsouhlasené pravidlo

Před začátkem hry se dohodněte na pravidle, kdy bude dvojice karet přijata. (Například fotografie věcí se stejným počtem vrcholů a podobně.)

Paměťové hry s kartami s fotografiemi mohou být vytvořeny podle těch, jež používají karty se symboly. Vysvětlení, které karty mohou být přijaty jako dvojice, je ale náročnější. Nejsou tak vhodné pro začátečníky a měly by spíše následovat za úlohami, kde jsou použity jen karty se symboly či karty se symboly spolu s kartami s fotografiemi.

R1.3 Vyzkoušení úloh, práce žáků, studentů učitelství a učitelů

Zkusili jsme úlohy s dětmi z mateřské školy a z prvního stupně (Sch01, Sch02), se studenty učitelství (St11, St31) a s učiteli (L11, L13, L21, L23, L31, L33, L45, L50, PP01).

Ponejvíce jsme pozorovali klasické třídění, kdy karty se symboly tvoří linii, ze které do strany odbočují karty s fotografiemi. Tento vzor vzniká téměř bez nápovědy ve většině případů. Protože symboly na kartách nemají vyšší počet vrcholů než 12 a mnoho karet s fotografiemi obsahuje objekty s více než dvanácti vrcholy, vzniká implicitně podnět k pochopení vztahů mezi různými mnohoúhelníky, který je obvykle konstruktivně přijat.

Učitelé na prvním stupni nám sdělili, že zejména paměťové hry jsou výborně přijímány jak jimi, tak jejich žáky. Nalezení stejných mnohoúhelníků či těch s podobnou strukturou je často úspěšné dříve, než je možné přiřazení správně popsat slovy.

Obr. R1.6, 1–2: Třídění karet s fotografiemi učiteli na prvním stupni (L31, L33, L50); karty, které nebyly zařazeny, leží stranou

Učitelé zjistili, že jak oni, tak jejich žáci se pokusili nalézt postupy pro rychlé rozpoznání sudého a lichého počtu vrcholů a další postupy ke zjištění počtu vrcholů mnohoúhelníků vyššího stupně. Lze toho dosáhnout například ověřením, zda „rohy“ mají svůj protějšek či nikoli. Použití karet s fotografiemi objektů, jež mají více než dvanáct vrcholů, přirozeně vede k vytváření strategií a k argumentaci založené na obsažení nějakého mnohoúhelníků v jiném a na symetrii. Zpracování fotografie kola auta s paprsky je stále velmi působivé. Vysoký počet paprsků se prozradí pouze při použití postupu, který je založen na počítání odvozeném od počítání pěti šroubů (viz podkapitola R5).

Obr. R1.7: Třídění karet se symboly a s fotografiemi

Obr. R1.8, 1–2: Třídění karet se symboly a s fotografiemi

Zkušenosti s dětmi z mateřských škol a z první třídy: Vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků nebyly v popředí zájmu dětí. Místo toho byly otázky motivovány tím, co vlastně jednotlivé fotografie představují. Snad žádná fotografie pro ně nebyla nezajímavá, i když se třeba se souvisejícím tématem nesetkaly. To nám ukazuje, že může být vhodné vybírat obrázky nejen podle toho, do jaké míry představují pravidelný mnohoúhelník, ale také s ohledem na to, zda zobrazují téma, které je pro děti zajímavé.

Zajímavé možnosti se naskýtají učitelům, kteří mohou vytvořit vlastní sbírky fotografií, případně i s pomocí dětí. Rádi bychom ukázali jeden zajímavý příklad (obr. R1.7 a obr. R1.8, 1 – 2).

Chlapec na obr. 1.8,1 přiřadil podle svého úsudku kartu ke každé fotografii, ale neseřadil fotografie za sebou do propojené skupiny. Moderátorka musela k tomuto účelu zajistit vskutku mnoho symbolů, protože její karty k tomu nestačily.

Ukázalo se ale, že chlapec přiřadil velké množství fotografií naprosto správně a zopakoval tento výsledek v každém (dalším) případě. Je pozoruhodné, že si fotografie neseřadil předem podle jejich složitosti, ale bral je jednu po druhé z neuspořádané hromádky. K přiřazení zde tedy docházelo na základě okamžitého vhledu. Inspektor, který byl právě na návštěvě, spontánně prohlásil, že tato úloha je vhodná i pro děti na druhém stupni.

Obr.. R1.9, 1–3: Třídění karet se symboly a fotografiemi, řešitelé projektu (PP01)

R1.4 Závěrečné zamyšlení

Úlohy s kartami se symboly a s kartami s fotografiemi se nám jeví jako vhodné pro děti, u nichž se jazyk potřebný k popisu pravidelných mnohoúhelníků teprve začne vyvíjet. Tato situace podle našeho názoru není omezena na určitou věkovou skupinu, nýbrž je typická pro určité počáteční stadium znalostí. Tyto úlohy jsou také vhodné jako vstupní do této skupiny problémů pro žáky z vyšších věkových skupin a pro studenty učitelství a učitele.

Tyto úlohy lze navíc použít jako doprovodná cvičení v době, kdy se pracuje na jiných tématech, než jsou mnohoúhelníky. Tvoří vstupní bránu pro následující výuková prostředí, která není třeba brát v témže pořadí, v němž jsou prezentována zde. Zdá se nám možné použít podkapitolu R5 s názvem „Kola aut“ přímo po této části.

Učitel by si měl upravit tuto část podle sebe tak, aby mu byla vlastní. Věříme, že je možné použít karty se symboly v nezměněné podobě a vybrat z nich vhodně pro každý případ. Co se týká fotografií, budeme pochopitelně rovněž potěšeni, bude-li je možno úspěšně použít. Je ale ještě lepší, když učitel postupně nahrazuje fotografie vlastními, což se nám v době digitálních fotoaparátů nezdá nemožné. Dokonce věříme, že je možné, aby i děti postupně nahrazovaly fotografie vlastními obrázky, které najdou v časopisech či které nafotografovaly samy. Podobně jako autor si i ony mohou stanovit ambiciózní úkol vytvořit soubor fotografií, který bude obsahovat všechny pravidelné mnohoúhelníky od trojúhelníku k dvanáctiúhelníku.

R2 Podkapitola 2: Nákresy ciferníků

Materiál lze nalézt v depot, Depot na DVD.

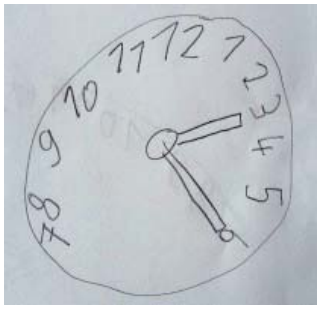
R2.1 Cíle podkapitoly

Cílem činností v této podkapitole je propojit pojem pravidelných mnohoúhelníků (od trojúhelníků po dvanáctiúhelníky) s ciferníky ručičkových hodin. Tím bude podpořena také práce v následujících podkapitolách R3 a R6, kde jsou ciferníky s hodinami a minutami používány jako podklad pro kreslení, zkoumání a popisování pravidelných mnohoúhelníků. Zkušenosti dětí a jejich znalosti týkající se ručičkových hodin mohou být v prvních letech na prvním stupni značně rozdílné. Proto považujeme za vhodné věnovat se před začátkem kreslení ciferníků hodinám jako součásti našeho života. Tato podkapitola pomáhá dětem osvojit si ručičkové hodiny pomocí ústního popisu a vlastních kreseb.

Činnosti pro žáky. Tyto činnosti se vztahují k určitým úlohám pro děti. Tuto podkapitolu lze popsat jako „jednu rozsáhlou úlohu“.

> *Kreslení.* Hlavní činnost spočívá v kreslení ciferníku zpaměti. Cílem je, aby si děti vybavily a zobrazily svou představu ručičkových hodin, jež vychází z jejich každodenní zkušenosti. Je zajímavé si všimnout, zda a jak si děti spojí představu

symetrie pravidelného mnohoúhelníka s obrazem ciferníku. Pokud tomu tak je, může být na předmětech běžné denní zkušenosti později založen abstraktnější popis pravidelného mnohoúhelníku.



Obr. R2.1, 1–2: Markus (1. ročník), Hendrik (1. ročník): Moje hodiny

Porovnávání. Lze předpokládat, že zkušenosti dětí a jejich představy ručičkových hodin jsou rozdílné. V důsledku toho budou též jejich kresby a postupy při kreslení *rozdílné*. Kromě kreslení je v této podkapitole podstatné, aby děti pochopily obrázky ostatních žáků, porovnaly je s vlastními a nakonec ve skupinách diskutovaly o svých obrázcích a postupech při jejich kreslení. Předpokládáme, že celková zkušenost všech dětí ve třídě na prvním stupni základní školy nakonec povede k bohaté a rozvětvené znalosti stavby a kresby ciferníku ručičkových hodin. Cílem je, aby tato vědomost byla předána co nejvíce dětem

Navrhujeme označit ciferníky jako „moje hodiny" společně se jménem dítěte, aby se tak ocenila vlastní jedinečná tvorba dětí. Tato pěkná myšlenka byla převzata z konceptu diagnostického rozhovoru vytvořeného Dougem Clarkem a jeho týmem (ENRP) pro matematiku v prvních školních letech. Typickým prvkem bylo, že dětem bylo dovoleno vzít si k rozhovoru „své vlastní hodiny". Následně byla kresba v rozhovoru využita.

Úkoly pro učitele. Podle našich zkušeností jsou kresby dětí velmi rozdílné, někdy vykazují odchylky od skutečných ciferníků. Bohužel není vždy možné přesně popsat použitý postup při kreslení na již hotové kresbě. Proto pro učitele formulujeme dvě úlohy.

Uspořádání. Snažte se přehledně uspořádat daný soubor dětských kreseb podle vámi vytvořených kategorií a obrázky slovně popište. Pokuste se také zjistit, které pravidelné mnohoúhelníky mohou být zakresleny do daného ciferníku.

Sledování postupu při tvorbě. Snažte se zachytit vývoj kreseb. Toho je možné dosáhnout odhadem vývoje již hotové práce či pozorováním dětí, když kresby vytvářejí.

R2.2 Formát úloh

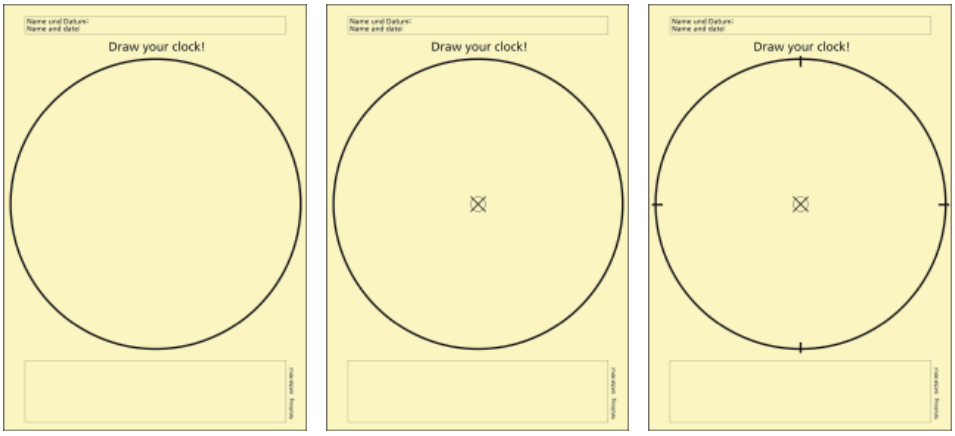
Úlohy jsou zadány ve formátu „*Podívej se – Udělej – Řekni – Napiš*", vrací se k vlastním představám dětí o hodinách a mohou být diferencovány pomocí různě strukturovaných údajů.

Úloha R2.1

Nakreslete své hodiny.
Pomůcky: Čistý papír či pracovní list 1, 2 či 3 (viz níže)

Úloha R2.2

Vysvětlete svou kresbu.
Pomůcky: Hodiny nakreslené dítětem



Obr. R2.2, 1–3: Pracovní listy: prázdný kruh, kruh se středem, kruh s vyznačenou 3., 6., 9. a 12. hodinou

Naše zkušenosti ukazují, že tyto úlohy jsou vhodné pro děti 0. ročníku (mateřské školy) a 1. až 4. ročníku a vedou k bohatým výsledkům. Děti mohou svůj obrázek vysvětlit ústně či písemně na pracovním listu. Různě upravené pracovní listy poskytují diferenciaci:

Pracovní list 1: prázdný kruh beze středu
Pracovní list 2: kruh se středem
Pracovní list 3: kruh se středem a značkami na 3., 6., 9. a 12. hodině; bez číslic

Pracovní listy lze nalézt na DVD v souborech depot, Depot k této podkapitole.

R2.3 Vyzkoušení úloh a práce žáků

Při zkoušení této úlohy jsme zjistili bohatou rozmanitost obrázků již u mladších ročníků, což ukazuje na zkušenost s ručičkovými hodinami, podrobné vnímání čísel a latentní znalost pravidelného dvanáctiúhelníku. Mnoho obrázků bylo vytvořeno pomocí nějakého systému či strategie. Všimli jsme si následujících hlavních typů sestrojování (Sch01):

1. „*Stočená stupnice*“. Použitím tohoto principu děti nakreslily téměř pravidelnou minutovou stupnici. Na začátku je možno číslicemi označit stupnici, zatočit ji do kruhu a pokusit se překrýt počátek s číslem 12. Část stupnic je správně rozdělena a druhá část ukazuje chyby v počtu minutových značek. Typickou vlastností těchto stupnic je, že mohou být vyřešeny přímo z kružnice a vytvořit jakéhosi stupnicového hada uvnitř kruhu (viz Jessica, obr. R2.3,1).

2. „*Technika čtvrtí*“. Při použití tohoto principu děti nejprve nakreslily značky pro 12, 6, 3 a 9 a doplnily je značkami pro zbývající hodiny. Někdy jsou zakresleny čáry spojující protilehlé značky, či alespoň první dvě z nich, takže se kruh jeví rozdělen na čtyři. Dětí obhajují a vysvětlují tyto postupy písemně (viz Jasmina, Nils, Christoph, obr. R2.3, 2–4).

3. Smíšené a zvláštní postupy. Lze nalézt způsoby sestrojení hodin, jež používají rozdělení kruhu na čtyři čtvrtiny a navíc i další osy symetrie. Často jsou značky na stupnici připsány později a nákres na papíře je při psaní čísel otáčen. (Jakob, 1. pokus, obr. R2.4). Tak na kresbě vznikají otáčená čísla. Někdy lze nalézt poznámky o zlomcích, které se vztahují k tvorbě kruhového objektu. Christoph (obr. R2.3, 4) zapisuje zlomky, ale s přehozenými místy pro čitatel a jmenovatel.

V adresáři depot, Depot je osm kreseb hodin žáků druhého ročníku, jež mohou učitelům sloužit jako zdroj informací o možnostech dětí.

Je smysluplné ukázat tyto obrázky dětem a požádat je o jejich utřídění či urovnání a porovnání s jejich vlastními kresbami.

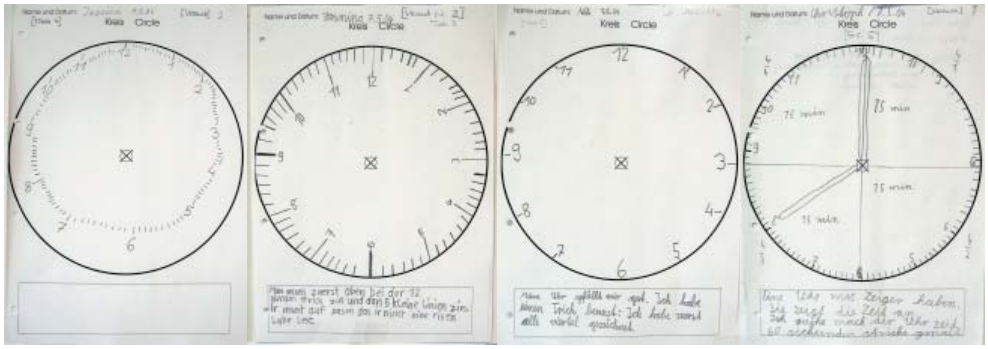
Komentáře dětí (k obr. R2.3)

2: Jasmina, 2. ročník, 2. pokus, popis: „Nejdřív musíš nakreslit čáru nahoře, poblíž 12, a pak zakreslit 5 malých čar. Musíš dávat pozor, abys nenechal velkou mezeru.“

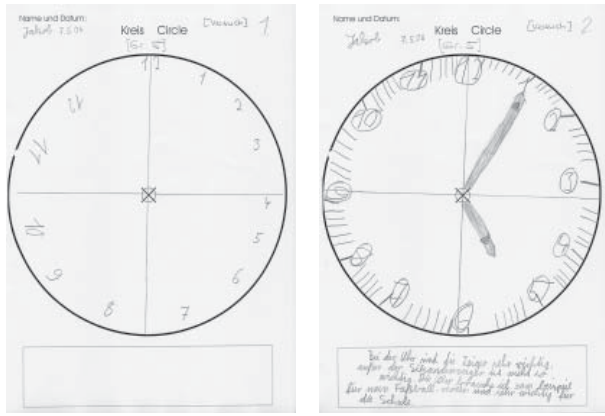
3: Nils, 2. ročník, 2. pokus, popis: „Moc se mi mé hodiny líbí. Použil jsem trik: napřed jsem nakreslil všechny čtvrtiny.“

4. Christoph, 2. ročník, 1. pokus, popis: „Hodiny musí mít značky. Ukazuje to čas. Koukal jsem se na hodiny. Domaloval jsem značky pro 60 vteřin.“

Když děti porovnávají své vlastní kresby s obrázky ostatních dětí, třeba ze třídy nebo ze souborů z DVD, ve většině případů je pak druhá kresba propracovanější a správnější než ta první. Obr. R2.4 ukazuje příklad dvou pokusů jednoho dítěte, Jakoba.



. Obr. R2.3, 1–4: Hodiny nakreslené žáky druhého ročníku



Obr. R2.4, 1–2: Jakobovy hodiny, první a druhý pokus s poznámkami

2: Jakob, 2. ročník, 2. pokus, popis: „Na hodinách jsou značky velmi důležité, ale značky pro vteřiny nejsou tak důležité. Potřebuji hodiny například pro svoje fotbalové družstvo, a to je pro školu velmi důležité.“

R3 Podkapitola 3: Kreslení pravidelných mnohoúhelníků do daných ciferníků

Materiál lze nalézt v depot, Depot na DVD.

R3.1 Cíle podkapitoly

Tato podkapitola je jádrem celé kapitoly o pravidelných mnohoúhelnících. Smyslem činnosti je umožnit žákům a učitelům kreslit pravidelné mnohoúhelníky s počtem vrcholů 3 až 12 a zkoumat jejich vlastnosti. Klíčová myšlenka podpory výuky zde spočívá ve vkreslování mnohoúhelníků do „ciferníků hodin“.

V tomto textu používáme termín *mnohoúhelník* vždy ve smyslu pravidelného mnohoúhelníku, podobně termín trojúhelník používáme ve smyslu rovnostranného trojúhelníku apod. V této podkapitole omezujeme mnohoúhelníky na trojúhelník až dvanáctiúhelník a nezabýváme se sedmiúhelníky, devítiúhelníky ani jedenáctiúhelníky. Zaměřujeme se tedy na „základní mnohoúhelník": skupinu 3: trojúhelník, šestiúhelník, dvanáctiúhelník; skupinu 4: čtverec, osmiúhelník a skupinu 5: pětiúhelník, desetiúhelník.

R3.2 Úkoly pro učitele

V celé podkapitole ukazujeme výukové prostředí vytvořené ke zkoumání a sestrojování mnohoúhelníků. Cílem je, aby si žáci osvojovali matematický základ tématu převážně samostatně, aktivní a objevitelskou cestou. Učitel by je měl podporovat. Proto představujeme úkoly pro učitele předtím, než popíšeme výukové prostředí dětí. Jejich smyslem je, aby učitelé byli obeznámeni s fakty a připravili se na možné obtíže.

Úkoly pro učitele R3.1. Matematická fakta týkající se pravidelných mnohoúhelníků
1. Jak nakreslíte pravidelný osmiúhelník, šestiúhelník, pětiúhelník?
2. Uměli byste navrhnout pravidelný květinový záhon s šesti vrcholy o průměru 5 m?
3. Které pravidelné mnohoúhelníky považujete za obtížně sestrojitelné? Jaké nástroje použitelné k jejich sestrojení znáte?
4. Které pravidelné mnohoúhelníky mohou být jednoduše sestrojeny pomocí pravítka a kružítka, které složitěji a které tímto způsobem sestrojeny být nemohou?
5. Popište pravidelný mnohoúhelník dvěma rovnocennými způsoby s ohledem na jeho geometrické vlastnosti. Jaké symetrie umíte najít?
6. Víte, jak rozdělit pravidelné mnohoúhelníky do skupin podle jejich symetrie? Které prvky a které struktury se zde objevují?

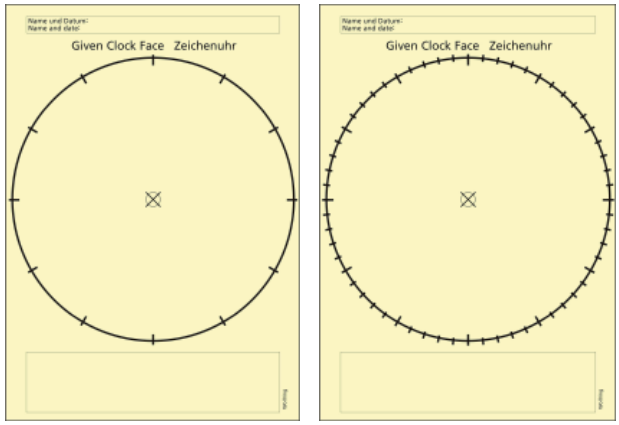
Úkoly pro učitele R3.2. Pravidelné mnohoúhelníky v hodině matematiky
1. Jaké vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků by měl znát každý učitel na základní škole, který kromě jiných předmětů učí i matematiku?
2. Znáte objekty, které mají tvar pravidelných mnohoúhelníků?
3. Které pravidelné mnohoúhelníky můžete vkreslit do hodinového ciferníku?
4. Které vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků považujete za přístupné žákům základní školy?
5. Se kterými pravidelnými mnohoúhelníky byste pracoval/a se žáky prvního stupně základní školy? Má toto téma pro ně vůbec smysl?
6. Které pravidelné mnohoúhelníky by měli znát žáci prvního stupně základní školy?

R3.3 Úkoly pro žáky, analytický přístup: Vepisování mnohoúhelníků do daných ciferníků ručičkových hodin

Základním nástrojem výukového prostředí této podkapitoly je „nákres ciferníku". Již žáci prvního stupně základní školy jsou s jeho pomocí schopni nalézt důležité vlastnosti a vazby u pravidelných mnohoúhelníků. Z pohledu hodiny matematiky na druhém stupni je možno jej nazvat úhloměrem s omezenou a neoznačenou stupnicí, na kterou je možno kreslit.

Na začátku žáci pracují s ciferníky s vyznačenými hodinami. Mohou do nich vkreslovat jednoduché mnohoúhelníky: trojúhelníky a čtverce. Ty znají nejlépe. Na spodu svého listu mohou poznamenat, jak postupovali, či komentovat výsledek, mohou opravit a změnit vytvořené vzory. Navíc mohou své mnohoúhelníky popsat pomocí čísel, například pomocí čísel na hodinách.

Následující pracovní list a další listy jsou uloženy v souborech depot, Depot.



Obr. R3.1, 1–2: Pracovní listy hodinový ciferník a minutový ciferník

Úloha R3.3

Do hodinového ciferníku nakreslete trojúhelník. Vidíte více možností, jak to udělat? Pokud ano, nakreslete další.

Pomůcky: Pracovní list „hodinový ciferník" se středem či bez něj

Úloha R3.4

Zapište svoje výsledky do prostoru pod obrázkem.

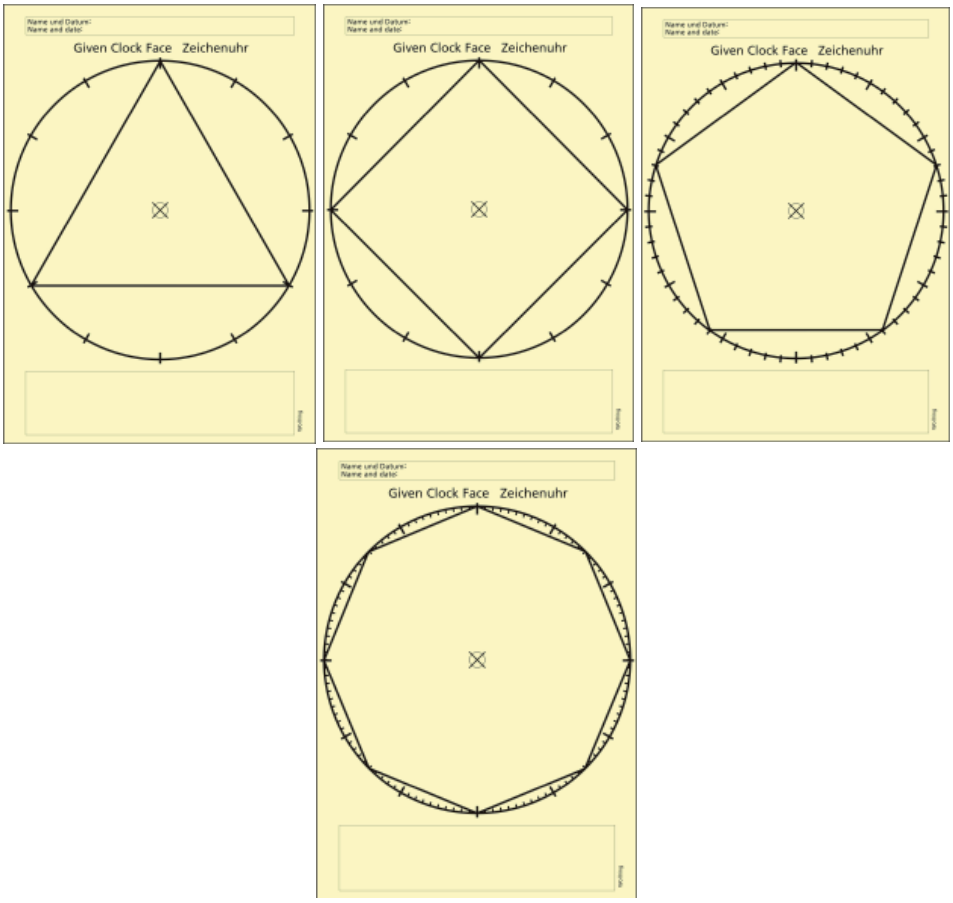
Pomůcky: Pracovní list „hodinový ciferník" se středem či bez něj

Úloha R3.5

Vyřešte předchozí úlohy pro čtverec.

Pomůcky: Pracovní list „hodinový ciferník“ se středem či bez něj

Pro zakreslení pětiúhelníku je třeba minutový ciferník. Číselný popis pětiúhelníku je obtížnější. Usnadňují jej minutové značky na ciferníku. Žáci by si měli uvědomit, že rovnostranný trojúhelník nebo čtverec lze nakreslit do hodinového ciferníku mnoha způsoby. Tato úloha je přípravou pro následující úlohy s naskládanými hvězdami.



Obr. R3.2, 1–4: Trojúhelník v hodinovém ciferníku, čtverec v hodinovém ciferníku, pětiúhelník v minutovém ciferníku, osmiúhelník v „půlminutovém ciferníku“

Úloha R3.6

Umíš nakreslit pětiúhelník do hodinového ciferníku? I ten pravidelný?
Pomůcky: Pracovní list „hodinový ciferník“ se středem či bez něj

Úloha R3.7

Jak by měl ciferník vypadat, aby do něj bylo možné nakreslit pravidelný pětiúhelník?
Pomůcky: Pracovní list „minutový ciferník“ se středem či bez něj

Úloha R3.8

Zapadá pravidelný pětiúhelník do minutového ciferníku? Pomáhá, že ciferník má 60 minut?
Pomůcky: Pracovní list „minutový ciferník“ se středem či bez něj

Úloha R3.9

Nakresli pětiúhelník do minutového ciferníku. Popiš, jak jsi uvažoval, počítal či kreslil.
Pomůcky: Pracovní list „minutový ciferník“ se středem či bez něj

Úloha R3.10

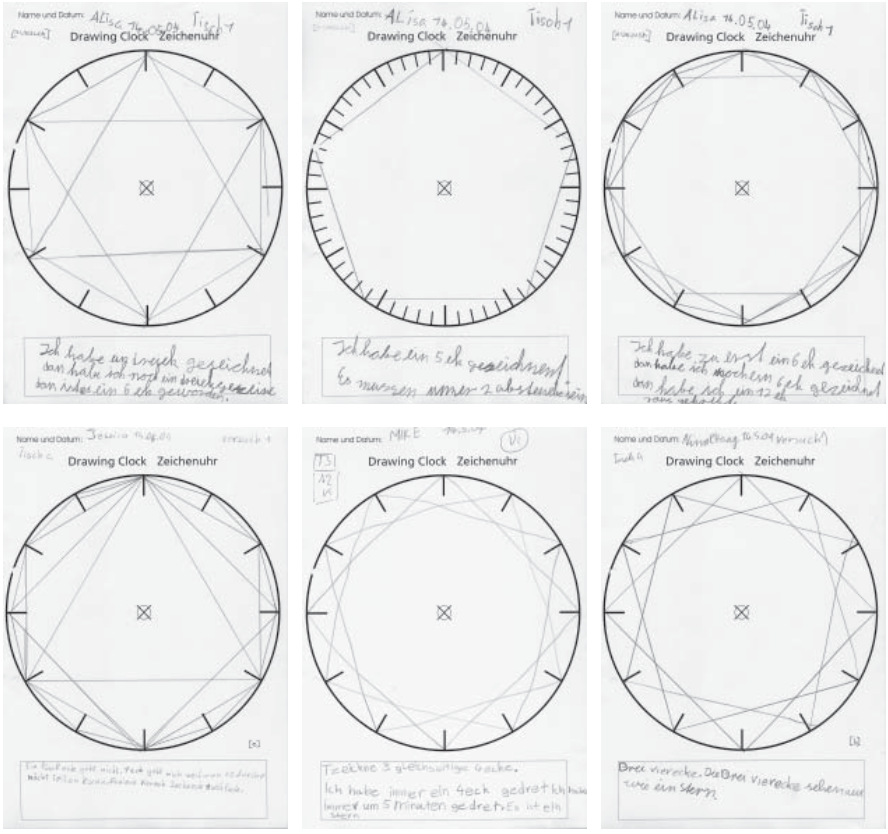
Zakresli do ciferníku nějaký pěkný tvar.
Pomůcky: Pracovní list „minutový ciferník“ se středem či bez něj

R3.4 Vyzkoušení úloh a práce žáků – kreslení do daných ciferníků

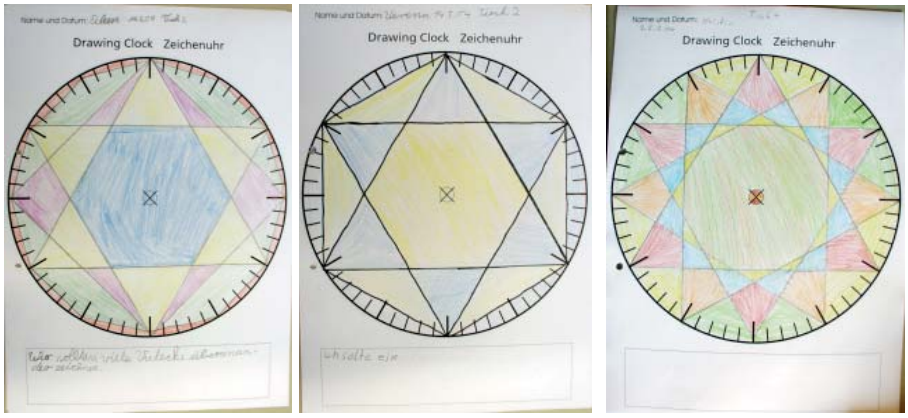
Ve všech zemích účastnících se projektu žákům povaha úloh vyhovovala a z části pracovali nad rámec požadovaného tématu. To platí pro první i druhý stupeň. Bohužel zde můžeme představit jen velmi málo z jejich tvorby. V adresáři Depot ukazujeme práci žáků ze zemí účastnících se projektu.

Vyzkoušení úloh v Německu; úlohy R3.3 – R3.10 (Sch01, Sch02)

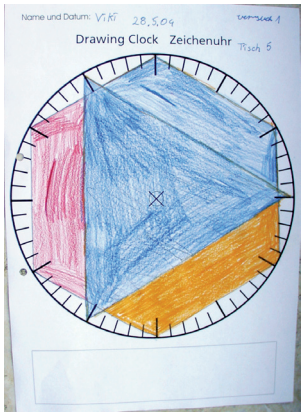
Hodinové rozčlenění ciferníku podporuje komunikaci, i když značky nejsou v daném ciferníku fyzicky vyznačeny. Jeden z našich druháků řekl: „Nakreslil jsem přímou čáru od 12 ke 4 a od 4 k 8.“ Také jsme si všimli aritmetického uvažování jako „12 děleno třemi jsou 4“.



Obr. R3.3, 1–6: Žákovské kresby mnohoúhelníků do ciferníků
(2. ročník, Německo, ze začátku vypracování)



Obr. R3.4, 1–3: Žákovské kresby mnohoúhelníků do daných ciferníků
(2. ročník, Německo)



Obr. R3.4, 4: Žákovské kresby mnohoúhelníků do daných ciferníků (2. ročník, Německo)

Vyzkoušení úloh v České republice; úloha R3.11 (Sch21, J. Michnova L43)

Ve čtvrté třídě v České republice jsme mohli při řešení pozorovat rozličné strategie.

Úloha R3.11

1. Nakreslete jeden „hodinový " čtverec do ciferníku, pak druhý a třetí.
2. Nakreslete jeden „hodinový" rovnostranný trojúhelník, pak druhý a nakonec třetí.
3. Které pravidelné „hodinové" mnohoúhelníky mohou být nakresleny do ciferníku? (volitelné)

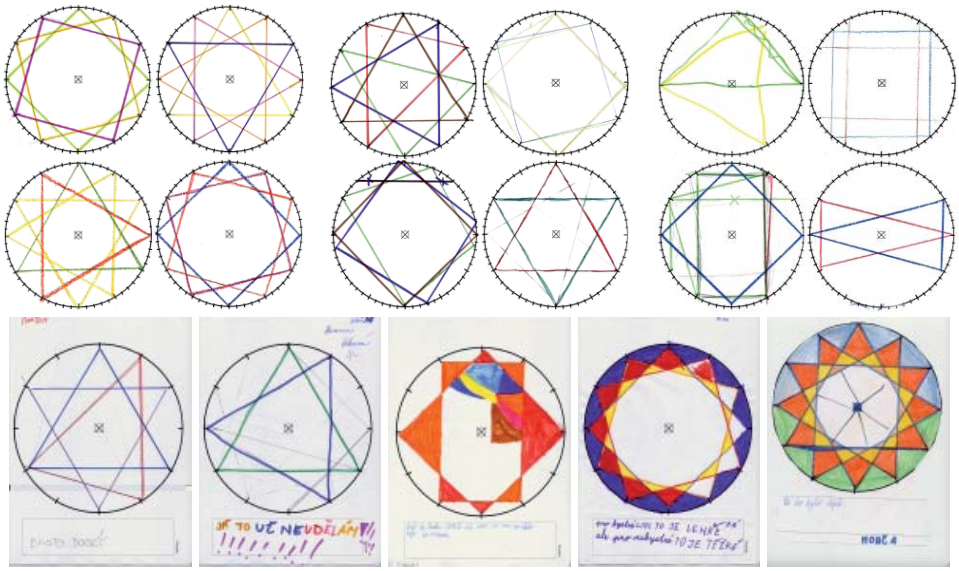
Postup A: Žáci spočetli délku strany (12:4). Jen málo žáků spočetlo délku na začátku, byli ale schopni najít správný směr úsečky. Většinou pracovali správně a neměli žádné problémy najít druhé a třetí zobrazení.

Postup B: Žáci odhadli délku strany. Tito žáci většinou odhadli první zakreslení správně, ale druhá a třetí kresba jim dělala potíže. Použili pak metodu pokus-omyl, kresbu zkracovali a prodlužovali, dokud nebyla správně.

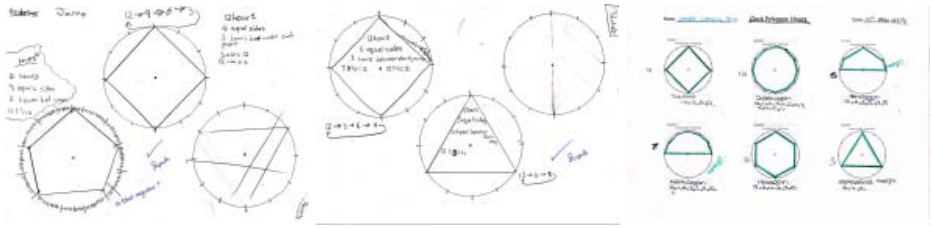
Postup C: Žáci požádali o pomoc své spolužáky. Někteří pak byli schopni najít vlastní způsob provedení a úlohu dokončili samostatně.

Vyzkoušení úloh ve Velké Británii, úlohy R3.3 – R3.10 (Sch11, Sch12)

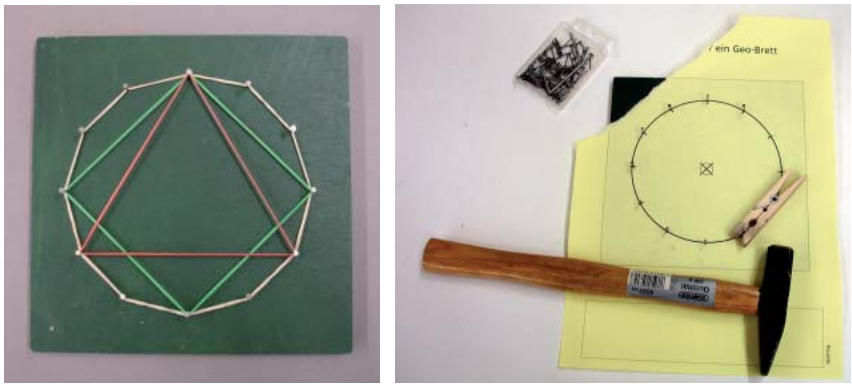
Úlohy vyzkoušené ve Velké Británii a v Německu se zvláště soustředily na dosažení cílů této podkapitoly pomocí experimentů: k provedení úloh lze využít i pomocnou destičku ve tvaru pravidelného dvanáctiúhelníku. Učitelé a žáci si ji mohou vyrobit sami.



Obr. R3.5, 1–8: Žákovská zakreslení mnohoúhelníků do ciferníku
(úloha R3.11, 3. a 4. ročník, CZ)



Obr. R3.6, 1–3: Žákovské kresby mnohoúhelníků v ciferníčích
(úloha R3.3 – R3.10, 4. ročník, UK)



Obr. R3.7, 1–2: Destička zobrazující dvanáctiúhelník a jak ji vyrobit s pomocí hodinového ciferníku

R3.5 Úlohy pro žáky, syntetický přístup: Vytváření mnohoúhelníků s naskládanými hvězdami

Zakreslování mnohoúhelníků do ciferníků je jedním z mnoha způsobů, jak objevit vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků. Nazýváme jej „analytickým přístupem", neboť mnohoúhelníky jsou nalezeny jako struktura skrytá v dvanácti- či šedesátiúhelníku. Popíšeme další přístup, „syntetický" – pravidelné mnohoúhelníky získané skládáním z mnohoúhelníků s méně vrcholy. Postup spočívá ve skládání mnohoúhelníků, jejich otáčení, sestavování do tvaru hvězd a následném kreslení mnohoúhelníků. Tímto způsobem mohou být prozkoumány pravidelné šestiúhelníky, osmiúhelníky, desetiúhelníky a dvanáctiúhelníky. Skládáním trojúhelníků lze kupříkladu získat šestiúhelník a dvanáctiúhelník.

Někteří zruční žáci ze stejné třídy či ze tříd vyšších mohou pro tuto činnost připravit dostatečně mnoho trojúhelníků, čtverců a pětiúhelníků. Většina vyrobených pomůcek se během práce zachovává, takže po nějaké době je k dispozici dostatečná zásoba. Také ale lze považovat za zvláště vhodné, aby si všichni žáci vyrobili svůj osobní materiál sami. K následujícím činnostem potřebuje každý žák alespoň čtyři trojúhelníky, tři čtverce a dva pětiúhelníky. Lze je vystřihnout z nákresů ciferníků, které jsou zkopírovány či překresleny na barevný papír.

Úloha R3.12. Příprava trojúhelníků, čtverců a pětiúhelníků

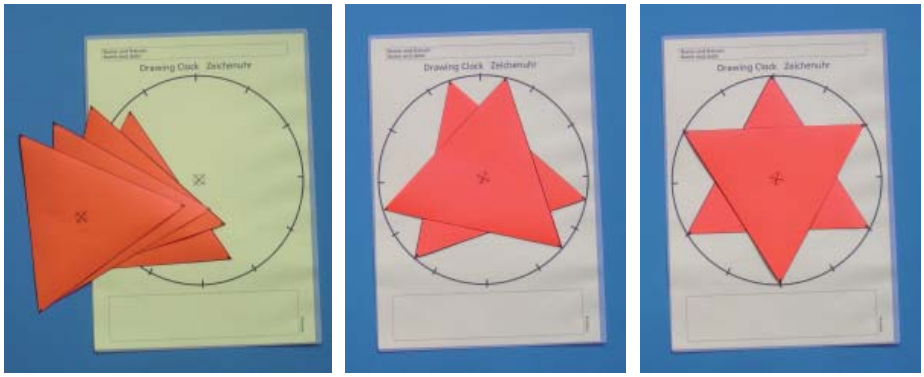
1. Připravte si čtyři nákresy hodinových ciferníků stejné barvy. Zakreslete do každého rovnostranný trojúhelník a vystřihněte je.
2. Připravte si tři nákresy hodinových ciferníků stejné barvy. Zakreslete do každého čtverec a vystřihněte je.
3. Připravte si dva nákresy hodinových ciferníků stejné barvy. Zakreslete do každého pětiúhelník a vystřihněte je.

Každý žák dále potřebuje nákres ciferníku na papíru (nejlépe na potažené lepence), se kterým může pracovat a psát na něj, a dále napínáček, který se umístí do vyznačeného středu ze zadní strany pracovního listu. Když pak pracovní list leží na stole, slouží napínáček jako střed otáčení pro naskládané obrazce.

Úloha R3.13. Vytváření pravidelných hvězd

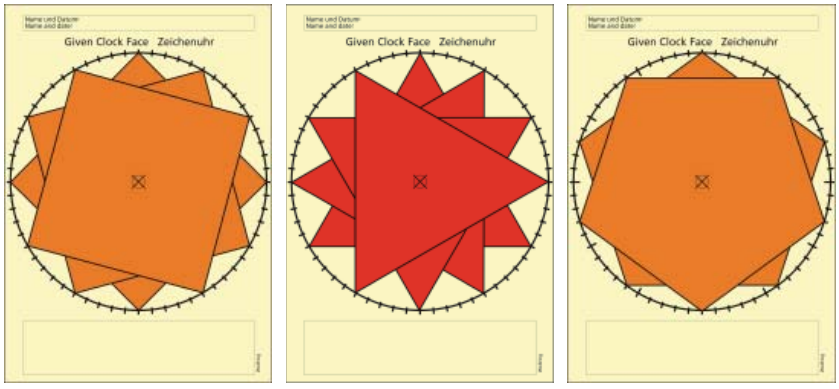
Příprava: Napínáčkem zezadu propíchněte střed vašeho nákresu ciferníku.

1. Vytvořte na ciferníku šesticípou hvězdu. Umístěte na něj dva trojúhelníky, propíchněte je napínáčkem, pohybujte jimi a pozorujte.
2. Spojte vrcholy cípů vaší hvězdy přímými čarami. Označte vrcholy trojúhelníků, abyste později mohli zrekonstruovat jak hvězdu, tak šestiúhelník.
3. Popište svoji činnost tak, aby byl jiný žák schopen sestrojit vaši hvězdu a mnohoúhelník.
4. Vyřešte tuto úlohu pro dvanáctiúhelník a desetiúhelník.



Obr. R3.8, 1–3: Šesticípá hvězda vytvořená pomocí skládání trojúhelníků (ze začátku práce na úloze)

Na DVD jsou uložena videa, kde lze zhlédnout, jak tuto úlohu provedl student učitelství: šesticípá hvězda ze dvou trojúhelníků, 6-star from 2 triangles 57sec, dvanáctícípá hvězda ze čtyř trojúhelníků 12-star from 4 triangles 57sec, dvanáctícípá hvězda ze tří čtverců 12-star from 3 squares 1m 27, od dvanáctícípé k šesticípé hvězdě from the 12-star to the 6-star 25sec, od dvanáctícípé k osmicípé hvězdě from the 12-star to the 8-star 33sec.



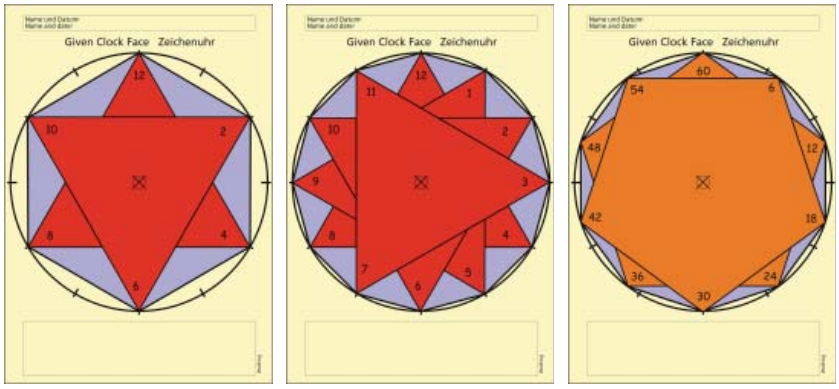
Obr. R3.9, 1–3: Dvanáctícípá hvězda pomocí tří čtverců; dvanáctícípá hvězda pomocí čtyř trojúhelníků; deseticípá hvězda pomocí dvou pětiúhelníků

Sestavování mnohoúhelníků s označenými poskládanými hvězdami. Poskládané hvězdy s označenými vrcholy lze poskytnout dalším žákům. Pomocí značek pak mohou sestrojit mnohostěn.

Úloha R3.14. Sestavování hvězd a mnohoúhelníků

Dostanete označené mnohoúhelníky s popisem. Složte popsanou hvězdu a nakreslete odpovídající mnohoúhelník do daného nákresu ciferníku. Podívejte se na svůj mnohoúhelník. Vezměte si nový papír, mnohoúhelník překreslete a vystřihněte jej.

Porovnávání hvězd a mnohoúhelníků. Nyní je možné porovnat nakreslený mnohoúhelník se skládanou hvězdou. Tak se zjistí, jak mohou být mnohoúhelníky s mnoha vrcholy vytvořeny pomocí mnohoúhelníků s méně vrcholy. Podmínka dělitelnosti týkající se počtu vrcholů se stává zřejmou.



Obr. R3.10, 1–3: Šestiúhelník, dvanáctiúhelník a desetiúhelník sestavený pomocí označených hvězd

Úloha R3.15. Porovnávání hvězd a mnohoúhelníků

Umístěte nakreslený a vystřižený mnohoúhelník na napínáček. Poté na něj umístěte složenou hvězdu. Ujistěte se, že je váš mnohoúhelník v pořádku.

Tato cvičení skýtají nové možnosti práce s pravidelnými mnohoúhelníky ve třídách od druhého do šestého ročníku. Tento způsob práce je výhodnější než kreslení mnohoúhelníků do ciferníků, neboť umožňuje vratnost provedení. V libovolném okamžiku je možná oprava směrem ke správnému tvaru.

R4 Podkapitola 4: Obrazové a číselné vzory v cifernících

Materiál lze nalézt v adresářích depot, Depot na DVD.

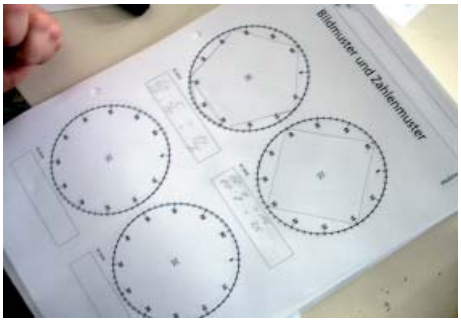
R4.1 Cíle podkapitoly

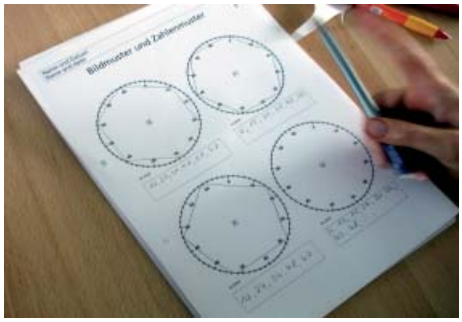
Smyslem činností popisovaných v této podkapitole je, aby žáci a učitelé se zkušenostmi získanými v předchozích úlohách rozpoznávali vztahy mezi obrazci a číselnými vzory a byli schopni je používat k odvození vztahů mezi geometrickými a aritmetickými strukturami. Dalším smyslem této podkapitoly je umožnit učitelům vymýšlet si vlastní úlohy, díky nimž se budou žáci dále rozvíjet.

Napřed jsme jako grafickou podporu pro kreslení pravidelných mnohoúhelníků používali nákresy ciferníků s dělením podle hodin či minut (podkapitola R.3). Pro tyto činnosti se samozřejmě předpokládá předchozí obeznámenost s vlastnostmi

ručičkových hodin (podkapitola R.2). Nicméně ciferníky nemají hodiny označené číslicemi jako na skutečných hodinách.

Úlohy této podkapitoly nejsou zaměřené na zkoumání hodin jako nástroje každodenního života, ale podstatné je použití struktury pravidelně rozděleného kruhu. Zároveň ale ciferníky podporují použití hodinové a minutové číselné struktury při kreslení pravidelných mnohoúhelníků do nákresů ciferníků. Ve většině našich vyzkoušených cvičení s použitím nákresů ciferníků používali učitelé i studenti psané výpočty k vyřešení úloh, kde měly být pravidelné mnohoúhelníky zobrazeny do nákresů ciferníků.





Obr. R4.1, 1–2: Číselné a obrazové vzory: Úlohy s dělením a posloupnostmi čísel (L21)

Aniž by byli požádáni, učitelé i studenti propojili číselné vzory s obrazovými a přirozeně rozvinuli obecnou myšlenku charakterizující matematické činnosti a objekty: prohlížení vzorů.

Používání pravidelností představuje obecný způsob, jak porozumět matematice. Britští účastníci projektu se také chopili tohoto nápadu. Vnímání matematiky jako vědy o pravidelnostech se v konstruktivistickém vidění výuky matematiky stále více uplatňuje. Pravidelnosti popisují modely či struktury, které pak mohou být analyzovány či systematicky rozvíjeny. V tomto obecném vidění matematiky je myšlenka vnímání pravidelných mnohoúhelníků pomocí rozvíjení pravidelností základem celé kapitoly.

Výpočty, které jsou přirozeně zapsány během kreslení pravidelných mnohoúhelníků, dokazují, že studenti a učitelé propojují geometrické pravidelnosti s aritmetickými či algebraickými a vytváří vztahy mezi nimi. Tento přístup bude systematicky popsán v následující podkapitole.

Nákresy ciferníků propojují kreslení pravidelných obrazců s číselnými pravidelnostmi. Na základě nákresu hodin může být mnoho základních geometrických pojmů uchopeno pomocí analytické geometrie. Propojení na klasickou analytickou geometrii je dáno použitím souřadnic v daném typu geometrie. Tyto souřadnice pochopitelně nejsou kartézské. Přístup odpovídá použití polárních souřadnic, které popisují body v rovině pomocí směru a vzdálenosti od středu.

R4.2 Forma úloh

Když jsme úlohy zkoušeli, mnoho studentů a učitelů přirozeně propojilo geometrické konstrukce v ciferníčích s aritmetickými výpočty. Aniž by o to byli studenti požádáni, používali čísla označující hodiny a minuty k popisu sestrojeného obrazce. To vedlo k následující základní formě úloh, kde jsou obrazové a číselné vzory srovnávány a propojeny s využitím nákresu ciferníku.

Úloha R4.1. Základní úloha

V nákresu ciferníku hledejte obrazové a číselné vzory.
Pomůcky: Pracovní list s několika minutovými ciferníky

Úloha R4.2. Základní úloha – vytváření úloh

Vytvořte úlohy s obrazovými a číselnými pravidelnostmi v ciferníku
Pomůcky: Pracovní list s několika minutovými ciferníky

Konkrétní provedení takových úloh rozdělujeme do několika typů. Tyto typy ukazují, jak pracovat s geometrickými a aritmetickými vzory.

0: Vstup do porozumění formátu úlohy		
Obrazové pravidelnosti	1 : ▶ 3 : ◀	Číselné pravidelnosti
2 : práce v daném prostoru		4 : práce v daném prostoru

Tab. R4.1: Typy úloh o obrazových a číselných pravidelnostech s nákresy ciferníků

Typy úloh jsou následující.

Typ 0: Přípravné úlohy. Tyto úlohy vysvětlují daný problém. Pomocí příkladu je tento typ úlohy představen a objasněn.

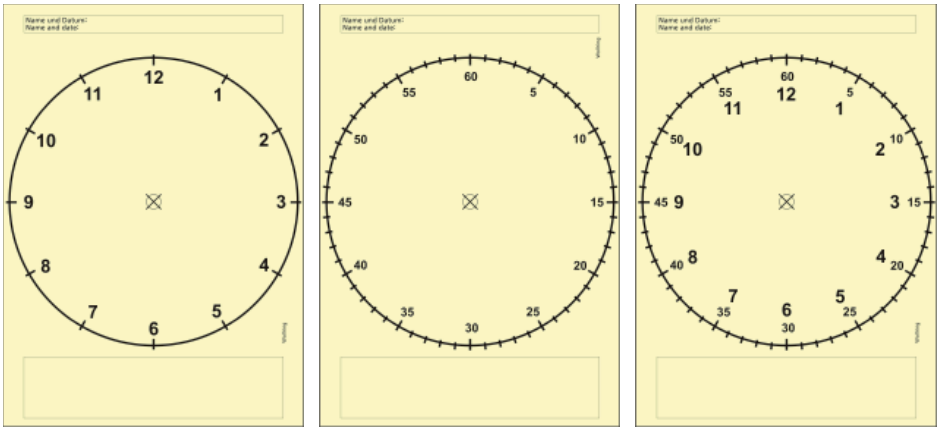
Typ 1: Od obrazových k číselným pravidelnostem. Smyslem těchto úloh je porozumět geometrickým pravidelným obrazcům, umět číst odpovídající čísla a popsat je či symbolizovat pomocí číselného záznamu. Podstatné je propojení pravidelnosti mnohoúhelníku s konstantními rozdíly mezi čísly či s výsledky dělení. Úlohy ukazující kontrast mezi pravidelnými a nepravidelnými mnohoúhelníky jsou také možné – stejně jako úlohy s různě umístěnými pravidelnými mnohoúhelníky, s různými počty vrcholů a s porovnáváním mnohoúhelníků s číselnými vzory.

Typ 2: Úlohy s obrazovými vzory. Smyslem těchto úloh je najít geometrický nákres odpovídající geometrickým požadavkům.

Typ 3: Od číselných záznamů k obrazovým. Tato část se zabývá nacházením mnohoúhelníků v nákresu ciferníku, přičemž se vychází z číselných záznamů v tabulkách či posloupností čísel, a vytvářením geometrického obrazu číselných vzorů: různých mnohoúhelníků, pravidelných mnohoúhelníků a mnohoúhelníků různě umístěných.

Typ 4: O číselných záznamech, kde jsou specifické geometrické vlastnosti popsány určitými vlastnostmi číselných vzorů. Tyto geometrické vlastnosti jsou pravidelnost, délky čar, rovnoběžnost a kolmost a existence symetrie. To lze vyžadovat pro obrazce, které mají určité geometrické vlastnosti, či pro předměty vykazující vlastnosti a vztahy, jež mohou být popsány určitými číselnými posloupnostmi.

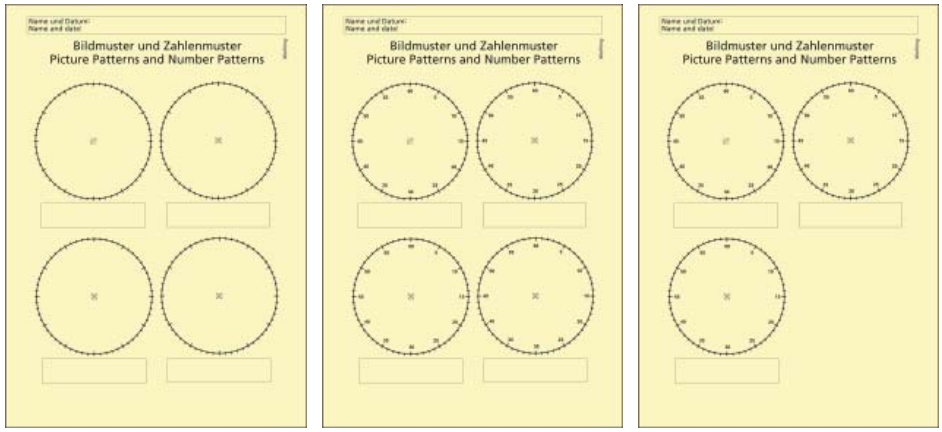
Pomocí této klasifikace lze popsat práci studentů v nákresech ciferníků. Jak již bylo řečeno v dřívějších podkapitolách, cílem této podkapitoly je specifickým způsobem vytvořit a rozebrat úlohy těchto typů. Studentům a učitelům jsme zadali i „designovou" úlohu, která sestává z vytváření obrazců za zvláštních podmínek. V následujícím odstavci napřed popisujeme formu úloh a poté postup při vytváření takových úloh učiteli.



Obr. R4.2, 1–3: Pracovní listy s ciferníky s číselnými značkami

Šest pracovních listů s úlohami týkajícími se propojení mezi obrazovými a číselnými vzory je uloženo v adresářích depot, Depot. Obr. R4.2 ukazuje hodinové a minutové ciferníky s různým dělením.

Během diskuze o úlohách se stával zřejmým požadavek porovnat rozdílné vzory v nákresech ciferníků. Proto jsme dodatečně vytvořili pracovní listy se třemi či čtyřmi nákresy ciferníků (obr. R4.3). Jsou ekonomičtější než ty s jedním ciferníkem, pokud jsou studenti schopni kreslit poměrně precizně. K pojmenování míst na cifernících používáme úmluvu „čísla hodin" a „čísla minut".



Obr. R4.3, 1–3: Pracovní list s několika nákresy ciferníků

Nejdříve uvedeme úlohy typu 1, které vedou od geometrických vzorů ke vzorům číselným.

Úloha R4.3

Do nákresu ciferníku zakreslete pravidelný šestiúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník. Zapište čísla vrcholů do tabulky. Jaké pravidelnosti vidíte?

Úloha R4.4

Do minutového ciferníku nakreslete dvanáctiúhelník s vrcholem na dvanácté hodině. Otočte dvanáctiúhelník doprava o 4 minuty. Na jakých číslech jsou vrcholy nyní?

Úloha R4.5

Do hodinového ciferníku zakreslete pravidelný dvanáctiúhelník a popište čísly osy jeho souměrnosti.

Úloha R4.6

Zvolte osy souměrnosti v pravidelném šestiúhelníku. Zapište zbývající vrcholy a podívejte se, jak jsou zobrazeny. Jaký číselný vzor vzniká?

Úloha R4.7

Do minutového ciferníku zakreslete pravidelný pětiúhelník. Pokuste se najít osu souměrnosti. Co vás zarazilo? Kolik čísel potřebujete k popisu? Pokuste se najít (číselné) zobrazení všech vrcholů pětiúhelníku. Jaký číselný vzor vzniká?

Dále následují úlohy typu 3, vedoucí od číselných vzorů ke geometrickým.

Úloha R4.8

Kterými „hodinovými čísly" jsou tvořeny vrcholy čtverce, jehož jeden vrchol je na druhé hodině?

Kterými „hodinovými čísly“ jsou tvořeny vrcholy šestiúhelníku, jehož jeden vrchol je na druhé hodině?

Úloha R4.9

Jsou dána „čísla hodin“ 5 a 7. Je možné s jejich využitím vytvořit v ciferníku vrcholy pravidelného mnohoúhelníku?

Úloha R4.10

Jsou dána „čísla hodin“ 12 a 24. Je možné s jejich využitím vytvořit vrcholy pravidelného mnohoúhelníku?

Úloha R4.11

Jsou dána „čísla hodin“ 2 a 5. Které pravidelné mnohoúhelníky v ciferníku mohou mít tyto vrcholy?

Úloha R4.12

Podívejte se na „čísla hodin“ 4, 8, 12, 16, atd. Jak může tato posloupnost pokračovat? Lze tak vytvořit pravidelný mnohoúhelník v minutovém ciferníku?

R4.3 Vyzkoušení úloh, práce studentů učitelství při vytváření úloh

Následující úlohy vytvořili učitelé základních škol a studenti učitelství (St11, St21, L11). Byli seznámeni s úlohami, kde prací žáků bylo kreslení mnohoúhelníků do nákresů ciferníků a které obsahovaly nevyžádané poznámky k výpočtům. Navíc znali typy úloh z tabulky R4.1 a byli požádáni, aby toto rozdělení používali.

Úlohy zde představené byly vybrány z 25 úloh, které jsou uloženy na DVD a poskytují vodítka pro hodnocení a třídění takových úloh. Díky těmto výsledkům si myslíme, že učitelé jsou po několika pokusech sami schopni si vytvořit takové úlohy pro vlastní použití ve školách. Studenti a učitelé běžně rozšiřovali danou oblast úloh o pravidelných mnohoúhelnících, aniž by o to byli žádáni. Tato činnost je použitelná ve dvou ohledech. Za prvé, úlohy vytvořené tímto způsobem mohou být určeny žákům. Za druhé, vytváření takových úloh je smysluplná činnost nejen pro praktikující a studující učitele, ale i pro žáky. Vytváření úloh umožňuje stejně bohaté objevování jako řešení úloh a souhra mezi vytvářením a řešením úloh otevírá zajímavé možnosti spolupráce a rozšiřování dovedností.

Úloha R4.13

Viz obr. R4.5, 1 a 2, pracovní list A00200, dvě verze (Version1 a Version2), typ 0 a typ 1. Tato úloha je přípravná. Ukazuje, že obrazce mohou být zobrazeny v očíslovaných hodinových či minutových ciferníčích. Navíc ukazuje, jak mohou být úsečky mnohoúhelníku popsány pomocí dvou čísel v malé tabulce dole. Úloha obsahuje přechod nad 12 a následně i nad 60. Kromě slovní složky

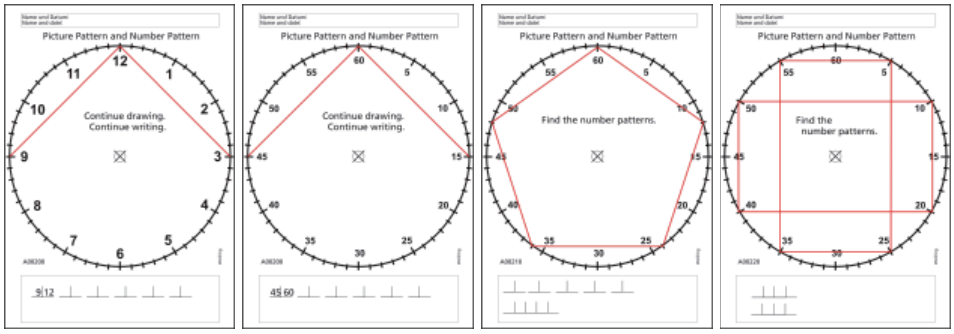
je vyžadován nákres, jak může být obrazec dokončen a jak se toto dokončení odráží v číselném zápisu.

Úloha R4.14

Viz obr. R4.5, 3, pracovní list A00210, typ 0 a typ 1. Je dán nákres pravidelného pětiúhelníku v označeném minutovém ciferníku, požadovány jsou číselné zápisy. Tato úloha může být přiřazena jak k typu 1, tak k typu 0, protože objasňuje zápis číselných vzorů: jednotlivé úsečky jsou zapsány pomocí dvou čísel do krátké tabulky naspodu, zatímco lomené čáry jsou zapsány do dlouhé tabulky.

Úloha R4.15

Viz obr. R4.5, 4, pracovní list A00220, typ 1. Tato úloha vyžaduje přiřazení číselných zápisů k daným obrazcům. Kromě slovní složky také vyžaduje popis pravidelnosti ve tvaru obdélníku i geometrický a aritmetický popis jejich vzájemné polohy. Tato úloha je vhodným úvodem k úloze R4.18.



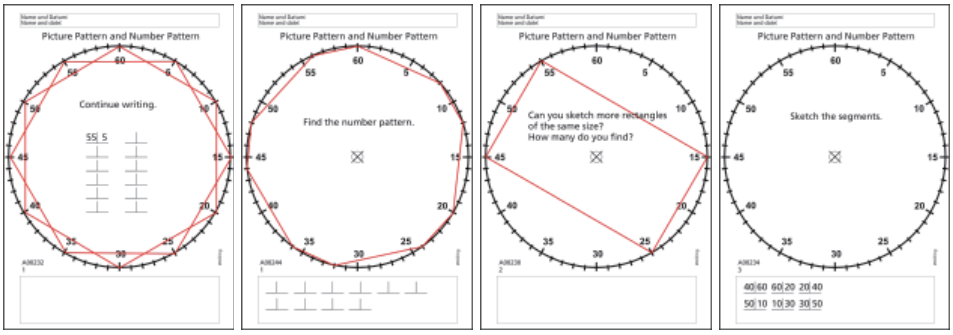
Obr. R4.5, 1–4: Pracovní listy pro úlohy R4.13 (2 pracovní listy) a R4.15

Úloha R4.16

Viz obr. R4.6, 1, pracovní list A00232, typ 1. Tato úloha požaduje zapsání číselných vzorů do nakreslených pravidelných šestiúhelníků. Implicitně je zde obsaženo prozkoumání vztahů mezi šestiúhelníky a jejich číselnou reprezentací. Podstatné je i pochopení, jak vypadá číselná reprezentace pětiúhelníku a jak se vytváří.

Úloha R4.17

Viz obr. R4.6, 2, pracovní list A00244, typ 1. Tato úloha především vyžaduje porozumění číselnému zápisu daného mnohoúhelníku. Úsečky jsou reprezentovány pomocí krátkých tabulek sestávajících ze dvou čísel. Úloha implicitně vyžaduje porovnání daných úseček a obrazců vzhledem k jejich geometrickému zobrazení i k jejich číselné reprezentaci. Mělo by být zjištěno, že zakreslený mnohoúhelník není pravidelný, ale souvisí s pravidelným desetiúhelníkem a pětiúhelníkem.



Obr. R4.6, 1–4: Pracovní listy pro úlohy R4.16, R4.17, R4.18 a R4.19

Úloha R4.18

Viz obr. R4.6, 3, pracovní list A00230, typ 2. Tato úloha využívá nápad s otáčejícími se obrazci v ciferníčích. Popis úlohy nicméně neobsahuje požadavek využít otáčení, spíše odkazuje na velikost obrazce. Na začátku je možné předběžně volně nakreslit několik shodných obdélníků. Druhá otázka týkající se čísel naopak vyžaduje systematické zkoušení. Zvláštní půvab této úlohy vychází z faktu, že obdélníky vytvořené otáčením leží po polovině otáčky přesně na sobě. Do jednoho minutového ciferníku se tedy vejde ne 60, ale 30 obdélníků stejné velikosti. Úloha patří k typu 3 nebo i 4, pokud se bude vyžadovat i číselná poloha vrcholů obdélníku.

Úloha R4.19

Viz obr. R4.6, 4, pracovní list A00234, typ 3. V těchto cvičeních jsou zadány číselné reprezentace a vyžadovány geometrické obrazce. Kromě kreslení je smyslem této úlohy i to, aby bylo zjištěno alespoň z kreseb, že výsledné trojúhelníky jsou rovnostranné. Úloha implicitně vyžaduje rozmyslet si stavbu druhé číselné posloupnosti před kreslením do obrázku. Pak je možno zjistit, zda obě posloupnosti vytváří pravidelný mnohoúhelník. Těžším úkolem je pokusit se předpovědět tvar obrazce před kreslením. Nakonec vznikne Davidova hvězda.

Úloha R4.20

Viz obr. R4.7, 1, pracovní list A00246, typ 4, type 3. Tato úloha je celá vytvořena v kontextu číselných vzorů. Není zde vůbec třeba kreslit a je necháno na učiteli, zda kresby také přijme či zda je vědomě potlačí. Otázkou zde je, zda daný číselný vzor vede k vytvoření pravidelného mnohoúhelníku, v tomto případě pravidelného patnáctiúhelníku. Samozřejmě, že to lze zkontrolovat pomocí nákresu. V tomto případě jde o úlohu typu 3. Nicméně, pokud je úloha vyřešena pouze aritmeticky, studováním struktury číselného vzoru a jeho interpretací *bez přímého kreslení,* pak se jedná o úlohu typu 4, obsahující skutečné použití *abstraktní reprezentace.*

Úloha R4.21

Viz obr. R4.7, 2, pracovní list A00252, typ 4. V této úloze je cílem dodat číselný vzor, který vzniká rozpoznáním aritmetické pravidelnosti. Pokud je řešení

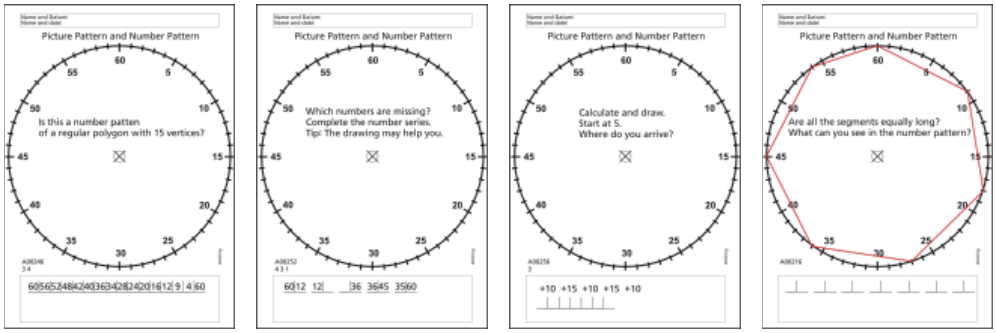
zjištěno početně, jde o úlohu typu 4. Kresba může sloužit jako podpora; vytvoří se lomená čára, kterou lze doplnit do šestiúhelníku. Pokud je řešení nalezeno za pomoci kresby, jedná se o úlohu typu 3 a také typu 1, neboť může sloužit při úvodním porozumění charakteru úloh i jako příprava pro úlohu R4.20.

Úloha R4.22

Viz obr. R4.7, 3, pracovní list A00256, typ 4, typ 3. Tato úloha vyžaduje vytvoření tabulky pomocí vhodných výpočtů; patří tedy k typu 4. Pokud nakreslíme příslušné geometrické vzory, uvidíme sedmiúhelník, který má pravidelné rysy, ale pravidelný není. Tato úloha může být obměněna několika způsoby. Jeden způsob je vynechat počáteční pobídku „začněte na pěti". Pak lze předpokládat, že obrazce v řešení jednotlivých žáků budou proti sobě pootočeny. To může být inspirací k dalšímu zkoumání. Jinou možností je například řešení problému, kde by měly být vrcholy situovány, aby byl sedmiúhelník pravidelný.

Úloha R4.23

Viz obr. R4.7, 4, pracovní list A00216, typ 2, typ 1, typ 3 a 4. Tato úloha může zahrnout všechny čtyři typy. Otázka týkající se rovnosti délek úseček může být přímo zodpovězena s pomocí nákresu (typ 2). Tímto jsou zjištěny rovnosti a nerovnosti úseček tvořících mnohoúhelník. Ukazuje se ale, že většina řešitelů, žáků stejně jako učitelů, začíná pracovat na problému délky úseček přesunem do oblasti číselných vzorů. K tomuto účelu musí být číselné vzory vytvořeny celé nebo alespoň z části (typ 1). Dvojice čísel poskytují odhad délky úseček mnohoúhelníku, nicméně je třeba dávat pozor a nepoužívat tento rozdíl k měření délky úseček (tato míra nemusí být rovnoměrná). Stejná délka úseček může být zjištěna z číselného vzoru (typ 4) a odpovídající struktura číselných vzorů může být interpretována geometricky (typ 3).



Obr. R4.7, 1–4: Pracovní listy pro úlohy R4.20, R4.21, R4.22 a R4.23

Z vyzkoušení úloh vyplynulo, že žáci na prvním i na druhém stupni jsou schopni pracovat s předloženými nově vytvořenými úlohami a že jsou nejen schopni zacházet s úlohami, jak jsou zde popsány, ale také jsou schopni sami vytvářet vlastní úlohy obměňováním daných úloh či vytvářením nových nápadů, a konečně, že dokáží rozlišit typy úloh, jak jsou popsány v tabulce R4.1, str. 72.

R5 Podkapitola 5: Kola aut

Materiál je uložen v adresářích depot, Depot na DVD.

R5.1 Cíle podkapitoly

Předchozí podkapitola ukázala, jak mohou být vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků představeny různými způsoby, pomocí reálných objektů a konstrukcí. Nákresy ciferníků poskytují formální nástroj napomáhající sestrojování, který využívá znalosti skutečných hodin.

V této podkapitole, kterou lze použít před kapitolou o ciferníčích či po ní, se zaměříme na objekty, které zobrazují vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků. Práce s koly aut může být užitečná na poli matematických aplikací i pro vytváření intuitivních vědomostí o pravidelných mnohoúhelnících.

Kola aut lze nalézt opravdu všude. Kola aut zná každý žák prvního stupně – dívky stejně jako chlapci. Kola aut vnímáme všichni denně, ač někdy podvědomě. Zkušenost s koly aut je „spící" znalostí, která může být jednoduše použita či rozvinuta. Kola aut tedy poskytují bohatou nabídku možných modelů pravidelných mnohoúhelníků.

Cíl této podkapitoly může být určen dvěma způsoby:

> *Od matematického konceptu ke skutečným objektům.* Učitelé a studenti mají popsat kola aut odpovídajícími termíny vztahujícími se k pravidelným mnohoúhelníkům, dokončit kresbu neúplného kola auta a kola systematicky roztřídit.
>
> *Od objektů k matematickému konceptu.* Vycházejíce z vlastní zkušenosti z každodenního života, učitelé a studenti mají systematicky formulovat geometrické vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků a umět pojmenovat a pochopit prvky jejich stavby.

Výhoda kol aut je, že jsou vázána k jazyku, se kterým jsou děti obeznámeny. S pomocí jazyka tak lze geometrické vlastnosti pojmenovat a pak vyjádřit matematickým jazykem. Díky zvláštní struktuře kol jsou geometrické vlastnosti velmi důležité, protože mohou vyjádřit mnoho matematických informací. Rádi bychom tedy ukázali některé vlastnosti kol aut, které mohou být použity k přesnému popisu, předtím, než představíme některé specifické úkoly.

- *Výběr kol aut (disků):* Zajímáme se pouze o celkový pohled na kola aut, přičemž osa kola udává směr pohledu. Protože slitinová kola automobilů vykazují v různých vlastnostech bohatou škálu provedení, omezíme své zaměření pouze na tyto disky a kola.
- *Vlastnosti paprsků kol:* První z rysů kol aut, na který se zaměříme, jsou jejich paprsky (pokud jsou rozlišitelné). Většina kol aut vytváří z paprsků obrazce, které jsou osově souměrné. Některé jsou středově souměrné, ale nikoli osově souměrné. Většina vzorů vytvářených paprsky je osově souměrných a může být popsána pomocí pravidelných mnohoúhelníků.

– *Počet paprsků od 3 do 12:* Počet paprsků je překvapivě velmi rozmanitý. Můžeme najít kola aut s celkovým počtem paprsků od tří do dvanácti a všechny v jednom evropském městě. Lze najít i různá kola aut s vyšším počtem paprsků.
– *Vlastnosti šroubů:* Druhým rysem kol aut, který nás zajímá, jsou šrouby. Jiné vzory jsme nenalezli. Šrouby jsou vždy uspořádány do tvaru pravidelného mnohoúhelníku. Lze tedy rozlišovat mezi koly, kde je tvar určen šrouby, a koly, kde je tvar určen paprsky. Vezmeme-li v úvahu osovou symetrii šroubů i paprsků, je vidět, že je možné využít největšího společného dělitele vrcholů pravidelného mnohoúhelníku.

Tyto vlastnosti ukazují, že popsané úlohy s koly aut poskytují mnoho matematických podnětů. Přítomnost kol aut v našem běžném životě nabízí i otázku, zdali jsou kola aut vhodným „ukotvením" pro matematické téma pravidelných mnohoúhelníků, podobně jako ručičkové hodiny.

R5.2 Forma základních a rozvíjejících úloh

Podle našeho názoru je tedy na prvním stupni rozumným cílem, aby žáci byli schopni odpovídajícím jazykem popsat vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků či sestrojit pravidelné mnohoúhelníky s využitím zkušeností s koly aut. Základní úlohy, podle vzoru *„podívej se –udělej – řekni – napiš"* mohou být následující.

Úloha R5.1. Základní úloha – Popis kol aut
Zde je kolo auta. Kolik má paprsků a šroubů?
Pomůcky: Fotografie kola auta

Úloha R5.2. Základní úloha – Prozkoumávání kol aut
Podívejte se na parkoviště pro učitele. Vidíte auta, která mají kola uchycena šesti šrouby? Která kola se vám nejvíc líbí? Proč? Pokuste se je nakreslit.

Úloha R5.3. Základní úloha – Vytváření strategie k rozpoznání konstrukčního plánu
Kolik šroubů má toto kolo? Jak jste k tomu došli?
Pomůcky: Fotografie kola auta s pěti šrouby a dvaceti paprsky (BMW)

Úloha R5.4. Základní úloha – Vytváření početních postupů
Zde je velmi zvláštní kolo. Patří k britskému autu Daimler. Paprsky jsou vytvořeny z drátů. Kolik paprsků má toto kolo? Jak jste počítali?
Pomůcky: Fotografie kola auta s pěti šrouby a sedmdesáti paprsky (Daimler)

Úloha R5.5. Dokreslování kol aut, která jsou částečně zakryta
Dokreslete zakrytou část kola.
Pomůcky: Pracovní listy s částečně zakrytými koly aut (obr. R5.4, R5.5, R5.6, R5.7 atd.)

Obr. R5.1, vlevo: Fotografie kola auta s šesti šrouby a dvaceti paprsky (BMW)
Obr. R5.2, vpravo: Fotografie kola auta s pěti šrouby a sedmdesáti paprsky (Daimler)

Úloha R5.6. Základní úloha – pokročilé konstrukce a postupy

Umíte zakrýt část kola tak, aby jiná osoba mohla nakreslit celé kolo podle nezakryté viditelné části?

Pomůcky: Fotografie kola auta, papír k zakrytí kola auta, nůžky, pokud budou třeba, kopírka

Následující rozčlenění ukazuje, jak se k sobě úlohy vztahují podle svého účelu.

Kola aut Typ 2: práce v daném prostoru	Typ 1 : ► Typ 3 : ◄	Pravidelné mnohoúhelníky

Tab. R5.1: Typy úloh s koly aut a pravidelnými mnohoúhelníky

Následující typy samostatně či v kombinaci určují úlohu.

Typ 1. Úlohy, které vedou od kol aut k pravidelným mnohoúhelníkům. Tyto úlohy se týkají objevování a popisování geometrických vlastností pravidelných mnohoúhelníků využitím pozorovaných vlastností kol aut.

Typ 2. Úlohy s koly aut používající jazyk typický pro tento objekt. V těchto úlohách se jedná o popis vlastností a dotvoření nákresů konstrukcí, které nebyly dokončeny. Není nutné odlišovat či nepoužívat jazyk běžně užívaný k popisu kol.

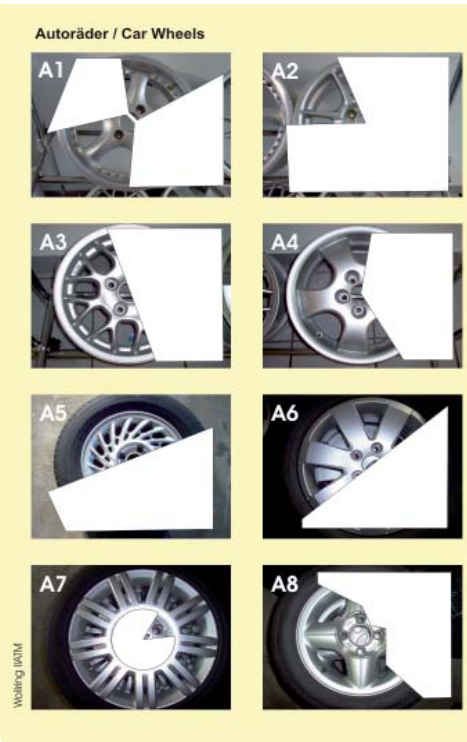
Typ 3. Úlohy, které vedou od pravidelných mnohoúhelníků ke kolům aut. Tento typ úlohy vyžaduje znalost geometrických vlastností mnohoúhelníků. Spočívá v rozpoznávání symetrických struktur ve tvaru pravidelného mnohoúhelníku a využití pravidelné stavby kol při jejich kreslení.

S pomocí tohoto rozčlenění lze práce studentů a učitelů týkající se kreslení pravidelných mnohoúhelníků systematicky popsat.

Úloha R5.7. Zkoumání počítáním

Kolik mají tato kola paprsků? Kolik otvorů pro šrouby mají?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot



Obr. R5.3, vlevo: Pracovní list se sbírkou fotografií: kola aut, skupina A
Obr. R5.4, vpravo: Pracovní list se sbírkou fotografií: kola aut, skupina A s překrytím

Úloha R5.8. Jednoduché použití

Kolik šroubů je třeba na uchycení všech kol auta?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot

Úloha R5.9. Rozpoznávání a porovnávání podstatných vzorů

U kterých kol odpovídá uspořádání paprsků uspořádání šroubů? Které vzory si neodpovídají?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot

Úloha R5.10. Estetické hodnocení

Která kola se vám nejvíce líbí? Proč?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot

Úloha R5.11. Popisem k rozpoznání

Představte si, že váš kamarád stojí před policí s těmito osmi koly a nezná příslušné údaje. Vyberte si kolo a popište je tak, aby byl váš kamarád schopen je pro vás vybrat.

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot

Úloha R5.12. Rozlišování osové a středové symetrie

Představte si, že auto je osazeno jednou sadou takových kol. Která kola vedou k tomu, že auto vypadá jinak zleva a zprava? Proč?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut, skupina A“, viz adresář depot, Depot

Tyto úlohy jsou míněny jako úvodní, je vhodné je zařadit před vytvářením nových úloh.

Podle základních úloh „sestrojování“ a „vytváření strategií/postupů“ byly vytvořeny následující úlohy pro žáky od druhého ročníku. Pro tyto úlohy se používá pracovní list „sbírka kol aut s překrytím, skupina A“ či jiné vhodné pracovní listy.

Úloha R5.13, 1. Nalézání všech paprsků

Zde jsou zobrazena kola aut, ale jsou částečně zakryta. Kolik paprsků vidíte na jednotlivých obrázcích a kolik jich má každé kolo?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut s překrytím, skupina A“, pracovní listy A a B – viz adresář depot, Depot

Úloha R5.13, 2. Nalézání všech šroubů

Zde jsou zobrazena kola aut, ale jsou částečně zakryta. Kolik děr pro šrouby vidíte na jednotlivých obrázcích a kolik jich má každé kolo?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut s překrytím, skupina A“, pracovní listy A a B – viz adresář depot, Depot

Úloha R5.14. Nalézání všech paprsků

Zde můžete vidět kola aut, ale jen z části. Pokuste se nakreslit celá kola. V kterých případech je to jednoduché a kdy složité? Pro která kola to není vůbec možné?

Pomůcky: Pracovní list „sbírka kol aut s překrytím, skupina A“, pracovní listy A a B – viz adresář depot, Depot

Následující typ úloh má propojit strukturu kol aut se strukturou pravidelných mnohoúhelníků. Na vhodném pracovním listu je kolo opsáno kruhem v hodinovém či minutovém ciferníku.

Úloha R5.15

Zde jsou kola aut zobrazena v hodinovém či minutovém ciferníku. Nakreslete jeden či více pravidelných mnohoúhelníků, jejichž struktura odpovídá kolu.

Pomůcky: Pracovní list „kolo auta v kruhu“ či „kolo auta v minutovém ciferníku“ či „kolo auta v hodinovém ciferníku“– viz adresář depot, Depot.

Obr. R5.5, vlevo: Kolo s dvanácti paprsky a čtyřmi šrouby uzavřené v minutovém ciferníku k úloze R5.15
Obr. R5.6, vpravo: Pracovní list s překrytím KS1 k úloze R5.6 a R5.14

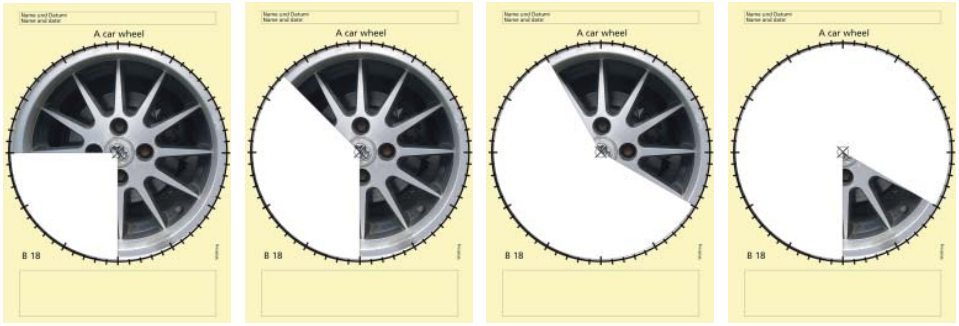
Je vhodné si rozmyslet, zda hodinový či minutový ciferník odpovídá příslušnému kolu či nikoli a zda existují jiná vhodná rozčlenění kruhu – například takové, které vzniká z postupného půlení kruhu.

V našem materiálu je překrytí kol ze skupiny A tvořeno nepravidelným mnohoúhelníkem. Pro naše žáky druhého ročníku byly tyto úlohy složité. Proto jsme vytvořili pracovní listy k doplnění základní úlohy R5.6 „Dokreslení kola auta, jež je z části zakryto“, kde jsou jednotlivá kola umístěna v minutovém ciferníku a překrytá část má tvar kruhové výseče. Tato úloha může být rozšířena použitím nejrůznějších kol a tvarů překrytí.

Na pracovních listech k této úloze je fotografie kola auta vložena do minutového ciferníku. Struktura ciferníku či pravidelných mnohoúhelníků, které jsou tam zakresleny, pak může být využita při řešení úlohy. Pokud je struktura ciferníku využita, úloha je typu 3, jinak je typu 2. Tento typ úlohy reprezentuje velkou skupinu podobných úloh s následujícími možnostmi rozrůznění:

1. Volba tvaru: V tomto případě jsme zvolili kolo se čtyřmi šrouby a dvanácti paprsky. Ty jsou uspořádány tak, že všechny čtyři osy souměrnosti čtyřúhelníku tvořeného šrouby odpovídají osám symetrie dvanáctiúhelníku vytvářeného paprsky. Tak tomu není u všech kol se čtyřmi šrouby a dvanácti paprsky, ale platí to v tomto případě. Toto kolo je vloženo do

minutového ciferníku tak, že paprsky ukazují na značky hodinové stupnice. Hodiny a vložené kolo si tedy dobře odpovídají, což nemusí obecně platit pro všechna kola. Bohužel fotografie našeho kola se lehce odchyluje od přesného tvaru, takže umístění v ciferníku není zcela přesné. Žákům to však nijak nevadilo.



Obr. R5.7: Pracovní listy s překrytými koly: různá překrytí, zleva doprava KS2, KS3, KS4 a KS5

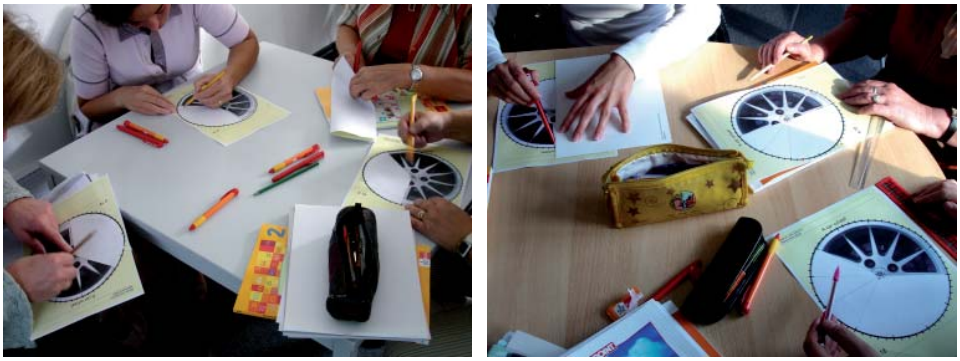
2. Volba tvaru překrytí: Kolo je na různých pracovních listech překryto kruhovými výsečemi. Je mnoho možných tvarů překrytí, ale i kruhové výseče samy o sobě vytváří nepřeberné množství možností. Používáme kruhové výseče, jejichž střed odpovídá středu ciferníku i kola. Pro toto kolo používáme následující kruhové výseče:

Překrytí KS1: od 30. do 60. minuty
Překrytí KS1: od 30. do 60. minuty
Překrytí KS2: od 30. do 45. minuty
Překrytí KS3: od 30. do 52. minuty
Překrytí KS4: od 20. do 55. minuty
Překrytí KS5: od 20. do 30. minuty

R5.3 Vyzkoušení úloh, práce učitelů a žáků

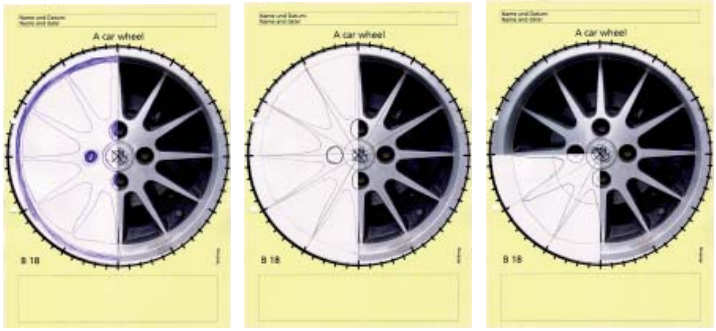
Pro vyzkoušení těchto úloh jsme zvolili skupinu učitelů základních škol. Učitelé používali rozmanité strategie a improvizované nástroje k dotvoření obrázku. Při řešení implicitně vyžívali strukturu ciferníku, která je studentům i učitelům již dobře známa.

Úlohy týkající se symetrie můžeme považovat za správně vyřešené, když počet paprsků a jejich poloha na značkách minut jsou správně téměř na všech řešeních, osy souměrnosti jsou částečně zakresleny.



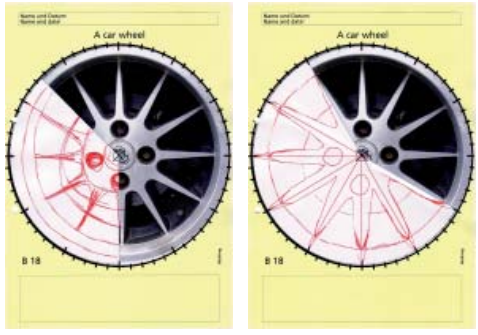
Obr. R5.8: Učitelé základních škol dokreslují překrytá kola

Všechna řešení úloh s překrytím KS1 a KS2 vykazují správné zakreslení paprsků a téměř správný obrazec vytvořený šrouby. S překvapením jsme shledali, že tak tomu již není u překrytí KS3 a KS4.



Obr. R5.9, 1–3: Práce učitelů základních škol: Dokončená překrytá kola se zakreslenými paprsky, překrytí KS1 a KS2, řešení s osami symetrie a bez nich

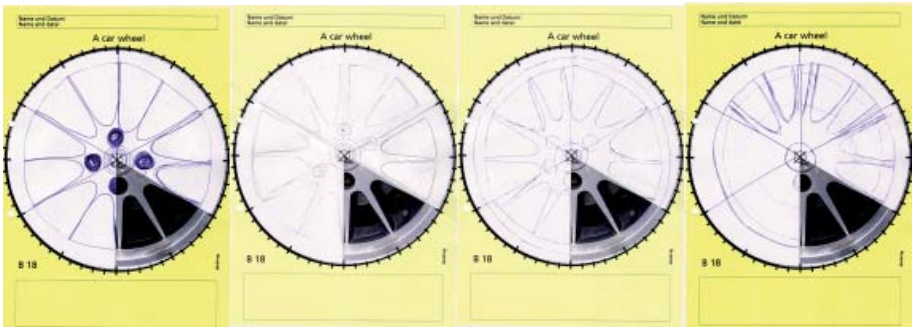
Kraje kruhové výseče byly zčásti rozpoznány jako osy symetrie a v tomto smyslu použity, takže několik dotvoření je zřejmě založeno na myšlence opakovaného použití souměrnosti.



Obr. R5.10, 1–2: Práce učitelů základních škol: Dokončená překrytá kola se zakreslenými paprsky, překrytí KS3 a KS4, lehce nesprávné zakreslení šroubů

Úlohy s překrytím KS5 jsou zjevně velmi náročné. Paprsky na našem pracovním listu jsou vskutku umístěny lehce nepřesně. Předpokládali jsme, že učitelé na základě znalostí kol nejen naleznou pravidelné rozmístění paprsků, ale i zjistí, že šrouby jsou uspořádány do pravidelného čtyřúhelníku. Tak tomu ve všech případech nebylo.

Co se týká pravidelnosti vzoru vytvářeného paprsky, nic nebylo zmíněno ani v textu, ani při ústním podání. Správně pravidelně zakreslené vzory vytvářené šrouby lze tedy vnímat jako známky pokročilé znalosti symetrie a technologie kol.



Obr. R5.11, vlevo: Práce učitele základní školy: Dokončená překrytá kola se zakreslenými paprsky, překrytí KS5, správně zakreslené paprsky i čtverec ze šroubů

Obr. R5.12, 1–3: Práce učitelů základních škol: Dokončená překrytá kola se zakreslenými paprsky, překrytí KS5, nepřesné či nesprávné vzory vytvářené paprsky a chybějící či nesprávný nesymetrický čtyřúhelník vytvořený šrouby.

Základní úloha R5.6 vyžaduje vytvoření takových překrytí, aby mohly být vytvořeny smysluplné úlohy spočívající v dokreslování kol.

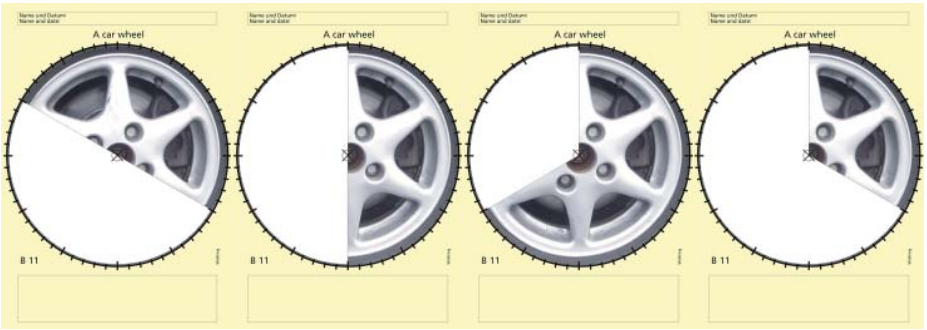
Úloha R5.16. Základní úloha „pokročilé konstrukce a postupy“

Připravte si několik kruhových výsečí překrývajících toto kolo. Někdo jiný by měl poté nakreslit celé zakryté kolo. (Je třeba mít k dispozici pracovní list náležící k úloze „dokreslení částečně překrytého kola“.)
Pomůcky: Pracovní list s plným kolem v minutovém ciferníku, papír na překrytí, případně nůžky, kopírka (viz adresáře depot, Depot)

Tato úloha pro učitele by měla napomoci k vytváření prostoru pro obměňování úloh i odhadu jejich složitosti. První pokusy jsou často omezeny na kruhové výseče, zejména pak půlkruhy.

Následující obrázky ukazují čtyři návrhy na tvar překrytí kola z obrázku R5.13. Zvláštní vlastnost kola spočívá ve skutečnosti, že paprsky odpovídají tvaru pravidelného šestiúhelníku, vzor vytvářený jeho šrouby je čtverec a paprsky a šrouby jsou vůči sobě uspořádány tak, že kolo má dvě osy souměrnosti. Půlkruh je tedy vhodným tvarem překrytí. Dále předpokládáme, že překrytí bude odpovídat vzoru vytvářenému paprsky.

Obr. R5.13: Kolo s šesti paprsky, čtyřmi šrouby a dvěma osami symetrie, umístěné do minutového ciferníku; úloha R5.16



Obr. R5.14, 1–4. Kolo auta se šesti paprsky a čtyřmi šrouby, různá překrytí; k úloze R5.16

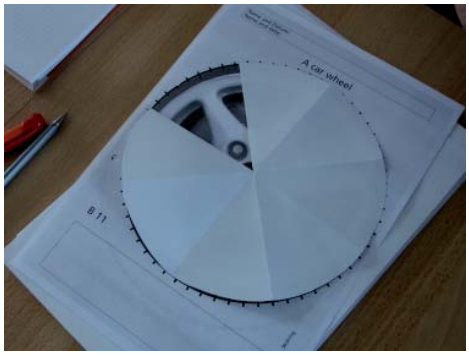
I polokruhové překrytí vytváří úlohy se zcela rozdílnou úrovní obtížnosti. Určujícím faktorem je, zda průměr překrývajícího půlkruhu je v ose symetrie kola či nikoli. Pokud není, je třeba na začátku najít vhodné osy souměrnosti. Na jednom z našich příkladů překrytí půlkruhem je průměr na ose souměrnosti, zatímco na druhém není.

Učitelé v našem kurzu také používali půlkruhová překrytí.

Především se všichni snažili poskytnout překrytí, které vycházelo z násobků čtvrtin a osmin celého kruhu, vytvořených překládáním.

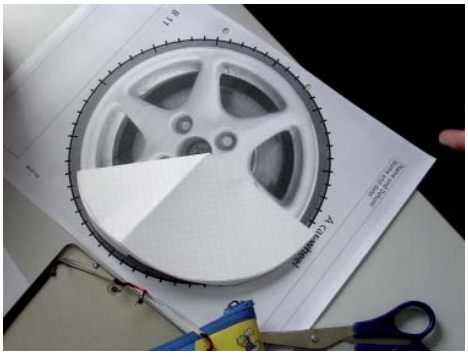
Ačkoli tato překrytí odpovídala vzoru vytvářenému šrouby, neodpovídala vzoru vytvářenému paprsky. Až poté, co se studenti a učitelé ponořili do problému, byla vytvořena překrytí, která odpovídala vzoru vytvářenému paprsky a jejichž úhel byl násobkem 60°, tedy obsahující 10 minut z ciferníku. Takové výseče mohou být vytvořeny z kruhu, jehož poloměr je vystřižen pomocí vložení do kruhu, odečtení 10 minut a poskládání.

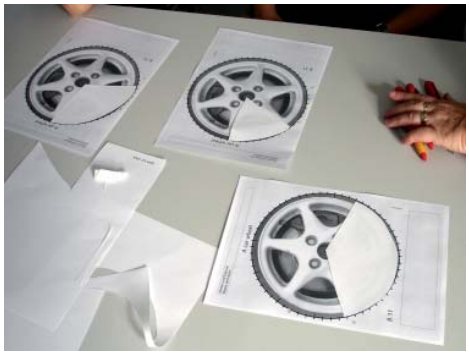
Obr. R5.15: Učitelé vytváří úlohy s koly překrytými půlkruhem



Obr. R5.16, 1–2: Učitelé vytváří úlohy s koly překrytím čtvrtinovými a osminovými výsečemi kruhu

Úlohy ukazují, že jak dokončení překrytých kol, tak i jimi podmíněná tvorba obrazců k zakrytí jsou úlohami, které pomáhají experimentálně zkoumat symetrické vlastnosti kol a z nich vycházejících pravidelných mnohoúhelníků.

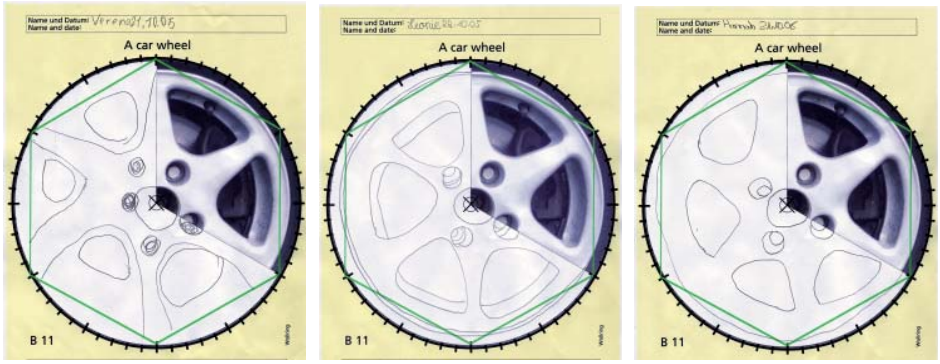




Obr. R5.17, 1–2: Učitelé vytváří úlohy s různě zakrytými koly

Teď se podíváme na práce tří dívek z druhého ročníku. Pracovaly na úlohách z pracovních listů R5.14, 4. Na pracovních listech těchto dětí je pravidelný šestiúhelník, který odpovídá vzoru vytvářeného paprsky, zakreslen do minutového ciferníku.

Jedna z hranic kruhové výseče přesně odpovídá ose symetrie kola, druhá nikoli.



Obr. R5.18, 1–3: Práce žáků druhého ročníku na překrytých kolech aut

Z vyrobených nákresů je vidět, že šestiúhelník zjevně podporuje úplné zakreslení obrazce tvořeného paprsky. U obrazce tvořeného šrouby tomu tak není. Obrázek vlevo ukazuje, že vzor vytvořený šrouby je ovlivněn šestiúhelníkem a obrazcem z paprsků. Vzor vytvořený šrouby není pravidelný mnohoúhelník a také obsahuje více šroubů, než je správný počet (4). Na obrázku uprostřed je zakreslen správný počet šroubů, ale vytvořený vzor je nesprávný, vzniklý čtyřúhelník je nepravidelný. V nákresu vpravo je počet šroubů správný a i obrazec tvořený šrouby je téměř přesný čtverec.

V adresářích depot, Depot se nacházejí tyto a další pracovní listy kol s překrytím i bez něj. V dlouhodobé perspektivě by se nicméně učitelé měli přiklonit k vlastním příkladům či k těm, které přinesou děti.

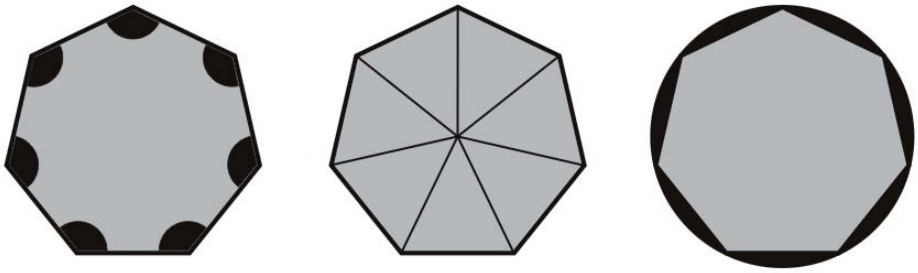
Činnosti anglických (English) a německých žáků (indoors a outdoors) jsou zaznamenány na DVD.

RZ Závěr a otázka k zamyšlení – otevřený problém

V této části je představen konstruktivistický přístup k možnostem použití pravidelných mnohoúhelníků a je probrána otázka, zda a jak nabízí tento přístup zajímavé, plodné a konstruktivisticky vnímané vzdělávání již na základních školách. Učitelé dostávají údaje a pobídky ve dvou úrovních.

– *Rozhodování.* Na první úrovni jsou představena konkrétní a značně propracovaná výuková prostředí či úlohy pro přímé použití. K tomuto účelu jsou ukázány zkušenosti ze škol a práce dětí.

– *Znalosti pro rozhodnutí.* Na další úrovni jsou učitelům nabídnuty informace a pracovní zkušenosti. Učitelé tak získávají vlastní zkušenosti, aby byli schopni se samostatně rozhodnout. K tomuto účelu jsou jim ukázány práce jiných učitelů.



Obr. RZ.1: Vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků vedoucí k definicím RP1, RP2 a RP3

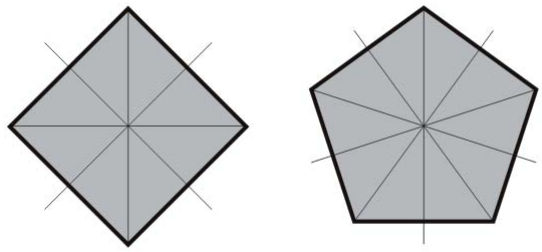
Na závěr uvádíme malý otevřený problém pro učitele, který by měl podnítit experimentování a zkoumání. Tento problém se týká vlastností (definic) pravidelných mnohoúhelníků označených jako RP1, RP2 a RP3.

Úloha RZ.1. Otevřený problém

Dokažte, nebo vyvraťte: RP4. Mnohoúhelník s n vrcholy je pravidelný právě tehdy, když má přesně n os souměrnosti.

Je jednodušší dokázat, že pravidelný mnohoúhelník s n vrcholy má přesně n os symetrie. Zde jsou čtyři nápovědy, jak prozkoumat, zda mnohoúhelník s přesně n osami souměrnosti musí být pravidelný:

1. Pokuste se nejprve vyřešit problém pro 4 a 5 vrcholů. Jsou zřejmé některé argumenty, které by mohly být zobecněny?
2. Odložte na začátku zkoumání vrcholů a zaměřte se pouze na osy symetrie a jejich vzájemnou polohu.
3. Ujasněte si, že každá osa souměrnosti vytváří rovinu zrcadlení a je i zrcadlově odrážena ostatními – osy se vzájemně zobrazují. Aby nevznikal nekonečný počet os, ale naopak zůstal konečný, musí být osy vzájemně (pravidelně) rozmístěny.
4. Pokuste se zjistit, zda se osy souměrnosti musí protínat v jednom bodě. Pak si rozmyslete, jak musí být přesně rozmístěny. Pomáhá myšlenka rovnovážného rozmístění?



Obr. RZ.2: Pravidelný čtyřúhelník a pětiúhelník s osami souměrnosti

Samozřejmě, že je možné pracovat na této úloze s pomocí tužky a papíru. Jinou, stejně dobrou možností, je využití programů pro dynamické zobrazování geometrie.

Pokud jste jako čtenáři vyřešili tento problém a pokud vás inspiroval, pak bychom vás nakonec rádi vyzvali, abyste uvážili, zda a do jaké míry může být tento problém předmětem konstruktivistického vyučování ve školách.

Literatura

Clarke, D. et al. (2002). *Early Numeracy Research Project, Final Report*. Melbourne: Australian Catholic University and Monash University.

Conway, J. (2004). *Frequently asked questions on regular polygons.* Conway faq.regpoly.html

Götze, H. (1986). *Castel del Monte. Gestalt und Symbol der Architektur Friedrichs II.* 2. Auflage. München: Verlag Prestel.

Götze, H. (1991). Die Baugeometrie von Castel del Monte. In *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*. Philosophisch-historische Klasse. Jahrgang 1991, Bericht 4.

Henn, W. (2005). *Gefaltete Mathematik.* Festvortrag zum 60. Geburtstag von Werner Blum in Kassel.

Henn, W. (2005). *Elementare Geometrie und Algebra.* Braunschweig: Vieweg Verlag.

Lorenz, J.H. (1997). *Kinder entdecken die Mathematik.* Braunschweig: Westermann.

Walser, H. (2003). *Regelmäßige Vielecke*. Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel. 1999 Erste Fassung (Einzelblätter), 2001 Überarbeitung und Erweiterung. hwalser@bluewin.ch.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1991, 1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Band 1 & Band 2. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematics* 29, 1995, 355–374.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1996, 1997). *Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr / Mathematik im 4. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Wollring, B. (2003). *Ein Parcours zum Origami*. Mathe-Welt im Heft *mathematik lehren*, Heft 113.

Whc.unesco.org/sites/398.htm (2005).

Wollring, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Selter, Ch. & Walter, G. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik als Design Science.* Festschrift für Erich Wittmann. (S. 270-276) Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Wollring, B. (2003). „Mit den Kindern Geometrie neu entdecken". Kooperatives Design der Arbeitsumgebung "Streifenschablonen" für den Mathematikunterricht in der Primary school. In Baum, M. & Wielpütz, H. (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch.* (S. 147–176) Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
Wollring, B. (2003). Linking Pre-service and In-service Teacher Training: Co-operative Design and Dissemination of Working Environments for Primary Mathematics. In Novotná, J. (ed.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Mathematics Teaching (SEMT '03).* (p. 35–42). Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
Wuermeling, H.L. (2005). *Auf der Suche nach Europa.* München: Langen-Müller-Verlag

Partneři projektu – vyzkoušení a vytváření úloh

Žáci ve školách

Sch01 Základní škola, Jungfernkopf, Kassel, DE, Bernd
Sch02 Základní školy jako partneři diplomové práce, Hessen, DE, Bernd
Sch11 Základní škola, Derby, UK, Graham
Sch12 Střední škola, Derby, UK, David, Graham
Sch21 Základní škola, Neratovice, CZ, Milan, Darina
Sch22 Střední škola, Praha, CZ, Nada
Sch31 Základní škola, Soluň, GR, Marianna
Sch32 Střední škola, Soluň, GR, Marianna

Studenti učitelství pro základní školy

St11 Činnosti k přednášce Didaktika Geometrie (Univ. Kassel, DE, Bernd)
St21 Učební praxe ve škole 01
St31 Seminární práce Rozmanité základní školy (Diverse Primary schools, Hessen, DE)
St41 Diplomové práce studentů učitelství

Učitelé

L13 Učitelé spolupracující na diplomové práci studentů učitelství, Hessen, DE, Bernd
L21 Vzdělávání učitelů, učitelé základních škol, Erfurt, DE, Bernd
L23 Vzdělávání učitelů, učitelé základních škol, SINUS Berlin, DE, Bernd
L31 Vzdělávání učitelů, učitelé základních škol, PI Bozen, It, Sterzing, Bernd
L33 Teacher training, Primary school teachers, PI Bozen, It, Latsch, Bernd
L43 Vzdělávání učitelů, Konference učitelů 2005, CU, Praha, CZ, Bernd
L45 Vzdělávání učitelů, Konference učitelů 2006, CU, Praha, CZ, Bernd
L50 Dílna Mezinárodní konference výuky matematiky na ZŠ (Workshop on International Conference on Elementary Mathematics Education, EME) 2006 in Viana do Castelo, Portugal, Bernd

Partneři projektu

PP01 Učitelé a výzkumníci projektu

Education and Culture

Socrates

3D GEOMETRIE – TĚLESA

Milan Hejný, Darina Jirotková

S1 Úvod

Tato kapitola pojednává o geometrii trojrozměrného prostoru. Když budete pozorovat čtyřletého chlapce, jak staví věže z kostek, a pak desetiletého školáka, jak popisují takovou stavbu slovy nebo více formálním jazykem, uvidíte, že ve skutečnosti existují dvě různé geometrie v trojrozměrném prostoru. První, která je přístupná dětem předškolního věku, je manipulativní; ta druhá je poněkud „teoretická". Hlavním cílem této kapitoly je začít s manipulativními zkušenostmi žáků a postupovat krok po kroku do vyšších úrovní. Přitom rozhodující roli v tomto rozvoji hraje jazyk.

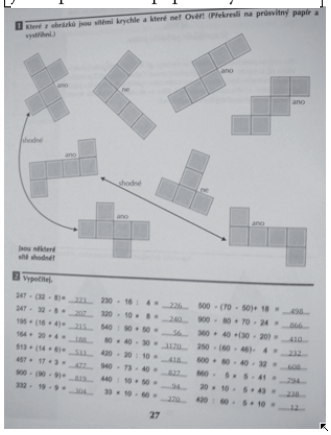
Tato úvodní část obsahuje:

- ilustraci, která stručně seznamuje čtenáře s cílem kapitoly,
- didaktický přístup ke způsobu zpracování materiálu,
- metaforický jazyk, jímž začínáme toto téma rozvíjet,
- přehled, jak je kapitola zpracovaná a jak s ní čtenář může pracovat.

S1.1 Ilustrace

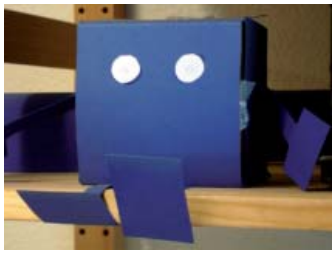
Věříme tomu, že základem každého poznatku je zkušenost, buď přímá, kterou člověk získá v interakci s realitou, nebo zkušenost zprostředkovaná jiným člověkem a osvojená (interiorizovaná). Zaměříme se na zkušenosti s prostorovou (3D) geometrií. Následující ilustrace uvádí zkušenosti autorů a čtenář je zván, aby tyto zkušenosti kriticky posoudil.

Které z následujících obrázků jsou sítě krychle a které ne? Obkreslete je na pauzovací papír a vystřihněte.



Obr. S01

Obr. S02



Obr. S03

V ilustraci budeme diskutovat o dvou odlišných didaktických přístupech k budování pojmu síť krychle. První je tradiční a druhý je alternativní; ten je v této kapitole rozpracován.

V tradičním přístupu je žákovi předložena jistá síť krychle a jeho úkolem je ji vystřihnout a vytvořit z ní krychli. Později učebnice uvádějí několik dalších tvarů sítě krychle a předkládají žákům různé úlohy. Na obrázku S01 vidíme jednu stránku z novější české učebnice, kde je uveden typický problém týkající se sítí krychle. Obecně platí, že první síť krychle je žákovi předvedena, žák není veden k tomu, aby si tento pojem sám vytvořil. Proces tvorby pojmu síť krychle lze popsat následující didaktickou posloupností:

První síť je žákovi dána → žák z ní vytvoří krychli → žákovi je předloženo více sítí a ne-sítí → žák kontroluje, co je a co není síť krychle → žákovi jsou předloženy další náročnější úlohy.

Didaktický přístup dále navržený je důsledně konstruktivistický. Žádná hotová myšlenka není žákovi dána. Všechny myšlenky odhaluje žák sám prostřednictvím řešení vhodné posloupnosti úloh.

Aby si dítě vytvořilo pojem sítě krychle, poskytneme mu následující materiál: model krychle, šest čtverců stejně velkých, jako je stěna krychle, přelepky, arch papíru a tužku (viz obrázek S02).

S tímto postupem začneme ve druhém ročníku (7–8letí žáci; viz Experiment 09 k úloze S02. Je zřejmé, že není možné pouze žákovi dát uvedený materiál a požádat ho, aby vytvořil síť krychle. Aby bylo možné tento problém předložit druhákovi, musí učitel najít jazyk, který by byl žákovi srozumitelný. Jak můžeme takový jazyk najít?

Zaprvé, musíme nalézt situaci, která je žákovi známá a která umožní učiteli formulovat problém v řeči žákovi srozumitelné. Zadruhé, musíme vzít v úvahu, že je pro žáka jednodušší porozumět procesu tvorby než porozumět konceptu, výslednému produktu (v našem případě síť krychle). Při hledání vhodné situace jsme přišli na myšlenku „Švadleny" či „Krejčího". Žáci jsou postaveni do role krejčího a paní či pan Krychle jsou jejich zákazníky. Tato metafora dává silný nástroj pro přeformulování úlohy (viz Komentář Co-I k úloze S02).

Učitel: „Představte si, že jsme krejčí a švadleny. Ale nejsme jen tak obyčejní. Máme docela zvláštní krejčovskou dílnu. Naši zákazníci jsou ze světa geometrie. Dnes náš salon navštívil pan Krychle (učitel ukáže velký model krychle, viz obrázek S03).

Pan Krychle je nešťastný, že má obnošený oblek a požádal nás, abychom mu ušili nový. Nejdříve však musíme zhotovit střih. Víme, že se tento střih na oblek skládá ze 6 dílů – čtverců. Tady máte ty čtverce a pokuste se vytvořit střih na oblek pro našeho zákazníka."

S1.2 Struktura kapitoly a jak s ní pracovat

Kapitola se skládá ze tří částí – úvod, obecná část a geometrická část.

Poslední část (podkapitola S3 – soubor geometrických úloh a doprovodných experimentů, výsledků úloh, komentářů a výzev) je hlavní částí kapitoly.

Úkolem druhé části (podkapitola S2) je nabídnout *tři* možné způsoby uspořádání materiálu a přístupu k němu a dále vysvětlit některé myšlenky a pojmy použité v textu.

První způsob uspořádání materiálu je daný seznamem úloh se stručným popisem obsahu a úrovně obtížnosti (S2.1).

Druhý způsob uspořádání se týká obsahu a obsahových cílů (S2.2). Tyto jsou rozděleny na 4 skupiny. Tři skupiny A, B a C odpovídají obtížností jisté věkové úrovni a čtvrtá skupina T je určena učiteli.

Třetí způsob se týká kompetencí, abilit (S2.3). Ty jsou rozděleny na dvě skupiny – obecnou a didaktickou. Obecné ability, jako například schopnost komunikace a další, nemohou být rozděleny do tří úrovní A, B a C, protože narůstají s věkem žáků od předškolního do dospělého věku.

Termíny, které zde byly právě použity, jsou popsány a vysvětleny v posledních dvou odstavcích druhé podkapitoly – Komentáře k obsahu (S2.4) a Komentáře ke kompetencím (S2.5).

Tyto přehledy nabízejí učiteli různá edukační využití podkapitoly S3. Když se učitel bude chtít zaměřit na

a) jistý věk žáků, dejme tomu na žáky pátého ročníku, pak se zaměří na úlohy úrovně B a C. Různost úloh umožní učiteli volit individuální přístup k žákům s ohledem na jejich matematické znalosti a dovednosti.

b) rozvoj jistých pojmů, například „rovnoběžnost ve 3D", pak najde tento pojem v Přehledu úloh u úlohy S12.

c) rozvoj jisté ability, například kombinatorické myšlení, pak tento pojem najde buď v Přehledu úloh nebo v Přehledu kompetencí (skupina úloh S04, S05, S12 – S15).

S2 Přehledy kapitoly

Jak bylo uvedeno výše, prezentujeme zde tři typy přehledů.

S2.1 Přehled úloh

úloha	obecný obsah	specifický obsah	úroveň úlohy			
			A	B	C	T
S01	konstrukce všech 11 různých sítí krychle	průprava	a)	b)		c)
S02		některé sítě	a)	b)	c)	d)
S03		všechny sítě		a)	b)	
S04		kombinatorický přístup k sítím	a) – c)	d) – f)	g)	
S05			a)	b) – e)		
S06	mini-struktura množiny všech sítí			a) – c)	d) – f)	g)
S07	incidence, anatomie sítě	hrana – stěna	a)	b)		
S08				a) – c)	d) – h)	i)
S09				a), b)	c) – f)	
S10					a), b)	
S11		vrchol – stěna			a) – d)	
S12	kombinatorická-mini-struktura; 2D-3D korespondence	rovnoběžné stěny	a), b)	c), d)		e)
S13		stěny		a) – f)		
S14		vertices	a), b)	c), d)		
S15		vrcholy		*	a) – h)	a) – h)
S16	incidence, anatomie sítě	vrcholy		a) – e)		
S17		vrchol-hrany-stěna	a) – d)			
S18		hrana-stěna, hrana-hrana,		a) – d)		
S19		vrchol-hrana-stěna			a) – d)	
S20		hrana jako zip			a) – e)	
S21		hrana – vrchol			a) – e)	

* Viz komentář k dané úloze.

S2.2 Přehled obsahu

ÚROVEŇ A (věk 5 – 8 let)

- metaforické termíny: střih (S01a, S02a, S07a), šaty, oblek, oblékání, počet sítí krychle (viz obrázek S02a, b),
- různé konstrukce sítí krychle (S04a – c),
- organizace souboru objektů (S05a),
- vztahy hrana – stěna na krychli a její síti (S07a),
- kombinatorická struktura vrcholů (S14a, b), stěn (S12a, b), hran (S17a – d) krychle na intuitivní úrovni.

ÚROVEŇ B (věk 7 – 12 let)
- metaforické termíny: střih (S01b, S02b), zip/šev (S08a – c, S09a, b),
- soubor všech sítí krychle (S03a),
- různé konstrukce sítí krychle (S04d – f),
- organizace souboru objektů (S05b – e),
- vztahy hrana – stěna na krychli a její síti (S07b, S08a – c),
- pojmy vrchol (S14c, d), hrana, stěna krychle,
- kombinatorická struktura krychle a sítě krychle na intuitivní úrovni (S12c, d, S13a – f, S15*a – h, S16a – e, S18a – d).

ÚROVEŇ C (věk 11 – 15 let)
- metaforické termíny: střih (S02c), zip/šev (S09c – f),
- různé konstrukce sítí krychle + důkaz (S03b),
- kombinatorická struktura krychle a sítě krychle (S04g, S06d – f, S08d – h, S10a,b, S11a – d, S15a – h, S19a – d, S20a – e, S21a – e).

ÚROVEŇ T (učitelé)
- soubor všech sítí krychle (S02d),
- vztahy vrchol – hrana – stěna na krychli a její síti (S01c, S08i, S12e, S15a – h),
- struktura „obarvených“ hran sítí (S10).

S2.3 Přehled mentálních kompetencí (abilit)

VŠECHNY ÚROVNĚ
- prostorová představivost (všechny mimo S05a – e),
- experimentování (úloha S01a, b, S04, S07a, b, S08a – i),
- R→M projekce (úloha S02a – c),
- organizace souboru objektů (úloha S03a, S04g, S08a – i),
- kombinatorické strategie (úloha S03a, S04g, S05a – e),
- procesy konstrukce:
  - konstrukce objektu (úloha S03a, S07b, S08a – i, S09a – f, S11a – d),
  - konstrukce zobrazení (úloha S01, S07a, b, S08a – i, S09a – f, S13a – f),
- zdůvodňování (úloha S03b, S04g, S15a – h),
- pojmotvorný proces (úloha S12a, b, S14a – d),
- komunikace (všechny úlohy na úrovni A až T),
- vzájemné přiřazování dvou různých množin na základě kritéria obsahujícího více informací (Komentář Co-I k úloze S07),
- poznání toho, že jeden objekt může mít v různých kontextech různé názvy (Komentář Co-I k úloze S01),
- tvorba různých sítí krychle (úloha S03a, b),
- organizace nejasného souboru objektů do dobře uspořádaného (Komentář Co-II k úloze S05a – e),
- objevení a ovládnutí jisté strategie řešení (Komentář Co-III, IV k úloze S05),

- meta-kognitivní abilita upřednostnit systematickou řešitelskou strategii (Komentář Co-II k úloze S07),
- příprava na tvorbu mini-struktury (úloha S08a – i, S09a – f, S15a – h, S16a – e, S18a – d, S19a – d, S20 a – e, S21a – e),
- kombinatorické myšlení (úlohy S04a – g, S05a – e, S12 – S15).

ÚROVEŇ T

- jako výše + didaktická analýza obsahu a žákových mentálních kompetencí,
- tvorba jazyku (úloha S01c),
- formulování problému (úloha S10),
- motivace žáků/studentů (úloha S02a),
- tvorba mini-struktury (úloha S06, S10, S12e),
- aplikace těchto znalostí ve třídě.

S2.4. Komentáře k obsahu

1. Krychle a koule jsou dvě geometrické „osobnosti" (ve smyslu P. Vopěnky), které jsou známé již dvouletému dítěti. Koule je velmi „příjemný" objekt, ale je to individualista, člověk ji nemůže použít pro stavění, ale jen pro kutálení. Krychle není tak „příjemná", ale zato je to objekt velmi „společenský". Skupina krychlí je vhodná pro stavění domů, věží apod.
2. Svět aritmetiky je pevně strukturován. Každé číslo má svou přesnou pozici v množině všech čísel a celá komunita čísel je pevně svázána relací > a operacemi +, − , ×, /. Svět geometrie je společenství mnoha individuí nebo malých rodin a vazby mezi nimi jsou velice různé. Proto je z didaktického hlediska aritmetika vhodná pro rozvíjení systematických schopností, kompetencí, abilit a geometrie je vhodnější pro rozvoj kompetencí jako experimentování, objevování, formulování hypotéz, argumentování, … . V geometrii jsou však partie, které mohou být rozvíjeny jako mini-struktury, jako například mnohoúhelníky v kapitole Pravidelné mnohoúhelníky, nebo různé kombinatorické struktury v této kapitole.
3. Geometrický svět žáka se skládá ze společenství geometrických objektů a jejich modelů. Přímá zkušenost žáků, učitelů nebo autorů této kapitoly je získána zkoumáním geometrických objektů a situací. Zprostředkovaná zkušenost je získána čtením o tom, jak jiná osoba získávala zkušenosti. V našem případě se bude zprostředkovaná zkušenost týkat výuky geometrie spíše než geometrie samotné.

S2.5 Komentáře ke kompetencím (abilitám)

Naším cílem není jednotlivé mentální kompetence (ability, schopnosti, dovednosti) vymezit, ale popsat proces jejich nabývání a rozvíjení. Na rozdíl od obsahu kompetence nemohou být rozděleny do skupin podle věku, protože skoro všechny se rozvíjejí v průběhu růstu, zrání dítěte. Například rozvoj schopnosti experimentovat začíná velmi brzy, ve věku 2–3 let dítěte a pokračuje až do konce intelektuální aktivity člověka.

Z pohledu učitele se mohou kompetence uvažovat ve dvou směrech:

(1) jako kompetence individuální, která zvyšuje kognitivní kapacitu jedince,
(2) jako kompetence, kterou učitel rozvíjí u svých žáků.

Sebereflexe učitele je velmi účinný nástroj, který oba zmíněné směry spojuje.

R → M projekce

Všechny naše znalosti mají kořeny v každodenní zkušenosti. Celý svět matematiky se vynořuje ze životních zkušeností. Když se matematika vyučuje odděleně od reálného života, jsou matematické poznatky oddělené od žákova reálného života, a to je příčina formálních poznatků. Proto schopnost projektovat zkušenosti z reálného života do matematického světa je jedním z nejzákladnějších předpokladů získávání matematických poznatků. Tato schopnost je označena jako R → M projekce, jak je uvedeno v titulku.

Experimentování

Experiment je jediná cesta, jak získat přímé geometrické zkušenosti. Dítě, které se snaží stavět co možná nejvyšší věže z krychlí, opakovaně získává zkušenosti s úspěchem a neúspěchem této své činnosti. Když přijde na to, že jeho úspěch závisí na tom, jak přesně přiloží stěnu krychle na další stěnu, získává tak předpojem stěny spojováním krychlí do krychlového tělesa. Později, když žák řeší 3D situace, se kterými nemá dostatek zkušeností, zcela přirozeně začíná získávat nové poznatky metodou pokus-omyl. Když je problém náročnější, je pouhé náhodné experimentování málokdy úspěšné a je potřeba experimenty evidovat a nějak uspořádat. Toto je popsáno dále pod titulkem Strukturace a restrukturace.

Proces konstrukce

Obecně se konstrukce skládá ze čtyř položek:

1. stavební materiál – sada elementů budoucího produktu;
2. nástroje, které se mohou ke konstrukci použít;
3. instrukce nebo know-how, které řídí konstrukční proces;
4. produkt – výsledek procesu konstrukce.

Například pro konstrukci čtverce ze čtyř sirek to jsou: 1. čtyři sirky; 2. prsty; 3. představa o čtverci v mysli konstruktéra; 4. výsledný model čtverce. Když jsou všechny čtyři položky konstrukce dané, je úkol jednoduchý (viz úloha S02d, str. 106). Pravděpodobně nejnáročnější jsou úlohy, jejichž cílem je zkonstruovat nějaký objekt, se kterým se řešitel v daném kontextu ještě nesetkal, nebo takové, jejichž existence je diskutabilní, například úloha zkonstruovat sedmistěn, který má dvě stěny trojúhelníky a čtyři stěny čtyřúhelníky.

Pojmotvorný proces

Pojmy jsou základním nástrojem, kterým se lidská mysl orientuje ve světě. Pojem „matka" je pravděpodobně prvním pojmem vytvořeným v mysli dítěte. Pojem je tvořen vzájemnou asociací mnoha vjemů, které všechny směřují k jednomu objektu, tj. k matce dítěte. To je matka v různých časech, v různých šatech, různě mluvící, gestikulující – všechno to poukazuje na stejný jev – matka. Později jsou podobným způsobem rozvíjeny další komplexní pojmy jako stůl, kočka, dům a ještě později dokonce více abstraktní pojmy jako přátelství, nálada, přítomnost. Geometrické pojmy se rodí a budují podobným způsobem. První takové pojmy se nazývají podle P. Vopěnky osobnosti. V naší kultuře jsou to zejména osobnosti krychle, čtverce, kruhu, koule, čtyřbokého jehlanu a hranolu. Pětileté dítě je do jisté míry zná, i když zaměňuje čtverec s krychlí, kruh s koulí apod. Manipulace a řešení různých problémů o tělesech i rovinných obrazcích postupně vytváří v mysli dítěte další pojmy přímo propojené na reálné objekty, jejichž tvar do jisté míry reprezentuje geometrické osobnosti.

Kognitivní proces na kvalitativně vyšší úrovni začíná, když žák při zkoumání tělesa věnuje pozornost jeho průvodním jevům. Problém je ten, že stejný objekt může být průvodním jevem různých osobností. Například strana může být průvodním jevem trojúhelníku, čtverce, pětiúhelníku atd. Dokonce složitější situace nastane, když má objekt v různých kontextech různá jména. Například stěna krychle je též čtverec.

Strukturování a restrukturování

Většinou je jistý komplexní pojem organizován; to znamená, že nejde jen o balík určitých asociací. Oblast poznatků je ovládána obecnými pravidly specifickými pro daný předmět. Organizovaný soubor objektů a vztahů se nazývá struktura. Struktura může být nahlížena jako síť uzlů spojených vztahy, například čísla 7 a 11 jsou uzly a jsou spojena soubory vztahů jako $7 < 11$, 11 není dělitelné 7, mezi čísly 7 a 11 jsou další tři přirozená čísla atd. Proces budování struktury se nazývá strukturování. Čím je síť hustší, tím vyšší je její kvalita.

V každé didaktické situaci zde popisované se žák setkává se dvěma typy organizace:

(1) organizace objektů nebo vztahů nebo schémat, které jsou jasně popsané, a
(2) organizace kognitivních procesů zejména přítomných v experimentování.

Souběžně s historií matematiky (fylogenezí) probíhá rozvoj matematického myšlení individua (ontogeneze) přes řadu strukturací a restrukturací. Například pojem „číslo" začíná intuitivním porozuměním čísel 1, 2, 3. Ve věku 4 – 15 let prochází řadou restrukturací: jednociferná čísla → dvouciferná čísla → přirozená čísla → zlomky → záporná čísla → racionální čísla → iracionální čísla → … Učiteli se může jevit tato řada jako pouhé rozšiřování, ale pro dítě to je (nebo by alespoň mělo být) souborem restrukturací. Například pro prvňáka operace 3 – 4 nemá žádný smysl; pro páťáka je to záporné číslo –1. Změna ‚to neexistuje' → ‚to je číslo –1' není pouhým rozšířením znalosti, ale je její restrukturací.

Činnost, kterou nazýváme mini-strukturováním, je obzvláště důležitá. Jde o mentální procesy tvorby a strukturování malých množin objektů a/nebo vztahů. To je ukázáno v úloze S03, str. 109, ve které má žák za úkol (a) najít všechny možné sítě a (b) dokázat, že seznam sítí je úplný. Zdůvodnit tento fakt znamená ukázat, že již neexistuje další jiná síť a že žádné dvě sítě ze souboru 11 sítí nejsou shodné. Sítě musí být uspořádané tak, že není pochyb. Toto uspořádání je dobrým příkladem mini-struktury.

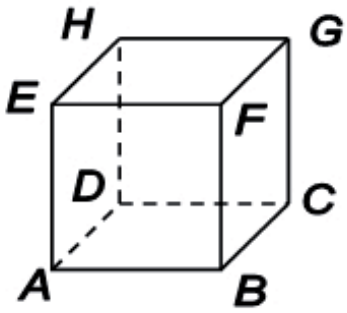
Prostorová představivost

Schopnost manipulovat se 3D objekty pouze mentálně je budována pomalu. Východiskem je žákova přímá taktilní (haptická) a vizuální zkušenost s modely 3D objektů. Postupné posouvání k mentálním operacím probíhá mnoho etapami, ve kterých každá další nová etapa postrádá jistý typ percepce vzhledem k předchozí. Příkladem může být, když dítě poznává tělesa pouze hmatem, nebo řeší problémy o krychli pouze na základě 2D obrázků, nebo když je krychle reprezentována svou sítí. Další ability jako komunikace, vyslovování hypotéz a zdůvodňování zde nezmiňujeme.

S3 Úlohy

Označení

V celé kapitole budeme uvažovat standardní krychli *ABCDEFGH* se spodní stěnou *ABCD*, vrchní stěnou *EFGH*, přední *ABFE*, zadní *DCGH*, levou *ADHE* a pravou stěnou *BCGF*.



Obr. S04

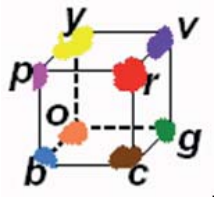
Úloha S01 a) {A}

Je dán model krychle. Na každé stěně je nějaký obrázek. Obrázky jsou různé (viz obr. S05a). Dále je dáno 6 čtverců se stejnými obrázky, jako jsou na stěnách krychle. Úlohou je přilepit každý čtverec na odpovídající stěnu krychle, tj. na stěnu se stejným obrázkem.

Obr. S05a

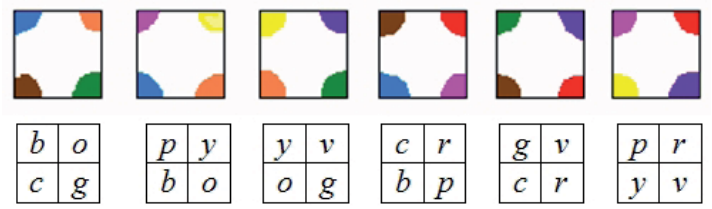
Viz pracovní list s odpovídající předlohou WS01.

Úloha S01 b) {B}



Obr. S05b

Je dán model krychle *ABCDEFGH*. Její vrcholy jsou obarveny následovně: *A* – modrý (b), *B* – hnědý (c), *C* – zelený (g), *D* – oranžový (o), *E* – růžový (p), *F* – červený (r), *G* – fialový (v), *H* – žlutý (y), viz obrázek S05b. Dále je dáno šest čtverců s obarvenými vrcholy, jako je na obrázku S06. Úlohou je přilepit každý čtverec na stěnu krychle tak, aby se zachovala barva vrcholů.



Obr. S06

Viz pracovní list s odpovídající předlohou WS02, WS03.

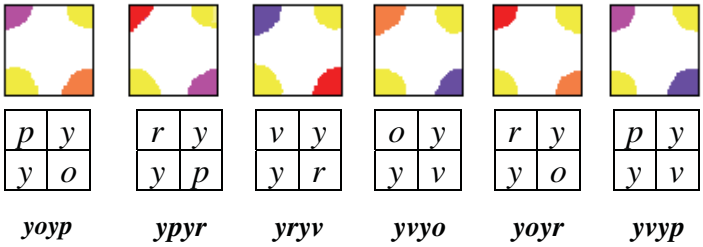
Úloha S01 c) {T}

Všechny vrcholy krychle *ABCDEFGH* jsou obarveny obdobně jako v úloze S01b. Odpovídajícím způsobem jsou obarveny vrcholy šesti stěn jako na obrázku S07.

Najděte nějaké vhodné obarvení vrcholů krychle tak, aby vrchol *A* byl žlutý. Zjistěte, kolik různých obarvení krychle existuje.

Výsledek

c) Vrcholy *A, C, F, H* jsou obarveny žlutě, vrcholy *B, D, E, G* jsou obarveny oranžovou, růžovou, červenou, fialovou v tomto pořadí. Z toho vyplývá, že existuje 24 možností, jak by mohla být krychle ABCDEFGH obarvena, aby byly splněny dané podmínky.



Obr. S07

S

Komentáře

Co-I. (Příprava konstrukce sítě krychle)
Úloha připravuje konstrukci sítě krychle. V případě úlohy a) je cílem, aby dítě získalo zkušenosti s přiřazováním šesti čtverců k šesti stěnám tím, že čtverce bude lepit přesně na stěny. V případě B je přiřazování poněkud složitější, protože je určeno čtveřicí barev vrcholů. Tato úloha rozvíjí schopnost navzájem přiřadit dvě množiny, je-li dáno více než jedno kriterium.

Co-II. (Dva názvy pro jeden a tentýž objekt)
Tento problém buduje žákovu schopnost poznat, že nejdříve je jeden objekt čtverec a po tom, co se přilepí na stěnu krychle, se z něj stane stěna. Dítě má již zkušenosti s tím, že jedna osoba může být otcem ve vztahu k jisté osobě, synem ve vztahu k jiné osobě, manželem ve vztahu k nějaké další osobě atp. Je možné podpořit žákovu schopnost porozumět tomu, že čtverec se stane po přilepení na krychli stěnou, doprovodným komentářem: „Nyní přilepíme čtverec na krychli, dobře, … A teď se ten čtverec stal stěnou krychle."

Co-III. (Vrchol ve středu pozornosti)
Úloha b) zaměřuje žákovu pozornost na pojem vrchol. Ten se vyskytuje ve dvou kontextech: jako „roh" krychle a jako vrchol čtverce. Řešitel úlohy získá důležité zkušenosti s tím, že tři vrcholy tří různých čtverců odpovídají jedinému vrcholu krychle.

Co-IV. (Úspěšný pokus)

V rámci experimentálního vyučování v prvním ročníku (7 let) naše kolegyně Jana Slezáková spolu se spolupracující učitelkou Klárou Nejedlou úspěšně odzkoušely úlohu S01b. Ohodnotily úlohu jako velmi atraktivní pro žáky a vhodnou i pro žáky pomalejší.

Výzvy

Ch-I.

V úloze S01b je každý vrchol obarven jinou barvou. V úloze S01c jsou čtyři vrcholy obarveny stejnou barvou, žlutou (y). Vytvořte gradovanou sérii úloh, v nichž bude použito méně než 8 barev.

Rada. Velmi jednoduchá úloha je tato: sedm vrcholů krychle je modrých a jen jeden je červený. Tato úloha je přiměřená úrovni A.

Ch-II.
Vytvořte seznam chyb a způsobů, jak žáci přilepují čtverce, když řeší případ b). Tento seznam bude užitečný později – viz Komentář Co-II k úloze S07.

Úloha S02 a) {A}

Jazykem metaforické situace „Švadlena" (viz Komentář Co-1 k úloze S02) požádejte žáka, aby vytvořil síť krychle – střih na šaty pro paní Krychli. Dejte mu k dispozici model krychle, šest čtverců shodných se stěnami krychle, přelepky, velký arch papíru a tužky.

Úloha S02 b) {B}

Jako v úloze S02a, avšak je dáno více čtverců různých velikostí.

Úloha S02 c) {C}

Jako v úloze S02a, ale k dispozici je krychle, kreslicí potřeby, nůžky, arch papíru a přelepky.

Úloha S02 d) {T}

Jako v úloze S02a, ale k dispozici je následující materiál: kreslicí potřeby, nůžky, arch papíru a přelepky. Jakmile je jeden střih nalezen, řešitel je požádán, aby nalezl další.

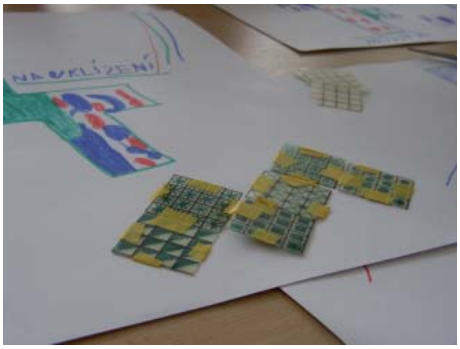
Komentář

(Úvahy o budování pojmu sítě krychle)

Co-I.
Úloha S02a je určena druhákům a má zásadní důležitost pro celou kapitolu. Použití metafory přemosťuje geometrický pojem síť tělesa se žákovou životní zkušeností.

Učitel ukáže žákům papírový střih na šaty například z časopisu Burda a popíše situaci: „Naše třída je dílna a každý z nás je krejčí nebo švadlena. Pan a paní Krychle spolu s jejich velkou rodinou přišli do našeho salonu a objednali si oblek pro každého člena rodiny. Každý z vás má připravit střih na oblek pro jednoho člena z rodiny Krychlí. (Každé dítě dostane jednu krychli.) Střih bude vyroben z těchto čtverců.

(Každé dítě dostane šest čtverců a mnoho přelepek. Viz obr. CZ04, str. 151) Abyste vytvořili střih, musíte sešít dohromady jeden díl po druhém. To udělejte pomocí těchto přelepek. Každé dva čtverce, které sešíváme dohromady, přiložíme těsně k sobě, přelepíme a takhle tvoříme švy. (Viz obr. S08, obr. CZ02, str. 151, a Video 01, Video 05.) Konečně všech šest čtverců tvoří jeden kus (síť) – střih na oblek pro Krychli. Začněte pracovat." (Viz Video 02.)



Obr. S08

Když je střih hotov, učitel pokračuje se svým příběhem. „Střih je hotov a vy teď musíte zkontrolovat, zda je správný. Oblečte svou Krychli (viz obr. S09, CZ03, str. 151). Jestliže je střih dobrý, obkreslete ho na papír." (Viz obr. CZ05, str. 151, Video 03.)

S

V úlohách S02b, c a d, které jsou zamýšleny pro třetí, čtvrtý a pátý ročník, bude sada dostupných nástrojů odlišná. Příběh bude doplněn myšlenkou zipu. Učitel může tuto myšlenku představit ve chvíli, kdy je střih hotov. Může udělat následující: „Nyní máme střih hotov a je potřeba šaty obléci Krychli. Abychom to udělali správně, přišijeme zipy na všechny volné strany těch čtverců. Potom volně položíme střih na Krychli a zazipujeme ty části, které patří k sobě. Tak je dokončeno oblékání Krychle." (Viz Video04, Video06.)

Co-II. (Transmisivní vs. konstruktivistický přístup)
V tradičním způsobu vyučování se žák seznamuje se sítí krychle takto: V pracovním sešitě je nakreslena jedna nebo několik sítí krychle. Úlohou žáka je síť vystřihnout a slepit z ní krychli. Pozitivní věcí v tomto přístupu je, že žák získá manipulativní zkušenosti, negativní je, že síť je dána žáku zvenku a nemusí sám nic objevovat.

Obr. S09

Naše metoda, která byla úspěšně odzkoušena se druháky (viz Exp. S09, str. 151), je založena na konstrukci sítě postupným přilepováním čtvercových stěn. Používáme metaforu, která vychází z dívčí zkušenosti oblékání panenek a šití šatiček na ně. Situace je zasazena do příběhu, ve kterém krychle není jen jako jedna krychle z mnoha ve stavebnici, tzn. jako anonymní člen nějakého společenství těles, ale jako individuum, jako geometrická osobnost jménem pan, paní a slečna Krychle.

Co-III. (Jazyk metafor)
Geometrický význam metafor je zřejmý:

- *Střih na šaty* na krychli je vlastně sítí krychle.

- *Oblek* je něco, do čeho je Krychle právě oblečena, je to hranice tělesa.
- *Oblékání* je proces, ve kterém se mění střih v oblek. Ten se skládá ze dvou kroků:
    1. střih je položen na Krychli,
    2. všechny zipy jsou zazipovány.

Metaforické termíny šev a zip nemohou být přeloženy do matematického jazyka. V obou případech je odpovídající matematický termín hrana krychle. Ten metaforický termín nese však další informaci, kterou termín hrana postrádá. Když tvoříme střih, děláme švy tak, že spojíme dvě strany dvou dílů k sobě. Po tom, co se přiloží střih na krychli, mění se jednotlivé díly střihu na stěny a švy na hrany. Slovo zip dokonce nese bohatší informace, protože se zde používá ve dvou stádiích – jako rozepnutý (dvě dosud nespojené strany čtverců střihu, které se stanou stěnami) a jako zapnutý (jedna hrana vytvořená ze dvou stran čtverců).

Svlékání je inverzní operací k oblékání za předpokladu, že rozeznáme, které hrany jsou zipy a které švy. Jestliže toto neznáme, nemůžeme mluvit o svlékání krychle. Této operaci musí předcházet mnohem náročnější operace – rozdělení všech 12 hran krychle na zipy a švy.

Nabízíme zde výše uvedenou metaforickou terminologii. Při práci se žáky bude pravděpodobně vytvořena vhodnější terminologie, která bude bližší životním zkušenostem žáků. Je však nezbytné mít jedno slovo pro síť – rovinný útvar, a jiné slovo pro to, co nazýváme oblekem, a to, co budeme později nazývat krychlí nebo modelem krychle. Přesněji bychom měli mluvit o hranici krychle.

Co-IV.
Žák již našel metodu, jak vytvořit síť krychle. Skutečnost, že existuje více sítí, je pro žáky výzvou jich najít co nejvíce. Učitel může vystavit všechny nalezené sítě spolu se jménem autora na nástěnku. Žáci obvykle vznáší dva dotazy: 1) Jsou považovány dvě symetrické sítě za stejné? 2) Kolik různých sítí krychle existuje?

Co-V.
Když „oblékáme“ krychli, jisté strany čtverce se stanou hranami krychle a vrchol čtverce se stane vrcholem krychle.

Kamilka (Exp. S09, str. 151) při počítání hran krychle počítala každou hranu dvakrát, protože pod pojmem hrana si představovala stranu stěny. Aby se posílila asociace „čtverec ←→ stěna“ nebo „strana čtverce ←→ hrana krychle“, můžeme dát žákům úlohu, ve které jsou strany nebo vrcholy nějak identifikovány – nejdříve barvou, pak písmeny, což je na vyšší abstrakční úrovni. (Ke všem komentářům viz Video07.)

Výzvy

Ch-I.
Připravte scénář experimentu pro 4 žáky vaší třídy. Cílem experimentu je motivovat žáky, aby vytvořili bez vaší pomoci síť krychle (střih na šaty pro krychli). Napište váš předpoklad, jak budou žáci reagovat na zvolenou metaforu, zejména, jaký bude ve třídě rozdíl mezi hochy a dívkami.

Ch-II.
Realizujte připravený scénář a analyzujte vaše předpovědi. Nejúčinnější část této analýzy je hledání reakcí žáků, které jste neočekávali, a příčin možných chyb ve vaší předpovědi.

Ch-III.
Požádejte žáky, aby vyzdobili svoje střihy na oblek pro pana a paní Krychli. Střih by měl být dekorován tak, aby vzorek na sebe hezky navazoval, když se do něj Krychle oblékne.

Ch-IV.
Připravte gradovanou sérii úloh následujícího typu. Vezměte sadu šesti čtverců a vytvořte střih na šaty takovým způsobem, že po jeho obléknutí na krychli bude vytvořen hezký, na sebe navazující vzor. Navrhněte vhodnou sadu šesti čtverců ke každé z těchto úloh. (Viz obr. DE04, str. 149, Panak, Kytka1, Kytka2.)

Úloha S03 a) {B}

Najděte všechny tvary sítě krychle.

Úloha S03 b) {C}

Dokažte, že váš seznam sítí krychle je úplný.

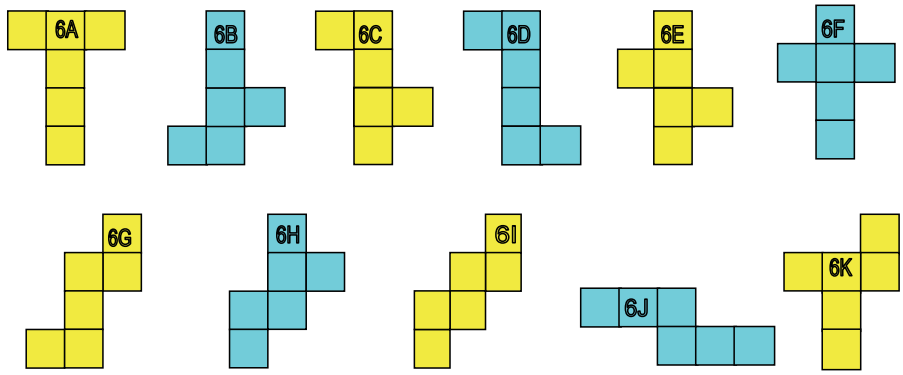
Výsledky

a) Viz obrázek S10a, nebo S10a a S10b.

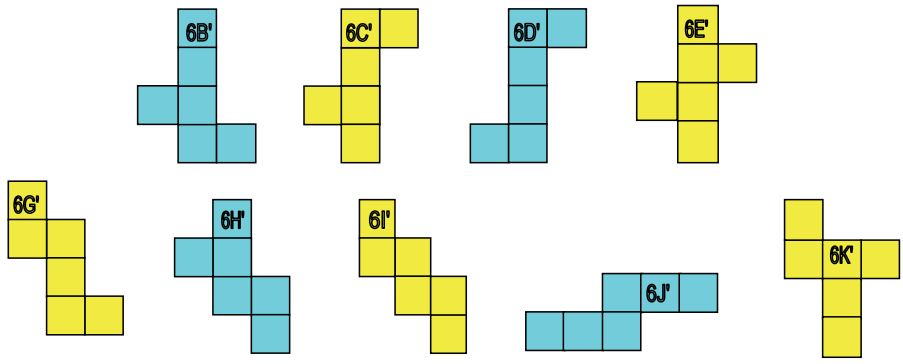
b) Důkaz toho, že jsme našli všechny sítě, může být udělán tímto způsobem: vezměte každé ze tří přípustných tetramin (4A, 4B, 4C, obr. S12, str. 112), použitím strategie popsané v komentáři Co-III k úloze S05, str. 113, najděte všechna možná pentamina a tento proces opakujte pro každé vhodné pentamino. Tato metoda umožňuje vyčerpat všechny možnosti.

Komentáře

Co-I.
Úloha je poněkud nejednoznačná, neboť nevíme, zda symetrické sítě jako síť B na obrázku S10a a síť 6B' na obrázku S10b jsou považovány za odlišné. Kdyby byly považovány za identické, pak dostaneme přesně 11 sítí jako na obrázku S10a. Když jsou tyto zrcadlové sítě považovány za různé, pak máme přesně 20 sítí, jak je ukázáno na obrázcích S10a, S10b.



Obr. S10a



Obr. S10b

Co-II.
V experimentu 06-DE, str. 146, studenti považovali dvě symetrické sítě za různé. Pozorovali, že tyto dvě sítě spolu souvisí, a pro vyjádření vztahu mezi nimi použili objevnou myšlenku: dali jim taková jména, které se odlišovala pouze tím, že jedno bylo ženské a druhé mužské (např. Michael, Michaela). Existují přesně dvě sítě – 6A a 6F, které jsou samy o sobě symetrické, a tudíž 6A = 6A´, 6F = 6F´. Pro tyto sítě studenti z Kasselu použili palindromická jména jako Otto nebo Anna. Malým stínem na tomto metaforickém pojmenovávání je fakt, že jsou použity dvě odlišné zásady pro vyjádření myšlenky symetrických párů: pro symetrický pár = mužské-ženské jméno, pro symetrické individuum = palindromické jméno.

Co-III.
Odsud dále budeme považovat dvě symetrické sítě (jako 6B a 6B') za identické. V jazyce studentů z Kasselu bychom neodlišovali například „Michael" a „Michaela".

Co-IV.
Sadu všech 11 sítí krychle můžeme nalézt experimentováním. Část b) úlohy je náročnější. Pro žáky to může být strategická motivace. Argument na podporu toho, že seznam sítí krychle na S10a je poněkud náročný, budeme diskutovat v komentáři Co-IV k úloze S05, str. 113.

Výzva

Předpokládejme, že žáci druhého ročníku nalezli všechny sítě krychle kromě dvou: 6J a 6I (obr. S10). Vytvořte úlohu (nebo několik úloh), které žákům naznačí, jak najít zbylé dvě sítě.

Úlohy S04 a – c) {A}; d – f) {B}; g) {C}

V úloze S02 byl střih na oblek pro krychli vytvořen ze čtverců. Nyní jej budeme tvořit z větších dílů – polymin (viz Komentář Co-I k úloze S04, str. 112).

Máme k dispozici model krychle. Utvořte střih na oblek pro krychli, jestliže jej máte udělat z následující sady polymin:

a)
dvě triomina 3A

b)
dvě triomina 3B

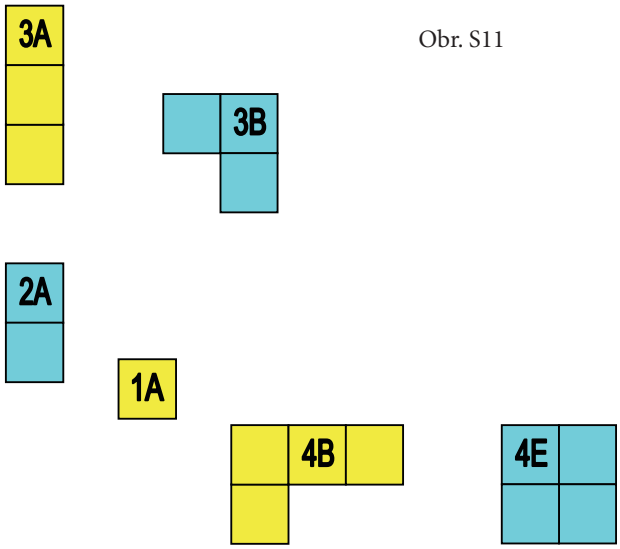
c)
triomina 3A a 3B

d)
tři biomina 2A

e)
polymina 3A, 2A a 1A

f)
polymina 2A, 4B a 4E

g)



Obr. S11

Pokuste se najít všechny střihy, které lze sestavit v každém z uvedených případů.

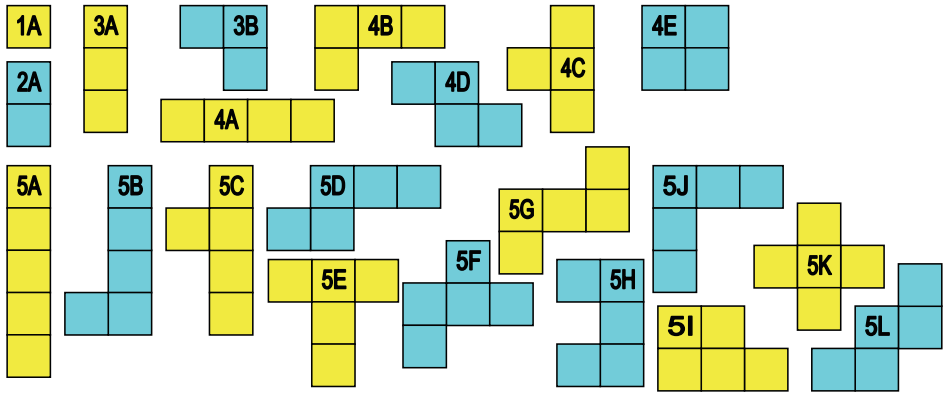
Výsledky

a) 6A a 6J (tj. ze dvou trimin 3A mohou být vytvořeny pouze dvě sítě 6A a 6J);
b) 6C,6D, 6E, 6G, 6H, 6I;
c) žádná;
d) 6B,6D, 6G, 6I, 6J, 6K;
e) 6A, 6B, 6C,6D, 6G, 6H, 6J, 6K;
f) 6B, 6D, 6G, 6J, 6K – nic ze 4E.

Komentáře

Co-I.
Polymino je útvar, který je vytvořen slepováním shodných čtverců tak, že se slepují vždy celé strany k sobě a čtverce se nepřekrývají. Slepením *n* čtverců vytvoříme *n*-mino.

Jak vidíme na obrázku S12, existuje jedno monomino (1A), jedno bimino = domino (2A), dvě trimina (3A, 3B), pět tetramin (4A, 4B, 4C, 4D, a 4E), a dvanáct pentamin (5A,…, 5L).



Obr. S12

Co-II.

Jsou dvě různé řešitelské strategie této úlohy: 1. přímo a 2. použitím souboru sítí krychle. Žáci, kteří použijí první strategii, přímou, položí daná polymina na krychli. Druhá strategie je abstraktnější. Žák nepotřebuje model krychle a snaží se najít síť z daných polymin přímo.

Například je-li případ a) řešen použitím přímé strategie, řešitel položí jedno trimino 3A na krychli a pak se dívá, jak k tomu bude pasovat další kus. K tomu, abychom dostali střih, je nutné ty dva kusy 3A+3A sešít. To může být uděláno dvěma různými způsoby, které vedou ke dvěma různým sítím 6A a 6J.

Je-li případ a) řešen druhou strategií, řešitel bere každou z jedenácti sítí na obrázku S10a, str. 110, po řadě a zkouší, zda by ta daná síť mohla být vytvořena z daných dvou trimin 3A. Tak je možné udělat sítě 6A a 6J.

Co-III.
Případ g) je náročnější, ale použitím druhé strategie odpovídá řešení úrovni B.

Výzva

Vytvořte úlohu, která bude kombinovat myšlenku dílů střihu z úlohy S04 s myšlenkou obarvování z úlohy S01, str. 103.

Úloha S05 a) {A}; b – e) {B}

Najdi všechna pentamina, která mohou být vytvořena slepením jednoho monomina 1A a jednoho tetramina a) 4A, b) 4B, c) 4C, d) 4D, e) 4E.

Výsledky

a) 5A, 5B, 5C; **b)** 5B, 5C, 5D, 5E, 5F, 5G, 5H, 5I, 5J; **c)** Komentář Co-III k úloze S05; **d)** 5D, 5F, 5I, 5L; **e)** 5I.

Komentáře

Co-I.

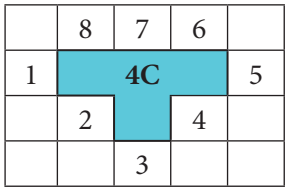
Tato úloha rozvíjí žákovu dovednost organizovat nepřehledný soubor objektů do dobře uspořádaného přehledu.

Co-II.

Když druhák řeší případ a), vytváří pentamino náhodně, a tak je pro něj obtížné nakreslit všechna tři pentamina 5A, 5B, a 5C jako výsledek. Obvykle žák uvede více pentamin, některá se opakují. Náročnější je případ b), ve kterém seznam výsledných pentamin obsahuje 9 variant. Zde žáci obvykle nějaké řešení zapomínají. Někdy má žák na papíře několik tetramin a pentamin v takovém nepořádku, že nakonec jako výsledek nakreslí hexamino.

Co-III.

Strategii „jdi dokola“ považujeme za nejefektivnější řešitelskou strategii. Příkladem je případ c), ve kterém se hledají všechna pentamina, která lze vytvořit přilepením monomina 1A k tetraminu 4C. Tento postup má čtyři kroky (viz obr. S13).



Obr. S13

1. Tetramino 4C je umístěno do mříže.
2. Jdeme okolo hranice pentamina 4C a očíslujeme všech šest sousedních buněk.
3. Každé očíslované buňce odpovídá jedno pentamino:
   1 – 5C, 2 – 5I, 3 – 5E, 4 – 5I, 5 – 5C, 6 – 5F, 7 – 5K, 8 – 5F.
4. Tímto způsobem obdržíme úplný seznam všech pěti pentamin, které lze vytvořit slepením 1A a 4C. Jsou to 5C (z buněk 1 a 5), 5E (z buněk 3), 5F (z buněk 6 a 8), 5I (z buněk 2 a 4), 5K (z buňky 7).

Co-IV.

Věříme, že třeťák je schopen sám objevit strategii „jdi okolo“, jestliže mu necháme dostatek času. V našem experimentálním vyučování tuto strategii nalezli žáci zcela samostatně, když organizovali sadu všech pentamin typu 1A+4B. Žáci měli uspořádat soubor takovým způsobem, aby jej bylo možné popsat slovy. Krátce na to dokázali, že existuje právě 11 sítí krychle.

Výzvy

Ch-I.
Pět případů úlohy S05 jsou různé úrovně. Uspořádejte je od nejméně náročné úlohy k nejnáročnější. Potom zkontrolujte své řešení experimentem se žáky.

Ch-II.
Vytvořte gradovanou sérii úloh k úloze S05.

Komentáře

Co-V.
Rada k výzvě Ch-II. Pro tuto úlohu vidíme dvě možnosti:

První je založena na zjednodušení úlohy. Místo slepování monomina a tetramina slepíme dohromady monomino a trimino.

Druhá možnost je založena na inverzním postupu. Místo slepování dvou polymin dohromady rozstřihneme dané polymino na dvě části.

Co-VI.
Rozklad polymin na dvě či více polymin není 3D problém. Proto budeme toto téma diskutovat v následující úloze, kterou směřujeme pouze k učiteli.

Co-VII.
(viz úloha S06)

Úloha S06 a – c) {B}; d – f) {C}; g) {T}

Dvě sítě krychle nazýváme 5+1-příbuzné, jestliže jedna z nich může být rozstřižena na jedno monomino (1-mino) a na jedno 5-mino. Podobně můžeme zavést termín 4+2-příbuzné sítě a 3+3-příbuzné sítě. Soubor všech sítí krychle, které dostaneme slepením polymin 1A a 5B (obr. S12, str. 112), bude označen jako 1A+5B. Stejný zápis je použit pro ostatní polymina. Je snadné nahlédnout, že sítě C a D patří do souboru 1A+5B. To znamená, že sítě C a D jsou 5+1-příbuzné.

a) Najděte sítě, které náleží do souboru 1A+5A; stejně pro soubor 1A+5B … 1A+5L (obr. S12).
b) Najděte sítě, které náleží do souborů 2A+4A, 2A+4B, 2A+4C, 2A+4D a 2A+4E (obr. S12).
c) Najděte sítě, které náleží do souborů 3A+3A, a 3B+3B (viz Úloha S04a, b, str. 111).
d) Popište 5+1-příbuznost pomocí tabulky.
e) Popište 4+2-příbuznost pomocí tabulky.
f) Popište 3+3-příbuznost pomocí tabulky.
g) Po získání vhledu do pojmu příbuznost vytvořte úlohu na toto téma pro vaše žáky.

Výsledky

V těchto výsledcích jsou sítě krychle 6A, 6B, …, 6K popsány bez čísla 6.To znamená, že síť 6C bude pouze C.

a) V souboru 1A+5A není žádná síť; to znamená, že množina 1A+5A je prázdná. Podobně soubor 1A+5H, a 1A+5I a 1A+5J. Další případy:

1A+5B = {A, B, C, D} 1A+5F = {B, E, H, K}
1A+5C = {B, C, E, F} 1A+5G = {C, G}
1A+5D = {G, H, J, K} 1A+5K = {F}
1A+5E = {A, F, K} 1A+5L = {H, I}

b) Soubor 2A+4A a 2A+4E jsou prázdné. Ostatní případy:
2A+4B = {B, D, G, J, K} 2A+4C = {A, C, F, H} 2A+4D = {B, G, I}

c) 3A+3A = {A, J} 3B+3B = {C, D, E, G, H, I}.

d) Příbuznost je dána tabulkou S01.

sítě	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		5B	5B	5B		5E					5E
B			5B, 5C	5B	5C, 5F	5C		5F			5F
C				5B	5C	5C	5G				
D											
E						5C		5F			5F
F											5E
G								5D		5D	5D
H									5L	5D	5D, 5F
I											
J											5D
K											

Tab. S01

Jak se v tabulce orientovat

V řádku A a sloupci D je pentamino 5B. To znamená, že obě sítě 6A a 6D patří do souboru 1A+5B, a tudíž jsou 5+1-příbuzné.. V řádku B a sloupci E jsou dvě pentamina 5C a 5F. To znamená, že sítě 6B a 6E patří do souboru 1A+5C a také do souboru 1A+5F. Proto jsou sítě 6B a 6E také 5+1-příbuzné (dokonce dvěma různými způsoby). Sítě 6D a 6I nejsou 5+1-příbuzné, protože neexistuje žádné 5-mino, které by bylo částí obou těchto sítí. To je vyznačeno prázdným políčkem v řádku D a sloupci I.

e) a f)

Příbuznost z e) je dána pravou horní polovinou tabulky S02.

Příbuznost z f) je dána levou dolní polovinou tabulky S02.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A			4C			4C		4C			
B				4B			4B,4D		4D	4B	4B
C						4C		4C			
D			3B				4B			4B	4B

E			3B	3B							
F								4C			
G			3B	3B	3B				4D	4B	4B
H			3B	3B	3B		3B				
I			3B	3B	3B		3B	3B			
J	3A										4B
K											

Tab. S02

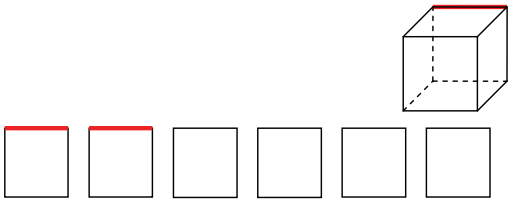
Shrnutí pro případy a) až f). Existuje 11 sítí krychle, a tudíž existuje 55 dvojic sítí. 26 z těchto párů jsou 5+1-příbuzné, 18 párů jsou 4+2- příbuzné a 16 jsou 3+3- příbuzné.

g) Nabízíme další úlohy jako návrh pro čtenáře, aby tvořil více úloh v této oblasti. (Výsledky jsou uvedeny v hranatých závorkách.)

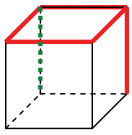
(a) Najděte všechna pentamina, která lze doplnit jedním monominem čtyřmi způsoby na čtyři různé sítě. [5B, 5C, 5D, 5F]
(b) Najděte pentamino, které nemůže být doplněno jedním monominem na síť krychle. [5A, 5H, 5I, 5J]
(c) Najděte pentamino, které může být doplněno monominem pouze jedním způsobem na síť krychle. [6K]
(d) Najděte dvě sítě, které jsou 5+1-příbuzné dvěma různými způsoby. Jinými slovy, najděte dvě sítě a dvě různá 5mina tak, že z každého z nich může být utvořena každá z daných dvou sítí doplněním jednoho 1mina. [Takové páry sítí krychle jsou tři: {6B, 6C}, {6B, 6E}, {6K, 6H}]
(e) Je relace 5+1-příbuznost α) reflexivní, β) symetrická, γ) transitivní? [α) ano, β) ano, γ) ne]
(f) Mirek tvrdí, že když X, Y jsou dvě sítě, které nejsou 5+1-příbuzné, nezbytně existuje síť Z tak, že jak sítě X, Z, tak sítě Z, Y jsou 5+1-příbuzné. Má Mirek pravdu? [Nemá, pro X = I a Y = A žádná síť Z neexistuje.]
(g) Ukažte, že bimino 2A může být slepeno s tetraminem 4D dvěma různými způsoby tak, že vzniknou sítě α) 6B, β) 6G, γ) 6I. Jak toto tvrzení souvisí s faktem, že tetramino 4D je středově souměrné? [Jestliže přilepíme bimino ke dvěma stranám tetramina 4D, které si odpovídají ve středové souměrnosti, pak dostaneme shodné sítě.]
(h) Ukažte, že bimino 2A může být přilepené k tetraminu 4C dvěma různými způsoby tak, že dostaneme síť α) 6C, β) 6H. Jak toto tvrzení souvisí s faktem, že tetramino 4C je osově souměrné? [Stejný argument jako výše.]
(i) Ukažte, že bimino 2A může být přilepeno k tetraminu 4C pouze jedním způsobem, abychom dostali síť α) A, β) F. Jak toto tvrzení souvisí s faktem, že tetramino 4C je osově souměrné? [Strana tetramina 4C, ke které může být bimino 2A přilepeno, je sama osově souměrná podle osy souměrnosti tetramina, tudíž bimino může být přilepeno pouze jedním způsobem.]

Úloha S07 a) {A}

Je dán model krychle a šest čtverců. Jedenáct ze dvanácti hran krychle je obarveno barvou *a* a jedna hrana je obarvena barvou *b*. Všech 24 stran daných čtverců je obarveno. 22 stran je obarveno barvou *a* a 2 strany (v různých čtvercích) jsou obarveny barvou *b*. Přilepte šest daných čtverců na krychli tak, abyste zachovali obarvení hran.



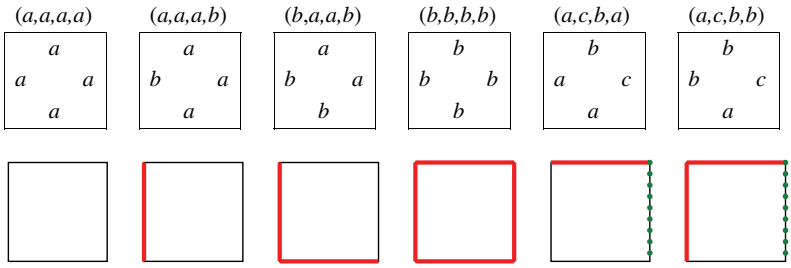
Obr. S14



Obr. S15

Úloha S07 b) {B}

Je dán model krychle a šest čtverců, jak je uvedeno na obrázku S15. Každá ze dvanácti hran krychle *ABCDEFGH* je obarvena jednou ze tří barev označených *a*, *b*, *c*. Všechny čtyři hrany stěny *ABCD* jsou obarveny barvou *a* a všechny čtyři hrany stěny *EFGH* jsou obarveny barvou *b*. Hrany *AE* a *BF* jsou obarveny barvou *a*, hrana *CG* je obarvena barvou *b* a hrana *DH* barvou *c*. Všech 24 stran daných čtverců je také obarveno, jak je uvedeno na obrázku S16. Obarvení těchto hran je popsáno pomocí čtyř písmen v závorce nad příslušným čtvercem. Toto značení budeme používat i dále. (Přesněji: symbol (*a, b, c, d*) znamená, že strany čtverce jsou obarveny barvami *a, b, c, d,* takže strany obarvené *a, c* jsou rovnoběžné, a tedy i strany obarvené *b, d* jsou spolu rovnoběžné.)



Obr. S16

Úkolem je přilepit čtverce na stěny krychle tak, aby se zachovalo obarvení hran.

Komentáře

Co-I.
V úloze S01, str. 103, byla barva použita k identifikaci stěn (S01a) a vrcholů (S01b) krychle. Tato identifikace sloužila k tomu, aby mohly být jednotlivé čtverce přilepeny na stěny krychle. Žádná hrana neměla roli identifikátoru. Kognitivní kompetence, která je v obou těchto úlohách rozvíjena, je kompetence přiřadit dvě množiny na základě kritéria, které je dáno více než jednou informací.

Co-II.
Případ a) je jednoduchý. I prvňáček je schopen úlohu řešit za předpokladu, že má zkušenosti s úlohou vytvořenou čtenářem v rámci výzvy k úloze S04, str. 112. Existují dvě systematické strategie. Buď začít dvěma čtverci se stranou obarvenou barvou *b,* nebo začít čtvercem se všemi stranami obarvenými barvou *a*. Žák první třídy tyto strategie nepoužívá často. Úlohy podobného typu posilují meta-kognitivní kompetenci žáků upřednostňovat systematickou strategii řešení.

Co-III.
Případ b) je mnohem náročnější. Je zajímavé pozorovat žáky při řešení této úlohy. Obvykle vezmou čtverec a hledají stěnu krychle, na kterou by se hodil. Často řešitel uvažuje pouze o barvách jedné nebo dvou stran čtverce, nikoliv o všech najednou. Našli jste podobné žákovské chyby týkající se vrcholů v úloze S01? Podívejte se na seznam chyb, který jste si pořídili v rámci výzvy Ch-II k úloze S01, str. 106.

Výzvy

Ch-I.
Mezi jednoduchou úlohou a) a obtížnější úlohou b) v úloze S07 je značná propast. Vytvořte sérii úloh, které tuto propast přemostí.

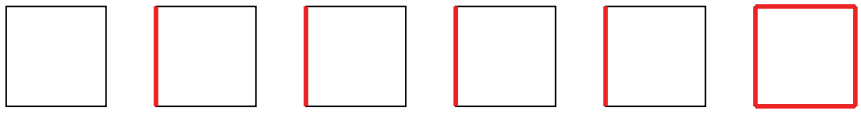
Ch-II.
Vytvořte seznam žákovských chyb a tápání při řešení úlohy S07. Porovnejte tento seznam s tím, který jste vytvořili v rámci výzvy Ch-II k úloze S01, str. 106.

Úloha S08 a) {B}; d) {C}; i) {T}

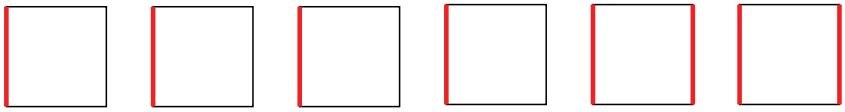
(Úloha S08 b, c) {B}; e – h) {C} viz pracovní list WS04.)

Je dána krychle a šest čtverců s obarvenými stranami, jako je uvedeno na obrázku níže. Obarvěte všech 12 hran krychle tak, že bude možné čtverce přilepit na stěny a přitom si barvy hran a stěn budou odpovídat.

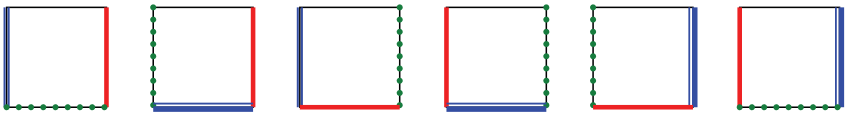
a) (*a,a,a,a*), 4× (*a,a,a,b*), (*b,b,b,b*) (to znamená, že jsou dány 4 čtverce (*a,a,a,b*));



d) 4× (*a*,*a*,*a*,*b*), 2× (*a*,*b*,*a*,*b*);

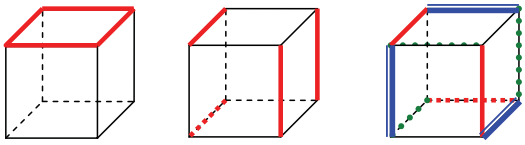


i) (*c*,*b*,*a*,*d*), (*d*,*b*,*a*,*c*), (*b*,*c*,*a*,*d*), (*d*,*c*,*a*,*b*), (*b*,*d*,*a*,*c*), (*c*,*d*,*a*,*b*).



Výsledky

Viz obrázky S17a, d, i.



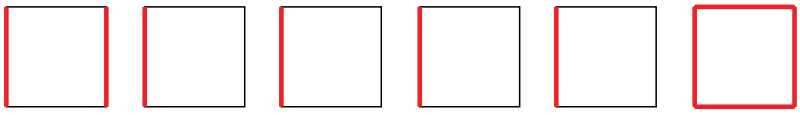
Obr. S17a Obr. S17d Obr. S17i

Úloha S09 a, b) {B}; c – f) {C}

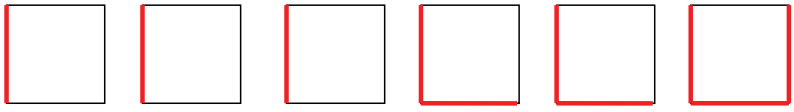
(Úloha S09 b) {B}; d – f) {C} viz pracovní list WS05.)

Je dáno šest čtverců s obarvenými stranami. Z těchto čtverců sestrojte střih na oblek pro Krychli (síť krychle) tak, abyste sešívali pouze ty strany čtverců, které jsou obarvené barvou *b*. Jinými slovy, švy na obleku musí být barvy *b* a zipy musí být barvy *a*.

a) (*a*,*b*,*a*,*b*), 4× (*a*,*a*,*a*,*b*), (*b*,*b*,*b*,*b*);



c) 3× (*a*,*a*,*a*,*b*), 2× (*b*,*a*,*a*,*b*), (*b*,*b*,*a*,*b*).



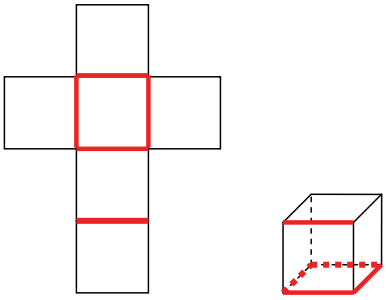
Komentáře

Případ a) je jednoduchý, jestliže řešitel začne čtvercem (*b*, *b*, *b*, *b*). Ke každé straně tohoto čtverce musí být „přišit“ další čtverec. První pokus může vést k vytvoření

pentamina 5K, ale již druhý pokus jistě vyústí ve správné řešení, střih 6F. Všechny další případy jsou mnohem náročnější.

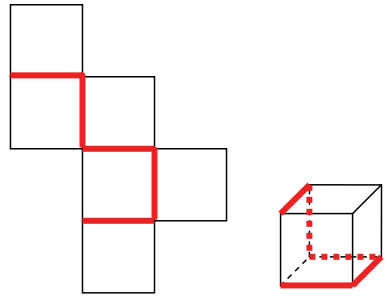
Výsledky

a) střih 6F



Obr. S18a

c) střih 6H

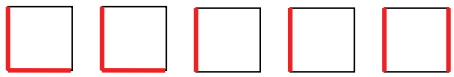


Obr. S18c

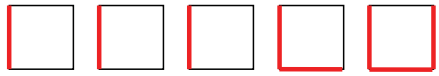
Úloha S10 a, b) {B}

Je dáno pět čtverců s obarvenými stranami. Najděte šestý čtverec tak, že ze všech šesti čtverců mohou být vytvořeny přesně a) dva, b) tři různé střihy na oblek pro krychli.

a) 2× (*b*,*a*,*a*,*b*), 2× (*a*,*a*,*a*,*b*), (*a*,*b*,*a*,*b*);



b) 3× (*a*,*a*,*a*,*b*), (*b*,*a*,*a*,*b*), (*b*,*b*,*a*,*b*).

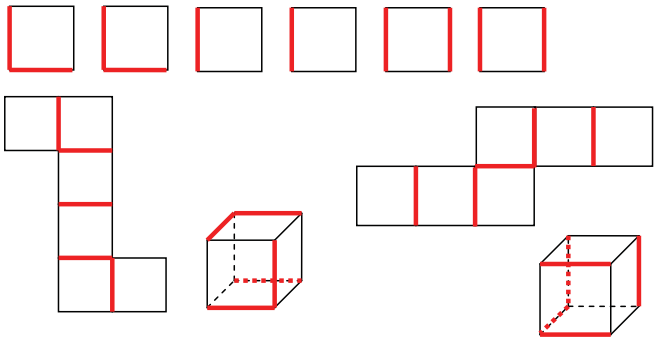


(Stejně jako v úloze S09 lze sešívat čtverce pouze podél stran obarvených barvou *b*. Jinými slovy, švy na obleku musí být barvy *b* a zipy musí být barvy *a*.)

Výsledky

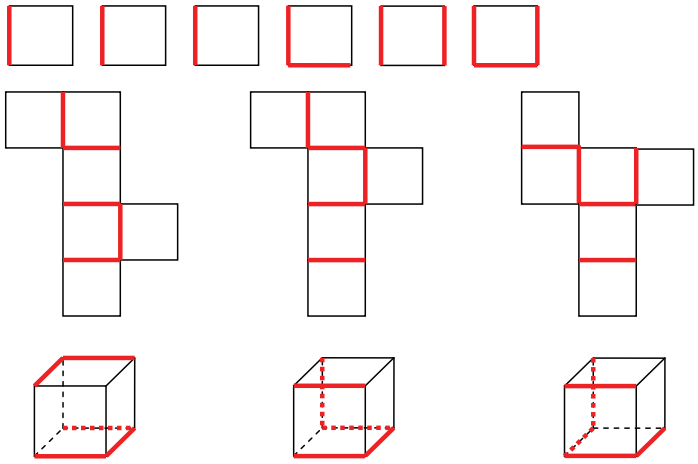
V obou případech jsou hledané čtverce tyto: (*a*,*b*,*a*,*b*).

a) 2× (*a*,*a*,*b*,*b*), 2× (*a*,*a*,*a*,*b*), 2× (*a*,*b*,*a*,*b*) se dvěma řešeními – síť 6D a 6J (obr. S19a).



Obr. S19a

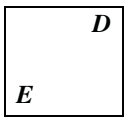
b) 3× (*a*,*a*,*a*,*b*), (*a*,*b*,*b*,*a*), (*a*,*b*,*a*,*b*), (*b*,*b*,*a*,*b*) se třemi řešeními – sítě 6B, 6C, 6K (obr. S19b).



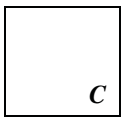
Obr. S19b

Úloha S11 a) {C}

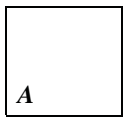
Na obrázcích S20a–f je dáno šest stěn standardní krychle *ABCDEFGH* (viz obr. S04, str. 103) . Právě 10 z 24 vrcholů je pojmenováno. Určete, která stěna je spodní, horní, přední, zadní, levá a pravá.



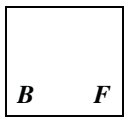
Obr. S20a



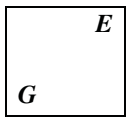
Obr. S20b



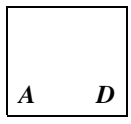
Obr. S20c



Obr. S20d



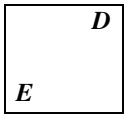
Obr. S20e



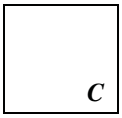
Obr. S20f

Úloha S11 b) {C}

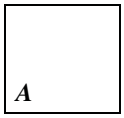
Řešte stejný problém pro šest čtverců na obrázcích S20a, S20b, S20c, S20d, S20g a S20h.



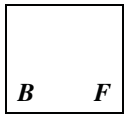
Obr. S20a



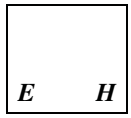
Obr. S20b



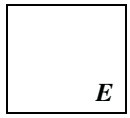
Obr. S20c



Obr. S20d



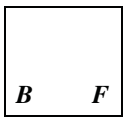
Obr. S20g



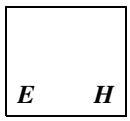
Obr. S20h

Úloha S11 c) {C}

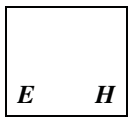
Řešte stejný problém pro pět čtverců na obrázcích S20d, S20e, S20g, S20h a S20i.



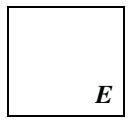
Obr. S20d



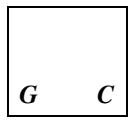
Obr. S20e



Obr. S20g



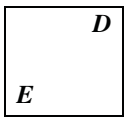
Obr. S20h



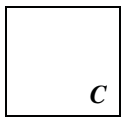
Obr. S20i

Úloha S11 d) {C}

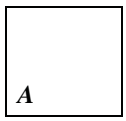
Řešte stejný problém pro šest čtverců na obrázcích S20a, S20b, S20c, S20d, S20g a S20k.



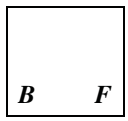
Obr. S20a



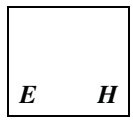
Obr. S20b



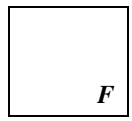
Obr. S20c



Obr. S20d



Obr. S20g



Obr. S20k

Výsledky

Tabulka S03 popisuje vazbu ‚stěna ←→ obrázek' pro každý z uvedených případů. V případě c) chybí obrázek spodní stěny. V případě d) existují dvě řešení.

Stěna / Úloha	spodní	horní	přední	zadní	levá	pravá
a)	S20f	S20e	S20c	S20b	S20a	S20d
b)	S20c	S20g	S20h	S20b	S20a	S20d
c)		S20e	S20h	S20i	S20g	S20d
d)	S20c /S20c	S20g /S20g	S20d /S20k	S20b /S20b	S20a/ S20a	S20k /S20d

Tab. S03

Komentáře

Co-I.
Čtverec na obrázku S20a může být zapsán takto: *DXEX*. Písmeno *X* zde znamená neznámý vrchol. Podobně čtverce na obrázcích S20b až 20f mohou být nahrazeny zápisy *CXXX, AXXX, BFXX, EXGX* a *ADXX*.

Co-II.
Problém v úloze S11 je ve skutečnosti spíše kombinatorický než geometrický. Abychom to prokázali, popíšeme kombinatorické řešení případu a).

Nejdříve si všimneme, že:
čtverec *DXEX* (obrázek S20a) je levá stěna, protože to je jediná stěna s oběma vrcholy *D* a *E*;
čtverec *CXXX* (obrázek S20b) je buď spodní, nebo pravá, nebo zadní stěna; jen tyto stěny obsahují vrchol *C*;
čtverec *AXXX* (obrázek S20c) je buď spodní, nebo přední, nebo levá stěna; jen tyto stěny obsahují vrchol A;
čtverec *BFXX* (obrázek S20d) je buď přední, nebo pravá; jen tyto stěny obsahují vrcholy *B, F*;
čtverec *GXEX* (obrázek S20e) je horní stěna, protože je to jediná stěna s vrcholy *G* a *E*;
čtverec *ADXX* (obrázek S20f) je buď spodní, nebo levá stěna, protože jen tyto stěny obsahují vrcholy *A, D*.

Všech šest popsaných podmínek je shrnuto v tabulce S04a: x v řádku b a sloupci zadní znamení, že čtverec na obrázku S20b může být zadní stěnou krychle.

		spodní	horní	přední	zadní	levá	pravá
Obrázek S20	a					x	
	b	**x**			x		x
	c	**x**		x		x	
	d			x			x
	e		x				
	f	**x**				x	

Tab. S04a

		spodní	horní	přední	zadní	levá	pravá
Obrázek S20	a					1	
	b				5		
	c			3			
	d						4
	e		1				
	f	2					

Tab. S04b

Nyní je vazba ‚obrázek ←→ stěna krychle' dána vhodnou množinou šesti x v tabulce S04a. Termínem vhodný rozumíme, že v každém řádku a v každém sloupci tabulky je vybráno právě jedno x.

Tímto způsobem je geometrický problém S11 převeden na kombinatorický. Problém řešíme pomocí tabulky S04b:

Za prvé, v řádcích a e je pouze jedno x. To znamená, že tato dvě x musí být vybrána. Za druhé, v řádku f jsou dvě x, ale to druhé z nich je již ze hry, tudíž to první

musí být vybráno. Za třetí, v řádku c jsou tři x; dvě jsou již ze hry, tudíž to přední x musí být vybráno. Tímto způsobem budou vybrána i zbývající x.

Co-III.

Jeden z nejdůležitějších znaků konstruktivistického přístupu je stále přítomný cíl učitele posilovat strukturování poznatků žáka. To znamená, že každý nový poznatek by měl být provázán na již existující kognitivní síť žáka. Zejména důležité jsou ty změny, které budují most mezi různými oblastmi matematiky. Úloha S11 nabízí most mezi novým poznatkem ze 3D geometrie a již známými kombinatorickými myšlenkami uvedenými v popsané tabulkové technice. Formalizace 3D situace realizované tabulkami 4a, 4b je pro toto přemostění nástrojem.

Jestliže není student obeznámen s uvedenou technikou, můžeme mu poskytnout (samozřejmě předem) nějaké problémy tohoto typu.

Výzva

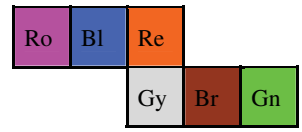
Vytvořte sérii kombinatorických problémů, ve kterých se student seznámí s tabulkovou technikou použitou v komentáři Co-II k úloze S11. Existuje hezká knížka, která obsahuje řadu vhodných problémů tohoto typu: G. Bizam, J. Herczeg: *Igra i logika* (v maďarštině 1972, v ruštině 1975).

Úloha S12 a) {A}

Mějme model krychle a zvolme jednu její síť. Jeden čtverec sítě je nějak označen. Úlohou je označit druhý čtverec sítě tak, že oba označené čtverce budou tvořit rovnoběžné stěny krychle, když se síť položí na krychli. Volte různé čtverce a různé sítě.

Úloha S12 b) {A}

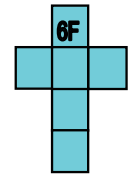
Je dán model krychle a její síť 6J. Všechny čtverce jsou obarveny odlišnými barvami. Úlohou je najít všechny dvojice čtverců, které budou tvořit rovnoběžné stěny krychle po jejím oblečení do dané sítě (viz obr. S21).



Obr. S21

Úloha S12 c) {B}

Je dáno šest barevných čtverců – dva jsou barvy *a*, dva jsou barvy *b* a dva barvy *c*. Model krychle dán není. Úlohou je z těchto šesti čtverců sestrojit síť 6F tak, že každá dvojice rovnoběžných stěn je stejné barvy a každá dvojice stěn na sebe kolmých je různé barvy.



Úloha S12 d) {B}

Načrtněte tetramino 4A a obarvěte každý čtverec tak, že po přiložení tetramina na krychli budou rovnoběžné stěny obarveny stejnou barvou a stěna na sebe kol-

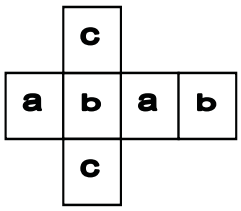
mé budou mít barvu různou. Řešte stejnou úlohu pro tetramina 4B, 4C a 4D (na obrázku S12, str. 112).

Úloha S12 e) {T}

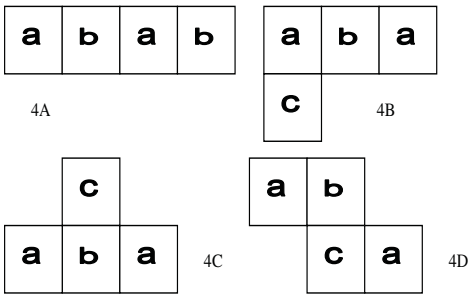
Jsou tři pravidla týkající se polohy dvojic čtverců sítě krychle, které jsou rovnoběžnými stěnami krychle. Použitím těchto pravidel můžete řešit úlohu o rovnoběžných stěnách v každé síti. Najděte tato pravidla.

Výsledky

b) Rovnoběžné stěny jsou: modrá – hnědá (Bl-Br), zelená – šedivá (Gn-Gy) a růžová – červená (Ro-Re).
c) Viz obrázek S22.
d) Viz obrázek S23.
e) Pravidla jsou:
1. Je-li trimino 3A částí sítě, pak jeho oba krajní čtverce jsou stejné barvy.
2. Je-li tetramino 4D částí sítě, pak dva krajní čtverce jsou stejné barvy.
3. Jsou-li již čtyři čtverce sítě obarveny tak, že dva čtverce jsou barvy *a* a dva barvy *b*, pak zbylé dva čtverce jsou barvy *c*.



Obr. S22



Obr. S23

Komentáře

Co-I.
Na krychli jsou tři dvojice rovnoběžných stěn. Předpokládejme, že každá stěna krychle (každý čtverec její sítě) je obarven. Řekneme, že toto obarvení je typu *k* (*k* je jedno z čísel 0, 1, 2, 3), jestliže právě *k* dvojic rovnoběžných stěn je obarveno stejnou barvou.

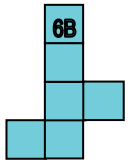
Co-II.
V geometrii rozlišujeme dvě základní polohy dvou rovin ve 3D: rovnoběžné a kolmé. Oba tyto typy rovin jsou uvažovány a identifikovány použitím barev v úloze S12. Barvy pomáhají studentům být pozorní zejména při zkoumání jevu rovnoběžnost. Tento přístup k oběma relacím bude použit též ve vztahu k přímkám (hrany krychle).

Výzva

Vytvořte gradovanou sérii problémů, v nichž bude žák konstruovat síť krychle s daným obarvením z již obarvených domin, trimin a tetramina. Úloha S13 je dobrým pomocníkem pro tuto výzvu.

Úloha S13 a) {B}

Jsou dána tři domina s následujícím obarvením čtverců: *(a,a)*, *(a,b)*, *(b,b)*. Z těchto tří domin zkonstruujte síť 6B s obarvením typu $k = 3$ nebo $k = 2$ nebo $k = 1$ nebo $k = 0$ (to znamená, že počet dvojic rovnoběžných stěn stejně obarvených je k).



Úloha S13 b) {B}

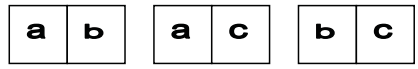
Řešte stejný problém pro všechny sítě a všechny své výsledky vyznačte v tabulce S05. Je-li možné vytvořit síť 6X s typem obarvení k, vyznačte v příslušném okénku tabulky S05 symbol plus (to jest ve sloupci 6X a řádku k). Jinak ponechte okénko prázdné.

	k	6A	6B	6C	6D	6E	6F	6G	6H	6I	6J	6K
Počet dvojic	3											
rovnoběž-	2											
ných stěn	1											
stejné barvy	0											

Tab. S05

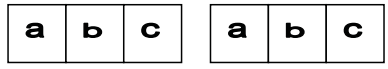
Úloha S13 c) {B}

Řešte stejný problém pro tři různá domina: (a,b), (a,c), (b,c).



Úloha S13 d) {B}

Řešte stejný problém pro dvojici obdélníkových trimin (a,b,c), (a,b,c).



(Úloha S13e, f) {B}; viz pracovní list WS06.)

Výsledky

a) Viz obecné řešení v tabulce S06.

b) Viz tabulka S06.

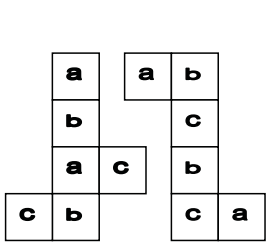
k	6A	6B	6C	6D	6E	6F	6G	6H	6I	6J	6K
3											
2		+		+			+		+	+	+
1											
0		+		+			+		+	+	+

Tab. S06

c) Žádná ze sítí 6A, 6C, 6E, 6F a 6H nemůže být sestrojena ze tří domin. Všechny ostatní sítě mohou.

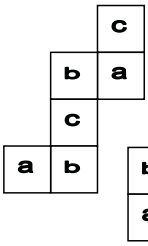
Žádná ze sestrojených sítí nemůže být obarvením typu $k = 2$. Ve skutečnosti, je-li jedna dvojice rovnoběžných stěn obarvena barvou a a druhá barvou b, pak nezbytně třetí dvojice je obarvena barvou c. Tudíž pro obarvování typu k jsou pouze tři možnosti: $k = 3$, $k = 1$, $k = 0$. Všechny tyto možnosti jsou uvedeny na obrázcích S24.

Obarvování na obrázcích S24a–f jsou typu $k = 3$. Je-li v jakékoliv této síti domino (a,b) nahrazeno dominem (b,a), bude nové obarvení typu $k = 1$. Jestliže navíc domino (a,c) je nahrazeno dominem (c,a), dostaneme obarvení typu $k = 0$.

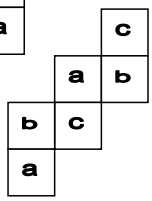


Obr. S24a (síť 6B)

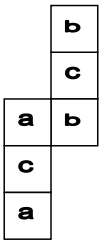
Obr. S24b (síť 6D)



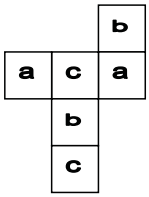
Obr. S24c (síť 6G)



Obr. S24d (síť 6I)



Obr. 24e (síť 6J)



Obr. 24f (síť 6K)

d) jsou pouze dvě sítě, které mohou být sestrojeny z obdélníkových trimin: 6A a 6J. V obou případech dostaneme právě jedno obarvení, a sice typu $k = 1$. Stěny barvy b jsou rovnoběžné.

Komentář

Úloha S13a) může být řešena druhákem (úroveň A) jednoduchou trojkrokovou procedurou: 1. Ze tří daných domin sestrojit síť krychle; 2. Položit sestrojenou síť na krychli; 3. Určit typ tohoto obarvení.

Řešitelský proces čtvrťáka (úroveň B) může být systematičtější: zaprvé, žák může zjistit, že některé sítě se nedají třemi dominy vytvořit, a pak může najít všechny možnosti, jak může být daná nebo vybraná síť (např. síť 6I nebo 6K) obarvena a jaký typ obarvení tímto způsobem můžeme dostat. Úplné řešení úlohy je možné

požadovat na úrovni C, po studentovi osmého ročníku. Popsané rozdělení úlohy do různých úrovní platí pro všechny podúlohy úlohy S13.

Výzva

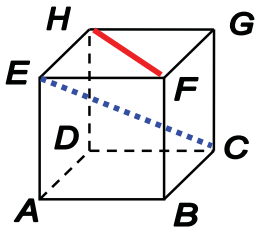
Ch-I.
Vytvořte jiné problémy různé obtížnosti podobně jako v předchozích čtyřech případech (a dalších dvou na pracovních listech). Například problémy vyžadující konstrukci obarvování sítě daného typu ze dvou odlišně obarvených trimin 3B.

Ch-II.
Vytvořte gradovanou sérii problémů následujícího typu: Je dán model krychle. Dekorovaný oblek je položen na krychli a dále je dán jen částečně dekorovaný střih na ten oblek. Úlohou je dokreslit dekor na celý střih (celou síť) tak, že odpovídá obleku krychle. Najděte všechna řešení. (Viz Panak, Kytka1, Kytka2.)

Terminologie

Vrcholy *X, Y* krychle se nazývají:

sousední, jestliže úsečka *XY* je hranou krychle (např. *A, B*),
diagonální, jestliže úsečka *XY* je stěnovou úhlopříčkou krychle (např. *F, H*),
dipodální, jestliže úsečka *XY* je tělesovou úhlopříčkou krychle (např. *E, C*) (viz obr. S25a).



Obr. S25a

Úloha S14 a), b) {A}; c) {B}

Krychle je pojmenována standardním způsobem. Najděte všechny vrcholy, které jsou a) sousední s vrcholem *B*; b) diagonální s vrcholem *E;* c) dipodální s vrcholem *D*.

Úloha S14 d) {B}

Krychle je pojmenována standardním způsobem. Najděte čtyři vrcholy takové, že jakékoliv dva z nich jsou diagonální. Zkonstruujte tetraedr, jehož čtyři vrcholy jsou dané čtyři vrcholy krychle.

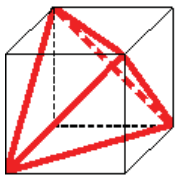
Úloha S14 e) {B}

Obarvěte dva vrcholy krychle červeně a šest jejích vrcholů modře tak, že v každé stěně je přesně jeden vrchol červený.

Úloha S14 f) {B}

Obarvěte čtyři vrcholy krychle červeně a čtyři její vrcholy modře tak, že v každé stěně jsou přesně dva vrcholy červené.

Výsledky



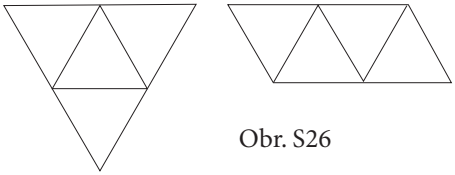
Obr. S25b

a) *A, C, F*
b) *B, D, G*
c) *F*
d) Viz obr. S25b.
e) Jedna dvojice dipodálních vrcholů je červená a všechny ostatní jsou modré.
f) Jeden vrchol a všechny tři k němu diagonální jsou červené, všechny ostatní jsou modré. Nebo oba vrcholy jedné hrany a oba vrcholy hrany s ní rovnoběžné, která s ní neleží v jedné stěně, jsou červené a ostatní jsou modré.

Komentáře

Co-I. (Didaktická poznámka)
Žádný ze tří zde představených pojmů (sousední, diagonální, dipodální) není obtížný. Ale jestliže je zavedeme najednou, bude to pro žáky obtížné. Náš návrh je zavést je postupně v průběhu několika týdnů. (Viz výzva níže.)

Co-II. (**Tetraedr**)
Tetraedr je těleso, které má čtyři vrcholy, čtyři stěny a šest hran. Každá stěna je rovnostranný trojúhelník, všechny hrany mají stejnou délku. Dvě možné sítě tetraedru jsou na obrázku S26.



Obr. S26

Výzva

Připravte scénář aktivity, ve které je cílem seznámit žáka třetí/čtvrté třídy s pojmy a) sousední, b) diagonální, c) dipodální dvojice vrcholů krychle. Hlavní částí scénáře by měla být vhodná série problémů.

Úloha S15 a – h) {B*, C, T}

Dána je krychle a dva její vrcholy jsou označeny *X* a *Y*. Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé. Když není, dejte protipříklad {úroveň C}. Když je, podejte důkaz {úroveň T}.

a) Každé dva různé vrcholy, které jsou sousední s vrcholem *X*, jsou navzájem diagonální.
b) Každé dva různé vrcholy, které jsou diagonální k vrcholu *X*, jsou navzájem diagonální.
c) Každé dva vrcholy dipodální k vrcholu *X*, jsou navzájem diagonální.
d) Jsou-li *X* a *Y* navzájem diagonální, pak existuje vrchol, který je k oběma sousední.

e) Jsou-li *X* a *Y* navzájem diagonální, pak každý vrchol sousední k *X* je sousední i k *Y*.
f) Jsou-li *X* a *Y* navzájem diagonální, pak existuje vrchol, který je k oběma diagonální.
g) Jsou-li *X* a *Y* navzájem diagonální, pak každý vrchol diagonální k *X* je diagonální i k *Y*.
h) Jsou-li *X* a *Y* navzájem dipodální, pak každý vrchol sousední k *X* je diagonální i k *Y*.

Výsledky

U všech případů použijeme standardní označení krychle a bod X umístíme do vrcholu *A*. Je-li *Y* sousední k *X*, pak jej umístíme do *B*, když je diagonální k *X*, umístíme jej do *C,* a když je dipodální k *X,* musí být umístěn do *G*.

a) Tvrzení je pravdivé. Důkaz: Existují tři vrcholy sousední s *A*: *B*, *D* a *E*. Vidíme, že každé dva z nich jsou navzájem diagonální.
b) Tvrzení je pravdivé. Důkaz: Existují tři vrcholy sousední s *A*: *C*, *F* a *H*. Vidíme, že každé dva z nich jsou navzájem diagonální.
c) Tvrzení je nepravdivé. Existuje jediný vrchol dipodální k *A*, je to vrchol *G*. Ten není sám k sobě diagonální.
d) Tvrzení je pravdivé. Důkaz: Vrchol B je sousední jak k vrcholu $X = A$, tak i k vrcholu $Y = C$.
e) Tvrzení je nepravdivé. Vrchol E je sousední k vrcholu $X = A$, nikoli však k vrcholu $Y = C$.
f) Tvrzení je pravdivé. Důkaz: Vrchol *F* (a stejně tak i vrchol *H*) je diagonální jak k vrcholu $X = A$, tak i k vrcholu $Y = C$.
g) Tvrzení je nepravdivé. Vrchol *Y* je diagonální k X, ale není diagonální sám k sobě.
h) Tvrzení je pravdivé. Důkaz: Existují tři vrcholy sousední k vrcholu X = A. Jsou to B, D, E. Každý z těchto vrcholů je diagonální k vrcholu Y = G.

Komentář

Co-I. (Tvrzení s kvantifikátory)

Ve všech úlohách až do úlohy S15 měl řešitel za úkol manipulovat s objekty. Zde, poprvé, má rozhodovat, zda nějaké tvrzení je/není pravdivé. Nicméně i zde každé z tvrzení a – h lze chápat jako výzvu k experimentální činnosti a intuitivnímu rozhodování. Na této úrovni může danou úlohu řešit i žák úrovně B.

Díváme-li se na uvedená tvrzení jako na výroky s kvantifikátory (pro každé, pro žádné, pro všechny, existuje), pak by úroveň řešitele měla být C.

Co-II. (Sofistikovanější přístup)

Předřecké civilizace, Sumerové, Babylóňané, Egypťané byli zaměřeni na otázku JAK? Jak vypočítat, jak sestrojit, jak najít, … ? Starověké Řecko zásadně změnilo

tento přístup. Byl to Pythagoras ze Samu (?580 – ?500), kdo poprvé přišel s myšlenkou obecného tvrzení a jeho důkazu. Toto byl ve skutečnosti začátek matematiky, jak tuto vědu chápeme dnes. Je pravděpodobné, že první obecná tvrzení, která byla dokázána, byla ta, která se týkají sudých a lichých čísel. Například: součet kterýchkoli dvou lichých čísel je číslo sudé; součin dvou lichých čísel je číslo liché atd.

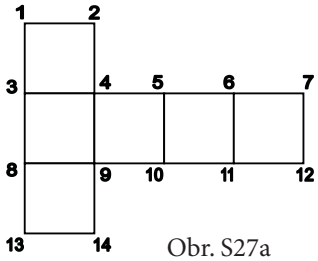
Podobně jako ve fylogenezi i v ontogenezi tvrzení s kvantifikátory představují hlubší úroveň matematického myšlení. V úloze S15 jsme se této úrovně dotkli poprvé.

Úloha S16 a) {B}

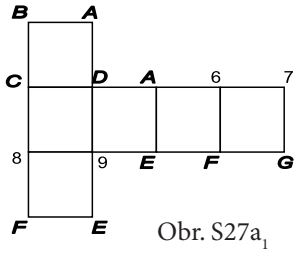
Vrcholy sítě krychle na obr. S27a jsou očíslovány. Známe jména 10, nebo 8, nebo 6, nebo 5, nebo 4, nebo 3 bodů.

Případ $\mathbf{a}_1$) Známe deset vrcholů: 1 = *B*, 2 = *A*, 3 = *C*, 4 = *D*, 5 = *A*, 10 = *E*, 11 = *F*, 12 = *G*, 13 = *F*, 14 = *E*. Najděte jména vrcholů 6, 7, 8 a 9 (viz obr. S27a$_1$).

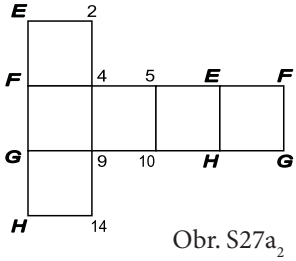
Případ $\mathbf{a}_2$) Známe osm vrcholů: 1 = *E*, 3 = *F*, 6 = *E*, 7 = *F*, 8 = *G*, 11 = *H*, 12 = *G*, 13 = *H*. Najděte jména vrcholů 2, 4, 5, 9, 10 and 14 (viz obr. S27a$_2$).



Obr. S27a



Obr. S27a$_1$



Obr. S27a$_2$

(Případy $\mathbf{a}_3$) – $\mathbf{a}_6$) {B} viz pracovní list WS07.)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathbf{a}_1$	obr.	*B*	*A*	*C*	*D*	*A*					*E*	*F*	*G*	*F*	*E*
$\mathbf{a}_2$	obr.	*E*		*F*			*E*	*F*	*G*			*H*	*G*	*H*	
$\mathbf{a}_3$	WS07	*H*	*E*					*D*					*C*	*G*	*F*
$\mathbf{a}_4$				*A*		*C*		*A*		*H*		*F*			
$\mathbf{a}_5$			*C*		*B*		*G*				*D*				
$\mathbf{a}_6$				*D*		*G*				*B*					

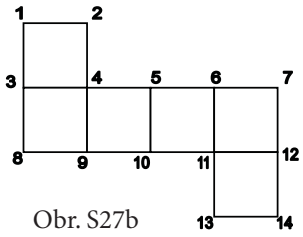
Tab. S07a

Úlohy od S16b do S16e jsou zadány v tabulkové formě.

(Úloha S16d, e {B} viz pracovní list WS10, WS11.)

Úloha S16 b) {B}

Vrcholy sítě krychle na obr. S27b jsou očíslovány. Každý řádek v tabulce S07b je jedna úloha. Vyřešte všechny tyto úlohy, tj. vyplňte všechna prázdná okénka tabulky, tj. najděte jména všech zatím neznámých vrcholů.



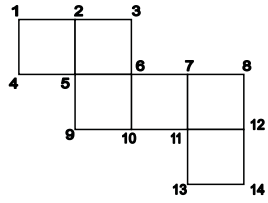
Obr. S27b

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathbf{b}_1$	obr.				*D*	*A*	*B*	*C*	*G*	*H*	*E*	*F*			
$\mathbf{b}_2$	obr.					*A*	*E*	*F*	*G*	*C*	*D*	*H*			
$\mathbf{b}_3$	WS08					*E*	*H*	*D*	*C*		*F*	*G*			
$\mathbf{b}_4$						*C*	*B*	*A*			*G*	*F*			
$\mathbf{b}_5$						*C*	*G*				*D*	*H*			
$\mathbf{b}_6$						*G*	*H*				*F*				

Tab. S07b

Úloha S16 c) {B}

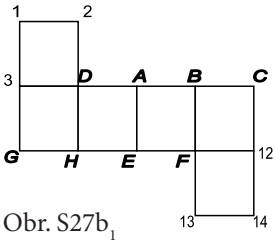
Vrcholy sítě krychle na obr. S27c jsou očíslovány. Každý řádek v tabulce S07c je jedna úloha. Vyřešte všechny tyto úlohy, tj. vyplňte všechna prázdná okénka tabulky, tj. najděte jména všech zatím neznámých vrcholů.



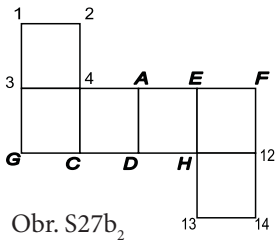
Obr. S27c

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathbf{c}_1$	obr.		*G*		*B*	*F*									
$\mathbf{c}_2$	obr.	*H*		*A*		*F*									
$\mathbf{c}_3$	WS09	*D*			*H*						*G*				
$\mathbf{c}_4$		*H*				*F*					*C*				
$\mathbf{c}_5$			*B*			*F*							*A*		
$\mathbf{c}_6$					*A*		*F*		*C*						

Tab. S07c



Obr. S27b$_1$

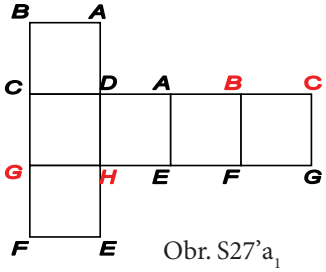


Obr. S27b$_2$

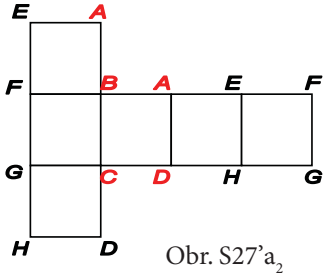
Výsledky

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a$_1$	*B*	*A*	*C*	*D*	*A*	***B***	***C***	***G***	***H***	*E*	*F*	*G*	*F*	*E*
a$_2$	*E*	***A***	*F*	***B***	***A***	*E*	*F*	*G*	***C***	***D***	*H*	*G*	*H*	***D***

Tab. S08a



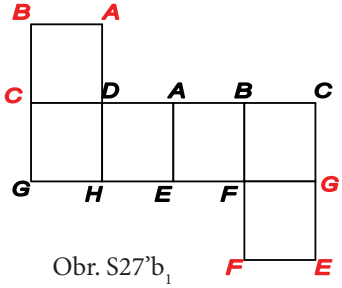
Obr. S27'a$_1$



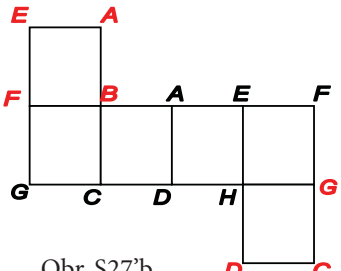
Obr. S27'a$_2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
b$_1$	***B***	***A***	***C***	*D*	*A*	*B*	*C*	*G*	*H*	*E*	*F*	***G***	***F***	***E***
b$_2$	***E***	***A***	***F***	***B***	*A*	*E*	*F*	*G*	*C*	*D*	*H*	***G***	***D***	***C***

Tab. S08b



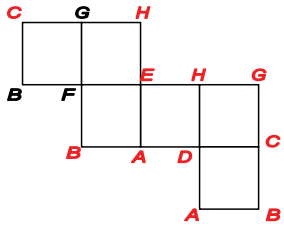
Obr. S27'b$_1$



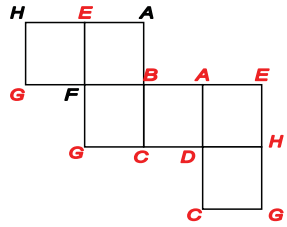
Obr. S27'b$_2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c$_1$	***C***	*G*	***H***	*B*	*F*	***E***	***H***	***G***	***B***	***A***	***D***	***C***	***A***	***B***
c$_2$	*H*	***E***	*A*	***G***	*F*	***B***	***A***	***E***	***G***	***C***	***D***	***H***	***C***	***G***

Tab. S08c



Obr. S27'c$_1$



Obr. S27'c$_2$

Komentáře

Co-I (Dva cíle úlohy S16a)
Úloha S16a sleduje dva cíle. První je geometrický. Žák si vytváří vlastní geometrickou metodu řešení těchto úloh. Pro většinu žáků spočívá nejúčinnější metoda ve vystřižení sítě, popsání všech jejích známých vrcholů, položení sítě na krychli, popsání zatím neznámých vrcholů a porovnání takto doplněné sítě s tou s čísly.

Druhý cíl směřuje ke komunikaci. Tabulkový záznam řešení problému je efektivní, ale často je zde potřebná pomoc učitele.

Co-II (Fiktivní ztráta informace)
Šest případů z úlohy S16b tvoří promyšlenou sérii úloh. V případě b_1 je pojmenováno osm vrcholů: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 a 11. V případě b_2 jsou dány všechny tyto vrcholy, kromě jednoho (vrchol číslo 4). V případě b_3 „mizí" vrchol I. Teď známe jména pouze šesti vrcholů. Proces ztráty dalšího jména u následující úlohy pokračuje ještě u dalších tří případů. Nakonec v případě b_6 jsou známa jména pouze tří vrcholů (jsou to 5, 6 a 10). U všech těchto případů existuje jediné řešení. To znamená, že ztráta informace v každém kroku byla nepodstatná. Byla pouze fiktivní. Nakonec tedy žáci vidí, že když u této sítě (viz obr. S24a, str. 127) známe pouze vrcholy 5, 6 a 10, všechny další jsou tím jednoznačně popsány. Tedy znalost jmen dalších vrcholů je nadbytečná, *redundantní.*

Co-III (Redundance jako výukový nástroj)
Z matematického pohledu je redundance vnímána jako něco neopodstatněného. Proč dávat čtyři vrcholy, když stačí uvést tři? Z didaktického hlediska však redundance může být využita jako vhodný výukový nástroj. Jeho použití bylo ukázáno v úloze S16b: začínaje se silně redundantní informací, žák postupně přicházel k méně redundantní informaci a tedy náročnější úloze. Dále lze redundantní informaci použít v práci ve třídě. Nejprve všichni žáci dostanou pouze jména vrcholů 5, 6 a 10. Ale každý žák může žádat učitel o další jména podle vlastní volby. Tak žáci mohou ohodnotit svoji vlastní schopnost řešení těchto úloh.

Co-IV (Vhodné trojice vrcholů)
Ve všech případech úlohy S16c jsou dány pouze tři vrcholy. Tedy v těchto zadáních není nadbytečný údaj. Když se na uvedené případy podíváme blíže, vidíme, že jsou

zde jen dva různé typy trojic vrcholů. Buď všechny tři vrcholy náleží do jedné stěny krychle, nebo jsou každé dva navzájem diagonální.

Úloha S17 a) {A}

Vyznač na modelu krychle všechny hrany vycházející z jednoho vrcholu. Kolik hran jsi vyznačil?

Úloha S17 b) {A}

Vyznač na modelu krychle jednu hranu. Pak vyznač všechny hrany krychle rovnoběžné s touto hranou. Kolik hran jsi vyznačil?

Úloha S17 c) {A}

Zvol jednu stěnu na modelu krychle. Pak vyznač všechny hrany na této stěně. Kolik hran jsi vyznačil?

Úloha S17 d) {A}

Přilep ke každé hraně modelu krychle špejli a zjisti, kolik špejlí potřebuješ.

Výsledky

a) 3; **b)** 4; **c)** 4; **d)** 12.

Komentáře

Co-I (Cíle úlohy S17)
Dvanáct hran krychle tvoří náročnou kombinatorickou strukturu. Je náročnější než struktura šesti stěn i než struktura osmi vrcholů krychle. Soubor hran tvoří jádro kombinatorické struktury krychle.

Co-II (Symetrie krychle)
Pro nás je jasné, že odpověď „tři" v úloze a) nezávisí na volbě vyznačeného vrcholu. Pro dítě to jasné není. Proto je žádoucí nechat dítě řešit tuto úlohu opakovaně s různými vrcholy. Až když dítě samo řekne „to je pokaždé tři" nebo něco podobného, je jasné, že u této konfigurace chápe symetrii krychle. Stejně bychom měli opakovaně řešit i úlohy b) a c).

Výzva

Nejlepší způsob, jak dítě získá vhled do kombinatorické struktury krychle, je modelování. Z 12 špejlí (jako hran) a 8 malých kuliček (jako vrcholů) udělá model krychle.

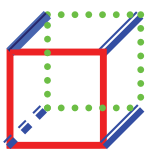
Úloha S18 a – d) {B}

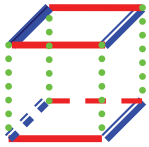
Máme 4 špejle barvy *a*, 4 špejle barvy *b* a 4 špejle barvy *c*. Nalep těchto 12 špejlí k hranám krychle tak, že

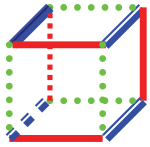
a) jedna stěna krychle je vytvořena ze špejlí barvy *a*, a jiná ze špejlí barvy *c*. Jaká je vzájemná pozice špejlí barvy *a* a barvy *b*?
b) každé dvě špejle stejné barvy jsou rovnoběžné. Jaká je vzájemná poloha špejlí různých barev?
c) z každého vrcholu vychází špejle tří různých barev.
d) z každého vrcholu vychází špejle tří různých barev a navíc existuje dvojice špejlí barvy c, které nejsou rovnoběžné.

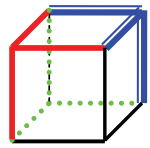
Výsledky

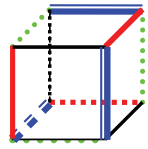
a) Každá špejle barvy *a* je kolmá ke každé špejli barvy *b*, viz obr. S28a.
b) Jsou vzájemně kolmé, viz obr. S28b.
c) Viz např. obr. S28b nebo S28c.
d) Viz např. obr. S28c.


Obr. S28a


Obr. S28b


Obr. S28c


Obr. S29a


Obr. S29b

Výzva

Je zajímavé všimnout si středů čtyř hran jedné barvy na krychlích z obrázků S28–S29. Např. středy červených hran na obrázku S28a jsou vrcholy čtverce. Nazvěme tento čtverec červený čtverec. Stejně vytvoříme zelený čtverec i modrý čtverec. Tyto tři čtverce jsou navzájem rovnoběžné. Obsah modrého čtverce je 1, obsah červeného čtverce (který je shodný se zeleným čtvercem) je ½. Pro krychli na obrázku S28b jsou červený, zelený a modrý čtverec navzájem kolmé a obsah každého je 1. Pro krychli na obrázku S28c je modrý čtverec stejný jako v předchozích případech, ale červený a zelený objekt je tentokrát 3D těleso, konkrétně je to tetraedr.

Dosud to bylo pouze pozorování zajímavých jevů. Teď výzva: využijte popsaný přístup ke krychli a vytvořte sérii úloh pro nadané žáky.

Úloha S19 a) – d) {C}

Máme 3 špejle barvy *a*, 3 špejle barvy *b*, 3 špejle barvy *c* a 3 špejle barvy *d*. Nalep těchto 12 špejlí k hranám krychle tak, že

a) všechny tři špejle stejné barvy vychází z jednoho vrcholu krychle.
b) každá stěna krychle má hrany všech čtyř barev.

c) z každého vrcholu vychází špejle tří různých barev.
d) každé dvě rovnoběžné špejle jsou různé barvy.

Výsledky

a) Viz obr. S29a.
b), c), d) Viz obr. S29b.

Terminologie

Termínem *rovnoběžné barvení* hran krychle rozumíme takové barvení hran krychle trojicí barev *a*, *b* a *c*, při kterém každé dvě vzájemně rovnoběžné hrany jsou barveny stejně (viz obr. S28b). Síť krychle, která vychází z takového barvení hran, budeme nazývat rovnoběžně barvená. Uvědomíme si, že jak hraniční úsečky sítě (zipy), tak i vnitřní úsečky (švy) jsou barveny.

Úloha S20 a – e) {C}

Dána je síť krychle na obrázku **a)** S27a; **b)** S27b; **c)** S27c; **d)** S27d (viz WS10); **e)** S27e (viz WS11). Najdi všechny dvojice úseček (zipů), které po položení sítě na krychli splynou.

Výsledky

Označení. Skutečnost, že úsečka 1-2 splyne s úsečkou 5-6 bude značena 1-2 ≈ 5-6. V tomto označení můžeme psát výsledky:

a)	b)	c)	d)	e)
1-2 ≈ 5-6	1-2 ≈ 5-6	1-2 ≈ 8-12	1-2 ≈ 7-12	1-2 ≈ 9-12
2-4 ≈ 4-5	2-4 ≈ 4-5	2-3 ≈ 7-8	1-4 ≈ 3-4	2-4 ≈ 4-5
1-3 ≈ 6-7	1-3 ≈ 6-7	3-6 ≈ 6-7	2-5 ≈ 5-6	5-8 ≈ 8-9
3-8 ≈ 7-12	3-8 ≈ 7-12	1-4 ≈ 12-14	3-8 ≈ 7-8	1-3 ≈ 12-14
8-13 ≈ 11-12	8-9 ≈ 12-14	4-5 ≈ 5-9	9-10 ≈ 9-14	3-6 ≈ 13-14
13-14 ≈ 10-11	9-10 ≈ 13-14	9-10 ≈ 13-14	6-11 ≈ 12-13	6-7 ≈ 7-10
9-10 ≈ 9-14	10-11 ≈ 11-13	10-11 ≈ 11-13	10-11 ≈ 13-14	10-11 ≈ 11-12

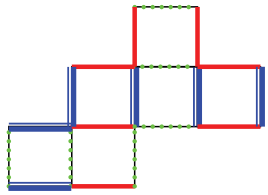
Úloha S21a – e) {C}

Dána je síť krychle na obrázku **a)** S27a; **b)** S27b; **c)** S27c; **d)** S27d (viz WS10); **e)** S27e (viz WS11). Dvě úsečky sítě mající společný vrchol 1 jako svůj krajní bod jsou barveny různě: vodorovně – zelenou, svisle – červenou. Vybarvi celou síť rovnoběžným barvením.

Výsledky

a)	zelená	1-2, 3-4, 5-6, 8-9, 10-11, 13-14
	červená	1-3, 2-4, 4-5, 6-7, 8-13, 9-10, 9-14, 11-12
	modrá	3-8, 4-9, 5-10, 6-11, 7-12

b)	zelená	1-2, 3-4, 5-6, 8-9, 10-11, 11-13, 12-14
	červená	1-3, 2-4, 4-5, 6-7, 9-10, 11-12, 13-14
	modrá	3-8, 4-9, 5-10, 6-11, 7-12
c)	zelená	1-2, 4-5, 5-9, 6-10, 7-11, 8-12,
	červená	1-4, 2-5, 3-6, 6-7,10-11, 11-13, 12-14
	modrá	2-3, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12, 13-14
d)	zelená	1-2, 4-5, 7-12, 8-13, 9-10, 9-14 viz obr. S30
	červená	1-4, 3-4, 2-5, 5-6, 8-9, 10-11, 13-14
	modrá	3-8, 4-9, 5-10, 6-11, 7-8, 12-13
e)	zelená	1-2, 3-4, 6-7, 7-10, 8-11, 9-12
	červená	1-3, 2-4, 4-5, 7-8, 10-11, 11-13, 12-14
	modrá	3-6, 4-7, 5-8, 8-9, 11-12, 13-14



Obr. S30

S4 Experimenty

Většina úloh této části byla v letech 2003–2006 zkoušena jak na českých školách pěti spolupracujícími učiteli, tak učiteli v partnerských zemích – Anglii, Německu a Řecku. Dále je stručně popsáno 11 experimentů: 2 anglické, 3 české, 3 německé a 3 řecké. Experimenty 10 a 11 jsou uvedeny pouze na průvodním DVD.

Pracovní tým zaměřený na 3D geometrii byl desetičlenný: 2 autoři, 5 spolupracujících učitelů a 3 studenti Pedagogické fakulty UK v Praze, budoucí učitelé. Na pravidelných setkáních jsme nejprve věnovali pozornost geometrickým úlohám a jejich řešením učiteli a studenty. Později jsme analyzovali videozáznamy experimentů, které dělali učitelé s asistencí studentů, a žákovská písemná řešení.

S4.1 Přehled experimentů

EXPERI-MENT	Země	Obsah/úlohy	Návazné rozšiřující aktivity
S01	GR	S21, rovnoběžnost	
S02	GR	S04, síť krychle – kombinatorický přístup	Doplňující úloha jako rada k náročné úloze S03b.
S03	GR	S12c	
S04	UK	Konstrukce sítí, Ch-III až úloha S02	Vazba na kombinatorickou geometrii 2D.
S05	UK	Tesalace (parketáž) čtverců	Rozšíření metafory: Krychlov, rodina Krychlových, krychlový výtah.
S06	DE	Soubor všech sítí krychle / S03	Pojmenování sítí krychle, tvorba souborů.
S07	DE	Malování sítí / Ch-III k S03	Řešení zipové úlohy pomocí malování sítě krychle.
S08	DE	Sítě krychle / S03	Personifikace krychle, rozpracování a prohloubení příběhu pro prezentaci.
S09	CZ	Sítě krychle / S03	Činnosti B-úrovně se žáky A-úrovně.
S10	CZ	Tvorba sítě krychle z polymin / S04	Využití motivační pohádky o planetě Krychlov.
S11	CZ	Barvení hran krychle / S08, S9	Zajímavá reprezentace úlohy žákem.

Ve všech čtyřech partnerských zemích bylo uskutečněno mnoho experimentů s různými úlohami o sítích krychle. Jen část bohatého materiálu je uvedena v této knize a jediný experiment (S09) je popsán detailně. Obecně lze říct, že prostředí „pana Krychle" bylo úspěšně zavedeno v několika třídách všech partnerských zemí. Spolupracující učitelé hodnotí toto prostředí jako didakticky účinné a zařadili je do výuky 3D geometrie aspoň jako výběrový tematický celek.

Každý ze spolupracujících učitelů obohatil nabízený materiál o nové myšlenky. Ty jsou uvedeny v posledním sloupci horní přehledové tabulky.

S4.2 Experimenty – GR

Řecko, Soluň

Třídy

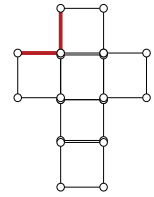
- Třída B1 – spojení žáci 5. a 6. ročníku, věk 11–12 let, tedy úroveň B. Velice nízká úroveň, děti imigrantů, v zanedbané části města. Učitel i žáci této třídy mají již jisté zkušenosti s konstruktivisticky vedenou výukou.

- Třída B2 – žáci ve věku 11–12 let, tedy úroveň B. Průměrná úroveň. Učitel i žáci této třídy mají malé zkušenosti s konstruktivisticky vedenou výukou.
- Třída C – žáci ve věku 12–13 let, tedy úroveň C. Vysoká úroveň. Učitel i žáci této třídy mají značné zkušenosti s konstruktivisticky vedenou výukou.

Experiment S01 (Úloha S21, str. 137)

Zajímavé pozorování, jak žáci úrovně C diskutují o obrázku GR01.

Podíváme-li se na obrázek GR01, vidíme dvě červené, navzájem kolmé úsečky. My víme, že úsečky splynou, když síť položíme na krychli. Když na tyto úsečky hledíme jako na prvky sítě, vidíme, že nejsou rovnoběžné, ale že se protínají („jak mohou být rovnoběžné, když se protínají?“). Když ale na tyto úsečky nahlížíme jako na jednu hranu krychle, pak máme jedinou úsečku a je nesmysl mluvit o rovnoběžnosti.



Obr. GR01

Pro dítě je představa vztahu rovnoběžnosti podobná představě vztahu sourozenců. Obě tyto relace jsou symetrické (tj. je-li A sourozencem B, je i B sourozencem A) a tranzitivní (tj. je-li A sourozencem B a B sourozencem C, je i A sourozencem C, jestliže je C různé od A).

Ale relace „být sourozencem” není reflexivní, a proto dítě i relaci rovnoběžnosti považuje za nereflexivní. Když se pak dozví, že v matematice definujeme rovnoběžnost jako relaci reflexivní, je překvapeno a v jeho mysli začne probíhat proces restrukturace tohoto pojmu.

Experiment S02 (Úloha S04, str. 111)

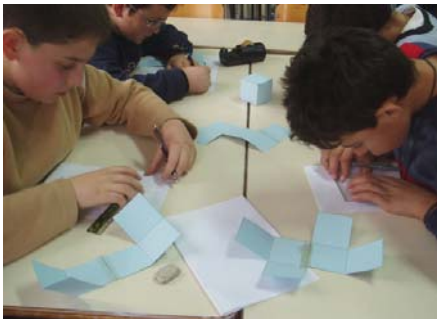
Na obrázku GR02 vidíme třídu B2 při řešení úlohy S04. Žáci pracují ve 2–4členných skupinách a učitel je v roli pozorovatele. Klima je silně pracovní a čilá komunikace mezi žáky jim pomáhá proniknout do problému a najít řešení. Podobné klima lze vidět na všech obrázcích z řeckých tříd.

Někteří žáci byli při řešení úlohy S03a, str. 109, velice nadšeni. Našli všech 11 sítí. V úloze S04 je síť sestrojena ze dvou částí, které navíc mohou být spojeny různými způsoby.

Na obrázku GR03 vidíme správné řešení úlohy S04a. Právě dvě sítě krychle (6A, 6J) lze vytvořit ze dvou 3A trimin. Úspěšné řešení, potvrzeno stejným výsledkem jiné skupiny i učitelem, vedlo žáky k ukvapenému očekávání, že dvě řešení bude mít i úloha S04b. Proto, když vytvořili dvě sítě (6D, 6E, viz obr. GR05, str. 142), mysleli, že jsou hotovi. Když jim učitel řekl, že existuje více řešení, byli překvapeni a žádali učitele o pomoc. Takové chování bylo pozorováno u více skupin. Nakonec ale každá skupina našla všech 6 řešení a svůj výsledek předvedla celé třídě.

Obr. GR02

Obr. GR03



Obr. GR04

Doplňující úloha

I když žáci nalezli všech 11 sítí krychle (úloha S03a), nebyla ještě vyřešena úloha S03b. Nebylo dokázáno, že neexistuje více než 11 sítí krychle.

Učitelka hledala konstruktivistický způsob, jak žáky navést na objevení důkazu. Její vyučovací strategie spočívala na dvou myšlenkách. První myšlenkou bylo omezit se na ty sítě krychle, které v sobě obsahují tetramino 4A. Druhá myšlenka byla nalézt úlohu, která by byla pro žáky jen podnětem, nikoli návodem. Výsledkem těchto dvou myšlenek byla následující úloha.

Úloha S03b' – Najděte všechny sítě krychle vytvořené tetraminem 4A a dvěma mo-nominy 1A. Na obrázku GR05 můžeme vidět úspěšné řešení této úlohy.

Žáci pracovali bez modelu krychle a vzhledem k jejich věku učitelka nepoužila ani metaforický jazyk. Části tohoto experimentu jsou uvedeny na třech videozáznamech: VideoGR1, VideoGR2, VideoGR3.

Experiment S03 (Úloha S12c, str. 124)

Na obrázku GR06 vidíme tři důležité objekty: 1) sadu čtverců (modré, červené a žluté), které měli žáci k dispozici při tvorbě sítí krychle, 2) síť krychle 6F – řešení úlohy S12c) a 3) tři sítě krychle (6G, 6K a 6C) obarvené způsobem, jak žádala úloha S12c. Když byla úloha S12c vyřešena, žáci i dále pokračovali v tvorbě tříbarevných sítí, v nichž stejnou barvu mají ty čtverce, které padnou na rovnoběžné stěny krychle. Tak tomu bylo ve všech skupinách (viz obr. GR07). Na obou obrázcích vidíme stejnou řešitelskou strategii, která byla dvoukroková. V prvním kroku žák zvolil nebo vytvořil jednobarevnou síť krychle a ve druhém kroku pak položil 2 červené, 2 žluté a 2 modré čtverce tak, aby byla splněna daná podmínka o rovnoběžných stěnách.

Obr. GR05

Obr. GR06

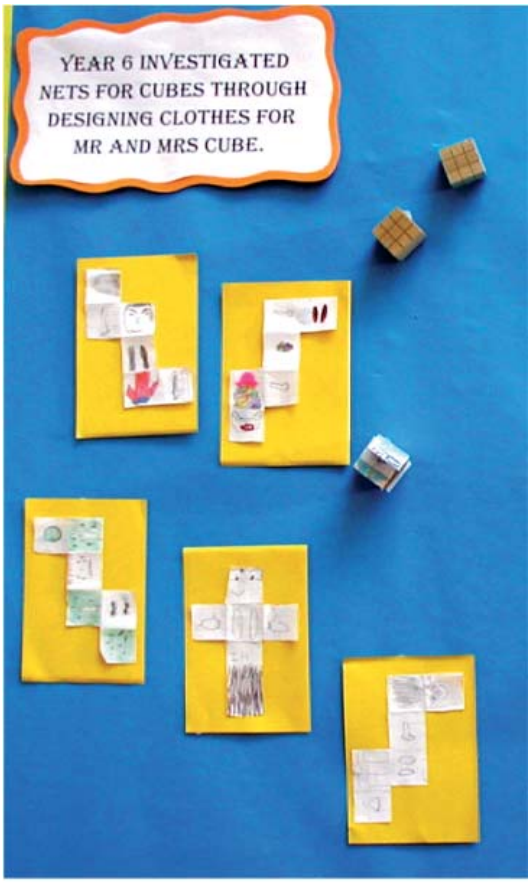
Obr. GR07

S4.3 Experimenty – UK

Experiment S04 (Úlohy S02 a S03, str. 106 a 109)

UK Primary school (základní škola), Derby, 6. ročník, věk žáků 10 – 11 let, úroveň B/C.

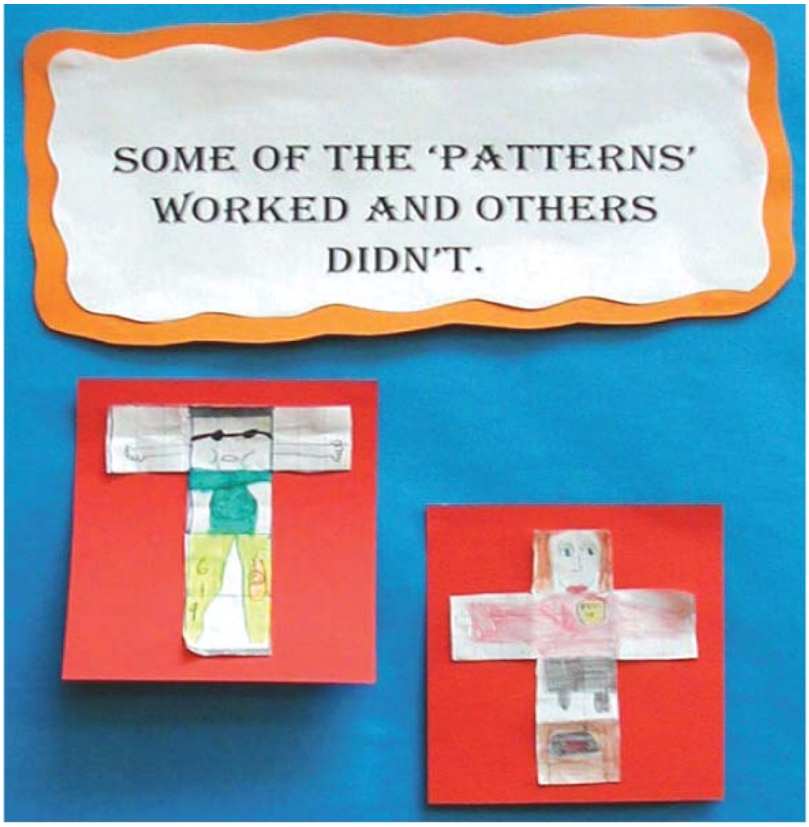
Úlohu S02 vyřešili žáci poměrně snadno. Dříve však, než jim byla zadána úloha S03a, která žádá vytvoření všech sítí krychle, byli žáci vyzváni, aby šaty pro zákazníky našeho salonu vybarvili. Na obrázku UK01 a UK02 můžeme vidět část nástěnky s pěti střihy. Tři věci si zde zaslouží pozornost.



Obr. UK01

1. Při porovnání s podobnými experimenty je experiment S04 výjimečný v tom, že zde model krychle je součástí prezentace nalezené sítě krychle. Tato skutečnost zdůrazňuje vztahy mezi 2D sítí a 3D krychlí.
2. Na druhé straně myšlenka souměrnosti demonstrovaná pěti sítěmi krychle se najde ve všech experimentech.
3. Za nejzajímavější prvek tohoto experimentu považujeme to, jak učitelka přistupuje k chybám žáků (viz obr. UK02). Učitelka se nesnaží chyby zakrýt, ani nekárá autora. Předkládá chyby třídě s cílem pomoci žákům hlouběji porozumět vztahu mezi 2D sítí a 3D krychlí.

I zde učitelka předkládá jak dobrá, tak i chybná řešení střihu na šaty pro krychli. Soubor správných střihů je na levém plakátu (viz Obr. UKsít) a soubor chybných je na pravém plakátu společně se slůvkem NE (N) (viz Obr. UK ne-sít). Tyto ilustrace jsou vzaty z videa jiné hodiny věnované úloze S03. Jedná se o třídu žáků úrovně A, různé matematické vyspělosti. Hodinu lze najít na Video experiment UK.



Obr. UK02

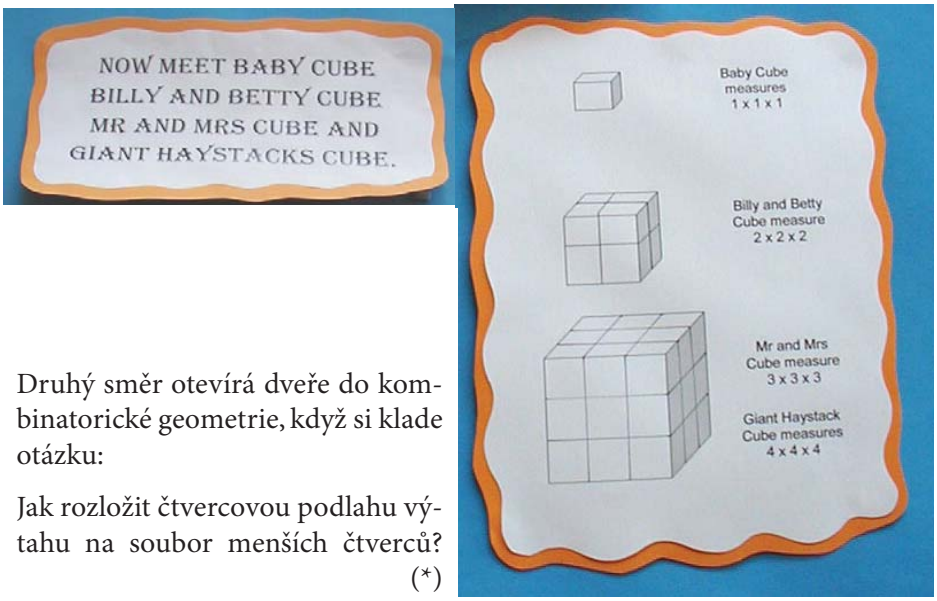
Experiment S05

V tomto experimentu bylo krychlové prostředí obohaceno ve dvou směrech.

První směr rozšiřuje metaforický jazyk o občany Krychlova, kteří se odlišují velikostí. Na obrázku UK03 jsou uvedeni čtyři obyvatelé Krychlova: Baby Krychle (s rozměry 1×1×1), Bill a Betty Krychlovi (s rozměry 2×2×2), pán a paní Krychle (s rozměry 3×3×3) a obrázek Krychle (s rozměry 4×4×4). Pán a paní Krychle jsou uvedeni i na obrázku UK01.

Tím, že učitelka pojmenovala „malé" krychle, vydělila z nekonečné množiny krychlí konečnou podmnožinu. Poznáváním těchto reprezentantů žáci získávali vhled do celého nekonečného „světa krychlí". Edukační účinnost použitého metaforického jazyka dokázali sami žáci. Všichni si tento jazyk osvojili a efektivně jej sami používali.

Zmíněné čtyři velikosti krychlí upoutaly pozornost žáků na geometrický pojem objemu a aritmetický pojem třetí mocniny. Žáci například pozorovali, že když délka hrany krychle roste lineárně: 1, 2, 3, 4,… objem krychle roste prudce: 1, 8, 27, 64,… a nárůst obsahu stěny krychle 1, 4, 9, 16,… leží mezi oběma předešlými růsty.



Druhý směr otevírá dveře do kombinatorické geometrie, když si klade otázku:

Jak rozložit čtvercovou podlahu výtahu na soubor menších čtverců? (*)

Obr. UK03

V metaforickém jazyce je tento problém uveden dvěma nápisy na obr. UK04. (V Krychlově má jistě každý výtah čtvercovou podlahu. Kolik obyvatel Krychlova se vejde do výtahu?)

Na obrázku vidíme individuální práci tří žáků. Každý z nich si volil vlastní cestu. Řešení v pravém horním rohu uvádí konkrétní případy (izolované modely – v naší terminologii). Řešitel zde získává první zkušenosti s úlohou *).

Obr. UK04

Obě dolní řešení jsou již pokročilejší. To na levé straně nachází posloupnost řešení úlohy (*). V matematickém jazyce můžeme tuto posloupnost zapsat jako sérii rovností:

$1 = 1,$
$1 \times 1 + 3 = 2 \times 2,$
$2 \times 2 + 5 = 3 \times 3,$
$3 \times 3 + 7 = 4 \times 4.$

Je jasné, že následující krok naznačený čtvercem 5×5 bude $4 \times 4 + 9 = 5 \times 5$.

Tuto posloupnost můžeme považovat za generický model poznání, které v algebraickém jazyce lze psát rovností $n \times n + 2n + 1 = (n + 1) \times (n + 1)$.

Uvedená pravidelnost, jak známo, snadno vede k odhalení známého pythagorejského vztahu

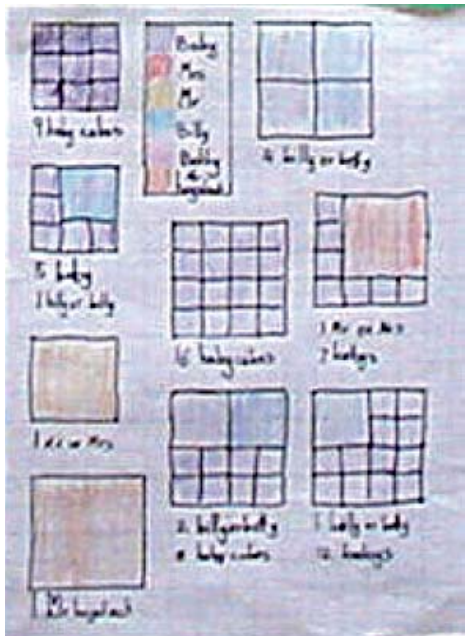
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n \times n.$

Druhým důsledkem uvedeného řešení je tvrzení, že čtverec $n \times n$ lze rozložit na $2n$ čtverců. Jinak řečeno, každý čtverec lze rozložit na předepsaný sudý počet čtverců.

Řešení, které je vpravo dole (viz obr. UK05), ukazuje, že snahou řešitele bylo nalézt úplné řešení problému (*). Na rozdíl od předchozího řešitele, který zobecňuje jednu konkrétní konfiguraci čtverců, hledá tento řešitel všechny možné rozklady pro daný čtverec. V levém sloupci je tento problém úspěšně řešen pro čtverec 3×3. Pět čtverců na pravé straně dává bezmála úplné řešení problému (*) pro čtverec 4×4. U tohoto řešení nemáme evidenci, že by se řešitel chtěl pokusit řešit i čtverec 5×5.

Čtenář může namítat, že ani jeden z posledních dvou řešitelů, kterým je teprve 11 let, není schopen odhalit vysoce sofistikované myšlenky, které uvádíme výše. S tím souhlasíme. Nemyslíme, že by tito řešitelé byli schopni proniknout tak hluboko do aritmetiky a algebry. Naše úvahy jsou určeny spíše učiteli než žákovi. Jestliže totiž učitel zná hlubší matematické myšlenky, které jsou přítomny v dané problematice, bude schopen

1. vysoce ocenit žákovy objevy a
2. tvořit vhodné úlohy, které podpoří žákovu zvídavost v tom směru, který k hlubokým myšlenkám vede.



Obr UK05

S4.4 Experimenty – DE

Experiment S06 (Úloha S03, str. 109)

Úloha byla řešena studenty, budoucími učiteli 1. stupně na Univerzitě v Kasselu. Tucet studentů, kteří pracovali ve 2 a 3členných skupinách, bylo požádáno, aby našli všechny sítě krychle a prezentovali je na plakátu. Na obrázku DE01 vidíme dvě skupiny diskutující o tom, jak rozmístit soubor vytvořených sítí. Jedna skupina již plakát vytváří, druhá ještě stále zjišťuje, zda je jejich seznam sítí úplný.

Obr. DE01

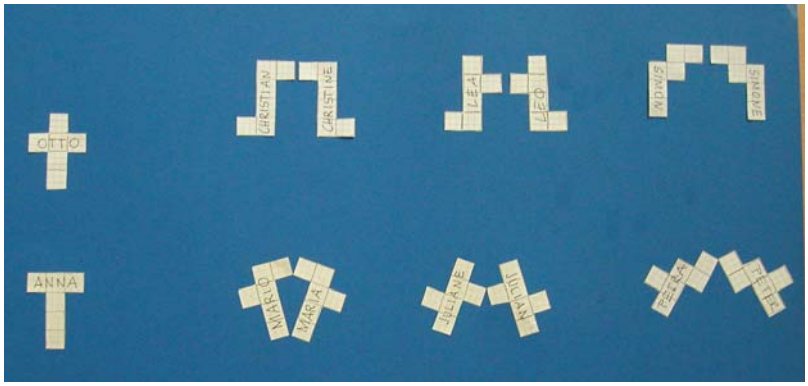
Práce studentů byla do jisté míry podobná práci žáků. Porovnáme-li práci studentů s pracemi žáků, najdeme tři odlišnosti:

1. Architektura studentských plakátů je promyšlená a přesně organizována. Taková prezentace nebyla u žáků pozorována.

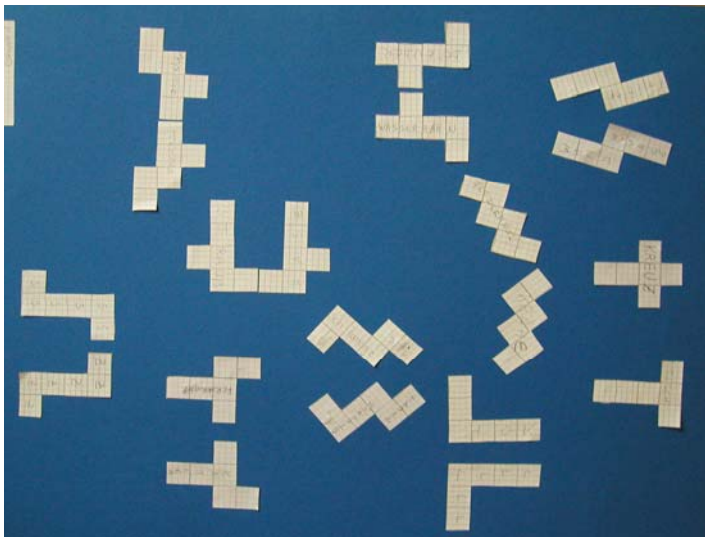
2. Studenti zdůraznili osovou souměrnost. Každá síť je uvedena v páru se souměrnou sítí (viz obr. DE02). Výjimku tvoří sítě, které jsou samy osově souměrné (6A, 6F). (Viz komentář Co-II k úloze S03, str. 110.) Nicméně u jednoho plakátu jsou dokonce sítě 6A a 6F uvedeny ve dvojicích. (Obr. 6A).

Jak studenti, tak žáci uvedli chybná řešení (viz dvojice Simon – Simone na obr. DE02a nebo síť ve tvaru písmene L na obr. DE02b).

Žádný student ani žádná skupina 2–3 studentů nenašla všech 11 sítí bez pomoci. Ve všech případech ale třída jako celek byla schopna všech 11 sítí najít.



Obr. DE02a



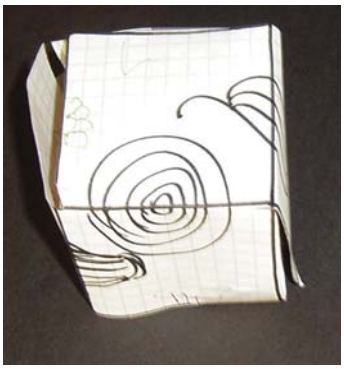
Obr. DE02b

Jak studenti, tak žáci uvedli stejnou síť opakovaně, ve dvou různých polohách jako různé sítě.

Jak studenti, tak žáci použili stejné strategie řešení. Například tvorbu sítě krychle ze šesti čtverců, nebo sestrojení sítě krychle z polymin, jakými jsou 2A a 3A. Přitom jedni i druzí někdy k práci model krychle použili, někdy byli schopni kreslit sítě krychle bez jakékoli opory modelů.

(Více viz Pairs of nets.)

Obr. DE03



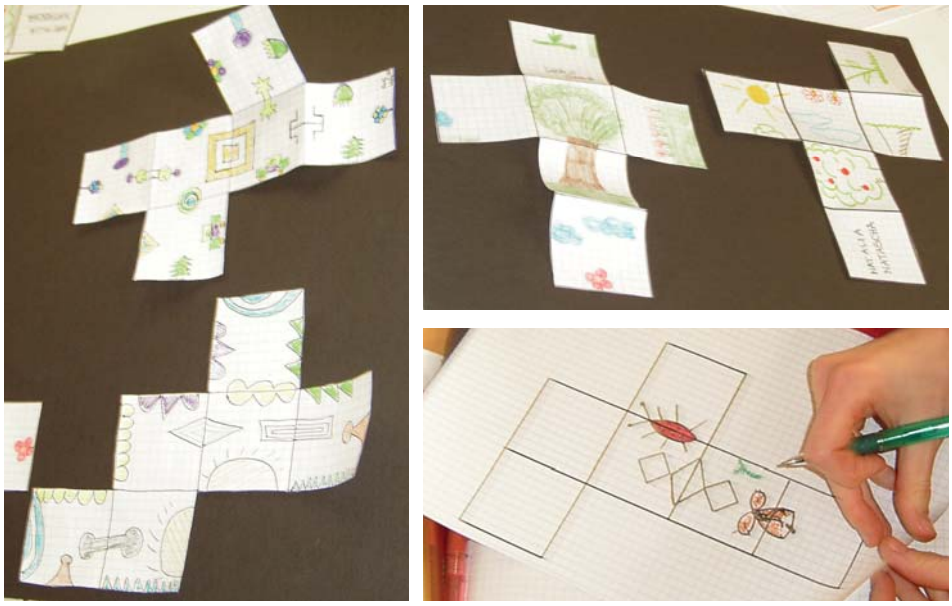
Obr. DE04a

S

Experiment S07 (Výzva Ch-III k úloze S02, str. 109)

Z obrázků DE03 a DE04 vidíme, že poměrně hodně úsilí bylo věnováno výzvě: „Požádejte žáky, aby dekorovali svoje střihy na šaty pro pana a paní Krychli. Dekoraci nutno udělat tak, aby po oblečení Krychle na ní vytvářela pěkné obrazce."

(Více podobných experimentů z ČR lze najít v Face 01, 02, 03, 04, 05, 06.)



Obr. DE04b

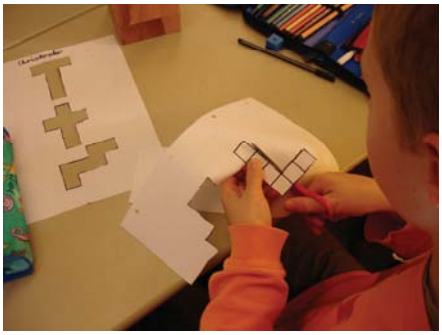
Experiment S08 (Úloha S03, str. 109)

Obr DE05

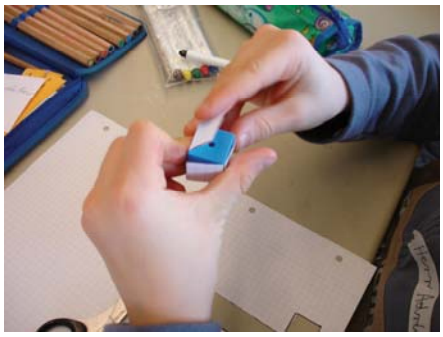
Steffi je jedna ze studentek, budoucích učitelek, o nichž se mluví v experimentech S06, S07. Pod jejím vedením skupina studentů připravila a realizovala experimentální vyučování ve třetím ročníku (24 žáků).

Na začátku hodiny Steffi představila žákům metaforickou situaci (viz Obr. Steffi) a zajímavý model pana Krychle sedícího na poličce (viz Obr. S03), který je zákazníkem krejčovského salonu. Vysvětlila třídě, že pan Krychle potřebuje nový oblek. Děti byly požádány, aby navrhly střih na šaty pro pana Krychli. Jeden takový střih žákům ukázala (viz obr. DE05). Žáci pracovali individuálně. Nebyl dán žádný časový limit na práci.

Personifikace krychle zvýšila zájem žáků o úlohu. Steffi se podařilo vytvořit podnětné a pracovní klima. Každý žák našel aspoň pět různých správných sítí. Obrázky DE06 a DE07 ukazují, jak žáci pracovali. Hledání sítě probíhalo ve třech krocích. Nejprve síť navrhli, pak ji vystřihli a nakonec ji položili na krychli, aby prověřili, zda to je dobře (viz VideoDE01, VideoDE02). I když ne všechna řešení byla správná (návrh, který drží hoch na obrázku DE06, je chybný), většina chyb byla žáky odhalena pomocí manipulace (viz obr. DE07). Dodejme, že stejnou chybu, jakou vidíme na obrázku DE06, udělali i posluchači.



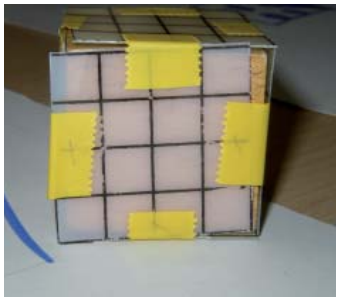
Obr. DE06



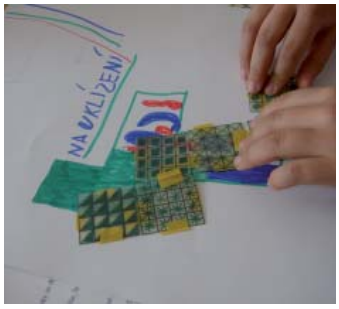
Obr. DE07

S4.5 Experimenty – CZ

Experiment S09 (Úloha S02a, str. 106)



Obr. CZ01



Obr. CZ02

Tento pokus byl realizován na Základní škole Školní 900, Neratovice.

Scénář připravili a pokus realizovali Irena Kročáková, Jitka Michnová a autoři.

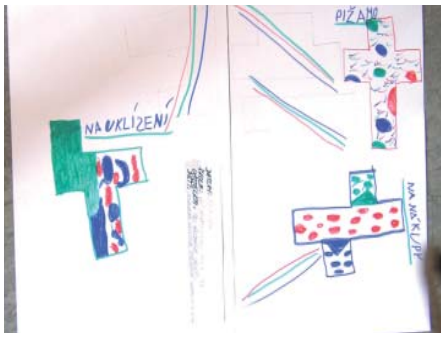
Žákyně: Kamila a Kristýna, kamarádky, dobrovolnice, druhý ročník (úroveň A).

Obr. CZ03

Obr. CZ04

Příprava

Nejprve obě učitelky, Irena a Jitka, vyřešily mnoho úloh o sítích krychle uvedených výše. Po získání zkušeností se sestrojováním sítí se rozhodly, že ve druhém ročníku (úroveň A) udělají pokus s úlohou S02, která je určena žákům třetího ročníku (úroveň B). Mnoho času věnovaly hledání vhodných materiálů. Nakonec zvolily dvě dřevěné krychle, 12 plastikových čtverců a žluté nálepky; dále žákyně dostaly nůžky, tužku, pastelky a čisté listy papíru formátu A3 (viz obr. CZ01).



Obr. CZ05

Realizace odpoledne v družině

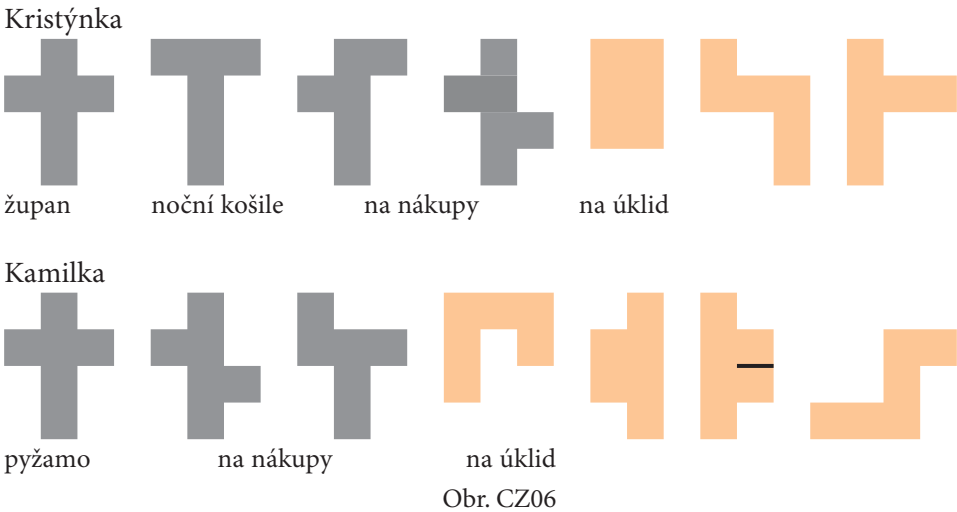
Po úvodním rozhovoru učitelka uvedla situaci. „Rády oblékáte panenky? Vaše panenka má několik šatů a všechny jsou různé. My budeme oblékat krychli.“ Dala dívkám materiál a vysvětlila, jak slepováním plastikových čtverců udělat střih na šaty pro krychli.

Dívky pracovaly individuálně, ale vzájemně na svoji práci viděly. Když byly „šaty“ úspěšně hotové (viz obr. CZ01), rozbalily je dívky zpět do roviny, aby získaly střih, tj. síť krychle (viz obr. CZ02).

Pak dívky nakreslily vytvořený střih na čistý papír a prověřovaly, zda tento střih krychli padne. Když to bylo dobře, zařadily dívky střih do katalogu střihů (viz obr. CZ03, 04). V opačném případě chybný střih škrtly (viz obr. CZ05).

Dívky pracovaly se zaujetím. Ze začátku jim učitelka pomáhala s technickými problémy – slepováním čtverců. Náhodou se stalo, že první návrh obou dívek byl chybný. Učitelka je povzbudila a řekla, že i zkušený krejčí dělá chyby, a tak dívky v práci pokračovaly. Nakonec obě dívky našly sedm různých střihů, z nichž Kristýnka našla čtyři a Kamila tři (viz obr. CZ06). Nesprávné střihy byly škrtnuty zajímavým způsobem – třemi rovnoběžnými čarami všech tří barev, které měly dívky k dispozici (viz obr. CZ05). Hotové střihy pak dívky vymalovaly a určily účel šatů (viz obr. CZ05). Stojí za zmínku, že obě děvčata věnovala stejnou péči vybarvení šatů jako hledání střihů.

Na obrázku CZ06 jsou uvedena všechna řešení, která dívky objevily. Chybná řešení jsou žlutá (tmavě šedá v černobílé kopii), správná šedivá (světle šedá v černobílé kopii). U správných střihů je uvedeno i účel šatů.



Obr. CZ06

Experiment byl pro Irenu (učitelka 2. ročníku) její první zkušeností tohoto typu. Nutno ocenit pět věcí:

1. její odvahu zkusit úlohu určenou žákům 3. ročníku se žáky 2. ročníku,
2. úsilí, které bylo vynaloženo na přípravné práce,
3. schopnost udržet pozornost dívek v odpoledním čase po celých 50 minut,
4. výsledný úspěch dívek, k němuž je učitelka dovedla,
5. vyváženost geometrických a výtvarných činností, které dívky dělaly.

Na druhé straně se v práci učitelky projevily vžité učitelské zvyky pomáhat žákům, když si neví rady. Z videozáznamu je patrno, že zejména na začátku pokusu byla učitelka hodně instruktivní a snižovala tápání dívek na minium. Též se snažila nepřipustit, aby dívky chybovaly. Naštěstí první pokus dívek byl neúspěšný a učitelka je vedla k poznání příčiny své chyby. Konečný výsledek práce dívek byl nečekaně pozitivní.

Z pohledu matematika se druhá část práce dívek, tj. vymalovávání střihů a hledání účelu, k němuž budou šaty určeny, jeví jako ztráta času. Matematik může argumentovat, že místo malování mohly dívky odhalit aspoň jednu další síť. Takový názor nerespektuje význam motivace u osmiletého dítěte. Systematická práce zaměřená na jediný cíl vyčerpá dítě po dvaceti, třiceti minutách, a je-li práce intelektuálně náročná, pak i dříve. Když je ale činnost změněna, zůstane motivační síla získaná předchozí úspěšnou činností dítěte zachována do budoucna. Navíc druhá aktivita, malovaní šatů, která je typická pro dívky, umocní motivační sílu aktivity první, geometrické. V tomto směru cit učitelky pro vyváženost obou aktivit výrazně pomohl celému pokusu.

Domníváme se, že experiment, byť uskutečněn jen jednou a jen se dvěma děvčaty, jasně ukázal, že

1. metaforická situace používající slova střih a šaty (oblek) je pro dívky silně motivační (pracovaly 50 minut),
2. použité pomůcky navržené učiteli jsou dobře dostupné a didakticky vhodné,
3. dívky z 2. ročníku svedou vytvořit pomyslné střihy a manipulací prověřit jejich správnost,
4. metodou pokusu a omylu žáci získávají značné zkušenosti s pojmem krychle.

Experiment S10 (Úloha S04, str. 111)

Pokus popisující jednu výukovou hodinu v 5. ročníku je zde prezentován ve třech částech:

1. podrobný popis hodiny (viz Experiment10),
2. učitelova příprava na hodinu (Scénář hodiny),
3. videozáznam hodiny (Video10).

Experiment S11 (Úloha S08, S09, str. 118, 119)

Pokus popisující jednu výukovou hodinu v 5. ročníku je zde prezentován ve dvou částech:

1. detailní popis hodiny (viz Experiment11),
2. videozáznam hodiny (viz Experiment11).

Dodatek (Příběh Jitky)

Experimenty 10 a 11 představují výukovou hodinu Jitky Michnové, která se též podílela na experimentu S09. Jitka je nejzkušenější a vůdčí osobnost celé skupiny s námi spolupracujících učitelů. Je též tvůrkyní pomůcky, kterou nazýváme pohyblivé sítě krychle. Byla pramenem motivace pro celý pracovní tým a ovlivnila i některé učitele neparticipující v našem projektu. Její sebereflexe provázená našimi komentáři je uvedena na DVD (Addendum).

V této kapitole jsou aplikovány výsledky výzkumu realizovaného v rámci grantu GA ČR 406/05/2444.

POROZUMĚNÍ ČÍSLŮM U NEJMLADŠÍCH DĚTÍ

Marianna Tzekaki, Giorgos Barbas

N1 Úvod

Čísla jsou obecně považována za hlavní faktor matematického rozvoje. Poslední reformní změny ve vyučování v této oblasti zdůrazňují přístup, u něhož se více uplatní uvažování o samotném pojetí čísel, tj. chápání aritmetických pojmů, vztahů, číselných symbolů a příslušné terminologie (Nunes, Buyant, 1999).

Změny, které byly zavedeny v národních kurikulích, učebnicích a učebních materiálech, poskytují učitelům velký počet úloh a námětů, které mohou zlepšit chápání pojmu čísla (např. Národní strategie početní gramotnosti, Ministerstvo pro vzdělávání a zaměstnanost, 1999, Velká Británie; Standardy Spojených států, NCTM, 2003; Mathe 2000 v Německu; Realistická matematika v Nizozemsku, van den Heuvel Panhuizen, 2001). Všechny experimentální studie o rozvoji chápání čísel v raném věku se věnují velmi důkladně chápání pojmu čísla a pamětným aritmetickým operacím.

Konstruktivistický přístup podporující chápání pojmu čísla se týká především takových učebních situací, které dávají žákům možnost dobře se seznámit s čísly, s jejich vlastnostmi, s jejich vzájemnými vztahy, kombinacemi a odhady.

I když chápání čísla, rozvíjení myšlenkových strategií a konstrukce modelů jsou základními komponentami těchto edukačních strategií, počítání (rutinní počítání s odříkáváním za sebou jdoucích čísel dopředu i pozpátku, nebo počítáním prvků ve skupině) stále zůstává hlavní činností ve třídě. Za této situace dochází k disku-

zi o tom, do jaké míry se uplatňují jiné přístupy jako kombinování a rozdělování malého počtu prvků bez jejich počítání po jednom, asociování čísla s nějakým obrazcem nebo určování počtu vhledem (subitizing), jinými slovy, do jaké míry je ve třídě poskytován prostor jiným strategiím než strategii postupného počítání (Research Forum 04, PME 29, 2005).

Výsledky výzkumu svědčí o tom, že počítání (tradičním způsobem, tj. počítání po jedné) je většinou učitelů stále přijímáno jako základní způsob, jímž děti mohou dospět k porozumění pojmu čísla.

Používání dynamických „myšlenkových reprezentací" (prostřednictvím žetonů, kostek, domina, obrazců složených z různého počtu prvků, struktur organizovaných po pěti a deseti prvcích či (dalších) v čase proměnných či kinestetických obrazců) je silně podporováno jak ze strany výzkumu, tak ze strany pojetí kurikula jako důležitý základ pro numerickou znalost. Avšak tato myšlenka se setkává s odlišným přijetím ze strany učitelů a jejich praxe. Rozvoj *dynamických numerických reprezentací* se souběžným použitím didaktického materiálu a úloh, které je mohou podporovat, není dosud pochopen a uznán jako důležitý faktor vzdělávání v oblasti čísel v raném věku.

Tím se stává, že mnoho dětí stále disponuje chudou škálou myšlenkových reprezentací čísel nebo užívá neadekvátní strategie pro počítání zpaměti pro odhadování. Noss, Healy a Hoyles (1997) ukázali, že „mezi akcí a myšlenkovou replikací vztahů a přechodem od konkrétních materiálů k myšlenkovým modelům je propast". V úloze „Vytvoř a změň", což je úloha obsahující otázky jako „jak můžeme 8 změnit na 4?" (Nicol, Kelleher, 2004), nebyly většinou děti schopny vidět, co mají odebrat od 8, aby dostaly 4, a používaly připočítávání nebo odpočítávání, přičemž používaly samomluvu jako „od 8 do 7 je 1", „od 7 do 6 je to 2"… „potřebujete odebrat 4", nebo používaly k počítání prsty.

Není potom tak neobvyklé, že učitelé, i přesto, že mají dlouhodobou zkušenost s vyučováním pojmu čísla a že prošli příslušným matematickým vzděláním, rozumějí rozvoji porozumění pojmu čísla u dítěte svým speciálním způsobem. Velmi důležitá součást postupů numerace a jejich aplikací ve výuce se proto vztahuje ke způsobům, jimiž je porozumění pojmu čísla rozvíjeno ve třídě (Lopez-Real, Ngan Ng, 2004). Vzhledem ke komplexnosti a rozmanitosti procesů existuje bohatá diskuze o rozvoji chápání pojmu čísla a o otázkách, jak se děti v situacích s čísly učí, jak na takové situace reagují, jak je interpretují.

Na základě těchto zjištění patří mezi hlavní cíle této kapitoly jednak prezentace zkušeností z jiných zemí, v nichž realizace různých úloh učiteli zapojenými do projektu vedly k rozvoji myšlenkových reprezentací, jednak porovnání způsobů, jimiž různí učitelé přistupují k řešení situací obsahujících numerické problémy a úlohy. Kapitola se bude zabývat tím, k jakým činnostem učitelé děti povzbuzují, v jakých aktivitách je podporují, jaké je jejich matematické zaměření, změnami objevujícími se v jejich vyučovacích metodách a změnami, které je potřeba uskutečnit pro zlepšení matematického myšlení dětí.

Pro numerické počítání jsou navrhovány a implementovány různé vyučovací přístupy, jimž je společné jedno přesvědčení – totiž že rozvoj porozumění významu čísla vyžaduje, aby se děti staly přímými účastníky různých situací a problémů, které dohromady význam čísel vytvářejí.

Učení se pojmu čísla je v kurikulu a v učebnicích dobře organizováno a uspořádáno, ale analýza učitelské praxe a poznámky (reflexe) učitelů mohou pomoci lépe porozumět tomu, jak je toto učení rozvíjeno ve třídě. Přesto, že existují výborně koncipované úlohy, které mimořádně dobře rozvíjejí myšlenkové reprezentace a strategie dětí, učitelé stále používají staré vyučovací přístupy, které výše uvedené cíle nepodporují.

Naše pozorování práce ve třídě nám umožňuje zlepšit naše porozumění chování učitelů i tomu, jak děti chápou různé reprezentace čísel a co jim pomáhá vytvořit most mezi neformálními strategiemi spojenými s konkrétním kontextem a formalizovanými standardizovanými pojmy a operacemi.

N2 Cíle kapitoly

Výzkum ukazuje, že myšlenkové reprezentace založené na aktivitách určování počtu prvků vhledem (v neformálních nebo formálních reprezentacích) podporuje přemýšlení dětí o číslech, pokud jsou tyto reprezentace dynamické a nejsou stereotypní. Stejně jako je tomu u všech matematických pojmů, bohaté zkušenosti s paletou konkrétních, obrázkových i symbolických reprezentací dětem pomáhají čísla pochopit (Gravemeijer, 1997). Mnoho pedagogů zdůrazňuje roli úrovně konkrétní reprezentace při pochopení pojmu čísla a dává ji do souvislosti s použitím strategie, aritmetickým uvažováním a procedurálními aspekty řešení numerických situací (Gray, Pitta, 1996; Gray, Pitta, Tall, 2000; Thomas, Mulligan, Goldin, 2002; Mulligan, Prescott, Mitchelmore, 2004).

Barrody (1987) zdůrazňuje, že „určování počtu prvků vhledem je základní dovedností v rozvoji chápání čísla". Pomáhá žákům různými cestami seznámit se s vlastnostmi čísel a umožňuje jim připočítávat, skládat a rozkládat a dokonce pochopit desítkovou soustavu a řád čísla, což je důležitý aspekt pojmu čísla.

Clements (1999) rozlišuje mezi percepčním a koncepčním určováním počtu vhledem. Je-li percepční určování počtu vhledem rozpoznáním počtu na pohled, je koncepční určování počtu vhledem schopnost chápat počty a seskupení jako části (jednotky) celků. Například děti mohou vidět „čtyři" na kostce jako „čtyři oka" nebo jako čtveřici. To je pro rozvoj vnímání čísla a počítání jak důležité, tak i nezbytné (Steffe, Cobb, 1988).

Schopnost žáků pochopit matematické modely koncepčně je základem pro řadu různých matematických procedur. Umožňuje jim chápat čísla v různých uspořádáních, což posiluje jejich chápání vztahů (aditivních a multiplikativních relací),

a rozvíjet různé strategie analýzy a syntézy různých množství, přičemž vnímání jednotek jim umožňuje pochopit strukturu desítkové soustavy, která je na tomto pojmu založena. Podpora koncepčního určování počtu vhledem nenapomáhá toliko rozvoji matematických strategií. Pomáhá žákům také rozvíjet schopnosti rozeznat jiné zákonitosti a opakující se formy; zlepšuje vizualizaci a podporuje objevování geometrických jevů v rovině a v prostoru (jako symetrie) a tvorbu flexibilních myšlenkových reprezentací.

Tato kapitola se zaměřuje na rozvoj dynamických numerických myšlenkových reprezentací a navrhuje situace, které poskytují zkušenosti týkající se různých aspektů a vztahů mezi čísly na úrovni konkrétní reprezentace; jsou zde proto navrženy tři úrovně úloh:

- *Rychlé hry,* které přirozeným způsobem podporují koncepční určování počtu vhledem a rozvoj strategií vedoucích k úspěchu (ve své snaze vyhrát mohou děti zlepšit techniku určování počtu prvků, rozeznávat obrazce reprezentující určitou kvantitu).
- *Diskuze a reflexe* rozpoznávacích strategií ve skupinách (když se snaží nalézt způsoby, které jim pomáhají vyhrát jako skupině, pracují děti se seskupeními prvků, mluví o nich, přemýšlí o nich a o jejich organizaci).
- *Navrhování* (tvorba) různých seskupení pro rozvoj dalších forem reprezentací množství (když děti připravují svá vlastní seskupení, standardizují relace, s nimiž se již setkaly, modelují své myšlenky a užívají geometrických prvků v rovině a v prostoru k organizaci návrhu svého seskupení).

N2.1 Porozumění pojmu čísla založené na jeho myšlenkové reprezentaci

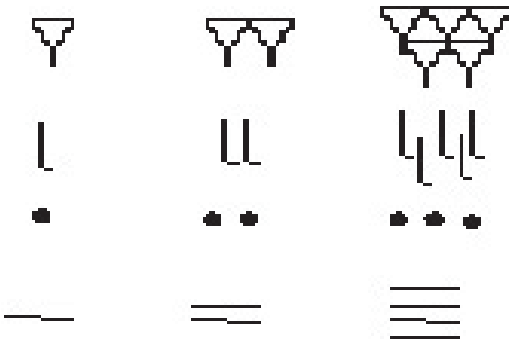
Číslo, jako například 5, má v numerickém systému svoji identitu a význam a má vlastnosti či vztahy společné s jinými čísly. Například 5 je 4 + 1; je to číslo liché; je to prvočíslo; dvojnásobkem pěti je 10; je to čtvrtina 20 atd. Učení se o číslech tak předpokládá rozvoj chápání významu každého čísla, poznání jeho místa a jeho propojenosti s jinými čísly, stejně jako chápání iterace, která vytvoří všechna další čísla do 10.

Schopnost dětí „počítat", tj. odříkávat posloupnost slov vyjadřujících čísla, je jen samotným začátkem jejich cesty k porozumění číslu (Van de Valle, Watkins, 1992). Významný krok tohoto porozumění nastane, když děti propojí počítání s kardinalitou (počtem prvků ve skupině); důležitým pokrokem v tomto spojení je schopnost uvažovat ve „skupinách" (slovo skupina je v tomto textu používáno ve významu seskupení malého počtu prvků). Uvažováním o „skupinách" mohou děti vidět vztahy mezi čísly a pracovat s kvantitou flexibilnějším způsobem.

První aritmetické symboly ve (známé) historii čísla (babylonské, egyptské atd.) měly více ikonických rysů a byly bližší „obrazům" kvantit, které reprezentovaly. Například staré symboly Babyloňanů, Egypťanů, Mayů aj. jsou na obr. N01.

Některé z těchto forem můžeme nalézt ve spontánních, neformalizovaných záznamech počtu u malých dětí (Huges, 1986). Tyto způsoby reprezentace čísel založené na symbolech množství pomáhají strukturovat relace mezi čísly, které nelze jednoduchým způsobem rozvíjet pouhým počítáním. Ukazují například čtyři jako dvě a dvě, pět jako dvě a tři, nebo i jako dvě, dvě a jedna. Tento rozvoj je podporován odpovídajícím úlohovým materiálem, který tvoří důležitý myšlenkový základ pro sčítání a odčítání. Navíc je třeba si uvědomit, že desítková soustava je založena na skupinách (desítkách, stovkách atd.), což děti musí pro zvládnutí počítání a odhadování pochopit.

Používání číslic, tedy formálních a abstraktních symbolů pro čísla, je spojováno s paletou grafických symbolů zobrazujících různá množství, jako jsou například tečky, čárky nebo čtverečky, což je „abstraktnější" než ikony, ale méně abstraktní než číslice. Děti přenášejí a transformují reprezentace čísel nacházené ve vnějším světě (konkrétní, obrázkové, diagramatické nebo symbolické) do svých vlastních vnitřních reprezentací (myšlenkových modelů reprezentací z vnějšího světa, Noss et al, 1997). Význam koncepčního určování počtu vhledem byl již vysvětlen výše, avšak existují dva aspekty, které je třeba pro účel této kapitoly dále analyzovat: vývoj tří kategorií úloh a druh reprezentací, které je třeba v těchto úlohách používat.



Obr. N01

I. Úlohy

Základními charakteristikami úloh na rozpoznávání jsou jejich *herní povaha* a rychlost plnění. Žáci se nebudou trápit pokusy vnímat nabízená seskupení prvků ve skupinách nebo po skupinách, nebudou-li k tomu motivováni. A protože většina dětí umí počítat po jedné a zjistit tak například na každé kartě počet prvků, nerozvinou schopnost určovat počet vhledem, pokud si budou myslet, že to nepotřebují. To bylo realizacemi ve třídě prokázáno. Z těchto důvodů potřebujeme používat hry, ve kterých děti vyhrávají, pokud dokáží „vidět" seskupení co nejrychleji. Úsilí o to motivuje jejich pokusy a podporuje jejich strategie koncepčně zreorganizovat formaci skupiny tak, aby je mohly rozeznat snadněji. Schopnost určovat počet vhledem se nerozvine automaticky; je třeba ji podporovat a zlepšovat, jako je tomu s většinou matematických dovedností.

O děti, jimž jde určování počtu vhledem pomaleji, je třeba se nějakým způsobem postarat, protože se může stát, že budou zpočátku rezignovat na jakékoli úsilí. Pro tento případ je potřeba mít připravené alternativy, jakou jsou třeba paměťové hry, kombinační hry nebo dokonce sestavování prvků do skupin, které mohou učiteli pomoci problém překonat.

Příprava na hry umožňuje dětem sdílet své nápady a diskutovat o typech seskupení strategiích výhodných pro překonání obtíží. Úlohy tohoto typu jsou nejen naprosto nezbytné pro motivaci žáků ke hře a k zájmu o vítězství jejich týmu, ale přimějí žáky také k tomu, že své strategie explicitně rozpracují.

Konečně konstrukce a návrhy připravované pro hry provokují děti ke konkrétnějším diskuzím a vedou je ke standardizování svých nápadů tím, že je uplatňují ve svých návrzích. Ty pomáhají žákům vytvářet myšlenkové kombinace a umožňují učiteli zjistit, kolik reprezentací si žáci dokážou zapamatovat a použít.

II. Reprezentace

Aby si děti mohly rozvinout strategie pro rozpoznávání počtu, je třeba realizovat seskupování různých množství různými způsoby. Rozmanitost seskupování a relace mezi počty podporují u dítěte rozvoj flexibilních myšlenkových reprezentací: tradičně se začíná uspořádáním ok na kostce. Puntíky nebo čtverce jsou abstraktnější než ikony a jejich uspořádání po dvou, třech apod. podporuje chápání geometrických vztahů, zatímco lineární seskupení nebo seskupení bez struktury pomohou dětem reorganizovat jejich úvahy o počtu jako o skupině. Tato rozmanitost materiálu je nezbytná, protože rozvoj matematického myšlení (numerického myšlení) musí být založen na různých a přitom relevantních reprezentacích. To je ve skutečnosti důvodem, proč se vyhýbáme obrázkovým reprezentacím (jako kočkám či zajícům a podobně), které mohou být nadbytečnou zátěží co do množství informací a nepomáhají dětem soustředit se na to, co je podstatné (Clements, 1999). Většinou jsou navrhovány reprezentace pomocí různých uspořádání teček (koleček) či čtverečků, ale mohou být použity i jiné.

Uspořádání po desítkách, které je v určitých učebnicích hojně používáno, je kulturní a pedagogickou podporou. Ta může být velmi účinná ve vnímání desítek a součtů do deseti, ale od ostatních seskupování, například těch, které se vyskytují na kostce, se liší. Rozpoznávání jednotek a následně skupin jednotek, což je obecná vizuální schopnost, může být použito jako myšlenková koncepční opora pro porozumění desítkám, které strukturují desítkovou soustavu. Později bude tento základ použit pro desítky a stovky.

V této kapitole nabízíme společně s úlohami různé kartičky, které mohou učitelé použít buď přímo, nebo jim mohou sloužit jako základ pro tvorbu nových karet. V rychlých hrách a ve skupinových aktivitách mají učitelé v závislosti na úrovni žáků možnost výběru snadnějších či náročnějších karet. Karty s malými počty bodů, uspořádání bodů na kostkách nebo jiná seskupení, která lze snadno koncepčně organizovat (až do čísla 5), jsou považovány za snazší. Karty s velkými čísly a složitější formace jsou považovány za náročné.

N2.2 Realizace ve třídě

Přístup, který zdůrazňuje všechny druhy ikonických nebo strukturovaných reprezentací, je v mnoha kurikulích a učebnicích vysoce oceňován a podporován. Aktivity a hry ve třídě, které jsou v této kapitole navržené, nám umožnily pokládat tyto otázky a odpovídat na ně:

- Jak učitelé pracují s úlohami pro určování počtu vhledem?
- Jaký význam takovým činnostem ve třídě přikládají?
- Jakými způsoby se projevuje jejich zájem o rozvoj myšlenkových reprezentací a jak jej podporují?
- Jakými způsoby se projevuje jejich zájem o proměnu „schopnosti počítat“ na „schopnost vnímat ve skupinách“?
- Kolik různých seskupení u daného počtu prvků používají?

Zajímáme se také o dovednosti dětí, na něž se lze ptát otázkami:

- Určují děti počet vhledem, nebo prvky počítají po jednom?
- Vidí různá seskupení jako snadno rozpoznatelné části?
- Rozeznávají počet v různých reprezentacích?
- Uvažují o číslech různými způsoby?
- Dokážou snadno různá seskupení transformovat?

N2.3 Jak pracovat s touto kapitolou

N2.3.1 Cíle a úlohy

Úlohy v celé kapitole jsou na úrovni A (jak je definováno v předmluvě) a jsou ještě dále děleny do dvou podúrovní podle věku dětí, kterým jsou určeny: **AA** – úlohy pro předškolní věk a první ročník ZŠ, **AB** – úlohy pro druhý ročník ZŠ.

Každá úroveň je dále rozdělena na tři části: hry, skupinové reflexe a návrhy (design). Cíle kapitoly označené jako **NAA1** až **NAA5** pro úroveň AA (čísla do 10) a **NAB1** až **NAB5** pro úroveň AB (čísla do 100) jsou následující:

1. Určování počtu vhledem nebo studium různých seskupení, která podporují určování počtu prvků a vztahů mezi čísly.
2. Porovnávání a určování pořadí různých seskupení podle počtu jejich prvků (více než, méně než, stejně jako) na podporu schopnosti uspořádat čísla a na podporu porozumění vztahů mezi čísly.
3. Rozkládání a kombinování čísel s použitím a bez použití různých seskupení.
4. Počítání zpaměti (sčítání, odčítání, násobení), s použitím a bez použití různých seskupení.
5. Přesahy přes 10 a 100 s použitím a bez použití různých seskupení.

Každému cíli v dílčí části odpovídá alespoň jeden úkol, na nějž je za cílem odkázáno, takže úlohy a cíle jsou propojeny jednoduchým hypertextovým systémem. Kliknete-li na označení nějaké úlohy, dostanete se hyperlinkem přímo k ní.

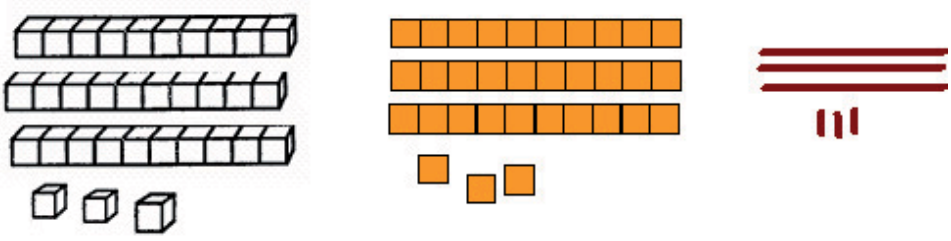
I když se to týká pouze prvních ročníků, důležitou součástí navrhovaných aktivit je seznamování se dětí se situacemi, které podporují jejich přemýšlení o počtu prvků jako o skupině a určování počtu vhledem. Jak bylo již vysvětleno, tyto úlohy pomáhají dětem vytvořit si dynamické myšlenkové reprezentace.

Úlohy mohou být v kterékoli třídě použity k rozvoji nebo k diagnostikování znalostí dětí o číslech. Hry a doprovodný materiál mohou být také určitou alternativou k materiálu pravidelně používanému ve třídě.

Hlavním cílem kapitoly je podpořit myšlenkové strategie aktivitami, jako jsou rychlé hry, zlepšování času rozpoznání množství, hry na uhodnutí množství, úkoly na slučování a rozkládání řešené zpaměti. Tento druh činností posiluje zájem i jejich potřebu nepočítat po jedné, ale používat jiné strategie. Tyto úlohy jsou uvedeny v první podkapitole.

Schopnost žáků určovat počet vhledem, seskupovat, slučovat a rozkládat různá množství je rozvíjena intenzivním cvičením. Zároveň je ale nutné, aby se žáci zabývali úlohami, v nichž mají možnost diskutovat o strategiích, vyměňovat si nápady i organizovat informace získané z her, v nichž jde o rychlé rozpoznání počtu prvků. K tomu účelu slouží úlohy druhé části – úlohy pro reflexi a sdílení nápadů, které žáci mohou chápat jako přípravné. V těchto úlohách si žáci mohou vzájemně pomáhat, což ocení žáci, kterým nejdou tak dobře jako ostatním.

Konečně ve třetí části uvádíme pro každou úroveň úlohy, během kterých mohou děti vybarvovat, navrhovat nebo nějak připravovat různá seskupení. V těchto úlohách se procvičují v (re)prezentaci svého myšlení, rekonstruují ta seskupení, která již při svém učení používaly, nebo vytvářejí seskupení nová. Ukázalo se, že postupný přechod od skutečných objektů, jako například spojovatelné kostky v řadách a jejich reprezentace, k abstraktnějším reprezentacím (jako na obr. N02) žákům podstatně pomáhá numerické pojmy zobecňovat.

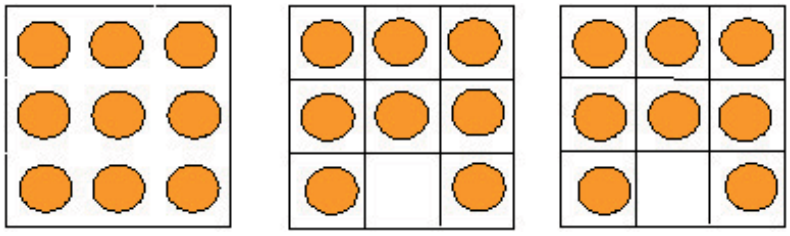


Obr. N02

N2.3.2 Materiály

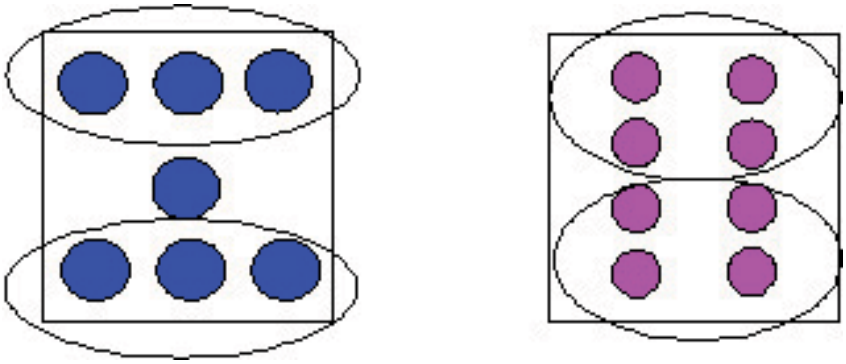
Na konci každé podkapitoly jsou uvedeny materiály, které umožňují pracovat *s různými seskupeními a jejich reprezentacemi* (kostka, domina, ručně kreslené kartičky s různými počty puntíků nebo čtverečků atd.), pro případ, že takové předlohy ve vašich učebnicích nejsou. Materiál odpovídající každé úloze je označen jako

WS. Kliknete-li na takové označení, dostanete se prostřednictvím hyperlinku přímo k listu s materiálem, který lze pro úlohu využít. Jsou zde různé druhy seskupení. Zaprvé karty s puntíky seskupenými po trojicích, z nichž můžete utvářet různé kombinace. Je zde sice jen jedna karta s devíti puntíky, ale tři s osmi puntíky (karty vzniklé rotací jsou považovány za identické) a mnoho dalších karet pro menší počty puntíků.



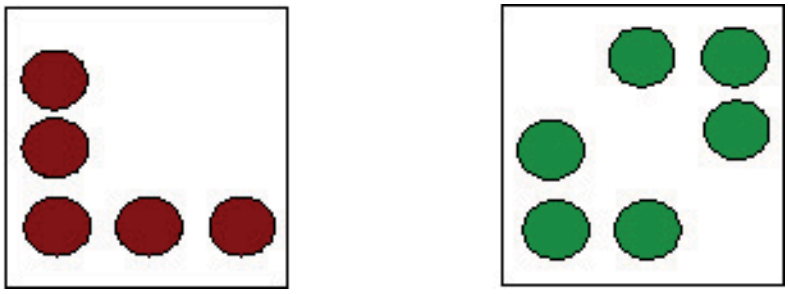
Obr. N03

Strukturované karty odpovídající například skupinkám ok na kostce nebo obecně zobrazení po dvojicích či trojicích účinně pomáhají při počátečním rozvoji schopnosti určovat počet vhledem, protože umožňují dětem vytvořit si určité standardní postupy (stereotypy) nebo využívat vlastností zobrazení v rovině a v prostoru.



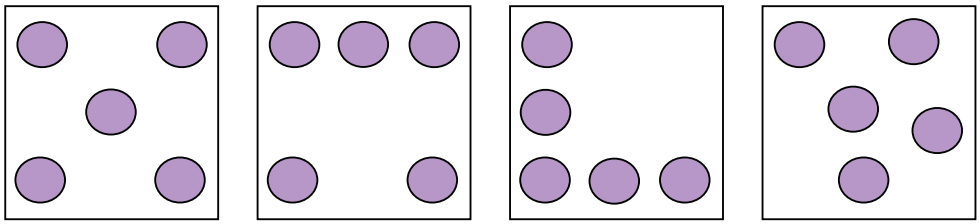
Obr. N04

Kromě těchto forem mohou k detekci komplexnějších seskupení žáci využívat symetrie nebo jiných vlastností zobrazení v rovině.



Obr. N05

Rozmanitost seskupení je společně s nestrukturovanými seskupeními pro další fázi nezbytná, a to proto, aby si děti vytvářely flexibilní reprezentace a vztahy mezi konfiguracemi; například aby byly schopné rozpoznat 5 ve všech možných kombinacích (obr. N06).



Obr. N06

Karty pro uspořádání po desítkách nebo „desítkové pásy" podporují schopnost dětí na úrovni AA rozeznat desítky jako jednotku vyšší třídy. U dětí na úrovni AB jde o tvorbu seskupení v desítkovém formátu. Na této úrovni nejsou používány žádné jiné typy seskupení, protože je snaha brát desítky jako jednotky (ve smyslu části celku). Jsou podporovány pouze abstraktnější reprezentace desítek, například v přímce.

N3 Podkapitola 1: Rychlé hry

N3.1. Cíle

ÚROVEŇ AA

NAA1. Určování počtu vhledem až po počet 10 prvků v různých seskupeních na podporu chápání čísla jako počtu a chápání vztahů mezi čísly (AA1, AA2).
NAA2. Porovnávání a uspořádání různých seskupení (více než, méně než, stejně jako) na podporu porozumění pořadí čísel a vztahů mezi čísly (AA3).
NAA3. Rozklad a skládání čísel v představě s různými seskupeními prvků (AA4, AA5, AA6).

ÚROVEŇ AB

NAB1. Určování počtu vhledem do 100 v desítkových seskupeních na podporu chápání čísla jako počtu a vztahů mezi čísly (AB1, AB2).
NAB2. Porovnávání a řazení různých desítkových seskupení (více než, méně než, stejně jako) na podporu chápání pořadí desítek a vztahů mezi desítkami (AB3).
NAB3. Rozkládání a skládání desítek v představě až do 100 s různými seskupeními desítek prvků (AB4).
NAB4. Strategie pro počítání v duchu (AB5).

N3.2 Úlohy podkapitoly 1

ÚROVEŇ AA

Úloha AA1

Obr. N07

Rychlá hra s kartami rozprostřenými na podlaze. Děti spolupracují ve skupinách, mají najít co největší počet karet s daným počtem prvků (Exp. 1, str. 179).

Komentář

Cílem této aktivity je, aby si děti procvičily určování počtu vhledem až do 10. K rozvoji dynamických prezentací počtů a vztahů mezi čísly jsou použity počty prvků v různých seskupeních.

Rozmanitost seskupení na kartách je v této aktivitě důležitá. V přiložených materiálech je tato rozmanitost obsažena. Aby si děti zvykly na rozpoznávání počtu prvků bez jejich počítání, může na počátku prvního ročníku nebo v mateřské škole učitel používat karty s pěti puntíky nebo čtverečky (WS1a, WS2a). Později mohou být používány karty s větším počtem prvků (WS1b, WS2b).

Rychlost je v těchto aktivitách důležitá, protože mají-li děti reagovat rychle, musejí si vyvinout dynamické reprezentace čísel.

Variace

Učitel používá zpětný projektor, pomocí něhož ukazuje dětem různá seskupení prvků. Dává dětem na odpověď 5 sekund (nebo i méně).

Úloha AA2

Učitel ukáže kartu na několik sekund, pak ji schová a zeptá se dětí na počet prvků: „Kolik bylo na kartě celkem puntíků?“, „Kolik skupin dvou puntíků (dvojic) bylo na kartě?“, „Kolik trojic?“ Když se ozve první odpověď, učitel ukáže kartu znovu a třída posoudí, zda byla správná. Ve fázi nácviku před touto hrou nebo po ní mohou děti diskutovat a zlepšovat své strategie pro rychlé odpovědi. (Tentýž materiál jako pro AA1, Exp. 2, str. 182).

Úloha AA3

Jde o hru ve dvojicích s balíčkem karet s různými seskupeními prvků. Každé dítě otočí jednu kartu. Kdo má kartu s větším počtem prvků, bere obě (Exp. 3A, str. 184, Exp. 3B, str. 185).

Obr. N08

Variace

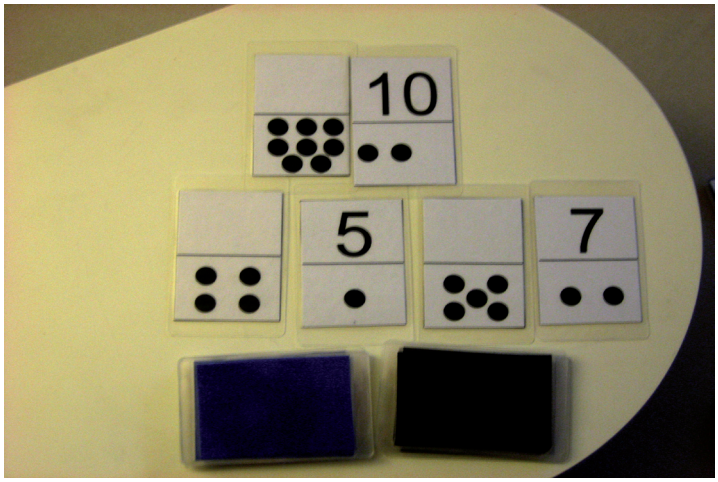
Učitel ukáže dvě karty s různými seskupeními prvků a dá dětem 5 sekund (nebo méně) na to, aby porovnaly počty prvků, které obsahují.

Úloha AA4

Hra se hraje ve dvojicích s balíčkem karet s různými seskupeními prvků. Každý hráč si vezme deset karet a odloží všechny dvojice, na nichž je součet prvků roven deseti. Vezme si kartu z balíčku a případnou dvojici se součtem prvků rovným deseti odloží. Takto pokračuje, dokud může, a pak je na řadě druhý hráč. Vítězí ten hráč, který nemá v ruce žádné karty a před sebou má nejvíce karet.

Komentář

Seskupení na kartách mohu být různá, jako je tomu v AA1. Místo oddělených karet mohou být používány karty domina. Děti nepřikládají k existující kartě kartu se shodným sousedním políčkem, ale novou kartu přikládají tak, aby součet prvků na sousedních políčkách činil pět (Exp. 4, str. 186).



Obr. N09

Variace

Součet prvků může být 6, nebo 7, nebo jiné číslo.

Úloha AA5

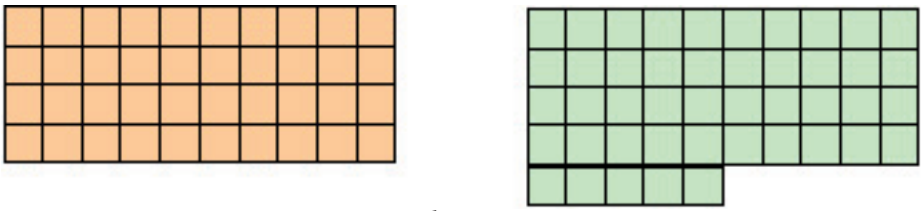
Rychlá hra: Řady deseti prvků jsou rozděleny (rozstřiženy) na dvě části různými způsoby. Děti musejí najít části, které sobě patří (WS5).

Úloha AA6

Hra se hraje ve dvojicích. Každé dítě má 7, nebo 8, nebo 10 zápalek. Jedno dítě rozdělí své množství zápalek do dvou částí, ukáže dlaň s jednou částí. Kolik zápalek je v druhé ruce? (Exp 7)

ÚROVEŇ AB

(V úrovni AB máme stejné typy činností, ale používáme karty s desítkami. Tento materiál pomáhá dětem uvažovat v desítkách. Neformálně je zaveden multiplikativní přístup.)



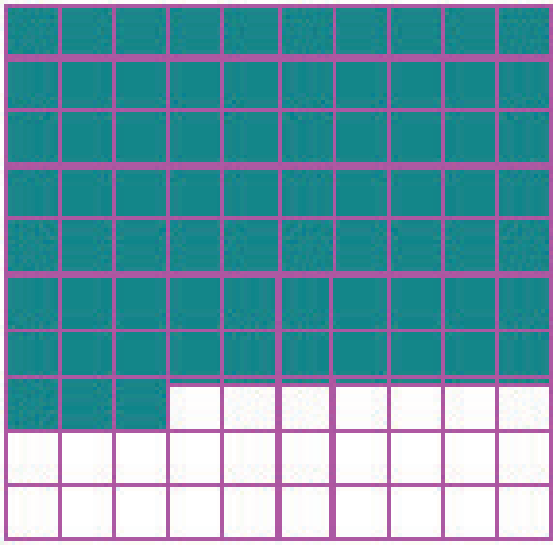
Obr. N10

Úloha AB1

Jde o rychlou hru s kartami rozmístěnými na podlaze. Děti mají v týmech najít co největší počet karet s daným celkovým počtem prvků (karty s desítkami nebo desítkami a jednotkami, WS6).

Variace

V této hře mohou být použity vybarvené karty se stovkami (po jejich vybarvení v WS11).



Obr. N11

Úloha AB2

Učitel používá zpětný projektor, pomocí něhož ukazuje dětem různá seskupení desítek prvků. Dává dětem na odpověď 5 sekund (nebo dokonce méně). (Tentýž materiál jako pro AB1, WS6 nebo WS10.)

Úloha AB3

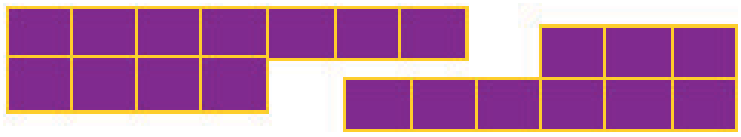
Jde o hru ve dvojicích s balíčkem karet s desítkami prvků. Každé dítě otočí jednu kartu. Kdo má kartu s větším počtem prvků, bere obě karty. (Tentýž materiál jako pro AB1, WS6 nebo WS10.)

Úloha AB4

Jde o rychlou hru, v níž jsou různými způsoby řady dvaceti (třiceti, čtyřiceti a padesáti) rozděleny do dvou částí. Děti mají nalézt části, které k sobě patří. (WS8)

Komentář

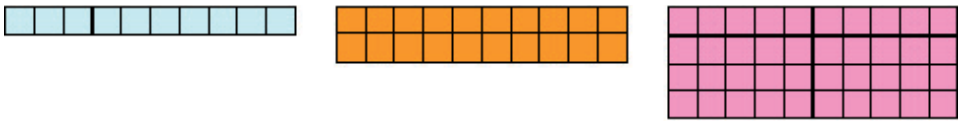
V této úloze dávají děti k sobě jednotky a desítky, aby dospěly k určitému číslu (20, 30, … 50), například 7+3=10, 4+6=10, 20 celkem (obr. N12).



Obr. N12

Úloha AB5

Tato hra se hraje ve dvojicích. Každá dvojice má balíček karet s desítkami prvků. Každý hráč si vezme pět karet a odloží všechny dvojice před ním ležících karet, na nichž je součet prvků roven číslu 30, 50, nebo 70. Vezme si kartu z balíčku ležícího mezi oběma hráči, odloží případnou dvojici s daným součtem prvků; takto pokračuje, dokud je to možné. Pak hraje druhý hráč. Vítězí hráč, který nemá v ruce žádné karty a před sebou má nejvíce karet. (Tentýž materiál jako pro AB1, WS6.)



Obr. N13

N4 Podkapitola 2: Fáze nácviku, reflexe

N4.1 Cíle

ÚROVEŇ AA

NAA1. Zkoumání různých seskupení za účelem pochopení čísla jako počtu a vztahů mezi čísly (AA7, AA9, a AA14).
NAA2. Porovnávání a řazení čísel (více než, méně než, stejně jako) na podporu chápání pořadí čísel a vztahů mezi čísly (AA10).
NAA3. Rozklad a skládání čísel v představě s použitím různých seskupení prvků (AA11).
NAA4. Počítání v představě (AA8, AA12, AA13), s různými seskupeními prvků.
NAA5. Přechody přes 10 v představě s použitím různých seskupení nebo bez nich (AA18, fáze reflexe).

ÚROVEŇ AB

NAB1. Zkoumání různých seskupení desítek prvků pro seznámení se s čísly do 100 (AB6).

NAB2. Porovnávání a řazení různých seskupení desítek prvků (více než, méně než, stejně jako) na podporu porozumění uspořádání desítek a vztahů mezi desítkami (AB11)
NAB3. Rozkládání a skládání desítek v duchu do 100 (AB7)
NAB4. Počítání zpaměti – strategie (AB8, AB9, AB10)

N4.2 Úlohy

Úloha AA7

Hra se hraje ve dvojicích. Každý hráč si vezme 6 karet. Jeden hráč zvolí kartu a žádá spoluhráče o kartu s počtem prvků, který potřebuje k získání jím zvoleného cílového počtu prvků. Hráči dají obě karty k sobě. Je-li počet prvků na těchto dvou kartách roven zvolenému cílovému počtu prvků, vyzývající hráč si obě karty bere.

Komentář

Cílem této aktivity je podporovat úvahy dětí o počtu jako o skupině a o kombinování skupin k získávání dalších seskupení o větším počtu prvků (WS4). Ačkoli je to hra s vítězem a poraženým, podporuje u dětí reflexi.

Variace

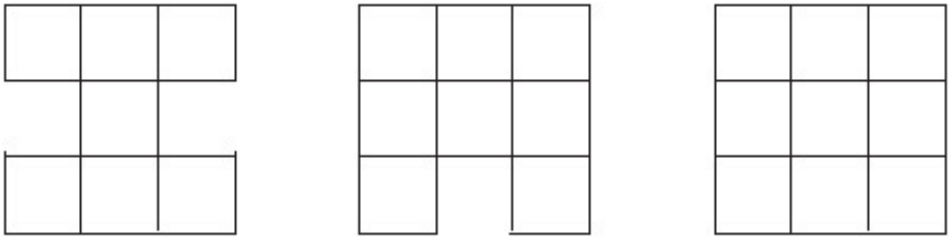
Učitel zvolí číslo. Děti mají vybrat 3 karty, jejichž počet prvků dává dohromady zvolené číslo. Seskupení prvků na kartách jsou ve třídě prezentována.

Změníme-li počet karet, přičemž méně jich použijeme pro mladší děti, více pro starší, může být materiál použit v kombinatorické úloze. Například: Kolik různých čísel můžete vytvořit se čtyřmi kartami? Existují další možnosti? Jsou některé kombinace shodné? Některé kombinace ukazuje obr. N14.

Obr. N14

Úloha AA8

Hra ve dvojicích: Kolik žetonů je potřeba, chceme-li jimi obsadit sedm, osm nebo devět políček? Děti mají karty, na nichž je sedm, osm nebo devět volných políček; tyto karty používají jako šablony. První hráč obsadí svými žetony několik políček šablony, spoluhráč musí uhodnout počet zbývajících potřebných žetonů, a pak je položit na zbývající volná pole. Šablona poskytne kontrolu správnosti.



Obr. N15

Komentář

Tato aktivita je zaměřená na vedení dětí k tomu, aby uvažovaly o doplňku pro každé číslo a rozdělovaly celkový počet na části až do celkového počtu 7, 8 nebo 9. Dítě musí zjistit, kolik míst v šabloně zbývá, a to předtím, než začne žetony do políček pokládat.

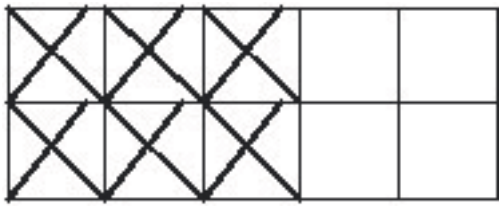
Je-li počet žetonů, jimiž se dítě rozhodne doplnit počet již položených žetonů na cílový počet, správný, právě jimi pokryje všechna volná místa v šabloně. Jinak buď nějaké žetony zbudou, nebo zbudou nějaká neobsazená políčka. Například když první hráč zaplní v šabloně pro osm žetonů 3 místa, zbývá k zaplnění 5 políček, takže správná odpověď je 5 žetonů. Má-li druhé dítě 6 žetonů, jeden žeton mu zbude. Pokryje-li 4 políčka, zůstane jedno políčko nepokryté.

Úloha AA9

Šest dětí jde do divadla, budou sedět ve dvou řadách po pěti sedadlech. Jaké jsou možnosti jejich usazení? (Exp. 5, str. 186.)

Komentář

Tato aktivita je zaměřená na vedení dětí k uvažování o tom, jakým způsobem lze složit číslo 6. Děti mohou nalezené kombinace zaznamenat na připravený papír. Záznamy jsou pak prezentovány ve třídě.



Obr. N16

Variace

Děti mají prací ve skupinách zjistit, které ze zaznamenaných kombinací jsou shodné. Výsledky jsou pak prezentovány ve třídě.

Úloha AA10

Hra ve skupinách: Válka čísel (číselná osa)

První skupina si vymyslí číslo, druhá skupina má kladením otázek typu „Je číslo větší než… a menší než…?“ zjistit, které číslo to je. (Například: Je to číslo větší než tři a menší než šest?). První skupina odpovídá „ano“, nebo „ne“. (Exp. 9, str. 193.)

Úloha AA11

Ve třídě jsou ukázány věci, které stojí 1, 2, 3 nebo 4 €. Děti mají ve dvojicích zjistit, kolik věcí mohou koupit za 5 € nebo 10 €.

Podobný problém: Každá dvojice má několik mincí o hodnotě 1, 2 a 5 €. Má vyzkoušet všechny možné kombinace, které dávají 10 €.

Komentář

Hodnoty peněz jsou již uspořádány ve skupinách. Cílem této aktivity je vyhodnotit schopnosti dětí týkající se relací souvisejících se skládáním a rozkládáním čísla do 10.

Úloha AA12

„Jak mohu z X udělat Y?“ Učitel ukáže ve třídě jednu kartu, například s osmi tečkami nebo čtverečky a zeptá se „Jak můžeme z osmi udělat pět?“ Dítě, které odpoví správně, kartu vyhraje.

Komentář

Karta je použita na podporu přemýšlení o daném čísle. Později může být položena stejná otázka bez karty pro uvažování v duchu, zatímco karty mohou být použity pro kontrolu nebo vysvětlení.

Úloha poskytuje dobrou příležitost diskutovat ve třídě o způsobech, jimiž jsou seskupení organizována.

Úloha AA13

Kouzelná krabice: Jedna karta ukazuje, kolik dvojic, trojic nebo čtveřic je v kouzelné krabici. Pokuste se zjistit, kolik objektů je v krabici. Kolik byste jich napočítali, kdybyste je počítali po jednom? (Exp. 8, str. 191.)

Komentář

Cílem úlohy je rozvoj uvažování v oblasti násobení. V krabici jsou karty schovány, je nutno počítat v duchu.

Úloha AA14

Fáze nácviku a reflexe: Děti pracují ve skupinách. Každá skupina vybere karty, s nimiž bude hrát s jinou skupinou. Radí se o tom, se kterými kartami se hraje dobře nebo naopak obtížně a proč.

ÚROVEŇ AB

Úloha AB6

Jde o hru ve dvojicích s kartami s desítkami prvků. Děti zvolí číslo (50, 70 atd.) První hráč si vezme kartu a požádá spoluhráče o kartu, která je pro získání zvoleného čísla doplňkem (jejíž počet prvků je nutno přičíst) k odebrané kartě. Hráči dají karty k sobě; pokud dávají žádaný součet, hráč si obě karty nechá. (Týž materiál jako AB1, WS6.)

Komentář

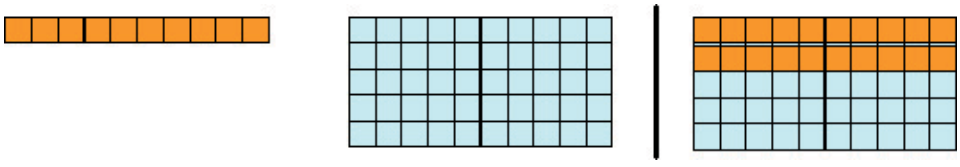
Cílem této činnosti je procvičení skládání desítek prvků do celkového počtu 30, 50 atd. Přesto, že je to hra s vítězem a poraženým, podporuje u dětí reflexi.

Úloha AB7

Hra „Puzzle ve třech částech“: Děti mají různá seskupení desítek prvků (WS7). Učitel zadá číslo (například 30, 70, ...) a děti musí najít tři karty, které dávají dohromady udaný počet prvků. Seskupení jsou pak prezentována a diskutována ve třídě.

Úloha AB8

Jde o hru ve dvojicích. Děti mají šablony s padesáti a sto políčky. První dítě položí na šablonu několik desítek, druhé dítě si připraví správný počet desítek pro doplnění do padesáti nebo do sta a pak desítky na šablonu položí. Šablona poskytuje kontrolu správnosti. (WS9)



Obr. N17

Komentář

Cílem této úlohy je seznámit děti se sčítanci, jejichž součet je 50 a 100.

Úloha AB9

„Jak mohu z čísla X udělat číslo Y (v desítkách)?“ Učitel ukáže ve třídě jednu kartu, například s třemi desítkami (30) a zeptá se: „Jak můžeme z 30 udělat 70?“ Dítě, které odpoví správně, kartu vyhraje.

Úloha AB10

Desítková kouzelná krabice: Jedna karta ukazuje, kolik „desetic“ je v krabici. Zjistěte, kolik je v krabici objektů.

Variace

Kouzelná krabice může být použita obecně pro násobení. Jedna karta ukazuje, kolik pětic nebo sedmic je v kouzelné krabici. Děti mají zjistit, kolik je v krabici objektů.

Úloha AB11

Fáze nácviku a reflexe do 100: Děti hrají ve skupinách. Každá skupina si vybere karty, s nimiž bude hrát s jinou skupinou. Radí se o tom, se kterými kartami se hraje dobře nebo naopak obtížně a proč.

N5 Podkapitola 3: Tvorba

N5.1 Cíle

ÚROVEŇ AA

NAA1. Zkoumání různých seskupení za účelem porozumění číslu jako počtu a vztahů mezi čísly (AA15).
NAA2. Porovnávání a řazení různých seskupení (více než, méně než, stejně jako), na podporu porozumění uspořádání čísel a vztahů mezi čísly (AA17).
NAA3. Tvorba (rozklad a kombinování čísel) s různými seskupeními (AA16).
NAA5. Přechody přes desítku zpaměti se seskupeními prvků i bez nich (AA18, úroveň tvorby).

ÚROVEŇ AB

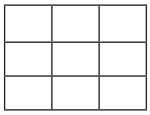
NAB1. Zkoumání různých desítkových seskupení pro seznámení se s čísly až do 100 (AB11, AB13).
NAB2. Porovnávání a řazení různých desítkových seskupení (více než, méně než, stejně jako) na podporu chápání pořadí čísel a vztahů mezi čísly (AB12).
NAB3. Tvorba, rozkládání a kombinování desítek prvků do 100, přechody přes 100 (AB14, AB15).

N5.2 Úlohy

ÚROVEŇ AA

Úloha AA15

Pracujte ve skupinách s kartami o devíti políčkách. Zkuste najít všechna možná seskupení s šesti, sedmi nebo osmi puntíky.



Obr. N18

Komentář

Cílem aktivity je pomoci dětem najít různá seskupení. Šablona o devíti políčkách byla použita k návrhu karet pro úlohu AA1. Tato předchozí aktivita může dětem pomoci. Návrhy žáků jsou pak ve třídě předvedeny

Úloha AA16

Pracujte ve skupinách a pokládejte otázky typu:

- Hodil jsem třemi kostkami, jaký je minimální možný součet? Jaký je maximální možný součet?
- Hodil jsem třemi kostkami a součet byl 10. Jaká čísla se mohla objevit na jednotlivých kostkách?

Komentáře

Cílem této aktivity je podporovat uvažování dětí o počtu jako o skupině a kombinovat a rozdělovat. Děti mohou navrhnout kostku. (Exp. 6, str. 190.)

Úloha AA17

Jde o paměťovou hru, v níž žáci sami navrhují karty, s nimiž pak pracují. (Exp. 10, str. 193.)

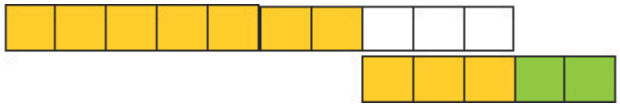
Úloha AA18

O kolik více než 10? Jsou dány dvě karty se seskupeními o celkovém počtu prvků větším než 10. Děti zjišťují, o kolik je počet prvků větší než deset, a vysvětlují své strategie. (Stejné karty jako pro AA1 nebo karty pro uspořádání po desítkách.)

Komentář

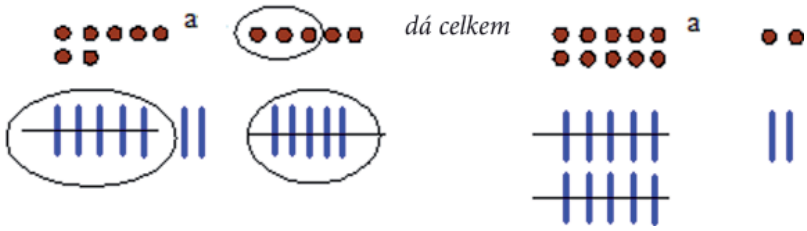
Toto je první pokus, v němž děti mohou reprezentovat čísla větší než 10 a uvažovat o nich.

Žáci doplní do deseti kartu, v níž jsou připravena políčka pro deset prvků, přičemž oddělí skupinu zbývajících. Řeknou, že máme jednu desítku a ještě dva prvky, což dává 12. Například 7 + 5 (obr. N19).



Obr. N19

Na úrovni tvorby rovněž žáci spojí 7 a 5, a to různými způsoby, například jako na obr. N20.



Obr. N20

ÚROVEŇ AB

Úloha AB11

Jde o paměťovou hru, v níž si děti samy připravují karty, s nimiž budou pracovat.

Úloha AB12

Každé dítě si zvolí číslo a vybarví odpovídající počet čtverců na archu papíru s rastrem pro sto prvků (WS10). Náčrty dětí jsou prezentovány, diskutovány, porovnávány a nakonec seřazeny.

Úloha AB13

Učitel vysloví číslo a děti vybarví odpovídající čtverce na archu papíru s rastrem pro sto prvků (WS10).

Úloha AB14

O kolik více než 100? Jsou dány dvě karty pro uspořádání po desítkách se seskupeními o celkovém počtu prvků větším než 100. Děti zjišťují, o kolik je počet prvků větší než sto (stříhají a skládají dohromady), a vysvětlují své strategie.

Na úrovni nácviku a reflexe žáci doplní kartu, v níž jsou připravena políčka pro sto prvků, do sta, přičemž oddělí skupinu zbývajících prvků. Řeknou, že máme jednu stovku a ještě (zbývající prvky). Na úrovni tvorby žáci reprezentují součet různými způsoby.

Úloha AB15

Učitel ukazuje dvě nebo více desítkových karet. Děti jsou žádány, aby sdělovaly počty prvků a jakýmkoli způsobem nalezly součet.

Komentář

Pro tuto úlohu lze použít jednodušší reprezentaci než pruhy po desítkách prvků. Rychlost může být motivem pro abstraktnější reprezentaci (viz obr. N21).

Obr. N21

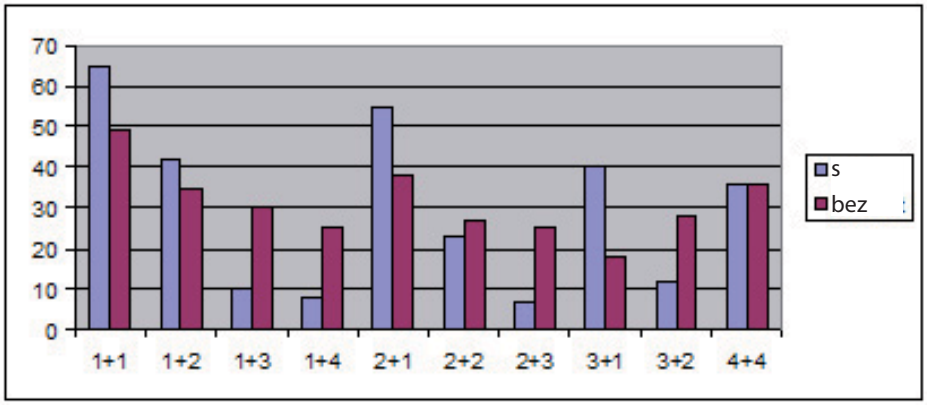
N6 Výsledky použití v praxi

Obvyklý přístup k vyučování počátků aritmetiky v Řecku nebere dostatečně v úvahu myšlenkové reprezentace a je převážně charakterizován aktivitami, které vyžadují počítání ve spojitosti s obrázky objektů. Různá seskupení a numerické hry jsou využívány méně.

N6.1 První výzkum

Výsledky výzkumu prováděného v 70 mateřských školách a s žáky prvních ročníků (od 5,5 do 6,5 roku), během něhož byly děti testovány ústně v rozpoznávání číslic, v rutinním počítání do 10, v určování malého a velkého počtu prvků (konkrétních nebo ikonických) vhledem až do 10, v počítání malého a velkého počtu prvků (konkrétních nebo ikonických) až do 5 a ve sčítání prvků (konkrétních nebo ikonických) do 5, ukázaly následující individuální schopnosti dětí projevené při různých aritmetických aktivitách:

- ✓ Rutinní počítání: Většina dětí (75 %) umí „počítat“ do 10 bez chyb.
- ✓ Číslice: Většina dětí (60–90 %) rozeznává číslice.
- ✓ Určování počtu vhledem: 35 % dětí určuje počet LEGO kostek od jedné do pěti vhledem bez počítání. 40 % dětí tyto kostky počítá a zbytek nedokáže počet kostek zjistit (v závislosti na počtu kusů).
- ✓ Pro malé součty máme výsledky (se skutečnými objekty nebo bez nich) na obr. N22.



Obr. N22

Obecně se dá říci, že děti používají mechanismus počítání, jsou-li žádány, aby určily součet. Přítomnost konkrétních objektů podporuje mechanismus počítání, zatímco jejich absence posiluje počítání zpaměti.

Tato zjištění naznačují, že ne všechny aritmetické schopnosti spolu přímo souvisejí.

- ✓ Rozeznávání číslic a rutinní počítání se vyskytují souběžně do počtu 3. Pro větší čísla to neplatí.
- ✓ Rozeznávání číslic a určování počtu vhledem se vyskytují souběžně.
- ✓ Rutinní počítání a určování počtu vhledem jsou schopnosti zcela nezávislé.
- ✓ Rutinní počítání a sčítání malých počtů se nevyskytují souběžně.
- ✓ Určování počtu vhledem a sčítání malých čísel spolu úzce souvisí.

Stručně řečeno, rutinní počítání a rozeznávání číslic spolu souvisí. Na nich je nezávislé určování počtu vhledem a sčítání prvků do 5, které opět vzájemně souvisí. Počítání a určování počtu vhledem jsou tedy dovednosti, které se u dětí rozvíjejí nezávisle jedna na druhé.

N6.2 Vyučovací program (intervence)

Přístup, který využívá úloh podobných právě popsaným úlohám, jež jsou zaměřené na rozvoj myšlenkových reprezentací a počítání zpaměti, byl zkoušen ve dvou třídách (mateřská škola a první ročník ZŠ) během roku 2003–04. Znalosti dětí v oblasti numerace byly vyhodnoceny před zahájením programu a po něm. Konkrétně bylo u dětí testováno rozeznávání číslic, rutinní počítání do 10, určování malého a velkého (konkrétního nebo ikonického) počtu prvků vhledem do 10, počítání malého a velkého (konkrétního nebo ikonického) množství prvků do 10, řazení malých a velkých počtů (konkrétních či ikonických) do 10. V souhrnu toto šetření ukázalo, že mezi dětmi z mateřské školy a dětmi z prvních tříd nejsou žádné podstatné rozdíly.

Reakce dětí

Děti se účastnily aktivit s radostí, protože je považovaly za hry (řada z nich skutečně měla formu skupinové nebo individuální hry). Individuální rozdíly mezi dětmi, které souvisely s jejich předchozími znalostmi, se jasně projevily jak v pokroku, který děti učinily, tak v závěrečném vyhodnocení.

Reakce učitelů

Učitelka v mateřské škole neměla s implementací navrženého programu žádné potíže; učitelka první třídy určité problémy pociťovala a měla tendenci unikat do svého starého osvědčeného způsobu učení s používáním učebnice. Někdy se zcela vrátila k úlohám uvedeným v učebnici.

Obě učitelky měly určité pochybnosti o našem požadavku nechat děti pracovat bez jejich intervence a povzbuzovat je k tomu, aby si své chyby opravovaly vzájemně nebo samostatně. Pro rozsáhlejší implementaci konstruktivistického přístupu bude pravděpodobně potřeba se existencí takových pochybností vážně zabývat.

Vyhodnocení pokroku dětí

Děti vykazovaly velmi dobrý výkon v rozpoznávání počtu prvků (85–100 %) a v počítání prvků (75–95 %).

Učitelka mateřské školy nevěnovala dostatečnou pozornost numerické části vyučování, takže děti vykázaly nižší výkon (50–60 %) v řazení čísel.

Po chvíli se učitelka první třídy vrátila k tradičnímu způsobu vyučování, takže nabídka aktivit nebyla tak široká, jak bylo původně předpokládáno. To může vysvětlovat slabé výsledky těchto dětí v oblasti vztahů mezi čísly a řazení čísel.

N6.3 Další experimenty

Během dalšího školního roku (2004–2005) byly některé úlohy navržené v této kapitole vyzkoušeny ve třídách v Řecku, Německu a České republice. Některá pozorování z těchto realizací budou prezentována v tomto textu (odpovídající Video epizody lze nalézt na DVD). V těchto prezentacích se snažíme podrobněji popsat.

- reakce žáků ukazující na myšlenkové reprezentace,
- volbu učitelů pro rozvoj těchto dovedností.

Experiment 1

A. Úloha, kterou je rychlá hra s kartami rozmístěnými na podlaze, byla realizována v mateřské škole a v první třídě ZŠ v experimentální škole Aristotelovy University v Soluni (A.U.TH) během jara 2005. Materiál pro hru byl připraven výzkumným týmem a byl prodiskutován s učiteli. Děti měly ve skupinách najít co největší množství kartiček reprezentujících jisté číslo X. (Video1a)

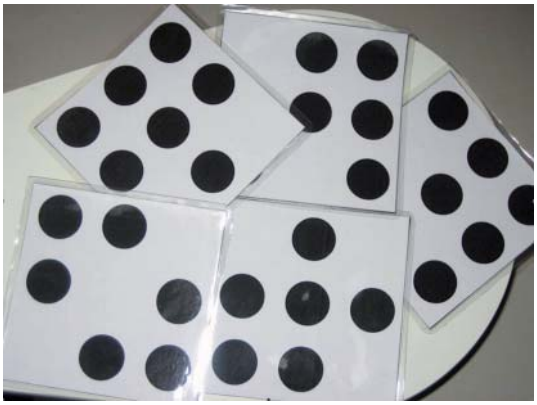
Obr. N23

I když už děti dříve pracovaly na řadě úloh a konstrukcí (kostky, Lego, žetony atd.), lze snadno nahlédnout (z fotografií a videa), že některé děti používaly počítání jako bezpečnou cestu ke zjištění, zda je na kartě zobrazeno X teček.

Obr. N24

Učitelka organizovala aktivitu v týmech, které hrály odděleně. Bez prvku soutěže však nebyly děti v týmech nuceny nalézt rychle správné karty, a tak se vracely k počítání. Tato malá odchylka od původního návrhu úlohy významně ovlivnila dosažení hlavního cíle aktivity, jímž bylo zlepšení dovednosti určování počtu vhledem. Jak učitelka vysvětlila později, byla spokojená, že děti dokázaly najít správné karty, i když použily počítání místo rychlého určení počtu vhledem. Někdy je k tomu i vybízela.

B. Tatáž úloha byla vyzkoušena v základní škole v Kasselu s 28 žáky první třídy (věk 6 – 7 let). Děti již znaly čísla do 20 a aritmetické operace s čísly do 10. Učitelky v Německu připravily karty zatavené ve fólii (obr. N25).



Obr. N25

Děti seděly v kruhu; dvě z nich hrály proti sobě, shromažďujíce karty se stejným počtem prvků. Měly před sebou 10 karet s tečkami o počtu od 1 do 5.

S čísly 1, 2, 3 a 5 šlo dětem nacházení párů dobře, protože tečky byly zobrazeny podobně jako na kostce. Myšlenka rychlé hry, kdy všechny děti hrají najednou, a tak by místo počítání mělo být používáno rychlé rozeznávání, byla pozměněna. Jak lze vidět na snímcích, každé dítě hraje samostatně.

.

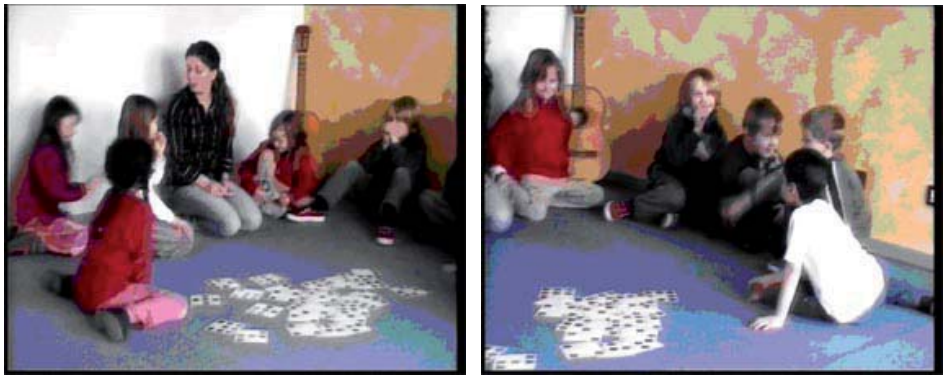
Obr. N26

K rozeznávání počtu na „malých" kartách (karty s 1 – 5 tečkami) dochází okamžitě. Čím je na kartě větší množství teček, tím je přiřazení karet k sobě obtížnější. Ačkoli děti již znaly čísla, nerozeznávaly karty s tečkami tak snadno, jako kdyby mohly počítat. Více se osvědčilo slovní pojmenovávání čísel než zdvižení karty s číslem.

V rozšířené variantě úlohy se od dětí požadovalo ukázání čísla použitím takových dvou karet, jejichž tečky dohromady dávaly dané číslo. Například číslo 7 může být zobrazeno buď pomocí karet s počtem teček 2 a 5, nebo 4 a 3.

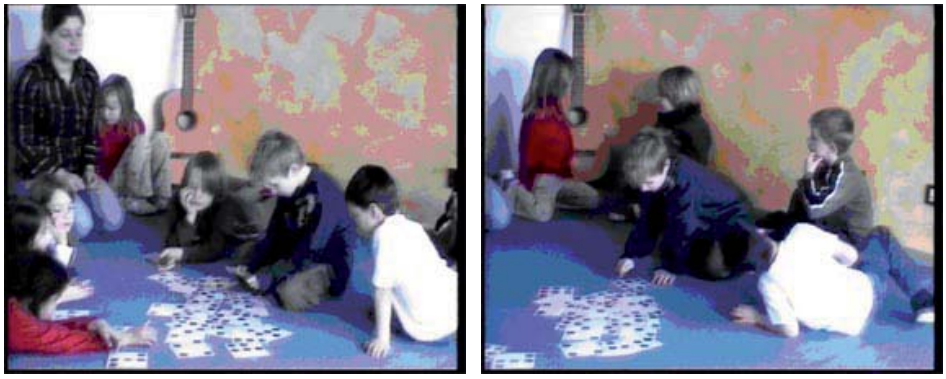
C. Tatáž úloha byla též vyzkoušena se smíšenou skupinou dětí v Kasselu, Německo, a to s dětmi z nultého a prvního ročníku. (Video1b)

Každé dítě si vybere kartu a ‚zapíše' číslo karty na záda jiného dítěte, které vyhledá mezi kartami rozmístěnými na podlaze příslušná seskupení.



Obr. N27

Protože ani v této úloze nebyla rychlost podstatná, mělo každé dítě čas vyhledat požadované karty a pokud se mu nedařilo rozeznat seskupení, mohlo tečky spočítat, jak je zřejmé z obrázku N28.



Obr. N28

Experiment 2

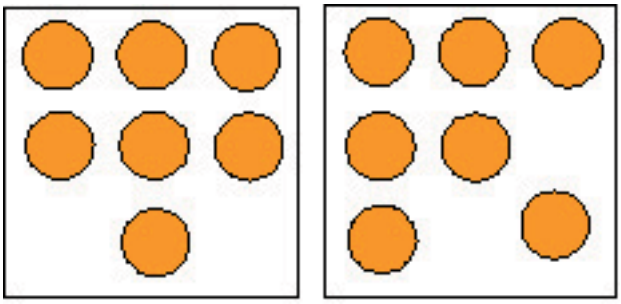
Tato úloha, v níž učitelka ukazuje dětem různá seskupení pomocí zpětného projektoru vždy na 1 nebo 2 sekundy, byla realizována v první třídě, kde už žáci znali čísla do deseti. Učitelka pak ukázala kartu na několik sekund, skryla ji a děti měly určit počet teček. Učitelka používala karty od 6 do 9 – karty typu z WS2b (Video2a).

Děti v této třídě neměly s tímto druhem činností žádné zkušenosti. Některým dětem se nedařilo rozpoznat počty prvků bez jejich počítání, takže celou dobu prohrávaly. Některé jiné se snažily body co nejrychleji spočítat, ale neměly na to dost času – proto žádaly učitelku, aby jim ukazovala karty po delší dobu. Nakonec bylo jen několik dětí schopno odpovědět velmi rychle.

Obr. N29

Děti hra skutečně zaujala a během druhého experimentu se zjevně snažily o rychlé rozpoznání počtu prvků. Některé z nich se snažily karty si zapamatovat, jak vysvětlily později, ale tento pokus nebyl úspěšný, protože existovalo mnoho různých karet.

Mezi dvěma skupinami dětí, které několikrát odpověděly správně, se na konci druhého experimentu rozvinula zajímavá diskuze. „Jak dokážeš počítat tak rychle?" zeptal se chlapec dívky, které se při tomto experimentu viditelně dařilo. „Já to nepočítám," řekla dívka, „já ty tečky dám dohromady!" Například na následující první kartě dala dohromady 6 a 1. Tato strategie byla dobrá, ale nebyla úspěšná s typy karet, které jsou vpravo na obrázku N30.



Obr. N30

Mezi dětmi se našla jiná dívka, která byla ještě rychlejší.

„Ty sčítáš opravdu rychle!" řekla první dívka. „Já nesčítám, já odečítám od devíti," řekla druhá dívka. To byla zajímavá diskuze o strategiích, skutečně užitečná pro zbytek třídy, pokud se jednalo o (relativně) velká čísla. Jiné děti ji začaly používat a v závislosti na jejich numerických znalostech nalézaly správné odpovědi rychleji. Děti, které byly schopny říci, že 9 minus 2 se rovná 7, byly skutečně rychlé, zatímco ty, které musely počítat pozpátku „9, 8, 7,…", byly pomalejší. Ale doba potřebná k odpovědi se překvapivě zlepšila u celé třídy.

B. Tatáž úloha byla také vyzkoušena stejnou skupinou dětí v Kasselu, Německo (Video2b). Ze zaznamenané prezentace je zřejmé, že některé děti dokážou rozeznat množství na kartě. Většinou se přitom jedná o „malá“ množství (do 5) nebo se jedná o seskupení jim již známá (například ta, která se vyskytují na kostce), zatímco velkému počtu dětí je tato forma určování počtu prvků cizí.

Obr. N31

Experiment 3

A. Úloha, v níž děti hrají ve dvojicích s kartami v ruce, byla vyzkoušena v prvním ročníku ZŠ v Kasselu, Německo. Každé dítě otočí kartu a ten, kdo má větší počet prvků, bere obě. Experimentující tým připravil ke hře dětí ve dvojicích laminované dvoubarevné karty.

Obr. N32

Děti snadno rozpoznaly karty s menšími hodnotami (do 5 bodů), ale u většího počtu prvků na kartách se uchylovaly k počítání.

Obr. N33

B. Úloha byla také vyzkoušena stejnou skupinou dětí v Kasselu, Německo (Video3).

Děti dokázaly rozeznat „malé“ karty na první pohled. V epizodě natočené na video můžeme vidět, jak rychle jsou děti schopny porovnat malé karty nebo karty, které nesou obrazec známý z hrací kostky, zatímco pro větší formace nebo pro formace neznámé se uchylují k počítání.

Obr. N34

Na prvním z následujících obrázků vidíme dítě porovnávající karty na první pohled. Na druhém obrázku dítě pro porovnání karet jednotlivé prvky počítá.

Obr. N35

Experiment 4

Úloha, v níž děti s použitím dominových karet sčítají do 5 nebo do 10, byla vyzkoušena stejnou skupinou dětí v Kasselu, Německo. Děti hrály ve dvojicích, každé dítě mělo v rukou balíček ‚malých' karet. (Video4)

Obr. N36

V obou zaznamenaných epizodách dokázaly děti určit celkový součet bodů na kartách, které držely v ruce, vhledem. V jiných případech se nicméně vracely k počítání.

Obr. N37

Experiment 5

Obr. N38

A. Navržená úloha představovala následující problém: „Šest dětí jde do divadla a sedne si do dvou řad po pěti sedadlech. Jaké existují možnosti jejich rozsazení?“ Tato úloha byla zkoušena na jaře roku 2005 v mateřské škole, která je součástí experimentálních škol A.U.TH.

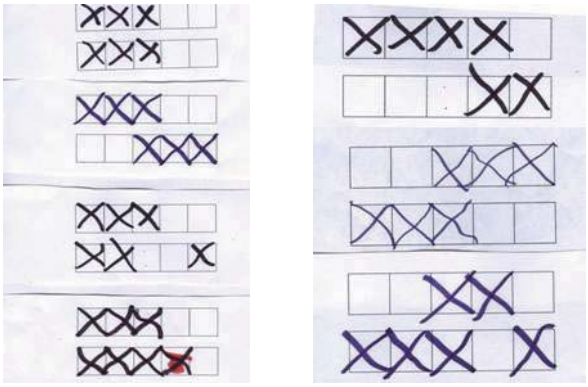
Před první skupinou dětí byly postaveny dvě řady po pěti židlích; skupina měla zkusit různá uspořádání. Jiné děti, rovněž ve skupinách, zaznamenávaly různá uspořádání na připraveném papíru.

V závěrečné části těchto pokusů měly děti najít nějaký systém, v němž svá řešení zorganizují (Video5).

Děti měnily v různých skupinách rozsazení na židlích, a tak našly různá řešení úlohy. Učitelka nejprve nechala děti zabírat různé židle. Po chvíli se děti ale začaly procházet po třídě, takže se rychle pokusila dokončit experimentální část a pokusy dětí zastavila.

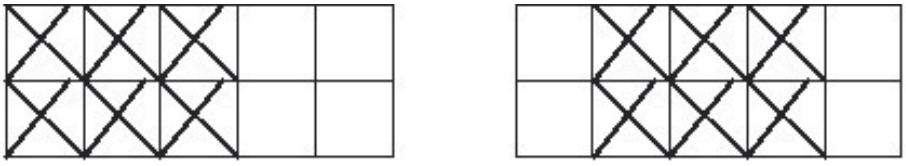
Těžko můžeme posuzovat, do jaké míry byla tato část úlohy realizována tak, jak byla navržena, protože třída neměla s tímto druhem činnosti žádnou zkušenost.

Nicméně druhá část se ukázala jako zajímavější. Každá skupina rozložila své nákresy na stůl a pokusila se je uspořádat v nějakém systému.



Obr. N39

Během této aktivity kladly děti zajímavé otázky, jako například: „Jsou tyto kresby shodné?“



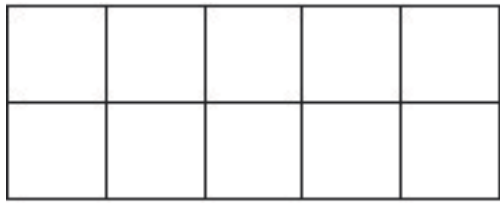
Obr. N40

Odpovědi závisely na tom, zda děti berou v úvahu prosté seskupení nebo uspořádání v rovině. Mohli jsme děti pozorovat, jak o tom diskutují, ale tato diskuze neprobíhala v celé třídě. Diskuze dětí osvětlila důležitý aspekt: děti, které nemohly snadno nahlédnout, že záleží pouze na počtu, nesnadno chápaly, že dané množství je nezávislé na své prostorové reprezentaci.

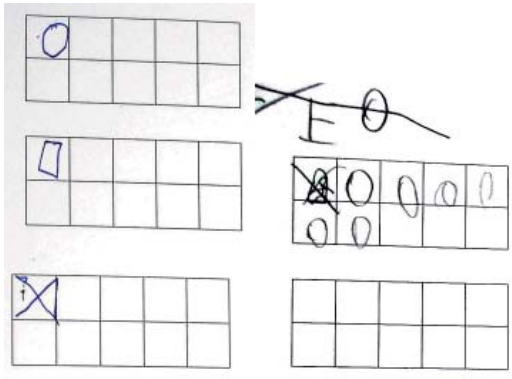
Obr. N41

Tato otázka byla tedy neočekávaná a učitelka nevyužila příležitosti k zahájení zajímavé diskuze. Některé skupiny nedošly ke shodě. V jiných skupinách děti přijaly „numerickou argumentaci" typu „3 vpředu, 3 vzadu, je to totéž", ale jedna skupina přijala za svůj argument, který vycházel z reálného aspektu situace: „Máme 3 a 3 děti vlevo, v druhém případě 3 a 3 děti uprostřed, takže to není totéž."

B. Tatáž úloha byla zadána dětem v první třídě jedné pražské základní školy. Děti zaznamenaly na připravený papír (obr. N42) všechna možná rozsazení šesti dětí ve dvou řadách po pěti sedadlech (obr. N43–N45).



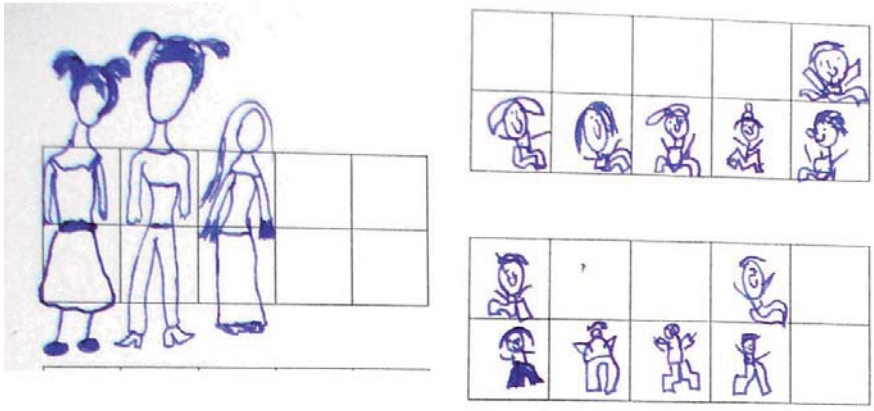
Obr. N42



Obr. N43

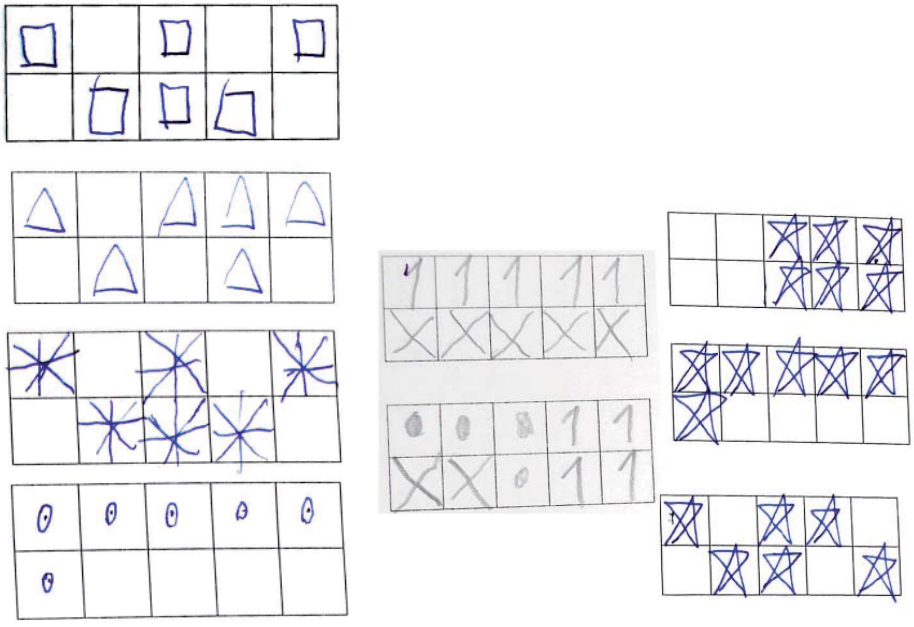
Pokud zařadíme výsledky žáků do kategorií, určíme žáky, kterým se nepodařilo dojít k žádnému návrhu – jak je vidět z obr. N44, kde se žákům nepodařilo dosáhnout ani nezbytného počtu šesti obsazených židlí.

Některé děti se pokusily dojít k řešením tak, že vytvářely ikonické nákresy a v určitých případech, jako je tomu na obrázku N44, se jim to podařilo.



Obr. N44

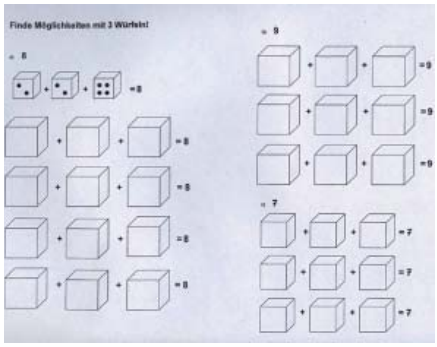
Konečně některé děti, které se pokusily vyřešit úlohu použitím čísel a jiných symbolů, došly k někdy velmi zajímavým odpovědím (obr. N45).



Obr. N45

Experiment 6

Úloha se třemi kostkami s různým součtem byla zkoušena v první třídě v Kasselu, Německo. Učitelka použila k prezentaci úlohy ikonky kostky. Žáci měli napsat, jak složili nebo rozložili 8, 9 nebo 10.



Obr. N46

Většina dětí dokázala na tyto otázky dát správné odpovědi, neboť přechod od myšlenkové reprezentace k ikonické jim umožnil body spočítat. Při tomto postupu, kdy se jednotlivé tečky kreslí, nemůžeme poznat, zda děti body počítají po jedné, nebo sčítají celá množství na kostkách. Navržená změna úlohy nese s sebou změnu strategií, které jsou potřeba k jejímu vyřešení.

Experiment 7

Úloha, v níž dítě rozdělí v rukou určité množství zápalek, ukáže jednu ruku tak, aby počet zápalek byl vidět, a druhé dítě má určit, kolik je schováno, byla realizována učitelkou na základní škole v Soluni, Řecko.

V prvním (pozorovaném) pokusu vyvolala učitelka dvě dívky, dala každé z nich pět zápalek a vysvětlila jim, co mají dělat. Dívky to zřejmě uvedlo do velkých rozpaků, neboť nevnímaly celou situaci jako hru. Měly problém s pochopením, co mají dělat a říkat.

Po nich učitelka vyvolala dvojici chlapců, kteří reagovali s větší jistotou a zkusili hrát. Některé děti ve třídě začaly dělat totéž. To učitelce pomohlo uvědomit si, že aktivitu může ve dvojicích zkoušet celá třída, takže nechala děti pokračovat, jak si přály.

Tento první pokus nebyl příliš úspěšný, protože učitelka spontánní hru dětí vnitřně zcela nepřijala. Ale jak později vysvětlila, v dalších dnech viděla, že dětem se hra líbí. Děti říkaly, že připomíná jiné hry, které hrají se schováváním a ukazováním věcí, a pokračovaly v jejím hraní i mimo vyučování.

Experiment 8

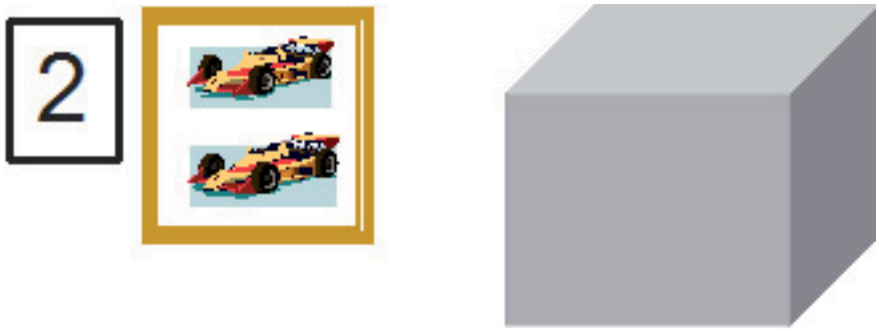
Tato úloha se jmenuje Kouzelná krabice: Na jedné kartě je zobrazeno, kolik dvojic, trojic nebo čtveřic (určitých předmětů) je v kouzelné krabici. Druhá karta ukazuje velikost skupiny (zda se jedná o dvojici, trojici atd). Děti mají určit, kolik je v krabici těchto předmětů celkem. Hlavním cílem úlohy je pochopení role každé karty v této situaci násobení: první karta – počet skupin, druhá karta – počet objektů ve skupině (ikonická reprezentace).

Realizace byla provedena ve třídě mateřské školy v Ioannině, Řecko.

Děti se snažily najít odpovědi při práci ve skupinách, přičemž měly před sebou kartu a ikonku objektů nacházejících se uvnitř krabice (dvojice dětí, trojice květin, čtveřice aut atd.).

Z této realizace nejsou k dispozici žádné videozáznamy, ale byly nahrány zajímavé dialogy mezi dětmi. Následující dialogy se uskutečnily ve skupinách dětí pětiletých a pěti až šestiletých.

Byla ukázána karta s číslem 2 a obrázek dvojice aut. První otázka zněla: „V krabici máme dvě dvojice aut. Kolik aut je v krabici – kolik byste napočítali, kdybyste počítali po jedné?“ Slovo dvojice tyto děti dobře znaly.



Obr. N47

Skupina 1

(Žák) 1: „Říkám, že tu jsou dvě auta!“
Ž2: „Ano, jsou dvě.“
Ž3: „Ne, ta dvojka (na kartě) je pro dvojice. Dvakrát dvě auta …“
Ž1: „Prohrajeme. Řekni 2 auta.“
…
Ž3 (Vedoucí skupiny prezentuje výsledek): „Paní učitelko, tak to ale není! Nejsou dvě, ale chtějí po mně, abych to řekl!“

Skupina 2

Ž1: „Jsou tam dvě dvojice!“
Ž2: „Když tam jsou dvě dvojice, jsou tam čtyři auta.“
Ž3: „Proč 4? Jsou tam dvě auta!“
Ž2: „Karta ukazuje 2 a máme dvě auta. Kolik je 2 krát 2? Je to 4.“
Ž4: „Co vím je, že dvě a dvě jsou 4.“
Ž2: „To je totéž.“

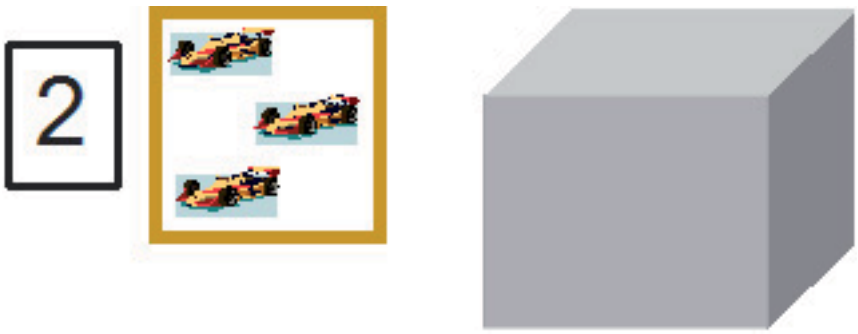
Skupina 3

Ž1: (šeptá) „Slyšel jsem (jméno) říkat, že jsou tam dvě dvojice. On se v číslech vyzná. Pojďme říct totéž!“
…..
Ž2: „Má pravdu. Já říkám, že jsou tam dvě a ještě dvě, čtyři!“
Ž3: (hlasitě) „Dvě karty. Je to na kartě.“
Ž2: „Karta říká, kolik je v krabici dvojic!“
Ž4: „Má pravdu! Řekni 4!“

Komentáře

Jak lze snadno nahlédnout, děti docházely k porozumění různým cestám vedoucím k výsledku s určitými obtížemi. Učitelka však věnovala hodně času jejich diskuzi, takže dětem začala jejich argumentace pomáhat v pochopení násobení. Děti navíc již v předchozích úlohách uvažovaly o skupinách, což jim velmi pomohlo.

Proto když byla při následující otázce ukázána karta s číslem 2, ale objekty v krabici byly v trojicích, odpovídaly děti rychleji.



Obr. N48

Ž1: „Vím, jak na to: 2 krát tohle, šest.“
Ž2: „3 a ještě tři, šest“
Žák vysvětluje jinému žákovi: „Předtím tam byly dvojice, nyní tam jsou trojice, to je rozdíl. Díváš se na takovouhle skupinu (ukazuje trojici). OK? Pak vidíš číslo na kartě, které říká, kolik takových skupin je v krabici. Je to jasné?“
Ž3. „Já vím, je jich tam šest; jsou to 3 a ještě 3 další.“

Jeden žák si není příliš jistý. Říká: „Tak je spočítáme!“ Zatímco jiný žák celkem otráveně reaguje: „Když se ti chce, uvidíš, že jich tam je 6.“

Experiment 9

Tato úloha (Válka čísel) byla vyzkoušena na základní škole v Kasselu, Německo, s dětmi z prvního ročníku (věk 6–7 let), které již znaly čísla do 20. V této hře hrály dvě skupiny proti sobě. První skupina vybrala číslo mezi 1 a 20; druhá skupina měla tři otázky na to, aby přišla na zvolené číslo. Jako vizuální pomoc byla na tabuli nakreslena číselná osa.

Děti se snažily formulovat dobré otázky, čímž se postupně seznamovaly s myšlenkou intervalu. Následující dialogy ukazují, jak děti hrály.

1. případ:

Skupina A: „Leží vaše číslo mezi 10 a 20?“ Skupina B: „Ne“
A: „Leží číslo mezi 3 a 6?“ B: „Ano“
A: „Leží mezi 3 a 5?“ B: „Ne.“
A: „Tak to může být jedině číslo 6!“

Speciální případ – dítě používá pravidlo: řekne-li se mezi 10 a 20, znamená to včetně čísel 10 a 20.

A: „Je vaše číslo mezi 10 a 20?“ B: „Ano.“
A: „Je číslo někde mezi 1 a 10?“ B: „Ano.“
A: „Tak to může být jedině číslo 10!“

Experiment 10

Paměťová hra s kartami nakreslenými dětmi byla vyzkoušena v prvním ročníku základní školy v Kasselu, Německo. Děti měly karty, na nichž byly nakreslené různé obrázky (děti, ptáci, sluníčka atd.) v různých počtech. Bylo již zmíněno, že kresby obsahují mnoho nadbytečných prvků, které obvykle nelze pravidelně uspořádávat, což ztěžuje určování počtu vhledem. To se zřetelně odrazilo v obtížích, které děti měly s nacházením karet se shodným počtem prvků, i když byl počet prvků malý.

Nehledě na obtíže žáků rozeznat počty na první pohled, už samotná forma reprezentace množství podporuje počítání, spíše než že by od něj odrazovala (Video6).

N7 Obecné komentáře

Zkušenosti s realizacemi úloh této kapitoly ve třídách ukazují na klíčovou roli pedagogických přístupů při rozvoji matematického chápání pojmu.

Z naší práce v projektu zřejmě plyne obecné konstatování, že nezávisle na důležitých a zajímavých úlohách a organizaci kurikula v jednotlivých zemích je žákův rozvoj znalostí silně vázán na zvolené edukační strategie.

I přes rozmanitost materiálů a vyobrazení ve školních učebnicích a ve třídách učitelé zjišťují, že žákovské myšlenkové reprezentace aritmetických jevů jsou slabé a chápání pojmu čísla je pouze částečné, pokud nenavrhnou a nerealizují značný počet aktivit pro určování počtu vhledem.

Tři země, v nichž byly úlohy zkoušeny, mají různá kurikula, pracovní materiály a učebnice. Vzdělávání a praktické proškolování jejich učitelů se rovněž liší. Učitelé ve všech zemích vyjadřovali nicméně stejné výhrady k navrženým úlohám a se stejnými obtížemi poznávali, jak vnést do vyučování odlišný aspekt rozvoje chápání čísla. Není jasné, zda považují aktivity pro určování počtu vhledem za důležité či ne, protože se více zajímají o výuku používající počítání po jedné, a jak se nám zdá, jen málo se zabývají myšlenkovými reprezentacemi čísel u dětí a způsoby, jak je rozvíjet.

Různé realizace úloh poskytly učitelům příležitost získat zkušenost se strategiemi dětí pro rozpoznávání počtu prvků, které jim mohou pomoci blíže se seznámit se vztahy mezi čísly, zlepšit jejich dovednosti skládat a rozkládat počty prvků a rozvíjet pamětné sčítání a odčítání. Jen málo dětí dovedlo určovat počet vhledem; zaznamenat zřejmý pokrok v této oblasti by vyžadovalo mnohem více praxe.

Jinou oblastí, v níž by bylo zajímavé provádět mezinárodní srovnání, je slovní vyjádření čísel a jejich role. Přestože symbolická reprezentace čísel je ve všech jazycích zúčastněných zemí stejná, slovní vyjádření čísel se liší. Těmto rozdílům odpovídají rozdíly v druzích učebních úloh a obtížích dětí. V řečtině jsou například čísla jedenáct a dvanáct nová slova (jako dvacet) a zbytek je deset-tři, deset-čtyři nebo třicet, čtyřicet atd. V češtině je tomu jinak. Tento aspekt by měl být při rozvoji chápání čísla u nejmenších dětí také brán v úvahu.

Literatura

Barody, A. J. (1987). *Children's Mathematical Thinking*. N.Y: Teachers College Press.

Baturo, A. R., & Cooper T. J. (2001). Manipulating virtual materials and using 'Office' software to develop primary mathematics concepts. In van den Heuvel-Panhuizen, M (ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Netherlands: PME.

Brown, M. (2002). Researching Primary Numeracy. In Cockburn, A. & Nardi, E. (eds.). *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. pp. 15–10. Norwich, New Anglia.

Clements, D.H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it. *Teaching Children Mathematics*, March. USA : NCTM.

DfEE (1999). *The National Numeracy Curriculum: Handbook for primary teachers in England.* London: DfEE.

Gervasoni, A (2005). Using growth points to describe pathways for young children's number learning. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. RF03: A progression of early number concepts. Vol. 1, pp. 170–202. Melbourne: PME.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In Nunes, T. & Bryant, P. (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International perspective* (pp. 315–345). Hove: Psychology Press.

Gray, E. & Pitta, D. (1996). Number processing: Qualitative differences in thinking and the role of imagery. In Puig, L. & Guitiırrez, A. (eds.), *Proceedings of 20 International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4*, pp. 155–162. Valencia: Spain.

Gray, E., Pitta, D., & Tall, D. (2000). Objects, actions, and images: A perspective on early number development. *Journal of Mathematical Behavior, 18*, pp. 401–413.

Hughes, M. (1986). *Children and Number Sense.* Oxford: Basil Blackwell.

Lopez- Real, F.& Ngan Ng, S.S. (2004). Early Mathematics Teaching: The relationship between teachers' beliefs and classroom practices. In Johnsen Hoines, M. & Flugestad, A.B. (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3, pp. 213–220. Norway: Bergen University College.

Mansfield, H., Pateman, N.A. & Bednarz, N. (1996). *Mathematics for Tomorrow's Young Children*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mulligan, J. T., Prescott, A. & Mitchelmore, M. (2004). Children Development of Structure in Early Mathematics. In Johnsen Hoines, M.& Flugestad, A.B. (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3, pp. 339–400. Norway: Bergen University College.

NCTM (2003) *Standards for School Mathematics: Number and Operations*. http://standards.nctm.org/document/chapter 3/numb.htm

Nicol, C., Kelleher, H. & Saundry C. (2004). What a simple task can show: Teachers explore the complexity of children's thinking. In Johnsen Hoines, M. & Flugestad, A.B. (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, pp 145–152. Norway: Bergen University College.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Education Studies in Mathematics, 33*(2), 203–233.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Thomas, N., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representations and cognitive structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 117–133.

Steffe, L.P. & Cobb, P. (1988). *Constructing Arithmetical Meanings and Strategies*. N.Y.: Springler – Verlag.

Van de Walle, J. & Bowman, Watkins, K. (1992). Early Development of Number Sense. In Jensen, R. (ed.), *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics.* pp. 127–150. N.Y.: MacMillan Publishing Co.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *Children Learn Mathematics*. The Netherlands, Freudenthall Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculun Development.

Wright, R. J., Martland, J., Stafford, A. & Stanger, G. (2002). *Teaching number: Advancing skills and strategies.* London: Paul Chapman Publications/Sage.

PRAVIDELNOSTI VEDOUCÍ K ALGEBŘE

Graham Littler, David Benson

P1 Úvod

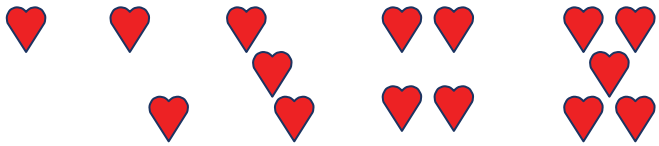
Pravidelnosti jsou podstatnou součástí matematiky. Schopnost žáků a studentů všech věkových kategorií pravidelnosti rozpoznat je důležitá pro rozvoj jejich matematického chápání. Pravidelnosti nacházíme ve všech oblastech matematiky – v aritmetice, kombinatorice, algebře, geometrii, statistice i v teorii her.

Ve Velké Británii se pravidelnosti tradičně nejvíce využívají v určování posloupností (aritmetických, geometrických aj.), s nimiž se žáci běžně seznamují na gymnáziích (od věku 16 let). Nicméně v soudobém pojetí učení mají pravidelnosti mnohem širší význam, počínaje přirozenými čísly používanými v aritmetice již od předškolního věku, kde každé následující číslo je určeno přičtením jedničky k číslu předchozímu:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	+1	**+1**	**+1**	**+1**	**+1**	**+1**	**+1**	**+1**	**+1**

Posloupností vyjádří žáci pravidelnost, kterou objeví experimentováním s jistou algebraickou funkcí, například $d + š = 10$, kde d je délka a $š$ šířka všech pravoúhelníků, jejichž obvod je 20 jednotek (viz úloha P19 a P33).

Díky své samotné podstatě je mnoho pravidelností (zákonitostí) spojeno s jevem uspořádání. V raném období práce s čísly děti rozeznávají počet objektů (symbolů) snáze, jsou-li objekty, které počítají, sestaveny v nějakém obrazci, jako je tomu např. u domina nebo hrací kostky. Zjednodušení práce s čísly prostřednictvím obrazců se projevuje i v symbolismu, který nacházíme na hracích kartách (obr. P01).



Obr. P01

Později žáci zkoumají soubory dat, aby objevili nějaký vztah mezi, řekněme, dvěma parametry. Na úrovni vyšších ročníků prvního stupně budou pak schopni tento vztah slovně vyjádřit bez použití symbolů. To přirozeně povede k rozvoji schopnosti žáků vnímat pravidelnost (zákonitost) danou algebraickou funkcí nebo rozložením statistických dat. Je také důležité, aby žáci rozpoznávali algebraické funkce v jejich grafické reprezentaci (grafickém znázornění), což jim umožní pochopit vztahy mezi parametry a porozumět mnoha otázkám, jež zůstávají některými učiteli nezodpovězeny, jako např.: „Když řešíte soustavu dvou lineárních rovnic, jaká jsou možná řešení?“ nebo „Jaké jsou možné kombinace kořenů kvadratických rovnic ve smyslu reálných, shodných a komplexních řešení?“ Tyto a další otázky se dají jednoduše zodpovědět, jestliže mají žáci názornou představu, jak daná funkce vypadá.

Věříme, že větší důraz na rozpoznávání pravidelností a na experimentální úlohy, v nichž se pravidelnosti tvoří a následně zobecňují, otevírá přirozeným způsobem cestu k používání symbolismu a k rozvoji algebraického myšlení, které se jeví jako přirozené rozšíření aritmetiky. Další úhel pohledu na tento proces spočívá v tom, že je založen na paradigmatu konstruktivismu ve vyučování a učení

Doufáme, že úlohy v této kapitole pomohou žákům rozvinout jejich schopnosti tvořit posloupnosti, experimentovat, zkoumat, představovat si, usuzovat, vyslovovat hypotézy, generalizovat, sbírat data, zobrazovat i vyhodnocovat je a jejich grafy, vyvozovat závěry a sdělovat své porozumění matematice, kterou se zabývají.

P2 Struktura kapitoly a její použití

Většina následujících úloh závisí na tom, jak učitel používá konstruktivistické metody vyučování. Učitel působí jako facilitátor, jako ten, kdo učení svým žákům zprostředkovává, a žáci za své učení přebírají více zodpovědnosti. Učitel by tedy měl žákům poskytnout zajímavé problémy, které žáci zkoumají a hledají odpovědi na otázky dané úlohy, ale i na otázky, které vzniknou během práce na úkolu. Žáci použijí dříve získané znalosti k nabytí znalostí nových a k nalezení souvislostí mezi

jednotlivými poznatky uloženými v jejich paměti. Používání tohoto vyučovacího přístupu znamená, že pro učitele by se mělo stát běžné reagovat na otázku žáka nikoli odpovědí, ale další otázkou obsahující nápovědu nebo nasměrování. Například slovy „Co když....?“ nebo „Zkusil jsi....?“.

Naší snahou je, aby učitelé sami pocítili přednosti tohoto přístupu tím, že jej poznají sami na sobě, sami prožijí radost z objevování nového nebo porozumění znalostem, kterých nabyli dříve. Jedním z rozdílů tohoto přístupu k vyučování oproti přístupům tradičním je skutečnost, že učitelé nemohou přesně naplánovat, co se při hodině stane. To znamená, že učitelé, kteří používají konstruktivistické paradigma, by si měli každou úlohu před jejím řešením se žáky sami důkladně projít tak, aby se ubezpečili, že jsou připraveni na otázku od žáka, který úlohu řeší odlišným způsobem než oni.

Kapitola je rozdělena do dvou podkapitol. Každá z nich je pomyslně rozdělena do tří skupin podle věku žáků, jak je uvedeno v předmluvě (A – 5 až 8 let, B – 7 až 12 let a C – 11 až 15 let). Cíle kapitoly, označené jako PG01 až PG29, jsou v první podkapitole. Vycházejí z odpovídajících (pravidelností se týkajících) částí různých osnov používaných v různých zemích Evropy. Druhá podkapitola obsahuje úlohy vztahující se k jednotlivým cílům a označené jako P01 až P35. Cíle a úlohy jsou propojeny jednoduchým hypertextovým systémem. Ke každému cíli existuje alespoň jedna úloha uvedená odkazem na konci znění cíle. Kliknutím na číslo úlohy se dostanete přímo k jejímu zadání.

Učitel by si měl nejprve stanovit, jakým nejbližším dalším tématem se potřebuje v hodinách matematiky zabývat. Pak je možné podívat se na cíle kapitoly a zjistit, zda nějaký z nich toto téma nepokrývá. Úlohy jsou sice seskupeny zhruba podle věku, ale učitelé znají schopnosti svých žáků nejlépe a vědí, čím se dosud v dané oblasti zabývali. To jim umožní najít vhodné úlohy pro žáky bez ohledu na věkové skupiny, které jsou u úloh uvedeny.

Ve většině případů jsou úlohy popsány jako jeden z experimentů, který může být pro práci s daným cílem zvolen. Řada úloh může být rozšířena, což je ponecháno na učiteli a jeho znalosti třídy, přičemž v některých případech je učiteli předložena výzva k úvaze o takovém rozšíření. V úloze P16 je takové možné rozšíření předvedeno.

Ve výsledcích mnoha úloh je pravidelnost (zákonitost) vyjádřena algebraickým výrazem. Některé z nich jsme získali od žáků ve věku 9 – 10 let, například výsledky úloh P12 a P18, ale učitel této třídy se k nim s žáky dostával dlouhodobou prací. Očekáváme, že za normálních okolností budou žáci v tomto věku schopni popsat obecný případ slovy, ale ještě ne v symbolickém tvaru.

Experimenty v praxi

Mnohé úlohy byly mimo Velkou Británii vyzkoušeny ve třech dalších zemích účastnících se projektu. Forma zadání žákům je v této sekci obvykle uvedena v přípa-

dech, kdy se liší od původního zadání, spolu s popisem práce s tím spojené a s poznámkami o efektivitě realizace úlohy. V poslední části kapitoly lze najít ukázky z těchto realizací. Zároveň je na konci každé úlohy, k níž existuje ukázka, vložen hyperlink „Experiment…“.

P3 Cíle kapitoly

Cíle úrovně A

PG01 – Rozeznat vznik a význam pravidelnosti (P01).
PG02 – Posílit pochopení významu čísla pomocí pravidelného uspořádání bodů reprezentujících číslo jako například na hracích kostkách a dominu (P02).
PG03 – Poznat nerovnost a rovnost pomocí vzájemně jednoznačného přiřazování, více než, méně než, stejně jako, rovná se (P03).
PG04 – Rozeznat podle vzhledu lichý a sudý počet, rovnosti „sudý + sudý = sudý“, „lichý + lichý = sudý“ a „lichý + sudý = lichý“ (P04).
PG05 – Opakovat jednoduché pravidelnosti pomocí manipulace s materiálem pro podporu osvojení násobilky (P05, P06).
PG06 – Vytvářet obrazce pro demonstraci komutativity sčítání a násobení (P07).

Cíle úrovně B

PG07 – Pochopit násobení a zákonitost v násobilce jednak jako opakované sčítání, jednak pomocí stovkového čtverce (Příloha 8). Používat obrazce tvořené násobky ve stovkovém čtverci k určování pravidel dělitelnosti (P08, P09).
PG08 – Umět znázornit násobilku grafem, porozumět jí a používat ji. Používat posloupnosti vytvořené s využitím násobilky, umět najít n-tý člen (P10).
PG09 – Vyšetřovat trojúhelníková čísla vyjadřující součty prvních n přirozených čísel (P11, P25).
PG10 – Vyšetřovat čtvercová čísla (druhé mocniny čísel), zákonitosti platící pro všechna čtvercová čísla, sudá a lichá čtvercová čísla, rozdíly mezi čísly v posloupnostech (P12, P13, P14).
PG11 – Vyšetřovat jevy, jako jsou číselná dvojčata a jejich spojitost s obrazcem, který tvoří ve stovkovém čtverci (P15).
PG12 – Experimentovat např. s rigiditou (pevností jejich konstrukce) rovinných obrazců k určení součtu jejich vnitřních úhlů mnohoúhelníků, zobecnit pro n-úhelník (P16).
PG13 – Vytvářet pravidelnosti formované ve 2D i 3D geometrických obrazcích (P11, P12, P13, P14).

PG14 – Vyšetřovat pravidelnosti například experimentováním s pravoúhelníky s konstantním obvodem či obsahem ke hledání vztahů mezi jejich rozměry. Vyjádřit tyto zákonitosti slovy a nakonec i symboly. Zobrazit získané údaje grafem, pozorovat jeho tvar ve vztahu k vyjádřené zákonitosti (P17, P18, P19, P20, P21.

PG15 – Vyšetřovat přímou a nepřímou úměrnost pomocí jednoduchých příkladů (P19, P20).

PG16 – Zkonstruovat obrazce dané „šitím křivky", jako $n \rightarrow (n-10)$, na dvou přímkách, $n \rightarrow 3n$, na kruhu (P23).

Cíle úrovně C

PG17 – Najít zákonitost číselné posloupnosti (P25).

PG18 – Experimentovat a vyšetřovat problémy vedoucí ke zobecnění, jež lze vyjádřit symbolicky (P26, P27).

PG19 – Hledat pravidelnosti uspořádáním různých objektů do geometrických formací, do náhodných seskupení a do číselné symbolické formy pro nalezení jednoho či více zobecnění v závislosti na daném uspořádání (P24).

PG20 – Vyšetřovat, jak mohou pravidelnosti podporovat schopnost žáků zobecňovat a předpovídat fakta týkající se posloupností – využitím procesu „Podívej se, udělej, řekni" (P24, P26, P27).

PG21 – Řešit úlohy „Co když…?", které mohou být rozšířením mnoha úloh úrovně B a při nichž jde o určení, zda se úloha změní, změní-li se hodnota konstanty nebo parametru (P25, P26).

PG22 – Vypracovat a rozvíjet logické přístupy a strategie např. promýšlením zákonitosti pro malá n s cílem dostat se k zákonitosti pro velká n (P28).

PG23 – Uvažovat o zákonitostech obsahující extrémně velké a extrémně malé jevy k vytvoření raných představ o limitách (P34).

PG24 – Modelovat pravděpodobnostní rozdělení experimentálně a srovnávat je s teoretickými rozděleními (P30).

PG25 – Vytvořit a zobrazit soubor údajů pro nalezení modusu nebo modální skupiny (P31).

PG26 – Vyjádřit zákonitosti různými způsoby a zjistit, které z těchto způsobů pomohou nebo naopak znesnadní hledání vztahů (P32).

PG27 – Pomocí vhodných experimentů nalézt zákonitosti v souborech souřadnic bodů. Jejich vynesením v souřadnicovém systému vytvořit grafy lineárních a kvadratických funkcí. Určit vztahy mezi souřadnicemi (P33, P34).

PG28 – Vyšetřovat obrazce zvětšené či zmenšené v daném poměru, rozšířit na 3D prostřednictvím modelů (P35).

PG29 – Vyjádřit přímou i nepřímou úměrnost v algebraickém tvaru (P27, P33, P34).

P4 Úlohy

P4.1 Úlohy pro úroveň A

Úloha P01

Začínáme jakýmkoli číslem mezi 0 a 9. Úlohou žáka je vytvořit obrazec z daného počtu mušlí nebo jiných objektů, přidat jednu a vytvořit nový obrazec nebo ji připojit k existujícímu obrazci.

Srovnejte obrazce vytvořené žáky s obrazci na dominu a zjistěte, zda a do jaké míry se liší. Které obrazce jsou pro žáky nejsnazší k určení počtu prvků?

Komentář

Nechte žáky vytvořit nejprve jejich vlastní obrazce a pozorujte, zda rozmístili mušle jen náhodně nebo do obrazce známého například z hrací kostky. Hrajte hry využívající kostku nebo domino na podporu schopnosti rozeznat počty a pak zkuste zadat úlohu znovu, abyste zjistili, zda žáci rozmístili své mušle do obrazců viditelných na kostce.

Poznámka: Můžete si vytvořit vlastní domino, dejme tomu do 5, v němž na jedné straně domina bude obrazec z bodů a na druhé číslice.

Úloha P02

Dejte každému žákovi hromádku žetonů a nechte je rozmístit žetony do dvojic, trojic, pětic atd. v obrazcích, které vidí na kostce a dominu, na podporu představy násobení.

Komentář

Kolik dvojic lze vytvořit z dané hromádky žetonů? Zbývají nějaké? Jaké jsou typy otázek, které lze v této úloze položit? Pokud jsou žáci připraveni přijmout tuto úlohu v symbolické formě, může ji doprovázet mluvené slovo jako: 2 a 2 a 2 a 2. Jsou to čtyři dvojice, které zapíšeme jako $2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 =$ (Kolik dohromady?) 8.

Úloha P03

Rozdejte dvě skupiny objektů, třeba fazole a mušle. Je více fazolí než mušlí?

Komentář

Mohou to žáci zjistit bez počítání? Tento druh úlohy rozvíjí využívání vzájemně jednoznačného přiřazování a vztahů jako „více než“, „méně než“, „stejně jako“

a „rovná se“. Vzájemně jednoznačným přiřazováním míníme činnost, kdy žáci přiřazují k sobě vždy jednu fazoli a jednu mušli, dokud se všechny kusy jednoho typu materiálu nespotřebují. Tak mohou žáci zjistit, čeho bylo více nebo nejvíce.

Úloha P04

Použijte zakoupený nebo vlastnoručně vyrobený materiál, který ilustruje lichá a sudá čísla a může být použit například na vizualizaci vztahu, že liché a sudé číslo dává liché číslo. Žáci s tímto materiálem pracují, aby odhalili vlastnosti součtu sudých a lichých čísel.

Obr. P02

Komentář

Jednoduché aktivity s pomůckami tohoto typu pomohou dětem vnímat lichá a sudá čísla. Sudá čísla lze vždy sestavit do pravoúhelníku a lichá čísla budou mít vždy „jeden puntík navíc“. Když se dvě lichá čísla spojí, tyto „body navíc“ k sobě padnou tak, že se vytvoří celý pravoúhelník; tedy dvě lichá čísla spolu sečtená vždy dají číslo sudé.

Výsledek

S + S = S; L + L = S; L + S = L.

Rozšíření

Platí toto pravidlo pro odčítání a/nebo pro násobení?

Úloha P05

Žáci mají vytvořit pravidelnosti různých typů (např. *aabaab*…) navlékáním korálků nebo stavěním z různobarevných kostek.

Komentář

Zpočátku může být tato úloha použita k rozvoji pozorovacích dovedností a schopnosti žáka zachovat zákonitost. Později může úloha vyvolat otázky jako: „Spojíme-li 17 korálků tímto způsobem, jakou barvu bude mít poslední korálek?“ nebo „Zastavíte-li se na korálku barvy *b*, co můžete říci o tom, kolikátý to bude?“

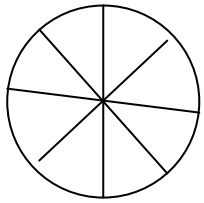
Úloha P06

Rozkrojíte-li dort rovně z jednoho bodu na jeho okraji k jinému bodu na jeho okraji, kolik kousků dostanete? Když ho nyní rozkrojíte znovu, kolik kousků to bude teď? Zkuste to dělat s dortem z modelíny a zapisovat přitom, kolik řezů jste provedli

a kolik kusů se objevuje. Můžete říci, kolik kusů vznikne po pěti řezech? Po deseti řezech? (Experiment 3)

Komentář

Mladší žáci často chtějí vést všechny řezy středem dortu, protože tak to vídávají doma. Pokud se s tím setkáte, zkuste žáky přimět k tomu, aby si všimli, k jaké pravidelnosti tady dochází, a diskutujte o tom, co se může stát, když „je řezů mnoho". Vyzvěte žáky, aby zkusili i jiné řezy.



Obr. P03

Výsledky

Pokud jdou všechny řezy středem dortu, dostanou žáci 2, 4, 6, 8, 10, … kusů dortu pro 1, 2, 3, 4, 5, … řezů. Obecně platí, že pro n řezů jdoucích středem dortu vznikne $2n$ kusů dortu. Pro výsledky řezů, které nejsou vedeny středem, viz úloha P17, str. 211.

Úloha P07

Nechte žáky pracovat s počitatelným materiálem, jako jsou korálky, mušle, fazole, aby viděli, že $3 + 4 = 4 + 3 = 7$ a pomocí uspořádání do jistého obdélníku mohli pozorovat, že $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$.

Komentář

Jednoduché výše popsané úlohy jsou velice užitečné a pokud jsou správně pochopeny, usnadní osvojování násobilky. Navíc, když je žák ve stádiu opakovaného sčítání, pak pokud zjistí, že získá stejný výsledek ať sčítá $a + b$ nebo $b + a$, snadno pochopí, že může vždy přičítat menší číslo k většímu, a tak si práci usnadňovat. Zároveň však musí být ukázáno, že tento princip neplatí pro odčítání. Řady zarovnané do pravoúhelníku jsou velice užitečné pro vizualizaci komutativity násobení, např. že $5 \times 9 = 9 \times 5$, otočením útvaru o 90°. Tento druh činností pomůže žákovi, když je tázán „Kolik je pět devític?". Můžeme pak slyšet odpověď typu „Ještě neumím násobilku devíti, ale $5 \times 9 = 9 \times 5$, což umím, 45!"

P4.2 Úlohy pro úroveň B

Úloha P08

Žáci pracují s žetony pro přípravu osvojení násobilky. Zjišťují, že násobit znamená sčítat shodné skupiny, takže

7 = 1 × 7 nebo 7 × 1 = 7
7 + 7 = 2 × 7 nebo 7 × 2 = 14
7 + 7 + 7 = 3 × 7 nebo 7 × 3 = 21 atd. (Exp. 4, str. 230.)

Komentář

Toto cvičení především žákům ukazuje, že násobení je opakované přičítání shodných skupin. V tomto stádiu by měl být podpořen také komutativní aspekt násobení. Úloha rovněž žákům umožňuje nevázat se příliš na paměť, ale uvědomit si, že pokud vědí, že 7×8 = 56, pak 7×9 = 7×8 + 7 = 56 + 7 = 63.

Úloha P09

Použijte stovkový čtverec (od 0 do 99), který najdete v příloze 8, str. 256. Požádejte žáky, aby počínaje číslem 2 každé druhé číslo vybarvili. Jaký obrazec, jaká pravidelnost vznikne? Jak vybarvení čísla rozdělí? Jakými číslicemi končí všechna lichá čísla? Jak poznáme, zda je číslo dělitelné 2?

Proveďte totéž počínaje číslem 10 a počítejte po deseti. Jak můžete zjistit, zda je číslo dělitelné deseti? Začnete-li v sedmi a počítáte po deseti, jaký vzorek, jakou zákonitost vidíte nyní?

Začněte na čísle 9 a počítejte po devíti. Co vám vzniklý vzorek připomíná? Co myslíte, proč vypadá vzniklý vzorek právě takto? Podívejte se na čísla, která jste vybarvili: čeho si můžete všimnout? Může vám to pomoci říci, jak zjišťovat, zda je číslo dělitelné devíti, nebo ne? Opakujte totéž počínaje trojkou a počítáním po třech. (Exp. 5, str. 231.)

Komentář

Tato úloha je dobrá pro opakování násobení a pro nalezení pravidel dělitelnosti. Například v první části by žáci střídavě měli vybarvit sloupce tak, že čísla v těch vybarvených končí na 2, 4, 6, 8 nebo 0. To rozdělí čísla na „lichá“ a „sudá“ – a odpověď na otázku „Co myslíte, jak můžete zjistit, zda číslo je dělitelné dvěma?“ je „Číslo musí končit na 2, 4, 6, 8 nebo 0“. To lze opakovat s dalšími pravidelnostmi.

Výsledky

(i) Svislé pruhy jako „fotbalové tričko“; „lichá“ a „sudá“; 1, 3, 5, 7, 9; končí na 2, 4, 6, 8 nebo 0.

(ii) Číslice na místě jednotek musí být nula; obrazcem je jeden svislý pruh čísel s číslicí 7 na místě jednotek (končícími vždy číslicí 7).
(iii) „Schodiště“ plus číslo 99; 9 = 10 – 1, proto pokud k číslu přidáme 10, jdeme k číslu hned pod tímto číslem a pro odečtení jedné jdeme o jedno číslo doleva. Tím dostaneme obrazec schodů; a) pro všechna vybarvená čísla platí, že jejich ciferný součet je násobek 9; b) každé číslo má svůj „symetrický protejšek“ – 27 a 72, 18 a 81 ….; c) číslice na místě jednotek se zmenšuje o jednu a číslice na místě desítek se o jednu zvyšuje; pokud je ciferný součet čísla násobek devíti, je číslo dělitelné devíti.
(iv) Platí to, co v případě (iii), ale ciferný součet každého označeného čísla je násobkem tří. Číslo je dělitelné třemi, je-li jeho ciferný součet násobek tří.

Úloha P10

Žáci mají nakreslit graf násobilky šesti s použitím hodnot pouze pro sudé násobky. Požádejte žáky, aby hodnoty pro liché násobky našli s použitím grafu. Proč je graf násobilky šesti strmější než graf násobilky dvou?

Komentář

Jde o další nástroj jak pro upevnění znalosti a dovednosti násobení, tak pro rozvoj dovednosti zakreslování bodů o daných souřadnicích a čtení hodnot z grafu.

osa x	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = 6x$	0		12		24		36	
$y = 2x$	0		4		8		12	

Výsledky

Pro násobky dvou musí na každé jednotkové posunutí po vodorovné ose připadnout 2 jednotky ve svislém směru, zatímco pro násobky šesti musí na každé jednotkové posunutí po vodorovné ose připadnout 6 jednotek ve svislém směru. Graf násobků šesti je tedy třikrát strmější než graf násobků dvou.

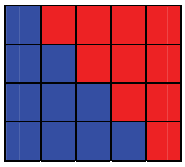
Úloha P11

Ve hře snooker, což je druh kulečníkové hry používající červené koule a šest koulí jiných barev, jsou na začátku hry červené koule uspořádány do trojúhelníku. Kolik koulí bude ve hře, tvoří-li červené koule v trojúhelníku čtyři řady? Kolik koulí bude potřeba pro trojúhelník seskupený v pěti řadách, dvanácti řadách, dvaceti řadách, n řadách? Pro tuto úlohu poskytněte žákům žetony.

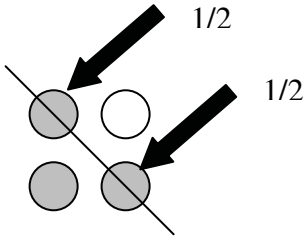
Čísla, která mohou být reprezentována celkovým počtem žetonů uspořádaných do trojúhelníku s narůstajícím počtem řad, kde každá řada má o jeden žeton více než řada předchozí, jsou známa jako trojúhelníková čísla. N-té trojúhelníkové číslo je součet prvních n přirozených čísel, tj. 1, 1 + 2, 1+ 2 +3 atd.

Výsledky

10, 15, 78, 210, $n(n + 1)/2$. Někteří žáci mohou zjistit, že pokud vytvoří dvakrát týž trojúhelníkový obrazec a otočí jeden z nich o 180° tak, že se spojí s prvním do pravoúhelníku, pak jedna strana pravoúhelníku je n, druhá strana je $(n + 1)$ a vzniklý obdélník je tvořen dvojnásobným počtem žetonů, než odpovídá zadání úlohy. Výsledný počet žetonů je tedy $n\ (n + 1)/2$. Žáci od deseti let věku nebo i mladší mohou být schopni vyjádřit obecný tvar slovy (spíše než ve formě algebraického výrazu), například by mohli říct: „Vynásob číslo číslem o jednu větším a tento součin rozpůl."



$\frac{1}{2}\ (1 \times b) = \frac{1}{2}[4 \times (4+1)]$



$(2 \times 2)/2 + 2/2 = 3$

Obr. P04

Úloha P12

Pro tuto úlohu použijte kostky. Požádejte žáky, aby položili na lavici jednu kostku a zaznamenali, kolik stěn mohou vidět, když se na ni dívají ze všech stran (nesmí zdvihnout kostku nad stůl). Pak k první kostce připojí druhou a spočítají a zaznamenají počet stěn, které mohou vidět. Žáci pokračují v přidávání kostek – postupně tvoří dlouhou řadu (staví kostky pouze na stůl, ne na sebe) – a při připojení každé další kostky vždy zaznamenají, kolik stěn právě mohou vidět. Kolik stěn vidí, mají-li 5, 10, 20, 100, n kostek? (Exp. 7, str. 234.)

Komentář

Tato úloha může být použita s osmiletými žáky k rozvoji jejich schopnosti zobecňovat. Je důležité, aby žáci při stavbě „vlaku" z kostek, měli vždy jednu stěnu kostky v kontaktu s podložkou, na které pracují.

Výsledek

U 5 kostek vidíme 17 stěn, u 10 – 32, u 20 – 62, u 100 – 302 a u n kostek vidíme $(3n + 2)$ stěn.

Úloha P13

Úloha podobná úloze P12 s tím rozdílem, že žáci stavějí kostky vzhůru jako věž, takže styčnou plochu s podložkou má pouze první kostka. Opět zaznamenávají počet kostek a počet stěn, které u daného počtu právě mohou ze všech stran vidět. Kolik stěn může být vidět u 5, 10, 20, 100, *n* kostek? (Exp. 7, str. 234.)

Výsledek

U pěti kostek vidíme 21 stěn, u deseti je to 41, u dvaceti je to 81, u sta je to 401 a u *n* kostek vidíme $(4n + 1)$ stěn.

Úloha P14

Řekněte žákům, že čtvercová čísla mají toto své jméno proto, že vyjádříte-li je pomocí kamenů, můžete je sestavit do čtverce. Nechte žáky začít s jedním kamenem, kolik dalších kamenů potřebují k vytvoření dalšího čtvercového čísla, dalšího a tak dále? Žáci zaznamenávají, kolik dalších kamenů pokaždé potřebují. Existuje jméno pro tato čísla? Žáci pravděpodobně znají čtvercová čísla do desátého čísla. Mohou použít informace, které právě získali, k určení třináctého čtvercového čísla, dvacátého čtvercového čísla? Požádejte žáky, aby zkontrolovali svou odpověď pomocí kalkulačky. Mohou s pomocí kamenů najít zákonitost pro (i) sudá, (ii) lichá čtvercová čísla? Jaké jsou rozdíly mezi dvěma čtvercovými čísly v každé z těchto dvou řad čtvercových čísel? Mohou je vysvětlit? (Exp. 5, str. 231.)

Komentář

Velmi často jsou žáci zvyklí na vytváření pravidelnosti pro normální posloupnost čtvercových čísel, kdy vidí, že k získání dalšího čtvercového čísla musí přičíst nejbližší liché číslo:

1		x o #
1 + 3 = 4		o o #
4 + 5 = 9 atd.	tedy 9 = 1 + 3 + 5	# # #

Chceme-li vytvořit „lichá“ a „sudá“ čtvercová čísla, je pro lichá čtvercová čísla třeba začít s jedním žetonem a obklopit ho osmi žetony – tak získáme 3^2. Tento čtverec opět obklopíme žetony … . „Sudá“ čtvercová čísla se tvoří stejným způsobem, ale žetony se začne obklopovat čtverec o čtyřech žetonech.

Výsledky

K předchozímu výsledku je třeba přičítat postupně 3, 5, 7… – tedy lichá čísla. Desáté čtvercové číslo je deváté čtvercové číslo + desáté liché číslo tj. 81 + 19 = 100, dvacáté čtvercové číslo je 361 + 39 = 400. Sudá čtvercová čísla jsou 4, 16, 36, 64… se vzájemnými rozdíly 12, 20, 28…, tedy každý další rozdíl je o 8 větší než rozdíl předchozí,

nebo může být zapsán jako (8 + 4), (16 + 4), (24 + 4). Lichá čtvercová čísla jsou 1, 9, 25, 49, … se vzájemnými rozdíly 8, 16, 24, …., což jsou násobky osmi. K pochopení důvodu pro tyto jevy pomůže vidět posloupnost lichých čísel pro sudá čtvercová čísla jako 1, 3, (5, 7), (9, 11), (13, 15), … a pro lichá čtvercová čísla jako 1, (3, 5), (7, 9), (11, 13) … .

Rozšíření

Můžete dokázat, že výše uvedené rozdíly se musejí vždy lišit o osm?

Úloha P15

Číselná dvojčata jsou dvojciferná čísla, která dají při sečtení stejný výsledek, jako když sečteme čísla s obráceným pořadím jednotek a desítek. Například 26 a 53 nejsou číselná dvojčata, protože 26 + 53 = 79 a 62 + 35 = 97. Najděte nějaká číselná dvojčata a označte jejich součty na stovkovém čtverci. (Viz Příloha 8, str. 256.) Můžete vysvětlit, kde tyto součty leží? Nyní na stovkový čtverec umístěte čtyři dvojciferná čísla, která splňují danou podmínku. Dá se říci něco o tom, kde tato čísla leží? Vyšetřujte to dále a zkuste zjistit, zda to platí u tří dvojciferných čísel tvořících číselná trojčata.

Komentář

To je pro žáky investigativní úloha, v níž mají nejprve najít pravidla pro tvorbu číselných dvojčat a pak uvidět pravidelnosti, které se objevují pouze při práci se stovkovým čtvercem.

Výsledky

Jedno z pravidel pro tvoření číselných dvojčat zní, že součet členů dvojčat musí být násobkem 11. Mnoho součtů členů dvojčat leží na hlavní diagonále stovkového čtverce, která jde od 0 do 99. Čísla, která jsou členy číselných dvojčat, leží na rovnoběžkách s hlavní diagonálou, které jsou od hlavní diagonály stejně vzdáleny. Součet tří čísel tvořících číselná trojčata je rovněž násobkem 11.

Rozšíření

Najděte tři další pravidla, která vám umožní tvořit číselná dvojčata. Dokažte, že součet členů číselných dvojčat musí vždy být násobkem 11.

Úloha P16

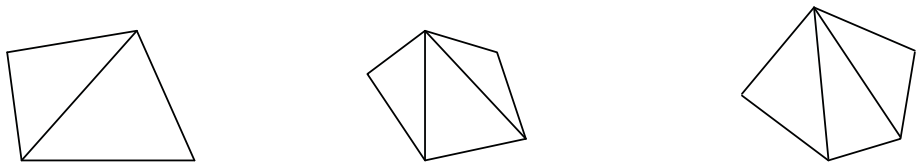
Použijte ‚geometrické proužky' (obdoba stavebnice Merkur) – proužky papíru k sestavení mnohoúhelníků o 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... stranách. Každý mnohoúhelník napíchněte na špendlík a zdvihněte nad stůl. Přitom se pouze jeden z těchto mnohoúhelníků nezhroutí. Který z nich to je? Nyní s použitím tohoto poznatku zajistěte s použitím minimálního počtu proužků, aby i všechny ostatní mnohoúhelníky byly pevné. Za-

pište do tabulky následující údaje: a) počet proužků, které tvoří mnohoúhelník, b) kolik trojúhelníků obsahuje mnohoúhelník, když je pevný, a c) součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka. Zjistěte součet všech vnitřních úhlů pro dvacetiúhelník, 100-úhelník a *n*-úhelník.

Komentář

Než zadáte žákům tuto úlohu, nechte je objevit, že součet úhlů trojúhelníku je 180°. Za tím účelem nechte žáky nakreslit jakýkoli trojúhelník pomocí pravítka, vystřihnout ho a vybarvit jeho tři úhly různými barvami. Žáci by pak měli tyto tři úhly odtrhnout nebo odstřihnout a položit je na schéma větrné růžice těsně vedle sebe tak, aby vrcholy všech tří úhlů ležely na průsečíku obou (vzájemně kolmých) čar větrné růžice a jedna strana prvního ústřižku byla částí jedné z těchto čar. Požadované „odvození" se objeví, jakmile jsou všechny tři ústřižky umístěny do popsané polohy.

Úloha je založena na faktu, že jediným vnitřně pevným (rigidním) útvarem je trojúhelník, což je používáno při konstrukcích staveb. Další mnohoúhelníky mohou být zpevněny umístěním výztuh jdoucích z jednoho vrcholu do jiného tak, aby se mnohoúhelníky skládaly z trojúhelníků, jak je ukázáno níže.



Obr. P05

Tato úloha může být zadána žákům na úrovni C v závislosti na tom, co již z geometrie znají. Autoři ji použili pro desetileté žáky.

Výsledky

Počet proužků	Počet trojúhelníků, z nichž lze útvar složit	Součet úhlů mnohoúhelníka
3	1	1×180°
4	2	2×180°
20	18	18×180°
100	98	98×180°
n	$n - 2$	$(n - 2) \times 180^o$

Pokračování

Za úlohou je třeba vidět situaci z reálného života, která ukazuje, že jediná pevná struktura je trojúhelníková. Žáci to mohou vypozorovat ve svém okolí například na mostních konstrukcích.

Úloha vede přirozeně ke zjištění, jaká je velikost úhlu v pravidelném mnohoúhelníku – vydělením výsledků v pravém sloupci odpovídajícími čísly v levém sloupci. Když tento údaj připojíme jako čtvrtý sloupec k výše uvedené tabulce, mohou žáci zjišťovat, které z pravidelných mnohoúhelníků lze složit do mozaiky, tedy sestavit tak, aby do sebe zapadaly. Možná bude na mozaiku třeba dvou různých mnohoúhelníků! Podívejte se na viktoriánské nebo románské vzory dláždění. Žákům můžete také položit náročnější otázku, zda lze v mozaice opakovat nějaký trojúhelník nebo nějaký čtyřúhelník. Žáci pravděpodobně zjistí, že nelze sestavovat mozaiku pouze z pravidelných pětiúhelníků. Existují pětiúhelníky, které do mozaiky sestavovat lze?

Úloha P17

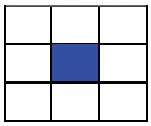
Kruh je dělen zvyšujícím se počtem přímek (řezů). Zaznamenávejte postupně narůstající počet přímek a souběžně narůstající počet částí, na které přímky kruh dělí. Můžete najít zákonitost? Pokud ano, kolik částí očekáváte po rozdělení kruhu dvaceti přímkami, tj. 20-krát, 50-krát, n-krát? Existuje jen jeden způsob, jímž lze přímkami kruh dělit? (Exp. 3, str. 226.)

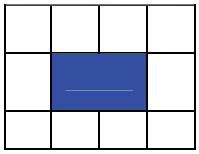
Výsledky

Pro přímky (řezy) jdoucí středem je počet částí dvojnásobkem počtu přímek (řezů), tedy $č = 2p$, kde $č$ je počet částí kruhu (kusů dortu) a p počet přímek (řezů). Pro paralelní řezy platí $č = p + 1$. Maximální počet částí $č$ pro počet náhodných řezů $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$ je $č = 2, 4, 7, 11, \ldots$. Počet řezů může být zapsán ve tvaru (1+1), (3+1), (6+1), (10+1), …, tedy p-té trojúhelníkové číslo plus 1. Dvacet přímek tedy rozdělí kruh na 211 částí, 50 přímek na 1 276 částí a n přímek rozdělí kruh na $[n\cdot(n+1)/2 + 1]$ částí.

Úloha P18

Obchodní společnost prodává stavebnicová zahradní jezírka, na jejichž obrubu jsou potřeba různé počty dlažebních kamenů v závislosti na velikosti jezírka. Velikost 1 vyžaduje 8 dlažebních kamenů, pro velikost 2 je třeba 10 dlažebních kamenů. Na obrázku P06 modré čtverce znamenají jezírko J a bílé čtverce znamenají dlažební kameny D. Šířka jezírka tohoto typu je vždy jeden dlažební kámen.





Obr. P06

Vytvořte tabulku o dvou sloupcích, která v prvním sloupci uvede velikost jezírka (číslo J) a ve druhém potřebný počet dlažebních kamenů D. Určete počet dlažebních kamenů pro jezírko velikosti 5, 10 a *n*. (Exp. 6, str. 232.)

Výsledky

Velikost jezírka	Počet dlažebních kamenů D
1	8
2	10
5	16
10	26
n	$2n + 6$

Alternativou k této úloze je požadavek, aby jezírko mělo vždy minimální obvod a skládalo se ze shodných čtvercových dlažebních kamenů.

Úloha P19

Tato úloha je jedním ze dvou experimentů, které žákům pomohou pochopit rozdíl mezi obvodem a obsahem. Druhým experimentem je úloha P20, str. 214. Potřebujete provázek dlouhý 20 jednotek. Jednotka odpovídá straně čtverce čtverečkovaného papíru. Žáci mají za úkol sestrojit co nejvíce pravoúhelníků se stranami celočíselné délky o obvodu 20 jednotek. (Provázek musí být při tvorbě pravoúhelníku napjatý.) Mají zaznamenat délku, šířku a obsah každého pravoúhelníku.

Podívejte se na údaje, které jste do tabulky zaznamenali. Vidíte vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníků? Dokážete vyjádřit povahu tohoto vztahu slovy? Nakreslete graf znázorňující vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníku. Můžete z grafu určit šířku pravoúhelníku, jehož délka je 7,5 jednotek? Nyní nakreslete graf závislosti obsahu na délce strany. Má pravoúhelník s největším obsahem nějaké zvláštní jméno? Dokážete si představit nějaký objekt, který vypadá podobně jako graf, který jste právě nakreslili?

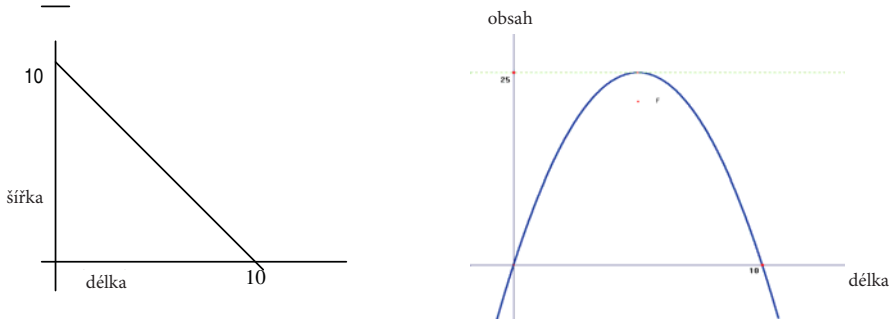
Komentář

Úloha může být realizována jako experiment, pokud vybavíme žáky provázky o délce vždy 20krát strana čtverce čtverečkovaného papíru, dále vhodnými (např. korkovými) podložkami a špendlíky. Nechte žáky připevnit provázk k papíru na podložce tak, aby provázek byl napjatý a délky stran pravoúhelníku, který je provázkem vymezen, byly dány celým číslem. Učitel také může umístit na tabuli prázdnou tabulku a vyzvat žáky, aby do ní zaznamenali údaje.

Výsledek

Žáci brzy z tabulky nebo obecně ze své práce na tabulce vidí, že *délka + šířka = polovina obvodu*, v tomto případě $d + š = 10$. Žákům nevadí používat první písmena slov, takže začínají používat symboly, které mohou nabývat libovolných hodnot. Vyjádřením vztahu je tedy $d + š = 10$ a jeho grafem je část přímky, jak je zobrazeno na obr. P07. (Stalo se nám, že žák si přál připojit čísla [10, 0] a [0, 10], když provázek napnul v jeho koncových bodech!)

Délka	Šířka	Obsah
9	1	9
8	2	16
7	3	21
6	4	24
5	5	25
4	6	24
3	7	21
2	8	16
1	9	9



Obr. P07

Žáci mohou z grafu vyčíst, že pro délku 7,5 jednotek dostaneme šířku 2,5 jednotek. Pravoúhelníkem s největším obsahem je čtverec. Grafem závislosti obsahu pravoúhelníku na délce jeho strany je část paraboly, která odpovídá trajektorii proudu vody a mnohým dalším přírodním či umělým jevům.

Rozšíření

Jak budete reagovat, když se žák ve třídě zeptá, má-li v tabulce uvést i dvojici [10,0] a [0,10]? Podívejte se, jak je přesně úloha formulována; splňuje návrh podmínky zadání?

Úloha P20

Dejte žákům 36 čtverců a požádejte je, aby sestavili co nejvíce pravoúhelníků, přičemž vždy musí použít všechny čtverce. Nechejte je zaznamenat údaje do tabulky. Pokládejte otázky jako: Dokážete určit vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníků? Dokážete tento vztah vyjádřit slovy? Nakreslete graf závislosti šířky na délce a všimněte si vzhledu grafu. Kdybyste byli farmáři a měli jste koupit 36 hektarů půdy, přičemž pozemek by směl být jen ve tvaru pravoúhelníku, pomůže vám tato úloha rozhodnout o tom, jaký pravoúhelník musí pozemek být, aby cena jeho oplocení byla co nejnižší? Pokud nejdelší a nejužší obdélník (36 × 1) dokážete podélně rozdělit na dva, jak dlouhý bude obdélník nyní? Když budete takto pořád pokračovat, zúží se obdélník někdy tak, že zmizí?

Komentář

Jedná se o úlohu podobnou úloze P19 s tím rozdílem, že nyní je konstantní obsah. Při řešení obou těchto úloh vznikne diskuze o tom, zda obdélník 9×1 je jiným obdélníkem než obdélník 1×9. Nechte rozhodnout žáky. Podle naší zkušenosti žáci na prvním stupni základní školy většinou říkají, že tyto obdélníky jsou různé.

Výsledky

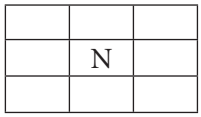
Délka	Šířka	Obvod
36	1	74
18	2	40
12	3	30
9	4	26
6	6	24

V závislosti na výše zmíněném rozhodnutí mohou být hodnoty šířky v rozmezí 1–4 jednotky vloženy do tabulky znovu, ale jako délky. Většina žáků si brzy všimne, že délka násobená šířkou se vždy rovná 36, takže dostanou vztah $d \times š = 36$. (Grafem tohoto vztahu je první kvadrant pravoúhlé hyperboly $d \times š = 36$). Při počítání obvodu žáci vidí, že mezi obvody jsou velké rozdíly, přičemž nejmenší obvod má čtverec. Farmář by tedy měl chtít koupit pozemek čtvercový, protože tak ho oplocení bude stát nejméně peněz.

Poslední část úlohy vede žáky k přemýšlení o grafech funkcí, které se limitně blíží k nekonečnu. Když se 36 jednotkových čtverců podélně rozdělí v polovině, bude výsledný obdélník 72 jednotek dlouhý a ½ jednotky široký, pak 144 jednotek dlouhý a ¼ jednotky široký. Mnoho žáků odpovědělo, že obdélník „nikdy nebude mít žádnou šířku."

Úloha P21

Dvacet osm vězňů má být umístěno v osmi celách kolem nádvoří (N) (viz obr. P08) tak, aby počty vězňů v řadách a sloupcích neprocházejících nádvořím byly stejné.



Obr. P08

Je uspořádání, které jste nalezli, jediné možné? Pokud ne, kolik uspořádání můžete najít? (Exp. 1, str. 224.)

Komentář

Tato úloha má značně průzkumný charakter. Na dané úrovni budeme sledovat zjednodušený způsob takového zkoumání.

Výsledek

Někteří žáci by mohli začít se 7 vězni v každé rohové cele, což by splňovalo danou podmínku. Tento přístup může být dále rozvíjen odebráním jednoho vězně z každé rohové cely a jeho posunutím do cely po pravé straně. Postupujeme-li z levé horní cely po směru hodinových ručiček, dostáváme tak (6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1) vězňů v jednotlivých celách. Tuto strategii můžeme opakovat pro (5, 2) (4, 3) (3, 4) (2, 5), (1, 6) a (0, 7) vězňů, čímž skončíme se 7 vězni v každé středové cele (v každé straně). (Exp. 1, str. 224.)

Další žáky nalezená řešení: Označme výše zmíněným způsobem jednotlivé cely písmeny a, b, c, d, e, f, g, h. Žáci umístili číslo 14 do pole a a e. Dále pak nalezli dalších 13 řešení, která jsou symetrická podle obou úhlopříček cg i ae. Dvojice polí (a,c) a (e,g) měly tyto hodnoty: (13,1), (12,2), (11,3), …, (2,12), (1,13), (0,14). Řešení (7,7) z toho vynecháme, neboť je již zahrnuto v předchozím řešení. Pozorný žák si mohl všimnout, že je-li číslo v poli a nebo c násobkem 3, pak tato čísla mohou být dále rozdělena, například (11,3) na (11,1,1,1) do polí (a,b,c,d). Tato metoda dává 26 dalších řešení. Jsou již všechna?

Úloha P22

Vezměte čtverec s jednotkovou stranou a zdvojnásobte délky jeho stran. Porovnejte nový obsah s původním obsahem. Nyní zjistěte obsah čtverců o stranách 3, 4, 5, 10, *n* jednotek. Zaznamenejte zjištění do tabulky a vyjádřete zákonitost mezi novými obsahy a původním obsahem slovy. Bude platit stejná zákonitost, začnete-li s krychlí o jednotkové hraně a budete hledat objemy krychlí o hranách 2, 3, 4, 5, 10, ..., *n* jednotek?

Komentář

Tato úloha má žákům ukázat, že zvětšování obsahu se vzrůstajícími rozměry rovinného útvaru není dáno lineárním vztahem. Cvičení se zvětšováním objemu může být velmi úspěšně provedeno např. s kostkami stavebnice LEGO. Požádejte žáky,

aby sestavili letadlo s dvěma různými délkovými rozměry (nebo budovu s věží se dvěma různými délkovými rozměry). Pak je požádejte, aby sestavili (geometricky) podobné těleso se všemi rozměry dvakrát tak velkými. Otázka, kterou nyní položíte, zní: „Kolik kostek potřebujete k vytvoření nového tělesa?“ Zkušenost ukazuje, že málo žáků, pokud vůbec nějaký, zdvojnásobí všechny tři rozměry (tato zkušenost se týká i dospělých!). Velmi často zdvojnásobí délku a někdy šířku, ale zřídkakdy i výšku.

Výsledky

Obsahy čtverců, jejichž délky stran jsou 2, 3, 4, 5, 10 jednotek, jsou 4, 9, 16, 25, 100 jednotkových čtverců. Tyto výsledky mohou být zapsány jako 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 10^2. Vyjádřeno slovně: zvětšíme-li strany čtverce n-krát, jeho obsah se zvětší n^2-krát. Pro objem platí: zvětšíme-li hrany krychle n-krát, její objem se zvětší n^3-krát. (Vhodné je experimentovat na čtverečkovaném papíru.)

Rozšíření

Jaký bude poměr obsahů dvou trojúhelníků, dvou čtyřúhelníků, dvou nepravidelných útvarů, …, když jeden z útvarů bude mít dvakrát větší rozměry než druhý?

Úloha P23

Narýsujte dvě přímky AB a BC, které se protínají v B. Od bodu B vyznačte na každé přímce stejně vzdálené body a očíslujte je od 1 do 9. Nyní spojte bod na AB s bodem na BC tak, aby součet čísel u spojovaných bodů činil 10. Na kruhu se 36 vyznačenými body od 1 do 36 připojte nejprve 1 ke 2, pak 2 ke 4 atd., tj. takto připojujte n ke $2n$. (Nápověda: vzpomeňte si na aritmetiku času a hodin. Jak obrazec vypadá?) Opakujte pro $n \to 3n$ a $n \to 4n$. Můžete předpovědět, jak bude obrazec vypadat, když budete připojovat n k $7n$?

Komentář

Jde o aktivitu především estetického charakteru, ale se značným významem pro žáky, kteří dosahují v matematice slabších výsledků. Tato úloha je dobrá pro odlehčení, lze ji využít k vytváření vzorů a obrazců pro dekoraci třídy a zároveň tím ukázat, jak lze takové obrazce tvořit pomocí velmi jednoduchých matematických představ. Žáci mohou pracovat s tužkou a papírem nebo je možné použít tenký karton, na němž lze vyšívat spoje barevnými bavlnkami. V první části úlohy nemusí být spojnice přímé, mohou být zakřivené. Nechte žáky využít fantazii, když uvidí, jaké obrazce mohou vzniknout; nechte je tvořit ptáky atd. Atraktivní obrazec může například vzniknout, jsou-li protínající se přímky v první části úlohy sousedními stranami čtverce a pro každou dvojici stran je při „řešení“ úlohy použita jedna ze čtyř vybraných barev.

Výsledky

V úloze používající kruh vytvoří postupné spojování n s $2n$ obrazec, jehož vnitřní obálka má jeden „hrot“, spojování $n \Rightarrow 3n$ vytvoří obálku se dvěma hroty atd. Vzniká vždy o jeden hrot méně, než je hodnota použitého činitele.

P4.3 Úlohy pro úroveň C

Úloha P24

Rozdejte žákům počitatelné objekty (fazole, mušle, dřívka, …) k vytváření různých posloupností jako 3, 7, 11, 15, … . Jaké jsou další dva členy posloupnosti? Jaký je dvacátý člen, padesátý člen, n-tý člen? Pokračujte s lineárními zákonitostmi jako 4, 7, 10, 13, …; 1, 6, 11, 16, 21,…; 3, 5,5, 8, 10,5, 13, … a 10, 4, –2, –8, … (Exp. 8, str. 236.)

Komentář

Zjistíte, že je užitečné zadat žákům tuto úlohu různými způsoby, například pomocí hromádek zápalek uspořádaných do geometrických obrazců nebo pomocí číslic. Pozorujte, co ve kterém případě žáci dělají. Jaký formát je pro určení n-tého členu pro daného žáka nejsnazší?

Výsledky

19, 23, 79, 199, $(4n - 1)$; 16, 19, 61, 151, $(3n + 1)$; 26, 31, 96, 246, $(5n - 4)$; 15,5, 18, 50,5, 125,5, $\{3 + 2{,}5(n - 1)\}$; –14, –20, –104, –284, $\{10 - 6(n - 1)\} = 16 - 6n$.

Úloha P25

Rozšiřte zadání předchozí úlohy na členy obsahující druhou mocninu s posloupnostmi jako 1, 2, 5, 10, 17, … a nechte žáky najít další dva členy, dále dvacátý člen, padesátý člen, n-tý člen. Můžete pokračovat s posloupnostmi jako 1, 3, 9, 27,… a 36, 9, 2,25, 0,625, … .

Výsledky

26, 37, 362, 2 402, $\{(n - 1)^2 + 1\}$, 81, 243, 3^{19}, 3^{49}, 3^{n-1}; n-tý člen $36/4^{n-1}$
(Exp. 9, str. 241.)

Úloha P26

Sestavte krychle o hraně 1, 2, 3, 4, 5, … pomocí krychliček o jednotkové velikosti. Představte si, že všechny sestavené krychle obarvíte. Zaznamenejte do tabulky počet malých krychlí ve větších krychlích, které mají obarveno 0, 1, 2, 3, 4, 5 stěn.

Podívejte se na svou tabulku. Můžete zobecnit pro krychli o hraně délky n. Kolik malých krychliček ji tvořících má obarveno 0, 1, 2, 3, 4, 5, n stěn?

Výsledky

Ve třetím, čtvrtém, pátém, šestém a sedmém sloupci je v poslední řadě zaznamenáno $(n-2)3$, $6(n-2)2$, $12(n-2)$ a 8 krychlí. Vztah je kubický, kvadratický, lineární a konstanta.

		Počet krychliček s daným počtem obarvených stěn						
Počet obarvených stěn		0	1	2	3	4	5	6
Délka hrany	Objem krychle							
1	1							1
2	8				8			
3	27	1	6	12	8			
4	64	8	24	24	8			
5	125	27	54	36	8			
n	n^3	$(n-2)^3$	$6(n-2)^2$	$12(n-2)$	8			

Úloha P27

Čtyři zápalky jsou sestaveny do čtverce. Pak je použito sedmi zápalek k vytvoření dvou čtverců, pak deseti k vytvoření tří čtverců atd. (Pouze manipulujeme se zápalkami – nic nevysvětlujeme). Kolik zápalek budete potřebovat pro 4 čtverce, 10 čtverců, 100 čtverců, n čtverců?

Pak je 4, 7, 10, … zápalek rozděleno do hromádek bez uspořádání a zadání je pozměněno: Použijte zápalky k vytvoření geometrických útvarů, které nejsou čtverce. Kolik zápalek budete potřebovat k vytvoření dalšího útvaru ve vaší zákonitosti? K vytvoření desátého útvaru, stého, n-tého útvaru?

Nakonec je zadána číselná posloupnost 4, 7, 10, … . Jaký je čtvrtý člen, desátý, stý, n-tý člen? Vypadají všechny n-té členy pro tři experimenty stejně? Jak vám obrazec, který jste vytvořili (vaše vizualizace posloupnosti), umožňuje předpovědět další členy v posloupnosti, obecný člen? (Exp. 2, str. 225.)

Komentář

Viz Komentář k úloze P24, str. 217.

Výsledky

Výsledky by měly být stejné pro všechny tři varianty, totiž 13, 31, 301, $(3n+1)$.

Úloha P28

Kolik čtverců můžeme najít na šachovnici, která má 8×8 polí? Ukažte žákům, že začnou-li se „šachovnicí“ 2×2 a budou postupovat směrem k šachovnici 8×8, budou si moci všimnout pravidelnosti, která jim dá odpověď pro šachovnici 8×8 a následně i zobecnění pro „šachovnici“ $n \times n$.

Komentář

Podobně jako u mnoha komplexních matematických problémů může být výsledek snáze dosažitelný řešením podstatně snazšího problému a jeho rozvojem směrem k problému komplexnějšímu. Začněte tedy se čtvercem 2×2 a pokračujte dále ke čtverci 3×3, 4×4, … . Vidí žáci, jak se zákonitost objevuje?

Výsledky

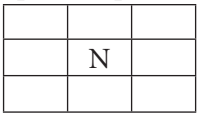
Výsledky shrneme do tabulky.

Čtverec	Počet čtverců 1×1	Počet čtverců 2×2	Počet čtverců 3×3	Počet čtverců 4×4
2×2	4	1		
3×3	9	4	1	
4×4	16	9	4	1
…	…	…	…	…
8×8	82	72	62	52

Deska $n \times n$ má $12 + 22 + 32 + \ldots\ldots + n^2$ čtverců, jejichž součet se rovná $n(n+1)(2n+1)/6$.

Úloha P29

Dvacet osm vězňů musí být umístěno v osmi celách kolem nádvoří (N) (viz obr. P09) tak, aby počty vězňů v řadách a sloupcích neprocházejících nádvořím byly stejné.



Obr. P09

Je uspořádání, které jste nalezli, jediné možné? Pokud ne, kolik uspořádání můžete najít? Jak byste úlohu řešili pro jiné počty vězňů? Vyšetřujte situaci pro liché a sudé počty a zkuste svá zjištění zobecnit. (Exp. 1, str. 224.)

Komentáře

Viz Komentář k P21, str. 215. Předpokládáme, že starší žáci budou problém vyšetřovat hlouběji než žáci mladší, což znamená, že od nich očekáváme, že zjistí, zda se pro jiné počty vězňů, které jsou násobky čtyř, objevuje stejná zákonitost ve výsled-

cích jako u úlohy P21 a zda se jim podaří zjistit existenci a povahu zobecnění ve smyslu počtu různých uspořádání pro 4*n* vězňů. Dokážou vytvořit uspořádání pro lichý počet vězňů nebo pro sudý počet nedělitelný čtyřmi?

Úloha P30

Hoďte 72krát dvěma hracími kostkami. Při každém hodu sečtěte počet bodů a zaznamenejte údaje do tabulky. Nakreslete graf četností jednotlivých součtů. Nyní nakreslete graf teoretických četností. Teoretické četnosti můžete určit vyplněním tabulky 6×6. Myslíte, že výsledek vašeho experimentu bude bližší teoretickému výsledku, hodíte-li dvěma kostkami 144-krát, 288-krát, 3 600-krát?

Komentář

Tato úloha ukazuje rozdíl mezi teoretickou možností získat určitý součet na dvou kostkách a realitou. Žáci potřebují nakreslit graf počtu případů pro jednotlivé součty podle svých údajů v tabulce, kde jsou v řádcích zaznamenána součtová skóre (1 až 12) a ve sloupcích počty případů. Učitel může spojit výsledky pro celou třídu a ukázat tak, že čím více pokusů, tím jsou výsledky bližší teoretickému výsledku.

Výsledky

Hodnoty teoretických počtů případů, v nichž padnou dané součty, mohou být odvozeny z tabulky 6×6:

První kostka

Druhá kostka	+	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Skutečné hodnoty počtu případů by se měly blížit teoretickým počtům případů se zvyšujícím se počtem hodů. Skutečné poměry P(*n*) počtů případů, v nichž padnou jednotlivé součty *n*, a počtu všech hodů by se měly blížit pravděpodobnostem P(2) = P(12) = 1/36; P(3) = P(11) = 2/36; P(4) = P(10) = 3/36; P(5) = P(9) = 4/36; P(6) = P(8) = 5/36 a P(7) = 6/36.

Úloha P31

Obchodní společnost chce pro žáky vašeho věku vyrobit trička. Připravte objednávku, v níž každý člen vaší třídy zaznamená délku paže, obvod hrudníku, délku zad a obvod kolem krku. Zorganizujte nejpraktičtější způsob získání těchto údajů od všech žáků třídy. Určete modální (nejčastěji se vyskytující) velikost trička pro vaši třídu. Porov-

nejte ji se skutečnou velikostí trička vyráběného pro vaši věkovou skupinu. Myslíte, že vaše třída by byla dobrým reprezentativním výběrem pro určení modální velikosti trička?

Komentář

Tato úloha umožňuje žákům poznat jiné střední hodnoty než aritmetický průměr. Používá modus k určení nejběžnější míry pro žáky daného věku. Rozvíjí také jejich dovednost sestavit pro sběr potřebných údajů dotazník. Po získání údajů může být třída rozdělena na skupiny, aby jedna skupina připravila sloupcový diagram pro délku paže, jiná pro obvod hrudníku atd. Pro sloupcový diagram bude asi potřeba údaje seskupit, což přiblíží myšlenku diskrétních velikostních skupin, jejichž rozsahy velikostí určují stejně velké intervaly.

Výsledky

Výsledky budou záviset na věku žáků. Modální velikost ukáže, kteří žáci jsou na svůj věk velcí či malí.

Úloha P32

Ve čtvercové síti vyšetřujte obrazec, v němž je každý třetí čtverec označen „x“ a předchozí dva označeny znakem „o“, jak je ukázáno na obrázku:

```
o
o x
o o x
o o x o
o x o o x
o o x o o x
o o x o o x o
o x o o x o o x
o o x o o x o o x
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -   atd.
```

Můžete tento obrazec nějakým způsobem popsat? Posledním písmenem v deváté řadě je „x“, jaké je poslední písmeno na konci patnácté, dvaadvacáté a osmatřicáté řady? Můžete svou odpověď zobecnit pro poslední písmeno v jakékoli řadě? Co se stane s obrazcem, zvýší-li se počet „o“ na 3, 4, 5, ... , *n*?

Komentář

Tento problém může být pro pokročilejší žáky modifikován a předložen jako pyramida, nikoli jako schodiště. V tom případě není zákonitost vidět tak dobře jako předtím. Tato úloha má opět průzkumný charakter a žáci ji pravděpodobně uchopí různými způsoby. Jedna z možností, jak se na obrazec dívat, spočívá v nakreslení horizontálních čar po každé třetí řadě a vertikálních čar po každém třetím sloupci. Celé

P

„schodiště“ se tím rozdělí na dva obrazce, z nichž jeden je trojúhelníkový a druhý čtvercový (3×3).

Úloha P33

Vztah mezi délkou a šířkou pravoúhelníku při konstantním obvodu popsaný v úloze P19, str. 212, může být vyšetřován v této věkové skupině bez pomůcek. Sestavte tabulku údajů pro délku a šířku pravoúhelníků, které mají obvod 20 jednotek a celočíselné délky stran. Určete vztah mezi souřadnicemi bodů reprezentujících délky a šířky jednotlivých pravoúhelníků. Vyneste souřadnice do grafu. Popište graf. Nyní vypočítejte obsahy různých pravoúhelníků a vyneste obsah pravoúhelníku v závislosti na délce jeho strany. Popište vzniklý graf. S použitím znalostí z algebry určete funkci, která popisuje zákonitost zobrazenou grafem. Můžete uvést nějaké objekty, které mají podobný tvar, nebo objekty, jejichž průřezem je tento tvar?

Komentář

Viz Komentář k úloze P19, str. 213.

Výsledky

Vztah mezi souřadnicemi je vyjádřen rovnicí „délka + šířka = 10“, neboli $d + š = 10$ (použijeme-li první písmena slov, zavedeme tak symbol pro parametr). Grafem tohoto vztahu je část přímky $š = 10 - d$, s negativním sklonem (–1) svírající se svislou osou úhel 45° a procházející body [0, 10] a [10, 0]. Graf závislosti obsahu na délce je část paraboly, což může být dokázáno použitím dvou známých rovnic pro $š = 10 - d$ a $P = d \times š$. Dosadíme-li za $š$, dostáváme $P = d\,(10 - d)$, neboli $P = 10d - d^2$. To je kvadratická rovnice a je-li $P = 0$, je $d = 0$ nebo $d = 10$. Údaje ukazují, že pro celočíselné hodnoty stran pravoúhelníku dosáhne jeho obsah maximální hodnoty tehdy, je-li pravoúhelník čtvercem (obsah je 25 jednotek). Starší žáci mohou analytickou cestou dojít ke zjištění, zda je to pro daná kritéria skutečně maximální obsah. (Exp. 11, str. 245.)

Rozšíření

Další variací této úlohy je určení obsahu trojúhelníku, čtverce, šestiúhelníku, osmiúhelníku pro konstantní obvod mnohoúhelníku rovnající se např. 12 jednotkám. Budou výsledné obsahy stejné? Jaké závěry mohou být vyvozeny z tohoto rozšíření?

Úloha P34

Experimentujte s konstantním obsahem uvedeným v úloze P20, str. 214. Nakreslete graf závislosti šířky na délce pro pravoúhelníky s celočíselnými délkami stran a obsahem 36 čtvercových jednotek. Výsledným grafem je „polovina“ pravoúhlé hyperboly a vztah mezi souřadnicemi, který žáci určí, je dán rovnicí délka × šířka = = 36 nebo $d \times š = 36$ (použijeme-li první písmena slov a zavedeme tak symbol pro

parametr). Určete obvod každého pravoúhelníku a nakreslete graf závislosti obvodu na délce. Který útvar má nejmenší obvod pro tento daný obsah? Může vám tento výsledek říci, jaký je vhodný tvar pozemku, chcete-li, aby cena za jeho oplocení byla minimální?

Komentáře

Viz Komentář a výsledky k úloze P20, str. 214. Zobrazíme-li závislost obvodu na délce, získáme další hyperbolu. Starší žáci by měli být schopni manipulovat se dvěma rovnicemi $d \times š = 36$ a $o = d + š$ (kde $2 \times o = O$) tak, aby získali rovnici s proměnnými o a d. Praktické úvahy týkající se ceny za oplocení pole mohou navazovat na tuto úlohu stejně jako na výše uvedenou úlohu P33.

Rozšíření

Uvažujeme-li celočíselné šířky, pak nejužším pravoúhelníkem je pravoúhelník s šířkou 1 jednotka. Požádejte žáky, aby zjistili, co se bude dít, budeme-li šířku opakovaně půlit, ale obsah bude stále zůstávat na hodnotě 36 čtvercových jednotek. Dosáhne šířka někdy hodnoty nula?

Úloha P35

Při práci se zvětšováním a zmenšováním nechte žáky měnit velikost různých pravidelných dvourozměrných útvarů v různých měřítkách. Zaznamenejte do tabulky měřítko změny velikosti a velikost zvětšení/zmenšení obsahu útvaru. Pozorujete nějakou zákonitost? Týká se všech 2D útvarů? Bude platit v případě, když bude útvar nepravidelný? Můžete tuto zákonitost vyjádřit algebraicky? Nyní zkuste totéž se zvětšováním a zmenšováním 3D objektů.

Komentář

Tato úloha se nejsnadněji řeší pomocí čtverečkovaného papíru. Nechte žáky zakreslit útvary do čtvercové sítě tak, aby vrcholy útvarů byly umístěny v bodech sítě. Nyní zvolte střed zvětšení uvnitř nebo vně útvaru. Spojte tento střed s nějakým vrcholem a prodlužte úsečku spojující oba body dvakrát, třikrát, ... Proveďte totéž s každým vrcholem. Žáci by měli být schopni pro určení obsahu původního i zvětšeného útvaru vystačit s čtvercovou sítí, bez použití vzorců! Co se s útvarem stane, když „prodloužíte“ spojnici od středu k vrcholu v opačném směru? Existuje praktické využití tohoto jevu ve fotografii?

Výsledky

Žáci by měli zjistit, že obsahy útvarů jsou zvětšeny v poměru, který je druhou mocninou zvětšení jejich lineárních rozměrů; pokud jsou rozměry zdvojnásobeny, je poměr zvětšení obsahu plochy $1 : 2^2$ atd. Pro objem obdobně platí, že dvojnásobné

zvětšení rozměrů je doprovázeno zvětšením objemu v poměru $1 : 2^3$. To žáky překvapí. Když dostanou malý hranol a otázku, kolik takových hranolů budou potřebovat pro těleso, které bude mít všechny rozměry dvakrát větší, jen velmi málo z nich si uvědomí, že je třeba zvětšit rozměry ve všech třech dimenzích.

P5 Experimenty

První dva experimenty byly provedeny našimi spolupracujícími učiteli. Komentáře pod experimentem 1 a 2 reflektují jejich osobní úvahy.

EXPERIMENT 1

Situace

Na našem prvním setkání se čtyřmi spolupracujícími učitelkami jsme dali učitelkám dvě úlohy, aby je vyřešily tak, jak jim jejich matematické znalosti dovolí. Rozdělili jsme je do dvou dvojic, přičemž v každé byla jedna učitelka z prvního a jedna učitelka z druhého stupně základní školy. Cílem bylo nechat je zažít konstruktivistický přístup, aby si uvědomily, co prožívají jejich žáci a jak tento přístup mohou používat ve svých třídách

Úloha P29

Dvacet osm vězňů má být umístěno v osmi celách kolem nádvoří (N) (obr. P10) tak, aby počty vězňů v řadách a sloupcích neprocházejících nádvořím byly stejné.

	N	

Obr. P10

Pozorování

Dvě učitelky Sabina a Jana začaly se čtvrtinou vězňů v každé rohové cele. Nejdříve čísla náhodně měnily, ale pak si povšimly zákonitosti a začaly opakovaně zmenšovat počty v rohových celách vždy o jednoho vězně, kterého umisťovali ve středové cele každé řádky či každého sloupce. Tímto postupem nalezly osm různých kombinací [(7,0), (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6), (0,7)].

Pak byla položena otázka: „Kolik kombinací bude existovat pro celkový počet pouze dvaceti vězňů?“ Obě učitelky nakonec našly 6. Pak si Sabina všimla, že je zde zákonitost, a zobecnila, že pro n vězňů, kde n je násobkem čtyř, existuje $(n/4 + 1)$ kombinací. Další otázka zněla: „Co když počet vězňů není násobkem čtyř? Může mít problém řešení?“ Intuitivní odpověď zněla, že ne. Sabina pak s Janinou pomocí začala počet existujících řešení systematicky hledat od $n = 1, 2, 3, \ldots$. Učinily závěr (nesprávný), že pro n liché řešení neexistuje. Byly pak překvapeny, když našly řešení pro $n = 2, 6, 10, \ldots$ stejně jako řešení, která už nalezly předtím pro $n = 4, 8, 12, \ldots$. Nezbyl už čas na to, aby dospěly ke zobecnění pro n sudé, které není násobkem 4.

Rozšíření

Můžete toto zobecnění najít? Můžete navrhnout jiné posloupnosti, jejichž zákonitost by byla dána úlohou podobnou úloze předešlé?

Studentka učitelství

Studentka učitelství se této úloze věnovala jako vlastnímu samostatnému projektu. Projekt najdete na DVD P29Prisoner (v angličtině, bez komentáře).

EXPERIMENT 2

Úloha P25 (jedna ze zadaných posloupností)

Spolupracující učitelky dostaly pět hromádek zápalek. Každá hromádka měla jiný počet zápalek, a to 4, 7, 10, 13 a 16. Otázka zněla, jaký počet zápalek budou potřebovat pro šestou, sedmou, dvacátou a n-tou hromádku.

Pozorování

První věc, kterou učitelky udělaly, bylo spočítání zápalek v hromádkách, které dostaly. Zjistily, že dostaly 4, 7, 10, 13 a 16 zápalek. Okamžitě pak řekly, že další dvě hromádky budou mít 19 a 22 zápalek. O dvacáté hromádce musely už trochu přemýšlet, ale nakonec řekly, že to bude $3 \times 20 + 1$. Učitelky byly pak dotázány, zda by mohly uspořádat zápalky do nějakého obrazce, který by jim pomohl určit počet zápalek v další nebo dvacáté hromádce. Byly vytvořeny a popsány tři obrazce.

- Nejdříve byl vytvořen čtverec. K němu byly připojeny tři zápalky tak, že vznikl další čtverec, pak další tři atd. Vytvoření dvacáté hromádky bylo popsáno jako $4 + 19 \times 3$ a zobecnění jako $4 + 3(n - 1)$.
- Vznikl obrazec podobný předešlému, ale popsaný jako $1 + 20 \times 3$ a zobecnění jako $1 + 3n$.
- Zápalky byly seskupeny – první útvar se skládal z jedné zápalky a jedné skupiny tří zápalek, druhý se skládal z jedné zápalky a dvou skupin tří zápalek. To demonstrovalo výše popsané úvahy velmi jasně, včetně zobecnění $1 + 3n$.

Komentář učitelek

Učitelky druhého stupně základní školy řekly, že jejich žáci sedmého ročníku dokázali říci, zda dvě výše uvedená zobecnění jsou ekvivalentní.

Všechny čtyři učitelky byly překvapeny, kolik matematických poznatků mohou získat z těchto dvou jednoduchých úloh a jak žáci museli k nalezení některých zobecnění použít předchozí znalosti.

EXPERIMENT 3

Úloha P06, P17

Experiment 3.1

Situace

Experiment proběhl na prvním stupni základní školy situované ve vnitřní části města Derby. Mnoho žáků této školy pochází z neúplných rodin. Ne všichni rodiče podporují své děti v jejich vzdělávání, což někdy vede k obtížným situacím ve třídě. Ve škole se učí 210 žáků v sedmi třídách ve věku od 5 do 11 let a je tam také oddělení předškolního vzdělávání s 39 dětmi od 3 do 5 let.

Ve Velké Británii se primární vzdělávání dělí na tzv. vstupní třídu (Reception Class) pro děti, které v daném školním roce dosáhnou 5 let, a první až šestý ročník. Oddělení předškolního vzdělávání a vstupní třída (která je prvním rokem povinného vzdělávání ve Velké Británii) pracují v této škole společně jako „Foundation Unit". V šesti následujících ročnících je po 30 žácích. Všechny školy pracují podle Národního kurikula s Národní strategií početní gramotnosti (National Numeracy Strategy, NNS), která se vztahuje na všechny žáky od 5 do 14 let. Rok 1 (věk 6+) a 2 (věk 7+) se označují jako Klíčové stádium 1 (KS 1), k jehož konci učitel provádí hodnocení vzdělávacích výsledků žáků v matematice, angličtině a prvouce (Science). Ročníky 3 až 6 se označují jako Klíčové stádium 2 (KS 2), na jehož konci, asi v 11 letech věku žáka, se provádí národní testování ve výše uvedených předmětech.

Následující úloha byla zadána ve všech třídách této základní školy: „Máte dort, který chcete rozdělit rovnými řezy od jednoho okraje dortu ke druhému. Pomocí dortů z plastelíny a (vhodných) nožů nebo pomocí kreslení zkuste zjistit, jaký je největší počet kusů, který můžete získat, provedete-li 1, 2, 3, 4, 5, … řezů." Žáci KS 1 (5 až 7 let) mohou odvodit své výsledky z experimentování s plastelínou. Žáci KS 2 (7 až 11 let) mohou své výsledky zanést do tabulky (tab. P01).

Počet řezů	Počet kusů
1	2
2	?

Tab. P01

Otázka pro 5. a 6. ročník: Můžete zjistit počet kusů po 10, 20, *n* řezech?

Materiál

KS 1: Papír, tužka, plastelína a neostré nože z umělé hmoty.

KS 2: Papír, tužka, pero a kalkulačka.

Komentáře

Úloha byla zadána šesti učiteli v ročnících 1–6; žáci mohli pracovat samostatně nebo ve skupinách.

Děti KS 1 měly tendenci pracovat samostatně, ale když něco objevily, chtěly to ukázat ostatním žákům kolem sebe. Objevilo se několik dobrých kreseb dortu s až čtyřmi řezy. V mnoha případech žáci napodobili, co viděli, když jejich matky doma krájely dorty nebo sendviče. Většina těchto žáků dospěla k posloupnosti 2, 4, 6, 8, …, atd. a když učitelka ve 2. ročníku poznamenala, že všechny řezy nemusí jít středem dortu, žáci rozčileně namítali, že by nedosáhli stejných dílů!

Mnoho žáků KS2 sestavilo tabulku P02.

Počet řezů	Počet kusů
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29
8	37

Tab. P02

K získání výsledků pro tabulku kreslili žáci KS 2 kruhy, pak vedli čáry představující řezy a nakonec pozorně očíslovali vzniklé kusy.

Dvě desetileté dívky v 5. ročníku zapsaly, k čemu při intenzivní komunikaci došly. Nejprve napsaly:

„Myslím, že od prvního členu k druhému se dostaneme přičtením 2, od druhého k třetímu přičtením 3, pak přičteme 4 pro další člen a myslím, že tak to bude pokračoval pořád."

To bylo přeškrtnuto a nahrazeno slovy:

„Přičtete počet řezů k předchozímu počtu kusů, čímž získáte nový počet kusů."

Komentář učitelek KS 2

„Obě tvrzení jsou pravdivá. Dívky přeškrtly první tvrzení proto, že nemohly přijít na to, jak vyjádřit zobecnění stručněji. Uvědomila jsem si, že druhé tvrzení lze vyjádřit jako $k_{n-1} + \check{r}_n = k_n$, kde $\check{r}_n$ je počet řezů a k_n počet kusů, ale takové vyjádření přesahovalo možnosti žáků."

„Moji žáci určili počet kusů pro 10 a 20 řezů. Nedokázali ale přijít na obecný výraz pro n.“ (Věk 8 – 9 let.)

Komentář ředitelky

„Akce byla úspěšná v tom smyslu, že byla přístupná všem žákům ve škole, byla velmi praktická a žáky bavila.“

„Mladší žáci (KS 1) krájeli, lepili a počítali.“

„Děti z 5. ročníku se hodně nadchly pro ověření své teorie pro náhodně vedené řezy. Vyvinuly ji za pomoci kreseb kruhů a čar, ale pro vyšší počty řezů šly do školní auly, kde ke kontrole maximálního počtu kusů používaly obruče a švihadla.“

„Na různých úrovních došli žáci k různým závěrům. Například žáci KS 1 zjistili, že označíme-li počet řezů jako n, je minimální počet kusů k pro řezy, které se neprotínají (nebo jsou vedeny rovnoběžně), dán jako $k = n + 1$; také zjistili, že pro řezy, které procházejí společným bodem, je $k = 2n$.“

„Žáci KS 2 k těmto výsledkům dospěli také, ale pak pokračovali dál, aby určili maximální počet kusů, které lze pro daný počet řezů získat. Když zjistili, že tři řezy, které se protínají, ale neprocházejí společným bodem, dají sedm částí, rychle přišli na to, že maximální počet kusů lze získat, vedeme-li řezy tak, aby neprocházely společným bodem. Mnoho žáků pak dospělo k tabulce P02. Několik žáků také zjistilo, že čísla 2, 4, 7, 11, 16, 22, … mohou být zapsána jako (1+1), (3+1), (6+1), (10+1), (15+1), (21+1), …, tj. počet kusů k_n pro n řezů je „n-té trojúhelníkové číslo“ plus 1. Tedy $k_n = n(n + 1)/2 + 1$, kde n je počet řezů.“

„Práce byla jak pro učitele, tak pro žáky užitečná v mnoha ohledech. Například:

- Žáci zjistili, že počet částí získaných v určité kombinaci řezů nezáleží na tom, jak velké nebo malé tyto části jsou. Jde o abstraktní zjištění objevené konkrétní zkušeností, jemuž porozumět je pro děti důležité.
- Učitelé si při zadání a vedení této úlohy důvěřovali, protože si ji sami předtím vyzkoušeli.
- Úloha žáky povzbudila ke vzájemnému učení a k organizování myšlenek na papíře způsobem, který jim vyhovoval.
- Úloha poskytla všem členům školy příležitost společně diskutovat o experimentu a jeho výsledcích.
- Úloha podpořila rozvoj porozumění učitelského sboru, jak zadávat a vést úlohy průzkumného charakteru.“

„Všechny děti ve škole řešení úlohy bavilo; učitelky vypovídaly, že vytrvalost dětí ve snaze jít dál byla nevšední.“

Poznámka: Ředitelka zorganizovala v době mimo vyučování seminář dalšího vzdělávání, na němž si všichni členové sboru (včetně některých asistentů učitele) úlo-

hu vyzkoušeli. Cílem ředitelky bylo umožnit svým učitelkám a učitelům pracovat konstruktivisticky, což od nich vyžadovalo poznat typy otázek, které by jim jejich žáci mohli položit, i otázky, které by oni mohli položit žákům, aby podpořili rozvoj jejich myšlení. Když se učitelé úlohou zabývali, museli si sami najít pravidla a položit si otázky.

Mnoho členů sboru bylo fascinováno výše uvedeným objevováním a nechtělo s ním skončit a jít domů! Mezi otázky, které si členové sboru položili, patřily tyto:

- Musí řez jít vždy středem dortu?
- Pokud ano, jaký je minimální počet kusů dortu a jak to můžete zjistit pro jakýkoli počet řezů?
- Co se stane, když všechny řezy neprocházejí týmž bodem? Jaký je maximální počet kusů pro každý počet řezů?
- Co se stane, jsou-li všechny řezy rovnoběžné? Kolik kusů pak získáváme?

Experiment 3.2

Situace

Úlohu využily dvě základní školy v Soluni, Řecko. Jedna třída byla složena z dětí smíšeného věku, zatímco ve druhé se učily děti jednoho ročníku a průměrných schopností. Šlo o 11–12leté žáky.

Materiály

Žáci dostali kruhy z kartónu, nůžky, papíry a tužky. V původní úloze byla jako materiál navržena modelovací hmota (viz závěrečnou poznámku učitele).

Modifikovaná úloha

Před vámi je narozeninový dort. Máte ho rozkrájet pro své hosty. Každý řez musí být rovný a jít od jednoho kraje k druhému. Kolik kusů získáte po prvním řezu? Kolik po druhém? Zaznamenejte pokaždé do tabulky počet provedených řezů a počet získaných kusů.

Učitelovy komentáře

Žáci provedli nejvýše 4 řezy a výsledky své činnosti zaznamenali.

Když uvažovali nad údaji, které zaznamenali, učitel se zeptal: „Dokážete přijít na počet kusů, který získáte po pátém řezu, aniž byste tento řez skutečně provedli?“ Všechny děti dospěly ke správné odpovědi: 10. „Kolik kusů získáte po desátém řezu, kolik po stém řezu?“ Odpověděly, že to bude 20 a 200 kusů. „Jak jste to zjistili?“ Každý odpověděl, že to ví proto, že zjistil, že počet kusů je vždy dvojnásobkem

počtu řezů. Jediný problém, který se při úloze objevil, spočíval v povaze použitého materiálu: zatímco úloha předpokládala, že děti krájí narozeninový dort a pozorují kousky, které při tom vznikají, děti ve skutečnosti stříhaly kruh z papírové čtvrtky. To znamenalo, že „dort“ se po každém „řezu“ zcela rozpadl.

Poznámka: Žáci nezkoušeli rovnoběžné nebo náhodné řezy.

EXPERIMENT 4

Situace (viz výše)

Úloha P08

Najděte zákonitosti založené na násobilce. Vytvořte skupinky žetonů: v první skupince 4 žetony, ve druhé 8, v další 12, … . Nyní vytvořte v každé skupince obrazec tak, aby postupně „rostl“.

Materiály

Každý žák dostal čtverečkovaný papír a žetony.

Pozorování učitele

Vyskytlo se mnoho různých nápadů, jako

OOO O	OOO OOOO O	OOO OOOO OOOO O	……..”

Učitel: „Kolik dalších žetonů potřebujete k tomu, abyste se od jednoho členu dostali k dalšímu?”
Žák: „Čtyři.”
Učitel: „Můžete mi teď v této fázi říci, kolik žetonů bude ve dvacátém členu?”
Žák: „Ne.”
Učitel: „Jakou informaci potřebuji k tomu, abych zjistil počet žetonů ve dvacátém členu?”
Žák: „S jakým počtem se začíná a kolik skupinek čtyř musíme přičíst.”
Učitel: „Platí to pro všechny členy?”
Žák: „Ano”..
Učitel: „Takže jaký počet je třeba pro dvacátý člen?”
Žák: „80.”
Učitel: „Řekni mi, jak jsi na to přišel.”
Žák: „Čtyři plus 19 hromádek 4, což je 20 hromádek čtyř.”
Učitel: „Takže budeme-li chtít *n*-tý člen, kdo mi může říci, jak bude vypadat?”
Žák: „V číslech a písmenech to bude *n*-krát 4.”

Žák napsal na tabuli $n \times 4$.

Všichni žáci ve třídě rozuměli, jak se k zobecnění došlo. Domnívám se, že žáci získali tím, jak museli z žetonů vytvářet obrazce; na některých obrazcích byl vztah

mezi předchozím a následujícím členem vidět lépe než na jiných. Určitě se naučili, jak své obrazce popsat a jak najít dvacátý člen. Zdatnější žáci rychle přišli na zobecnění pro tento jednoduchý obrazec a pomohli slabším to pochopit.

EXPERIMENT 5

Situace (viz výše)

Úloha P09, P14 (první část úlohy)

Tato úloha je pokračováním úlohy předešlé, Experiment 4, ale s odlišným typem zákonitosti – s mocninami.

Materiály

Každá dvojice žáků dostala tři hromádky žetonů o počtu 1, 4 a 9.

Pozorování učitele

Většina dvojic nejprve spočítala, kolik žetonů je ve které hromádce a pak žetony uspořádala do čtverců. Nicméně jedna skupina si vyžádala žetony odlišných barev s vysvětlením: „K předvedení celé posloupnosti potřebujeme jenom 9 žetonů, a to jeden modrý (X), tři červené (O) a 5 zelených (#)". Pak vytvořili tento obrazec:

X O #
O O #
# # #

Úryvek z hodiny:

Učitel: „Co musíte udělat s prvním číslem, abyste se dostali k druhému?"
Žák: „Přičíst tři."
Učitel: „A jak se dostanete od druhého ke třetímu?"
Žák: „Přičteme pět ".
Učitel: „Takže kolik bychom asi měli přičíst, chceme-li se dostat k dalšímu číslu?"
Žák: „Sedm."
Učitel: „Kolik činí další číslo?"
Žák: „Šestnáct".
Učitel: „Už jsi tato čísla někdy viděl?"
Žák: „Ano, jsou to čtvercová čísla!"
Učitel: „16 je čtvercové číslo?"
Žák: „Ano, 4×4".
Učitel: „Takže co potřebuješ, aby ses dostal od jednoho členu k dalšímu, a jak najdeš desátý člen?"
Žák: „Abychom se dostali ke druhému čtvercovému číslu, potřebujeme znát první, což je 1, a pak přičíst druhé liché číslo, 3. Takže abychom dostali desátý člen – desáté čtvercové číslo, potřebujeme přičíst desáté liché číslo k devátému čtvercovému číslu. Přičteme 19 k 81 a dostaneme 100."

Učitel: „A jak najdeš dvacáté čtvercové číslo?“
Žák: „To bude těžké. Budu muset najít všechna čtvercová čísla až do devatenáctého a k tomu pak přičíst dvacáté liché číslo. Bylo by snazší použít kalkulačku, $n \times n$!“

Žáci nejprve zkoušeli použít již známé zákonitosti, ale zjistili, že jim v tomto případě nepomohou. Překvapivě to byli žáci považovaní za slabší, kdo prokázali logičtější přístup k této zákonitosti a byli schopni ji rozpoznat rychleji, než žáci považovaní za schopnější.

Žáky řešení tohoto problému bavilo, ale nedařilo se jim přijít na to, jak nalézt n-tý člen, aniž by museli najít předchozí člen. Jeden nebo dva žáci řekli, že se pokusí obecný člen zjistit.

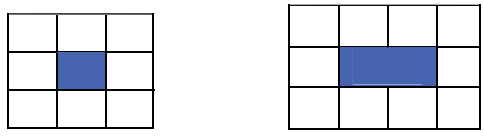
EXPERIMENT 6

Experiment 6.1

Situace (viz výše)

Úloha P18

Obchodní společnost prodává stavebnicová zahradní jezírka, na jejichž obrubu jsou potřeba různé počty dlažebních kamenů v závislosti na velikosti jezírka. Velikost 1 vyžaduje 8 dlažebních kamenů, pro velikost 2 je třeba 10 dlažebních kamenů (viz obrázek P11, v němž modré čtverce znamenají jezírko J a bílé čtverce znamenají dlažební kameny). Šířka jezírka je vždy jeden čtverec.



Obr. P11

Vytvořte tabulku o dvou sloupcích, která v prvním sloupci uvede velikost jezírka (číslo J) a ve druhém potřebný počet dlažebních kamenů D. Určete počet dlažebních kamenů pro jezírko o velikosti 10 a pro jezírko o velikosti n

Pozorování učitele

Dokonce i žáci považovaní za méně schopné dokázali sledovat zákonitost v tabulce P03 a uvědomit si, jak pokračuje.

Velikost jezírka	Počet dlažebních kamenů
1	8
2	10
3	

Tab. P03

„Zobecnění bylo obtížné pro všechny žáky kromě jedné dívky. Tato dívka zapsala jako poslední velikost jezírka n, počet dlažebních kamenů $6 + 2n$. Abych pomohla ostatním žákům porozumět, co tato žákyně napsala, rozložila jsem sled úvah na jednotlivé kroky a s použitím žetonů jsem kladla žákům otázky jako ‚Kterých dlažebních kamenů se změny netýkají, takže zůstávají na svém místě?'. Žáci brzy pochopili, že vždycky potřebujeme šest krajních dlažebních kamenů a že se mění pouze vnitřní kameny zakreslené na náčrtku podél horní a dolní strany, přičemž při každém následujícím zvětšení se přidají dva. Jakmile toto žáci pochopili, došli i k zobecnění."

Experiment 6.2

Situace

Tuto úlohu zkoušeli žáci ze dvou základních škol v Soluni, Řecko. Jedna třída byla složena ze žáků různého věku, druhou tvořili žáci stejného věku a průměrných schopností. Věk žáků se pohyboval mezi 11 a 12 lety.

Materiály

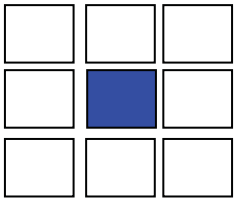
Žáci dostali modré čtvercové kartičky a papíry a tužky, aby si mohli psát poznámky.

Formulace úlohy

Existuje společnost, která dělá jezírka (modré kartičky jsou jezírka). Jezírka jsou vyráběna v různých velikostech. Když společnost jezírko sestavuje, obkládá ho dlažebními kameny (bílé čtverce jsou dlažební kameny).

Komentář učitele

Učitelka dala každému týmu 4 modré kartičky a 14 bílých čtvercových lístků a řekla: „Můžete nám ukázat, jak bude vypadat sestavené jezírko?" Všechny týmy sestavily stejné jezírko (obr. P12).



Obr. P12

Toto jezírko jsme označili jako velikost 1 a žáci byli požádáni, aby sestavili tabulku, do níž budou zaznamenávat velikosti jezírek a počet dlažebních kamenů potřebných k jejich obložení.

Žáci sami pokračovali v sestavování stále větších jezírek a v zaznamenávání údajů o nich do tabulky až po velikost 4, kdy spotřebovali všechny čtvercové lístky. Pak

se učitelka zeptala: „Dokázali byste přijít na to, kolik dlažebních kamenů je potřeba pro jezírko velikosti 5, aniž byste ho sestavovali?“

Všechny děti odpověděly na základě svého pozorování správně: „Každá velikost vyžaduje o 2 dlažební kameny víc než ta předchozí.“ S tímto poznatkem se snažily zjistit, kolik dlažebních kamenů je potřeba pro velikost 10 nebo 15. Další otázka zněla takto: „Můžete najít pravidlo?“ Přestože třída složená ze žáků různého věku dokázala najít pravidlo v úloze P06, měli žáci této třídy tentokrát s nalezením pravidla problémy. Třída žáků „průměrných schopností“ si pozorně prohlížela čísla ve svých tabulkách: $1 \rightarrow 8$, $2 \rightarrow 10$, $3 \rightarrow 12$, … . Po nějakém čase přišly dvě skupiny s následujícími pravidly: $8 + 2(n - 1)$ a $6 + 2n$. Děti v těchto skupinách nezjistily, že se jedná o stejné pravidlo.

Komentář pozorovatele

Třída složená ze žáků s lepšími výsledky (v prvním ročníku druhého stupně základní školy) také pracovala s touto úlohou. Věk těchto žáků se pohyboval od 12 do 13 let.

Skupiny došly k zobecnění bez obtíží a bez zásahu učitele. Prezentovaly dvě řešení problému: $2n + 6$ a $2(n - 1) + 8$. Intuitivně a bez zásahu učitele rozeznaly rovnost obou řešení.

Učitel pak skupiny vyzval, aby rovnost obou řešení matematicky dokázaly. Žáci se o to snažili, ale bez pomoci učitele důkaz nezvládli. Žáci neměli potřebné znalosti k manipulaci s algebraickými výrazy.

EXPERIMENT 7

Situace (viz výše)

Úloha P12

Pro tuto úlohu použijte krychlovou stavebnici. Položte na lavici jednu krychli a zaznamenejte, kolik stěn můžete vidět. Pak na pracovní plochu položte další krychli a přisuňte ji k první, opět spočítejte a zaznamenejte počet viditelných stěn. Pokračujte v připojování krychlí, takže na desce stolu tvoří řadu. Při připojení každé další krychle vždy zaznamenejte, kolik stěn právě můžete vidět. Kolik stěn vidíte, máte-li před sebou 5, 10, 20, 100, n krychlí?

Materiál

Všichni žáci měli k dispozici kostky, které do sebe zapadaly (např. lego).

Instrukce učitele

- Připravte si tabulku, kterou vidíte na tabuli (tab. P04).

- Položte na lavici jednu kostku. Kolik stěn kostky je možné vidět? Zapište to do tabulky
- Nyní vezměte další kostku, připojte ji k první, aby zároveň zůstala ležet na lavici. Zaznamenejte počet stěn, které můžete vidět teď.
- Pokračujte v prodlužování řady přidáváním kostek a zaznamenáváním počtu stěn, dokud nezjistíte zákonitost.
- Kolik stěn je vidět, máte-li na lavici za sebou spojeno 15, 25, *n* kostek?

Počet kostek	Počet viditelných stěn
1	5
2	8

Tab. P04

Úloha P13 (rozšíření P12)

- Položte opět na lavici jednu kostku. Připravte si jinou tabulku a zaznamenejte, kolik stěn kostky je možné vidět.
- Zapište to do tabulky.
- Nyní připojte další kostku shora k první a zaznamenejte počet viditelných stěn.
- Stavte věž napojováním dalších kostek a při každé nové kostce zaznamenejte počet stěn. Dokážete najít zákonitost a popsat ji slovy nebo symboly?

Komentář pozorovatele

Žáci reagovali na tyto úlohy s nadšením. Několik žáků se speciálními vzdělávacími potřebami potřebovalo pomoci a jeden z dospělých s nimi pracoval.

Bylo možné pozorovat, jak tito žáci po jedné počítají viditelné stěny. Způsob, jakým stěny počítali, jim ale nepomohl k nalezení zákonitosti. Došli k číslům 5, 8, 11, 14… Zjistili, že mezi každými dvěma členy je rozdíl 3.

Několik dětí zjišťovalo počet stěn způsobem, který jim pomohl najít obecné řešení. Dvě dívky řekly: „Spočítejte kostky, jsou tam tři řady stěn viditelných na všech kostkách a pak dvě stěny na koncích."

Učitelka zavolala tyto dívky k tabuli, aby vysvětlily, co řekly, ale dívky šly ve svých úvahách dál. Poté, co své pozorování zapsaly jako $1 \times 3 + 2$, $2 \times 3 + 2$, $3 \times 3 + 2$, … pokračovaly dál a napsaly, že počet stěn, které mohou být vidět, když se *n* kostek spojí za sebou do řady, je $n \times 3+2$. Učitelka pak slabším žákům vysvětlila podrobněji rozdíl ve způsobu počítání viditelných stěn.

Žáci se pak zabývali úlohou P13 (věží). Poté, co se seznámili se způsobem, jak „chytře“ počítat viditelné stěny, napsali někteří žáci po manipulaci s jednou, dvěma a třemi kostkami obecný vztah pro *n* do výšky na sebe napojených kostek. Napsali: $1 \times 4 + 1, 2 \times 4 + 1, 3 \times 4 + 1$ a konečně $n \times 4 + 1$. Jiným žákům trvalo nalezení vztahu déle; potřebovali 5 nebo 6 kostek k nalezení pravidla. Většina žáků zobecnění spíše vyslovila, než že by ho zapsala: „Násob počet kostek čtyřmi a přičti jednu.“

Učitelka byla velmi překvapená, jak někteří žáci rychle našli ‚matematičtější' způsob zjištění počtu viditelných stěn. Žáci, kterým se při zadání úlohy P12 nedařilo, použili tento způsob u úlohy P13. Byli schopni zákonitost vyjádřit slovy, ale ne ji zapsat, což odpovídá výsledkům výzkumu o tom, jak se rozvíjí schopnost dětí zobecňovat.

Pozorování učitele

„Pro děti bylo těžké odvodit, jaká zákonitost se uplatňuje při sestavování zadaných útvarů, což se týká hlavně prvního experimentu. Mnoho dětí u první úlohy neviděl, že mají před sebou tři stejně dlouhé řady stěn a že je pak nutné přičíst dvě stěny, které jsou na koncích. Žáci potřebují ke sledování a objevování zákonitostí využít různé materiály a pomůcky. Více zkušeností jim umožní dívat se na zákonitosti pozorněji a klást si otázky jako: Co zůstává stejné a co se mění?“

EXPERIMENT 8

Experiment 8.1

Situace

Tento experiment proběhl ve škole pro přibližně 1 100 žáků od 11 do 18 let, která je nevýběrová, tj. slouží žákům o plném rozsahu schopností v relativně malém městě v centru Anglie. Vzhledem ke složení žákovské populace jsou výsledky žáků v národních testech na konci období KS 3 (ve 14 letech) stabilně dobré a ve výsledcích v GCSE na konci KS 4 si škola udržuje podobně vysoký standard. Její žáci pocházejí z rozmanitého sociálního zázemí a škola se skutečně snaží „sloužit své komunitě“. Tři spolupracující učitelé (dva třídní, jeden vedoucí předmětové komise) vyučují žáky v plném rozsahu věků a schopností včetně úrovně A (16–18 let). Experiment proběhl v devátém ročníku, ve třídě čtrnáctiletých žáků, která je podle výkonnosti druhou třídou z pěti v ročníku.

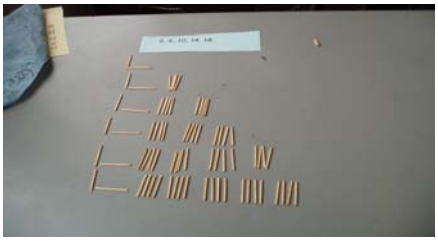
Úloha P24

Je dána posloupnost 3, 7, 11, 14, …, Najdi její šestý, desátý, padesátý, stý a *n*-tý člen. Pomůže vám k nalezení *n*-tého členu, vytváříte-li obrazce pomocí žetonů? Když dokončíte tuto úlohu, vytvářejte vlastní posloupnosti a určujte jejich šestý, desátý, padesátý, stý a *n*-tý člen.

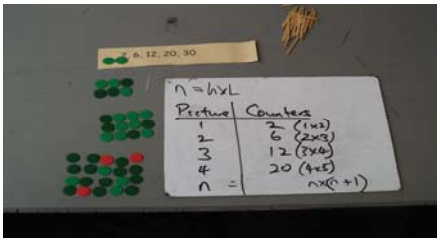
Pozorování učitelů

Hodina začala lineárními posloupnostmi. Prezentace v PowerPointu vybídla děti k tomu, aby uvažovaly o posloupnosti 3, 5, 7, 9, 11, … a studovaly ji nad rámec induktivního vztahu, tzn. třída byla vyzvána k tomu, aby nehledala pouze „další člen“, ale také aby předpověděla šestý, desátý, patnáctý, třicátý druhý a *n*-tý člen. Žáci byli podněcováni k tomu, aby zdůvodňovali své předpovědi slovně, nejprve svému spolužákovi, pak zbytku třídy způsobem, který si sami zvolí. Žáci byli podporováni, aby ověřovali své předpovědi. To se odehrálo bez vizuálních či taktilních (hmatatelných) pomůcek. Pak byla použita prezentace, která ukázala, jak může být růst posloupnosti zviditelněn a jak se dají použít například zápalky k ilustraci jejího rozvoje. (Triangular numbers)

Prezentace v PowerPointu poskytla žákům model, jak použít materiály a pomůcky ke snazšímu nalezení chybějících členů a dospět k hypotéze o zákonitosti. Pak byli vybídnuti, aby vyvinuli své vlastní „vizualizace/obrazce“ a jejich zdůvodnění. Přitom bylo zdůrazněno, že obrazce musejí stále narůstat. Žáci byli vyzýváni, aby diskutovali, co vidí („Podívej se“), pak použili zápalky k převedení viděného do reality ke „zhmotnění“ („Udělej“) a konečně, aby řekli spolužákovi, jak to udělali („Řekni“). (Příloha 3 a 4, str. 252 + 253)



Obr. P13



Obr. P14

P

Ve dvojicích a trojicích vytvořených podle schopností pak žáci pracovali s posloupnostmi, které sami vytvořili, přičemž používali pracovní list pro lineární posloupnost (Příloha 5, str. 254), který byl pečlivě odstupňován.

V příkladu zobrazeném na obr. P13 žáci pracovali s posloupností 2, 6, 10, 14, 18, … . Zkusili nějaké obrazce pomocí zápalek a pak se rozhodli, že obrazec, který je na snímku, ukazuje vývoj členů v posloupnosti nejlépe. Na obr. P13 lze vidět, že vytvořili obrazec pro další číslo posloupnosti, 22. Pak řekli, že nemusí sestavovat následující obrazec, protože je pouze třeba přičíst čtyři. Tato skupina žáků vysvětlila obrazec slovy: „Je to dvě a o jednu méně, než je číslo obrazce, krát čtyři.“ Nedokázali toto slovní vyjádření vyjádřit v symbolickém tvaru $2 + 4(n - 1)$.

Důležitým závěrem hodiny byla diskuze celé třídy o výsledcích, která přinesla zajímavé výroky a úvahy o posloupnosti 4, 7, 10, 13, 16, … . Jedna skupina žáků ztvárnila tuto zákonitost jako sestavování řady čtverců, přičemž začala se čtyřmi

zápalkami a k získání dalšího členu řady přidala vždy tři zápalky tak, že vznikl další čtverec. *N*-tý člen vyjádřili jako $4 + 3(n - 1)$. Jiná skupina s tím nesouhlasila a řekla, že použila jednu samostatnou zápalku, k níž připojila trojúhelník, další člen vznikl z předchozího připojením dalšího trojúhelníka atd., takže *n*-tý člen je $(1 + 3n)$. Učitel požádal třídu, aby rozhodla, zda tyto výsledky nejsou shodné, přičemž upravoval první výraz. Žáci nakonec souhlasili, že výsledky jsou shodné.

Experiment 8.2

Situace

Tuto úlohu zkoušely dvě základní školy v Soluni, Řecko. Jedna třída byla složena ze spíše slabších žáků smíšeného věku (5. a 6. ročník), zatímco druhá třída byla složena z žáků průměrných schopností. Věk žáků se pohyboval mezi 11 a 12 roky.

Modifikace

Učitelka nepředložila žákům posloupnosti, ale chtěla vědět, kolik zápalek potřebují k sestavení obrazce skládajícího se z 1, 2, a 3, … do linie pospojovaných čtverců. Tím byla ve skutečnosti vytvořena posloupnost 4, 7, 10, 13, ….

Komentář učitelky

Každý tým dostal 13 „matematických tyčinek". Žáci byli požádáni, aby je použili k sestavení čtverce. Všichni žáci vytvořili čtverec s použitím 4 tyčinek. Pak byli požádáni, aby hned vedle úvodního čtverce vytvořili další čtverec. Po splnění tohoto úkolu, a než měla učitelka možnost položit nějakou další otázku, si starší žáci všimli, že pro druhý čtverec potřebují jen 3 další tyčinky, protože jedna strana nového čtverce už existovala – byla společná s úvodním čtvercem. Mladší žáci s tím rychle souhlasili.

Žáci byli pak vyzváni, aby zaznamenali do tabulky počet čtverců a počet tyčinek, které potřebovali k jejich vytvoření. Pokračovali v sestavování řady čtverců a záznamu výsledků až do 4 čtverců v řadě, kdy jim došly zápalky. Učitelka se pak zeptala: „Můžete zjistit, kolik tyčinek budete potřebovat pro 5 čtverců, aniž byste další čtverec sestavili?" Všichni žáci odpověděli správně a poznamenali: „Pro každý další čtverec potřebujeme přičíst 3 zápalky k těm, které už máme."

Další otázka zněla takto: „Můžete najít pravidlo, podle kterého budeme moci zjistit, kolik tyčinek je potřeba k vytvoření řady 10 čtverců?" Jenom jeden žák odpověděl: „Počet tyčinek je 3 krát počet čtverců plus 1." To ostatní ohromilo. Chtěli po žákovi, aby jim vysvětlil, jak na to přišel, ale nepodařilo se mu, aby mu porozuměli. Pak se několik dalších žáků třídy snažilo ostatním v podstatě vysvětlit význam proměnné.

Experiment 8.3

Situace

Úloha P24, str. 217, byla provedena s žáky čtvrtého ročníku základní školy v Neratovicích, kteří projevili zájem o matematické aktivity mimo vyučování. Zúčastnilo se 9 dobrovolníků – 7 dívek a 2 chlapci.

Úloha P24a

Učitelka zadala tuto úlohu poněkud odlišně – použila pojem obdélníka ($1 \times n$) vytvořeného z n čtverců.

Jedna šikovná dívka vyplnila pracovní list připravený učitelem velmi rychle (obr. P15). Nejprve vyplnila tabulku. Než odpověděla na otázky a), b), c), zapsala zobecnění slovy. Pak doplnila odpovědi na zadané otázky a nakonec v dolní části stránky vyjádřila vztah v symbolickém tvaru.

Utvoř ze sirek čtverec. Postupným přidáváním dalších čtverců vytváříme obdélník.
Zapisuj kolik sirek spotřebuješ na 1, 2….7 čtverců.

1	2	3	4	5	6	7
4	7	10	13	16	19	22

3 × číslo + 1

Dokážeš nyní vypočítat, kolik sirek potřebuješ na
a) 10 čtverců 31
b) 25 čtverců 76
c) 125 čtverců 376

8	9	10	11	12	13	14

Podle jakého pravidla můžeš k libovolnému číslu horního řádku najít číslo dolního řádku?

3 × x + 1

Obr. P15

Další úlohu učitelka zadala podle obr. P16.

Kolik sirek potřebuješ na sestavení 1, 2… 7 rovnostranných trojúhelníků, které nemají žádnou stěnu společnou?

1	2	3	4	5	6	7
3	6	9	12	15	18	21

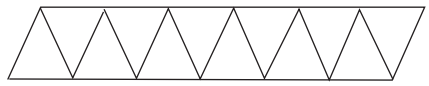
Dokážeš nyní vypočítat, kolik sirek potřebuješ na a) 10 trojúhelníků 30
b) 25 trojúhelníků 75
c) 125 trojúhelníků 375

125 × 3 = 375
25 × 3 = 75
10 × 3 = 30

Obr. P16

Učitelka zadání upravila tak, že směřovalo k výsledku $3n$ – zřejmě jako první krok k vyšetřování posloupnosti, která je zobrazena níže.

Alternativou, která je variací úlohy 24, je toto zadání: Použijte zápalky nebo párátka k vytvoření obrazce, jehož vývoj by zobrazoval posloupnost 3, 5, 7, 9, 11, …, přičemž začněte s rovnostranným trojúhelníkem. Pak dvě další zápalky připojené k prvnímu trojúhelníku vytvoří dva trojúhelníky atd.



Obrazec ukazuje uspořádání 25 zápalek, obecný člen je $2n + 1$.

Popis práce v české škole je k dispozici na DVD P25Matchsticks, CZENGmatchsticks, Triangles and squares2 (v angličtině).

Experiment 8.4

Situace

Úloha P25, str. 217, byla zadána studentům učitelství na Universitě v Derby, Velká Británie. Studenti byli buď v prvním roce svého čtyřletého učitelského studia (BEd), nebo studovali v prvním roce programu pro postgraduální certifikát ve vzdělávání (PGCE). Úloha jim byla představena během přednášky nazvané *Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice.* Potom se od nich očekávalo, že budou úlohu zkoumat a řešit nezávisle.

Práce studentů

Všichni studenti měli za úkol předložit záznam, v němž vysvětlí a obhájí svůj přístup k úloze. Někteří studenti předložili i matematické důkazy svých zjištění. Práci studentky učitelství najdete na DVD P25 Matchsticks (v angličtině).

Komentář přednášejícího

„Tato studentka vypracovala úlohu jasným a logickým způsobem. Začala s taktilními (hmatatelnými) pomůckami (zápalky a spojovatelné kostky), aby získala do úlohy vhled. Když nalezla obecné řešení k jednotlivým zákonitostem, pokusila se nalézt „meta-řešení", které ji zavedlo „nad rámec fyzických zdrojů" a do vyšších úrovní abstrakce. Ukázala dobrou úroveň sebedůvěry ve své matematické dovednosti a vytvořila srozumitelné a dobře zdůvodněné řešení. Poskytla tak ukázku toho, jak se může tato relativně jednoduchá úloha stát výzvou schopným studentům velkého věkového rozpětí."

EXPERIMENT 9

Situace (viz výše)

Tato realizace proběhla ve škole pro přibližně 1 100 žáků od 11 do 18 let, která je nevýběrová, tj. slouží žákům o plném rozsahu schopností v relativně malém městě Ripley v centru Anglie.

Úloha P26

Je dána posloupnost 2, 6, 12, 20, … . Najděte její šestý, sedmý, padesátý, stý a n-tý člen.

P

Pozorování učitelů

Tyto úlohy jsou speciálně zaměřeny na kvadratické vztahy. Prezentace v PowerPointu ukazuje dva možné způsoby vizualizace posloupnosti 3, 8, 15, 24, 35. Žetony zde byly užitečnější taktilní pomůckou než předchozí zápalky nebo tyčinky, protože záznam posloupnosti byl nyní dvourozměrný.

Žáci opět použili na podporu svého zkoumání strukturu „Podívej se, udělej, řekni". (Příloha 3 a 4, str. 252–253). Nejprve chtěli najít společný rozdíl, jako to dělali v případě lineárních posloupností, ale brzy zjistili, že to není možné.

V příkladu zobrazeném na obr. P14, str. 237, pracovala skupina žáků s posloupností 2, 6, 12, 20, …. Žáci zkusili několik metod uspořádání žetonů, zejména s většími čísly, a najednou zjistili, že žetony pro číslo 12 mohou sestavit jako obdélník 3×4 a žetony pro číslo 20 jako obdélník 4×5. V této chvíli si zapsali $n = v \times d$ (výška krát délka). Pak přešli zpátky k číslu 6 a k číslu 2, aby viděli, zda tato čísla vyhovují

jejich zákonitosti, přičemž zapisovali do tabulky (obr. P14) a pokládali své obrazce z žetonů po její straně. Nakonec proběhla krátká diskuze, kdy řekli, že již znají n-tý člen, takže mohou vypočítat jakýkoli člen. Jejich odpověď pro n-tý člen byla $n(n + 1)$, což zapsali, jak je vidět na obr. P14.

Žáci shledávali zapisování myšlenek časově náročným. Příklady jejich písemné práce a záznamy jejich diskuzí potvrdily, že sestavování konkrétního zobrazení zákonitosti znamenalo vizualizaci této zákonitosti, což podpořilo jejich schopnost zobecňovat. Měli pocit, že práce ve skupinách a možnost spolu diskutovat jim pomohla v jejich učení. (Series-Ripley)

EXPERIMENT 10

Situace

Realizace proběhla v 6. ročníku základní školy v Praze.

Úloha P09

Použijte stovkový čtverec (0 až 99) a požádejte žáky, aby počínaje číslem 2 každé druhé číslo vybarvili. Jaký obrazec vzniká? Jak vybarvení čísla rozdělí? Jakými číslicemi končí všechna lichá čísla? Jak poznáme, zda je číslo dělitelné 2?

Proveďte totéž počínaje číslem 10 a počítejte po deseti. Jak zjistíte, zda je číslo dělitelné deseti? Začnete-li číslem 7 a připočítáváte vždy deset, jaký vzorek, jakou zákonitost vidíte? Začněte číslem 9 a připočítávejte 9. Co vám tento vzorek připomíná? Proč myslíte, že vzorek vypadá právě takto? Podívejte se na čísla, která jste vybarvili. Čeho si na nich můžete všimnout? Pomůže vám to poznávat, zda je číslo dělitelné devíti, nebo ne? Udělejte totéž počínaje trojkou a počítání po třech.

Učitel modifikoval tuto úlohu následujícím způsobem:
a) V tabulce o 100 polích (od 0 do 99) vybarvěte každé druhé políčko (začněte u čísla 2).
b) V tabulce o 100 polích (od 0 do 99) vybarvěte každé třetí políčko (začněte u čísla 3).
A tak dále až po i): V tabulce o 100 polích (od 0 do 99) vybarvěte každé desáté políčko (začněte u čísla 10).

Jakou zákonitost pozorujete? Co můžete říci o číslech, která byla vybarvena, a co o těch, která nebyla vybarvena? Jakými číslicemi končí všechna lichá čísla? Jak poznáme, zda je číslo dělitelné 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10? Co můžeme říci o vybarvených číslech?

Komentář učitele

Tato úloha byla použita v úvodní hodině tématu „Dělitelnost přirozených čísel“. Žáci pracovali ve dvojicích.

Níže jsou uvedeny poznámky žáků, které napsali, když postupně vyplňovali tabulku násobilky.

dvojky	násobilka dvou, vzorek na koberci, běžecká dráha, pruhy pro chodce na křižovatce, rovnoběžky, pruhy, sloupce, okna na domech, mřížka
trojky	malá šikmá kostka, násobky tří, schodiště, je jich 33 (skupina dívek si všimla pravidelnosti 6+9=15, 15+9=24, 24+9=33, ...)
čtyřky	schodiště, rovnoběžky (dívky měly odlišnou tabulku s devíti sloupci od 0 do 8, 9 do 17 atd., takže obrazec byl odlišný – jako pro 3)
pětky	dvě rovnoběžky
šestky	násobilka šesti, 16 vybarvených čísel, okna na panelových domech, křížem krážem, stoly ve školní jídelně, šestiúhelník uprostřed, kapky deště
osmičky	rovnoběžné čáry
devítky	šikmý had, šarvátky, násobilka devíti
desítky	graf, čára

Pravidla dělitelnosti nebyla nalezena. (Presentation2)

Komentář autorů

Formulace úlohy a volba jednotlivých kroků vycházela z našich zkušeností z práce s žáky v mnoha školách, kdy jsme se snažili, aby žáci pomocí aktivit odpovídajících násobení provedli logický posun k pojmu dělitelnosti. Znovu nám to připomíná, co jsme zdůrazňovali v úvodu – totiž, že než učitel zadá úlohu žákům, měl by si ji sám zkusit vyřešit. Není dobré si zadání úlohy jen přečíst a pomyslet si, že bude vhodná, protože při tomto způsobu vyučování musejí žáci dostat otázky, které je povedou k samostatnému přemýšlení.

Bylo navrženo, že žáci začnou s číslem 2 a budou počítat a vybarvovat čísla po dvou (to může být pro starší žáky vynecháno), protože jsme chtěli, aby si žáci všimli, že dostanou pruhovaný vzor a že čísla vždy končí jednou z číslic 0, 2, 4, 6, nebo 8, tedy sudým číslem. Z této skutečnosti by měli žáci vyvodit, že pokud nějaké číslo končí nějakou z těchto pěti číslic, je toto číslo dělitelné dvěma.

Pak bylo žákům (pro pozorování dalšího obrazce) řečeno, aby začali v 10 a odpočítávali a vybarvovali čísla po deseti. Tentokrát měli dostat jeden sloupec, jehož každé číslo končí číslicí 0 – takže pokud přirozené číslo končí nulou, je dělitelné 10. Také jsme žákům navrhovali, aby pro počítání a vybarvování po deseti začali u jakéhokoliv

jednociferného čísla, čímž opět dostanou sloupec, jehož každé číslo vždy končí tou číslicí, kterou začali. To by mělo vzbudit otázku, proč je tomu tak. Doufali jsme, že si všimnou, že mají před sebou deset sloupců čísel, takže budou-li od jakéhokoliv čísla počítat po deseti, budou všechna vybarvená čísla tvořit jeden sloupec. Pak měli žáci začít v 5 a odpočítávat a vybarvovat po pěti. Výsledkem jsou dva sloupce, přičemž všechna čísla v jednom sloupci budou končit pětkou a ve druhém nulou. Proč je sloupec, který jsme dostali vybarvováním po deseti, částí výsledku vybarvování po pěti? Žáci by měli být schopni porozumět tomu, že 5 je dělitelem 10. Při hledání pravidel dělitelnosti tak zjišťujeme, že končí-li číslo pětkou nebo nulou, je dělitelné pěti.

Pak chceme, aby žáci začali devítkou a odpočítávali a vybarvovali po devíti, přičemž budou zaznamenávat, co všechno zajímavého o tomto obrazci zjistili. Většina žáků navrhuje, že obrazec vypadá jako schodiště, které vychází z čísla 90, odkud postupuje po jednom schodu. Všimnou si také toho, že ke každému číslu existuje jeho zrcadlový obraz, tj. máme dvojice 18 – 81, 27 – 72 atd., že číslice na místě jednotek pro každé následující číslo o jednu klesne, zatímco desítková číslice se o jednu zvýší a ciferný součet těchto čísel je vždy 9. Učitel by měl pak upozornit na to, že mezi vybarvenými čísly je také 99, jehož ciferný součet devět není. K této otázce jsme získali následující dvě odpovědi: „Ciferný součet 99 je 18 a sečtete-li 1 a 8, dostanete 9, takže to funguje!“ nebo „Součtem číslic je 18, a to je násobek 9.“ Obvykle jsme rozšířili oblast zkoumaných čísel do 108, 117, 126 atd., aby žáci mohli zákonitost lépe sledovat, a pak žáci došli k závěru, že číslo je dělitelné 9, je-li jeho ciferný součet 9 nebo je násobkem 9. Učitel pak může zadat mnoho jednoduchých i netriviálních problémů, aby zjistil, zda žáci pravidlo dělitelnosti pochopili. Například: Která z čísel 423, 517, 1 044, 981 jsou dělitelná devíti? Nebo: Doplňte na prázdné místo číslici tak, aby číslo bylo dělitelné 9: 1_6, 53_, 23_9, 4_5. Existuje více než jedna číslice, která může být na prázdné místo doplněna?

Poslední pravidelnost, kterou jsme se zabývali, se týkala násobilky tří: Vybarvěte každé třetí číslo. Tentokrát dostaneme obrazec šesti rovnoběžných schodišť (přičemž 99 je jednostupňové schodiště), jehož součástí je obrazec násobilky devíti. Zeptejme se opět, proč tomu tak je. Ciferný součet čísel v šesti schodištích je 3, 6, 9, 12, 15 a 18. Pravidlo o dělitelnosti, které odtud dostáváme, zní: Jakékoli číslo, jehož ciferný součet je (tři nebo) násobek tří, je dělitelné třemi.

Ostatní obrazce nepomáhají jednoduše zjistit pravidla dělitelnosti, ale je tu jedna jiná úloha, kterou je užitečné udělat. Na posledním obrazci znázorňujícím násobilku tří zvolte další barvu pro znázornění násobilky dvou (třeba orámováním nebo řídkým šrafováním). Na kterých číslech nacházíte obě barvy? Žáci by měli zjistit, že tuto vlastnost mají čísla 6, 12, 18, 24, …, tedy násobky šesti. Jak souvisí fakt, že tato čísla jsou obarvena oběma barvami, s jejich dělitelností šesti? Žáci by si měli uvědomit, že je to tím, že tato čísla jsou současně násobky 2 a 3.

EXPERIMENT 11

Experiment 11.1

Situace

Tato realizace proběhla ve víceletém gymnáziu situovaném v centru Prahy. Gymnázium má „prestižní reputaci", přičemž je zaměřeno spíše humanitně. Třída, v níž realizace proběhla, je složena z žáků označených školou jako žáci slabých schopností. Žáci se do této skupiny dostali z různých tříd na základě své vlastní preference neskládat maturitní zkoušku z matematiky. Většina z nich říká, že chtějí mít tak málo matematiky, jak je to jen možné. V každé vyučovací hodině dochází k odhalení nějakého základního nepochopení, k jehož odstranění mělo dojít a nedošlo před mnoha lety. Ve věku šestnácti a více let mají žáci například stále ještě problémy s písemným násobením a se základními operacemi se zlomky.

Úloha P19

Úlohu P19, str. 212, pro tyto starší žáky učitelka modifikovala: Máme plot dlouhý 20 m. Jaké mohou být rozměry pozemku pravoúhlého tvaru, jsou-li rozměry stran dány v celých metrech? Jaké jsou rozlohy takových pozemků? Zaznamenejte výsledky do tabulky a nakonec údaje v tabulce znázorněte grafem. Popište charakter grafu, který jste získali. Rozhodněte, kterou funkci graf zobrazuje.

Komentář učitelky

„Tento pokus vypadal jako totální selhání. Když žáci uslyšeli zadání úlohy, zůstali zaraženě sedět. Nezdálo se, že bude někdo schopný nebo ochotný odpovědět. Po chvilce začali hádat, ale zdálo se, že bezmyšlenkovitě. Pak víceméně celá třída dospěla k závěru, že existuje nekonečný počet řešení. Požádala jsem je, aby některá vyslovili, ale k mému překvapení žádná odpověď nebyla správná. Původně jsem nechtěla narušovat možný sled jejich úvah, ale v této fázi jsem se rozhodla zeptat se, zda řešení ‚500 krát 0,05' (jedno z řešení, která žáci vyslovili) splňuje podmínky zadání. Vyskytla se pouze jedna námitka: ‚Ne krát 0,05, ale krát 0,04.' Když jsem zopakovala otázku, jeden z žáků řekl, že tato čísla nejsou celá, ale že na alternativu s celými čísly nemůže přijít. Tato diskuze byla ukončena zvoněním. V další hodině byli žáci rozděleni do skupin po čtyřech a dostali tutéž úlohu. Po deseti minutách práce a diskuze měla jen jedna skupina více než tři řešení, takže mohla zkusit načrtnout graf. Jedinou význačnou poznámkou, kterou jsem od nich slyšela, byla odpověď na poslední otázku – zda by mohli rozhodnout, kterou funkci graf zobrazuje. Odpověď zněla: ‚Je to buď parabola, nebo hyperbola, ale na tom nezáleží, protože mezi tím ve skutečnosti není žádný rozdíl.'

Nevěděla jsem, zda hlavní problém spočíval ve způsobu, jak jsem úlohu formulovala, nebo v obtížnosti či (ne)přitažlivosti, (ne)zajímavosti úlohy, nebo zda žáci měli

špatný den. Obvykle bývají hovornější, vzájemně si pomáhají a přispívají ke konstrukci nových poznatků ze svých vlastních myšlenek i z nápadů ostatních spolužáků. Rozhodla jsem se změnit frontální přístup na skupinovou práci, v čemž jsem viděla možnost zlepšení."

Učitelka se rozhodla položit podobnou otázku prostřednictvím rozšíření úlohy: Máme udělat výběh pro drůbež, který má mít největší možnou rozlohu (obsah). Délka plotu je 18 m, strany jsou opět v celých metrech, ale jedna strana výběhu nepotřebuje oplocení, protože výběh bude touto stranou přisedat k zastavěné ploše farmy. Jaká je největší rozloha výběhu? Budou výsledky odlišné, když se nebudeme omezovat na celočíselné délky stran?

„Žáci okamžitě řekli, že je to přesně táž úloha jako ta předchozí a že není nutné opakovat celý proces znovu. Požádala jsem je, aby ji přesto řešili, a po chvíli se ze dvou skupin ozvalo, že o stejnou úlohu nejde. Všechny skupiny začaly projevovat větší zájem mimo jiné o to, v čem je tato úloha odlišná, a snažily se rychle najít řešení. Většina skupin řešení nalezla. Skupiny své výsledky prezentovaly ostatním a ukázaly, jak k nim dospěly. Ve všech případech byly skupiny zřejmě ovlivněny řešením úlohy předchozí, takže postupy byly velmi podobné, pouze pořadí jednotlivých kroků se poněkud lišilo."

Poznámka: V tomto případě zní vztah $2s + d = 18$, $P = s \times d$, tedy $P = s\,(18 - 2s)$, což je kvadratická funkce s maximální hodnotou obsahu pro $s = 4{,}5$.

Učitelka pak dospěla k názoru, že by mohla úlohu rozšířit tak, aby ji žáci tohoto věku mohli řešit na své úrovni znalostí a dovedností matematiky:

Vaše přítelkyně má ranč obklopený silnicí. Víte od ní, že silnice je 6 km dlouhá a že ranč má tvar pravidelného mnohoúhelníku . Jaká je rozloha ranče, je-li mnohoúhelníkem trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, desetiúhelník, n-úhelník? Pokračování by mohlo vypadat takto: Kdy bude obsah nejmenší, kdy největší – a může k takové situaci při dodrženém zadání skutečně dojít? Pokud ne, k jakému číslu se výsledky blíží?

Mnoho skupin odpovědělo na některé otázky správně, ale vyskytlo se mnoho chyb při použití trigonometrie pro pětiúhelník a desetiúhelník. Většina dospěla k závěru, že „čím větší je počet stran, tím větší je obsah". (Presentation2)

Experiment 11.2

Situace

Úloha P19, str. 212, byla též řešena v prvním ročníku druhého stupně základní školy v Soluni, Řecko. Její žáci jsou považováni za velmi schopné, jsou ve věku 12 – 13 let.

Modifikovaná úloha P19

Tabelujte údaje pro délku a šířku pravoúhelníků o obvodu 20 jednotek s celočíselnými délkami stran. Určete vztah, který tabulka vyjadřuje. S použitím údajů v tabulce nakreslete graf závislosti šířky na délce. Popište graf. Pak vypočítejte obsahy různých pravoúhelníků.

Komentář učitele

„Tento problém byl velmi důležitý, neboť odhalil významné mezery řady žáků v chápání některých pojmů. Poskytl také výjimečné příležitosti k diskusi ve třídě. Když žáci doplňovali do svých tabulek hodnoty šířek a délek pravoúhelníků, bylo možno pozorovat následující jevy:

1. Pouze jeden tým uvedl hodnoty nejen v celých, ale i v desetinných číslech, ostatní týmy se omezily na přirozená čísla, jak požaduje zadání úlohy.
2. Dva týmy udaly pro délky pravoúhelníků hodnoty od 1 do 5, tedy vynechaly hodnoty délky 6, 7, 8, 9 jako duplicitní, považujíce tyto pravoúhelníky za již zaznamenané. Polovina týmů vynechala dvojici $d = 5$, $š = 5$. Tyto týmy se domnívaly, že vzhledem k tomu, že jde o čtverec, není tato dvojice součástí řešení.
3. Pokud jde o graf, zhruba polovina týmů nakreslila spojitou čáru, zatímco druhá polovina se omezila na body dané hodnotami přirozených čísel. I v případě spojité čáry začínala tato v bodě [1, 9] a končila v bodě [9, 1].“

Diskuse mezi žáky – s učitelem v roli koordinátora – byla velmi plodná, speciálně část týkající se kontinuity grafu a odpovídajících hodnot proměnných.

Učitel nesdělil, zda žáci určili nebo neurčili vztah $d + s = 10$ alespoň slovně.

EXPERIMENT 12

Situace

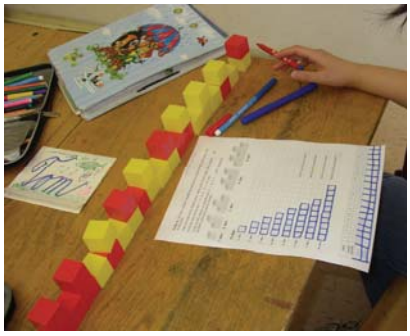
Základní škola v Praze, ZŠ Uhelný Trh, Česká republika, druhý ročník.

Modifikovaná úloha P12

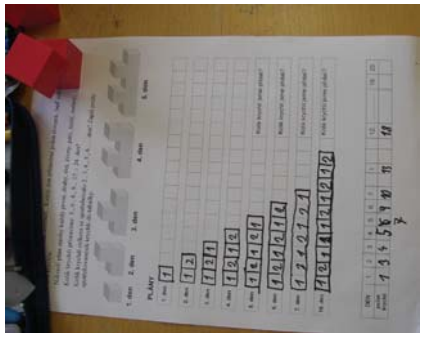
Učitel řekl žákům, že budou stavět hradby města. Mohou napodobit stavbu zdi použitím plastových krychliček. První den stavitelé postavili zeď vysokou 10 metrů, což je znázorněno jednou krychlí, druhý den připojili stejně dlouhý úsek a 20 metrů vysoký, což je znázorněno dvěma kostkami na sobě. To se opakovalo několik dnů, dokud nebylo hradbami obehnáno celé město. Děti měly zaznamenat dvěma způsoby, kolik kostek bylo použito každý den a jaký byl celkový počet kostek použitých po uplynutí určitého počtu dnů. Žáci k tomu dostali pracovní listy (viz obr. P18).

Komentář učitelky

„Žáci začali stavět zeď z kostek. Někteří brzy simulaci zastavili a napsali své odpovědi, zatímco jiní pokračovali, dokud jim kostky nedošly. Mnoho dětí se dostalo do pasti své představy, že zákonitost bude pokračovat čísly 3, 4, 5, …, a musely své výsledky opravit, když spočítaly skutečný počet použitých kostek použitých do čtvrtého dne včetně, což bylo 6 a nikoli 5.



„Nemám už na lavici žádné místo!“



„Myslela jsem, že zaznamenávám správně číselnou pravidelnost – nesledovala jsem svůj obrázek, ani nepočítala kostky.“

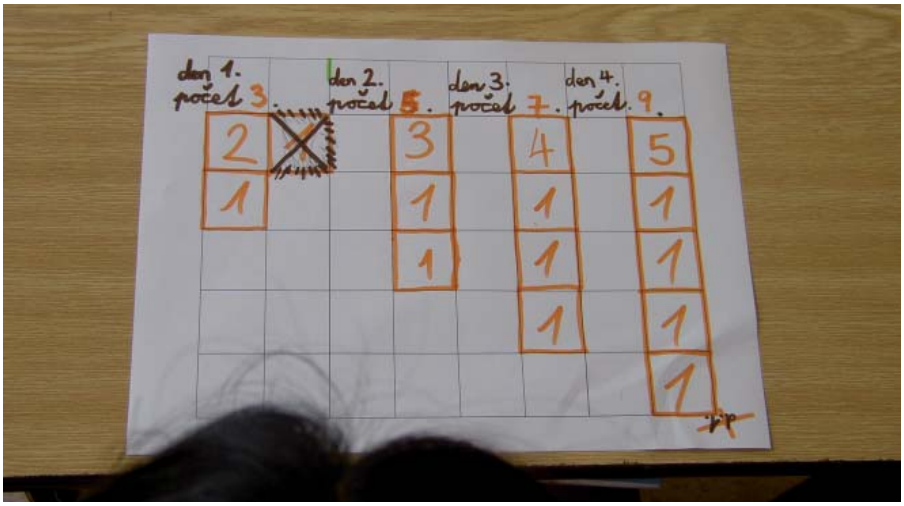
Obr. P18

Většinou si žáci uvědomovali, že počty se střídavě zvětšují o dvě a o jednu, ale nemohli přijít na žádnou formu zobecnění.“ (Viz Castlewall1; Castlewall2.)

„Při dalším rozšíření této aktivity byli žáci vyzváni, aby začali s třemi kostkami ve tvaru písmena L a aby zaznamenali počet použitých kostek. Pak měli za úkol připojit kostky na konec každého ramene písmena L a opět zaznamenat dosud použitý počet kostek. Pokračovali jsme v tom, abychom zjistili, zda žáci dokáží rozeznat, podle jaké zákonitosti se při každém přidání (jakoby každý den – viz zobrazený záznam) mění celkový počet použitých kostek. Jak ukazuje obrázek P19, pro tuto variantu byla potřeba značná manipulativní zručnost.“

Obr. P19: „Odvážíme se přidat další kostku?“

„Způsob, jak model i počet použitých kostek zaznamenat na papír, si vyžádal poměrně rozsáhlou diskuzi. Bylo rozhodnuto, že bude použit čtverečkovaný papír a že si budeme představovat, že se díváme na model shora, takže v prvním čtverci se bude zaznamenávat celkový počet kostek věžové části a dále se v každém čtverci reprezentujícím vodorovné rameno stavby tvaru písmene L bude zaznamenávat číslo 1. (Viz obrázek P20.) Tato žákyně se dostala až do stádia modelu čtvrtého dne a zaznamenala jednak formou diagramu každodenní stav modelu, jednak i celkový počet kostek použitých každý den: 3, 5, 7, 9.“



Obr. P20

„Všichni žáci poznali, že zákonitostí je zde posloupnost lichých čísel. K větší diskuzi došlo, když byli žáci dotázáni, kolik kostek bude spotřebováno přidáním sedmého páru. Vzniklo mnoho návrhů, když si jeden žák všiml, že počet kostek ve vztyčeném rameni činí vždy o jednu více než číslo modelu (číslo modelu = počet dnů od počátku stavby, kterou děti pomocí kostek modelují). Viz výše: den 1 – do výšky 2, den 2 – do výšky 3, den 3 – do výšky 4 atd. Někdo jiný řekl, že počet kostek ve vodorovném rameni je stejný jako číslo modelu, takže bylo navrženo, že sedmý model obsahuje [(7 + 1) + 7]=15 kostek. Žáci byli požádáni, aby to vyzkoušeli a ověřili si tak toto tvrzení. Souhlasili, že opravdu potřebují 15 kostek. Nakonec jedna žákyně řekla, že počet kostek potřebných pro jakýkoli model je ‚o jednu více než číslo modelu a k tomu je třeba přičíst ještě jednou číslo modelu‘.“ (Viz Lbuilding.)

EXPERIMENT 13

Situace

Úloha P28, str. 219, byla zadána studentům prvního ročníku na Univerzitě v Derby, Velká Británie.

Práce studentů

Všichni studenti měli za úkol předložit záznam, v němž vysvětlí a obhájí svůj přístup k úloze. Někteří studenti předložili i matematické důkazy svých zjištění. (Viz P28 Chessboard 1, Chessboard 2, v angličtině.)

Komentáře přednášejícího

„Po opodstatněném počátečním experimentování vypracovala tato studentka úlohu jasně a logicky. Zobrazení formou diagramu, které zvolila, přispívá k objasnění řešení. Poskytuje zřetelný důkaz o jejím systematickém přístupu k hledání a nalezení řešení. Ukázala také vhodnou úroveň sebedůvěry ve své matematické dovednosti."

Přílohy

Příloha 1

Rámcové vzdělávací cíle

	Vzdělávací cíl
7	Vytvářejte a popisujte jednoduché celočíselné posloupnosti
7	Vytvářejte členy jednoduché posloupnosti
7	Vytvářejte posloupnosti odpovídající praktickým kontextům a v jednoduchých případech popište obecný člen
8	Vytvářejte a popisujte celočíselné posloupnosti
8	Vytvářejte členy lineární posloupnosti definováním přechodu od jednoho členu k druhému a definováním členu prostřednictvím jeho pozice v posloupnosti
8	Začněte používat lineární výrazy k popisu *n*-tého členu aritmetické posloupnosti
9	Vytvářejte členy posloupnosti definováním přechodu od jednoho členu k druhému a definováním posloupnosti prostřednictvím pozice členu
9	Vytvářejte posloupnosti odpovídající praktickým kontextům a zapisujte výrazy pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti
9	Najděte další a *n*-tý člen kvadratické posloupnosti a vyšetřujte jejich vlastnosti
9	Odvoďte vlastnosti posloupností trojúhelníkových a čtvercových čísel z dvojrozměrných obrazců

Příloha 2

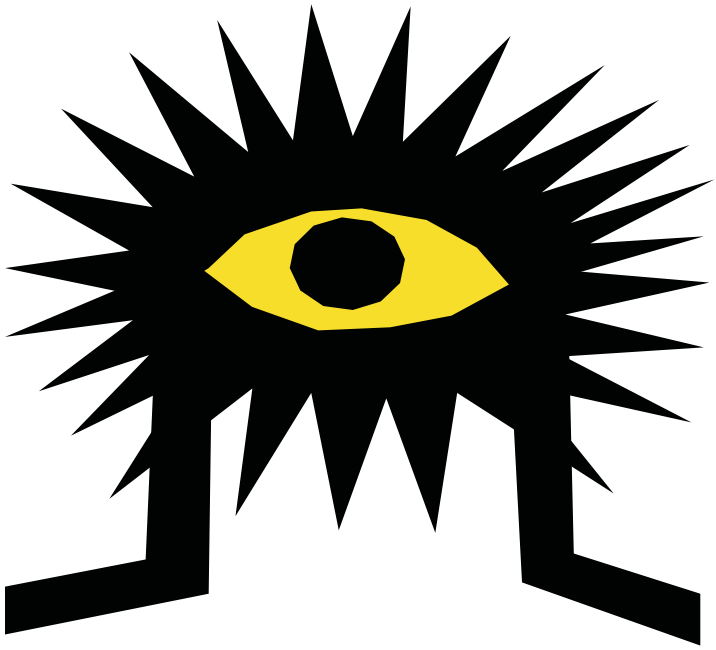
Použitý slovník

Obecný člen
Posloupnost
Induktivní vzorec (vztah)
Lineární
Kvadratický

Příloha 3

- Dívej se
- Udělej
- Řekni

- Dívej se
- Udělej
- Řekni



Příloha 4

Podívej se, udělej, řekni

Jména: _____ Datum: _____

Posloupnost:

Podívali jsme se na:	
Udělali jsme:	
Můžeme **říci**, jak naše obrazce „rostou“:	
Můžeme **předpovědět** tyto členy:	6.: 10.: 15.: 32.: *n*-tý:

Jména: _____ Datum: _____

Posloupnost:

Podívali jsme se na:	
Udělali jsme:	
Můžeme **říci**, jak naše obrazce „rostou“:	
Můžeme **předpovědět** tyto členy:	6.: 10.: 15.: 32.: *n*-tý:

Příloha 5

Lineární vztahy

Posloupnost	Odpovědi
4, 7, 10, 13, 16	$3n + 1$
2, 5, 8, 11, 14	$3n - 1$
1, 5, 9, 13, 17	$4n - 3$
1, 4, 7, 10, 13	$3n - 2$
2, 6, 10, 14, 18	$4n - 2$
11, 9, 7, 5, 3	$13 - 2n$
14, 11, 8, 5, 2	$17 - 3n$

Příloha 6

Kvadratické vztahy

Posloupnost	Odpovědi
1, 4, 9, 16, 25	n^2
2, 6, 12, 20, 30	$n(n + 1)$
4, 10, 18, 28, 40	$n(n + 3)$
1, 3, 6, 10, 15	$n(n + 1)/2$
2, 8, 18, 32, 50	$2n^2$
3, 10, 21, 36, 55	$n(2n + 1)$
1, 5, 13, 25, 41	$n^2 + (n - 1)^2$
2, 5, 10, 17, 26	$n^2 + 1$
2, 4, 8, 14, 22	$n^2 - n + 2$

Příloha 7

Posloupnosti – test

Podívejte se na každou z uvedených posloupností. Předpovězte šestý, desátý, třicátý druhý a stý člen. Zkuste také najít výraz pro *n*-tý člen. Zaznamenejte své odpovědi do tabulek:

Prvních pět členů posloupnosti	šestý člen	desátý člen	třicátý druhý člen	stý člen	*n*-tý člen
5, 9, 13, 17, 21					
Použij toto místo podle potřeby pro pomocné kresby					

Prvních pět členů posloupnosti	šestý člen	desátý člen	třicátý druhý člen	stý člen	*n*-tý člen
5, 8, 11, 14, 17					
Použij toto místo podle potřeby pro pomocné kresby					

Prvních pět členů posloupnosti	šestý člen	desátý člen	třicátý druhý člen	stý člen	*n*-tý člen
2, 5, 8, 11, 14					
Použij toto místo podle potřeby pro pomocné kresby					

Prvních pět členů posloupnosti	šestý člen	desátý člen	třicátý druhý člen	stý člen	*n*-tý člen
2, 6, 10, 14, 18					
Použij toto místo podle potřeby pro pomocné kresby					

Prvních pět členů posloupnosti	šestý člen	desátý člen	třicátý druhý člen	stý člen	*n*-tý člen
2, 6, 12, 20, 30					
Použij toto místo podle potřeby pro pomocné kresby					

Další posloupnosti

1) 4, 10, 18, 28, 40 2) 1, 3, 6, 10, 15 3) 1, 5, 13, 25, 41

P

Príloha 8

Stovkový štvorec (od 0 do 99)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ZÁVISLOSTI A FUNKCE

Marie Kubínová, Naďa Stehlíková

Pojem závislost (funkce) a pojmy s nimi spojené patří bezesporu do kurikula základní školy jako součást všeobecného vzdělání. Tento fakt zřejmě nebude v současné době zpochybňován. Nicméně musíme myslet i na transformaci nových názorů na použití funkcí při řešení problémů v přírodních vědách (v hraničních disciplínách, v matematickém modelování apod.) i ve společenských vědách (ekonomické problémy, zpracování dat, interpretace informací z různých zdrojů apod.) stejně jako na didaktickou interpretaci pojmu funkce a souvisejících pojmů ve školních vzdělávacích programech a učebnicích.

Výsledky didaktických analýz (Herman a kol., 1994; Kubínová a kol., 1997) ukazují, že například v československých a českých učebnicích matematiky pro základní a střední školy se od roku 1910 používají dva základní přístupy k didaktické transformaci funkcí. Jeden z nich bývá označován *genetický* a druhý *strukturální*.

V *genetickém* přístupu je inspirací pro ontogenezi pojmu funkce její fylogeneze v historii matematiky a pojem funkce je didakticky konstruován následujícím způsobem:

- Jsou ukázány příklady závislostí ze skutečného života, fyziky, chemie a samotné matematiky.
- Závislosti jsou popisovány tabulkami, grafy, rovnicemi a/nebo slovy.
- Nový pojem funkce se obvykle definuje tak, že se shrnou zkušenosti žáků s pojmem závislost.
- Přímo či nepřímo jsou definovány nové pojmy jako definiční obor, obor hodnot, graf funkce.

- Jsou dány příklady některých elementárních funkcí (přímé úměrnosti, lineární funkce, kvadratické funkce, nepřímé úměrnosti, …) a jsou zkoumány jejich vlastnosti.
- Takto získané vědomosti a dovednosti jsou využity pro řešení matematických a praktických problémů nebo při didaktické interpretaci jiných pojmů (grafické řešení rovnic, diferenciální počet apod.).

Nicméně v polovině šedesátých let 20. století můžeme i v tehdejším Československu pozorovat velkou snahu o modernizaci školské matematiky opřenou o návrat k základům matematiky. To mimo jiné znamenalo použití množinově-logického jazyka a preferenci pojmu funkce jako jednoho ze základních pojmů matematiky již na základní škole. Tento přístup jsme nazvali strukturální, protože při jeho aplikaci se pojem funkce vytváří na úrovni strukturálních představ. Didaktická konstrukce pojmu funkce sestává z následujících fází:

- Pomocí množinově-logického jazyka jsou definovány pojmy uspořádaná množina, kartézský součin dvou množin, binární relace a jsou studovány jejich vlastnosti.
- Je definován pojem zobrazení a jsou vyšetřovány jeho vlastnosti.
- Pojem funkce je definován jako zobrazení množiny do množiny reálných čísel.
- Jsou studovány příklady některých elementárních funkcí a jsou zkoumány jejich vlastnosti.
- Jsou definovány nové pojmy jako například definiční obor, obor hodnot a graf funkce (jako speciální případ obdobných pojmů pro zobrazení).
- Takto získané vědomosti a dovednosti jsou užity pro řešení problémů, matematické modelování skutečných situací nebo v didaktické interpretaci dalších matematických pojmů.

Jinými slovy, pojem funkce je konstruován takovým způsobem, že je chápán jako příklad obecného pojmu zobrazení. Jeho význam ve smyslu popisu „vztahu mezi veličinami" je potlačen. Strukturální přístup prakticky zanedbává fylogenezi pojmu funkce. Pojmotvorný proces je zvláště na začátku organizován bez jakýchkoliv vazeb na skutečný život. Na první pohled je uchopení pojmu závislost (funkce) pro žáky velmi snadné; mohou se s ním učit pracovat a řešit úlohy. Náš výzkum (Kubínová, 1989) však ukázal, že žáci základní školy při uplatňování strukturálního přístupu k zavedení pojmu funkce pracují většinou s pojmem funkce na formální úrovni a kalkulativním způsobem bez vazeb na jeho použití v matematice samotné, v dalších předmětech nebo ve skutečném životě.

Cíle kapitoly

Výše uvedená zjištění nás vedla k tomu, abychom jako přístup, který chceme v tomto textu rozvíjet, zvolili *genetický přístup obohacený novými pohledy:*

- Je sledován vývoj pojmu funkce v historii matematiky a jsou představeny vazby na skutečný život.
- Tento přístup je uplatňován explicitně i implicitně ve vyučování matematice počínaje prvním stupněm základní školy – jako reprezentanti funkce jsou voleny různé závislosti nebo pravidelnosti.
- Pojem funkce je budován postupně prací s velkým množstvím izolovaných modelů funkce (Hejný, 2003).
- Funkce (jako obecný pojem) se definuje jako „předpis", a to jako vyvrcholení pojmotvorného procesu v posledním ročníku základní školy.
- Je zdůrazněna schopnost číst vlastnosti závislostí nebo funkcí z jejich grafů a diagramů a schopnost sestrojit graf funkce (nebo nakreslit diagram) bez použití klasických prostředků matematické analýzy (včetně limity, spojitosti, derivací atd.) a se znalostí vlastností funkcí, které se dají nalézt pomocí kalkulaček nebo matematického softwaru. Důraz se přitom klade na to, že žáci potřebují jak dobré porozumění pojmu funkce, tak procedurální dovednost.

Východiskem našeho přístupu v tomto textu je to, že definice pojmu funkce je konečnou, nikoli prvotní fází pojmotvorného procesu. „Znát pojem" je pro nás něco jiného než „znát definici pojmu". Vycházíme z toho, že na úrovni základní školy stačí, pokud si žáci většinu pojmů vázaných na pojem funkce osvojí intuitivně. Na druhé straně chceme připravovat propedeutickým způsobem některé pojmy středoškolské matematiky, jako jsou pojmy funkce obecně, graf funkce, extrémy funkce, posloupnost, nekonečně malý, nekonečně velký, limita, spojitost atd.

Pokud považujeme ontogenezi pojmu funkce za jeho zkrácenou fylogenezi v historii matematiky, je zřejmé, že období budování tohoto pojmu ve struktuře žákových znalostí musí být velmi dlouhé. Proto navrhujeme připravovat pojem funkce velmi pomalu s výraznými vazbami na další předměty tak, aby se posílil význam a použití funkcí při modelování různých situací a jevů, které se objevují ve světě žáků nebo s nimiž se žáci setkají v budoucnu.

Úlohy v této kapitole jsou zaměřeny zejména na rozvoj následujících žákovských kompetencí. Žák:

- pozoruje svět kolem sebe a popisuje ho matematicky (v rozsahu daném úrovní jeho matematických znalostí), tedy shromažďuje, zaznamenává a interpretuje údaje;
- používá různé nástroje k popisu skutečného života a matematických jevů (tabulky, grafy, diagramy, schémata, obrázky, algebraické symboly, slovní popisy – nejprve s použitím své vlastní slovní zásoby, později také s využitím vhodné matematické terminologie);
- si uvědomuje, že každá z těchto reprezentací popisuje, jak je hodnota jedné proměnné určena hodnotou druhé (jinými slovy, že jsou to různé způsoby popisující stejnou závislost);

- se plynule „pohybuje“ mezi různými reprezentacemi a uvědomuje si jejich výhody a nevýhody;
- „objevuje“ (konstruuje) matematické pojmy (např. závislost, extrém), jejich vlastnosti (např. periodický, spojitý, monotónní, diskrétní) a vztahy mezi nimi (např. přímou úměrnost jako zvláštní případ lineární funkce, vztah mezi tabulkou a grafem jisté funkce), procedury (např. jak dostat informaci o tvaru grafu funkce, jak využít graf přímé úměrnosti pro graf lineární funkce).

V centru pozornosti tohoto textu je funkční myšlení. Některé z komplexnějších úloh však vedou přirozeným způsobem k rozvoji *statistických pojmů*. Na druhé straně není v možnostech této kapitoly představit úlohy pokrývající všechny pojmy, které mohou být spojovány s rozvíjením funkčního myšlení. Spíše jsme se soustředili na výše uvedené cíle a ty jsme spojili s některými úlohami, které je podle našeho názoru a našich zkušeností rozvíjejí. Hlavní požadavky, které byly kladeny na úlohy, byly: (i) týkají se nějakého aspektu funkčního myšlení; (ii) jsou otevřené konstruktivistickému přístupu; (iii) mohou být použity v běžné výuce, tedy vyhovují osnovám, a (iv) náš tým spolupracujících učitelů je schopen je v praxi ověřit.

Struktura kapitoly a jak s ní pracovat

Během práce na projektu IIATM jsme vytvořili a v praxi ověřili různé druhy úloh. Abychom je mohli představit přehledněji, rozdělili jsme je do čtyř podkapitol (podkapitoly se ale svým obsahem překrývají, protože rozdělení úloh není jednoznačné).

1. **Pozorování přírodních jevů** – zahrnuje úlohy, v nichž mají žáci pozorovat a měřit přírodní jevy (jako např. teplotu, vlastní tělo), vytvořit z údajů tabulku a vynést je do grafu.
2. **Plánování výletu** – tematický okruh, v němž jsou žákům zadány údaje a ti je mají interpretovat.
3. **Úlohy ze života** – úkoly se týkají skutečných grafů funkcí jevů z reálného života.
4. **Opakování funkcí** – obsahuje některé návrhy pro opakování a diagnostikování žákovských znalosti o funkcích.

Rozdělení kapitoly do čtyř podkapitol může být také interpretováno ve smyslu cesty:

od reality (zkušeností žáků) → k matematice a

od tematicky orientovaného jazyka → k matematickému jazyku

Úlohy v podkapitole 1 jsou svým obsahem nejblíže k dalším předmětům jako biologie, fyzika a zeměpis. Jejími tématy se mají zabývat i další předměty, nejen matematika. Matematické modely vznikající v této podkapitole přispívají k žákovu porozumění světu kolem něj. Tedy údaje, tabulky a grafy zpracované v této podkapitole

přináší žákům novou informaci. Využíváme skutečnost, ale „úlohy ze života“ – jak dítě roste nebo jak se střídá den a noc, nejsou úlohy, které se dají řešit, ale jsou to jevy, které se mají pozorovat. V podkapitole 2 se do popředí dostávají funkce (grafy). Žáci se učí interpretovat grafy. V podkapitole 3 jsou využívány kontexty ze skutečného života, aby žáci vyvodili základní vlastnosti funkcí a grafů funkcí. V podkapitole 4 přichází do popředí matematika sama a především funkce bez (zjevného) spojení se skutečným životem.

Čtyři podkapitoly budou dále představeny pomocí stručné formulace úloh.

Úloha číslo a název	**Úloha (stručný popis)**
Pozorování přírodních jevů	
F1: Údaje o sobě	Zaznamenejte tabulkou a grafem věk všech žáků ve třídě a jejich výšku. Vytvořte „průměrného“ žáka třídy. Vyšetřujte percentilové grafy.
F2: Teplota	Několikrát za den měřte na stejném místě teplotu, zaznamenávejte hodnoty a vyneste je do grafu. Srovnejte své výsledky s výsledky ostatních.
F3: Pravidelnost	Pozorujte, zaznamenejte a interpretujte údaje pozorované kolem vás během roku (změna teploty, délky dne a noci).
Plánování výletu	
F4: Teplota během roku	Čtěte informace z grafu změn průměrných teplot během roku.
F5: Bára plánuje výlet	Čtěte grafy změn teploty a vyberte určitý týden, který splňuje nějaké podmínky. Kombinujte podmínky.
Úlohy ze života	
F6: Jízdní grafy	Interpretujte jízdní grafy, popište situaci z reálného života, kterou představují, sestrojte vlastní jízdní grafy.
F7: Křivky	Interpretujte různé druhy „křivek“. Čtěte grafy týkající se jevů z reálného života. Najděte příklady grafů a diagramů. Popisujte vlastnosti některých funkcí.
F8: Povinné ručení	Řešte praktické úlohy související s povinným ručením. Vyneste graf.
F9: Putování k Měsíci	Vyšetřujte situace týkající se přímé úměrnosti. Navrhujte strategie pro řešení „praktických“ úloh.
Opakování funkcí	
F10: Co říká graf	Interpretujte určitý graf po částech lineární funkce (popište situaci slovně).
F11: Třídění grafů	Klasifikujte grafy funkcí podle daného kritéria, uvažujte své vlastní kritérium.

Kapitola počítá s různými vyučovacími strategiemi i učebními přístupy žáků. Podle našeho názoru jsou všechny tematické okruhy v podkapitolách soběstačné a jejich volba závisí na učiteli a jeho situaci – pokud např. nemá k dispozici několik po sobě následujících vyučovacích hodin, neměl by dělat skupiny úloh F1 a F6. Na druhé straně se úlohy F4 a F5 dají realizovat během jedné nebo dvou vyučovacích hodin. Po úloze F4 by měla následovat úloha F5, protože sama o sobě je spíše nezajímavá. Ze zřejmých důvodů by úlohy z podkapitoly 4 měly být zařazeny jako poslední. Výše jsme popsali naše důvody, proč je podkapitola 1 zařazena před podkapitolu 2, ovšem podkapitola 2 může být pro žáky snadnější, a tak mohou být úlohy v ní zařazené realizovány dříve.

Zadání navrhovaných úloh jsou flexibilní v tom smyslu, že zde uvedené formulace jsou jen jednou z možností specifickou pro danou věkovou skupinu a mohou být upraveny učitelem tak, aby co nejvíce vyhovovaly jeho třídě. Popis experimentu s určitou věkovou skupinou žáků by měl být chápán jako návrh nebo vodítko, které může učitel dále rozpracovat. Jde o konkrétní ilustraci přizpůsobení úlohy věku žáků, přičemž věk žáků, pro něž je úkol vhodný, je dán jak *složitostí úkolu,* tak složitostí *užívaného jazyka.*

Kontext vyučovacích experimentů

Většina úloh představených v tomto textu byla realizována ve vyučování na českých školách v letech 2003–2006 skupinou čtyř našich spolupracujících učitelů. U některých úloh jsme také zahrnuli experimenty z dalších zemí (a sice z Řecka a Velké Británie). Experimenty jsou krátce popsány tak, abychom čtenáři poskytli praktické zkušenosti a povzbudili ho k porovnání jeho zkušeností s úlohou se zkušenostmi našich spolupracujících učitelů. Popis experimentů přirozeně nemůže být úplný. Vybrali jsme jen ty jevy, které jsme považovali za důležité a nejvíce informativní pro ilustraci použití úloh. Tato volba sama o sobě představuje jakousi interpretaci. V komentářích a závěrech jsme přidali také krátké interpretace toho, co se stalo ve třídě během experimentálního vyučování. Čtenář by si však měl udělat své vlastní závěry.

Experimenty jsou ilustrovány mnoha příklady práce žáků, z nichž většina je obsažena na průvodním DVD. Obrázky, videa, doplňkové texty a pracovní listy přístupné jen na DVD budou uvedeny symbolem , , , .

Jak je uvedeno nahoře, tým pracující na této kapitole se skládal ze dvou autorek a čtyř spolupracujících učitelů. Během našich pravidelných schůzek jsme nejprve diskutovali o návrzích úloh. Spolupracující učitelé je upravili, pokud to bylo nutné, aby se hodily pro určitý věk žáků, které právě vyučovali, a vyzkoušeli je ve výuce. Potom jsme společně diskutovali o jejich zkušenostech z realizace ve třídě a o možných modifikacích. Podle možností jsme nechali spolupracující učitele vybrat si a rozpracovat úlohy, které sami chtěli vyzkoušet, spíše než bychom jim prezentovali

hotové úlohy a nutili je, aby je užili ve vyučování. Toto značně přispělo k úspěchu práce našeho týmu a jeho stabilitě.

Pro větší informovanost čtenáře o souvislostech, v nichž vyučovací pokusy probíhaly, krátce popíšeme školy, kde byly organizovány vyučovací experimenty.

Pražská základní škola 1 (zkratka PZŠ1): Jde o běžnou základní školu v centru Prahy (třídy 1–9, 18 tříd, asi 400 žáků). Většina žáků pochází z dobře zajištěných rodin, ale jsou tam i žáci z národnostních menšin. Všichni učitelé (s výjimkou učitelů jazyků) jsou plně kvalifikovaní. Škola je dobře vybavena technikou a výukovými pomůckami. Organizuje hodně aktivit v oblasti zdravého životního stylu a prevence zneužívání drog, přičemž těsně spolupracuje s Magistrátem hl.m. Prahy v rámci různých programů.

Pražská základní škola 2 (zkratka PZŠ2): Jde o běžnou základní školu na okraji Prahy (třídy 1–9, 26 tříd, asi 700 žáků). Areál školy je obklopený panelovými domy, žáci většinou pocházejí z dobře zajištěných rodin. S výjimkou učitelů jazyků jsou všichni učitelé plně kvalifikovaní pro předměty, kterým vyučují. V mnoha předmětech jako například matematika, český jazyk, dějepis a výtvarná výchova je často užívána projektová výuka. V 6.–9. ročníku jsou třídy, které se specializují na cizí jazyk, nebo informatiku.

Následující tři školy jsou osmiletá gymnázia se studenty mezi 11 a 19 roky.

Pražské osmileté gymnázium (zkratka POG): Jedná se o soukromou církevní školu na okraji Prahy. Vyučuje podle stejných osnov jako obdobné státní školy; jediná změna je v zařazení předmětu náboženství. Škola je středně velká (asi 360 studentů). Víc než 90 procent učitelů je plně kvalifikováno a jedna třetina z nich je mladší 30 let. Učitelé jsou obecně otevření novým přístupům k vyučování, ale stále spolu obtížně spolupracují.

Pražské gymnázium 1 (zkratka PG1): Jde o školu na okraji Prahy. Je známa svým poměrně tradičním přístupem k vyučování, mezi studenty v okolí nepatří mezi nejpopulárnější školy a není obvykle jejich první volbou. Ve škole je asi 400 studentů. Učitelé jsou při vyučování poměrně konzervativní.

Pražské gymnázium 2 (zkratka PG2): Jedná se o velkou školu nedaleko středu Prahy s asi 600 studenty. Škola je v mnoha směrech poměrně inovativní. Jako jedna z prvních škol v Praze integrovala studenty se zvláštními potřebami. Učitelé jsou výjimečně otevření změnám ve vyučování.

Podkapitola 1: Pozorování přírodních jevů

Pozorováním přírodních jevů myslíme pozorování, která žák může realizovat ve světě kolem sebe. Mohou být krátkodobá (například změny teploty) nebo dlouhodobá (například změny v ročních obdobích). Úlohy tohoto typu jsou podle našeho názoru vhodným kontextem pro postupnou aplikaci konstruktivistických přístupů k vyučování. Žáci pracují s předpojmy, které vytvářejí svým vlastním zkoumáním.

Učitel je vede k rostoucí autonomii. Často se stane, že žáci objeví mnoho předpojmů dříve, než je to předpokládáno studijním plánem. Tak je možné budovat pojmy ve spirále a řídit pojmotvorný proces tak, aby sloužil potřebám jednotlivých žáků nebo skupiny žáků.

F1 Údaje o sobě neboli „Dívejme se na tu naši třídu!“

Tyto úlohy tvoří dlouhodobý projekt. Týkají se měření – žáci měří různé údaje, které se týkají jich samotných, vytvářejí tak charakteristiky sebe sama.

F.1.1: *Vytvořte „průměrného“ žáka třídy.*

F1.2: *Zaznamenejte v tabulce a obrázkem následující údaje shromážděné ve vaší třídě: věk (v měsících) a výška (v centimetrech).*

F1.3: *Zkoumejte percentilové grafy. Umístěte sami své charakteristiky do grafu podle své výšky a indexu tělesných hmotností BMI. Zjistěte, jak vysocí byste mohli být, až vám bude 18 let.*

Materiál: Metr, výtvarné potřeby, Pracovní list F1a

Experiment 1, ČR, 6. ročník, PZŠ2

F1.1: Učitelka matematiky a učitelka výtvarné výchovy zorganizovaly tuto úlohu jako projekt v listopadu a v následujícím roce v březnu. V listopadu byly realizaci projektu věnovány dvě vyučovací hodiny matematiky a čtyři hodiny výtvarné výchovy a v březnu pět hodin matematiky.

Učitelky daly žákům úkol F1.1. a učitelka matematiky je požádala, aby zaznamenali do tabulek následující kvantitativní charakteristiky: datum narození, výška, délka nohy, ruky, prstů pravé ruky, obvod krku a hlavy. Pak žáci měli zjistit velikost šatů a bot, které jim obvykle kupují rodiče. Z kvalitativních charakteristik učitelka navrhla, aby žáci zjišťovali: barvu očí, barvu vlasů, délku vlasů.

Žáci přidali další charakteristiky: známka z matematiky na konci posledního školního roku, mimoškolní aktivity, oblíbená barva a jídlo, oblíbená osoba, oblíbené místo.

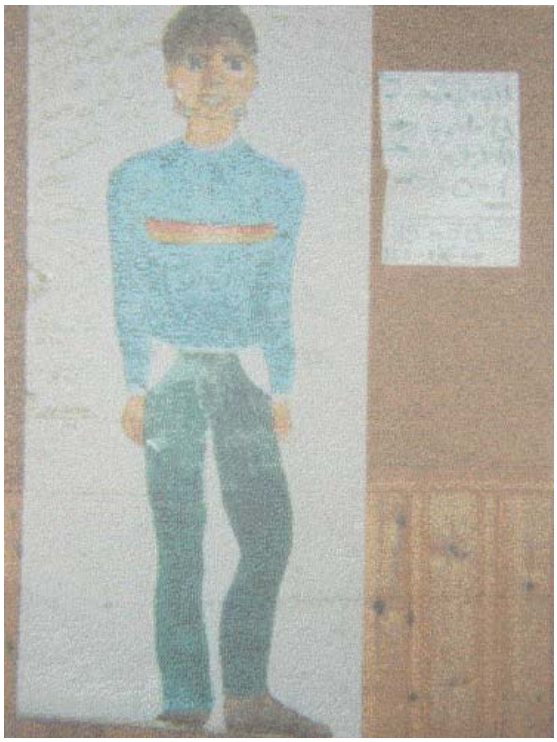
Žáci měřili kvantitativní charakteristiky a zaznamenávali je na papír společně se svými odpověďmi týkajícími se kvalitativních charakteristik. Při práci s údaji žáci sami uvedli a začali používat pojem aritmetický průměr (nazvali ho spontánně „průměrnou hodnotou“). V hodinách matematiky vypočítali z měřených údajů všechny aritmetické průměry. Také sami poukázali na skutečnost, že výsledky jsou závislé na přesnosti měření.

Učitelka výtvarné výchovy se pro učitelku matematiky překvapivě rozhodla použít jinou metodu. Požádala žáky, aby si stoupli do řady podle své výšky, a vybrala tři prostřední žáky (ve třídě byl lichý počet žáků). Pak si měli lehnout a zbývající žáci

načrtli obrys jejich těla na velký arch papíru. Tak vznikly tři figury v životní velikosti.

Poté byla udělána čtvrtá figura pomocí vypočítaných průměrů a vznikl nástěnný obraz „průměrného žáka 6. třídy ve skutečné velikosti“ (obr. F1a).

Když byli žáci požádáni o porovnání čtyř figur, byli překvapení, jak moc se liší. Začali diskutovat o tom, proč. První návrh byl, že nebyli při obkreslování těl dostatečně přesní. Druhý se týkal myšlenky, že ležící tělo má jiný tvar než obraz stojícího člověka. Další žák poukázal na to, že při tvorbě „průměrného“ žáka z vypočítaných průměrů byly řádně změřeny jen některé charakteristiky a ostatní byly jen odhadnuty.



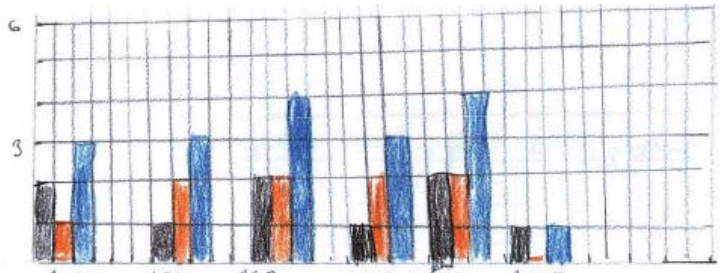
Obr. F1a

Komentář: Aniž si to žáci uvědomili, vytvořili průměrnou hodnotu údajů pomocí dvou statistických charakteristik – mediánu a aritmetického průměru. Tedy z matematického hlediska nepřekvapuje, že výsledky nejsou stejné. Protože se tyto pojmy zavádí až mnohem později (v 8. ročníku), shrnula učitelka práci tak, že výsledky jsou závislé na metodě, kterou si vybrali, a na přesnosti jejich měření. K této zkušenosti se učitelka může vrátit později, až bude zavádět medián.

F1.2: Z údajů naměřených v předcházejícím úkolu (v listopadu) žáci udělali tabulku četností a sloupcový diagram – jeden pro výšku (v centimetrech) a jeden pro věk (v dokončených měsících) (obr. F1b). Určili pro tyto dvě charakteristiky největší a nejmenší hodnoty ve třídě a shodli se na tom, že označí vodorovnou osu pro výšku v intervalech 5 centimetrů. Později použili stejné intervaly pro věk v měsících. Výška sloupců představuje počet žáků.

V březnu se učitelka matematiky vrátila k původnímu úkolu a zorganizovala nové měření. Žáci si uvědomili, že výšku musí měřit znovu, ale že u věku stačí přidat čtyři měsíce k údajům, které již mají. Poté, co vytvořili nové tabulky a diagramy, učitelka vyvolala diskuzi o charakteru obou diagramů. Jeden žák řekl: „Diagramy pro naše výšky v listopadu a březnu by měly být úplně jiné, protože všichni rosteme různým způsobem.“ „V případě věku můžeme dostat nový graf z toho starého jeho posunutím doprava, protože věk se změnil stejně pro každého.“

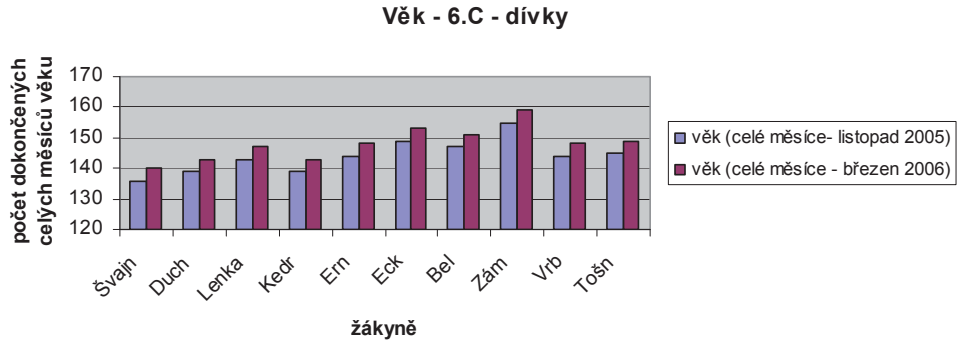
Když žáci porovnali diagramy s těmi starými, ke svému překvapení si všimli, že tomu tak pro věk není. Protože nemohli přijít na příčinu, důvod vysvětlila učitelka. Časový interval mezi měřeními byl menší než rozdíl věků mezi dvěma body intervalu. Žáci, jejichž věk byl při prvním měření právě uvnitř časového intervalu, zůstanou při druhém měření po čtyřech měsících ve stejném intervalu. Podívejme se na příklad: V listopadu bylo Josefovi 12 let a 4 měsíce a byl ve skupině žáků do 150 měsíců. V březnu byl ve skupině žáků do 155 měsíců. Na druhé straně bylo Davidovi v listopadu 12 let a 2 měsíce a byl součástí Josefovy skupiny. V březnu mu bylo 12 let a 6 měsíců, a tak zůstal ve stejné skupině, zatímco Josef se přesunul vpravo.



aritmetický průměr	150	155	160	165	170	175
dívky	2	1	1	1	2	1
chlapci	1	2	2	2	2	0
všichni	3	3	4	3	4	1

Obr. F1b

Učitelka udělala diagramy v programu Microsoft Excel (obr. F1c), které byly názornější – týkaly se jednotlivých žáků, ne skupin žáků. Žáci názorně uviděli, že změna ve věku je stejná pro každého.



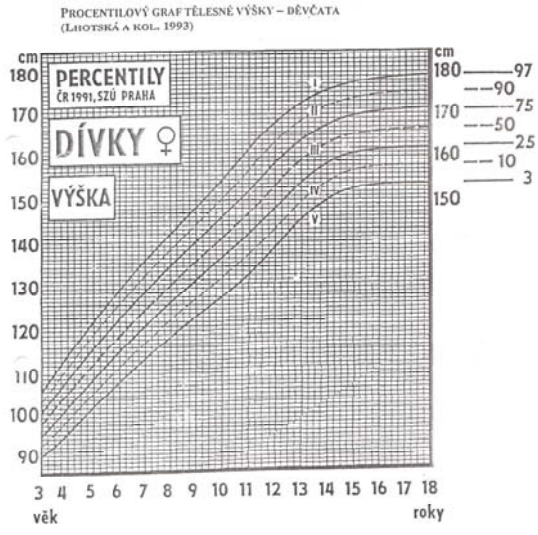
Obr. F1c

Závěr pro F1.1 a F1.2: Výše uvedená aktivita je pěknou ilustrací toho, jak se dají otevřené problémy využít k vytvoření pozitivního klimatu pro objevitelské aktivity žáků a umožnit jim tvořit si znalosti sami a svým tempem. Tak je v praxi naplňován jeden z nejdůležitějších principů konstruktivistických přístupů k vyučování.

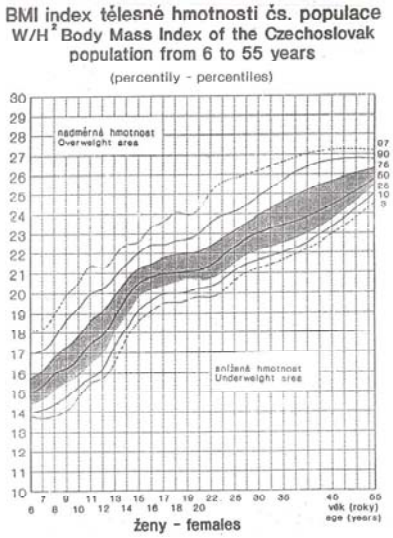
Co se týče matematických znalostí, žáci zlepšili své schopnosti sbírat, klasifikovat a zaznamenávat údaje v tabulce a grafu. Navíc se zabývali pojmem aritmetický průměr a kvantitativními a kvalitativními statistickými charakteristikami. A v neposlední řadě poznali, jaká omezení matematika má při popisu reality matematickými modely.

F1.3: Přirozeným pokračováním úlohy, v níž žáci měřili různé části svého těla, bylo podle našeho názoru to, že učitelka informovala žáky o existenci přehledů středních hodnot výšky pro děti jistého věku. Používají je například pediatři, aby zjistili, zda je výška a váha dítěte v mezích, a trenéři, když chtějí například odhadnout, zda je šance, že bude dítě dostatečně vysoké, aby hrálo basketbal.

Po tomto motivačním úvodu žáci dostali percentilové grafy (viz Worksheet F1a a obr. F1d a F1e, kde jsou grafy pro děvčata) podle svého pohlaví a měli je prozkoumat. Většinou byli zmatení a nevěděli, jak grafy číst. Učitelka jim tedy musela hodně pomoci. Vysvětlila, co je uvedeno na vodorovné a svislé ose, a také, že nejmenší část vyznačená na vodorovné ose odpovídá jedné čtvrtině roku. Žáci měli vztáhnout svůj věk k nejbližšímu dokončenému měsíci. Každý žák byl požádán, aby pomocí pravítka nakreslil dvě úsečky – vodorovnou a svislou, které odpovídají jeho výšce a věku, a aby do jejich průsečíku udělal tečku. Pak žáci diskutovali o tom, zda jejich výška odpovídá průměru pro jejich věk nebo ne. Tato část práce byla pro žáky příjemná, hodně se smáli. Učitelka vysvětlila, že čím blíže jsou k nejnižší křivce, tím menší jsou ve srovnání s populací chlapců/děvčat jejich věku. Oblast omezená křivkami ukazujícími 25 a 75 percentil ukazuje interkvartilový rozsah výšky lidí. To bylo pro žáky poměrně pochopitelné.



Obr. F1d



Obr. F1e

F

Dále měli žáci v grafu zjistit, jak vysocí mohou být, až jim bude 18 let. To se ukázalo jako velmi obtížné a vyžadovalo to hodně pomoci od učitelky. Žáci museli posunout průsečík obou narýsovaných úseček označený křížkem podél křivek doprava (ve stejném poměru vzdálenosti k oběma omezujícím křivkám). Ovšem i přes velkou náročnost byla tato situace pro ně motivující; byli zvědaví na to, jak tuto informaci v grafu zjistí.

Nakonec chtěla učitelka použít graf pro index tělesné hmotnosti BMI. Zdálo se, že o tom ještě nikdo neslyšel. Objevily se dva problémy. Tři žáci z 19 odmítli udat svou hmotnost a navíc se výpočet BMI ukázal jako velmi obtížný. Žáci udělali výpočet podle podrobného postupu diktovaného učitelkou: „Zaznamenejte svou výšku v metrech“ (museli převést svou výšku v centimetrech na metry), „vynásobte číslo samo sebou“ (žáci ještě neznali pojem druhé mocniny), „zaznamenejte svou hmotnost v kilogramech a vydělte to součinem, který jste získali dříve.“ (Například jestliže je hmotnost 37,5 kg a výška 1,44 m, BMI se rovná 18,1.) Mnoho žáků nebylo schopno dokončit výpočty, takže to učitelka musela udělat za ně. Pak měli žáci zakreslit konečné údaje do grafu. To vyvolalo mnoho smíchu i zklamání (někteří měli nadváhu). Protože si učitelka uvědomovala citlivost tématu, nebyly výsledky veřejně diskutovány.

Závěry pro F1.3: Motivační síla percentilových grafů je nesporná, jak potvrzují i výše uvedené zkušenosti, ovšem ukazuje se, že práce s nimi je pro žáky tohoto věku (12 let) velmi náročná. Žáci by měli získat více zkušeností se soustavou souřadnic a čtením grafu. Soustava souřadnic, v níž je nakresleno více křivek, je pro žáky tohoto věku poměrně komplikovaná. Pokud se používá graf BMI, měli by žáci být obeznámení s pojmem druhé mocniny. Pokud je nám známo, percentilové grafy jsou dostupné v mnoha zemích. Protože se týkají dětí určité země (a jistého časového období), učitel by si měl opatřit grafy příslušné pro zem, kde učí, pokud je chce používat.

Experiment 2, UK, 10–12 let, Základní škola

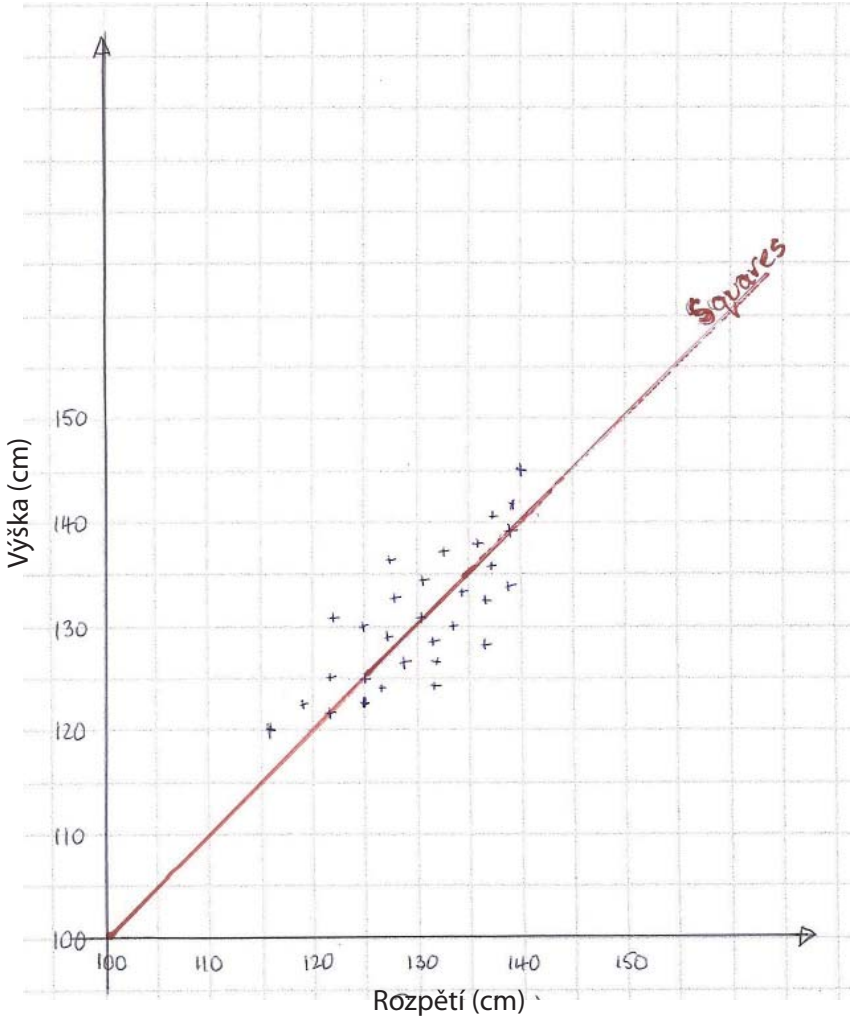
G. Littler navrhl dvě modifikace úlohy F1.2.

> *1. Jsi čtverec? (Littler, 2004)*
>
> *Změřte svou výšku a rozpětí svých paží. Zapište míry do tabulky tak, že výška a rozpětí paží pro různé jedince jsou umístěny vedle sebe. Očekávali byste, že výška člověka je stejná jako rozpětí jeho paží? Můžete na čtverečkovaném papíře zobrazit údaje tak, aby bylo jednoduše vidět, kteří žáci jsou čtverce? Potvrdil váš graf vaši původní představu o výšce a rozpětí paží?*
>
> *2. Výrobce košil*
>
> *Jaké míry by musel vzít výrobce košil, aby mohl vyrobit hodně košil, které by mohl označit pro věk 10–11 let?*

Zkušenosti s první úlohou zde krátce popíšeme.

Žáci měli pracovat ve skupinách a měřit svou výšku a rozpětí paží, čímž se rozumělo vzdálenost od špičky prstu ke špičce prstu u roztažených paží do stran. Učitel si všiml, že ačkoli žáci neměli problém změřit svou výšku, problémem bylo změření rozpětí, protože zkoušeli držet krejčovský metr prsty, zatímco ostatní zjišťovali délku. Učitel tedy navrhl, aby se postavili zády ke zdi a opřeli jednu špičku prstu o roh tak, že jeden konec byl fixovaný, díky čemuž bylo měření vzdálenosti ke špičce prstu druhé ruky snadné a přesnější.

Dále měli žáci použít čtverečkovaný papír k zakreslení údajů do grafu. Nejdříve vytvořili dvojice údajů a seřadili je podle výšky sestupně. Většina z nich si rychle všimla, že mezi oběma mírami není pro většinu třídy velký rozdíl. Výšky dosahovaly od 120 cm do 145 cm, rozpětí paží od 116 cm do 140 cm.



Obr. F1f

Při kreslení grafu závislosti výšky a rozpětí paží chtěli někteří žáci začínat obě osy v nule, ale jeden ze žáků řekl, že všechny údaje „by byly v horním rohu“, takže se rozhodli začít obě osy na 100 cm a pokračovat až do 150 cm. Žáci zakreslili do grafu souřadnice tak, že výška byla zaznamenávána na svislé ose a rozpětí paží na vodorovné ose (příklad grafu je na obr. F1f). Žáci byli překvapení, jak blízko jsou údaje u sebe, zvlášť když jeden ze žáků navrhl, aby také zakreslili graf, kdy je výška a rozpětí paží shodná. Jakmile to udělali, uviděli, že jejich údaje jsou skutečně velmi blízko přímce jdoucí body [100;100] a [150;150]. Uvědomili si, že většina z nich je ‚čtvercem', tedy, že jejich výška je přibližně stejná jako jejich rozpětí paží.

Závěr: Tato aktivita byla pro žáky velmi motivující, protože byli zvědaví na to, jaký výsledek dostanou. Použití čtverečkovaného papíru vedlo přirozeně k nakreslení grafu. Protože rozložení výsledků bylo velmi blízké, museli žáci poměrně přesně zakreslovat údaje. Výhoda zakreslení údajů do grafu oproti zapsání do tabulky je zřejmá.

F2 Teplota

Série úloh F2a – F2c byla reakcí spolupracujících učitelů na následující výzvu.

> *Navrhněte úlohu nebo sérii úloh zaměřených na sběr údajů o teplotě a jejich zpracování.*

Během schůzky týmu byly formulovány následující úlohy.

> *a) Během určitého týdne změřte teplotu třikrát za den, v 8 hodin ráno, ve 13 hodin odpoledne a v 18 hodin odpoledne, a to na jednom místě. Zaznamenejte hodnoty. Vytvořte graf hodnot. Můžete pracovat ve skupinách. Jak můžeme popsat údaje?*
>
> *b) (Pro 9. ročník.) Jak můžeme údaje dále zpracovat? Jak můžeme popsat údaje? Udělejte prezentaci celého projektu o teplotách.*
>
> *c) Čtyři třídy z různých škol měřily teplotu během stejného týdne a sestavily tabulky. Znázorněte údaje z tabulek grafickým způsobem. Co můžete pozorovat?*

Materiál: Teploměr

Experiment 1, ČR, 9. ročník z PZŠ1, žáci ve věku 12–13 let z POG, 3. a 4. ročník z PZŠ2

F2a): 9. ročník z PZŠ1 měřil údaje v Hrachově během školy v přírodě. Žáci z POG měřili na čtyřech různých místech (viz obr. F2a), 3. a 4. ročník z PZŠ2 měřil v Praze. Údaje byly zpracovány během jedné hodiny matematiky; žáci 9. ročníku tématu věnovali dvě vyučovací hodiny.

Datum	ŠvP Zlenice u Čerčan			KG Kozinova			Prachatice			Slapy		
	8:30	13:00	18:00	8:45	12:45	18:00	8:45	12:45	18:00	8:45	12:45	18:00
31. 5. 04	-	-	-	20,5°C	25,5°C	-	23°C	12°C	-	-	-	-
1. 6. 04	14,5°C	22°C	15,5°C	20°C	18°C	-	14°C	16°C	-	15°C	17°C	16°C
2. 6. 04	11°C	12°C	11,5°C	17°C	22°C	-	10°C	13°C	-	13°C	14°C	15°C
3. 6. 04	11°C	13,5°C	13°C	15,5°C	22°C	-	11°C	13°C	-	13°C	16°C	15°C
4. 6. 04	21,5°C	27°C	19°C	20°C	25,5°C	-	15°C	17°C	-	15°C	20°C	19°C
5. 6. 04	13°C	22,5°C	16°C	-	-	-	12°C	14°C	-	13°C	15,5°C	14°C
6. 6. 04	14,5°C	24°C	18°C	-	-	-	11°C	17°C	-	13,5°C	17°C	16,5°C
7. 6. 04	24°C	-	-	20°C	24,5°C	-	15°C	26°C	-	14°C	28°C	21,5°C

Obr. F2a

Byla diskutována otázka přesnosti měřených údajů; žáci se radili s učitelem zeměpisu, kam umístit teploměr, aby získali platné údaje. Byly vytvořeny tabulky hodnot jako např. tabulka na obr. F2a. Výběr metody sestavení grafů byl ponechán žákům. Někteří z nich použili počítačové programy včetně MS Wordu a MS Excelu. Bylo zajímavé, že někteří zaznamenali teplotu na svislé ose a jiní na vodorovné (obr. F2d). Učitelé museli vysvětlit, že platí dohoda, že se hodnoty závisle proměnné zakreslují na svislé ose, zatímco hodnoty nezávisle proměnná na vodorovné ose.

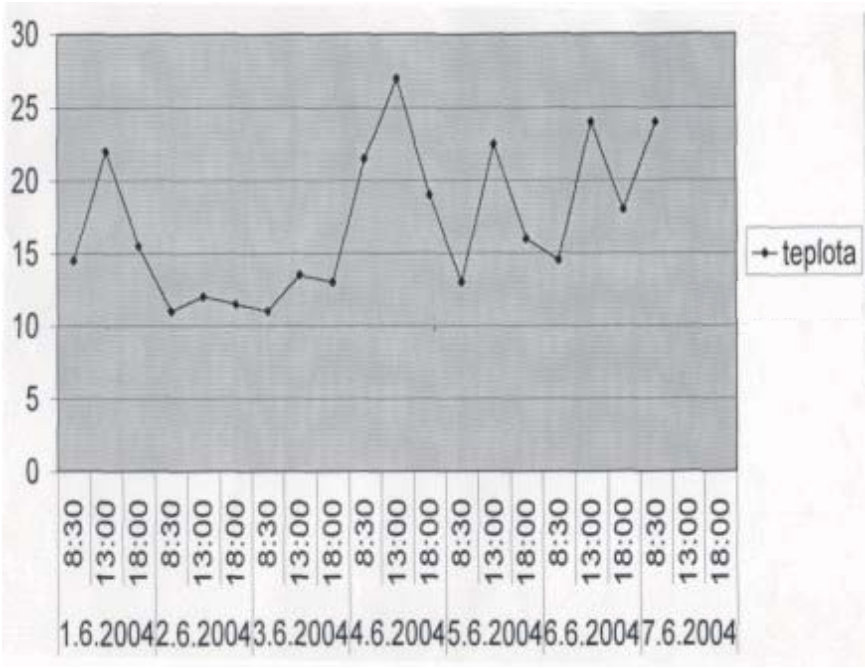
Přes naše očekávání žáci spontánně nepoužívali slova jako rostoucí nebo klesající, ale většinou poukazovali na to, že teplota klesla nebo vzrostla o několik stupňů. Matematická terminologie byla zavedena jen pro žáky 9. ročníku.

Většina žáků zkusila spojit body grafu tak, že vznikl spojnicový diagram. Když se učitel zeptal proč, jeden student odpověděl, že „se to obvykle takto dělá".

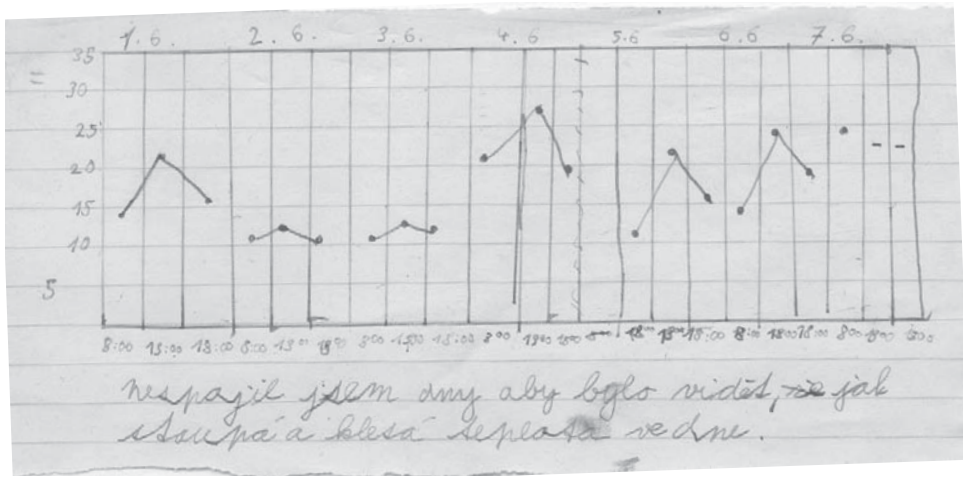
Komentář: To odpovídá zjištěním Kopáčkové (2005b), která tvrdí, že dokonce když žáci zakreslí údaje do grafu správně, často se je pokouší spojit nějakou křivkou, a to křivkou jim známou jako např. parabolou (srovnej s grafem na obr. F2e, v němž se žák pokusil udělat přímku).

Podívejme se na některé z grafů podrobněji. Srovnejte grafy na obr. F2b a F2c. Ve druhém chtěl žák zdůraznit změny teploty během dne a v prvním je zobrazen vývoj teplot.

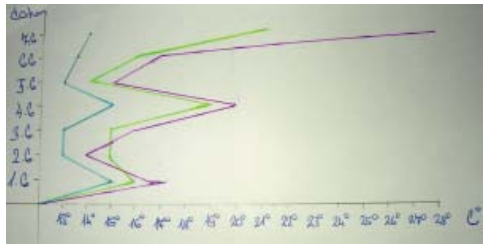
Všimněte si, že na obrázku F2d graf začíná v průsečíku os, třebaže tato hodnota nebyla naměřena. Tento jev se objevil několikrát. Mnoho grafů v učebnicích začíná v průsečíku os, což mohlo žáky vést k vytvoření určitého stereotypu. Graf na obr. F2e ukazuje další stereotyp, který mnoho žáků používá – bez ohledu na zadání úlohy konstruují graf tak, že jde o graf lineární (po částech lineární) funkce. Našemu žákovi se to podařilo pomocí ‚flexibilní' stupnice na ose teploty.



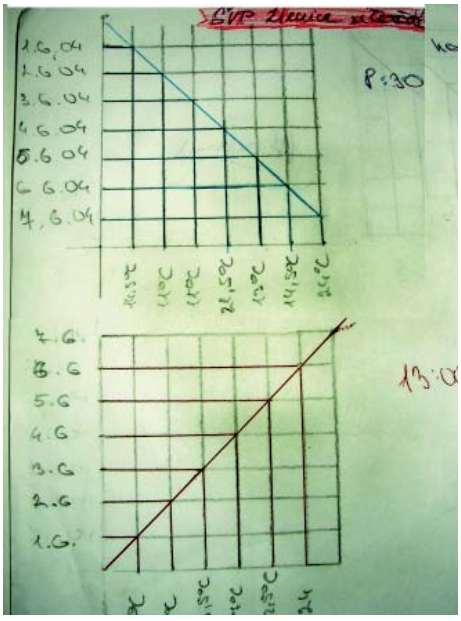
Obr. F2b



Obr. F2c



Obr. F2d



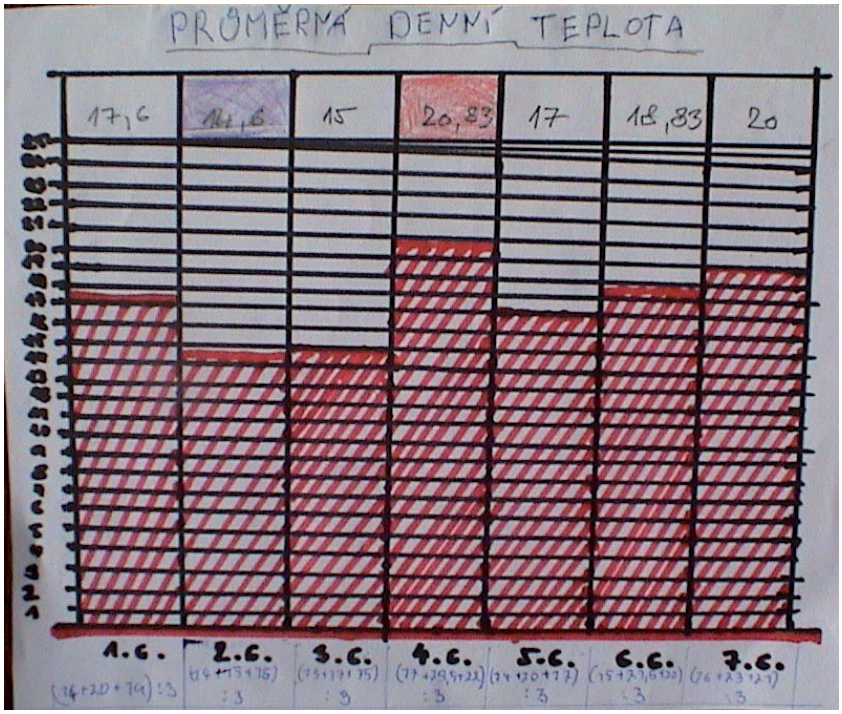
Obr. F2e: 8. ročník

Více příkladů žákovských grafů je v Obr. F2g–q.

Experiment 2, ČR, 9. ročník PZŠ1

F2b): Žáci 9. ročníku navrhli další zpracování údajů – zjistit průměrnou teplotu pro den a pro týden pomocí krajních hodnot teploty. Protože už znali některé statistické pojmy, navrhli vypočítat průměrnou teplotu (pro den, pro část dne během celého týdne, pro celý týden), modus, medián, četnost hodnot, změny teplot během dne/týdne (obr. F2f). Nejdříve vše zpracovali ve skupinách a během druhé hodiny připravili jeden plakát (Obr. F2j).

F2c): Skupina tří žáků z 9. ročníku připravila prezentaci v PowerPointu (PowerPoint), v níž představili svou práci na projektu učitelům z praxe během konference Dva dny s didaktikou matematiky (VideoF2). Prezentaci připravili samostatně bez pomoci učitele. Vybrali si grafy, které považovali za nejlepší (v jednom z grafů je chyba, začíná a končí v bodě [0;0], ale tato hodnota nebyla naměřena). Prezentace také obsahovala návrhy ostatních žáků ve třídě, jak pokračovat s projektem. Nakonec shrnuli, co se naučili. Je zajímavé, že zdůraznili nejen schopnost pracovat s počítačem a udělat graf, ale také spolupracovat v týmu a komunikovat.



Obr. F2f

Experiment 3, ČR, 16 let, PG2

F2b): Tato úloha byla zadána ve třídě šestnáctiletých studentů, kteří se neúčastnili vlastních měření. Učitelka hodnotila úroveň jejich matematických znalostí jako poměrně nízkou a jejich zájem o matematiku jako malý. Dostali údaje ze čtyř škol (Úloha F2a). Pracovali ve dvojicích. Objevily se tyto druhy grafů: sloupcový diagram, spojnicový diagram, nespojitý graf. Někteří studenti to komentovali: „Měřili jen v určitých časech, toto jsou diskrétní hodnoty; spojovací čára by nemusela vyjadřovat skutečnou situaci." Podobně jako u úlohy F2a graf jedné skupiny začínal v bodě [0;0], třebaže tato hodnota nebyla naměřena. Studenti sami nepřišli se žádnými nápady, pokud se týče porovnání údajů, tedy interpretace údajů z tabulky nebo z grafu. Vzhledem k nedostatku času je učitelka k tomu ani nepovzbuzovala.

Experiment 4, Řecko, třída C (12–13 let)

Úloha F2a byla vyzkoušena v Řecku, a sice ve třídě C (podrobnější popis třídy viz str. 281). Žáci shromáždili údaje v tabulkách, některé skupiny v samostatných tabulkách pro den a noc a některé v jediné tabulce, a pak zpracovali různé typy diagramů. Třebaže učitel neurčil, jak by měly diagramy vypadat, mnohé byly udělány na čtverečkovaném papíře. Dvě skupiny pokračovaly až k výpočtu průměrné denní teploty.

Závěry pro F2: Všichni spolupracující učitelé udali, že žáky úloha bavila (s výjimkou PG2 studentů, kteří se neúčastnili vlastního měření). Žáci se cítili motivováni tím, že jsou součástí projektu, jehož se účastní několik škol. Zdá se, že někteří z nich nepovažovali tuto práci za skutečné učení; zaznamenali jsme např. následující výrok jednoho žáka 7. ročníku: „Dneska se nebudeme učit, zase budeme dělat nějaké grafy."

V úlohách F2 žáci rozvinuli svou schopnost shromažďovat, klasifikovat a zaznamenávat údaje v tabulce, grafu a diagramu, pohybovat se mezi různými reprezentacemi a také interpretovat grafy. Starší studenti (úroveň C) si ujasnili pojem závisle a nezávisle proměnné, rostoucí a klesající funkce a diskrétní funkce. V této souvislosti považujeme za velice důležité diskutovat se staršími žáky o otázce reprezentace diskrétních údajů. Vlastně by měly být reprezentovány jednotlivými „tečkami", ale ty jsou velmi často spojeny, čímž vznikne spojnicový diagram (graf). Spojnicové diagramy se používají pro zachycení změn v čase nebo prostoru. Jsou populárnější než ostatní typy grafů, protože umožňují zřetelně vidět trendy a je lehké je vytvořit. Spojnicové diagramy jsou zvláště užitečné v oblasti statistiky a dalších věd a patří mezi nejběžnější nástroje používané pro prezentaci statistických údajů v médiích, jako jsou noviny, televize a internet. Vznikají spojením jednotlivých bodů bodového grafu. Žáci jsou se spojnicovými diagramy dobře obeznámeni, nicméně je třeba, aby s nimi učitel diskutoval o tom, jak vznikají, a zdůraznil přitom, že z nich můžeme přesně odečíst jen některé hodnoty.

F3 Periodicita

Pravidelnost (periodicita) hrála důležitou roli v historii vývoje pojmu funkce, protože mnoho dějů ve světě kolem nás se pravidelně opakuje. Podle naší zkušenosti je předpojem periodicity pro žáky snadno pochopitelný, protože se s ním setkávají téměř každý den. Autoři osnov ho však zpravidla považují za nevhodný pro základní školu, protože ho spojují pouze s klasickými periodickými funkcemi hlavně goniometrickými. Příčinou je důraz na zvládnutí pojmu periodicita na úrovni kalkulací, ne na úrovni pojmového porozumění.

> ***Výzva pro spolupracující učitele:*** *Navrhněte úlohy, které by se daly použít pro rozvoj předpojmu periodicity.*

Jedna ze spolupracujících učitelek navrhla sérii úloh z učebnice Novotná a kol. (1996) a modifikovala ji. Také zařadila novou úlohu F3.1.

> ***F3.1:*** *Popište změny, které můžete vidět během jednoho kalendářního roku nebo jednoho školního roku v lese, parku, na zahradě atd. Jaké jsou příčiny těchto změn?*
>
> *a) Nakreslete graf ukazující, jak se mění nejvyšší teplota během roku v našem regionu.*
>
> *b) Jak by se graf změnil, kdybychom chtěli popisovat změny teploty během dvou let?*

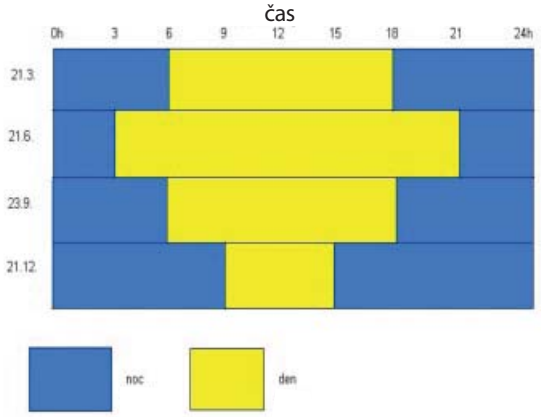
c) Udělejte graf, v němž zaznamenáte změny teploty během dne.

d) Udělejte grafy popisující změny teploty během nadcházejícího měsíce. Změřte teplotu každý den v 8 hodin ráno, ve 2 odpoledne a v 8 odpoledne, a to na jednom místě.

e) Jak můžeme graf interpretovat?

F3.2:

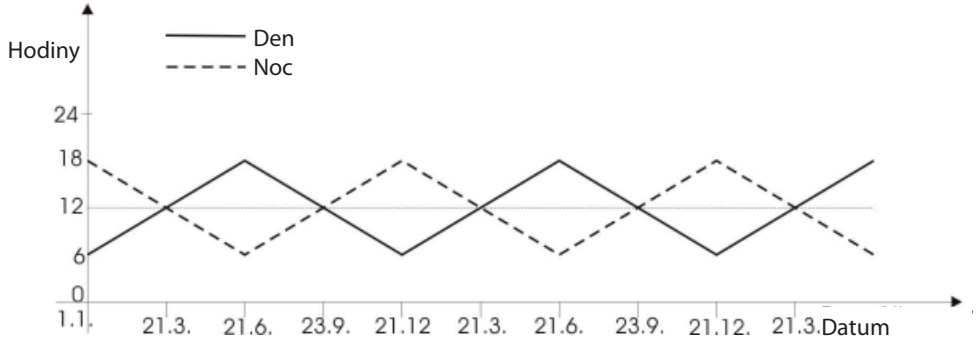
a) Vybarvení na obr. F3a ukazuje délku dne a noci v různých dnech roku. Jak nazýváme dny 21.3., 21.6., ...? V kolika dnech za rok je den delší než 21.3. (21.12, 21.6.)? V kolika dnech v prosinci je den delší než 21.6. (23.9.)? Který den je noc nejkratší/nejdelší?



Obr. F3a

b) S použitím grafu ukažte, jak se mění délka dne a noci během roku. Co můžeme říci o datech 21.6. a 21.12. (21.3. a 23.9.)? S použitím grafu ukažte, jak se mění délka dne (noci) v době od 1.1. do 31.7.

<u>Jiná varianta:</u> Místo, aby žáci tvořili graf sami, mohou dostat předem připravený graf (např. graf na obr. F3b).



Obr. F3b

Experiment 1, ČR, 12 years, POG

F3.1: Žáci pracovali ve skupinách. Většina z nich uvažovala jen změny spojené se svým životem jako narozeniny, aktivity, které dělají (lyžování, plavání atd.). Neudávali žádné příčiny

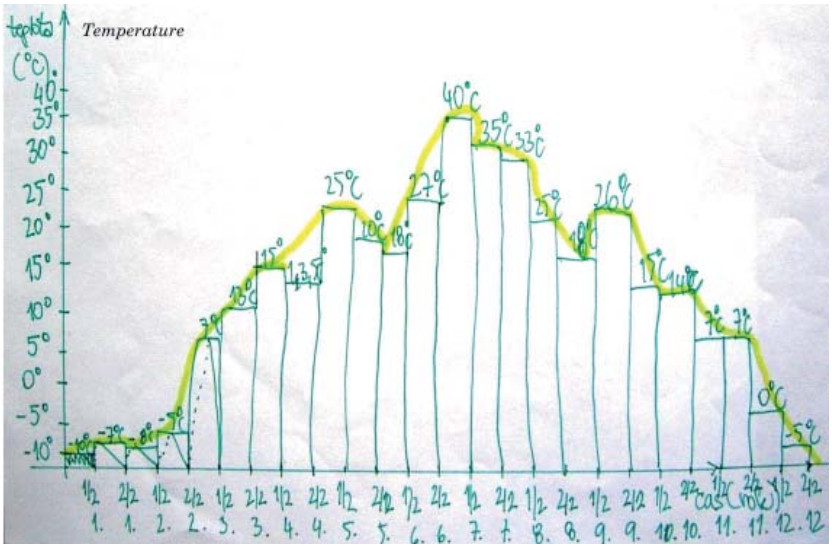
F3.1a): Někteří se ptali, zda mají použít 365 dnů nebo 12 měsíců. Museli se dohodnout na nějakých hodnotách, což znamenalo, že úroveň hluku v učebně během této aktivity byla značná. Podobně jako u úlohy F2 se někteří domnívali, že graf musí začínat v průsečíku os. Příkladem je graf na obr. F3c a na Obr. F3f, Obr. F3g.

F3.1b): Úloha „Jak by se graf změnil, kdybychom chtěli popsat situaci během dvou let?“ byla snadná; žáci řekli, že „to bude stejné ale dvakrát“.

F3.1c)–e): Tyto úlohy byly vynechány pro nedostatek času. Do jisté míry odpovídají úlohám F2, str. 270.

F3.2a): Žáci ihned pojmenovali data: 21.3. jarní rovnodennost, 21.6. letní slunovrat, 23.9 podzimní rovnodennost, 21.12. zimní slunovrat. Počítání počtu dnů mezi dvěma daty však představovalo problém. Žáci se ptali: „Zahrnuje období od 22. do 31. března 9 nebo 10 dnů?“ Museli počítat na prstech a nakonec odsouhlasili 9 dnů.

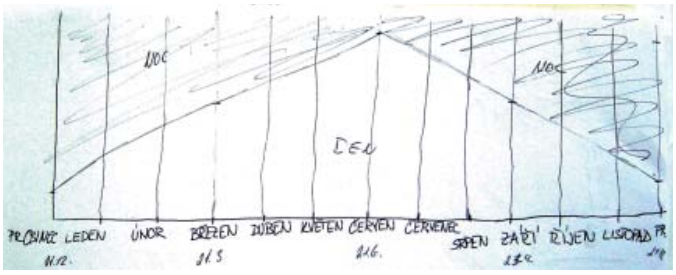
Nakonec byly nalezeny správné odpovědi: Den je delší než (i) 21.3. – 185 dnů (od 22.3. do 22.9.), (ii) 21.12. po všechny dny kromě dne samého, (iii) 21.6. – žádný. V prosinci není žádný den delší než 21.6. nebo 23.9. Nejkratší noc je 21.6., nejdelší je 21.12.



Obr. F3c

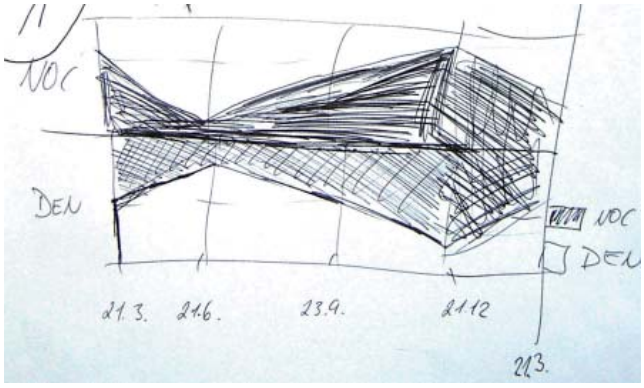
Komentář: Tato úloha se týká předpojmu „míra“ – „míra“ musí být aditivní. Například kdybychom se rozhodli, že od 22. do 31. máme 10 dnů, pak od 1. do 22. máme

22 dnů a od 1. do 31. pak součtem 32. Je potřebná dohoda. Například bychom mohli říct, že budeme měřit čas od poledne do poledne. Ve skutečnosti jsou časy, kdy začínají astronomická období, dány přesně – žáci se je mohou dovědět například ve vysílání v televizi. Bohužel, učitelka v našem případu nevyužila tuto příležitost k diskuzi o těchto záležitostech.



Obr. F3d

F3.2b): Viz obr. F3d a F3e. Žáci obecně rozuměli tomu, že výsledkem bude lomená čára, tedy že její části budou lineární (obrázek F3b předem neviděli). Často neoznačili přesné hodnoty pro délku dne a noci, jen tendence – tedy, zda se prodlužuje, nebo zkracuje a kde je vrchol. Žádný ze žáků neudělal graf podobný F3b, nikdo z nich neoznačil svislou osu. Jejich obrázky byly spíše diagramy než grafy.



Obr. F3e

Experiment 2, ČR, 6. ročník, PZŠ1

Navržená alternativa F3.2a (viz obr. F3b) byla vyzkoušena na PZŠ1, protože jsme cítili, že pro žáky tohoto věku by bylo nakreslení grafu příliš obtížné. Žáci většinou zdůrazňovali pravidelnost grafu a byli schopni spojit ji s pravidelností změn v délce dnů a nocí během roku. Interpretovali průsečíky obou linek jako „den a noc má stejnou délku“ a období mezi nimi jako „den je delší než noc“, „den je delší a delší a modrá linka jde nahoru“ (modrou linkou byla linka pro den), „den je kratší a modrá linka jde dolů“, „v grafu je vrchol, to je nejdelší den v té době“ atd.

Závěr pro F3: V centru pozornosti tohoto tematického okruhu stojí jevy skutečného života, s nimiž se žáci setkávají každý den – vztah mezi délkou dne a noci a datem (vlastně pohyb Země kolem Slunce). Navíc zde je silné spojení se zeměpisem a astronomií. Pokud je to organizačně možné, projekt může být uskutečněn v obou předmětech – zeměpise a matematice (a také v hodinách mateřského jazyka – úloha F3.5 dole).

Při řešení těchto úloh žáci popisují závislost různým způsobem (obrázky, graficky, slovně, případně tabulkou), a tak se dozvídají, že stejná závislost může být popsána několika způsoby, a učí se mezi těmito způsoby „přepínat". Rozvíjí se předpojem periodicity (a pro starší studenty se vytváří i předpojmy goniometrických funkcí a extrémů funkce).

Možné obohacení úloh F3

> ***F3.3:*** *V dalších čtrnácti dnech sledujte čas východu a západu slunce. Tyto informace můžeme najít i v novinách, na Internetu nebo v televizi. Doplňte následující tabulku.*

Datum	Čas východu slunce	Čas západu slunce	Délka dne	Délka noci

Jeden z důvodů pro přidání této úlohy bylo ukázat výhody a nevýhody různých způsobů záznamů údajů. Vývoj změn délky dne a noci je nejlépe vidět v grafickém zápise nebo slovním popisu, zatímco v tabulce je skryt. Nicméně, jestliže chceme najít konkrétní hodnotu pro určitý den, pak je tabulka lepší (za předpokladu, že je onen den v tabulce uveden).

Navíc u této úlohy žáci dostanou dva grafy pro stejný jev (závislost délky dne a noci na části roku) ale na různé stupnici. Na obr. F3b vidíme graf změn, k nimž došlo během 14 dní. Můžeme se žáky diskutovat o roli stupnice na vodorovné a zejména svislé ose. U grafu pro čtrnáct dní musí být stupnice mnohem podrobnější, abychom vůbec něco viděli.

Možné následné úlohy:

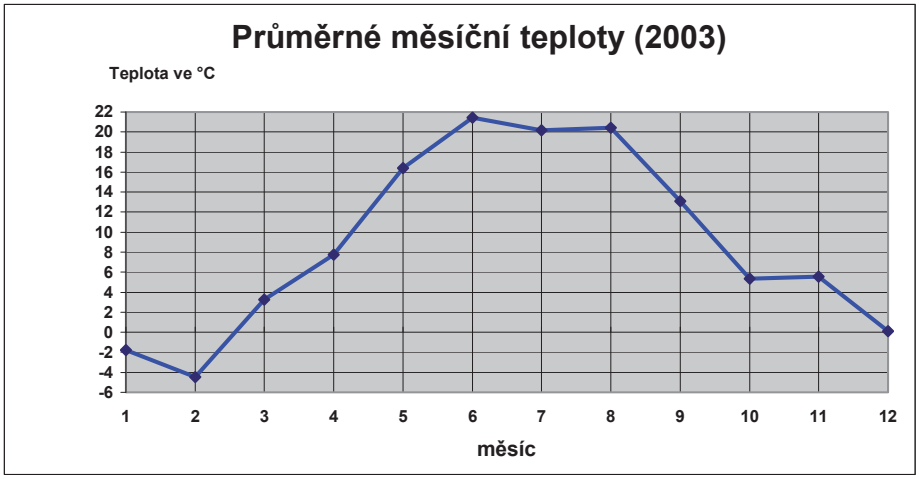
> ***F3.4:*** *Den a noc.*
>
> *a) Vysvětlete, proč je váš stín v poledne kratší v létě než v zimě.*
> *b) Vysvětlete, proč se v naší oblasti pravidelně střídá den a noc.*
> *c) Nakreslete, jak dopadají sluneční paprsky na Zemi.*
> *d) Osvětlete glóbus a ověřte, zda jsou vaše závěry z c) správné. Nakreslete, jaká část Země je osvětlena a jaká je ve tmě.*
>
> ***F3.5:*** *Sbírejte přísloví a pořekadla, která jsou spojena se změnami délky dne a noci během roku.*

Podkapitola 2: Plánujeme výlet

Tato podkapitola byla navržena spolupracujícími učiteli a potom postupně rozpracována a vyzkoušena celým týmem. Dává prostor pro úpravy podle potřeb a zkušeností žáků.

F4 Teplota během roku

Ve dvoře jedné základní školy v Praze je stanice, která měří denní a noční teploty. Na obr. F4a je graf průměrných měsíčních teplot v roce 2003.



Obr. F4a

a) V kterých měsících byla nejvyšší a nejnižší průměrná teplota?
b) Popište změny v průměrné teplotě v roce 2003

Experiment 1, ČR, 9. ročník z PZŠ1, žáci ve věku 12–13 let z POG

Protože byly výsledky našich vyučovacích pokusů ve všech třídách v ČR podobné, popíšeme je společně. Úloha byla zadána pro práci ve skupinách a žáci měli pracovní list, do něhož psali své odpovědi. Učitelé nezdůraznili, že teploty jsou průměrné, žáci tedy většinou mluvili jen o „teplotě“, ne o „průměrné teplotě“.

F4a): Tato úloha byla pro žáky snadná. Své odpovědi zdůvodnili odkazem na graf i skutečný život: „Největší teplota je v červnu, protože je léto.“ „Teplota je nejnižší v únoru, protože čára je na nejnižší úrovni.“ Na druhé straně učitelka mladších žáků si všimla, že někteří nečetli informaci z grafu, ale své odpovědi založili spíše na své zkušenosti. Například řekli, že „nejvyšší teplota je v červenci, protože je léto“, což neodpovídá grafu.

F4b): Když jsme porovnali zprávy ze tří tříd, viděli jsme, že mladší žáci uváděli ve svých popisech větší podrobnosti (jako např. přesné hodnoty teplot) než starší žáci a že také prokázali větší rozmanitost přístupů. Starší žáci se většinou soustředili na popis procesu, jako např. „do února trochu klesla, pak ostře stoupala až do června, dále kolísala, v srpnu ostře klesla, v říjnu a listopadu byla stejná a dále klesala". Je důležité, že si také všimli vztahu mezi strmostí čáry a rychlostí změn teploty.

Mnoho žáků se odkazovalo na poznatky z astronomie, aby vysvětlili, proč byla právě taková teplota. Zajímavý přístup si vybral jeden chlapec, který tvrdil, že „průměrná teplota vzrostla o 0,19 stupňů Celsia", a vysvětlil, že určil z grafu teploty pro každý měsíc, vypočítal rozdíl sousedních teplot a udělal z hodnot aritmetický průměr.

Experiment 2, Řecko, třída B1 a B2 (11–13 let), třída C (12–13 let)

V Řecku se zúčastnily experimentů tři třídy.

Třída B1 zahrnovala 11–12leté žáky ze dvou ročníků – pátého a šestého. Žáci pocházeli z chudých rodin a jejich úspěšnost v matematice byla poměrně nízká. Škola sama je v chudší části města. Učitelka i žáci měli zkušenosti s konstruktivistickým způsobem práce.

Třída B2 se skládala z jedenácti- a dvanáctiletých žáků s průměrným prospěchem. Učitel i žáci měli s konstruktivistickým způsobem práce málo zkušeností. Na začátku předchozího školního roku žáci z B1 a B2 probírali základy statistiky (sběr dat a jejich záznam v tabulce, výpočet průměru, čtení grafu).

Třída C zahrnovala dvanácti- a třináctileté žáky, kteří byli v matematice poměrně úspěšní. Učitel měl s konstruktivistickým způsobem práce značné zkušenosti, zatímco žáci tak pracovali jen od začátku školního roku. Již studovali funkce a podobné úlohy řešili konstruktivistickým způsobem.

Graf z obr. F4a byl žákům zadán na pracovním listu s následujícím textem:

> *Na školním dvoře v Praze je meteorologická stanice, která zaznamená teplotu během dne a noci. Žáci této školy sestavili ze shromážděných údajů následující graf.*

Žáci se podívali na graf a hned jim bylo řečeno, že ukazuje průměrnou teplotu každého měsíce. Byli požádáni, aby vysvětlili, co asi graf znamená. Někteří odpověděli takto: „Myslím, že čeští žáci sečetli dvě měření pro den a noc, vydělili je dvěma a dostali průměrnou teplotu pro 24hodinový den." Na základě diskuze v týmech dospěli žáci k závěru, že podobným způsobem vznikly průměrné teploty pro měsíce a že právě to ukazuje graf.

Úloha F4 byla zadána ve skupinách. Učitelé dohlíželi na práci a snažili se minimalizovat své zásahy do práce žáků tím, že odpovídali jen na otázky týkající se zadání

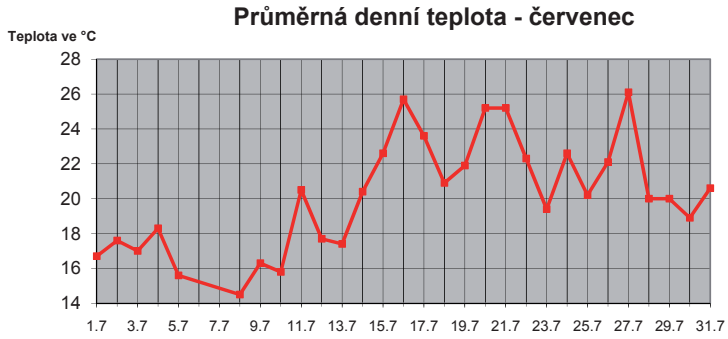
úlohy. Na otázky typu „Je to správně?“ nebo „Existuje jiný způsob, jak to dělat?“ odpovídali větami typu „Co si myslíte?“ nebo „Prodiskutujte to s ostatními skupinami“. Když práce skončila, jeden člen každé skupiny představil své řešení zbytku třídy, zatímco ostatní zkoumali jeho přesnost a někdy je opravili nebo odmítli.

Otázka o nejvyšší a nejnižší teplotě byla pro všechny skupiny velmi snadná. Spontánně porovnávali údaje o teplotách s počasím ve své zemi. Další otázka vyžadovala, aby popisovali změny během roku. Jejich odpovědi byly založeny na kusých pozorováních částí grafu. Například, „v létě...“, „v zimě...“, „v říjnu…“, „v srpnu …“. Úsilí učitele, který se snažil přeformulovat otázku tak, aby žáci popisovali vývoj změn teplot, bylo marné. Žáci nebyli schopni uchopit skutečnost, že graf neznázorňuje jen jednotlivé teploty, ale také průběh teploty během roku.

Závěr pro F4: Je zajímavé, že čeští žáci se nikdy nezeptali, co vlastně znamená „průměrná teplota“ a jak vznikly údaje předložené v grafu. Zatímco řečtí učitelé na tento problém žáky výslovně upozornili, čeští učitelé tuto příležitost nevyužili. Ve skutečnosti graf vznikl na základě údajů z Českého meteorologického úřadu – postup, který je pro určení průměrných teplot používán, je poměrně komplikovaný a pro žáky stěží pochopitelný. Nicméně, považujeme za důležité, aby učitel se žáky diskutoval o tom, jak graf vznikl. Body na čáře grafu představují hodnoty pro průměrné teploty pro každý měsíc a ty jsou pak spojeny (viz výše poznámka o spojnicových grafech, str. 275).

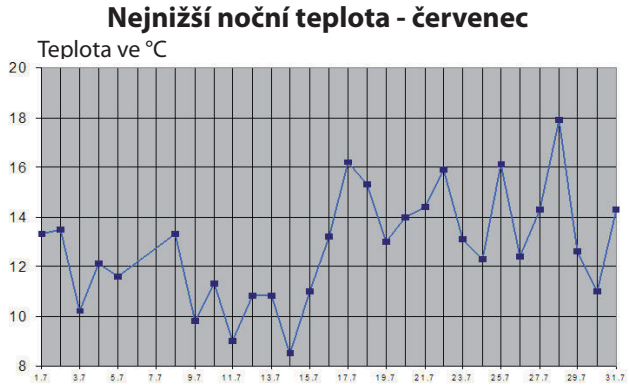
Interpretace grafu je komplikovanější než ta, kterou uvedli žáci. Například kolísání se vyskytovala i v jiných intervalech než v těch zmíněných. Nicméně tato úloha byla určena jako úvodní úloha pro interpretaci grafu, proto se domníváme, že do takových podrobností učitel zacházet nemusí (ledaže by o tom žáci chtěli diskutovat).

F5 Bára plánuje výlet



Obr. F5a

a) Bára a její kamarádky plánovaly na červenec cyklistický výlet. Dohodly se, že jízda na kole je nejlepší, pokud není ani příliš horko, ani příliš chladno. Rozhodly, že nejpříjemnější teploty jsou mezi 18° C a 24° C. Představte si, že meteorologové umějí přesně předpovídat počasí. Na obr. F5a je graf očekávaných měsíčních průměrných teplot v červenci. Která data byste doporučili Báře a proč?



Obr. F5b

b) Děvčata chtěla trávit noci ve stanech, proto zvažovala také noční teploty. Bylo by jim chladno, kdyby teplota klesla pod 12 °C. Na obr. F5b je graf očekávaných nejnižších nočních teplot v červenci. Která data byste doporučili Báře teď?

c) Děvčata se rozhodla pro sedmidenní výlet. Doporučte pro cestu nejvhodnější dobu a svou odpověď zdůvodněte.

Jiná varianta: Úlohy mohou být také formulovány pro podzimní výlet, pokud je chceme použít na podzim spíše než na jaře nebo v létě. (Viz 🗁Pracovní list F5b.)

Materiál: 🗁Pracovní list F5a nebo 🗁Pracovní list F5b

Komentář: Grafy byly nejprve zadány tak, jak je vidět v obrázcích dole, v nichž jsou dána řešení žáků. Žáci se museli rozhodnout, kde jsou data, zda na svislé lince nebo mezi linkami. (Tato diskuze nebyla nezajímavá; vedla žáky k velmi pečlivému čtení grafu a k tomu, aby věnovali pozornost každému detailu.) Grafy byly pak změněny a byly dokresleny tečky (obr. F5a a F5b).

Experiment 1, ČR, 9. ročník z PZŠ1, žáci ve věku 12–13 let z POG

Protože byly výsledky našich vyučovacích pokusů ve všech třídách v ČR podobné, popíšeme je společně.

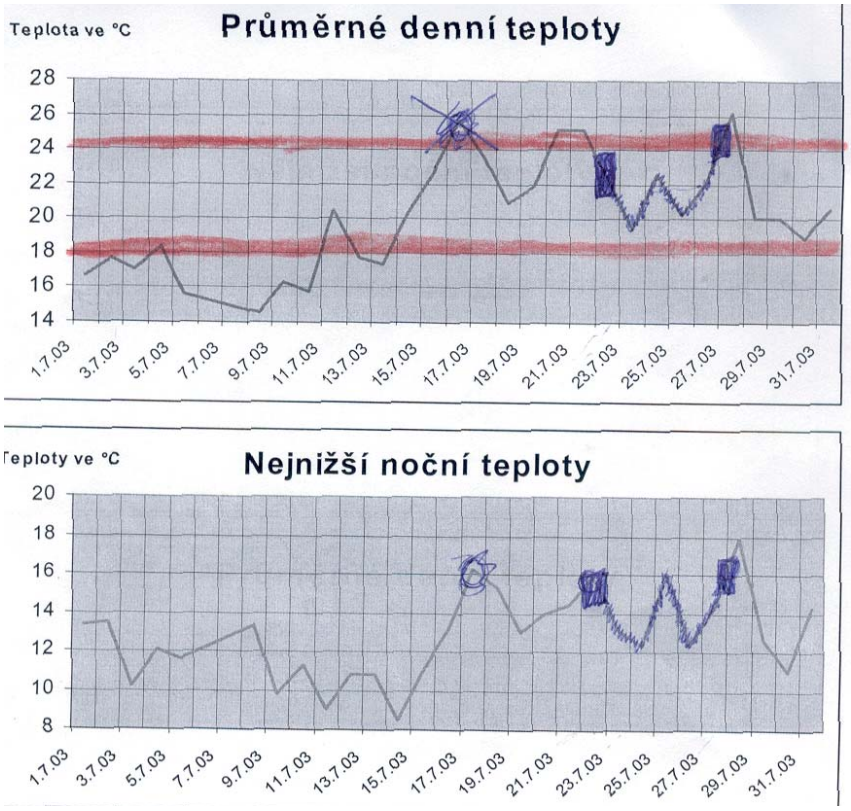
V první verzi byly grafy z obr. F5a a F5b žákům prezentovány jako teploty v roce 2003 a žáci správně namítali, že nemohou plánovat cestu na dobu, která je již v mi-

nulosti. Proto jsme se rozhodli je prezentovat jako očekávané průměrné teploty.

Žáci dostali pracovní list s několika kopiemi obou grafů, protože jsme očekávali, že do nich budou zakreslovat nejvhodnější období. Nicméně toto očekávání nebylo naplněno; většina žáků do předložených kopií nekreslila žádné linky, aby si úlohu usnadnila.

Někteří žáci se více soustředili na to, co oni osobně upřednostňují jako vhodné počasí pro jízdu na kole, spíše než na to, co říkala úloha. „Čím větší teplota, tím lepší pro mě." „18 stupňů je příliš málo, já bych na kole nejel." (viz také níže).

F5c): Protože nebylo možné najít sedmidenní období, které by splňovalo všechny podmínky, žáci vybírali data, která byla „ideálnímu řešení" nejblíže. Například, „Období 19.7. –27.7., protože teplota v noci není pod 12 stupni a během dne není vyšší než 25 stupňů." Své odpovědi zdůvodňovali odkazem na skutečný život jako „Jestli bude jeden den tepleji, nepojedeme na kole a zaplaveme si.", „Budeme mít dobré spacáky, aby nás v noci zahřály.".



Obr. F5c

Někteří žáci vyřešili tento rozpor tak, že vypočítali průměrnou teplotu, aby našli nejvhodnější období: „My bychom si vybrali dny od 22. do 26. července. Tyto dny je průměrná teplota kolem 21 stupňů." „23.7.–31.7, protože teplota je průměrná."

Někteří nevzali v úvahu skutečnost, že cesta by měla být souvislá, a jen vypsali několik jednotlivých dnů, které splňovaly podmínky. Nikdo neodpověděl, že úloha nemá řešení. To může být způsobeno skutečností, že se úloha nepodobala tradiční školní úloze, na kterou by možná odpověděli právě takto.

Jen někteří studenti zaznamenali vhodná období do grafů (obr. F5c a Obr. F5h) a nikdo nezaznamenal vhodné období pro den a noc do jednoho grafu, jak jsme očekávali.

Experiment 2, Řecko, třída B1, třída B2, třída C (jejich popis viz Experiment 2 u F4)

Experiment proběhl v květnu a červnu 2005 a společně s úlohou F4 zabral dvě vyučovací hodiny. Způsob práce byl stejný jako v úloze F4 (skupinová práce a prezentace výsledků). Žáci dostali Pracovní list F5a.

Žáci měli s četbou grafu problémy, a to ze dvou důvodů. Za prvé na svislé ose teploty „skákaly po dvou“ a nebyla mezi nimi vodorovná linka. Tudíž se mladší žáci ptali, zda prostřední teplota vůbec existuje či zda nikdy nebyla naměřena. Učitelé podali nezbytné vysvětlení.

Druhý důvod se týkal vodorovné osy. Objevil se podobný problém se čtením grafu, protože data byla napsaná mezi linkami a ne přesně na vertikální lince. Tak někteří žáci četli datum na levé vertikální lince, jiní na pravé a někteří odečítali hodnoty mezi oběma linkami. Tak vznikly neshody týkající se teploty určitých dnů a třída se musela dohodnout na společném postupu.

Dalším úkolem bylo najít a označit vhodná data na grafu. Skupina starších žáků to udělala pomocí závorky „{,}“na horizontální lince, která vyznačila oblast teplot od 18 °C do 24 °C.

Obr. F5d

Obr. F5e

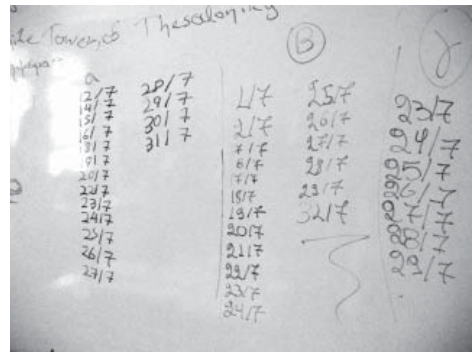
Mnoho žáků použilo prsty k omezení oblasti (obr. F5d), ale většina z nich rychle využila účinnější prostředky jako pravítko (obr. F5e, Obr. F5i) a nakreslila dvě rovnoběžné vodorovné přímky, aby omezili nejvyšší a nejnižší přípustné teploty (viz

VideoF5-GRa), nebo dvě svislé linky, aby omezili časový úsek (viz VideoF5-GRb). Všechny skupiny postupně použily tuto metodu a nakonec se celá třída shodla na společném výsledku.

F5c): Tato úloha byla podobná jako předcházející úloha, nicméně byla komplikovanější a jako taková udržela zájem žáků. Mladší žáci potřebovali více času a pomoc od učitele. V jedné ze tříd učitel zorganizoval společnou prezentaci dat, která se hodí pro den a pro noc, aby pomohl žákům rozhodnout se o průniku. To bylo uděláno na bílé tabuli (obr. F5f a F5g a VideoF5-GRc). Poté, co se dohodli na společné odpovědi, žáci vyvěsili své práce na nástěnce (viz Obr. F5l).

Ve třídě C se zájem žáků po diskuzi o řešeních zaměřil na porovnání obou zemí, České republiky a Řecka. Žáci měli nakreslit podobný graf pro průměrnou denní teplotu pro Řecko a potom porovnat rozdíly mezi podnebím v obou zemích.

Obr. F5f



Obr. F5g

Domníváme se, že úlohy vzbudily zájem žáků hlavně proto, že byly spojeny se životem. Mnoho žáků bylo řešením úloh zaujato (např. v jedné ze tříd žáci nechtěli po zvonění hodinu ukončit, dokud nebyla úloha vyřešena). Je jasné, že mnoho žáků mělo zkušenost se skupinovou prací. Viz například video VideoF5-GRc, v němž na úloze pracuje skupina tří chlapců. Spolupracují velmi efektivně a každý z nich přispívá ke společné práci. Žádný z nich skupinu neovládá a střídají se v psaní na pracovní list.

Závěr pro F5: V obou zemích byli žáci úlohami motivováni a vyřešili je podobným způsobem. Jediný velký rozdíl byl v tom, že čeští žáci na listy s grafy téměř nic nekreslili (jak jsme očekávali), zatímco téměř všichni řečtí žáci to dělali spontánně. Pro zakreslení vodorovné a/nebo svislé hranice použili pravítko, což jim pomohlo daleko snadněji číst informace z grafu. Možné důvody jsou kulturní. V České republice jsou učebnice bezplatné a děti si je jen půjčují. Nesmějí do nich psát. Existují pracovní sešity s matematickými úlohami, ale nejsou široce používané. Tedy třebaže žáci byli vyzýváni, aby na pracovní listy s grafy kreslili, a dostali dokonce několik čistých archů s grafy, nečinili tak.

V obou zemích stáli žáci před problémem „chybějících“ sudých dat. Téměř nikdo ve své odpovědi nepoužil sudá data (v grafu byla zakreslena jen lichá data, aby byl přehlednější). Je otázkou, zda žáci rozuměli tomu, že na vodorovné ose chybí nějaká data. Příště by mohlo být vhodnější použít otázky směřující ke zjištění, zda tomu žáci rozumí, např. „jaká byla asi teplota šestého?“.

Při pohledu zpět na vyučovací pokusy se zdá, že krátká diskuse o původu grafu průměrných teplot na začátku práce by byla užitečná. Podobně jako graf v úloze F4 byly pro každé datum vypočítány průměrné teploty (jako aritmetický průměr z několika měření) a vyneseny do grafu. V obou grafech byly odpovídající body spojeny lomenou čárou. Diskrétní údaje jsou tedy reprezentovány spojitou čárou, která neodpovídá realitě, ale lépe zobrazuje vývoj teplot během měsíce.

Uvážíme-li matematickou stránku podkapitoly, žáci rozvinuli své kompetence číst informace z grafu, porovnat grafy a použít své životní zkušenosti. Zabývali se některými matematickými vlastnostmi grafů závislostí jako například „být rostoucí či klesající závislost“ a „mít extrém“.

Podkapitola 3: Úlohy ze života

F6 Jízdní grafy

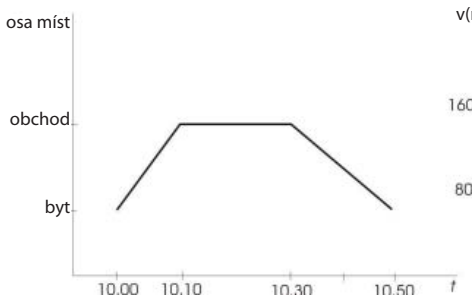
Poznámka: Až do roku 1989 se vyučování v Československé republice řídilo jednotným učebním plánem. Avšak ve vyučování matematice vždy existovala možnost ověřovat různé přístupy k vyučování v experimentálním režimu. Jednou z institucí, které tyto vyučovací experimenty organizovaly, byl Kabinet didaktiky matematiky Matematického ústavu Československé akademie věd. Pokud víme, jízdní grafy (nebo grafikony) se poprvé objevily v pracovních materiálech Kabinetu didaktiky matematiky pro základní školy jako propedeutika funkcí. Později se staly námětem žákovských projektů realizovaných první z autorek.

Poznámka: Některé úlohy jsou převzaty z učebnice Novotná a kol. (1996), kde byla M. Kubínová spoluautorkou. Ne všechny úlohy uvedené níže byly vyzkoušeny našimi spolupracujícími učiteli. Uvedeme celou sérii úloh, abychom ilustrovali různé možnosti použití jízdních grafů ve škole. Jízdní grafy byly (a někdy ještě jsou) používány na české železnici pro plánování tras a časů vlaků.

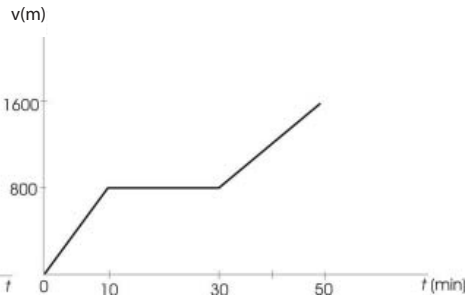
F

F6.1: *Co si představíte, když řeknu jízdní graf?*

Příklad jízdního grafu je na obr. F6a. Je to jízdní graf pro cestu Petra z jeho bytu do obchodu a zpět. Na obr. F6b je graf závislosti mezi ujetou vzdáleností a časem pro stejnou cestu. Diskutujte o rozdílech a společných rysech obou grafů.



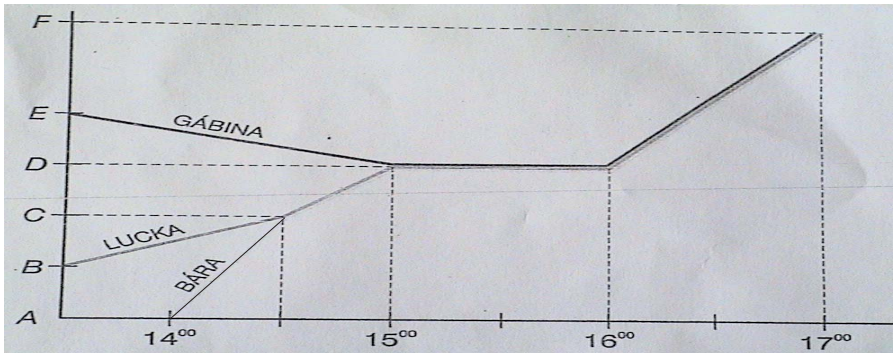
Obr. F6a



Obr. F6b

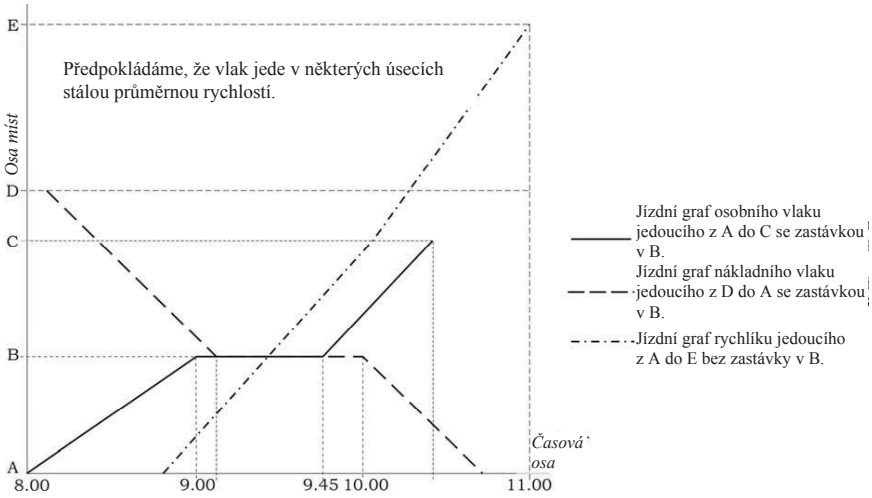
F6.2:

a) Podívejte se na obr. F6c, který ukazuje jízdní graf pro cestu tří děvčat – Báru, Lucku a Gábinu. Pracujte v dvojicích a situaci podrobně popište.



Obr. F6c

b) Podívejte se na jízdní grafy na obr. F6d. Ve dvojicích nebo skupinách diskutujte o tom, co to znamená, když je úsečka vodorovná, když jsou dvě úsečky rovnoběžné, když je jedna úsečka strmější než druhá, když se úsečky protínají...



Obr. F6d

F6.3: *Nakreslete jízdní graf parníku, který jede z jednoho místa do druhého jednu hodinu a má dvacet minut přestávku.*

F6.4: *Honza a Toník jeli na kole navštívit Honzovu tetu. Naplánovali cestu následujícím způsobem:*

km	Místo		čas
0	Nové Město	odjezd	9.00
26	Vesnice (babička, oběd)	příjezd	10.40
		odjezd	12.00
33	Rybník, plavání	příjezd	12.30
		odjezd	15.30
68	Staré Město (tetiččino bydliště)	příjezd	17.15

Ale plavání je tak moc bavilo, že odjeli o hodinu později a do Starého Města přijeli až v 18.30.

Nakreslete jejich jízdní graf a) podle jejich původního plánu, b) podle skutečnosti.

F6.5*: Naplánujte výlet na zajímavé místo. Nakreslete pro cestu jízdní graf podle svého původního plánu. Nakreslete jízdní graf výletu, jak ve skutečnosti proběhl. Porovnejte oba jízdní grafy a zdůvodněte rozdíly.*

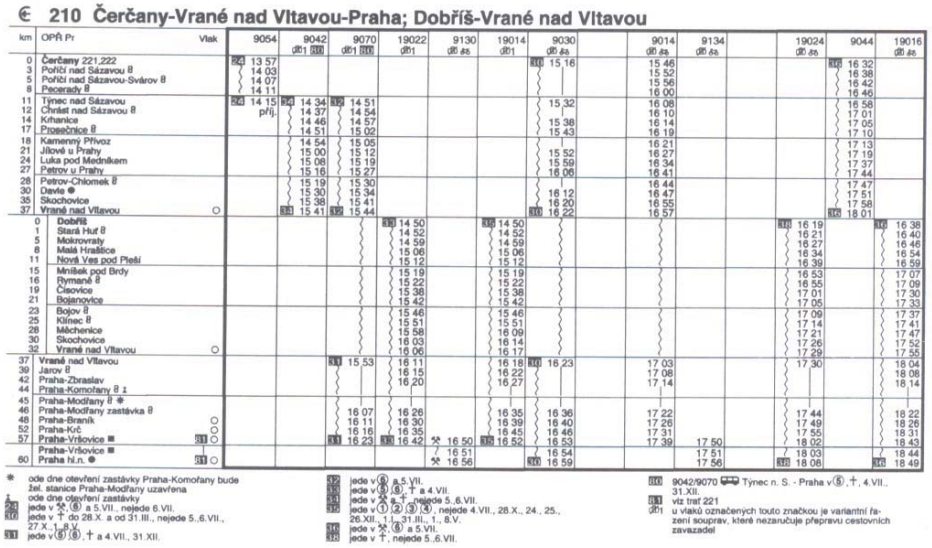
F6.6: *Honza jde do supermarketu koupit mléko a chléb.*

a) Nakreslete graf, který popisuje jeho cestu, pokud víte, že šel obě cesty stejnou rychlostí a že nakupování trvalo 10 minut.

F

b) Jak se graf z a) změní, jestliže víme, že se na cestě domů Honza setkal s kamarádem a 10 minut mluvili o novém filmu?

F6.7: *Podívejte se na jízdní řád vlaků z Čerčan do Vraného (obr. F6e nebo Obr. F6m). Diskutujte o něm se svým spolužákem a nakreslete jízdní grafy pro dva osobní vlaky jedoucí mezi dvěma určitými zastávkami na trase.*



Obr. F6e

Experiment 1, ČR, 6. ročník, PZŠ1

F6.1: První úvodní úloha byla řešena v jedné vyučovací hodině a jejím cílem bylo seznámit žáky s jízdními grafy. Většinou se shodli, že jízdní grafy se týkají pohybu. Učitel shrnul novou znalost následujícím způsobem:

„Jízdní grafy popisují cestu vlaků, autobusů, lodní přepravy zboží atd. grafickým způsobem. Jsou přehledné a snadno se kreslí a dokonce i bez časových údajů z nich získáme hodně informací o pozici vlaku nebo vlaků nebo dalších popisovaných objektů."

Komentář: Charakteristickým rysem jízdních grafů je, že na ose míst nemusí vzdálenost mezi místy odpovídat skutečnosti. Není důležité, v jakých vzdálenostech od sebe jsou místa vyznačena, ale jaké je jejich skutečné pořadí. Proto se svislá osa na obr. F6a nazývá osa „míst".

Při porovnání obou grafů na obr. F6a a F6b byly zdůrazněny následující body:

- S výjimkou zpáteční jízdy (třetí část grafů), jsou grafy stejné za předpokladu, že zachováme vzdálenost mezi místy na svislé ose. Oba druhy grafů jsou schopné vyjádřit rychlost osoby, vlaku, atd. (dané strmostí grafu).

- Graf obr. F6a: Z jízdního grafu vidíme, zda se osoba (vlak atd.) pohybuje celou dobu jedním směrem, nebo zda mění směr (zpáteční cesta). To je užitečné zejména, pokud chceme sledovat pohyb několika lidí (vlaků atd.) v jednom obrázku. To je důvod, proč byly jízdní grafy používány českými drahami pro plánování tras vlaků.
- Graf obr. F6b: Nemůžeme číst informace o směru. U obou cest (tam i zpět) můžeme snadněji porovnat rychlosti.

Úlohy F6.2a a F6.3 byly řešeny ve druhé vyučovací hodině, která byla zaznamenána na video. Tuto hodinu popíšeme podrobněji.

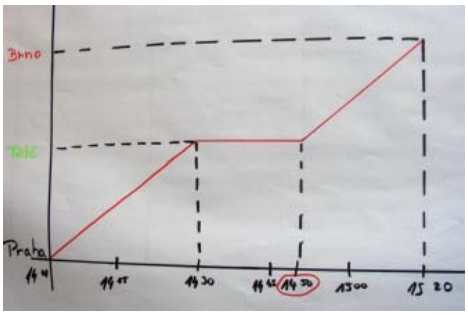
F6.2a: Žáci pracovali v devíti skupinách. Zaznamenali svůj popis obr. F6c písemně, což trvalo asi 8 minut. Většina skupin popsala graf správně např. příběhem o třech kamarádkách jdoucích na výlet. Časy neuvedené na ose *x* určili žáci správně. Jedna skupina použila pravítko, aby určila čas přesně. (VideoF6a)

Na konci práce učitel požádal žáky, aby prezentovali své myšlenky. Na tomto místě bychom chtěli upozornit na část prezentace, v níž se ukázalo, že jednomu ze žáků nebylo zcela jasné, jaká je pozice míst B, C a D vzhledem k jednotlivým částem (úsečkám) grafu. Domníval se, že ta místa jsou pouze na svislé ose. Další žák vysvětlil: „To písmeno C má u sebe polopřímku, která vede do nějakého označeného bodu, no, a ten bod je považován za bod C, protože to písmeno C se tam třeba nevejde." ... „Tady ta polopřímka označuje jeho místo." „Bod C určuje, kdy se Lucka a Bára setkaly, a to bylo ve 14 hodin a 30 minut." To vedlo ke spontánní diskuzi, jíž se zúčastnilo několik žáků, kteří se pokoušeli vyjasnit svá stanoviska. (VideoF6b)

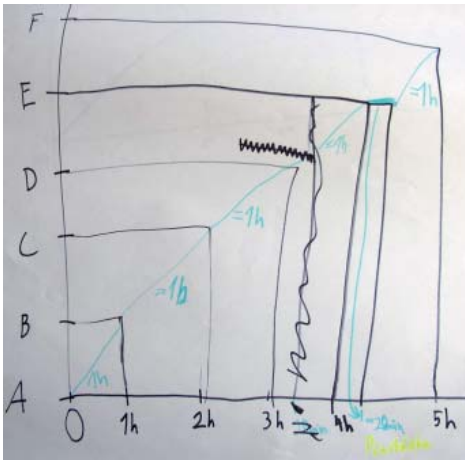
Další zajímavá diskuze se týkala toho, co to znamená, když se „tři úsečky setkají". Jeden ze žáků si uvědomil, že důležité je měřítko. „Myslím, že nemusely jít spolu, že jedna mohla jít podchodem a druhá horní cestou. Záleží na měřítku." Ovšem poukázal na to, co je zaručeno: „I kdyby šly různými cestami, setkaly se a měly spolu přestávku na stejném místě."

Úlohu ukončil učitel, když žáky požádal, aby popsali, jak pracovali ve dvojicích a co se jim na tom líbilo a co ne.

F6.3: Žáci nakreslili grafy na flipchartový papír (viz ilustrace na obr. F6f (správný graf), obr. F6g (nesprávný graf), Obr. F6k, Obr. F6l). Práce trvala asi 10 minut a skončila prezentací každé skupiny před třídou. (VideoF6c). V tomto stádiu učitel nedovolil o prezentacích žádnou diskuzi. (Později vysvětlil, že to tak dělá často. Jeho úmyslem je nechat všechny žáky prezentovat a teprve později diskutovat o tom, co viděli.) V tomto případě žáci hovořili o grafech a shrnuli své znalosti týkající se jízdních grafů během následující vyučovací hodiny. K tomu učitel využil videozáznam poslední vyučovací hodiny. Při sledování videa žáci sami poukazovali na to, kde udělali chyby, a říkali, jak by přeformulovali své výpovědi se znalostmi, které měli teď. Žáci viděli mnoho různých řešení úlohy, nicméně učitel nezdůraznil, že je jich nekonečný počet.



Obr. F6f



Obr. F6g

Závěr pro experiment 1, úloha F6: Videozáznam ukazuje, že žáci jsou zvyklí o věcech diskutovat a poslouchat názory ostatních. Problémy, které vyvstaly, vyřešili žáci sami bez pomoci učitele. Tato skutečnost je v konstruktivistickém vyučování velmi důležitá, protože učitel ustupuje do pozadí a žáci by měli převzít zodpovědnost za své učení.

Video také ukazuje, že veřejná prezentace není pro tyto žáky nová; jsou velmi ochotní a schopní mluvit o své práci a na druhé straně poslouchat ostatní. Prezentace žákovské práce je podle našeho názoru důležitý rys konstruktivistického vyučování. Žáci se učí formulovat své myšlenky přesnějším (matematickým) jazykem. Prezentace často vede k diskuzím, které jsou zajímavé z matematického hlediska. Videozáznamy jsou velmi silným prostředkem pro učení žáků. Žáci se mohou vidět a slyšet zvenčí a hlouběji přemýšlet o matematické podstatě problému.

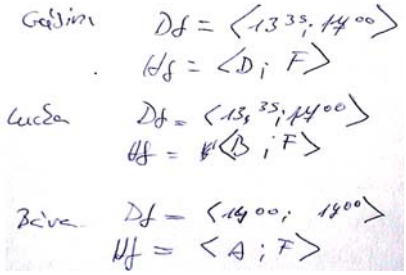
Žáci úloze F6.3 celkem pochopitelně porozuměli různým způsobem. Někteří z nich si mysleli, že celá doba by měla být 1 hodina, jiní, že to je 1 hodina a 20 minut (slovo „jede“ vede k představě, že se parník musí 1 hodinu pohybovat). Z hlediska skutečného jízdního řádu je první volba lepší, nicméně učitel o tomto bodu nediskutoval.

Experiment 2, ČR, žáci ve věku 14 let, POG

Úloha F6.2a byla také vyzkoušena v 8. ročníku POG. Reakce žáků byly podobné reakcím žáků ze školy PZŠ1. Jedna skupina graf srovnávala s mapou: „Bára a Lucka se setkaly na rohu ve 14.30, společně šly na roh další ulice, kde se setkaly s Gábinou... Dále šly po ulici doleva a v 17.00 zmizely z dohledu.“ Podobně další skupina žáků spojovala jízdní graf s plánem metra: „Bára vyrazila ve 14.00 linkou A. Ve 14.30 přestoupila na linku C a v 15.00 na linku D, kterou jely až do 17.00 na konec linky F.“

Obr. F6h ukazuje příklad dívky, která interpretovala jízdní graf pomocí svých znalostí školní matematiky.

Závěr pro experiment 2, F6: Problém interpretace grafu ve smyslu jeho tvaru spíše než zobrazeného vztahu mezi dvěma proměnnými je více diskutován níže v komentáři k úloze F10, str. 312. Skutečnost, že dívka, jejíž práce je na obr. F6h, použila formální popis a pokud můžeme z její další práce soudit, zřejmě nebyla schopna najít nějaký nematematický popis, by mohla poukazovat na její porozumění funkcím založeném na znalosti rovnic funkcí a standardních procedur spíše než na pojmovém porozumění funkcím.



Obr. F6h

Experiment 3, ČR, 6. ročník, PZŠ2

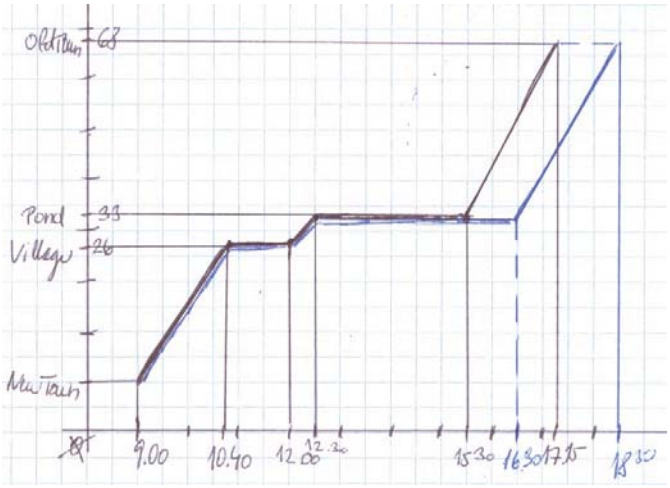
F6.2b): Žáci popsali graf pro osobní vlak například takto: „Vlak vyrazil z místa A na místo B. V B stál 45 minut a potom jel do místa C větší rychlostí, než když jel do B.“ „Vlak vyrazil z A do B, cesta trvala hodinu, z B jel do C, cesta trvala 40 minut.“ (Potřebné údaje získávali z měření pomocí pravítka.) Je důležité, že zdůraznili také rychlost vlaku.

Vyvstala otázka, zda tyto dva popisy jsou stejné. Někteří řekli ne, ale Adam uvedl: „Když já říkám, že jel rychleji, a Tom říká, že to trvalo 40 minut a ne hodinu jako z A do B, pak to je stejný!“

Žáci dokázali formulovat následující pravidla, která učitel napsal na tabuli: „Grafem je lomená čára.“ „Vodorovná úsečka znamená, že vlak zastavil.“ „Rovnoběžné části úseček znamenají, že vlaky jedou stejnou rychlostí.“ „Čím strmější úsečka, tím větší rychlost vlaku.“ „Pokud se úsečky kříží, vlaky se setkají a míjejí nebo předjíždí.“

Učitel vznesl otázku, zda by bylo možné, aby část lomené čáry byla svislá. Někteří žáci řekli, že ne, „protože vlak nemůže být na několika místech najednou“.

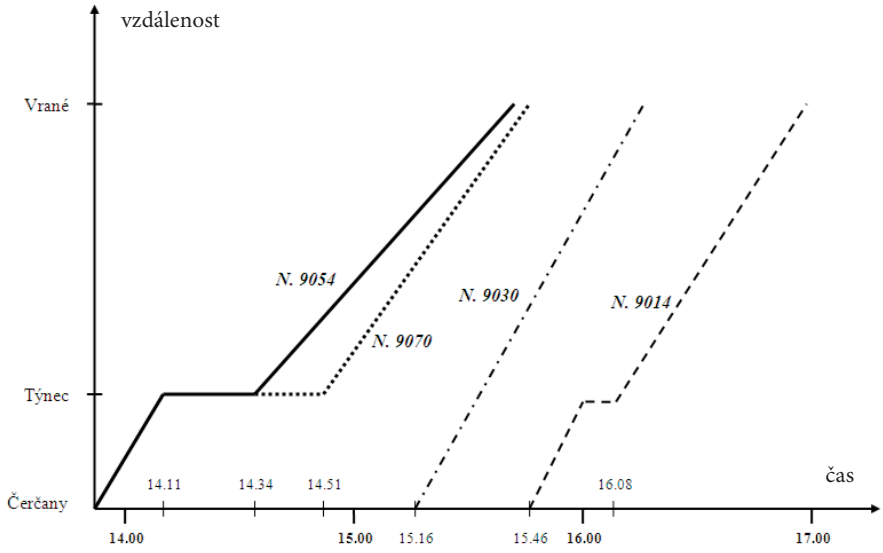
F6.4: Tato úloha byla zadána jako domácí úkol. Porovnání grafů je velmi důležité, protože žáci jsou nuceni věnovat pozornost i malým detailům v grafech a interpretovat je. Rozdíl mezi grafy byl jen v délce času, který děti strávily na jednotlivých místech. Na obr. F6i je jedno řešení úlohy. Chlapec se rozhodl dát oba grafy do jednoho obrázku. Použil různé barvy. Všimněte si, že také použil správnou stupnici na svislé ose, a tak získal graf závislosti vzdálenosti na čase. Bylo by zajímavé požádat ho, aby do stejného obrázku nakreslil i zpáteční cestu chlapců.



Obr. F6i

F6.7: Řešení pro čtyři vlaky mezi Čerčany a Vraným je na obr. F6j.

Závěry pro F6: Úloha F6.2b výslovně žádala žáky, aby formulovali, co znamenají různé druhy úseček. Doufali jsme, že původní úloha F6.2a bude motivovat žáky k podobným výrokům; nicméně to se nestalo (viz Experiment 1). Učitel tedy musel výslovně nadnést problém, co různé druhy úseček znamenají. Čas strávený při řešení první úlohy, jejímž cílem je seznámit žáky s jízdními grafy, je velice důležitý.



Obr. F6j

Podobně jako u úlohového prostředí F3: Periodicita, str. 275, jsme v F6 postupovali od čtení grafu k jeho tvorbě. Naším cílem je budovat a posílit představu grafu jako

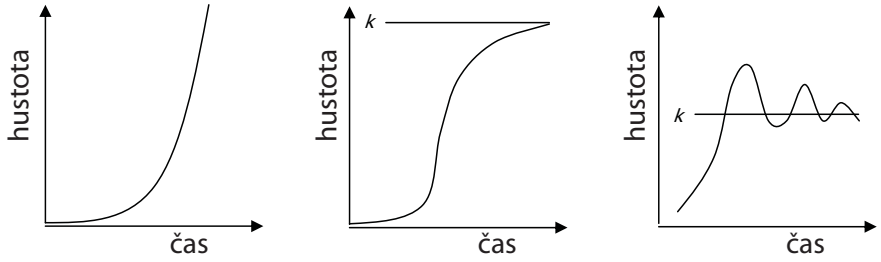
nositele informace o závislosti (funkci). Žáci rozvíjejí svou kompetenci interpretovat grafy, používat své životní znalosti a nakonec i dovednost konstruovat grafy. V českém kontextu je téma jízdních grafů poměrně motivují, protože jeho praktické použití je očividné.

F7 Křivky

> ***Výzva pro spolupracující učitele:*** *Navrhněte příklady ze života, které mohou být popsány křivkami, a formulujte nějaké úlohy.*

Během naší schůzky jedna ze spolupracujících učitelek ukázala křivky na obr. F7a a dala následující vysvětlení (zkráceno):

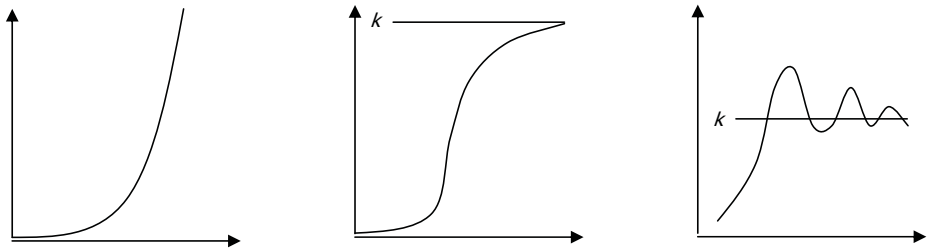
> *Každou populaci můžeme popsat, mimo jiné, její hustotou, což je počet jedinců žijících na jednotce plochy nebo objemu. Tři druhy křivek na obr. F7a jsou: exponenciální (tvar písmena J), sigmoidní (tvar písmena S), oscilující. Navrhněte způsoby užití těchto grafů ve škole. Charakterizujte populaci ve třetím grafu na obr. F7a.*



Obr. F7a

Učitelé se rozhodli formulovat úlohy pro žáky takto:

> *a) Podívejte se na obr. F7b a popište, co by grafy mohly znamenat. Už jste se někdy setkali s podobnými grafy?*



Obr. F7b

Poznámka: Osy na obr. F7b úmyslně nemají žádné označení, protože jsme nechtěli omezit rozsah možných výkladů.

b) Najděte příklady grafů, které popisují reálné situace (v novinách, na internetu, v knihách atd.).

c) Dostanete sadu 12 grafů a diagramů (Pracovní list 7b) a tabulku s nějakými vlastnostmi grafů (Pracovní list 7c). Doplňte tabulku.

Materiál: tři grafy z obr. F7b (Pracovní list F7a), grafy a diagramy z novin apod. Pracovní list F7b a Pracovní list F7c (nebo podobný)

Experiment 1, ČR, 13–14 let, POG

Úlohy byly použity jako úvodní před výukou tematického celku Funkce. Učitelka chtěla mobilizovat zkušenosti a znalosti žáků týkající se grafů, které získali v běžném životě a dalších školních předmětech.

F7a): Někteří žáci prohlásili, že používali podobné grafy ve fyzice (rychlost a zrychlení). Většina řekla, že řešili opačnou úlohu – měli nakreslit graf, ne ho interpretovat, a že „nedělali grafy různě zakřivené".

Co se týče interpretace grafů z obr. F7b, učitelka byla překvapená různorodostí řešení, s nimiž žáci přišli (celá paleta řešení je v Tabulka F7a celek; v tabulce F7a dole jsou jen některá). Většina z nich se týkala třetího, v očích učitelky nejkomplikovanějšího grafu. Až na několik málo výjimek (viz „nematematická vysvětlení" a „nadmořská výška" v tab. F7a) žáci nenabízeli žádné výklady inspirované pouze tvarem křivky bez analýzy funkčního vztahu.

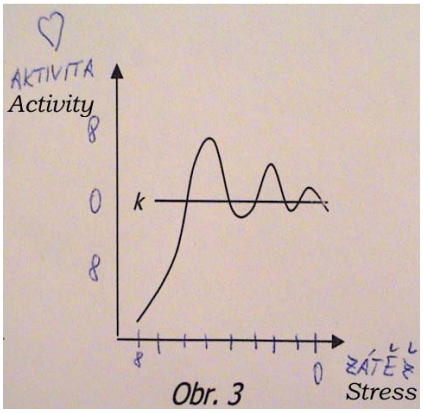
Graf	Kontext Vodorovná přímka *k*	Vodorovná osa / svislá osa
1	„Závislost mezi časem a rychlostí skokana na lyžích." Vysvětlení studenta: Začíná v 0, na začátku pomalu, nabírá rychlost a jede „hroznou rychlostí" a nakonec „skáče". (Viz komentář dole a obr. F7d).	čas / rychlost
1	„Rozpočet nové firmy." Vysvětlení studenta: „Rozpočet roste z roku na rok." (Obr. F7e)	čas v letech / peníze v milionech
3	„Srdce (problémy, infarkt)." Studenti rozvinuli tento výklad v diskuzi. (Viz komentář níže a obr. F7c). *k*: normální funkce srdce	čas / srdeční aktivita
3	„Nadmořská výška" Vysvětlení studenta: „Připomíná mi to hory. Čára *k* ukazuje, které jsou vyšší nebo nižší než 1000 m." *k*: 1000 m nad mořem nebo hladinou moře	– / výška

2, 3	Nematematické vysvětlení: „obrázek židle“ (otočený graf 2), „dno moře“ (graf 3)	žádný

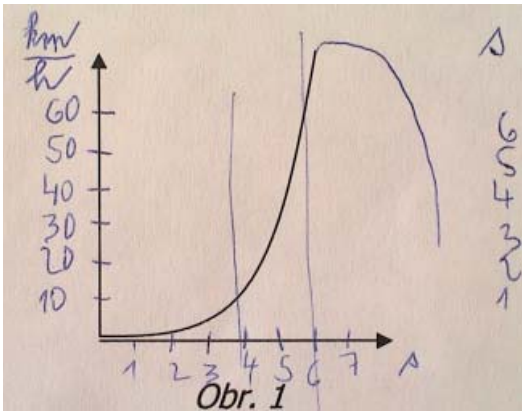
Tab. F7a

Interpretace „Lyžař“:

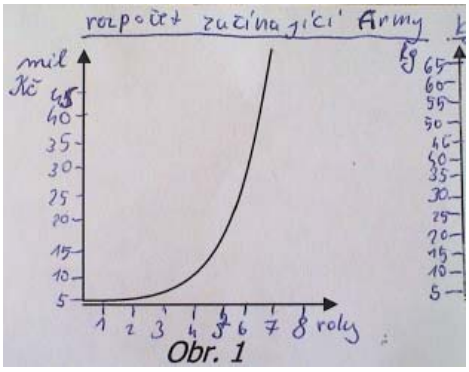
Učitelka se zeptala žáka, kde přesně lyžař skočil. Ukázal na hodnotu 8. sekunda na vodorovné ose (obr. F7d): „Tvar tady po osmé sekundě závisí na tom, jak rychle skočí. Pokud je rychlejší, graf by šel výš, a kdyby šel graf dolů, jel by pomalu.“ Tato výpověď ukazuje, že si uvědomoval vztah mezi rychlostí a časem. Učitelka ho požádala, aby nakreslil část grafu pro druhou možnost. Řekl: „Letěl by takto a tady by se graf dostal znovu do nuly.“



Obr. F7c



Obr. F7d



Obr. F7e

Interpretace „Srdce“:

Jeden žák vyvolal zajímavou diskuzi, když navrhl interpretaci pomocí srdeční aktivity. Označil osy „stres“ (vodorovná) a „aktivita“ (svislá). V diskuzi s učitelkou vysvětlil minimum jako „srdeční zástavu“ nebo „umírání“, růst jako „oživili ho“ a přímku *k* jako „normální stav srdce nebo průměr“.

F

Učitelka: „Jak by graf pokračoval?“
Žák 1: „Osoba by mohla zemřít nebo žít.“
Žák 2: „Kdyby umřel, graf by byl rovný.“
Žák 3: „Ale v takovém případě by to tady na začátku nemohlo být dole!“
Žák 4: „Ale to by bylo divný, tady [začátek] by to muselo být vymazaný a muselo by to začínat tady [na úrovni přímky *k*] ... a *k* by byla jedna.“ „Už vím!“ ... „To znamená, že ta osoba je v největším napětí a tady to končí a srdce se začíná zklidňovat. ... Srdce tluče pravidelně.“

Rozdíly v interpretaci byly dány různým porozuměním významu přímky *k*. Zatímco žák 2 byl pravděpodobně ovlivněn lékařskými přístroji, které ukazují smrt člověka přímou čárou, žák 4 chápal *k* jak optimální hodnotu stresu, kdy se srdce „zklidní“.

Později žák 4 přinesl graf z obr. F7c a vysvětlil: „Nula je v *k* a jak se stres snižuje, srdeční aktivita se taky snižuje. ... Jde to blíž přímce *k*.“

F7b): Tato úloha byla zadána jako domácí úkol. Jak jsme předpokládali, žáci našli širokou paletu grafů a diagramů, které doplnili komentářem. Některé grafy byly diskutovány ve třídě. Žáci byli vedeni k tomu, aby pojmenovali některé vlastnosti grafů (učitelka chtěla připravit pojmové prostředí pro popis matematických vlastností pro úlohu F7c). O většině pojmů ale slyšeli žáci poprvé (nebo přinejmenším se poprvé dozvěděli jejich správná matematická jména). Například většinou popisovali graf jako „stoupající“ a učitelka dodala správné matematické pojmenování „rostoucí“. Navrhli popisování funkce těmito vlastnostmi: tvar („přímka, hyperbola, parabola“), funkční hodnoty (jedna dívka se podivila, že „v grafu mohou být dokonce i záporná čísla“, další navrhla, že můžeme rozlišovat funkce „kladné a záporné“), spojitost (žák použil slovo „spojený“ proti „rozdělený“ a uvedl příklad na obr. Obr. F7f), omezenost (žák použil slovo „ohraničená“ versus „nekonečná“), periodicita (žák použil slovo „střídavá“). Další návrhy pro popis grafu funkce zahrnovaly přídavná jména jako „zvlněný“, „horizontální“, „nekonečný“, „postupně stoupající“, „rychle stoupající“, „špičatý“ atd. Učitelka o všech návrzích se žáky diskutovala a uvedla správnou matematickou terminologii.

F7c): Tato úloha byla řešena následující vyučovací hodinu. Učitelka vybrala dvanáct ukázek z grafů navržených žáky (viz Pracovní list F7b). Snažila se vybrat různé druhy grafů a diagramů, které by motivovaly žáky k tomu, aby přemýšleli o jejich různých vlastnostech a aby rozhodli, zda je možné tyto vlastnosti zkoumat v jakémkoli grafu a diagramu. Učitelka pak vybrala základní vlastnosti funkcí, které měli žáci vyšetřovat. Šlo o vlastnosti, o nichž se hovořilo v předchozí vyučovací hodině v úloze F7b: definiční obor, obor hodnot, spojitost, monotonie (tedy zda je funkce rostoucí, klesající nebo konstantní), být prostá, lichá/sudá, extrémy, průsečíky s osami.

Studenti dostali prázdnou tabulku z pracovního listu F7c, kterou měli doplnit ve skupinách. Učitelka se snažila najít zajímavý způsob realizace této potenciálně nudné

aktivity, a tak umístila dvanáct grafů na různých místech ve třídě. Skupiny žáků se mezi nimi volně pohybovaly a přitom pracovaly na svých tabulkách.

Diskuze, které vznikly ve skupinách při vyplňování tabulky, poskytly učitelce mnoho příležitostí, aby upozornila žáky na vlastnosti funkcí, které by si měli osvojit. Přitom kladla důraz zejména na správné matematické názvosloví. Například se žák zeptal „Jak se jmenuje monotonie, když to je rovný?“ (myslel vodorovné). Další žák odpověděl „konstantní“.

To, že žáci viděli různé grafy ve vzájemných souvislostech, jim také pomohlo, aby lépe porozuměli jejich vlastnostem. Mnohým z nich se nelíbil diagram 12 (to je kruhový diagram): „Tenhle graf je úplně pitomý, nemůžeme o tom říct nic, dokonce ani monotonii ne.“ Viděli, že mezi dvanácti grafy a diagramy se pouze některé dají nazývat grafy (funkcí) v matematice (grafy číslo 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10) a že jen pro ně má smysl vyšetřovat matematické vlastnosti.

Úloha vedla žáky k tomu, aby interpretovali grafy velmi pečlivě a věnovali se podrobnostem, které často považují za triviální. Například u grafu 5 si všimli, že aby mohli mluvit o definičním oboru, musí být vodorovná osa řádně označena (tento graf je spojitá křivka a vodorovná osa není označena).

Učitelka si všimla několika jevů. Žáci často omezili definiční obor funkce na tu část grafu, která byla vidět na obrázku; pokud se tak stalo, učitelka je požádala, aby se zamysleli nad tím, zda by graf mohl „pokračovat“. Na druhé straně ovšem žáci často překvapivě nechtěli rozhodnout, zda je funkce například prostá kvůli nedostatku informací: „Nevím, jak graf pokračuje.“ (To je dobrá příležitost pro učitele, aby otevřel diskuzi a požádal žáky, aby nakreslili pokračování grafu tak, že je funkce prostá, nebo naopak, že není prostá.) Učitelka také musela žákům připomínat, aby věnovali víc pozornosti tomu, zda je interval pro definiční obor a obor hodnot uzavřený, nebo otevřený.

Tato aktivita ukázala učitelce, které pojmy studenti zvládli (jako spojitost) a kterým se musí dále věnovat (např. pojmy sudá a lichá funkce).

Závěr pro F7: Zatímco hlavním cílem úlohy F7a (a F7b) bylo zjistit předchozí zkušenost žáků s grafy a diagramy a motivovat je k dalšímu studiu, cílem úlohy F7c bylo použít matematické prostředky pro popis grafů a schémat z různých hledisek – přirozený jazyk měl být postupně obohacen matematickou terminologií.

Spontánní diskuze žáků o grafech z obr. F7b se zaměřovala na reálné interpretace grafu podle tvaru křivky. Museli se věnovat takovým charakteristikám funkce jako rostoucí, klesající, konstantní. Je dobré, že nikdo z nich neinterpretoval význam grafu jen podle jeho tvaru (viz Komentář k úloze F10, str. 312). Úloha byla úspěšná tím, že motivovala žáky, aby se věnovali podrobnostem průběhu grafu, nejen jeho obecnému tvaru.

Představená rozmanitost řešení a schopnost žáků popisovat změny grafů poměrně přesným způsobem ukazuje, že mají s grafy bohaté zkušenosti, které by učitel měl využít při matematickém vymezení pojmu „graf funkce“. Je také důležité, aby si žáci uvědomili, že stejný graf může mít mnoho různých interpretací.

Obávali jsme se, že žáci budou považovat úlohu F7c za nudnou. Nicméně opak byl pravdou. Zdá se, že nejdůležitější příčinou byl fakt, že ukázky grafů, se kterými se pracovalo, byly vybrány z grafů, které přinesli žáci. Učitelka uvedla, že „k nim měli dobrý vztah a úlohu chápali jak přirozené pokračování předchozích úloh". Žáci měli také pocit, že úsilí, které vynaložili na hledání grafů a schémat v literatuře, nebylo zbytečné, protože „grafy se v matematice opravdu využily". Netradiční způsob zadání úlohy (grafy byly umístěné po celé třídě a ne na pracovním listu) také přispěl k úspěchu. Někteří žáci konstatovali, že jim úloha připomíná „práci na úkolu na letním táboře".

Výše uvedený tematický okruh patří mezi úlohy, které se zřídka objeví v českých učebnicích matematiky. Studentům jsou většinou předloženy elementární funkce a jejich grafy. Jejich úkolem není interpretovat neznámé grafy. V naší experimentální výuce byli žáci naopak vedeni k tomu, aby o matematických myšlenkách mluvili v souvislosti, která byla pro ně důvěrně známá. Ve spolupráci s učitelkou zlepšili svou úroveň matematické terminologie, která jim nebyla jen dána jako hotová. Učitelka se postupně přesunula od přirozeného jazyka na začátku aktivity k matematickému jazyku na jejím konci.

Další návrh: Spolupracující učitelé se rozhodli, že by mohlo být zajímavé zadat stejné úlohy žákům, kteří již tematický celek Funkce probírali, a zjišťovat, zda budou nějaké rozdíly v jejich interpretacích, jinými slovy, jak vyučování matematice ovlivnilo jejich řešení daných úloh.

F8 Povinné ručení

> ***Výzva pro spolupracující učitele:*** *Podívejte se na úlohu v článku Kopáčková (2004), která se týká povinného ručení. Je formulovaná jako poměrně uzavřená. Navrhněte její úpravu v „konstruktivistickém duchu".*

Původní úloha je následující (zkráceno): Žáci dostanou tabulku sazeb pro povinné ručení pro určitou pojišťovací společnost. Mají si tabulku pečlivě prostudovat a odpovědět na otázky:

a) Připravte se pravoúhlý souřadnicový systém, vyberte si vhodnou stupnici na osách (různou pro každou osu) a nakreslete graf závislosti mezi sazbou pojistného a objemem motoru. (Rada: Na vodorovné ose si vyznačte objem od 0 cm^3 do 2 800 cm^3, na svislé ose označte sazby od 1 272 Kč do 9 708 Kč.)

b) Vyznačte v grafu (i) objem motoru, když platíme pojištění 5 000 Kč, (ii) pojištění pro objem 2 000 cm^3, (iii) pojištění pro objem 500 cm^3.

c) Pojmenujte graf a krátce ho popište pomocí svých vlastních kritérií.

d) Je to graf funkce?

e) Myslíte si, že existuje nějaká jiná závislost, jejíž graf by mohl vypadat podobně? Připomíná vám graf něco, co jste již viděli?

Níže popíšeme vyučovací pokus založený na jedné úpravě zadání navrhnuté našimi spolupracujícími učiteli.

a) Zjistěte současné sazby pro placení povinného ručení pro tento rok (v bankách, na internetu atd.). Zapište údaje do tabulky. Nakreslete graf a popište jeho vlastnosti.

b) Zjistěte, jaká je kapacita válce auta vašich rodičů nebo dalších příbuzných. Zjistěte, kolik musíte platit za auto ve vaší pojišťovací společnosti. Srovnejte výsledek s údaji od dalších pojišťovacích společností. Která je pro vaše auto nejlevnější/nejdražší a proč?

c) Jaké sazby pojištění byste navrhli? Zdůvodněte.

d) Vymyslete svou vlastní úlohu vztahující se k tomuto tématu.

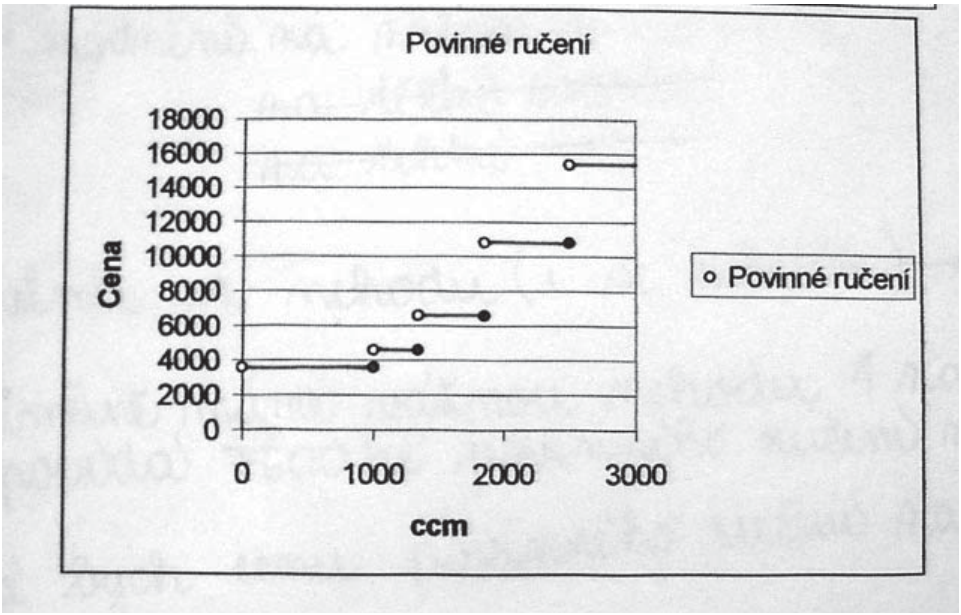
Experiment 1, ČR, 15–16 let, PG2

Žáci pracovali většinou jednotlivě. Podle jejich učitelky je poměrně těžké docílit, aby tato určitá třída pracovala ve skupinách; jsou ochotní pracovat maximálně ve dvojicích.

Úloha vyžadovala, aby žáci našli informace na internetu nebo v literatuře. Všichni našli alespoň tři různé pojišťovací společnosti. Vypracovali úkoly jako písemný projekt. Některé ilustrace jsou na obr. F8a–F8d (obrázky obsahují jen části projektů s grafy).

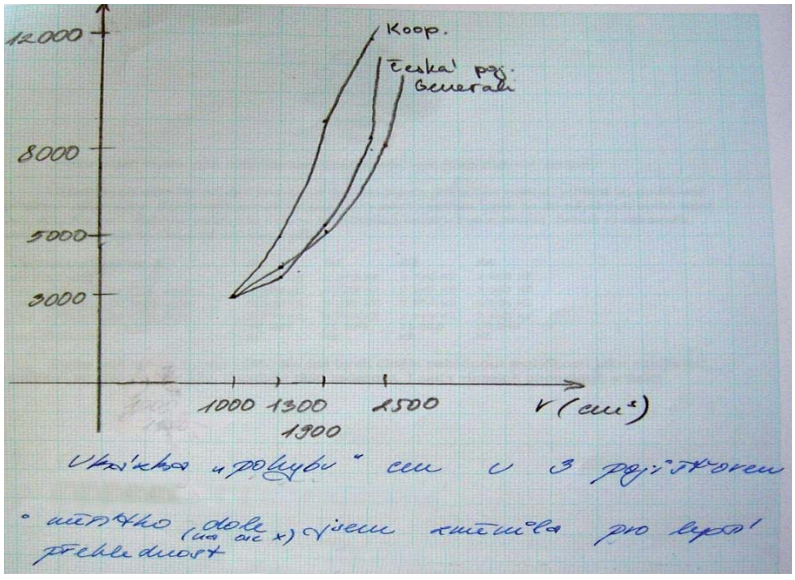
Učitelka uvedla, že byla „poměrně překvapená schopností, kterou žáci prokázali, když dali do souvislosti různá hlediska, jako například roční počet nehod a sazby pojištění poskytovaného pojišťovacími společnostmi“. Na druhé straně byla dost zklamaná kvalitou grafů, které žáci kreslili. Mnoho z nich spojilo sazby křivkou (obr. F8b) a nevytvořili graf „schodovité“ funkce (obr. F8a), jak očekávala.

Autorka prvního grafu správně zakreslila funkční hodnoty tečkami a prázdnými kolečky. Poslední věta jejího popisu grafu odráží její neúplné porozumění „schodovité“ funkci – věří, že taková funkce může být popsána jen rovnicemi pro její jednotlivé úsečky (žáci se ještě nesetkali například s funkcí celá část). Na druhé straně si všimněte jejího dobrého porozumění definičnímu oboru. Říká, že interval bude ohraničený „největším možným objemem válců“. Obor hodnot je však udán nesprávně intervalem místo jako množina hodnot.

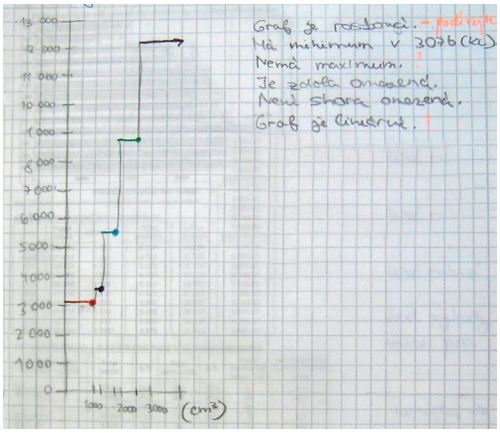


Vlastnosti grafu:
Graf je na jednotlivých úsecích konstantní. Maximum ma v hodnotě 15280, minimum v 3589. Což znamená, že je shora i zdola omezený. Obor hodnot je tedy <3589;15280>. Definiční obor fce je (0;∞), ale tento interval bude omezený na největší možný objem válců (tu bohužel nevím, jelikož se nezajímám o auta). Jednotlivé fce se dají zapsat jen na těch intervalech, kde je fce konstantní.

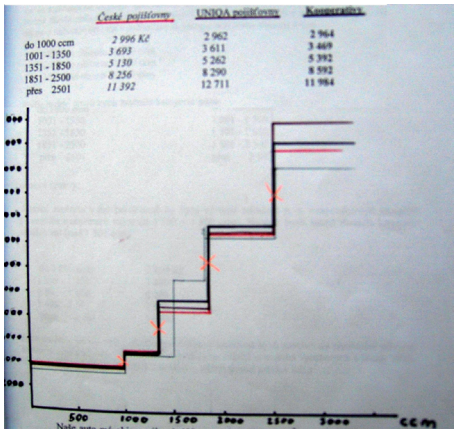
Obr. F8a



Obr. F8b



Obr. F8c



Obr. F8d

Experiment 2, ČR, 13–14 let, PZŠ2

Úlohy byly zadány také třináctiletým a čtrnáctiletým žákům v PZŠ2. Žáci pracovali ve skupinách po dvou nebo po třech. Většina žáků použila internet a shromáždila informace z několika pojišťovacích společností. Grafická úroveň jejich práce byla velmi dobrá, nicméně jejich zpracování bylo mnohem chudší než u starších studentů v experimentu 1. Tito žáci většinou nebyli schopní formulovat žádný názor, proč je určitá pojišťovací společnost lepší než jiná. Všechny jejich grafy byly spojité, „schodovitá" funkce se neobjevila.

Závěr pro F8: Na rozdíl od učitelky nejsme překvapení tím, že žáci vytvořili spojité grafy, protože se dosud setkali jen s tradičními elementárními funkcemi. Grafy na obr. F8c a F8d jsou jaksi „na půl cesty" od spojité funkce ke „schodovité" funkci. První z nich využívá tečky, aby bylo vidět, že například $f(1\,000) = 3\,076$ ale $f(1\,000) \neq 3\,500$, ale dívka, která jej vytvořila, se nestará o „svislé čáry". Navíc zaměňuje pojmy funkce a graf funkce („graf je lineární" atd.) a pravděpodobně ztotožňuje lineární funkci s po částech lineární funkcí. Srovnejte toto řešení se správným řešením na obr. F8a.

Spolupracující učitelé považovali původní úlohu od Kopáčkové (2004) za příliš instruktivní – zvláště první úkol, v němž byly všechny informace žákům dány. Úkoly b), c) a e) v originálním zadání úlohy jsou však velmi důležité pro rozvoj porozumění pojmu „schodovitá" funkce a měly by být použity. Naše experimenty dále ukazují, že mladší žáci potřebují také větší pomoc se zakreslováním údajů do grafu, než tomu bylo v našem případě. Pojem „schodovitá" funkce, který stál v centru pozornosti této úlohy (resp. šlo o jeden izolovaný modul této funkce), se pro žáky ukázal náročnější, než jsme předpokládali.

I když úloha vyžaduje velkou pomoc od učitele, stojí za využití, protože může narušit stereotypní představy žáků, že funkce musí být spojitá. Příklady „schodovitých" funkcí nejsou na základní a střední škole většinou vůbec uváděny, třebaže ve sku-

tečnosti hrají velkou roli. Navíc v této úloze přináší graf žákům více informací než tabulka hodnot – mohou vidět „skoky“ v cenách názorným způsobem.

F9 Putování k Měsíci

Komentář: Úlohu F9 vytvořili angličtí spolupracující učitelé (nebo spíše jejich žáci).

> *Jak dlouho bude trvat cesta na Měsíc za předpokladu, že by mezi Zemí a Měsícem existoval most?*

Experiment 1, UK, 7–11 let

Úloha byla vyzkoušena na základní škole v centru města (Derby) se skupinou asi 15 žáků různého věku. Všichni byli učitelkou hodnoceni jako dobří v matematice.

Žáci mluvili o velkých vzdálenostech v souvislosti s Velkou Británií a učitelka je vedla k odhadům, jak daleko je to z jejich školy do Londýna, Edinburghu, Land's Endu atd. Situace vyvstala kvůli dobročinnému pochodu známých sportovců z John O'Groats do Land's End, který byl uváděn v televizi. Žáci zjistili vzdálenost a jak dlouho to sportovcům trvalo a potom odhadovali, jak rychle šli. Jeden ze žáků se zeptal, jak dlouho by trvalo dojít na Měsíc.

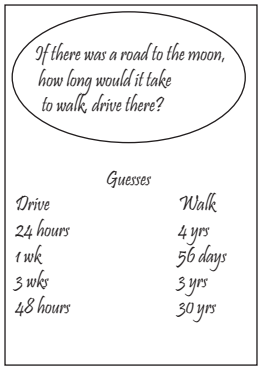
První otázka byla: „Jak daleko je ze Země na Měsíc?“ Žáci použili příručky a internet, aby našli odpověď (384 400 km). Učitelka pak třídu požádala, aby odhadli, jak dlouho si myslí, že by trvalo dojít a dojet na Měsíc.

Nyní se objevila velká paleta odhadů, které, jak se zdálo, nezávisely na věku žáka. Rozsah odhadů pro jízdu na Měsíc byl od 24 hodin po 3 týdny a pro chůzi na Měsíc od 56 dní po 30 let! Učitelka napsala návrhy na bílou tabuli (obr. F9a).

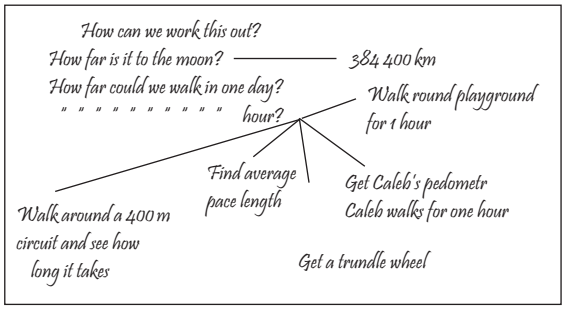
Žáků se pak zeptala, jakou informaci by potřebovali, aby jim mohla pomoci získat lepší odpověď. Jedno z děvčat řeklo: „Dobře, víme, že na Měsíc to je 384 400 km, tak potřebujeme vědět, jak daleko ujdeme za den!“ Na to reagoval chlapec, který řekl: „Máme ještě další hodiny než matiku, víš, nemůžeme celý den chodit, možná můžeme chodit jednu hodinu.“
Toto způsobilo značnou diskuzi a objevilo se několik návrhů, které učitelka napsala na bílou tabuli (obr. F9b). Podívejte se na video VideoF9-UKa, kde jsou návrhy napsané na bílé tabuli a učitelka shrnuje hlavní body předchozí diskuze.

- „Mohli bychom jednu hodinu obcházet hřiště, abychom zjistili, kolikrát bychom to mohli udělat, a potom změřit jednou tu vzdálenost.“
- „Mohli bychom změřit vzdálenost kolem hřiště měřícím kolečkem.“ (Je to kolečko, které se dá tlačit a jehož obvod je 1 metr. Vydá slyšitelný zvuk vždy, když dokončí kompletní otáčku.)
- „To by stejně trvalo příliš dlouho, neměli bychom spíš zjistit, jak dlouho by trvalo ujít 400 m?“
- „Mohli bychom použít krokoměr a někdo by mohl jednu hodinu chodit. To by nám řeklo, kolik kroků udělal.“

- „Pak bychom museli zjistit průměrnou délku jeho kroku.“



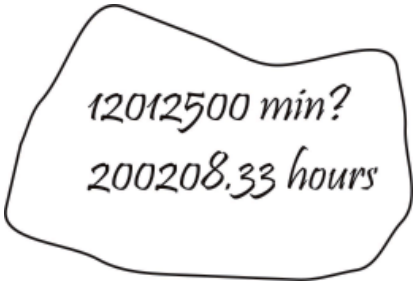
Obr. F9a



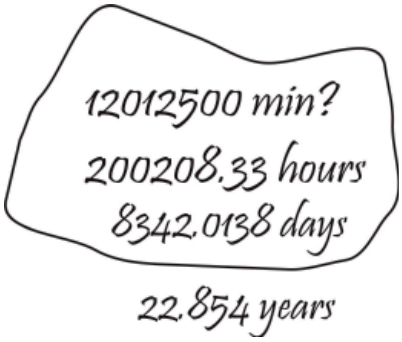
Obr. F9b

Podívejte se na video VideoF9-UKb, kde učitelka čte návrhy skupin žáků týkajících se jejich strategie řešení úlohy.

Skupina pak dostala 20 minut na to, aby našla řešení svého úkolu, a žáci se rozešli. Někteří měřili vzdálenost na hřišti a zjišťovali čas, jak dlouho jim to trvá, jiní byli na chodbě a měřili kratší vzdálenosti a délku svého kroku. Všichni měli hodně práce se zjišťováním, jak daleko by ušli za hodinu (VideoF9-UKc). Pracovali ve skupinách podle toho, jak spolu kamarádili, ne podle věku.



Obr. F9c



Obr. F9d

Po 20 minutách přišli žáci zpět do třídy se spoustou měření. Někteří také přemýšleli o proveditelnosti cesty, protože po příchodu zpět řekli: „Nemůžeme chodit celých 24 hodin, účastníci dobročinného pochodu to také nemohli dělat, musíme jíst a musíme spát!“ Skupina se rozhodla, že mohou chodit 8 hodin každý den, a pak se snažili zjistit, jak dlouho by to trvalo za tohoto předpokladu. Podívejte se na video VideoF9-UKd, kde učitelka hovoří se žáky o jejich měření. Žáci zjistili, že mohou ujít 32 metry za minutu. Když vydělili vzdálenost na Měsíc číslem 32, dostali výsledek uvedený na obr. F9c v minutách a v hodinách. Učitelka je žádala, aby převedli výsledek na dny a roky (obr. F9d).

Závěr pro úlohu F9: Úloha byla velmi otevřená. Její kladné přijetí žáky záviselo, podle našeho názoru, nejen na přitažlivosti problému chůze na Měsíc, ale také na skutečnosti, že žáci ji sami navrhli. Otázkou je, zda bude tak úspěšná v případě, kdy ji zadá učitel.

Co se týče matematiky, úloha rozvíjí kompetenci žáků určit strategii řešení – je dobré, že řešení úlohy umožňuje využití mnoha různých strategií a objevení jistých pravidelností. Experimentování je nezbytnou součástí řešení, stejně jako tvorba a testování hypotéz. Zlepšuje se kompetence žáků odhadovat vzdálenosti. Úloha propedeuticky připravuje pojem lineární závislost a přímá úměrnost. Úloha se může zadat žákům různých věkových skupin stejně, jen přesnost a způsoby řešení, které může učitel od žáků požadovat, jsou různé.

Podkapitola 4: Opakování funkcí

V předcházejících podkapitolách jsme ukázali přístup k úvodnímu stádiu zavedení pojmu funkce. Teď se podíváme na způsoby používané pro opakování, rozšíření a upevnění tématu. Tato podkapitola zahrnuje úlohy použitelné pro opakování základních vlastností funkcí (většinou pro žáky úrovně C). Jejich společným jmenovatelem je, že žáci mají mobilizovat všechny své znalosti o funkcích a věnovat se jejich detailní analýze (vlastnostem funkcí). Všimněte si, že úlohy z části F7: Křivky, str. 295, se také dají k tomuto účelu použít. Začneme s výzvou pro učitele.

Výzva pro učitele:

Řekněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá, nebo nepravdivá. Pokud je funkce na svém definičním oboru

- *rostoucí (nebo klesající), je také prostá.*
- *prostá, je také rostoucí (nebo klesající).*
- *lichá, je také rostoucí (nebo klesající).*
- *sudá, není prostá.*
- *omezená, má maximum (nebo minimum).*
- *omezená, má supremum (nebo infimum).*
- *periodická, je omezená.*
- *periodická, je sudá (nebo lichá).*
- *lichá, její graf je souměrný podle počátku souřadnicové soustavy.*
- *sudá, její graf je souměrný podle osy y.*
- *omezená, její obor hodnot je omezený interval.*
- *rostoucí (nebo klesající), má maximum (minimum).*
- *rostoucí, nemá lokální extrém.*
- *prostá, nemá lokální extrém.*
- *sudá, není lichá a naopak.*
- *lichá (nebo sudá), je periodická.*

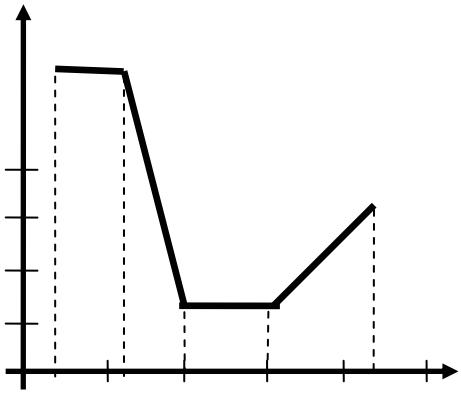
Existuje funkce f, která je zároveň

- *prostá a lichá?*
- *prostá a sudá?*
- *prostá a periodická?*
- *omezená a bez lokálního extrému*
- *sudá a lichá?*
- *omezená a bez suprema (nebo infima)?*

- *prostá a rostoucí (nebo klesající)?*
- *omezená a lichá (nebo sudá)*
- *omezená a periodická*
- *neomezená a periodická*
- *rostoucí a klesající?*
- *nerostoucí a neklesající?*
- *omezená a bez maxima (nebo minima)?*
- *rostoucí (nebo klesající) a s lokálním extrémem?*

F10 Co říká graf?

Popište závislost, jejíž graf je na obr. F10a



Obr. F10a

Komentář: Podobně jako u úlohy F7 jsme úmyslně neoznačili osy, abychom neomezili možné výklady.

Experiment 1, ČR, 9. ročník, PZŠ2, 1999

Úloha byla užita jako diagnostická s cílem zjistit na začátku školního roku, jaké znalosti mají žáci, kteří již téma funkce probírali, právě o funkcích (viz také Kubínová, Novotná, Littler, 1999).

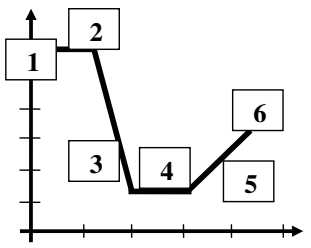
Na konci září dvojice žáků ve dvou 9. ročnících (9.A a 9.E) vypracovaly řešení úlohy mimo vyučování matematice. Dále připravily písemná řešení a představily své výsledky v hodině matematiky. Okamžitě se objevily mezi oběma třídami zajímavé rozdíly.

Žáci v 9.A představili různorodá řešení (často neočekávaná) a obecně byli schopni své výsledky během následné diskuze obhájit. Interpretovali otevřené zadání úlohy v různých kontextech, dokonce i nematematických. Hlavně jsme byli překvapeni fyzikálními výklady (změny teploty a především změny stavů v závislosti na času – viz níže).

V popisech závislostí se u většiny žáků ukázalo, že si uvědomují omezující podmínky pro závislosti, které si vybrali, (například omezení pro obor hodnot daný

objemem nádrže nebo množství latentního tepla tajícího ledu). Z toho můžeme usuzovat, že jejich porozumění vztahu mezi jevem ze skutečného života a jeho reprezentací v grafu je dobré a nejen formální.

V tabulce dole jsou všechny typy řešení žáků 9.A třídy (včetně nesprávných) a některá z jejich sdělení jsou, pokud se opakovala u více žáků, shrnuta do jednoho. Číslo v závorkách v prvním sloupci je počet žáků, kteří uvedli odpověď daného typu.

Závislost	**Veličiny**	**Popis žáků**
Grafy výletů (7)	čas, vzdálenost	„Vlak (auto, žák, pes, …) se pohybuje mezi dvěma místy různou rychlostí nebo stojí.“ „Je možné graf prodloužit (čas vždy plyne).“
Voda v nádrži (8)	čas, objem vody	„V nádrži je jisté množství vody, odtok je otevřený, množství vody se snižuje, po nějakém čase je znovu zavřený, a potom se otevře přítok s jinou rychlostí a množství vody se zvětšuje.“ „Místo plnění přítoky můžeme odebírat vodu z nádrže konvemi a přidávat ji zase konvemi.“ „Může se to dělat, dokud není nádrž prázdná (například zapomněli zavřít odtok).“ „Voda může také přetéct, pokud necháme přívodní potrubí otevřené příliš dlouho.“
Změny teplot (9)	čas, teplota	„Pravidelně měříme venkovní teplotu. Po chvíli se ustálí, pak klesne, pak je stabilní, a potom se zvyšuje.“ „Z digitálního teploměru bychom takovou hezkou čáru nedostali.“
Změny stavu (3)	čas, množství tepla	„Ochlazujeme vařící vodu, až se její teplota začne snižovat. Když je na nule, ještě ji ochlazujeme, dokud nedostaneme led. Po chvíli led zahřejeme a dostaneme vodu, která se začne ohřívat.“ „Doba, kdy se nic neděje, se nemůže prodloužit, jak chceme. Po určitém čase se stav změní a teplota se také začne měnit.“
Úspory (2)	čas, množství úspor	„Máme nějaké úspory a po určité době je začneme pravidelně utrácet. Pak na chvíli přestaneme a potom začneme znovu šetřit.“ „Nebo máme také nějaké peníze a musíme platit úrok. Po jeho splacení s našimi penězi nic neděláme a potom je dáme na účet a oni nám dají úrok, takže se naše peníze začnou zvětšovat.“
Změny rychlosti (1)	čas, rychlost	„Jedeme po dálnici v superrychlém autě stejnou rychlostí, pak musíme zabrzdit, abychom jeli pomaleji, a v jistém okamžiku můžeme znovu zrychlit.“
Obecný popis (4)	*x*, *y* neuvedeny	1. začátek, 2. nic se neděje (větší hodnota), 3. graf jde dolů, 4. nic se neděje (menší hodnota), 5. graf je stoupající, 6. konec.  Obr. F10b

Situace ve třídě 9.E byla jiná. Jen tři z dvanácti dvojic přijaly otevřenost úlohy a uvedly izolované modely „Voda v nádrži“ a „Změny teploty“. Jedna z těchto tří dvojic označila osy souřadnic a představila generický model „Obecný popis“. Čtyři dvojice neřešily problém vůbec, protože křivku nepovažovaly za graf závislosti. Posledních pět dvojic si upravilo úlohu nejprve na uzavřenou (označením os konkrétními čísly) nebo ji zjednodušilo (vynecháním částí grafu).

Závěr pro experiment 1, úloha F10: Hlavním cílem této úlohy bylo diagnostikovat, jaké znalosti o funkcích žáci mají. Učitel může z jejího řešení odvodit hodně informací o porozumění žáků pojmu funkce a pojmů souvisejících. Například důvodem, proč čtyři dvojice neřešily úlohu vůbec, by mohl být fakt, že graf neodpovídal žádnému z grafů, jejichž představy žáci měli, tedy graf lineární nebo kvadratické závislosti nebo nepřímé úměrnosti. Žáci často spojují funkce s omezeným souborem elementárních funkcí. To je důsledek omezeného počtu izolovaných modelů funkcí, s nimiž se během hodin matematiky setkávají. Přítomnost nebo nedostatek omezujících podmínek v žákovském popisu závislosti mohou být použity jako diagnostický nástroj pro zkoumání porozumění žáka vztahu mezi popisovanou závislostí a její reprezentací.

Řada žáků použila „spojitou“ lomenou čáru v obrázku pro interpretaci diskrétních činností jako je měření teploty v daných intervalech, úspory peněz, přidávání vody do nádrže konvemi atd. V jejich kognitivní struktuře nebyl ještě vytvořen generický model (Hejný, 2003) spojité (a diskrétní) funkce.

Velké rozdíly mezi oběma třídami by mohly být vysvětleny skutečností, že zatímco žáci v 9.E se většinou dostávali rovnou k „hotovým“ znalostem (jejich učitel byl velmi tradiční), v 9.A byly většinou používány konstruktivistické přístupy. Učitelka zaváděla mnoho matematických pojmů pomocí projektů, v nichž je žáci sami objevovali.

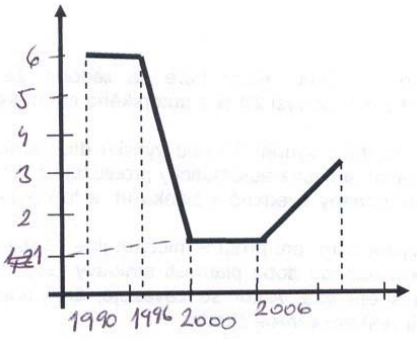
Experiment 2, ČR, 13–14 let, POG, 2005

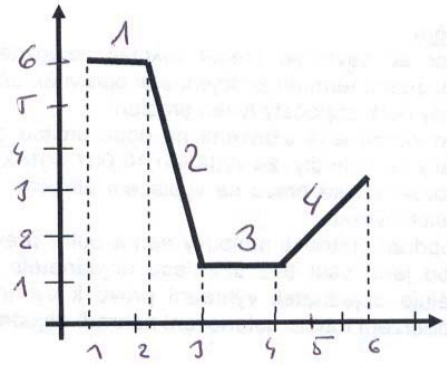
Společným rysem práce žáků PZŠ2 a POG bylo, že používali čas jako jednu z proměnných (až na několik výjimek). Na druhé straně jsme viděli velké rozdíly ve třech oblastech.

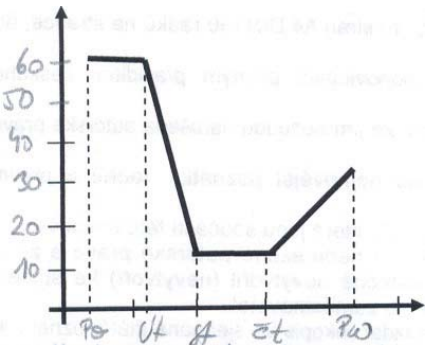
1. Hlavní rozdíl spočívá ve skutečnosti, že žáci POG popsali graf ze dvou hledisek. Nejprve vztahem dvou entit (možné významy funkce ze života) a za druhé matematickými vlastnostmi grafu, jako je definiční obor, obor hodnot, spojitost, sudá vs. lichá, extrémy. Příklad druhého popisu je na obrázku Obr. F10j.
2. Rozsah možných interpretací ze života byl širší než u žáků PZŠ2 (tabulka F10b ukazuje jen nějaké zajímavé interpretace). Všimněte si, že žáci opět použili pro interpretaci grafu mnoho diskrétních jevů. Na obrázku Obr. F10i si chlapec uvědomuje rozdíl mezi spojitými a diskrétními jevy. Navrhuje změnit graf na bodový graf.

3. Většina žáků POG popsala u interpretace ze života všechny detaily. Tedy uvedli entity, které jsou reprezentované na obou osách, a potom napsali přesně jejich množství (viz příklady v tabulce F10b).

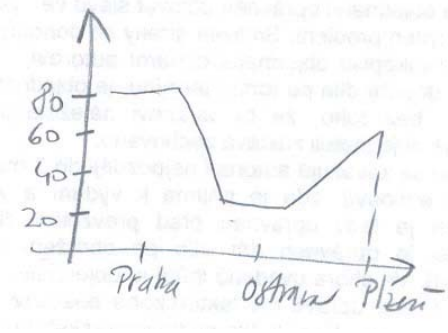
Učitelka POG popsala tuto třídu jako výjimečně tvůrčí u otevřených úloh ve srovnání s jinými třídami, které učí.

Identifikovaná závislost/	**Sledované veličiny**	**Co se stane (slovy žáků))**
Prodej vajec	počet vajec, čas	„V roce 1990 byl prodej vajec na svém vrcholu, v roce 1996 se začal pomalu snižovat, v roce 2000 se začal snižovat velmi rychle kvůli ptačí chřipce, v období 2000–2005 byl prodej vajec stejný (1,2 milionů), na začátku roku 2006 se začal zvyšovat.“ Není jasné, proč žák napsal, že v roce 2000 se prodej začal rychle snižovat – to by mělo být v roce 1996.
 Obr. F10c		
Počet pasažérů ve vlacích (v tisících)	počet pasažérů, čas	„Od 1990 do 1995 počet pasažérů za rok byl 6 000, když začala jezdit levnější autobusová linka, počet pasažérů ve vlacích se začal rychle snižovat, tato situace se ustálila v 2000–2005 na 12 000 pasažérů, potom, co autobusová linka zbankrotovala v roce 2006, počet pasažérů začal zase stoupat.”
Úroveň vody	výška vody, čas	„Graf ukazuje úroveň vody v láhvi sportovce.“ Tento žák neposkytuje více podrobností, které by nám ukázaly, že jeho porozumění závislosti není jen povrchní, dané tím, jaký tvar graf má. Například neupřesnil, jak se voda do láhve a z láhve dostává, ani nezmínil rychlost procesu, aby ukázal, že chápe roli strmosti grafu.

<table>
<tr><td>Otcova nálada</td><td>nálada, známky</td><td rowspan="2">„Graf ukazuje, jak závisí otcova nálada na mých výsledcích ve škole.
1 – říkám mému otci známku, dostal jsem 1, můj otec je v dobré náladě
2 – dostal jsem 5, nálada mého otce se prudce horší
3 – říkám, že jsem dostal 1 a další 1, ale nálada mého otce je stále špatná
4 – dostal jsem pětkrát 1, otcova nálada se pomalu zlepšuje.“
Žák správně interpretuje různé směrnice oblastí 2 a 4 („prudce se horší“, „pomalu se zlepšuje“). Chce říct, že nálada se může zhoršit ihned, ale zlepšuje se jen pomalu?</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 

Obr. F10d: Žák rozdělil graf do čtyř oblastí</td></tr>
<tr><td>Voda v nádrži</td><td>objem, čas</td><td rowspan="2">„Graf vyjadřuje závislost mezi výškou vody v nádrži a dnech. Normálně je nádrž 60 m hluboká. V úterý před záplavami se nádrž musí vypustit. Ve středu se voda ustálila a lidi zase čekali záplavy.“</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 

Obr. F10e</td></tr>
<tr><td>Spotřeba vody</td><td>objem, města v ČR</td><td rowspan="2">„Graf ukazuje, jak spotřeba vody (v %) závisí na obyvatelích ČR (v různých oblastech). V Praze je spotřeba vody docela vysoká, v Ostravě nízká a v Plzni zase roste.“

To je příklad správné interpretace některých jednotlivých částí grafu („vysoká“, „nízká“, „roste“) ale nesprávného výkladu celého grafu. Interpretace, kterou si dívka vybrala, by vyžadovala bodový graf.</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 

Obr. F10f</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>„Tento graf nemůže vyjadřovat nic, protože nezačíná na 0 ani na x ani na y.“
Pěkný příklad stereotypu „nula“.</td></tr>
</table>

Tab. F10b

F

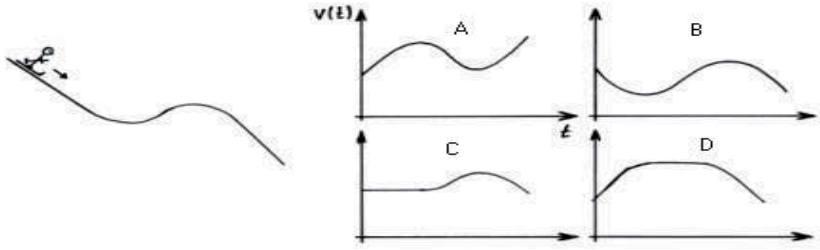
Závěr pro úlohu F10: Tato úloha použitá výše uvedeným způsobem může diagnostikovat úroveň kompetence žáků číst informace z grafu funkce a používat jak matematické, tak životní znalosti o funkcích. Žáci si procvičili vlastnosti funkcí, jako je funkce rostoucí, klesající a extrémy funkcí.

Nicméně, chceme-li se dozvědět o představách žáků o funkcích co nejvíce, je nezbytné, aby byli žáci vedeni k co nejúplnějšímu popisu závislosti. Tedy pokud žák odpoví jen to, že představuje vztah mezi dvěma entitami, nemůžeme o jeho porozumění pojmu funkce mnoho říci. Možná, že byl ke své výpovědi motivován jen tvarem grafu.

Komentář k vlivu tvaru grafu na představy žáků

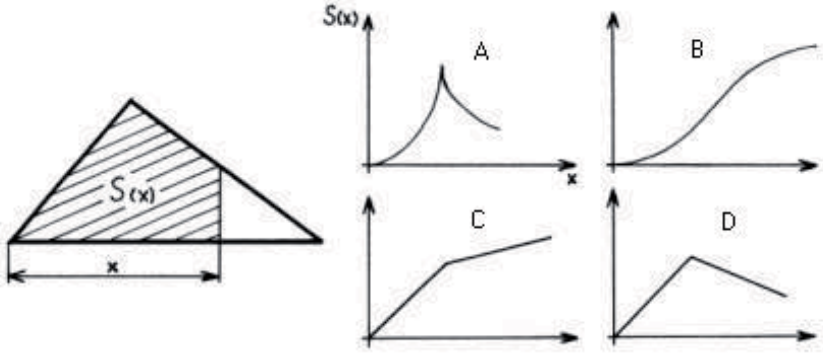
Eisenmann (2005) udělal následující experiment. Dal žákům a studentům různého věku (včetně studentů učitelství) sérii úloh, z nichž dvě jsou uvedeny na obr. F10g a F10h.

I. Grafy vpravo vyjadřují závislost rychlosti lyžaře v(t) na čase t. Jen jeden z nich může znázorňovat situaci na obrázku vlevo.



Obr. F10g

II. Jen jeden graf vpravo vyjadřuje závislost vystínovaného obsahu v trojúhelníku S(x) a vzdálenosti x.



Obr. F10h

Eisenmann zjistil, že nejčastější nesprávná odpověď žáků základní a střední školy (a také mnoha studentů učitelství) pro úlohu I byla volba B (správná odpověď je A)

a pro úlohu II volba D (správná odpověď je B). Tato volba byla zřejmě motivovaná jen tvarem grafu.

Vyzkoušeli jsme tyto dvě úlohy v PZŠ1 a POG a zaznamenali jsme stejný jev. V tabulce F10c můžeme vidět počty žáků, kteří zvolili jednotlivé odpovědi. Výsledky první úlohy jsou mnohem lepší než druhé. To je pravděpodobně dáno skutečností, že druhá úloha se týká obsahu, zatímco první se týká rychlosti, s níž mají žáci více zkušeností. Přesto jsme byli překvapeni, že dokonce i starší žáci a žáci POG (pravděpodobně matematicky vyspělejší) si neuvědomili, že D nemůže být správná odpověď, protože když roste x, obsah musí růst také.

		8. třída POG	*9. třída POG*	*7. třída PZŠ1*	*9. třída PZŠ1*
Úloha I	*A*	*16*	*22*	*6*	*20*
	B	*8*	*0*	*15*	*4*
	C	*0*	*0*	*0*	*0*
	D	*0*	*0*	*0*	*0*
Úloha II	*A*	*1*	*0*	*1*	*2*
	B	*0*	*4*	*0*	*2*
	C	*3*	*2*	*2*	*0*
	D	*18*	*13*	*12*	*6*

Tab. F10c

Důvody, které žáci pro své odpovědi udávají, zřetelně ukazují, že byli motivováni v první řadě tvarem grafu. Podívejte se na ukázky videa našeho experimentu úlohy I v PZŠ1. Video F10a ukazuje práci jedné skupiny, která diskutuje o nesprávné volbě B. VideoF10b ukazuje veřejnou prezentaci, v níž žák zdůvodňuje volbu B. VideoF10c ukazuje hezké vysvětlení jednoho žáka, který nejprve vybral volbu B, ale později si to rozmyslel a opravil se.

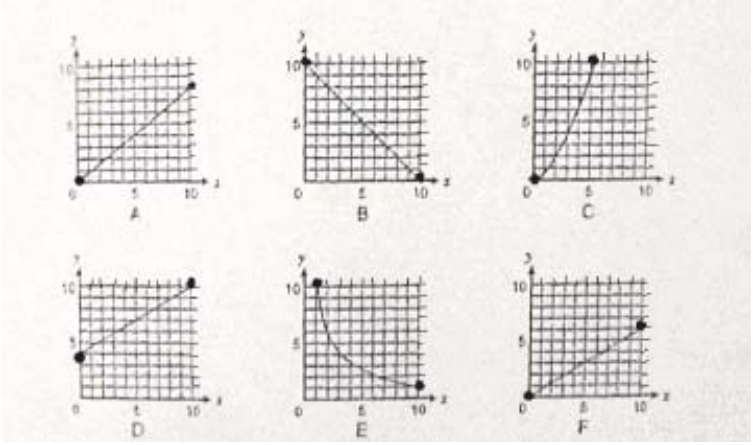
Výše uvedené potvrzuje, že mnoho žáků nemá dobré porozumění tomu, co graf vlastně říká o vztahu mezi veličinami uvedenými na osách. Jediný způsob, jak můžeme porozumění grafu rozvíjet, je najít úlohy a situace, v nichž mají žáci provádět podrobnou interpretaci funkční závislosti, hlavně z jejího grafu. Úlohy F7, F10 a F11 jsou příklady takových úloh

F

F11 Klasifikace funkcí

Poznámka: Zdrojem této úlohy byla kniha Becker, Shimada (eds., 1997). My jsme upravili jejich grafy – prodloužili jsme linky mřížky, aby vypadala „neukončeně“, a označili koncové body grafu.

a) Klasifikujte grafy na obr. F11a do dvou skupin tak, aby jedna skupina grafů měla společnou nějakou matematickou vlastnost s grafem A a druhá ne. Najděte co nejvíce metod klasifikace a vysvětlete kritérium pro své třídění



Obr. F11a

b) Vyberte si jiný graf a klasifikujte grafy podobným způsobem.

Materiál: Grafy na obr. F11a nebo podobné

Experiment 1, ČR, 14–16 let, PZŠ1, PG1 a POG

Popíšeme experimenty ve všech třídách společně a poukážeme na určité podobnosti a rozdíly. Žáci pracovali v skupinách, učitelé nijak neovlivňovali jejich práci, ani neodpovídali na žádné otázky ohledně správnosti jejich řešení. Různá řešení jsou ukázána v tabulce F11a celek. Zde uvedeme jen některé v tabulce F11a. Kvůli přehlednosti uvádíme naše komentáře hned u řešení žáků. Žáci se nejdříve podívali na různé vlastnosti grafu A a navrhli první třídění. Pak promysleli další vlastnosti a udělali vhodné skupiny funkcí.

Další kritéria třídění neuvedená v tabulce F11a jsou: definiční obor funkce, obor hodnot funkce, zdola omezená, shora omezená, existence maxima nebo minima, průsečíky s osami, procházející počátkem.

Většina žáků se soustředila na popis jedné skupiny a druhou skupinu charakterizovali jako tu, která nemá vlastnosti první skupiny – někteří žáci nedovedli popsat druhou skupinu jedinou vlastností.

	Třídění	**Grafy**	**Ilustrace / komentáře**
1	Rostoucí	A, D, F, C	V PZŠ1 někteří žáci neužívali správné matematické termíny, ale vyjádřili to jinými slovy: „První skupina začíná v nejnižším bodě a roste; druhý začíná v nejvyšším bodu a jde dolů.“
	Klesající	B, E	

2	Začíná v [0;0]	A, C, F	Některé skupiny udělaly chybu a uvedly, že funkce začíná v 0 (B a D by v takovém případě byly také v první skupině).
	Nezačíná v [0;0]	B, D, E	
10	Grafem je přímka	A, B, D, F	Jen jedna skupina v PG1 našla toto třídění správně. Ostatní navrhli „lineární proti kvadratické“, „přímka proti parabole a hyperbole“.
	Grafem je křivka	C, E	
13	Popis všech šesti grafů	–	Jedna skupina v PZŠ1 nechápala úlohu (nebo byla jejich schopnost klasifikovat nízká) a zkusila popsat všech šest grafů co nejvíce charakteristikami.
14	Jedinečně invertovatelné	A–F	Jen v POG. Je zajímavé, že žáci dovolili, aby druhá skupina funkcí byla prázdná.
15	Definované dvěma body	A, B, D, F	Jen v POG: „Lineární funkce jsou definované jen dvěma body. Grafy C a E jsou definovány více body.“
	Definované více body	C, E	
18	Sklon *x* 45°	A, B	Jen v POG. Třídění není správné. Považují 45° a 135° za stejné a 45° není pro A správné. Navíc nenapsali, jak se tento sklon měří pro křivky. Při řešení úlohy použili pravítko, aby našli tečnu ke křivce (ještě tento termín neznali), a hledali sklon.
	Jiný počet stupňů	C, D, E, F	
19	Lichá funkce	A, C, F	Jen v POG. „A, C a F jsou liché, protože procházejí počátkem. Jsou rostoucí.“ Tito žáci spojují dvě vlastnosti. Navíc pravděpodobně ztotožňují lichou funkci s funkcemi procházejícími bodem [0;0]. Nebo si možná představili další část grafu středově souměrnou kolem počátku.
	Nepopsáno	D, E, B	

Tab. F11a

Závěr pro úlohu F11: Tato úloha dává prostor mnoha úpravám. Většina žáků byla úlohou motivovaná, protože, pokud víme, jim byla neznámá. Povzbudila je k tomu, aby věnovali pozornost detailům grafů, a protože měli popsat třídění písemně, museli přemýšlet o správném matematickém popisu. Pracovali ve dvojicích a úloha vyvolala bohaté matematické diskuze.

Žáci rozvinuli svou kompetenci klasifikovat obecně a zejména klasifikovat funkce a stanovit kritéria jejich třídění. Učitel využil příležitost k diskuzi o matematických pojmech, jako je přímá a nepřímá úměrnost a vlastnosti grafu (konstantní přírůstek, monotonie, definiční obor, směrnice).

Komentář: Při pohledu na třídění uvedená v knize (Becker, Shimada, eds., 1997) můžeme konstatovat, že většina z nich se objevila v řešeních našich žáků také. Jediné, které chybí, je spojeno s termínem směrnice. Tento termín není obecně v české „školské“ matematice používán.

Možná úprava: Pro třídění číslo 10 z tabulky F11a autoři navrhli požádat žáky, aby udělali tabulky s čísly, jako je například tabulka F11b.

x	0	1	2	3
y	10	9	8	7

Tab. F11b: Graf B, změna rovna 1

Pokud žáci vytvoří podobné tabulky pro všechny grafy, mohou formulovat kritérium pro „být přímka“ versus „být křivka“ jako „změna y odpovídající změně x o 1 je konstantní“ versus „tato změna není konstantní“. Tuto úlohu jsme s našimi žáky řešit nezkoušeli.

> ***Výzva pro učitele:*** *Připravte soubor grafů, které se dají použít pro rozvoj (nebo diagnostiku) vlastností funkcí (definiční obor, obor hodnot, monotonie, extrémy atd.)*

Příklad takového souboru je v úloze F7c v tematickém okruhu Křivky.

Závěr

Pojem funkce náleží mezi velmi obtížné pojmy matematiky na základní a střední škole. Většina autorů učebnic prezentuje funkce a pojmy s nimi spojené zhuštěným způsobem pomocí definic a standardních procedur pro řešení úloh. Důraz je kladen na analytický popis funkcí (například rovnice elementárních funkcí) a jejich základní vlastnosti (například popis vlastností „vzorci“). Ačkoli i tito autoři využívají prvky genetického přístupu, uplatňují současně také strukturální přístup (jako například množinový zápis), aby byly jejich výpovědi matematicky co nejsprávnější. V této kapitole jsme ukázali příklady vyučovacích strategií, které podle našeho názoru zvýší porozumění žáků funkčním závislostem motivačním způsobem. To potvrdily experimenty ve třídě.

Doufáme, že se čtenář cítí motivovaný vyzkoušet alespoň některé z předložených úloh. Jak jsme již několikrát v kapitole zopakovali, čtenář by měl využít zkušenosti z experimentů, které jsme v našem textu popsali, k tomu, aby si úlohy i přístupy upravil podle svých potřeb a podle potřeb svých žáků.

Literatura

Becker, J. P., Shimada, S. (eds.) (1997). *The open ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task. In Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, Ol. (eds.), *Meaning in Mathematics Education*. USA: Springer.

Eisenmann, P. (2006). Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole. In Prokopová, M. (ed.), *Sborník příspěvků z konference Jak učit matematice žáky ve věku 11-15 let*. Plzeň: Vydavatelský servis, 43–52.

Hejný, M. (2003). Understanding and structure. In M.A. Mariotti (ed.), *Proceedings of CERME03.* Bellaria, Italy. [WWW<http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3]

Herman, J. a kol. (1994). Standardy z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší gymnázium. In Fuchs, E. et al., *Návrh evaluačních standardů z matematiky pro základní a střední školy*. Praha: Prometheus.

Kalchman, M., Koedinger, K.R. (2005). Teaching and learning functions. In Donovan, M.S., Bransford, J.D. (eds.), *How students learn: History, Mathematics, and Science in the classroom*. Washington, D.C.: The National Academies Press.

Kopáčková, A. (2004). Úlohy posilující funkční myšlení. In Ausbergerová, M., Novotná, J. (eds.), *9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Plzeň: Vydavatelský servis, 139–145.

Kopáčková, A. (2005a). Podpora funkčního myšlení 1. *Učitel matematiky,* roč. 13, č. 3, 174–179.

Kopáčková, A. (2005b). Podpora funkčního myšlení 2. *Učitel matematiky,* roč. 13, č. 4, 193–203.

Kubínová, M. (1989). *Funkce ve vyučování matematice na základní a střední škole.* Kandidátská disertační práce, Praha.

Kubínová, M. et al. (1997). *Kniha pro učitele. Matematika s Betkou 1*. Praha : Scientia.

Kubínová, M., Novotná, J., Littler, G. (1999). Projects and mathematical puzzles – a tool for development of mathematical thinking. In Schwank, I. (ed.), *Proceedings of the First Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 1)*, Osnabrück: Forschungsinstitut für Didaktik der Mathematik, 53–63.

Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V. (1996). *Matematika s Betkou 1 pro 6. ročník základní školy.* Praha: Scientia.

V této kapitole jsou aplikovány výsledky výzkumu realizovaného v rámci grantu GA ČR 406/05/2444.

F

Rejstřík

algebra 92
algebraicky 223
automatizace 21, 22,

číselná dvojčata 200, 209
číslo/čísla 6, 9, 21, 23, 36, 59, 72 a dále
  celá 23, 36
  čtvercová 200, 208, 209, 231, 232
  iracionální 102
  liché 20, 203, 208
  přirozená 23, 102
  racionální 102
  sudé 20, 203
  trojciferné 17
  trojúhelníková 200, 206, 211, 228
  záporné 16, 19, 102
experimentování 9, 30, 44, 47, 91, 99, 100, 101, 102, 110, 197, 201, 226, 250, 306

Fermat 34, 35, 36
funkce 4, 6, 9, 29, 198, 257, 258, 259, 261, 263, 265, 271, 275 a dále
  algebraická 197, 198
  diskrétní 275, 309
  elementární 300, 301
  lineární 260, 271, 315
  lichá 299, 315
  kvadratická 246
  kladná 298
  klesající 275
  periodická 306, 307
  po částech lineární 261, 271, 303
  prostá 298, 299, 306, 307
  rostoucí 264, 271, 275, 287, 298, 299, 306, 307, 312, 314, 315
  „schodovitá“ 301
  spojitá 299, 303, 309
  vlastnosti 298
  záporná 298

Gauss 34, 35, 36
graf 19, 24, 28, 198, 200, 201, 206, 212 a dále
  percentilový 268
  funkce 257, 258, 259, 260, 298, 299, 300, 312
  jízdní 261, 282, 287–292
  bodový 309, 311
  interpretace 9, 11, 22, 230, 257, 262, 274, 282
  ne/spojitý 274

hra 160, 166, 167, 169, 170, 172, 173, 190
  paměťová 193,
  rychlá 165, 167, 179
hypotézy 9, 25, 100, 103, 198, 237
  tvorba 23, 24, 25, 30
  testování 306

index BMI 264, 268

jazyk 16, 26, 27, 28, 298, 46, 56, 79, 81, 96, 100, 106, 144, 258, 260, 262, 263, 279, 299, 300
  algebraický 146
  obrazový 28
  matematický 28, 29, 108, 260, 292
  formální 27, 95
  metaforický 95, 107, 142, 144

klasifikace 73, 313
komunikace 3, 9, 26, 27, 28, 30, 97, 99, 103, 140
  písemná 27, 28
  ústní 26
konstrukce 9, 12, 43, 46, 72, 81, 87, 98, 99, 101, 105, 139, 155, 160, 200,
euklidovská 35, 37
didaktická 258
geometrická 50
krychle 28, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 105, 106, 107, 108, 112–217, 218, 234

model 96, 103, 104, 108, 111, 112, 117, 124
obarvení 104
krystalizace 15, 19, 20,
křivka 201, 261, 267, 268, 271, 295, 296, 299, 301, 306, 309, 315, 316
kvantifikátor 130, 131

medián 265, 273
metafora 28, 96, 106, 107, 108, 139
mnohoúhelník 9, 25, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 50, 51, 52, 53–100, 200, 209, 210, 211, 222, 246
pravidelný 3, 6, 31, 32, 33, 34, 38, 39, 41–93, 100, 211, 246
model funkce 259
modus 201, 221, 273
motivace 15, 16, 19, 45, 100, 110, 153, 154
myšlení
algebraické 198
kombinatorické 97, 100

nácvik 4, 165, 169, 173, 174, 176

obor
definiční funkce 299, 314
hodnot funkce 314
obsah 246, 313
trojúhelníka 14, 23, 24, 216, 312
obrazce 24, 136, 212, 213, 214, 215, 216, 222, 223
obvod 24, 37, 44, 197, 201, 212, 213, 214, 220, 221, 222, 223, 247, 264, 304
odvozování 25, 30

periodicita 275, 294, 298
polymina 111, 112, 114, 139, 148
porozumění číslům 3, 28
prvočísla 36
pravidelnost 6, 9, 20, 24, 28, 32, 33, 44, 46, 51, 71, 72, 73, 74, 76, 87, 146, 197, 198, 199, 200, 201, 204, 205, 207, 208, 209, 219, 243, 244, 248, 259, 261, 275, 278, 306
algebraická 71
aritmetická 77
geometrická 71
číselná 71, 72
problém 9, 11, 12, 13, 15, 16, 19, 20, 22, 23 a dále
otevřený 3
problematická situace 13
proces pojmotvorný 99, 102, 258, 264
průměr aritmetický 221, 264, 281, 287
představivost prostorová 99, 103
přístup k vyučování 5, 7, 9, 12, 25, 157, 193, 199, 246, 257, 262, 263, 287, 306, 316
transmisivní 14
konstruktivistický 3, 11, 14, 23, 28, 90, 107, 155, 179, 260, 263, 266, 309
inovativní 5
didaktický 95
individuální 97, 107
přístup k řešení úloh 5, 24, 32, 33, 96, 97, 125, 130, 131, 156, 157, 161, 178, 215, 224, 241, 250, 258, 259, 281
analytický 62, 68
syntetický 62, 68, 71
strukturální 258, 316

reprezentace 9, 24, 25, 33, 52, 76, 77, 139, 157, 158, 159, 160, 162, 164, 165, 177, 190, 191, 193, 194, 260, 275
restrukturování 102

síť krychle 96, 99, 105, 106, 107–154
souměrnost 74, 143
osová 147
středová 116
strategie 13, 20, 23, 24, 58, 66, 80, 85, 99, 109, 112, 118, 148, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 164, 165, 170, 175, 176, 183, 194, 201, 261, 305
kombinatorická 99
komunikační 12, 14
vyučovací 5,12, 141, 194, 262
struktura 32, 68, 78, 84, 99, 102, 135, 211

algebraická 35
aritmetická 38, 70
kombinatorická 98, 99, 135
mini-struktura 98
strukturování 102, 103, 124
symbol algebraický 259

termín 108, 114, 123, 314, 315
metaforický 98, 99, 108
těleso 25, 129, 136, 216, 224
tvar algebraický 201

výraz algebraický 199, 207, 234

závislost 6, 9, 20, 24, 160, 177, 183, 201, 210, 211, 212, 213, 214, 222, 223, 232, 247, 258, 259, 260, 270, 270, 287, 293, 295, 296, 300–316
znalost 11, 12, 14–30, 34, 38, 43, 56, 57, 58, 79, 81, 87, 97, 100, 101, 102, 134, 156,162, 178, 179, 183, 194, 198, 199, 206, 222, 223, 224, 225, 234, 246, 259, 266, 274–309, 312
abstraktní 5, 19
formální 14, 20, 22, 101

Náměty na podnětné vyučování matematice

Editorka: Naďa Stehlíková

Autoři kapitol: Giorgios Barbas, David Benson, Milan Hejný, Darina Jirotková, Marie Kubínová, Graham Littler, Brigitte Spindeler, Naďa Stehlíková, Marianna Tzekaki, Bernd Wollring

Recenzovaly: Pavla Polechová, Eva Swoboda

Projekt IIATM č. 112218 CP-1-20t03-1-COMENIUS-2.1 byl uskutečněn s podporou Evropského společenství v rámci programu Socrates-Comenius 2.1.

Partneři projektu IIATM: Univerzita Karlova v Praze; Univerzita v Kasselu, Německo; Univerzita v Soluni, Řecko; Univerzita v Derby, Velká Británie

Vydává: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Rok vydání: 2007

Formát: B5

Počet stran: 320

Náklad: 250 ks

ISBN 978-80-7290-342-9