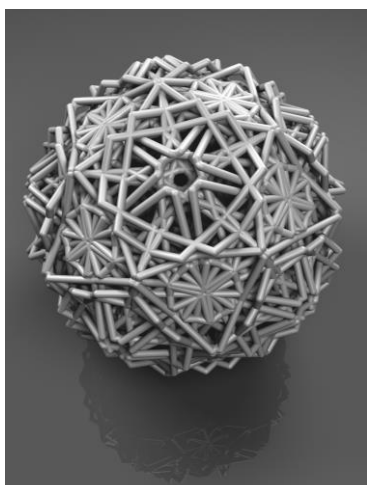


KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY: METODICKÝ MATERIÁL PRO UČITELE

Naďa Vondrová, Radka Havlíčková,
Miroslav Rendl, Jana Žalská



Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

PRAHA

2015

OBSAH

Obsah	1
1. Úvod	3
2. Kritická místa matematiky základní školy očima českých učitelů	5
3. Online dotazník pro učitele	6
3.1 Odpovědi učitelů 1. stupně	7
3.2 Odpovědi učitelů matematiky 2. stupně	9
3.3. Odpovědi učitelů obou stupňů škol – část psychologická	11
4. Konstruktivní úlohy	16
4.1 RVP pro základní vzdělávání	16
4.2 Úlohy, které působí českým žákům problémy	17
4.3 Diagnostické úlohy použité v našich rozhovorech s komentářem	19
4.3.1 Úlohy určené pro 1. stupeň (4. a 5. ročník, viz také <i>kniha</i> , oddíl 3.3.2)	19
4.3.2 Úlohy určené pro 2. stupeň (viz také <i>kniha</i> , oddíl 3.3.3)	20
4.4 Obtíže žáků a jak jim předcházet nebo čelit	23
5. Míra v geometrii	29
5.1 RVP pro základní vzdělávání	30
5.2 Úlohy, které působí českým žákům problémy	31
5.2.1 Úlohy z mezinárodního testování a naše výzkumná sonda	31
5.2.2 Další problematické úlohy z testování	38
5.2.3 Další související úlohy	44
5.3 Diagnostické úlohy použité v našich rozhovorech	46
5.4 Obtíže žáků a jak jim předcházet nebo čelit	48
6. Slovní úlohy	57
6.1 RVP pro základní vzdělávání	57
6.2 Úlohy, které působí českým žákům problémy	57
6.3 Diagnostické úlohy použité v našich rozhovorech s komentářem	59
6.4 Obtíže žáků a jak jim předcházet nebo čelit	64
7. Zlomky u žáků 2. stupně	72
7.2 RVP pro základní vzdělávání	73
7.3 Diagnostické úlohy použité v našich rozhovorech	73
7.3.1 Úlohy s obrázky	73
7.3.2 Úlohy o cenách	74
7.3.3 Úlohy s koláči	74
7.3.4 Úlohy na číselné ose	74

7.4 Chápání zlomku a jeho různých významů u našich žáků	77
7.4.1 Obtíže žáků při chápání zlomku jako čísla	77
7.4.2 Problémy žáků v základní zlomkové strukturaci a v úlohách s operátorem	78
7.4.3 Obtíže žáků při Identifikaci základu.....	81
7.4.4 Obtíže žáků u úloh s operátory způsobené Interferencí typů úloh a výpočtů v těchto úlohách	82
7.4.5 Obtíže žáků se zlomkem jako mírou.....	83
7.5 Didaktická doporučení: 2d modely vs. číselná osa	86
8. Algebraizace a práce s algebraickými výrazy.....	88
8.1 RVP pro základní vzdělávání a pro gymnázia	88
8.2 Úlohy, které působí českým žákům problémy	88
8.3 Diagnostické úlohy použité v našich rozhovorech s komentářem	90
8.4 Obtíže žáků a jak jim předcházet nebo čelit.....	98
a) Žák má tendenci algebraický výraz „vypočítat, uzavřít“, dostat se k jednomu výsledku.	98
b) Žák má problémy při algebraizaci reálné situace popsané slovy.	99
c) Žák nechápe roli koeficientů v algebraickém výrazu či ve vzorci.	99
d) Žák má problémy s geometrickou reprezentací algebraického výrazu.....	100
e) Žák nepoužije závorky při dosazování do výrazu nebo vztahu.....	101
g) Žák špatně roznásobuje závorku.	101
h) Žák má problém s násobením nebo sčítáním jednočlenů s jednou proměnnou.	102
8.5 Další úlohy.....	103
9. Doporučené čtení.....	105
10. Použitá literatura	106

1. ÚVOD

Problematika výuky matematiky a výsledků našich žáků v matematice je v popředí zájmu odborné i laické veřejnosti již po řadu let. Přispívají k tomu i poměrně špatné výsledky mezinárodních testování z matematiky. V rámci projektu GA ČR *Kritická místa matematiky, analýza didaktických praktik učitelů* jsme si položili otázku, zda existuje nějaká oblast (oblasti), v které mají žáci zejména obtíže, a jaké konkrétní obtíže to jsou. Východiska naší práce byly čtyři.

Za prvé se jedná o sekundární analýzy výsledků *mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS 2007* z matematiky pro 8. ročník (Rendl, Vondrová, 2014) a analýzy obecných výsledků výzkumů TIMSS z jiných let a výzkumu PISA. Tak jsme získali konkrétní poznatky o tom, jaké typy úloh jsou pro naše žáky obtížné.

Za druhé se jedná o výsledky hloubkových *rozhovorů se zkušenými učiteli* základní školy, jejichž primárním cílem bylo zjistit, jaké oblasti matematiky základní školy považují pro naše žáky za obtížné. Výsledky jsme shrnuli v monografii (Rendl, Vondrová a kol., 2013). Učitelé jako kritické identifikovali vesměs ty oblasti, které se jako kritické objevily i v mezinárodních srovnávacích výzkumech, ale také některé nové (např. konstrukční úlohy).

Za třetí jsme připravili a realizovali kvantitativní šetření formou *online dotazníku* pro učitele 1. stupně a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol. Jeho hlavním cílem bylo do jisté míry ověřit zjištění z rozhovorů s učiteli. Podrobněji se mu věnujeme v kap. 3.

Témata uvedená v kap. 4 až 8 patří mezi ta, která učitelé popisovali jako pro žáky nejobtížnější a která se jako obtížná jeví i v mezinárodních testováních. Pro tato témata jsme připravili sady úloh, které jsme zadali omezenému vzorku žáků, v matematice spíše průměrných (ovšem bez závažných diagnóz bránících jim porozumět matematice základní školy), abychom zjistili, v čem spočívá podstata jejich obtížnosti a v čem mají konkrétně žáci potíže (čtvrté východisko). Použili jsme metodu hloubkového *rozhovoru s žáky*, protože jen tak bylo možné získat podrobné informace, jak žáci úlohy řeší a v čem konkrétně mají problémy. Výsledky jsme shrnuli v knize (Vondrová, Rendl a kol., 2015). Právě z této knihy zejména vycházíme při zpracování tohoto textu; zpracováváme dosažené výsledky způsobem, který, jak doufáme, bude přístupný běžnému učiteli matematiky, který se zamýšlí nad tím, jak pomoci svým žákům pochopit matematiku.

Co tedy čtenář v tomto textu nalezne? U každého z obtížných témat uvádíme kromě souvisejících výstupů z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání: a) úlohy (nejen) z mezinárodních testování, v nichž naši žáci dosáhli horších výsledků, b) diagnostické úlohy, které jsme použili pro zjištění obtíží žáků, c) konkrétní obtíže žáků s návrhem metodických doporučení, d) doporučenou literaturu. Metodická doporučení vycházejí nejen z našeho výzkumu v rámci projektu GA ČR, ale také z výsledků dalších existujících výzkumů (ty jsou podrobněji zpracované v obou knihách (Rendl, Vondrová a kol., 2013, Vondrová, Rendl a kol., 2015); zde se k nim nevracíme). Tento text je možné do značné míry chápat jako doplněk druhé ze zmíněných knih, na kterou se také na příslušných místech odkazujeme. Pro jednoduchost se na ni budeme odkazovat slovem *Knih*a napsaným kurzívou.

Na závěr několik poznámek nutných pro pochopení textu.

Obtíže formulujeme bez ohledu na to, jak často se mohou objevovat. Za prvé je takřka nemožné je nějak kvantifikovat, zda druhé se domníváme, že to není nezbytné. Chceme totiž dát učitelům repertoár obtíží, které se mohou projevit, a k tomu případná doporučení. V žádném případě se však nejedná, a ani nemůže jedit, o úplný přehled problémů, s nimiž se u žáků v daných tématech můžeme setkat.

Mluvíme-li o rozhovorech, máme na mysli výše zmíněné hloubkové rozhovory s žáky. Někdy také uvádíme úryvky z těchto rozhovorů. V nich používáme písmeno T pro promluvu, kterou pronesl tazatel, a celé křestní jméno pro části řečené žákem. U jmen žáků používáme pseudonymy. Při prvním výskytu jména uvádíme do závorky ročník žáka.

Odkazy na RVP pro základní vzdělávání se vztahují k dokumentu platnému od 1.9.2013.

Obtíže našich žáků dokumentujeme jejich výsledky při řešení úloh z několika typů testování. Jednak mezinárodních TIMSS a PISA (viz stránky www.csicr.cz), jednak národních. Zde vycházíme zejména z výsledků testování centra CERMAT (viz stránky <http://www.ceremat.cz/projekty-archiv-1404034774.html>) a v rámci projektu Kalibro (www.kalibro.cz). Je však třeba si uvědomit, že tyto zdroje jsou natolik různé, že nemůžeme jejich výsledky hodnotit stejně. Zatímco mezinárodní výzkumy pracují s pečlivě vybraným vzorkem žáků, kteří mají reprezentovat celou žákovskou populaci daného věku, národní výzkumy zpravidla pracují s omezeným vzorkem žáků.

Jak u projektu Kvalita (CERMAT), tak u projektu Kalibro se jedná o žáky, jejichž školy je k testování samy přihlášily. Testování CERMATu však zahrnuje mnohem vyšší počty škol, v průběhu projektu počet testovaných žáků dosahoval desítek tisíc žáků. Šlo vždy o více než 50 % (a někdy až 90 %) žákovské populace daného ročníku v každém zúčastněném kraji. V projektu Kalibro šlo o počty řádově nižší. Konkrétní počty žáků uvádíme u jednotlivých úloh.

Lze předpokládat tendenci, že do testování se přihlásí spíše školy, které očekávají dobré výsledky svých žáků. Tím je pak ovlivněna reprezentativnost výsledků vzhledem k celé žákovské populaci. Domníváme se však, že i tak jsou výsledky těchto testování cenné, protože poukazují na typy úloh, které jsou pro naše žáky tak či onak obtížné, a mohou vést k úvahám, jak změnit vyučování, aby žáci těmto úlohám rozuměli lépe.

Tento text je určen učitelům matematiky a učitelům 1. stupně, kteří přemýšlejí o tom, jak svým žákům pomoci překonávat obtíže a rozvíjet jejich porozumění matematice. Nepodává definitivní návody, pomocí nichž se podaří žákovské obtíže napravit. Nedotýká se všech problematických míst, ani neuvádí úplný výčet obtíží, které mohou u žáků nastat. Doufáme však, že může rozšířit a prohloubit pohled na možné problémy, které žáci s porozuměním učivu mají, a umožnit tak učitelům zřetelnější reflexi jejich vlastních zkušeností.

Poděkování: Text byl vypracován v rámci projektu GA ČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole, analýza didaktických praktik učitelů.

2. KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY OČIMA ČESKÝCH UČITELŮ

Za tzv. kritické jsme označili oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. V rámci hloubkových rozhovorů jsme zjišťovali, jaké oblasti považují za kritické učitelé 1. stupně i učitelé matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání.

Učitelé 1. stupně hovořili o obtížích žáků v oblasti aritmetických operací, konkrétně počítání s přechodem přes desítku, dělení se zbytkem a algoritmu písemného dělení dvojčiferným dělitelem. V oblasti geometrie si stěžovali na problémy v oblasti rýsování a zjišťování obvodu a obsahu. Kromě toho, pro nás trochu překvapivě, zmiňovali i jednu z matematických konvencí, a to zaokrouhlování. Učitelé obou stupňů škol zdůrazňovali obtíže žáků v oblasti slovních úloh.

Učitelé matematiky zmiňovali jako kritické chápání desetinných čísel, zlomků i celých čísel, s důrazem na problémy v oblasti početních algoritmů s těmito čísly. Nejvíce byly tematizované jako obtížné algebraické výrazy, avšak spíše v oblasti úprav algebraických výrazů než v procesu algebraizace (matematizace slovní úlohy). Učitelé matematiky za obtížné považovali i konstrukční úlohy a výpočtovou geometrii (tedy zjišťování obsahu, objemu a povrchu).

Jak je vidět, problémy žáků se podle učitelů objevují téměř ve všech tématech, která se na základní škole vyučují. Nebylo v naší moci podrobně prozkoumat s žáky všechna. Při výběru témat pro výzkum s žáky jsme vycházeli také z výsledků mezinárodních srovnávacích studií. Např. sekundární analýzou úloh TIMSS 2007 a úspěšnosti našich žáků v nich jsme zjistili (Rendl, Vondrová, 2014), že v šesti úlohách z domény Číslo, v nichž se pracuje s desetinnými čísly, mají naši žáci dobré výsledky (v průměru 20 % nad mezinárodním průměrem). Jen v pěti úlohách, v nichž se desetinná čísla objevují v kombinaci se zlomky, klesá odstup od mezinárodního průměru na český standard + 9 %. Takže žádná úloha s desetinnými čísly nepatří mezi námi vymezené slabé úlohy a ve výzkumu jsme se nadále soustředili spíše na problémy českých žáků se zlomky. Jedině oblast konstrukčních úloh se neobjevuje v mezinárodních srovnávacích výzkumech (protože tam žádné úlohy konstrukčního typu nejsou zařazovány), ani jí není věnována prakticky žádná výzkumná pozornost, a to ani v zahraničí. Učitelé obou stupňů škol však konstrukční úlohy jako problematické místo zmiňovali opakovaně a zdůrazňovali jejich důležitost v rámci školní geometrie. Proto jsme se rozhodli i tuto oblast s žáky prozkoumat. Tento text se tedy bude podrobněji věnovat tématům uvedeným v tab. 2.1.

Tab. 2.1: Matematická témata vybraná pro výzkum s žáky

	1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ
Aritmetika	Slovní úlohy	Zlomky
Algebra		Algebraické modelování a úpravy algebraických výrazů
Geometrie	Konstrukční úlohy	
		Míra v geometrii (obsah, objem)

Pokud se čtenář zajímá o názory (vesměs) zkušených učitelů z praxe, pak jej odkazujeme na knihu (Rendl, Vondrová a kol., 2013), která obsahuje výsledky analýz rozhovorů s učiteli 1. stupně i učiteli matematiky z různých hledisek, didakticko-matematických i psychologických.

3. ONLINE DOTAZNÍK PRO UČITELE

Na základě výsledků rozhovorů s učiteli týkajících se kritických míst matematiky základní školy jsme připravili kvantitativní šetření formou online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol. V první části dotazníku se učitelé měli vyjadřovat k různým výroky týkajícím se kritických oblastí matematiky na čtyřstupňové škále od „Určitě souhlasím“ až po „Určitě nesouhlasím“. Ve druhé části byly zařazeny otevřené otázky. Učitelé se měli vyjádřit ke konkrétním úlohám a napsat, jakých nejčastějších chyb se budou žáci daného věku pravděpodobně dopouštět. Zatímco první a druhá část byla odlišná pro učitele 1. stupně a učitele matematiky 2. stupně, poslední část dotazníku byla společná. V ní byly položeny otázky týkající se vlivu dílčích psychických a sociálních faktorů na úspěch v matematice (např. působení rodiny a školy, nadání, motivace, pocitu osobní kompetence žáka), parametrů výuky (např. vztahu výuky k praktickému životu, způsobu prezentace látky, využívání domácích úkolů). Část otázek se týkala také rozdílů mezi dívkami a chlapci a s nimi spojených stereotypů (např. co se týče sebedůvěry v matematice, postojů k ní, nadání, píle). Učitelé se opět vyjadřovali na škálách postihujících míru souhlasu, nebo příklonu k jednomu z faktorů tvořících bipolární škály.

Informace o dotazníku byla zaslána elektronicky na všechny základní školy a osmiletá gymnázia v České republice a dále o něm byli informováni konkrétní učitelé, s nimiž mají řešitelé projektu kontakt. Od června do září 2014 jsme získali cca 645 vyplněných dotazníků od učitelů 1. stupně a cca 280 od učitelů matematiky (viz tab. 3.1). Počet učitelů, kteří vyplnili jednotlivé položky dotazníku, kolísá od 570 do 645 v případě učitelů 1. stupně a od 248 do 280 v případě učitelů matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání. Výběr učitelů není samozřejmě reprezentativní, účastníky však můžeme považovat za učitele aktivní, kteří se zajímají o výuku matematiky. Jejich názory mají tedy svou váhu.

Tab. 3.1: Respondenti online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání¹

	Učitelé 1. stupně	Učitelé matematiky 2. stupně
Aprobovaní učitelé	88 %	89 %
Délka praxe		
do 5 let	12 %	8 %
více než 5 let až 10 let	8 %	12 %
více než 10 let až 20 let	31 %	31 %
více než 20 let až 30 let	35 %	34 %
více než 30 let	15 %	16 %

Níže uvedeme výsledky online dotazníku v jednotlivých oblastech, a to víceméně bez komentáře.² Domníváme se, že pro čtenáře (učitele) může být zajímavé na otázky dotazníku si odpovědět a srovnat své reakce s reakcemi dalších učitelů. Ovšem na tomto místě upozorníme, že vyšší četnost odpovědi nemusí nutně znamenat, že její autoři mají „pravdu“, a pokud jsme to dosud dělali jinak, měli bychom se přiblížit většině. To platí např. pro strategii vyhledávání tzv. signálních slov pro řešení slovních úloh (jak je uvedeno v kap. 6). Spíše bychom to měli brát jako výzvu k zamyšlení.

¹ Součet není chybou zaokrouhlení 100 %. Skladba délky praxe je u obou stupňů škol pozoruhodně podobná.

² S komentářem se části dotazníku objevují v dalších publikacích řešitelů projektu GA ČR, mj. také ve zmiňované *Knize*.

3.1 ODPOVĚDI UČITELŮ 1. STUPNĚ

	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhla- sím	určitě souhla- sím	nemám zkuše- nost	celkem učitelů
1. Obliba matematiky jako předmětu v průběhu 1. stupně ZŠ výrazně klesá.	19,4 %	53,4 %	22,8 %	3,6 %	0,8 %	644
Zaokrouhlování						
2a. Žáci mají se zaokrouhlováním problémy, protože v něm nevidí žádný konkrétní smysl.	22,7 %	50,1 %	19,6 %	3,6 %	4,0 %	643
2b. Pravidla pro zaokrouhlování musím žákům opakovaně připomínat, ačkoliv s jejich pochopením nemají větší problémy.	10,1 %	32,0 %	42,3 %	11,0 %	4,5 %	643
Přechod přes desítku						
3. Počítání s přechodem přes desítku je potřeba věnovat zvláštní pozornost.	3,9 %	11,5 %	25,8 %	57,9 %	0,9 %	643
Dělení se zbytkem						
4a. Porozumění operaci dělení se zbytkem závisí na dokonalém zvládnutí malé násobilky.	2,0 %	3,8 %	15,2 %	75,9 %	3,1 %	607
4b. Dělení se zbytkem se žáci většinou předem obávají.	13,8 %	47,5 %	26,9 %	5,7 %	6,1 %	609
4c. Pro důkladné porozumění operaci dělení se zbytkem používám různé manipulativní činnosti s předměty (modelování).	1,8 %	7,6 %	32,6 %	51,1 %	6,9 %	607
4d. Hlavní příčinou problémů při písemném dělení je nedostatečná znalost malé násobilky.	1,2 %	5,8 %	30,9 %	57,8 %	4,5 %	606
Písemné dělení a násobení						
5a. Při zavádění písemného dělení nechám žáky podílet se na vytváření algoritmu.	2,5 %	13,3 %	45,5 %	28,5 %	10,2 %	600
5b. Největší problémy při písemném násobení plynou z nepochopení zápisu čísla v desítkové soustavě (jednotky, desítky atd.).	7,6 %	35,0 %	40,1 %	10,4 %	6,9 %	606
Geometrie – rýsování						
6a. Podstatou geometrie na prvním stupni je rýsování.	14,5 %	35,7 %	34,0 %	15,5 %	0,3 %	600
6b. Bez porozumění základním pojmům v geometrii (bod, úsečka, přímka, polopřímka) nelze pokračovat s dalším geometrickým učivem (trojúhelník, čtverec, atp.).	5,2 %	13,5 %	33,0 %	48,2 %	0,2 %	600
6c. Žáci, kteří jinak v matematice vynikají, mají často problémy s rýsováním.	12,3 %	54,3 %	26,2 %	5,0 %	2,2 %	600
6d. Dnešní žáci mají stále větší potíže s ovládáním rýsovacích potřeb.	3,3 %	16,4 %	47,4 %	31,3 %	1,7 %	604

	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhla- sím	určitě souhla- sím	nemám zkuše- nost	celkem učitelů
Výpočty v geometrii (obvod, obsah)						
7a. Žáci potřebují mnemotechnickou pomůcku, aby si uvědomili geometrický význam slov „obsah“ a „obvod“.	3,3 %	13,9 %	39,1 %	37,9 %	5,7 %	575
7b. Žákům se pletou slova obsah a obvod, i když podstatě pojmů již rozumějí.	1,9 %	19,1 %	47,9 %	24,5 %	6,6 %	576
7c. Výpočet obvodu a obsahu mnohoúhelníku ukazují v reálné situaci a z ní vyvodím vzorečky.	1,4 %	2,3 %	22,2 %	61,5 %	12,6 %	571
7d. Žáci jsou neúspěšní v úlohách vedoucích k výpočtu obsahu a obvodu, protože neumí správně přiřadit odpovídající vzorec k danému úkolu, tzv. „si pletou vzorce“.	2,3 %	22,4 %	48,2 %	18,1 %	9,0 %	575
Slovní úlohy						
8a. Pro úspěšné řešení slovních úloh je nezbytné, aby žáci měli zautomatizované početní spoje.	6,8 %	22,8 %	36,5 %	33,2 %	0,7 %	570
8b. Pro řešení slovních úloh je důležité řešení vzorových (typových) úloh.	3,9 %	12,8 %	51,5 %	31,5 %	0,4 %	569
8c. Stručný zápis zadání slovní úlohy je pro porozumění úloze nezbytný.	5,8 %	22,9 %	40,0 %	30,9 %	0,4 %	567
8d. Složitější slovní úlohy výrazně přispívají k tomu, že obliba matematiky jako předmětu výrazně klesá.	5,8 %	41,4 %	42,7 %	7,6 %	2,5 %	567
8e. Vyšší úspěšnost při řešení slovních úloh poukazuje na vyšší rozumové předpoklady žáka.	2,5 %	11,5 %	53,6 %	30,9 %	1,6 %	567
8f. Při výuce slovních úloh vedu žáky k tomu, aby v úloze vyhledali slova, která signalizují početní operaci.	2,5 %	4,7 %	37,6 %	54,5 %	0,7 %	569
8g. Žáci, kteří mají problémy s řešením slovních úloh, jsou často špatnými čtenáři.	3,0 %	16,8 %	45,3 %	33,9 %	1,1 %	567

Z následujících devíti výroků měli učitelé vybrat maximálně tři, které podle nich vyjadřují nejlépe rozdíl mezi žáky, kteří jsou úspěšní v řešení slovních úloh, a žáky, kteří úspěšní nejsou. Výroky jsou seřazeny podle četnosti výběru.

Slovní úlohy (celkem učitelů 590)	
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti propojit text slovní úlohy s její matematickou strukturou.	71,9 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti pracovat systematicky.	38,6 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti stanovit si předem postup řešení.	38,1 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti vysvětlit řešení slovní úlohy.	31,0 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti udržet v paměti všechny potřebné číselné údaje a kontext.	23,1 %

Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v rychlosti rozpoznání matematické struktury úlohy.	21,4 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti vyřešit matematicky nebo textově neobvyklé (nerutinní) slovní úlohy.	21,0 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v schopnosti zapamatovat si sled dílčích kroků řešení.	20,7 %
Žáci, kteří jsou velmi úspěšní v řešení slovních úloh, se od svých méně úspěšných spolužáků liší zejména v rychlosti potřebných výpočtů.	11,5 %

3.2 ODPOVĚDI UČITELŮ MATEMATIKY 2. STUPNĚ

	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhla- sím	určitě souhla- sím	nemám zkuše- nost	celkem učitelů
Zlomky						
1a. Žáci se na konci docházky na základní školu zlomků zpravidla obávají.	8,9 %	30,6 %	46,5 %	12,2 %	1,8 %	271
1b. Aby žáci uměli řešit úlohy se zlomky, je důležité, aby chápali podstatu početních algoritmů pro sčítání a odčítání zlomků, tedy proč algoritmy fungují.	1,1 %	5,1 %	36,0 %	56,6 %	1,1 %	272
1c. Aby žáci uměli řešit úlohy se zlomky, je důležité, aby chápali podstatu početních algoritmů pro násobení a dělení zlomků, tedy proč algoritmy fungují.	1,5 %	7,0 %	35,6 %	54,8 %	1,1 %	270
1d. Operace sčítání a odčítání zlomků učím pomocí modelů, např. koláče nebo čokolády.	2,2 %	6,3 %	34,4 %	56,3 %	0,7 %	270
1e. Žáci hůře rozumějí zlomkům větším než 1 a operacím s nimi než zlomkům menším než 1 a operacím s nimi.	12,2 %	40,6 %	32,8 %	13,3 %	1,1 %	271
Záporná čísla						
2a. Aby žáci uměli řešit úlohy se zápornými čísly, je důležité, aby chápali podstatu početních algoritmů pro sčítání a odčítání záporných čísel, tedy proč algoritmy fungují.	2,3 %	8,1 %	31,9 %	56,9 %	0,8 %	260
2b. Aby žáci uměli řešit úlohy se zápornými čísly, je důležité, aby chápali podstatu početních algoritmů pro násobení a dělení záporných čísel, tedy proč algoritmy fungují.	2,7 %	8,8 %	35,0 %	52,7 %	0,8 %	260
2c. Bez modelů (např. teploměr, platební bilance, číselná osa) žáci neporozumějí sčítání a odčítání záporných čísel.	1,9 %	8,5 %	40,0 %	48,8 %	0,8 %	260

	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhla- sím	určitě souhla- sím	nemám zkuše- nost	celkem učitelů
Algebraické výrazy						
3a. Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům poukazování na souvislosti s příslušnými úpravami číselných výrazů.	1,6 %	3,2 %	35,9 %	56,6 %	2,8 %	251
3b. Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům metafora „jablíčka a hruštičky“, tj. nahrazování písmen abstraktních proměnných konkrétním předmětem (nebo přesněji jeho názvem).	1,6 %	4,8 %	30,4 %	60,4 %	2,8 %	250
3c. U algebraických výrazů využívám jejich geometrická znázornění (geometrické reprezentace).	7,1 %	34,9 %	34,9 %	13,5 %	9,5 %	252
3d. Úlohy na zobecňování číselných pravidelností (např. číselných řad) jsou pro pochopení proměnné důležité.	0,4 %	14,9 %	55,4 %	20,9 %	8,4 %	249
Slovní úlohy						
4a. Při výuce slovních úloh žákům doporučuji, aby v úloze vyhledali slova odkazující k určité početní operaci.	4,1 %	17,2 %	43,0 %	33,6 %	2,0 %	244
4b. Pro řešení slovních úloh je důležité řešení vzorových (typových) úloh.	0,4 %	7,4 %	39,3 %	52,9 %	-	244
4c. Zápis zadání slovní úlohy (slovy nebo obrázkem) je pro proces žákovského řešení důležitý.	0,8 %	2,0 %	25,0 %	72,1 %	-	244
4d. Je důležité vyučovat slovní úlohy podle jednotlivých typů.	2,5 %	15,6 %	52,9 %	29,1 %	-	244
Programy dynamické geometrie						
5a. Použití programů dynamické geometrie přispívá k porozumění žáků geometrii.	2,0 %	8,2 %	36,3 %	20,4 %	33,1 %	245
5b. Programy dynamické geometrie ve své výuce používám.	9,4 %	15,1 %	26,1 %	15,5 %	33,9 %	245
5c. Programy dynamické geometrie mají žáci sami používat až po zvládnutí dané látky klasicky, tj. „s tužkou a papírem“.	2,1 %	22,6 %	28,4 %	14,0 %	32,9 %	243
Výpočty v geometrii – obsah, objem, povrch						
6a. Vzorce pro obsah trojúhelníku, kosodélníku a lichoběžníku vždy odvozuji nebo vedu žáky k tomu, aby je odvodili.	0,4 %	3,2 %	27,5 %	68,0 %	0,8 %	247
6b. Vzorce pro objem a povrch kolmých hranolů odvozuji nebo vedu žáky k tomu, aby je odvodili.	0,8 %	1,6 %	28,7 %	67,6 %	1,2 %	247
6c. Vzorce pro objem a povrch válce odvozuji nebo vedu žáky k tomu, aby je odvodili.	0,8 %	2,4 %	27,1 %	68,4 %	1,2 %	247
6d. Vzorce pro objem a povrch jehlanu odvozuji nebo vedu žáky k tomu, aby je odvodili.	1,2 %	4,9 %	36,8 %	53,8 %	3,2 %	247

	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhla- sím	určitě souhla- sím	nemám zkuše- nost	celkem učitelů
6e. Vzorce pro objem a povrch kužele odvozují nebo vedu žáky k tomu, aby je odvodili.	2,0 %	10,2 %	37,8 %	46,7 %	3,3 %	246
6f. Žáci jsou neúspěšní v úlohách na výpočet obsahu a objemu, protože neznají příslušné vzorce.	5,3 %	30,4 %	39,3 %	24,7 %	0,4 %	247
6g. Žáci nechápou, co to je obsah útvaru.	14,2 %	51,0 %	28,7 %	6,1 %	-	247
6h. Žáci nechápou, co to je objem.	16,7 %	54,9 %	22,4 %	5,7 %	-	246
6i. Žáci u úloh na výpočet objemu a obsahu příliš spoléhají na vzorce.	1,2 %	17,1 %	54,5 %	25,6 %	1,6 %	246
Konstrukční úlohy						
7a. Je důležité, aby se žáci naučili zapsat postup řešení konstrukčních úloh pomocí matematických značek.	1,2 %	20,1 %	44,3 %	33,6 %	0,8 %	244
7b. Nejobtížnější částí řešení konstrukčních úloh je rozbor.	3,3 %	19,3 %	34,4 %	41,8 %	1,2 %	244
7c. Je důležité, aby žáci prováděli geometrické konstrukce pomocí rýsovacích pomůcek.	0,4 %	5,8 %	22,7 %	70,2 %	0,8 %	242
7d. Při řešení konstrukčních úloh je potřeba, aby žáci nejdříve udělali náčrtek, pak zapsali postup konstrukce a následně udělali vlastní konstrukci.	4,1 %	19,3 %	36,9 %	39,3 %	0,4 %	244

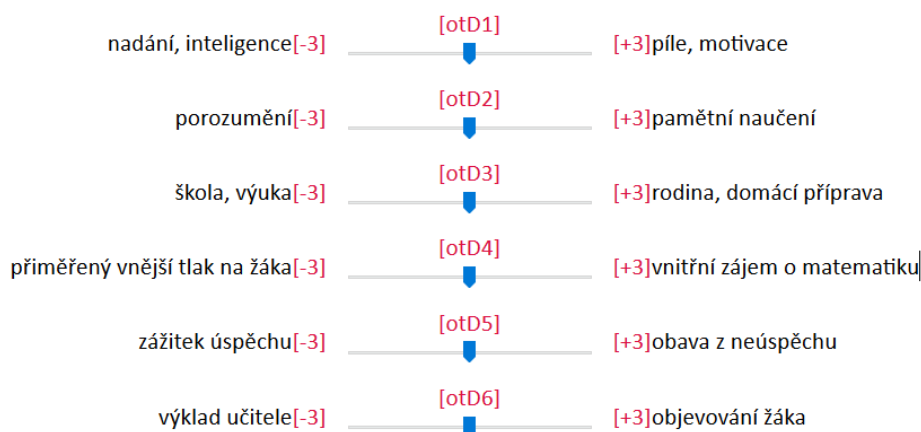
3.3. ODPOVĚDI UČITELŮ OBOU STUPŇŮ ŠKOL – ČÁST PSYCHOLOGICKÁ

V grafu na obr. 3.2 jsou shrnuty odpovědi učitelů, kteří měli označit faktory, které se podílejí na žákovských výkonech. Položky v dotazníku vypadaly tak, jak je uvedeno na obr. 3.1.

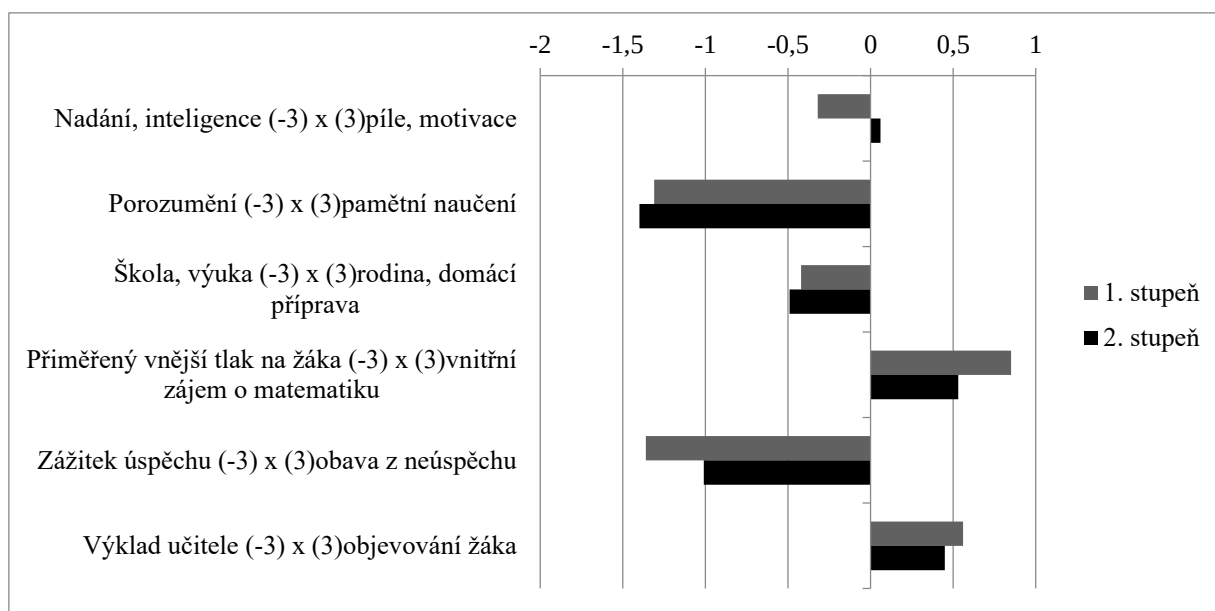
Na dobrých žákovských výkonech v matematice se podílí řada faktorů. Rozhodněte u každé škály, který z faktorů se podle Vás silněji podílí na dobrých výkonech žáků.

Označte umístěním na škále, zda pokládáte za důležitější první, nebo druhý faktor; v případě, že podle Vás mají oba stejnou váhu, označte střed škály.

Např. pokud u první položky posunete ukazatel doleva, pak přikládáte větší váhu nadání.



Obr. 3.1: Položky dotazníku týkající se faktorů podílejících se na výkonech žáků v matematice



Obr. 3.2: Faktory podílející se na dobrých výkonech žáků v matematice

Graf obr. 3.2 je obtížnější na pochopení než data v tabulce, proto ho krátce popíšeme. Krátké sloupce grafu vyjadřují, že učitelé se nepřiklání k žádnému z kontrastních výroků. Z hlediska učitele jsou pro dobrý výkon žáka nadání a inteligence stejně důležité jako jeho píle a motivace (zejména na 2. stupni základní školy). Mírný příklon k jednomu z kontrastních výroků zaznamenáváme u tří položek. Školní výuka se učitelům jeví mírně důležitější než domácí příprava a rodinné zázemí. Vlastní objevování žáka hraje o něco větší roli než výklad učitele. Zájem žáků o matematiku je pro jejich výkon jen o málo významnější než vnější tlak.

Bez ohledu na stupeň školy lze konstatovat, že existují dva faktory výkonu s největší vyhraněností učitelů. Porozumění probíranému učivu je pro úspěšné zvládnutí matematiky mnohem důležitější než pamětní učení. Učitelé silně vnímají význam pozitivní výkonové motivace. Prožitek úspěchu žáků se jim jeví pro zvládnutí matematiky jako mnohem podstatnější než obava z neúspěchu.

Statisticky významné rozdíly mezi učiteli obou stupňů nacházíme u tří faktorů. Učitelé na 1. stupni přikládají větší význam nadání a inteligenci dětí než učitelé na 2. stupni, kladou vyšší důraz na zájem žáků o matematiku a více vnímají důležitost pozitivní výkonové motivace žáků.

Další část dotazníku se věnovala různým aspektům vyučování matematice z hlediska psychologického.

	určitě nesouhlasím	spíše nesouhlasím	spíše souhlasím	určitě souhlasím	nemám zkušenost	Celkem učitelů
Výuka musí být pro děti zábavná, musí je bavit.						
1. stupeň	-	0,8 %	22,4 %	76,9 %	0,0 %	389
2. stupeň	-	4,3 %	48,6 %	46,5 %	0,5 %	185
Celkem	-	1,9 %	30,8 %	67,1 %	0,2 %	574
Představení učiva musí být jasné, přímé, bez zbytečných odboček.						
1. stupeň	0,8 %	8,5 %	31,7 %	59,0 %	0,0 %	388
2. stupeň	0,5 %	10,9 %	45,1 %	42,9 %	0,5 %	184
Celkem	0,7 %	9,3 %	36,0 %	53,8 %	0,2 %	572

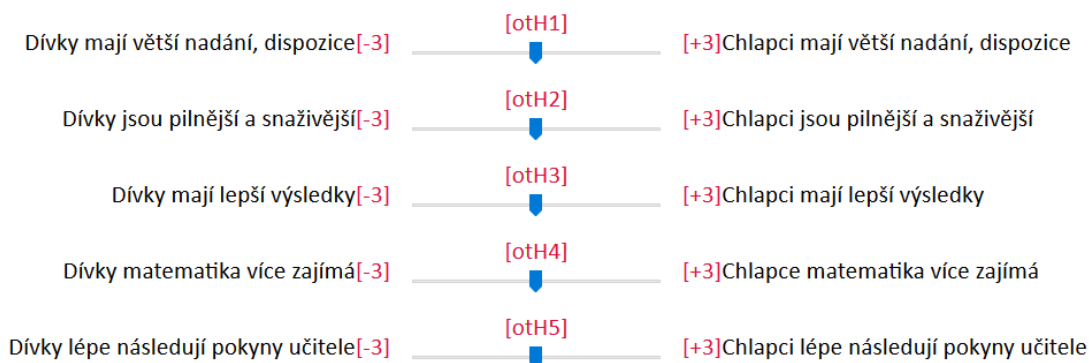
	určitě nesou- hlasím	spíše nesou- hlasím	spíše souhlasím	určitě souhlasím	nemám zkušenost	Celkem učitelů
V matematice je důležitý pocit vlastní zdatnosti a důvěry ve své schopnosti.						
1. stupeň	0,0 %	1,8 %	39,2 %	58,4 %	0,5 %	385
2. stupeň	0,5 %	2,7 %	47,3 %	48,9 %	0,5 %	184
Celkem	0,2 %	2,1 %	41,8 %	55,4 %	0,5 %	569
Pro matematiku je podstatnější soustředěnost a píle než tvořivost.						
1. stupeň	6,7 %	50,8 %	35,2 %	6,2 %	1,0 %	386
2. stupeň	4,4 %	49,2 %	35,9 %	9,9 %	0,6 %	181
Celkem	6,0 %	50,3 %	35,4 %	7,4 %	0,9 %	567
Pro porozumění matematice jsou nezbytné příklady z praktického života.						
1. stupeň	0,3 %	1,6 %	31,5 %	66,7 %	387	
2. stupeň	0,0 %	3,3 %	30,6 %	66,1 %	183	
Celkem	0,2 %	2,1 %	31,2 %	66,5 %	570	
Pro výběr učiva v matematice je podstatná jeho užitečnost pro život.						
1. stupeň	0,5 %	4,4 %	43,2 %	51,4 %	0,5 %	387
2. stupeň	1,6 %	13,7 %	52,5 %	32,2 %	0,0 %	183
Celkem	0,9 %	7,4 %	46,1 %	45,3 %	0,4 %	570

Následuje část dotazníku týkající se genderových otázek.

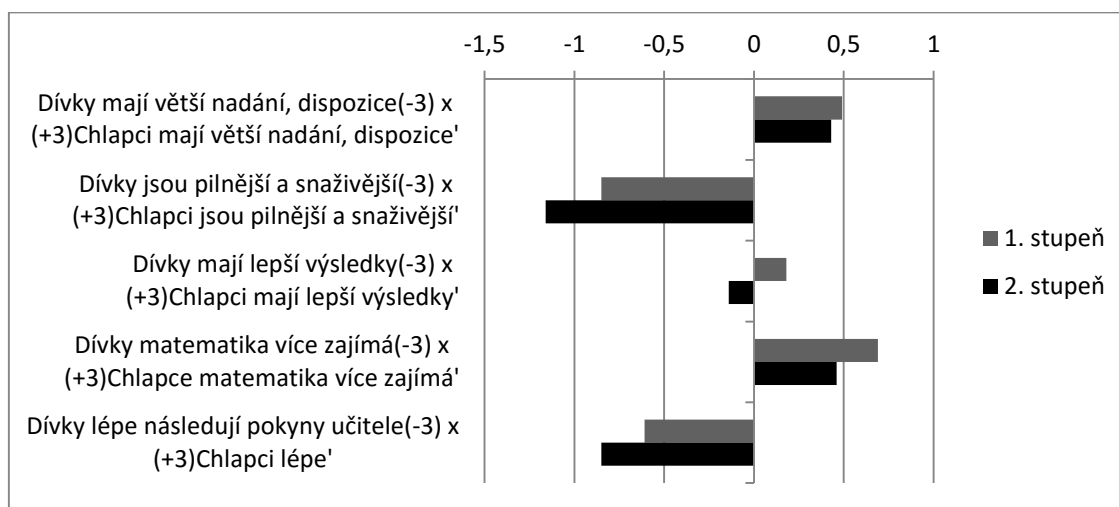
	nedůvě- řuji	málo důvěřuji	spíše důvěřuji	velmi důvěřuji	nemohu určit	celkem učitelů
Jak si podle Vašeho názoru žáci a žákyně důvěřují v matematice? - Chlapci a dívky						
1. stupeň	0,0 %	9,1 %	78,6 %	2,1 %	10,2 %	374
2. stupeň	1,1 %	40,3 %	42,6 %	1,1 %	14,8 %	176
Celkem	0,4 %	19,1 %	67,1 %	1,8 %	11,6 %	550
Jak si podle Vašeho názoru žáci a žákyně důvěřují v matematice? - Dívky						
1. stupeň	1,3 %	46,9 %	43,3 %	1,3 %	7,3 %	386
2. stupeň	3,3 %	55,7 %	30,1 %	2,2 %	8,7 %	183
Celkem	1,9 %	49,7 %	39,0 %	1,6 %	7,7 %	569
Jak si podle Vašeho názoru žáci a žákyně důvěřují v matematice? - Chlapci						
1. stupeň	0,0 %	4,7 %	64,5 %	23,6 %	7,3 %	386
2. stupeň	0,5 %	20,2 %	66,7 %	3,8 %	8,7 %	183
Celkem	0,2 %	9,7 %	65,2 %	17,2 %	7,7 %	569

Nakonec měli učitelé uvažovat o převažujících tendencích v dívčím a chlapeckém nadání, pílí, domácí přípravě a výsledcích. Otázka je na obr. 3.3. Odpovědi učitelů naznačuje graf na obr. 3.4; vysvětlení viz komentář k obr. 3.2.

Vyberte na škále, zda podle Vás platí spíše první, nebo druhý výrok; v případě, že podle Vás neplatí ani jeden z výroků, označte střed škály.



Obr. 3.3: Převažující tendence u dívek a chlapců



Obr. 3.4: Převažující tendence u dívek a chlapců – odpovědi učitelů

Nakonec uvedeme část dotazníku týkající se domácích úkolů.

Jak často zadáváte domácí úkoly?	každou hodinu	dvakrát až třikrát týdně	jednou za týden	méně než jednou týdně	vůbec	Celkem učitelů
1. stupeň	9,1 %	69,0 %	17,4 %	3,5 %	1,0 %	397
2. stupeň	8,1 %	38,9 %	32,4 %	18,9 %	1,6 %	185
Celkem	8,8 %	59,5 %	22,2 %	8,4 %	1,2 %	582

Učitelé, kteří používají domácí úkoly, se měli vyjádřit k jejich účelu. Z šesti důvodů měli vybrat nejvýše tři, které jsou podle jejich názoru nejdůležitější. Výroky jsou seřazeny podle četnosti výběru.

Učitelé 1. stupně (celkem 420)	
Domácí úkoly slouží k procvičení a upevnění právě probíraného učiva	85,0 %
Domácí úkoly slouží k pěstování pracovních návyků a systematičnosti	54,8 %
Domácí úkoly slouží k informování a spolupráci s rodiči na školní výuce	41,4 %
Domácí úkoly slouží k připomenutí dříve probíraného učiva	26,4 %
Domácí úkoly slouží k zasazení učiva do souvislostí praktického života	18,3 %
Domácí úkoly slouží k ukázání zábavnosti a zajímavosti učiva	14,3 %

Učitelé 2. stupně (celkem 191)	
Domácí úkoly slouží k procvičení a upevnění právě probíraného učiva	90,1 %
Domácí úkoly slouží k zasazení učiva do souvislostí praktického života	18,8 %
Domácí úkoly slouží k pěstování pracovních návyků a systematičnosti	64,9 %
Domácí úkoly slouží k připomenutí dříve probíraného učiva	23,6 %
Domácí úkoly slouží k informování a spolupráci s rodiči na školní výuce	20,4 %
Domácí úkoly slouží k ukázání zábavnosti a zajímavosti učiva	11,5 %

4. KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

Prvním kritickým místem (podle mínění učitelů), kterému se budeme věnovat, budou konstrukční úlohy, a to u žáků 1. i 2. stupně. Konstrukčními úlohami rozumíme takové úlohy, v nichž mají žáci na základě zadaných hodnot zkonstruovat geometrický objekt daných vlastností. Pro pochopení obtíží, které žáci v této oblasti mají, musíme nejdříve představit několik základních pojmů.

Geometrické objekty jako body, přímky, mnohoúhelníky apod. jsou abstraktní povahy a jejich geometrická znázornění prostřednictvím obrázků mohou být jen jejich nedokonalými reprezentacemi. Obrázky v geometrii mají tedy nejednoznačnou roli. Na jedné straně odkazují na teoretické geometrické vlastnosti (např. u náčrtku čtverce si představíme, že všechny vnitřní úhly jsou kolmé) a na druhé straně přinášejí určité prostorově-grafické informace (u náčrtku čtverce si můžeme všimnout jeho konkrétní velikosti či polohy). Můžeme tak hovořit o **prostoru geometrických objektů a vztahů** (nebo také **teoreticko-geometrickém prostoru**) a **prostoru reprezentací**. Do teoretického prostoru patří ty činnosti žáka, v nichž se odkazuje na vlastnosti ideálních geometrických objektů a geometrické věty (např. při důkazu nějakého geometrického tvrzení). Do prostoru reprezentací patří činnosti typu rýsování či kreslení do obrázku, pohyb s obrázkem, měření pravítkem apod.

Konkrétním projevem výše uvedeného rozdělení prostorů je skutečnost, že stejný obrázek může reprezentovat **abstraktní geometrický objekt** i jeho **určitý konkrétní případ**. Např. rovná čára na papíře může reprezentovat úsečku určité konkrétní délky nebo i konkrétního umístění, nebo úsečku libovolné délky. Teprve další kontext (text úlohy) nám umožní rozhodnout, o jaký význam se v úloze jedná. Příkladem může být následující situace. V písemné práci pro 6. ročník byla zadána úloha: „Těžnice t_b v trojúhelníku ABC má délku 24 cm. Jaká je vzdálenost těžiště T od vrcholu B ?“ U úlohy byl udělán náčrtek trojúhelníku s těžnicí t_b , která však nebyla 24 cm dlouhá. Pro některé žáky to nebyl problém. Chápali náčrtek jako reprezentaci abstraktního geometrického objektu a dokázali z něj vyvodit hledanou délku (nebo si poradili bez náčrtku). Pro řadu žáků byl však náčrtek nepřekonatelnou překážkou – očekávali, že obrázek trojúhelníku bude odpovídat parametrům, tedy že těžnice bude 24 cm dlouhá. Ztotožnili tedy náčrtek s objektem samotným.

Ze školní praxe víme, že v řešení (nejen) konstrukčních úloh hrají důležitou roli **prototypy geometrických objektů**. Žáci si např. místo obecného trojúhelníka nakreslí pravoúhlý trojúhelník. Každý geometrický objekt má jeden nebo více prototypických příkladů. Těmi jsou zpravidla ty příklady, s nimiž se žák setkává nejdříve a které existují v jeho představě daného objektu. Za prototyp budeme považovat takový příklad pojmu, který žáci nejčastěji vybírají jako reprezentanta dané kategorie jako jediný nebo jako první. Důležitým znakem prototypických příkladů je to, že jsou přijímány jako reprezentanti pojmu intuitivně, okamžitě, s důvěrou a s pocitem, že pro ně není nutné žádné zdůvodnění. Je však třeba zdůraznit, že prototypy si vytváříme v každodenním životě běžně; pomáhají nám vyznat se ve složitých situacích každodenního života.

4.1 RVP PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

Z RVP pro ZV vybíráme výstupy, které se nějak týkají konstrukčních úloh.

První období 1. stupně: Žák

M-3-3-01 rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci,

M-3-3-03 rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině.

Druhé období 1. stupně: Žák

M-5-3-01 narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce,

M-5-3-02 sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

M-5-3-03 sestaví rovnoběžky a kolmice,

M-5-3-05 rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.

2. stupeň: Žák

M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku,

M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary,

M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem,

M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh,

M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary,

M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar,

M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

4.2 ÚLOHY, KTERÉ PŮSOBÍ ČESKÝM ŽÁKŮM PROBLÉMY

Jak již bylo uvedeno, v mezinárodních srovnávacích výzkumech není problematice konstrukčních úloh věnována žádná pozornost. Vlastně jsme nenašli ani žádný výzkum z poslední doby, který by se zabýval právě konstrukčními úlohami. Naproti tomu velká pozornost je věnována použití programů dynamické geometrie, které, zdá se, zejména v zahraničí dominuje výuce v oblasti konstrukčních úloh. Nicméně jimi se zde zabývat nebudeme a podíváme se na obtíže při klasickém řešení konstrukčních úloh pomocí rýsovacích prostředků.

Jediný zdroj dat týkajících se většího počtu českých žáků a jejich schopnosti řešit konstrukční úlohy jsme našli v testování centra CERMAT. Příslušné úlohy uvedeme i s procentuální úspěšností žáků v hranatých závorkách. V kulatých závorkách bude pro zajímavost uveden počet žáků, kteří úlohu řešili.

Úloha pro 5. ročník ($n = 8\,804$)³

- a) Bodem B ved'te přímkou k kolmo ke straně AC . [41 %.]
- b) Bodem C ved'te rovnoběžku p se stranou AB . [37 %.]
- c) Průsečík přímek k a p označte písmenem F . [43 %.]

Úloha se týká základních konstrukčních kroků, přesto je úspěšnost žáků poměrně malá. Navíc téměř čtvrtina žáků úlohy úplně vynechala, což bylo výrazně více než u úloh jiného typu. Příčinu obtížnosti úlohy neznáme. Mohl jím být fakt, že žáci měli kolmice a rovnoběžky rýsovat ke stranám trojúhelníku a ne k samostatným úsečkám.

Úloha pro 9. ročník A ($n = 2\,782$)

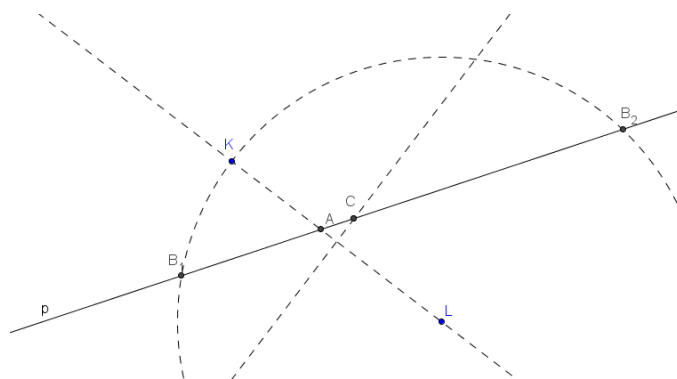
Je dána přímka p a mimo ni dva různé body K, L .⁴ S použitím pravítka a kružítka sestrojte na přímce p postupně všechny body A, B a C , pro které platí:

- a) $\angle KAL = 180^\circ$ [50 %],
- b) $|LB| = |KL|$ [39 %],
- c) $|LC| = |KC|$ [28 %].

Úloha se týká základních množin bodů dané vlastnosti (kružnice, osa úsečky), bez jejichž pochopení nelze zvládnout složitější konstrukce. Její úspěšnost u žáků na konci školní docházky je velmi malá. Obtížnost úlohy spočívá podle našeho názoru v tom, že není explicitně uvedeno, že žák má narýsovat kružnici či osu úsečky (nejde tedy o ověření znalosti konstrukčních kroků), ale hledaná množina bodů je popsána svou vlastností. Je to jedna ze základních obtíží našich žáků.

³ U úlohy byl nakreslen obrázek obecného trojúhelníku ABC v neprototypické poloze.

⁴ Obrázek přímky a obou bodů byl v zadání nakreslen. Náš obrázek s řešením je na obr. 4.1.



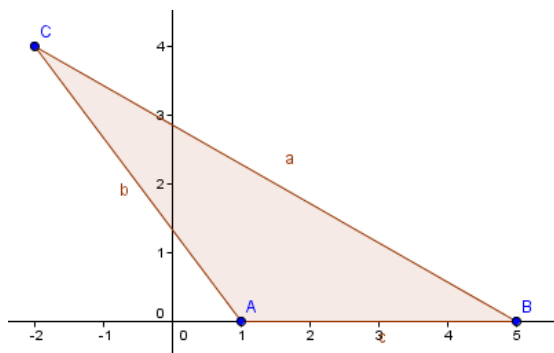
Obr. 4.1: Obrázek k úloze pro 9. ročník A (testování CERMAT)

Úloha pro 9. ročník B (n = 10 969)

V trojúhelníku ABC jsou dány souřadnice vrcholů $A[1; 0]$; $B[5; 0]$; $C[-2; 4]$.⁵

a) V trojúhelníku narýsujte výšku z vrcholu B . [15 %]

b) Určete vzdálenost bodu C od přímky AB . [28 %]



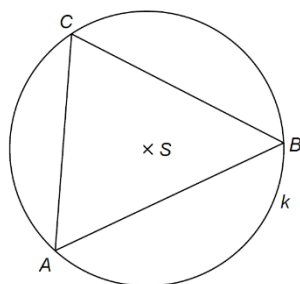
Obr. 4.2: Obrázek k úloze pro 9. ročník B (testování CERMAT)

Obtížnost úlohy spočívá v tom, že se jedná o tupouhlý trojúhelník. Výšky na stranu c a b musejí tak být konstruovány mimo útvar. Je samozřejmě možné, že žáci měli problém se samotným pojmem výška; to nelze z výsledných zpráv CERMATu vyčíst. Úloha b) je jednodušší, protože stačí spustit výšku v prototypické (svislé) poloze na již existující osu x (pokud byla v zadání nakreslená; přesné zadání úlohy nemáme k dispozici), zatímco u úlohy a) žáci museli ještě prodloužit úsečku CA za bod A . Na druhé straně v zadání b) není pojem výška přímo zmíněn. Úspěšnost úlohy u žáků na konci školní docházky je velmi malá.

⁵ Obrázek byl zadán, viz obr. 4.2, který však není originální. Nevíme, zda vypadal právě tak, zda například obsahoval obě osy.

Úloha pro 9. ročník C (n = 49 671)

Trojúhelník ABC je opsána kružnice (obr. 4.3).



Obr. 4.3: Obrázek k úloze pro 9. ročník C (testování CERMAT)

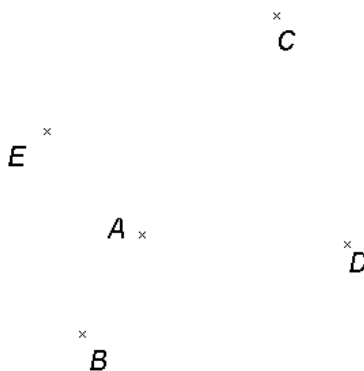
- a) Sestrojte obraz B_1 bodu B v osové souměrnosti podle přímky CS . [19 %]
 b) Sestrojte obraz A_2C_2 úsečky AC ve středové souměrnosti podle středu S . [23 %]

I u této úlohy je úspěšnost žáků na konci základní školy poměrně malá, když vezmeme v úvahu, že se jedná o základní konstrukce obrazů bodu a úsečky v osové a středové souměrnosti. Malá úspěšnost může být dána různými faktory. V 9. ročníku již mohli žáci učivo zapomenout a žáky mohlo také zmást, že je trojúhelník vložen do kružnice a že připomíná rovnostranný trojúhelník. Poznamenejme, že tento obrázek je typickým představitelem obrázku, kde žáci musí rozlišovat mezi teoretickým prostorem a prostorem reprezentací. Nemohou tedy z obrázku vyčíst vlastnosti, které vyplývají jen z toho, „jak se situace jeví“, musejí vycházet z kontextové informace, v níž se nemluví o tom, že by trojúhelník měl nějaké specifické vlastnosti.

4.3 DIAGNOSTICKÉ ÚLOHY POUŽITÉ V NAŠICH ROZHOVORECH S KOMENTÁŘEM

4.3.1 ÚLOHY URČENÉ PRO 1. STUPEŇ (4. A 5. ROČNÍK, VIZ TAKÉ KNIHA, ODDÍL 3.3.2)

Úloha 4.1.1a. Na obrázku (obr. 4.4) je pět bodů A, B, C, D, E . Vyber si tři z nich tak, aby to byly vrcholy trojúhelníku. Zapiš, které jsi vybral. Trojúhelník narýsuj.



Obr. 4.4: Obrázek k úloze 4.1.1a

Úloha 4.1.1b. Kolik úseček je těmito třemi body určeno? Zapiš je.

Úloha 4.1.1c. Porovnej jejich délky. Zapiš je od nejkratší po nejdelší.

Úloha 4.1.2. Přerýsuj trojúhelník BCE .

Úloha 4.1.3. Konstruuuj podle pokynů:

Narýsuj přímku p .

Vyznač na ní dva různé body, pojmenuj je A a B .

Sestroj dvě kružnice tak, aby se neprotuly a jedna byla se středem v bodě A , tu nazvi k , druhá se středem v bodě B , tu nazvi l .

Úloha 4.1.4. Zjisti, jestli na obrázku u první úlohy (obr. 4.4) je přímka AB kolmá na ED . Nejdříve odhadni, pak ověř.

Úloha 4.1.5. Zjisti, jestli na obrázku u první úlohy (obr. 4.4) jsou přímky CD a BE rovnoběžné. Nejdříve odhadni, pak ověř.

Úloha 4.1.6. Na obrázku⁶ je narýsovaná přímka p a na ní bod K .

Sestroj bod M tak, aby úsečka KM byla dlouhá 4 cm.

Sestroj kružnici k se středem v bodě K a poloměrem $r = |KM|$.

Sestroj kružnici l se středem v bodě M a poloměrem $r = |KM|$.

Průsečíky kružnic označ L a N .

Narýsuj úsečky KL , LM , MN , NK .

Jaký obrazec jsi narýsoval?

V první úloze jsme zjišťovali, jak žáci chápou pojmy úsečka, bod a vrchol, jakou techniku porovnání úseček používají a do jaké míry jsou jejich vědomosti ovlivněny prototypy geometrických objektů, které mohou způsobovat překážky v uvažování. V učebnici i žáky je silně preferované označování vrcholů trojúhelníku prvními písmeny abecedy A , B , C , proto jsme tyto tři body v zadání umístili do jedné přímky, aby nebylo možné z nich vytvořit trojúhelník. Podobně trojúhelník bývá obvykle zobrazován s jednou stranou rovnoběžnou se spodním okrajem papíru. Rozmístili jsme tedy body tak, aby bylo možné zvolit jak tento prototypický trojúhelník, tak trojúhelník pro žáky „nestandardní“.

Porovnání úseček v úloze 4.1.1c se dalo vyřešit různými způsoby: pomocí měřidla (pravítka), odhadem, pomocí prstů či nějakého jiného předmětu (např. tužky, kružítko).

Ve druhé úloze zjišťujeme znalost konstrukce trojúhelníku podle věty sss. Úloha je však obtížnější tím, že nejsou dány délky stran pomocí čísel. Výsledný stav je určen, úkolem žáků je vymyslet postup konstrukce a geometrický objekt zkonstruovat. Záměrně jsme zvolili takový trojúhelník, jehož základna není vodorovná s okrajem papíru.

Ve třetí úloze mají žáci rýsovat podle řetězce slovních instrukcí. Musejí přitom předjímat, co může nastat, a podle toho rozmístit body A a B a přizpůsobit poloměry kružnic tak, aby zadání vyhovovalo a přitom se vše vešlo na papír.

Čtvrtá a pátá úloha testuje kromě znalosti pojmů a příslušné terminologie, zda jsou žáci schopni použít naučený postup konstrukce rovnoběžek a kolmic rovněž v situaci, kdy je výsledný útvar dán a jejich úkolem je ověřit, zda se o rovnoběžky/kolmice jedná. Z obrázku není možné řešení okamžitě vyčíst. Dále se díváme na to, jak dobře žák rozumí pojmu přímka: úsečky, jimiž jsou dvě přímky dány, nemají žádný společný bod. V šesté úloze měli žáci rýsovat podle pokynů, přičemž úloha obsahuje více instrukcí s matematickými symboly.

4.3.2 ÚLOHY URČENÉ PRO 2. STUPEŇ (VIZ TAKÉ KNIHA, ODDÍL 3.3.3)

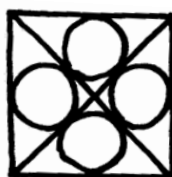
Úloha 4.2.1. Jsou dány body A a B . Najdi všechny body, které mají od bodů A a B stejnou vzdálenost.

Úloha 4.2.2. Jsou dány body A , B a C , které určují trojúhelník. Najdi všechny body, které mají od bodů A , B a C stejnou vzdálenost.

Úloha 4.2.3. Narýsuj kružnice $k(S; 4 \text{ cm})$, $m(M; 3 \text{ cm})$, $n(N; 2 \text{ cm})$ tak, aby každé dvě z těchto kružnic měly vnější společný dotyk.

⁶ Následoval obrázek přímky označené p .

Úloha 4.2.4. Narýsuj „výplň“ okna podle obrázku.



Úloha 2.5. Sestroj trojúhelník MNO , pokud je dáno $|NO| = 6$ cm, $|OM| = 5$ cm a $|\angle MNO| = 45^\circ$.

Úloha 2.6. Sestroj trojúhelník PQR , pokud jsou dány velikosti všech jeho tří středních příček: 2 cm, 3,5 cm, 3 cm.

Úloha 2.7. Sestroj lichoběžník $ABCD$, když víš, že $|\angle DAB| = 30^\circ$, $|\angle ABC| = 60^\circ$, $|BC| = 3$ cm, $|AB| = 9$ cm.

V první úloze měli žáci *de facto* najít osu úsečky AB , zatímco ve druhé měli najít střed kružnice opsané trojúhelníku, ovšem tyto termíny v zadání úloh nefigurují. Cílem bylo zjistit, do jaké míry si žáci uvědomují vlastnosti množiny bodů, které tvoří osu úsečky, resp. kružnici opsanou trojúhelníku, a do jaké míry budou schopni řešení experimentálně najít. Třetí úloha (Kuřina, 2006, s. 9) vyžaduje, aby si žáci uvědomili správnou polohu tří hledaných kružnic, což však není triviální. Čtvrtou úlohu jsme vybrali proto, že v ní rýsování není cílem ale prostředkem dosažení cíle (jak ji charakterizuje F. Kuřina, 2006). Je zajímavá tím, že výsledná situace je už dána a žák má přijít na to, jak ji korektně zkonstruovat.⁷ Pátá úloha se jeví jako klasická úloha na konstrukci trojúhelníku, ale pro žáky základní školy může být překvapením, že výsledkem jsou dva trojúhelníky. Jsou dány délky dvou stran a jeden úhel, ten však je dán proti menší ze stran. Nejde tedy o konstrukci podle věty Ssu. Šestá úloha testuje znalost geometrické terminologie a vlastností středních příček trojúhelníku. Sedmá úloha vyžaduje uvědomění si vlastností lichoběžníku a je to spíše typická školní úloha.

Řešení úloh pro 2. stupeň

Úloha 4.2.1: Hledané body leží na ose úsečky AB .

Úloha 4.2.2: Řešením je střed kružnice opsané.

Úloha 4.2.3: Viz obrázek 4.5. Nejdříve narýsujeme podle věty sss trojúhelník NMS (se stranami o délce 5, 7 a 6). Poté lze již narýsovat všechny tři kružnice. Úloha má jedno řešení.

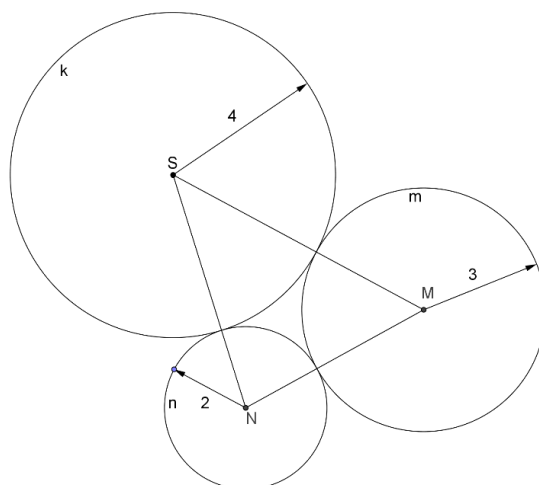
Úloha 4.2.4: Po narýsování čtverce a úhlopříček v něm stačí sestavit kružnice vepsané čtyř vzniklých trojúhelníků.

Úloha 4.2.5: Viz obrázek 4.6. Nejdříve narýsujeme úsečku NO , poté kružnici k se středem v bodě O a poloměrem 5 cm. Dále narýsujeme polopřímku NX , pro kterou platí $|\angle XNO| = 45^\circ$. Třetí vrchol trojúhelníku získáme jako průsečík polopřímky NX a kružnice k . Úloha má dvě řešení, trojúhelník M_1NO a M_2NO .

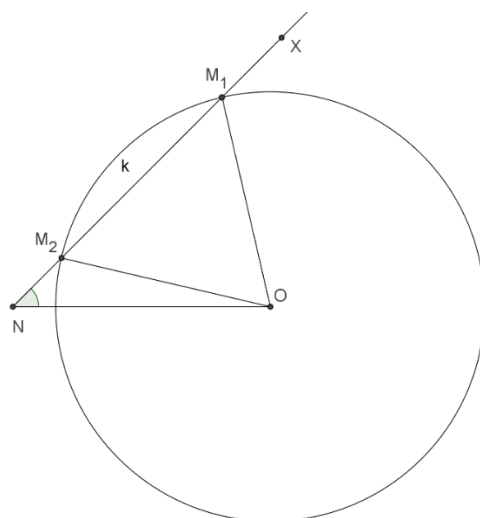
Úloha 4.2.6: Střední příčka trojúhelníku má poloviční délku než protější strana. Trojúhelník PQR má tedy délky stran 4 cm, 7 cm a 6 cm. Sestrojíme ho pomocí věty sss.

Úloha 4.2.7: Viz obrázek 4.7. Nejdříve sestrojíme úsečku AB a kružnici k se středem v bodě B a poloměrem 3 cm. Dále sestrojíme polopřímku BX tak, že $|\angle ABX| = 60^\circ$, a polopřímku AY tak, že $|\angle YAB| = 30^\circ$. Nakonec sestrojíme rovnoběžku r s přímkou AB jdoucí bodem C . Bod D získáme jako průsečík přímky r a kružnice k . Úloha má jedno řešení.

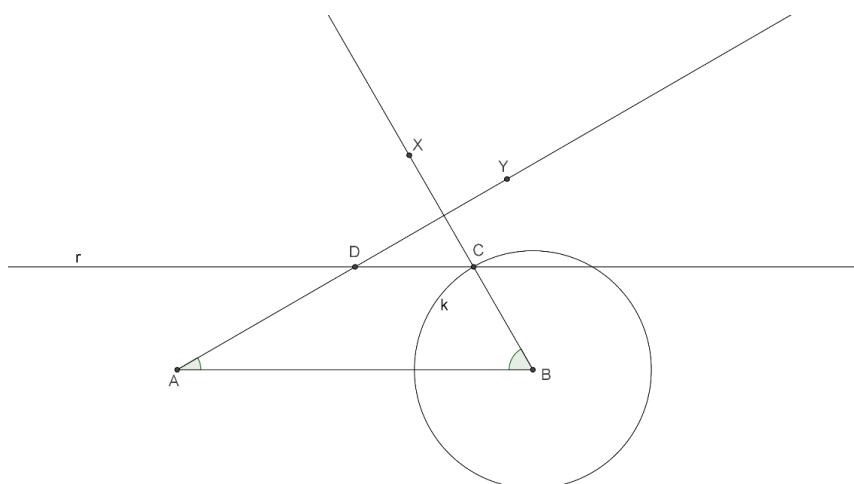
⁷ Je zajímavé, že i nezanedbatelný počet studentů učitelství a učitelů, s nimiž jsme úlohu za poslední roky testovali, v obrázku kružnici vepsanou „nevidí“ a hledají řešení experimentálně. U varianty, kterou také F. Kuřina (2006) nabízí, kdy je okno kruhové a ne čtvercové (jedná se o kružnici rozdělenou kolmými průměry na čtvrtiny a v každé z nich je nakreslená další kružnice) a kde se musí kvůli řešení dokreslit úsečky mimo obrázek, to platí dvojnásob. Počet úspěšných řešitelů je u ní skutečně malý.



Obr. 4.5: Obrázek k úloze 4.2.3.



Obr. 4.6: Řešení úlohy 4.2.5

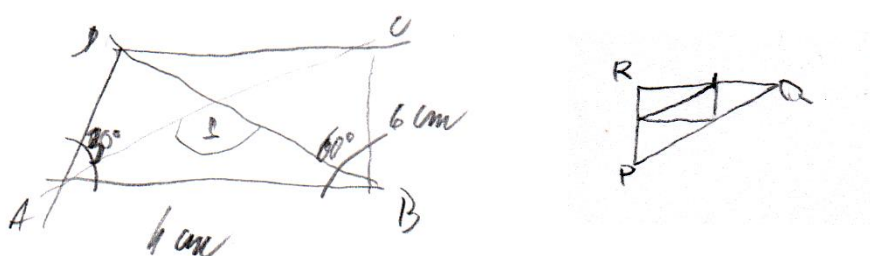


Obr. 4.7: Řešení úlohy 4.2.7

4.4 OBTÍŽE ŽÁKŮ A JAK JIM PŘEDCHÁZET NEBO ČELIT

A) ŽÁK SI NEUVĚDOMUJE ROZDÍL MEZI GEOMETRICKÝM ÚTVAREM JAKO TEORETICKÝM OBJEKTEM (NAPŘ. TROJÚHELNÍK) A JEHO REPREZENTANTEM NA PAPIŘE (TEDY KONKRÉTNÍM NAČRTNUTÝM NEBO NARÝSOVANÝM OBRÁZKEM TROJÚHELNÍKU). PROVÁDÍ NEKOREKTNÍ KONSTRUKCE.

Sem patří případy, kdy si žáci načrtnou obrázek s takovými atributy, které nejsou v úloze dány, a následně na základě tohoto nekorektního obrázku pak usuzují na postup řešení. Např. Zdeňka (8. ročník) si nakreslila lichoběžník a podle obrázku usoudila, že úhel CAB bude mít velikost poloviny z 30° (obr. 4.8 vlevo). To pak chtěla použít při konstrukci. Johana (8. ročník) si u úlohy 4.2.6 načrtla trojúhelník (nesprávně označila PQR velký trojúhelník, ne trojúhelník středních příček) a pak chtěla rýsovat jednu ze středních příček jako kolmici na stranu QR , protože se jí to na náčrtu jevílo jako kolmé (obr. 4.8 vpravo).

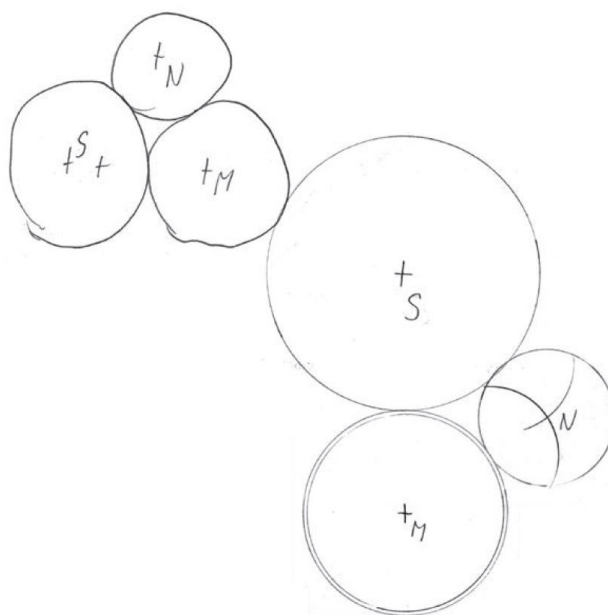


Obr. 4.8: Zdenčin náčrt lichoběžníku a Johanin náčrt trojúhelníku se středními příčkami

Také žáci, kteří navrhnou do náčrtu rýsovat či v něm měřit, trpí zmiňovanou obtíží. Příkladem je Adéla (8. ročník), která nejdříve u úlohy 4.2.3 načrtla polohu všech tří kružnic, pak pomocí pravítka spojila jejich středy a měřila vzniklé úsečky.

Častá jsou také nekorektní řešení, v nichž se kombinují správné konstrukce s konstrukcemi „od oka“. Typické to bylo v našich rozhovorech při hledání středu třetí kružnice v úloze 4.2.3. Např. Prokop (9. ročník) si nejdříve narýsoval jednu kružnici se středem S . Střed M druhé kružnice udělal tak, že od náhodně zvoleného bodu první kružnice naměřil náhodně vybraným směrem 2 cm. Tím mu vyšlo nepřesné řešení. Třetí střed N opět hledal tak, že od náhodně vybraného bodu na první kružnici nanese kružítkem oblouk ve vzdálenosti 2 cm, a totéž provedl od druhé kružnice, kde opět zabodl hrot kružítko do bodu, pro který od oka usoudil, že bude na „správném“ místě (obr. 4.10). Špatný výsledek přisoudil nepřesnému rýsování. Podobný problém se projevil u konstrukce bodů dotyku u kružnice vepsané v úloze 4.2.4. Žáci korektně sestrojili střed kružnice, ale bod dotyku jen odhadli. Další příklady obtíží a podrobnější popis viz *Kniha*, oddíl 3.4.2.

Doporučení: Žák, u něhož se projevila výše uvedená obtíž, nedostatečně odlišuje oba prostory, s nimiž se v geometrii setkává, tedy teoretický prostor a prostor reprezentací. Obrázky (pouhé reprezentace ideálního geometrického objektu) zaměňuje za objekty samotné. Je třeba se ve výuce explicitně zaměřit na odlišení obou prostorů. Vést žáky k uvědomění, které vlastnosti z náčrtku vyčíst lze a které ne, co lze dělat s náčrtem, jak se promítnou teoretické vlastnosti objektů do konstrukčních kroků pomocí rýsovacích prostředků. Nelze spoléhat na to, že žáci si vytvoří schopnost odlišení obou prostorů mimoděk, při řešení konstrukčních úloh. Viz také doporučení u obtíže B.



Obr. 4.10: Prokopovo nekorektní rýsování tří kružnic u úlohy 4.2.3

B) ŽÁK NEUMÍ PRACOVAT S NEKONKRÉTNÍM ROZMĚREM, NECHÁPE, CO U KONSTRUKČNÍ ÚLOHY ZNAMENÁ SLOVO LIBOVOLNÝ ČI OBEČNÝ.

S problematikou rozlišení teoretického prostoru a prostoru reprezentací souvisí neochota či neschopnost žáků pracovat s obecně (tedy nečíselně) zadanými objekty. V úlohách, kde bylo dáno například „narýsuj kružnici k se středem v bodě A “, se většina žáků 1. stupně buď dotazovala na rozměr kružnice, či se ujišťovala, že může být libovolný, nebo automaticky sáhla po pravítku a do kružítka nabrala určitou, obvykle celočíselnou, délku. Silná potřeba znalosti rozměrů se projevila například v úloze 4.1.3, kdy měli žáci zvolit libovolně body A a B na přímce p . Nezřídka se objevilo, že si žák vzdálenost těchto bodů odměřil, byť k tomu nebyl žádný důvod.

Také u žáků 2. stupně se projevila silná potřeba konkrétních číselných hodnot. Např. u úlohy 4.2.1 si řada z nich neudělala dva body jen tak do prostoru na papír (či na předem narýsovanou přímku), ale zakreslili bod A , od něj udělali polopřímku a na ni nanесли určitý počet centimetrů, který si předem řekli nebo na který se zeptali. Podobně u úlohy 4.2.2 řada žáků měla potřebu říci, kolik centimetrů budou mít jednotlivé strany trojúhelníku, který určují tři zadané body, což bylo vlastně zbytečné.

Podobná situace byla také u kružnic, pokud nebyl zadán poloměr. Žáci na obou stupních škol často nejdříve přiložili kružítko k pravítku a naměřili si do něj určitý počet centimetrů, místo aby kružítko prostě rozevřeli na nějakou vzdálenost.

Slovo *libovolný* či *obecný* si někteří žáci 2. stupně vykládali i tak, že si mohou vybrat nějaký podtyp daného útvaru (zpravidla prototyp, viz níže). Např. Amálie (8. ročník) se u úlohy 4.2.2 rozhodla, jaký trojúhelník ABC si zadá: „Udělám si ho třeba rovnoramenný.“ Dominik (8. ročník) se rozhodl pro rovnostranný: „Trojúhelník je rovnostranný, to je nejjednodušší.“ Není zcela jasné, do jaké míry si oba uvědomují, že zvolený trojúhelník by měl reprezentovat všechny možné trojúhelníky.

Určitou obdobou potřeb konkrétních rozměrů byl někdy až krkolomný způsob přenášení úseček u žáků 1. stupně. Například v úloze 4.1.2 si většina žáků neuvědomila, že měření na centimetry a milimetry není nutné a délky úseček je možné přenést pomocí kružítka. Žáci si strany trojúhelníku nejprve změřili, někdy i zapsali, a pak teprve vzali délku do ramen kružítka (pomocí pravítka) a rýsovali. Ojedinělé nebyly ani extrémní případy, kdy si žáci délku úsečky nabrali do kružítka, přiložili jej k pravítku, odečetli délku, a pak tuto délku znovu vzali do kružítka a teprve pak konstruovali. Totéž se opakovalo v úloze 4.1.6, kde podobně pracovali s poloměrem KM : místo toho, aby vzali poloměr KM přímo z obrázku či ze zadání a rovnou udělali kružnici, změřili si vzdálenost KM pravítkem, aby ji vzápětí mohli nabrat do kružítka.

Doporučení: Potřeba žáků pracovat s konkrétními číselnými hodnotami a obtíž s obecností v geometrii je do jisté míry přirozená a pramení z duality teoreticko-geometrického prostoru a prostoru reprezentací. Zatímco symbolicky se „cokoli“ dá vyjádřit poměrně jednoduše (v algebře se místo čísel použijí písmena), pomocí obrázku to je prakticky nemožné; obrázek vždy představuje konkrétní objekt, i když má reprezentovat objekt abstraktní. Žáci se musí postupně naučit, které informace mohou z obrázku vyčíst a které naopak musí teoreticky odvodit. Žáci 1. stupně jsou v tomto procesu teprve na začátku; jde o kognitivně náročný úkol, protože jde o práci na vysokém stupni abstrakce. U žáků 2. stupně je neschopnost rozlišovat oba prostory závažnou překážkou další poznávací činnosti v geometrii. Od učitelů to vyžaduje, aby kladli explicitní důraz i na odlišnost geometrických objektů a jejich reprezentací obrázky. U úloh 4.2.2 a 4.2.3 např. může učitel navodit diskusi o tom, jak ony body volit a zda je nutné přesně volit vzdálenosti mezi nimi.

C) ŽÁK JE V ZAJETÍ PROTOTYPŮ GEOMETRICKÝCH OBJEKTŮ, DÍKY ČEMUŽ JE V ŘEŠENÍ ÚLOHY NEÚSPĚŠNÝ.

Naše očekávání u úlohy 4.1.1 (viz oddíl 4.3) se nenaplnilo. Téměř všichni žáci byli schopni bez delší prodlevy zvolit jiné body, které na rozdíl od trojice A, B, C neleží v přímce. Nejčastěji volenou trojicí bodů byly body A, D, C . Za možnou příčinu lze označit určitý prototyp v uvažování – tyto tři body totiž tvoří trojúhelník, jehož základna je rovnoběžná s okrajem papíru. Náhodná také nebude skutečnost, že většina žáků volila kombinaci bodů obsahující bod A . Buď je to kvůli tomu, že bod A je umístěn příhodně uprostřed mezi ostatními body, anebo jsou žáci opět svedeni prototypem a hledají nejprve trojúhelník ABC , který po zjištění, že takový nelze sestavit, jen lehce pozmění.

Na další prototypické představy jsme narazili v řešeních úlohy 4.1.2, kde bylo úkolem do volného prostoru přerýsovat zadaný tupouhlý trojúhelník v „netypické“ poloze (šlo o trojúhelník BCE z bodů na obr. 4.4). Většina žáků v představě trojúhelník skutečně otočila a rýsovala se základnou rovnoběžnou se spodním okrajem papíru (tedy trojúhelník otočili do prototypické polohy). Zajímavé přitom je, že část žáků si nebyla jista, zda bude po otočení trojúhelníku zachována shodnost. Příkladem je Noemi (5. ročník).

Noemi: Uvidíme, jestli mi to vyjde. (Kružítkem získává délku úsečky BC . Přenáší vzdálenost, zapichuje hrot kružítka do bodu B .) No, ale to mi nevyjde, protože to musí být přesně natočený podle toho.

T: Hmm. Tak jak si s tím poradíme? (Noemi následně celou konstrukci vygumovala.)

Je zajímavé, že u úlohy 4.1.3 žáci často rýsovali obě kružnice se stejným poloměrem, ačkoliv o tom v zadání nebyla zmínka, a přestože to pro některé žáky znamenalo, že museli přepracovat celou konstrukci. Důvod naznačuje Olga (6. ročník).

Olga: Obě stejně? Ne, že jo.

T: Nevím, jestli to tam píšou.

Olga: Nepíšou, ale mělo by to být, asi tak.

T: Jestli to tam nepíšou, tak záleží na tobě. Libovolně. (Olga provádí konstrukci.) Tak, musely být stejně velké, nebo nemusely?

Olga: Hm, nemusely.

T: Nemusely.

Olga: (Chvilí ticho.) Ale je lepší, když jsou.

K zamyšlení je také skutečnost, že žádný z žáků nezvažoval možnost, že by jedna kružnice ležela uvnitř druhé.

Zajímavá z hlediska prototypů byla rovněž úloha 4.1.6. Žáci měli zakreslit bod M tak, aby úsečka KM byla dlouhá 4 cm. Přestože další informace o bodu M v zadání již nebyly, téměř všichni žáci vyznačili bod M na přímce p , ačkoliv mohl být kdekoliv v příslušné vzdálenosti.

Téměř ve všech rozhovorech s žáky 2. stupně jsme pozorovali silné tendence k prototypům, ať už to bylo ve tvaru určitého útvaru či v jeho označení. Pokud byl zadán trojúhelník, žáci si nakreslili rovnostranný (nejčastěji) či rovnoramenný trojúhelník, v méně případech pravoúhlý trojúhelník. Někdy to prokazatelně způsobilo problém

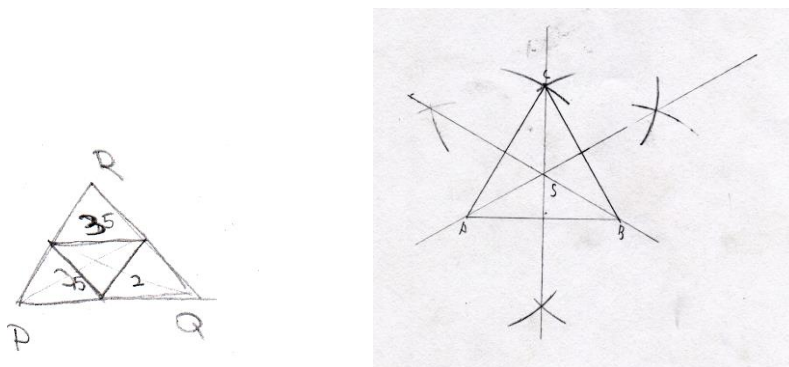
při řešení. Např. Martina (9. ročník) si u úlohy 4.2.6 nakreslila rovnostranný trojúhelník (obr. 4.11 vlevo) a od náčresu se nedokázala odpoutat, ani když jí tazatelka udělala jiný náčrt.

T: Napadá tě něco z toho náčrtku, když se na to podíváš? Jestli bys tam třeba našla nějakou společnou vlastnost nějakých třeba jiných přímek? Nebo více přímek? Nebo vzdálenosti a tak? Cokoliv. [...]

Martina: Že to nad tím vždycky jako bude rovnostranný trojúhelník. Že ta stejná vzdálenost by byla...

T: My si to zase uděláme pro nějaký jiný trojúhelník. (Tazatelka bere čistý papír a načrtává obecný trojúhelník.) Třeba takovýhle. A teď tady jsou ty střední příčky. (Dokresluje do náčrtku střední příčky trojúhelníku.) Takže vidíš, že třeba tohle není rovnostranný trojúhelník. [...]

Martina: Tak spíš rovnoramenný?



Obr. 4.11: Martina a její náčrtek u úlohy 4.2.6 a Tomášovo řešení úlohy 2.2

Tomáš (8. ročník) si u úlohy 4.2.2 nakreslil rovnostranný trojúhelník a střed kružnice opsané pak hledal tak, že použil postup konstrukce pro hledání os strany. Ovšem místo aby spojil oba průsečíky vzniklé protnutím kružnicových oblouků vynesných nad stranou (což je korektní konstrukce osy strany), našel jen jeden ze dvou průsečíků a ten spojil s vrcholem trojúhelníku (obr. 4.11 vpravo). V případě rovnostranného trojúhelníku mu konstrukce samozřejmě vyšla (neboť v rovnostranném trojúhelníku těžnice splývají s osami stran i výškami).

Pokud si žáci 2. stupně měli útvar sami označit, bez výjimky to bylo písmeny A , B , C , D (např. u úlohy 4.2.4, když si žáci měli přerýsovat čtverec a rovnoramenné trojúhelníky v něm). Amálie dokonce automaticky označila narýsovaný trojúhelník u úlohy 4.2.6 jako ABC a teprve na konci své práce ho přeznačila na požadované PQR . Adéla automaticky předpokládala, že trojúhelník, který vznikne ze středů kružnic, musí být rovnoramenný nebo rovnostranný.

Doporučení: Prototypy nám umožňují vyznat se ve světě, prototyp je vlastně „nejlepší příklad“ dané kategorie. Děti se tak učí poznávat svět a mají tendenci k prototypům samozřejmě i ve škole. Je však úlohou školy, aby si žáci uvědomovali omezení uvažování v prototypu a aby škola naopak nezpůsobila svým nepředcházením prototypům nebo dokonce jejich posilováním překážku v dalším poznávání geometrie. K posílení tendence k prototypům může docházet prostřednictvím výuky, při níž se žáci setkávají převážně s prototypy útvarů (jak v hodinách matematiky, tak v učebnicích). Je tedy nutné předcházet přílišným tendencím žáků upínat se na prototypy a nabízet jim útvary v různých polohách, s různými rozměry, různě značené tak dlouho, dokud nepochopí, které vlastnosti útvaru jsou nutné a které jsou nadbytečné. Teprve když se žák dostane na takovou úroveň uvažování, že si uvědomuje, že na označení či poloze útvaru nezáleží, a naučí se obrázek vidět jen jako reprezentanta teoretického objektu s určitými vlastnostmi, není třeba označení a polohu útvaru variovat a pracovat s prototypy. Pro pochopení rozdílu mezi teoreticko-geometrickým prostorem a prostorem reprezentací je vhodné pracovat s vystřiženým útvarem, kterým lze pohybovat po papíru, či v programu dynamické geometrie. Tyto programy (např. GeoGebra, viz www.geogebra.org) jsou přirozeným prostředím pro různé modely geometrických útvarů, protože umožňují jednoduchou konstrukci útvarů a zejména pohyb, pomocí něhož se mění jejich tvar. Žáci tedy lépe než na statickém obrázku vidí, jaké vlastnosti útvaru jsou nutné a jaké vlastnosti jsou jen náhodné. Domníváme se, že práce v těchto programech by také mohla přispět k tomu, že se žáci odpoutají od potřeby konkrétních čísel a budou ochotni pracovat i s nečíselným, obecným zadáním. Pokud

je možné např. úsečku libovolně přesouvat a měnit její délku, nemá smysl ji konstruovat tak, aby měla předem danou délku (jako to dělali žáci v našich rozhovorech).

D) ŽÁK DOKÁŽE PROVÉST KONSTRUKČNÍ KROKY, ALE JEJICH POVAZE NEROZUMÍ.

Žáci 1. stupně vesměs dokázali rýsovat rovnoběžky či kolmice, ovšem pokud dostali opačnou úlohu, zjistit, zda jsou dvě přímky rovnoběžné či kolmé, nedokázali to. Např. Blažena za rovnoběžné považovala všechny přímky, které se neprotínají v „dohledné“ vzdálenosti, ostatní dvojice přímek jsou pro ni kolmice.

Blažena (5. ročník): (Přečetla zadání úlohy 4.1.5.) Takže CD , to je takhle, a BE , to je takhle...no...ty jsou kolmé, protože ...

T: Rovnoběžné.

Blažena: Teda rovnoběžné. Pardon. Protože jedna běží tady a jedna běží tady a nedotknou se. [...]

T: Ověř, abys mohla někomu ukázat, že to je rovnoběžné.

Blažena: Jo. Takže... BE ...takhle sem, tak. (Rýsuje obě přímky.) Nejsou jakoby na sobě žádný bod, takže prostě já si myslím, že jsou kolmé.

T: Hmm. A mohla bych ti třeba... [...] (Na okraj papíru rýsuje od oka dvě nerovnoběžné čáry, které se neprotínají.) Tak ty jsou rovnoběžné?

Blažena: Jsou, protože, když vlastně půjdou tak, jakoby pořád jdou rovně, že se nespojí, pořád jdou takhle prostě po té své čáře. Prostě když půjdou až sem někam, ale pořád se nespojí, protože to by taky šlo pořád tam.

T: Hmm. A nevypadá ta... Vidiš, že ta jedna je trošku jinak postavená, nebo si myslíš, že jsou [...] obě stejným směrem?

Blažena: No, trošku jo, ale třeba kdyby to bylo jako u trojúhelníku, trošku jako u trojúhelníku, třeba takhle (pomocí pravítka modeluje přímku, která je různoběžná vzhledem k jedné z čar tazatelky a protíná ji), třeba takhle (posouvá pravítko do jiné polohy) a takhle (posouvá pravítko do polohy téměř kolmé vůči narýsované čáře), tak to se už... Prostě třeba takhle a takhle (opakuje pohyb s pravítkem), tak se to už střetne, protože už nahoře je to spojené.

T: Takže ta malá výchylka nevadí?

Blažena: Ne.

T: Nevadí.

Blažena: Vadilo by, kdyby to bylo třeba takhle (pomocí pravítka modeluje přímku, která kříží jednu z čar tazatelky), že jo...tak to už se střetne.

Dalimil (5. ročník) usuzoval na rovnoběžnost podle toho, zda jsou přímky rovnoběžné s hranou papíru, nebo ne.

U žáků 2. stupně se projevilo v plné míře, že znalost termínu (např. osa) a postupu příslušné konstrukce nezaručuje, že žák má daný pojem, který je termínem pojmenován, podepřen správnou představou. Např. Zdeňka u úlohy 4.2.1 *de facto* provedla správnou konstrukci osy úsečky AB , ale byl to pro ni jen prostředek pro sestrojení středu úsečky, o němž tvrdila, že je jediný bod splňující zadání.

Zdeňka: No, že jakoby tady a tady to měří stejně (tužkou ukazuje na bod A a bod B), takže je to asi jediný bod, od kterého mají stejnou vzdálenost. Protože kdybych udělala bod třeba tady (tužkou ukazuje nad úsečku AB a více doprava), tak budou mít jinou vzdálenost od A a od B .

T: Dobře, takže ten bod F (tak si Zdeňka pojmenovala střed úsečky AB) je jediný, od kterého má AB stejnou vzdálenost? (Zdeňka přitakává.) A proč jsi tam nakreslila to o ?

Zdeňka: To je osa té úsečky, aby jakoby to bylo jasné, že je to ten střed. Ta osa strany.

T: Jo, takže neexistuje jiný bod?

Zdeňka: Ne. Nebo?

T: Já nevím. Třeba kdybys měla od toho F někde nahoře nějaký bod, je možné, že bude mít od A stejnou vzdálenost jako od B ?

Zdeňka: Jo, jako kdyby to byl ještě rovnostranný trojúhelník nebo rovnoramenný... (bere do ruky pravítko a pomocí něho a tužky si ukazuje). Vlastně kdybychom na téhle přímce o udělali bod, tak vždycky bude mít stejnou vzdálenost od toho A i od toho B ?

T: Já nevím. Ptáš se mě nebo...?

Zdeňka: No, já se ptám.

T: No, tak jo.

Zdeňka: Tak, když je tam těch bodů nekonečně, tak jak to udělat?

Zdenčina poslední otázka ukazuje, že si stále není vědoma, že hledanou množinu nekonečně mnoha bodů dané vlastnosti už narýsovala.

Stejný problém se objevil i u Tomáše, který u úlohy 4.2.1 sám navrhl osu, správně ji i narýsoval, ale vlastně neměl představu, jaké vlastnosti body ležící na ose mají.

T: Tak. Který teda bod či body jsou stejně vzdálené od bodu A a B ?

Tomáš: No ...

T: Mluvil jsi o středu, ten je kde?

Tomáš: Tady. (Ukazuje správně, tazatel přitakává.) Tak ... ze středu naberu 3 cm a nanesu sem a sem (ukazuje na bod A a B).

T: Vzniknou ti body na té ose, takže mohl bys to nějak shrnout?

Tomáš: Hm. ...Že tím vznikne, ta druhá úsečka ... hm ...

T: Dobrá. Takže střed S je stejně vzdálený od obou bodů a co třeba další body, které by ležely na té ose, nebyly by stejně vzdáleny od těch bodů?

Tomáš: (Zkouší jakoby měřit – posunuje pravítkem tak, že prochází bodem A , a číslem 0 na pravítku „jede“ po ose o .) Byly.

Řada žáků si u úlohy 4.2.1 a 4.2.2 po zakreslení dvou, resp. tří bodů, které byly dány, vůbec neuměla představit, o jakou situaci se jedná. Nedokázali začít experimentovat a třeba si nějaký konkrétní bod najít a ověřit, zda splňuje podmínky. Je možné, že kdyby dostali za úkol narýsovat osu nebo střed kružnice opsané, byli by úspěšní.

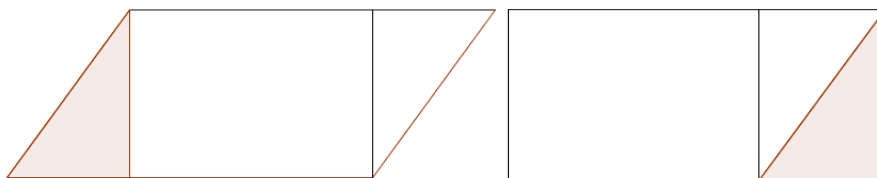
Doporučení: Domníváme se, že výše zmíněné obtíži bychom mohli předcházet oslabením důrazu na konstrukční postupy, na ovládnutí posloupnosti konstrukčních kroků, ve prospěch důrazu na porozumění pojmům, které jsou v pozadí těchto kroků. Žáci by měli dostat příležitost, aby se setkávali s úlohami na množiny daných vlastností „oběma směry“. Tedy jak „narýsuji osu úsečky AB “, tak „najdi všechny body, které jsou od bodů A a B stejně vzdálené“; jak „narýsuji kružnici“, tak „najdi všechny body, které jsou stejně vzdálené od daného bodu“. Vezmeme-li v úvahu způsob, jakým se konstrukční úlohy zpravidla učí (důraz na systematický přístup, na zápis konstrukce a na konstrukci až jako završení celého procesu), pak se zdá, že výuka podceňuje fázi experimentálního a manipulativního řešení.

5. MÍRA V GEOMETRII

Mírou v geometrii budeme pro potřeby tohoto textu rozumět zjišťování obvodů, obsahů, povrchů a objemů. Budeme se přitom vesměs omezovat na míru mnohoúhelníků a hranatých těles. Jednoznačně se jedná o oblast, kterou učitelé (i žáci) považují za kritickou. Nejdříve opět uvedeme trochu nutné teorie.

Pojmy délka, obsah a objem jsou v mnoha ohledech propojeny.⁸ Všechny se týkají prostoru (i když různých dimenzí) a pro všechny je důležitý pojem **konzervace (zachování)**. Pro jejich měření je důležitý výběr **jednotky a její iterace (opakování)**, přičemž tato jednotka má stejnou dimenzi jako daná míra. Pomocí pokrývání měřeného útvaru jednotkami vytváříme **strukturaci prostoru** – pro délku opakujeme jednotku v jednom směru, pro obsah opakujeme jednotku ve dvou směrech a vytváříme tak obdélníkovou mřížku. Pro objem můžeme postupovat obdobně, tedy zaplňujeme prostor opakováním jednotky ve třech směrech, čímž vzniká trojdimenzionální mříž, nebo vyplňujeme nádobu tekutinou, a jednotka tak získává tvar určený tvarem nádoby. Měření obsahu a objemu vede k **multiplikativnímu vztahu mezi délkami** (pro mnohoúhelníky a hranatá tělesa, kterými se zde zabýváme). Tento vztah je zapsán prostřednictvím **vzorců**, přičemž mezi vzorci pro míru základních útvarů či těles existují určité vztahy. Na tomto místě je však nutné zdůraznit, že se *nejedná* o lineární proces. Žáci se mohou zabývat otázkami zachování míry a současně se setkávat s jednotkami míry; žáci, kteří již znají vzorec pro vypočítání obsahu obdélníku, se vracejí zpět a zvědomují si podstatu tohoto vzorce, uvědomují si, které délky jsou v multiplikativním vztahu, atp.

Celý proces jsme uchopili schématem, který je v *Knize*, v oddíle 5.1. Nyní výše zmíněný pojmotvorný proces ještě trochu rozvedeme. Rozdělení útvarů na části a pochopení, že pokud tyto části seskupíme jinak, nedojde ke změně obsahu celku těchto částí, je podstatou **konzervace (zachování) míry**. Důležitá fáze pojmotvorného procesu pojmu míra v geometrii spočívá ve zkoumání míry útvarů, aniž by se zjišťovala přesná číselná hodnota. Tedy žáci zkoumají změnu obsahu (či jeho zachování) spojenou se změnou tvaru útvaru. Porovnávají obsah útvarů (např. překrytím, položením útvarů vedle sebe), rozdělují úvary na části a přeskupují je do jiných tvarů a zjišťují, jak lze útvar pokrýt jinými tvary (nejen čtverci), apod. V této fázi je také důležité, aby žák začal získávat zkušenosti s komplementem útvaru. Např. při zjišťování obsahu kosodélníku můžeme přenést pravoúhlý trojúhelník zleva doprava (viz obr. 5.1) a z kosodélníku se stane obdélník, jehož obsah již žáci umějí vypočítat. Vhodným nástrojem je zde čtverečkový papír.



Obr. 5.1: Změna kosodélníku na obdélník s využitím myšlenky komplementu (doplňku)

Zásadní roli v procesu měření v geometrii hraje **jednotka a její tvar**. Žáci musejí vybrat vhodnou jednotku měření a pak ji opakovaně pokládat (později jen v představě) na měřený útvar, a to bez překrývání a bez mezer. Jednotkou může být např. úsečka délky 1 cm, která je prohlášena za jednotku, či čtverec o obsahu 1 cm^2 , který je prohlášen za jednotku.⁹ Pro zobecnění od počítání jednotek pokrývajících útvar k vytvoření numerických procesů je důležité, aby žáci pracovali i s částmi jednotek (např. jejich polovinami, třetinami apod.), které pokrývají daný útvar.

V další fázi je nutné zjistit **počet jednotek**. Přitom se postupuje od nakreslení či modelování jednotek a jejich spočítání jedné po druhé, přes sloučení oddělených jednotek do složených jednotek (takovou složenou jednotkou

⁸ V jiných se zase liší. Zatímco délku můžeme přímo měřit, obsah a objem se musí zpravidla vypočítat (i když obsah můžeme někdy zjistit příkládáním jednotkových útvarů a objem lze měřit přímo pomocí tekutin).

⁹ S tím úzce souvisí i problematika převodů jednotek, která je pro žáky krajně obtížná. Souvisí však spíše s pochopením desetinných čísel, proto se jimi v tomto textu zabývat nebudeme.

je řada jednotkových čtverců u obsahu nebo vrstva z jednotek objemu, které pokládáme na sebe) a zjišťování počtu těchto složených jednotek, až po počítání jednotek či složených jednotek vyplňujících zkoumaný objekt jen **v představě**. Důležitý je však také opačný proces, kdy je jednotka a strukturace prostoru předem dána – útvar je nakreslen na čtverečkovaném papíru či těleso je již sestaveno z jednotkových těles. V tom případě žák odečítá číselnou hodnotu míry z obrázku či fyzického modelu. U zjišťování objemu se do hry dostává ještě nutnost strukturace trojdimenzionálního prostoru, což je pro žáky zpravidla obtížnější.

Proces počítání jednotek a složených jednotek je zobecněn do **multiplikativní struktury**; žák si uvědomuje, že podstatou zjišťování míry je násobení příslušných délek. Zásadním problémem je skok v uvažování, který musí žák učinit. Situaci mu můžeme usnadnit pomocí obrázků, v nichž je např. obdélník rozdělen jednotkovou mřížkou; tyto obrázky reprezentují souvislost mezi výpočtem obsahu a násobením přirozených čísel. Pokud jednotky rozdělíme na menší části, dostaneme reprezentaci souvislosti výpočtu obsahu s násobením zlomků. Ovšem multiplikativní vztah má platit pro **kladná reálná čísla**. To znamená, že žáci si musí výpočetní proceduru zobecnit na reálná čísla limitním procesem, kdy jednotka je stále menší a menší. Přejít od přirozených čísel k reálným učebnice matematiky zpravidla nijak neřeší (také i proto, že obsah obdélníku se probírá zpravidla na 1. stupni, kdy žáci nemají dostatek znalostí, a učebnice 2. stupně již předpokládají, že obsah obdélníku není třeba znovu zavádět). Předpokládá se, že pokud žák nahlédne, že obsah obdélníku s celočíselnými délkami stran se vypočítá jako součin délek obou sousedních stran, pak platnost tohoto výpočtu automaticky vztáhne i na neceločíselné délky stran.

Pro žáky může být problematický přechod od zjišťování míry u jednoduchých útvarů (těles) k útvarům (tělesům) nepravidelných tvarů nebo různě zakřiveným objektům, v nichž není možné si představit pokrývání čtverci či vyplňování krychlemi. V neposlední řadě i přechod od malých útvarů, které se dají nakreslit či modelovat a vnímat najednou, jako celek, k velkým prostorům jako pole, pokoje či budovy, může být pro žáky obtížný.

V nejabstraktnější fázi pojmotvorného procesu míry v geometrii je použit **jazyk algebry** pro abstraktní uchopení multiplikativní struktury; tak vzniknou **vzorce**. Na jedné straně vzorce vystihují jádro poznatku, dají se zapamatovat a dobře se s nimi pracuje (pokud žák pochopí podstatu práce s algebraickými výrazy). Na druhou stranu mají vzorce tendenci stát v poznatkové struktuře osamoceně, žáci se je učí pamětně, bez pokusu jim porozumět, a vzorce se tak stávají pouhou náhradou skutečného poznání. Umožňují totiž žákovi počítat i to, čemu sám nerozumí.

5.1 RVP PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

První období 1. stupně: Žák

M-3-3-01 rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci,

M-3-3-02 porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky.

Druhé období 1. stupně: Žák

M-5-3-02 sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran,

M-5-3-04 určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu.

2. stupeň: Žák

M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku,

M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem,

M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů,

M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti,

M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles,

M-9-3-11 načrtne a sestaví síť základních těles,

M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

5.2 ÚLOHY, KTERÉ PŮSOBÍ ČESKÝM ŽÁKŮM PROBLÉMY

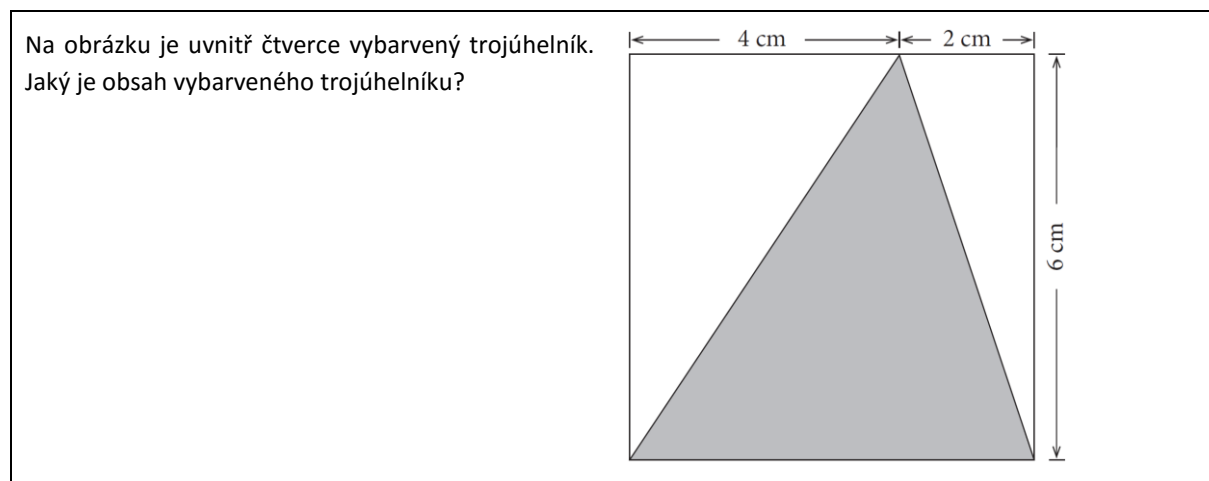
5.2.1 ÚLOHY Z MEZINÁRODNÍHO TESTOVÁNÍ A NAŠE VÝZKUMNÁ SONDA

Naše rozhovory s žáky 7. až 9. ročníků mimo jiné ukázaly, že žáci mají často problémy s jednoduchými výpočty obsahů útvarů tam, kde se nemohou spolehnout na dosazení do známého vzorce. Proto jsme vybrali pět úloh z mezinárodního testování, v nichž měli naši žáci špatné výsledky, a ve snaze zjistit podrobněji, v čem spočívají žákovské obtíže, jsme je zadali na sedmi základních školách a pěti osmiletých gymnáziích v Praze a jejím blízkém okolí v rámci hodin matematiky jako neznámkový test. Žáci již měli probrán obsah trojúhelníku a objem kváдру. Testy zadávali učitelé matematiky pod vedením spolupracující osoby, která byla za tím účelem proškolená. Test nebyl časově omezen a žákům bylo sděleno, že výsledky testů nebudou mít vliv na jejich hodnocení z matematiky. Žáci měli dostatek času na vypracování testu. Předpokládáme tedy, že pokud nějakou úlohu vynechali, nebylo to kvůli nedostatku času. Písemná řešení žáků jsme analyzovali s cílem zjistit úspěšnost žáků, identifikovat použité strategie řešení a postihnout různé chyby, kterých se žáci dopustili. Výsledky uvádíme v tomto oddíle. Čtenář, učitel, může úlohy zadat svým žákům a porovnat jejich úspěšnost s naší sondou.

Při porovnání výsledků žáků v TIMSS a v naší sondě však musíme být velmi obezřetní, protože vzorek žáků je rozdílný. V TIMSS byli žáci náhodně vybráni, aby reprezentovali celou žakovskou populaci daného věku. V naší sondě se jednalo o příležitostný vzorek žáků z různých ročníků. Proto jsou pro nás důležitější informace, které jsme získali o způsobech řešení a chybách žáků. Ty budeme prezentovat formou komentovaných tabulek.

První ze zadaných úloh je na obr. 5.2. U ní byla úspěšnost našich žáků jen 23,1 % (což bylo 5,6 % pod mezinárodním průměrem) a 16,3 % žáků úlohu vynechalo. V. Tomášek a kol. (2009, s. 66) k příčině neúspěchu žáků v řešení úlohy uvádějí:

Při jejím řešení musí prokázat nejen to, že [žáci] znají a umí použít vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, ale i že parametry potřebné pro výpočet dokážou vyčíst z obrázku. To, že nebyla explicitně uvedena délka strany a příslušná výška trojúhelníku, byl pravděpodobný důvod poměrně nízké úspěšnosti řešení úlohy.



Obr. 5.2: Zadání úlohy M01-12 (Tomášek a kol., 2009).

Podle našeho názoru však může jít i o neschopnost rozdělit si obrázek na části, jejichž obsah se dá jednoduše zjistit i bez dosazování do vzorce pro obsah obecného trojúhelníku, či využít zachování obsahu pro trojúhelníky. Úloha se kromě použití vzorce pro obsah trojúhelníku dá řešit pomocí rozdělení čtverce na dílčí konfigurace – na dva obdélníky dokreslením nebo domyslením si kolmice ke straně čtverce jdoucí horním vrcholem trojúhelníku; strany trojúhelníku jsou pak úhlopříčky těchto obdélníků a v nich vyšrafovaná část zabírá právě jednu polovinu. Obsah vyšrafované části je tedy polovinou obsahu čtverce. Další způsob řešení spočívá v posunutí horního vrcholu trojúhelníku např. do pravého horního vrcholu čtverce – obsah trojúhelníku se tím nezmění, protože se

nezměnila ani délka strany ani výšky na tuto stranu, a je vidět na první pohled, že hledaný obsah je polovinou obsahu čtverce.

Úspěšnost žáků z naší sondy v řešení úlohy je v tab. 5.1.

Tab. 5.1: Úspěšnost žáků 7. až 9. ročníků u úlohy z obr. 5.2 ($n = 661$)

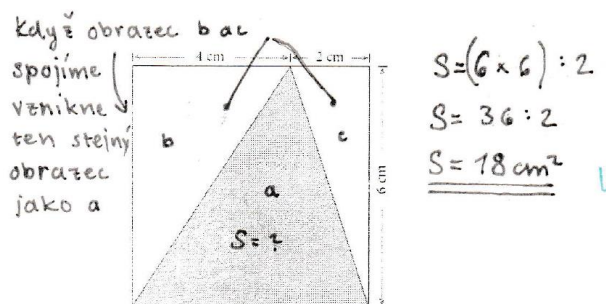
	Počet	Počet úspěšných	% úspěšných
7. ročník	185	101	54,6
8. ročník	256	158	61,7
9. ročník	220	157	71,4
	661	416	62,9

Tab. 5.2 ukazuje přehled strategií, které žáci využili. Celkem 13,5 % žáků všech ročníků úlohu vynechalo, což odpovídá zhruba výsledku TIMSS. Úloha byla řazena jako první, žáci ji tedy zřejmě nevynechali z důvodu nedostatku času. Překážkou byla buď neznalost vzorce pro obsah trojúhelníku, nebo neschopnost poradit si pomocí jednoduché úvahy tak, jak to učinilo 285 žáků, tedy pomocí obsahů dvou bílých trojúhelníků či obsahy obdélníků, jejichž jsou tyto trojúhelníky součástí. Dalo by se říci, že jsou žáci příliš zaměřeni na použití vzorců a neuvědomují si souvislost mezi výpočtem obsahu trojúhelníku a obsahu příslušného obdélníku. Náprava spočívá v získání více zkušeností s rozdělováním útvarů na menší části. Na druhou stranu si můžeme všimnout, že poměrně dost žáků (konkrétně 81) dokázalo použít způsob řešení, který jsme považovali za nejobtížnější, a sice posunuli horní vrchol trojúhelníku do rohu čtverce, čímž se obsah trojúhelníku nezměnil.

Tab. 5.2: Strategie řešení úlohy z obr. 5.2 ($n = 661$)

	Správně	Špatně	
Řešení pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku	130	Špatné dosazení do správného vzorce	19
		Dosazen změřený rozměr	5 (z toho 3 do správného vzorce)
		Nenalezeny potřebné rozměry	4
		Nedopočítáno	12
		Vzorec $S = abc$	14
		Vzorec $S = aa, S = ab, S = av$	26
		Vzorec pro obvod	18
		Vzorec pro lichoběžník	2
		Vzorec typu součet délek stran děleno dvěma	3
		Pokus o řešení pomocí Pythagorovy věty ¹⁰	30
		Jiný nesprávný vzorec	12
Odečtení obsahu bílých trojúhelníků od obsahu čtverce	89	Chyba ve výpočtu	3
Jedná se o součet polovičních obsahů dvou obdélníků	105	Chyba ve výpočtu	8
Součet polovičních obsahů dvou obdélníků odečten od obsahu čtverce	10		
Obsah čtverce dělený dvěma (viz ilustrace na obr. 5.3)	81	Chyba ve výpočtu	6
		Neřešeno	89

¹⁰ O řešení pomocí Pythagorovy věty se pokoušeli téměř stejnou měrou žáci všech ročníků.



Obr. 5.3: Jedno ze správných řešení úlohy o trojúhelníku ve čtverci

Další ze zadávaných úloh původně z TIMSS je úloha na obr. 5.4. Žáci v ní byli úspěšní jen z 50 %. Úloha však byla problematická i pro žáky z jiných zemí, neboť mezinárodní průměr úspěšnosti byl 42,3 %.

Kolik čtverečných centimetrů je obsah obrazce na obrázku?

A) 66 cm^2
B) 69 cm^2
 C) 81 cm^2
 D) 96 cm^2

Obr. 5.4: Úloha M07-08 z TIMSS 2007 (Tomášek a kol., 2009)

Úspěšnost úlohy v naší sondě je v tab. 5.3. Opět je naše úspěšnost vyšší než v TIMSS, i když tentokrát nijak dramaticky. Úlohu jsme však považovali za jednoduchou a fakt, že téměř 20 % žáků na konci školní docházky úlohu nevyřešilo, nás poněkud zaskočil.

Tab. 5.3: Úspěšnost žáků 7. až 9. ročníků u úlohy z obr. 5.4 ($n = 661$)

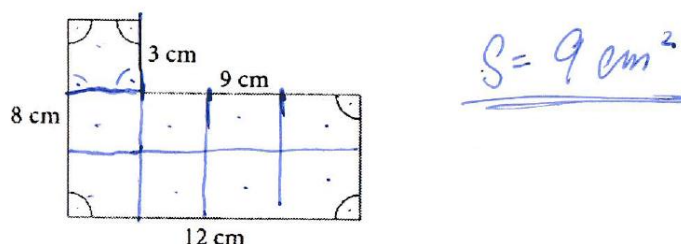
	Počet	Počet úspěšných	% úspěšných
7. ročník	185	99	53,5
8. ročník	256	177	69,1
9. ročník	220	180	81,8
	661	456	69,0

Tab. 5.4 shrnuje použité strategie řešení žáků v naší sondě. Podle očekávání 75 % úspěšných žáků řešilo úlohu pomocí rozdělení na čtverec a obdélník. Kolem 12 % úspěšných žáků ji řešilo rozdělením na jiné útvary a 8,5 % úspěšných žáků řešilo dokreslením zbývajících částí útvaru do obdélníku. Téměř 30 % neúspěšných žáků bylo neúspěšných proto, že neuměli vyčíst z obrázku chybějící rozměry, i když útvar rozdělit na menší útvary dokázali. Celkem 32 žáků si prokazatelně nevědělo s úlohou radu, u 84 žáků, kteří úlohu vynechali, si nemůžeme být jisti (mohla jim také úplně scházet motivace k řešení úloh testu).

Tab. 5.4: Strategie řešení úlohy z obr. 5.4 ($n = 661$)

	Správně	Špatně	
Rozdělení obrazce na čtverec 3×3 a obdélník 12×5	342	Obdélník 8×12	49
		Obdélník 9×5	3
		Jiný špatný rozměr obdélníku	5
		Nedopočteno, numerická chyba	9
		Špatný vzorec – počítá obvod	9
		Jiný špatný vzorec	5
Rozdělení obrazce na obdélník 3×8 a 9×5	42	Jeden rozměr špatně	4

Rozdělení obrazce na čtverec a dva obdélníky	12	Numerická chyba	2
Řešení „z hlavy“	3		
Dokreslení obrazce na obdélník 12 x 8 a výpočet $12 \cdot 8 - 9 \cdot 3$	39	S chybou	5
Rozdělení obrazce na jednotkovou síť (69 čtverečků)	5	S chybou	10
Nesprávné způsoby řešení		Obvod obrazce	13
		Vynásobení některých hodnot	9
		Součet některých hodnot	7
		Jiné špatné	3
Neřešeno			84



Obr. 5.5: Jedno z neúspěšných řešení úlohy o obsahu nepravidelného útvaru

Na obr. 5.5 je ukázka jednoho špatného řešení, které je opět ukázkou toho, že žáci nerozlišují mezi teoretickým prostorem a prostorem reprezentací. Levá strana útvaru se jeví jako složená ze tří úseček o délce 3 cm a tak s tím žák pracoval. Kromě toho počítal, že jeden čtvereček má obsah 1 cm^2 , a tedy dospěl k výsledku 9 cm^2 (protože čtverečků je tam 9).

Zkoumaná úloha byla v TIMSS zadána jako uzavřená. Opět se potvrzuje, že přítomnost distraktorů významně ovlivňuje povahu žákovských chyb. Např. nejčastější chybný výsledek, k němuž dospěli žáci v naší sondě, byl 105 (tedy $9 + 8 \cdot 12$) – dospělo k němu 49 žáků, tedy 7,4 %. Tato možnost mezi distraktory v TIMSS chybí. Naopak v šetření TIMSS 16,4 % žáků vybralo nesprávnou odpověď 66 cm^2 , která se v naší sondě objevila jen okrajově. Oproti tomu naši žáci dospěli k mnoha dalším výsledkům, které mezi distraktory TIMSS vůbec nejsou.

Další uzavřená úloha z TIMSS, kde jsme dosáhli slabých výsledků, je na obr. 5.6. Výsledek žáků v rámci TIMSS je přímo za jednotlivými distraktory.

Kolik cm^2 je obsah tmavé části obdélníku na obrázku?

A) 24 cm^2 (20,4 %)

B) 44 cm^2 (16,6 %)

C) 48 cm^2 (23,2 %)

D) 72 cm^2 (32,8 %)

Obr. 5.6: Úloha z TIMSS 2007 (Tomášek a kol., 2009)

Úlohu jsme zadali žákům v naší sondě jako úlohu otevřenou. Úspěšnost žáků 8. ročníku (viz tab. 5.5) byla dvojnásobná. Jak bylo již uvedeno, náš vzorek nebyl náhodně vybrán a nemůže, na rozdíl od TIMSS, být reprezentativní. Je možné, že v TIMSS byli žáci distraktory navedeni na nesprávnou odpověď více, než když naši žáci měli úlohu řešit jako otevřenou. Tím myslíme možnost, že žák neúplným výpočtem dospěje k nějaké hodnotě, kterou najde mezi distraktory, a tak dále nad úlohou neuvažuje. Zatímco žák si při řešení otevřené úlohy není jistý správností prvního nápadu k řešení úlohy, proto o ní uvažuje opakovaně.

Tab. 5.5: Úspěšnost žáků 7. až 9. ročníků u úlohy z obr. 5.6 ($n = 661$)

	Celkem	Počet úspěšných	% úspěšných
7. ročník	185	103	55,7
8. ročník	256	165	64,5
9. ročník	220	177	80,5
	661	445	67,3

Zajímavější jsou však jevy, které z výsledků TIMSS vyčíst nejdou, protože nemáme k dispozici přímo žákovská řešení. Tab. 5.6 ukazuje, jaké metody řešení žáci použili při řešení úlohy a zda byly úspěšné. Celkem 26 žáků vycházelo z toho, že lichoběžník tvoří $\frac{3}{4}$ obsahu obdélníku (řádek 8 v tab. 5.5). Obrázek v úloze je však v roli objektu (tedy proporce jednotlivých částí odpovídají), nemůžeme tedy říci, zda tuto úvahu měli teoreticky zdůvodněnou, nebo zda vycházeli jen z vizuálního dojmu, že to tak „vypadá“. Žáci nejčastěji odečetli obsah bílého trojúhelníku od obsahu celého obdélníku (přes 35 % žáků, řádek 3 a 4 tabulky). Pětina z nich však nebyla úspěšná. Téměř třetina žáků rozdělila lichoběžník na obdélník a trojúhelník (řádek 1 a 2), čtvrtina z nich však byla neúspěšná. Problémem se ovšem ukázal obsah trojúhelníku. Konečně, vzorcem pro obsah lichoběžníku řešilo úlohu relativně málo žáků (řádek 5), většina z nich však byla neúspěšná. Na pováženou je vysoký počet žáků, kteří úlohu vůbec neřešili. Úloha byla zadávána jako čtvrtá z pěti, přitom však pátou úlohu vynechalo méně žáků (celkem 93), u všech se tedy zcela jistě nejednalo o nedostatek času.

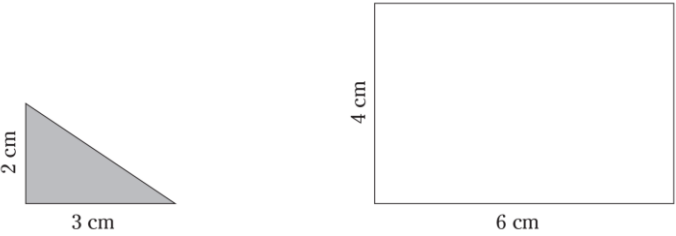
Tab. 5.5: Strategie řešení úlohy z obr. 5.6 ($n = 661$)

	Správně	Špatně
1. Součet obsahu obdélníku 6×8 a poloviny jeho obsahu	111	26
2. Součet obsahu obdélníku 6×8 a obsahu bílého trojúhelníku	39	23
3. Odečtení poloviny obsahu obdélníku od obsahu celého obdélníku	66	44
4. Odečtení obsahu trojúhelníku od obsahu celého obdélníku	124	
5. Vzorcem pro obsah lichoběžníku	14	22 ¹¹
6. Pomocí zlomku ($\frac{3}{4}$ z celku)	19	1
7. Pomocí zlomku (odečte $\frac{1}{4}$ z celku)	7	4
8. Trojnásobek obsahu bílého trojúhelníku	22	4
9. Jiné nesprávné		21
10. Neřešeno		114

O malých zkušenostech s pokrýváním útvaru jinými než čtvercovými jednotkami svědčí to, že jen 55 % českých žáků 8. ročníku vyřešilo úlohu na obr. 5.7.¹² Úloha byla zadána jako úloha s výběrem správné odpovědi. Neúspěšní žáci se zhruba stejným dílem domnívali, že správný výsledek jsou 4 trojúhelníky, resp. 6 trojúhelníků.

Kolik trojúhelníků shodných s vybarveným trojúhelníkem je potřeba k úplnému pokrytí plochy obdélníku?

A. Čtyři trojúhelníky.
B. Šest trojúhelníků.
C. Osm trojúhelníků.
D. Deset trojúhelníků.



Obr. 5.7: Úloha z TIMSS 1999 (Palečková a kol., 2001)

Úspěšnost žáků v naší sondě, kde jsme však zadali úlohu jako otevřenou, je v tab. 5.6.

¹¹ Z toho 9 záměna se vzorcem pro obsah trojúhelníku, 4 záměna se vzorcem pro obvod obdélníku.

¹² Úloha je už z roku 1999. Vzhledem k sestupnému trendu ve výsledcích šetření TIMSS lze spíše předpokládat, že výsledky současných žáků by byly stejné nebo horší.

Tab. 5.6: Úspěšnost žáků 7. až 9. ročníků u úlohy z obr. 5.7 ($n = 661$)

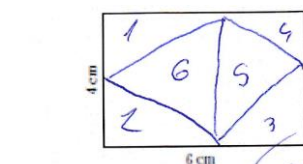
	Počet	Počet úspěšných	% úspěšných
7. ročník	185	133	71,9
8. ročník	256	182	71,1
9. ročník	220	195	88,6
	661	510	77,2

Tab. 5.7 shrnuje strategie řešení žáků v naší sondě. Podle očekávání většina žáků řešila na základě obrázku, tedy vizuálním rozdělením obdélníku na trojúhelníky. Další početná skupina byla úspěšná řešením přes obsahy obou útvarů. Opět se ukazuje významný vliv vybraných distraktorů. Distraktory použité v TIMSS omezily možnost, jakých chyb se žáci mohou dopustit. Výsledek 4 nabídl jen 3,3 % našich žáků (oproti 18,8 % žáků v TIMSS), výsledek 6 jen 1,5 % našich žáků (v TIMSS 21,8 %) a k výsledku 10 nedospěl nikdo. Naopak naši žáci nabízeli jako výsledek i 2, 5, 7, 9 a 12 trojúhelníků.

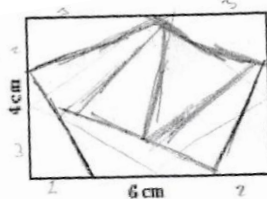
Tab. 5.7: Strategie řešení úlohy z obr. 5.7 ($n = 661$)

	Správně	Špatně	
Grafické řešení – dělení obdélníku na trojúhelníky	277	S chybou	5
Grafické řešení – dokreslování trojúhelníků k zadanému trojúhelníku	18		
Početní – přes obsahy	169	Obdélník místo trojúhelníku (výsledek 4)	14
		Nedopočteno	4
		Chyba v obsahu trojúhelníku	7
		Chyba v obsahu obdélníku	2
		Použit vzorec pro obvod místo obsahu	7
Početní – přes poměry stran	5	S chybou	2
Řešení „z hlavy“	27	Další nesprávná řešení (2, 4, 5, 6, 7, 9, 12)	
Neřešeno			93

Obr. 5.8 a 5.9 ukazují nesprávná řešení žáků. První dvě svědčí o neschopnosti žáků pokrýt útvar trojúhelníky, o níž jsme se zmínili již výše. Třetí řešení obsahuje zmatení obsahu a obvodu.

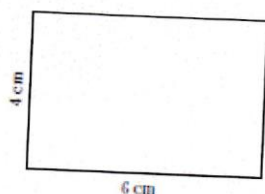


6 trojúhelníků



9

Obr. 5.8: Nesprávné rozdělení obdélníku na shodné trojúhelníky

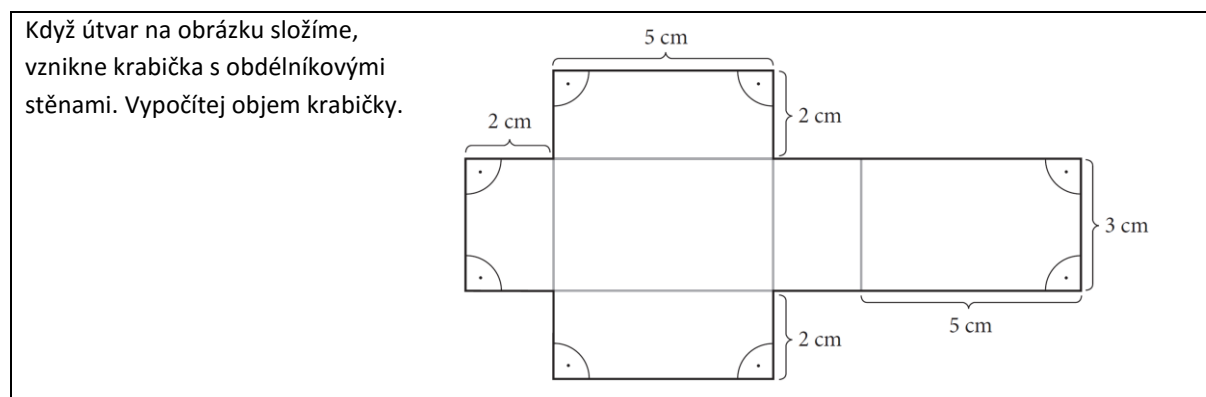


$$\begin{aligned}
 \sigma &= 2 \cdot (a \cdot b) \\
 \sigma &= 2 \cdot (4 \cdot 6) \\
 \sigma &= 2 \cdot 24 \\
 \sigma &= 48
 \end{aligned}$$

Obr. 5.9: Nesprávné řešení úlohy vzorcem

V naší sondě jsme zadali také jednu úlohu na objem (obr. 5.10). V TIMSS 2007 ji řešilo správně jen 29,8 % českých žáků 8. ročníku a celá třetina ji vynechala; úloha byla zadána jako otevřená. Úloha však podle našeho názoru není

dobře formulovaná. K jejímu úspěšnému řešení totiž stačí použít i strategii, kdy si žáci řeknou, že prostě najdou tři odlišné hodnoty (protože ty pro objem kvádru potřebují) a ty mezi sebou vynásobí. Právě tak řešili úlohu někteří žáci z našich rozhovorů. Úloha tedy může vést i k formálnímu použití vzorce, díky němuž jsou žáci úspěšní. Žáci tak neprokazují prostorovou představivost, což byl jeden z cílů úlohy: „(síti přiřadit odpovídající těleso) a schopnost z grafického zadání určit rozměry potřebné pro výpočet objemu“ (Tomášek a kol., 2009, s. 69).



Obr. 5.10: Úloha z TIMSS 2007 (Tomášek a kol., 2009)

V tab. 5.8 vidíme úspěšnost žáků z našeho testování.

Tab. 5.8: Úspěšnost žáků 7. až 9. ročníků u úlohy z obr. 5.10 ($n = 661$)

	Počet	Počet úspěšných	% úspěšných
7. ročník	185	92	49,7
8. ročník	256	177	69,1
9. ročník	220	172	78,2
	661	441	66,7

V tab. 5.9 jsou shrnuty strategie řešení, které žáci použili. Nebrali jsme ohled na to, zda se žák nedopustil chyby v jednotkách. Většina žáků si nepotřebovala načrtnout kvádr, aby byla úspěšná – kvádr si jen představovali, nebo, jak jsme upozornili už výše, si uvědomili, že pro objem jim stačí tři rozměry, tak vyhledali tři různé rozměry v síti a vynásobili je. Tab. 5.10 obsahuje příčiny chybných řešení. Nejčastěji se stalo, že žáci místo objemu hledali povrch. Možná proto, že byla dána síť, a u sítě je přirozené zjišťovat obsah, tedy povrch tělesa. Celkem 16 žáků nedokázalo správně dosadit rozměry do vzorce. Tato úloha byla nejčastěji neřešená z celého souboru pěti úloh, které jsme žákům zadávali. Byla přitom zadávána jako druhá v pořadí, nemohlo tedy jít o nedostatek času

Tab. 5.9: Strategie řešení úlohy z obr. 5.10 ($n = 661$)

	Správně	Špatně
Řešení s náčrtem kvádrů (z toho 6 žáků si jen barevně vyznačilo v síti příslušné sobě příslušející hrany)	153	31
Řešení bez náčrtku kvádrů	286	69
Neřešeno		121

Tab. 5.10: Chybná řešení úlohy z obr. 5.10 ($n = 100$)

Počítá obsah sítě	44 (z toho 10 navíc špatně dosazuje do vzorce)
Počítá obvod sítě, sčítá délky hran	19
Nedosazuje správně do vzorce, který zná	6
Špatný vzorec ($a^2 + b^2 + c^2$, a^3 , a^2v)	6
Jiné neúspěšné řešení	25

5.2.2 DALŠÍ PROBLEMATICKÉ ÚLOHY Z TESTOVÁNÍ

V tomto oddíle uvedeme další úlohy z oblasti míry v geometrii, u kterých máme výsledky pro větší počty českých žáků a v nichž byli žáci spíše neúspěšní.

Porozumění čtverečkovanému papíru a práci v něm vyžadovala úloha z PISA 2012 určená pro 15leté žáky. Úloha je na obr. 5.11. Úspěšnost českých žáků v první části úlohy byla 20,2 %. Druhá část úlohy však představovala větší problém, úspěšnost našich žáků byla jen něco málo přes 17 %. Pokud zanedbáme chyby při počítání s měřítkem, pak obsah nepravidelného útvaru ve čtvercové síti správně vypočítalo 30 % žáků. Dalších 30 % žáků úlohu úplně vynechalo. Domníváme se, že to ukazuje na nedostatečné zkušenosti s dělením útvaru na jednotky (čtverce) a s prací na čtverečkovaném papíru (což, jak jsme uvedli výše, je vhodný model nejen pro úvodní fáze pojmotvorného procesu pojmu obsah v geometrii).

Na obrázku vidíš plánec Markétiny cukrárny. Rozhodla se, že v cukrárně provede malé úpravy. Příprava je od ostatních prostor oddělena prodejním pultem.

Poznámka: Jeden čtvereček sítě má rozměry 0,5 metru $\times$ 0,5 metru.

A. Na vnější hranu pultu chce Markéta nalepit novou lištu. Kolik metrů lišty bude potřebovat? Napiš postup výpočtu.

B. V cukrárně nechá Markéta také udělat novou podlahu. Jaký je obsah podlahy v cukrárně, když nezapočteš přípravu a pult? Napiš postup výpočtu.

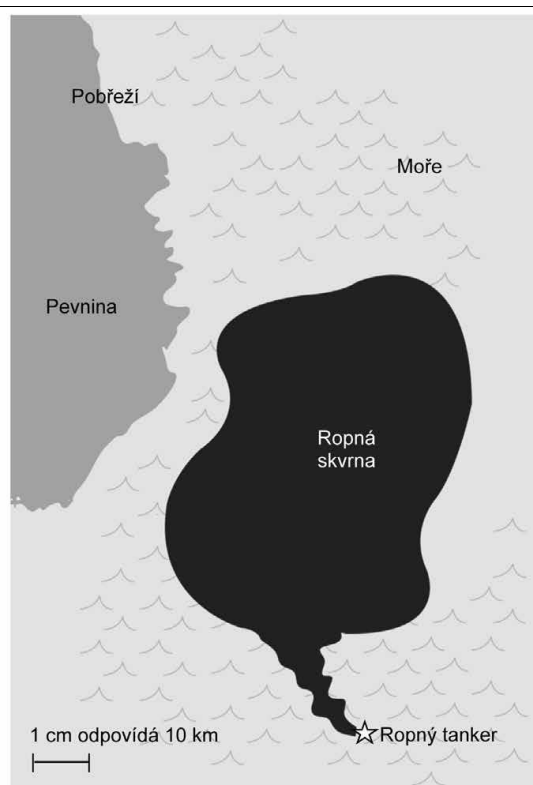
Obr. 5.11: Úloha z PISA 2012 „Cukrárna“ (Tomášek, Frýzek, 2013)

Další úloha z PISA 2012 (viz obr. 5.12) byla pro žáky ještě obtížnější. Byli v ní totiž ještě neúspěšnější (11,7 %). Úloha dá řešit např. dokreslením čtvercové sítě do obrázku nebo vepsáním či opsáním obdélníku útvaru, a tak dospět k odhadu obsahu. Podobné úlohy se však, pokud je nám známo, v českých učebnicích téměř nevyskytují. Příčinou je tedy malá zkušenost žáků s podobnými úlohami. Otázkou, kterou bychom si měli položit, je, zda by dobré porozumění pojmu obsah nemělo zahrnovat i schopnost řešit podobné úlohy, které mají i praktické aplikace. Nelze však v nich aplikovat mechanicky vzorec.

Ropný tanker narazil na podmořský útes, který prorazil díru do cisteren s ropou. Tanker byl v té chvíli vzdálen přibližně 65 km od pobřeží. Za několik dnů se na moři vytvořila ropná skvrna, kterou vidíš na mapě.

Využij měřítko mapy a odhadni obsah ropné skvrny v kilometrech čtverečných (km^2).

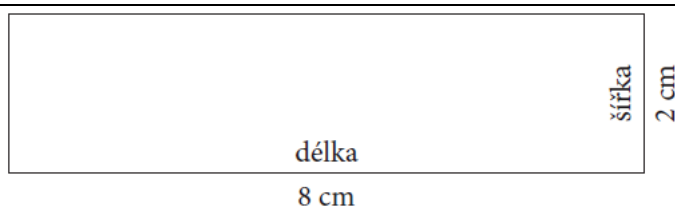
Odpověď: km^2



Obr. 5.12: Úloha z PISA 2012 „Ropná skvrna“ (Tomášek, Frýzek, 2013)

V TIMSS 2007 byla zadána stejná úloha jako v TIMSS 1999 (obr. 5.13), která se týkala práce ve čtvercové síti. Její úspěšnost v části A klesla z 27,2 % na 19,8 % (což však bylo stále nad mezinárodním průměrem). Velká část žáků (20,7 %) úlohu zcela vynechala. Z výsledků lze dále vyčíst, že dalších 14,2 % žáků úlohu řešilo částečně. Většinou tak, že obdélník byl sice správně nakreslen, ale nebyla u něj uvedena délka a/nebo šířka, nebo byla uvedena chybně. Problém tedy spočíval ve výpočtu délek stran.

Úlohu B vynechalo 49,9 % žáků a zcela správně bylo jen 10,4 % odpovědí. Většina žáků, kteří uvedli částečné odpovědi (3,3 %), udělala chybu v tom, že uvedla obrácený poměr. Bohužel o povaze většiny chybných řešení nemáme údaje a nevíme tedy, zda měli žáci problém s výpočtem obsahu či se sestavením poměru.



A. Do čtvercové sítě dole nakresli obdélník, jehož délka se rovná třem čtvrtinám délky obdélníku na horním obrázku a jehož šířka se rovná dva a půl násobku šířky obdélníku na horním obrázku. Ve svém obrázku uveď délku a šířku nakresleného obdélníku v centimetrech. Strana čtverce ve čtvercové síti je dlouhá 1 cm.

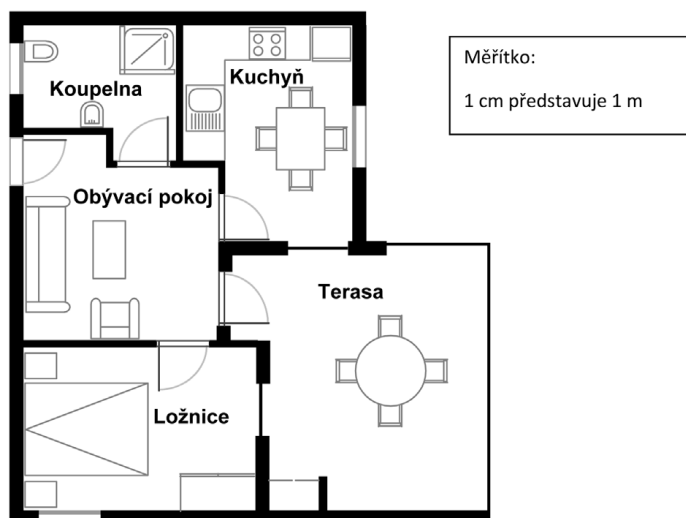
[Dále byla uvedena čtvercová síť.]

B. Jaký je poměr obsahu původního obdélníku k obsahu nového obdélníku?

Obr. 5.13: Úloha M01-11A (Tomášek a kol., 2009)

Další úloha týkající se obsahu je na obr. 5.14. Úspěšnost českých žáků byla 43,2 %. Úloha má 9 různých řešení. Úloha je svou podstatou podobná úloze z obr. 5.4, kde však o to výpočet také provést. Bylo by zajímavé vědět, zda mezi úspěšnými žáky byli také ti, kteří si spletli obsah s obvodem. K výpočtu obvodu stačí také 4 rozměry.

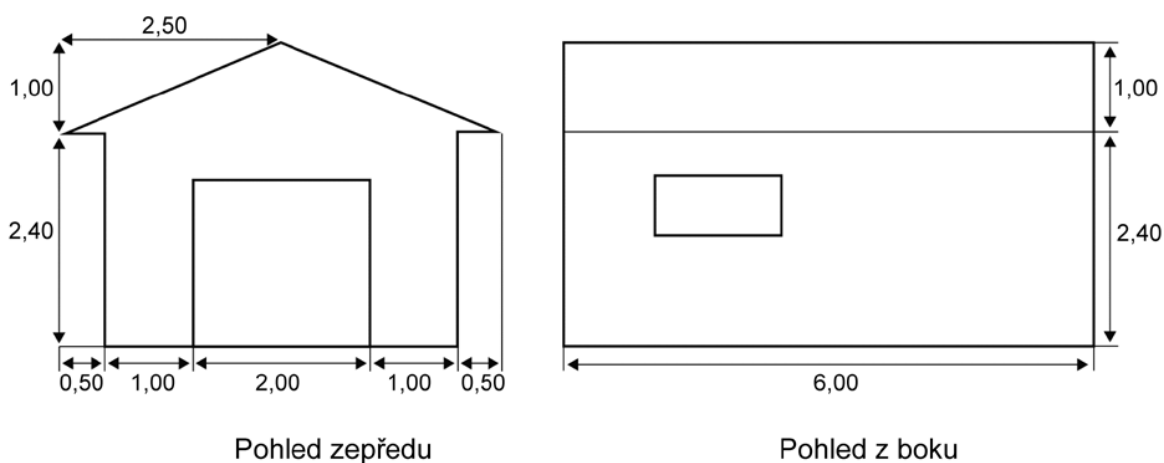
Pokud chceš odhadnout, jaký je celkový obsah podlahy bytu (včetně terasy a zdí), můžeš změřit rozměry jednotlivých místností, vypočítat jejich obsah a pak obsahy všech místností sečíst. Celkový obsah podlahy však můžeš zjistit i jednodušším způsobem a stačí ti k tomu jen 4 měření. Vyznač na plánu nahoře čtyři rozměry, které potřebuješ k odhadu celkového obsahu podlahy bytu.



Obr. 5.14: Úloha z PISA 2012 „Byt“ (Tomášek, Frýzek, 2013)

Úloha z obr. 5.15 byla pro naše žáky (ale i pro žáky v zahraničí) velmi obtížná. Vyřešilo ji jen 12,96 % žáků. Problémem s největší pravděpodobností byla schopnost vyčíst údaje z okótovaného nárysu a bokorysu tělesa. Matoucí pro žáky mohla být i přítomnost mnoha nepotřebných rozměrů. Dále bylo nutné použít Pythagorovu větu k výpočtu chybějícího rozměru obdélníku.

Na těchto dvou nákresech jsou v metrech uvedeny rozměry garáže, kterou si Jiří vybral.



Střecha garáže je vyrobena ze dvou shodných obdélníkových dílů. Vypočítej **celkový** obsah střechy. Napiš postup výpočtu.

Obr. 5.15: Úloha M01 – 05 z TIMSS 2007 (Tomášek V. a kol. , 2009)

Jiného charakteru byla úloha z TIMSS 2007, v níž měli žáci zjistit, jaký je obvod čtverce, jehož obsah je 100 čtverečných metrů. Zatímco v roce 1999 byla úspěšnost českých žáků 43,7 %, v roce 2007 klesla na 34,2 %. Nicméně byla stále ještě téměř o 6 % vyšší než mezinárodní průměr.

Dalším zdrojem informací o obtížích českých žáků je testování žáků 9. ročníků, které prováděl již zmíněný CERMAT.¹³ Např. v roce 2004 jen 39 % žáků ($n = 2\,782$) řešilo správně úlohu s výběrem odpovědi „Jaký bude výsledný objem V , smícháme-li kapaliny o objemech 3 hl a 200 dm³?“ (Lesáková, Řídká, 2006). Žáci neuměli

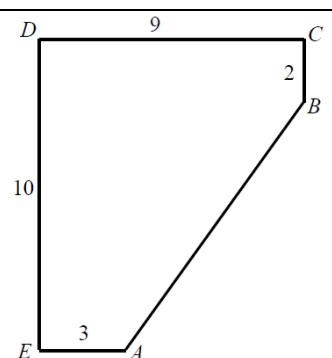
¹³ <http://www.cermat.cz/projekty-archiv-1404034774.html>

převést krychlové jednotky na litry. Závěrečná zpráva CERMATu ze stejného roku uvádí z našeho pohledu alarmující fakt, že jen 42 % žáků 9. ročníku vypočítalo obsah pravoúhlého trojúhelníku. Přesné zadání úlohy však není ve zprávě uvedeno, nevíme tedy, zda to bylo způsobeno neznalostí vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku nebo ještě jinými vlivy danými způsobem zadání úlohy.

Jedna z úloh z testování CERMATu roku 2005 se týkala výpočtu obsahu nepravidelného útvaru, pro něhož není znám vzorec, ale který lze jednoduše doplnit na známý útvar nebo rozdělit na známé útvary (obr. 5.16). Úspěšnost byla jen 31 % ($n = 10\,969$), což zřejmě poukazuje na přílišné lpění žáků na vzorcích a neschopnost využít strategii doplnění na známý útvar, na kterou úloha vede i svým zadáním („útvar vznikl odstřižením“).

Útvar na obrázku vznikl odstřižením rohu obdélníka. Čísla vyjadřují délky čar v decimetrech (dm). Najděte obsah plochy pětiúhelníku $ABCDE$.

- A) $65,5\text{ dm}^2$
- B) 66 dm^2**
- C) 74 dm^2
- D) jiná hodnota



Obr. 5.16: Úloha z testování 9. ročníku v roce 2005 (Lesáková, Řídká, 2006)

Zdrojem informací o tom, jak žáci určitých věků řeší úlohy o míře v geometrii je také testování projektu Kalibro, v rámci něhož jsou publikovány závěrečné zprávy. Z nich jsme vybrali několik souvisejících úloh.

Kalibro, 3. ročník, 2013/14

I Vybarvujeme území států. Na Česko se spotřebuje stejně barvy jako na dva čtverce.



Odhadni spotřebu barvy na Polsko.
(Na kolik čtverců se spotřebuje stejně barvy?)

Odpověď: Na Polsko se spotřebuje přibližně stejně barvy jako na _____ čtverců.



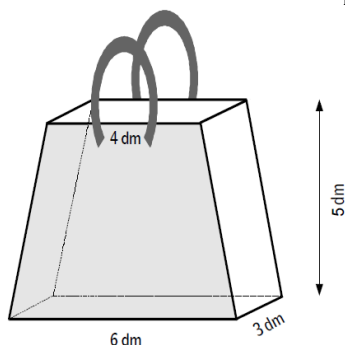
Úlohu úspěšně řešilo asi 25 % žáků ($n = 2\,279$) (správné byly výsledky 7, 8 a 9). Pětina žáků však úlohu vynechala. Botlík a Souček v závěrečné zprávě upozorňují na to, že 29 % žáků uvedlo jako výsledek 11 čtverců. To by znamenalo, že jen spočítali čtverce na mapě, do nichž Polsko výrazně zasahuje. To je v rozporu se zadáním, protože při použití této jejich logiky bychom na Česko potřebovali 3 čtverce.

Kalibro, 7. ročník, 2013/14

G úspěšnost 7

Objem tašky: 75 litrů

Vypočítej objem velké sportovní tašky.
(můžeš vyjít třeba z objemu největšího kvádru, který se do tašky celý vejde, anebo z objemu nejmenšího kvádru, do kterého se vejde celá taška bez uch; výsledek zaokrouhli na celé litry)



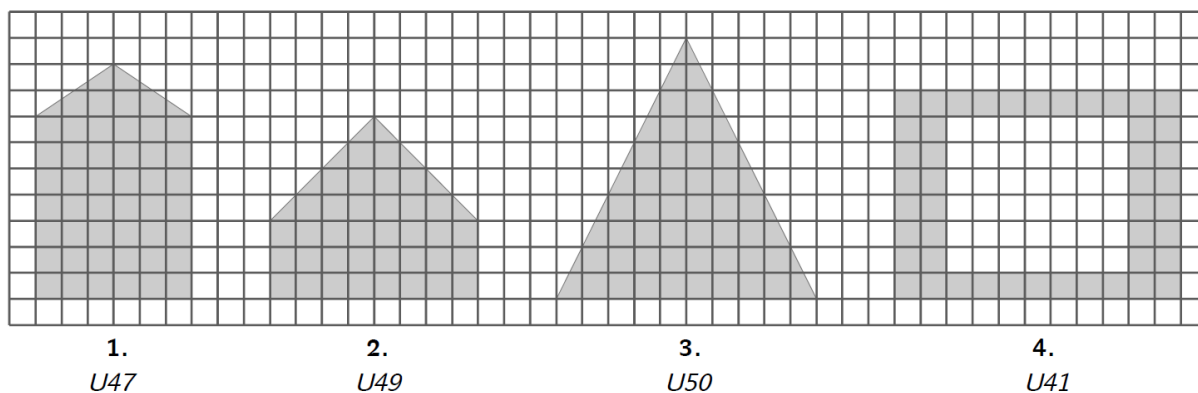
Úspěšnost je pouhých 7 %, přičemž pětina žáků úlohu vynechala ($n = 2\,210$). Nejčastější chybný výsledek 360 (7 % žáků) odpovídá součinu všech rozměrů uvedených na obrázku, tedy $4 \times 6 \times 5 \times 3$. Výsledek 72 (5 % žáků) je součinem rozměrů $4 \times 6 \times 3$, tedy žáci nevzali v úvahu výšku tašky. Výsledek 90 (5 % žáků) zase znamená, že žáci nevzali v úvahu, že se taška nahoru zužuje.

Kalibro, 5. ročník, 2014/15

G úspěšnost 57, reduk. 35

I.	II.	III.	IV.
3	1	4	2

Čtyři plochy na čtverečkováném plánu je třeba osít trávou. Seřaď je podle toho, kolik se spotřebuje travního semene: I. – plocha s největší spotřebou, ..., IV. – plocha s nejmenší spotřebou. (spotřeba travního semene na jeden čtvereček je u všech ploch stejná; zapiš do rámečku čísla všech ploch **ve správném pořadí**)



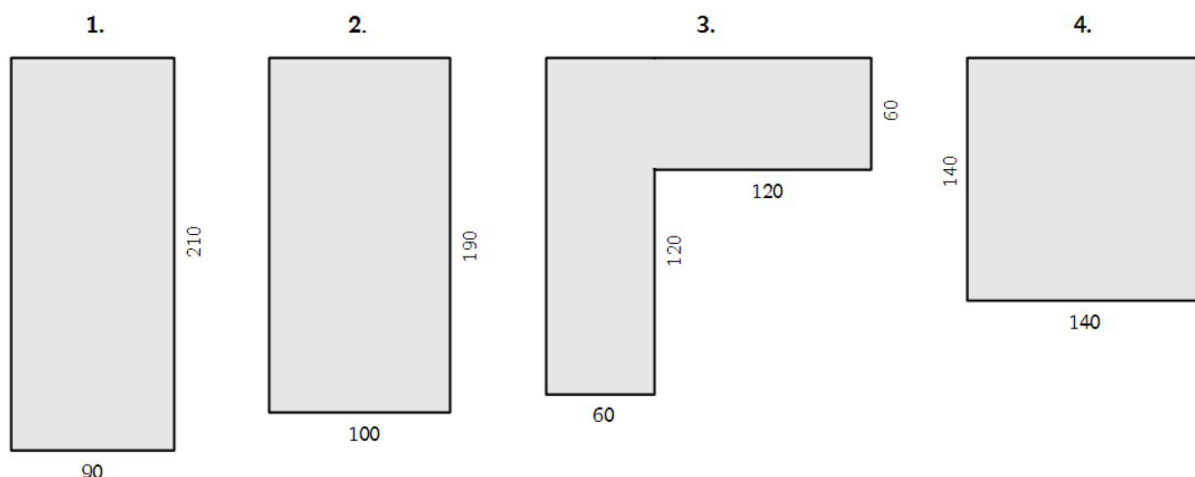
Úloha opět vypovídá o problémech žáků se zjišťováním obsahu ve čtvercové síti ($n = 4\,293$). Žáci prakticky nemusejí používat vzorce, kromě obsahu obdélníka. Redukovaná úspěšnost 35 % znamená, že pouze 35 % žáků mělo všechny výsledky správně.

Kalibro, 5. ročník, 2014/15

C úspěšnost 8

Obsah: 18 000 cm²

Švecovi mají doma několik různých kusů nábytku, na kterých se dá spát. Na obrázku jsou spolu s rozměry (v centimetrech) při pohledu shora. Jak velká (v centimetrech čtverečních) je nejmenší spací plocha? (obsah **nejmenší** spací plochy zapiš do rámečku)



Úspěšnost žáků 5. ročníku je velmi malá (8 %) ($n = 4\,293$), ovšem porovnáme-li ji s výsledky podstatně starších žáků u podobné úlohy, není nijak překvapivá. Botlík a Souček v závěrečné zprávě uvádějí, že i žáci, kteří chápali pojem obsah, „mohli podlehnout optické iluzi, že třetí „složitý“ útvar má plochu hodně velkou a není třeba se jím při porovnávání vůbec zabývat. Bez jakéhokoli výpočtu bylo díky optické iluzi dokonce možné mylně tipovat čtvercový útvar jako nejmenší, ačkoli je ve skutečnosti největší.“ Autoři dále upozorňují, že se (mylně) domnívali, že žáci 5. ročníku již znají vzorec pro obsah obdélníka, „protože se tak vyvozuje násobením“. (Ovšem podle RVP pro ZV se žáci mají setkat jen s obsahem ve čtvercové síti). Chybné výsledky však podle nich ukazují, že žáci si spíše pletou obsah a obvod – správně či špatně spočítaným obvodem jsou hodnoty 560 (11 % žáků), 280 (11 % žáků) i 360 (3 % žáků).

Poslední dvě úlohy zadané ve dvou různých ročnících jsou si podobné. Jejich úspěšnost byla malá (7. ročník: $n = 2\,093$; 9. ročník: $n = 2\,969$). Žáci mohli používat kalkulačku.

Kalibro, 7. ročník, 2014/15

F úspěšnost 16

Objem ledu: 30 m³

Obdélníkové kluziště má obsah (plochu) 1 500 m². Stejněměrná vrstva ledu je 2 cm vysoká. Jaký je celkový objem ledu na kluzišti? (výsledek zaokrouhli na celé metry krychlové)

Kalibro, 9. ročník, 2014/15

B úspěšnost 21

Výška ledu: 2 cm

Obdélníkové kluziště má obsah (plochu) 1 500 m². Je na něm celkem 30 m³ ledu. Jak je vrstva ledu vysoká? (tloušťka vrstvy ledu je na celém hřišti stejná; výsledek zaokrouhli na celé centimetry)

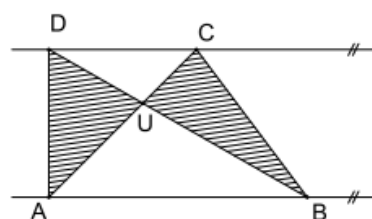
Botlík a Souček v závěrečné zprávě uvádějí, že úlohy jsou zajímavé i kvůli číslům samotným, a pokládají si otázku, jaké hodnoty obsahu kluziště a objemu ledu by asi žáci odevzdali, kdyby se jich na ně učitel zeptal bez souvislosti s tímto testem. Byl problém ve špatném použití vzorce pro objem kvádru, nebo si žáci vůbec neuvědomili, že se jedná o kvádr?

Ve variantě pro 7. ročník mezi nejčtenějšími chybné výsledky patřily chyby v řádu čísel (3 000, 300, 3, 30 000 – celková četnost 32 %), výsledek chybné úvahy (obsah plochy dělený výškou vrstvy – 7 %) a rovněž poměrně zvláštní výsledek 6 000, který je numericky čtyřnásobkem obsahu kluziště (1 % žáků). Ve variantě pro 9. ročník byl nejčtenější chybný výsledek 50 (15 % žáků), který vznikne tak, že plochu kluziště 1 500 vydělíme objemem ledu 30.

5.2.3 DALŠÍ SOUVISEJÍCÍ ÚLOHY

Nakonec se ještě podíváme na několik úloh, jejichž společným jmenovatelem je nutnost práce s pojmem obsah, aniž bychom obsah vyčíslovali. Příkladem je úloha, kterou uvádí F. Kuřina (2011) jako doklad, že žáci mají problémy s chápáním zachováním obsahu při změně tvaru útvaru. Celkem 140 žákům střední školy (ročník autor neuvádí) zadal úlohu z obr. 5.17. Úlohu vyřešilo jen 10 % žáků. Jedním z parametrů, který mohl negativně ovlivnit úspěšnost žáků, byl fakt, že nebyla zadána žádná čísla a žáci měli obsah dvou trojúhelníků jen porovnat, ne ho počítat. S tím naši žáci zkušenosti zpravidla nemají.

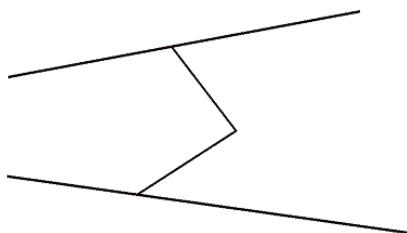
U je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB . Mají trojúhelníky ADU a BCU stejný obsah? Odpověď zdůvodněte.



Obr. 5.17: Úloha o lichoběžníku (Kuřina, 2011, s. 168)

Úloha z obrázku 5.18 pochází z jedné japonské hodiny natočené v rámci TIMSS 1999 Video Study.

Na obrázku vidíte dva pozemky. Přestavte plot, který tyto dva pozemky odděluje, tak, aby byl rovný (aby ho tvořila úsečka a ne lomená čára) a přitom se nezměnily velikosti ploch zahrad.

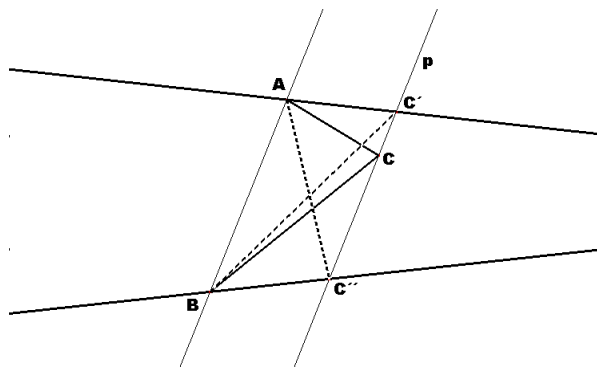


Obr. 5.18: Zadání úlohy „Ploty zahrad“

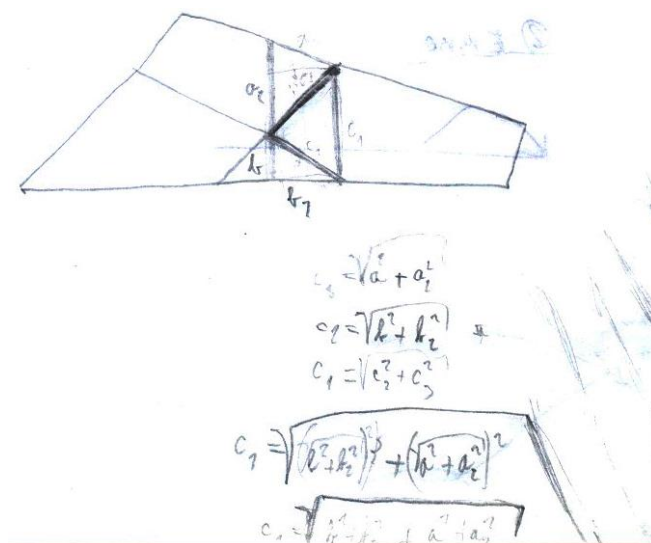
Řešení je zcela bez výpočtu a je založené na skutečnosti, že pokud se nezmění strana trojúhelníka a k ní příslušná výška, nezmění se ani obsah trojúhelníka. Řešení je na obr. 5.19. Bodem A a B vedeme přímku a s ní rovnoběžnou přímku p procházející bodem C . Vzdálenost rovnoběžek AB a p určuje výšku v_c v trojúhelníku ABC . Při libovolném posouvání bodu C po přímce p bude obsah trojúhelníku ABC zachován. Stačí tedy bod C posunout až na okraj zahrady do bodu C' nebo C'' .

Úloha je obtížná v tom, že ze zadání úlohy není nikterak zřejmé, že řešení povede právě přes trojúhelník a jeho obsah. Obtížnost pro naše žáky spočívá také v tom, že nejsou zadány žádné rozměry a že se obsah nemá počítat, ale má se s ním pracovat.

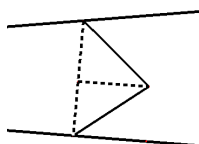
Pro úlohu nemáme k dispozici větší vzorek žáků. Jen pro zajímavost jsme zadali úlohu žákům jedné třídy 1. ročníku střední školy. Úspěšnost byla velmi malá (6 žáků z 25). Úloha žáky motivovala k využití různých výpočtů. Jedno z takových řešení je na obr. 5.20. Žáci vesměs začali tím, že si označili úsečky na obrázku číselně (změřili délky úseček), nebo pomocí proměnných a pak používali různé vzorce. Nejčastěji samozřejmě vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, ale častá byla i Pythagorova věta a Euklidovy věty. Žáci se totiž snažili do obrázku dokreslit různé trojúhelníky, zejména pravoúhlé. Nejčastější bylo vytvoření trojúhelníku a jeho rozdělení na dva pravoúhlé trojúhelníky, které je patrné z obr. 5.21.



Obr. 5.19: Řešení úlohy „Ploty zahrad“ pomocí obrázku

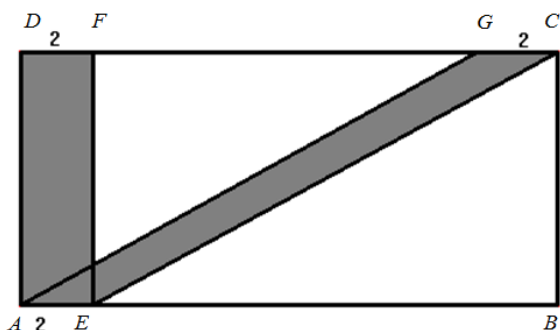


Obr. 5.20: Pokus o výpočtové řešení u úlohy Ploty zahrad



Obr. 5.21: Vytvoření pravoúhlých trojúhelníků u úlohy Ploty zahrad

Zemědělci nutně potřebují postavit cestu přes svá pole. Chtějí ale zabrat co nejmenší plochu, aby se výnosy nezmenšily. Rozhodují se mezi dvěma variantami vyznačenými na obrázku.¹⁴ Pro jakou možnost se rozhodnou? Jaká cesta zabírá nejmenší plochu pole?



Obr. 5.22: Úloha Cestička (podle Kuřina, 2006)

¹⁴ Body v zadání označeny nebyly.

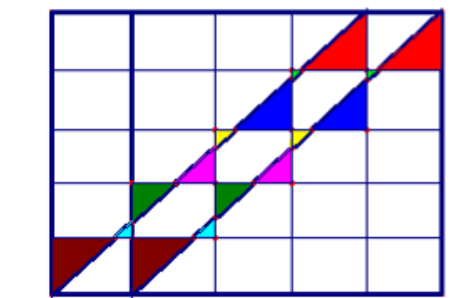
Úloha je rychle řešitelná, pokud si žáci uvědomí, že se v obou případech jedná o obsah rovnoběžníku, u něhož najdeme obsah pomocí součinu délky strany a výšky na ni. Ta je u obou stejná. Jiná možnost je zjistit shodnost tří trojúhelníků AGD , ECF a EBC . Celý obdélník se tedy skládá z jedné z cestiček a dvou shodných trojúhelníků. Tedy jinými slovy, cestička je v obou případech doplněk dvou ze tří shodných trojúhelníků do obsahu celého obdélníku. Proto tedy musí být obsahy obou cestiček shodné.

Informace o žákovských řešeních máme z disertační práce B. Divišové. Její žáci 5. ročníku osmiletého gymnázia řešili úlohu výhradně početně. Jen tři studenti znali vzorec pro výpočet obsahu kosodélníku, ostatní si kosodélník rozdělili na obdélník a dva shodné trojúhelníky. Ani jeden z žáků neřešil úlohu obecně. Žáci si zvolili konkrétní šířku i délku obdélníkového pole, neboť věděli, že plochy cest stačí jen porovnat.

Pouze jedna žákyně se nad úlohou zamyslela i geometricky. Po zjištění, že plochy cest jsou stejné, hledala i jiné možné řešení. Našla v obrázku všechny tři shodné trojúhelníky AGD , ECF a EBC a odvodila řešení: „Obsah cesty je v obou případech obsah obdélníkové louky bez dvou ze tří shodných trojúhelníků. Cesty mají tedy stejné obsahy.“

Žáci 6. ročníku základní školy řešili také úlohu zprvu výhradně početně. Dostali tedy radu, ať si zvolí délky stran obdélníkového pole. Na výpočet obsahu kosodélníku jim ale bohužel nestačil matematický aparát, a tak si výsledky spíše tipovali či k nim docházeli dosazováním čísel do různých vzorců. Na správné řešení přišli pouze dva žáci a jejich řešení se velice podobala. Rozdělili si obrázek na 25 shodných obdélníků, jak naznačuje obr. 5.23. Jeden žák použil barev stejně jako zde v obrázku. Druhý žák namísto stejných barev označil políčka stejnými čísly.

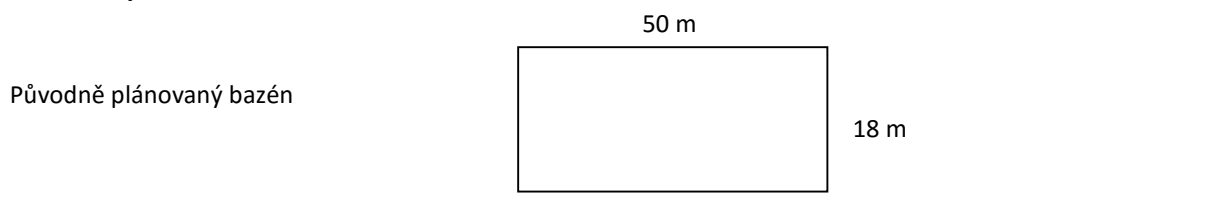
Oba žáci měli stejné argumenty. Tvrdili, že shodně obarvená či očíslovaná políčka mají i stejný obsah. Proto je možné přidat k cestě obarvené (očíslované) políčko, které leží mimo cestu. Potom se dá zjistit, že políčka v jednom řádku obrázku je možné poskládat tak, aby bylo vidět, že dohromady tvoří jeden obdélník. Šikmá cesta stejně jako kolmá cesta zabírá jeden obdélník na každém řádku. Mají tedy stejný obsah. Ještě zbývá dokázat, že stejně barevné obrazce mají opravdu stejný obsah. Oba žáci to vysvětlili spíše intuitivně.



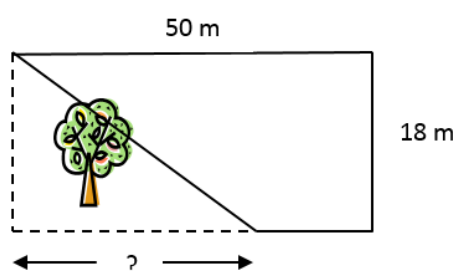
Obr. 5.23: Jedno z řešení úlohy *Cestička* žáka 6. ročníku ZŠ

5.3 DIAGNOSTICKÉ ÚLOHY POUŽITÉ V NAŠICH ROZHOVORECH

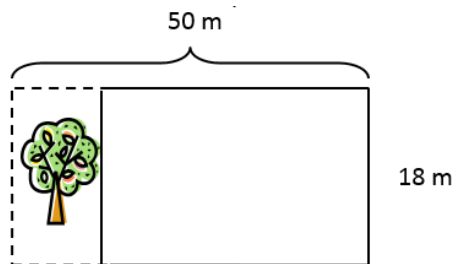
Majitel koupaliště chtěl postavit obdélníkový bazén. Poté, co začaly výkopové práce, však náhle zjistil, že bude muset snížit náklady na stavbu a provoz bazénu. Chtěl ale, aby bazén zůstal stejně hluboký, proto ho musel navrhnout jinak.



Zvažoval dvě varianty bazénů, jejichž půdorysy jsou na obrázku 1a a 1b. Hloubka bazénu je všude stejná: 160 cm. U obou variant je plocha¹⁵ dna o čtvrtinu menší, než byla plocha původně plánovaného bazénu.



Obr. 1a: Varianta 1



Obr. 1b: Varianta 2

Úloha 5.1. Jaký rozměr je reprezentován otázkou na obrázku 1a?

Úloha 5.2. K vykachličkování bazénu chce majitel použít kachličky o rozměru 10 cm x 20 cm. (Kachličky bude pokládat se zanedbatelnými spárami.) Je některá z variant bazénu výhodnější z hlediska spotřeby kachliček? Vysvětli.

Úloha 5.3a. Majitel se rozhodl vybudovat bazén s půdorysem na obrázku 1a. Zatím vykachličkoval dno a šikmou stěnu bazénu a nyní se chystá dokoupit materiál na zbylé stěny. Kolik bude potřebovat ještě kachliček na obložení ostatních stěn?

Úloha 5.3b. Majitel se rozhodl vybudovat bazén s půdorysem na obrázku 1a. Zatím vykachličkoval dno a nyní se chystá dokoupit materiál na stěny. Kolik bude potřebovat ještě kachliček?

Úloha 5.4. Majitel vždy napouští bazén 20 cm pod okraj. Kolik ušetřil vody při jednom naplnění bazénu oproti původně plánovanému bazénu? [Následovaly obrázky původně plánovaného bazénu a realizovaného bazénu z obr. 1a.]

Úloha 5.5. Po sezóně majitel potřebuje bazén vypustit a vyčistit. Bazén se vypouští čerpadly rychlostí 2 100 litrů/min. Za jak dlouho se bazén vypustí? (Odpověď zaokrouhli na minuty.)

Zadání bylo záměrně prezentováno formou reálného kontextu s cílem zjistit, do jaké míry jsou žáci schopni využít své matematické poznatky v úlohách, které nepatří mezi často užívané úlohy typu „Vypočti obsah... objem...“ apod. Reálný kontext by také mohl fungovat jako přirozený korektor, pokud žáci použijí nesprávné postupy a dostanou nereálné výsledky. Záměrně jsme volili nepravidelný tvar bazénu, aby žáci nemohli použít vzorce pro kvádr či krychli, které mohou mít uchopeny jen pamětně, ale museli je nějak modifikovat či si ve výpočtu poradit jinak.

Úlohy jsou na sebe významově navázané a umožňují zpravidla jak řešení pomocí (upravených) vzorců, tak řešení založené na představě dané situace. Např. u úlohy 5.1 si stačí uvědomit, že pokud má být obsah odříznutého trojúhelníku se stromem čtvrtinou obsahu celého obdélníku, tak povedeme-li kolmicí pravým dolním vrcholem tohoto trojúhelníku na stranu obdélníku, vznikne obdélník, který musí mít obsah poloviny obsahu velkého obdélníku. K tomu je nezbytné mít dobrou představu obsahu obdélníku rozděleného na části (poloviny, čtvrtiny), a tedy souvislosti mezi výpočtem obsahu obdélníku a trojúhelníku. I bez této představy je však možné úlohu řešit čistě výpočtem pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku. Výsledek první úlohy je 25 m.

Další důležitá okolnost spočívá v tom, že obrázek 1a není nakreslen v poměru. Obrázek má roli *ilustrace*; jedná se o náčrtek, topologické schéma doplňující zadání úlohy, které ale nemusí splňovat přesné proporce uvedené v zadání úlohy. Žáci tedy musejí využít usuzování na základě teoretických geometrických vlastností a překonat vizuální překážku – odvěsna pravoúhlého trojúhelníku je na pohled delší než polovina strany obdélníku (což je

¹⁵ Zde jsme se přiklonili k nepřesnému vyjádření, které je však ve školské matematice běžně používané.

správný výsledek). Pokud by obrázek byl v roli *objektu*, který všechny tyto proporce splňuje, žáci by mohli usoudit jen na základě vizuální podoby, že se jedná o polovinu šířky obdélníku.

Úloha 5.2 mimo jiné testuje, zda si žák uvědomuje, že rozdíl ve spotřebě kachliček mezi oběma bazény může být způsoben jedinečným obvodem jejich dna, protože plochu dna i hloubku mají bazény stejnou. Rozhodnutí ve prospěch druhé varianty bazénu může padnout i bez výpočtu délky šikmé stěny – stačí si uvědomit, že rozdíl ve spotřebě kachliček je dán rozdílem délek kosé strany a pravoúhlé strany, která je jasně kratší. Je možné, že žáci budou argumentovat, že u šikmé stěny se musí kachličky půlit podle úhlopříčky, což může být nešikovné, a tedy první varianta je lepší.

Úloha 5.3 je ve dvou variantách – pro mladší žáky, kteří ještě neprobírali Pythagorovu větu, a pro starší žáky. Výsledek pro úlohu 5.3a je 7 440 kachliček, výsledek pro úlohu 5.3b je cca 9 920 kachliček. Nebereme v úvahu spáry.

Úloha 5.4 je založena na úvaze, která ukazuje na žákovo porozumění pojmu objem, a sice že objem bazénu záleží na ploše dna a jeho hloubce. Víme-li tedy, že majitel ušetřil čtvrtinu plochy dna, musel také ušetřit čtvrtinu objemu vody původního bazénu, protože hloubka napouštěné vody měla zůstat stejná. Stačí tedy vypočítat čtvrtinu objemu celého bazénu, tedy kvádru, a tím se vyhnout pracnějšímu a na představu složitějšímu výpočtu objemu hranolu s lichoběžníkovou podstavou. Pro tento hranol nemají žáci na rozdíl od krychle a kvádru hotový vzorec. Výsledek je 315 m^3 .

Poslední úloha navazuje na předchozí – stačí vynásobit výsledek úlohy 4 třemi, převést metry krychlové na litry a vydělit průtokem. Jedná se spíše o školní úlohu. Výsledek je 450 minut, tedy 7 hodin a 30 minut.

Jako doplňkové úlohy jsme použili úlohy z TIMSS 2007 uvedené na obr. 5.4 a 5.6. Upozorníme na souvislost úlohy 5.1 a úlohy z obr. 5.6. Geometrická situace je stejná, i když se obě úlohy liší v tom, co je dáno a co se má zjistit. V úloze 5.1 je pozornost upřena na trojúhelník, zatímco v úloze z obr. 5.4 na lichoběžník. Obrázek v úloze 5.1 je v roli ilustrace, u úlohy z obr. 5.4 je v roli objektu.

Výše uvedené úlohy jsme zadávali zejména žákům 8. a 9. ročníku, přesto vykazovali některé obtíže ukazující na nedostatky v základním chápání pojmu obsah a objem.

5.4 OBTÍŽE ŽÁKŮ A JAK JIM PŘEDCHÁZET NEBO ČELIT

A) ŽÁK NEMÁ PŘEDSTAVU O POKRÝVÁNÍ ROVINY A VYPLŇOVÁNÍ PROSTORU. MÁ TEDY OBTÍŽE SE STRUKTURACÍ PROSTORU.

V rámci řešení úloh z oddílu 5.3 se u některých žáků projevilo, že nemají představu o struktuře prostoru, tedy vyplňování roviny útvary či prostoru tělesy, kterou by si měli přinést už z 1. stupně. Např. Slavomír (9. ročník) vůbec nevěděl, jak řešit úlohu 5.3. Tazatelka mu pomáhala směrem k postupnému pokrývání stěn kachličkami, ale obrázek mu musela nakonec sama načrtnout (jako obdélník). Slavomír se nejdříve snažil odhadnout na základě náčrtu, kolik řad kachliček se do stěny (obdélníka) vejde (hádal „tři“). Poté se pokusil o výpočet, v němž neprovedl převod metrů na centimetry a hlavně místo s délkou a šířkou bazénu pracoval s jeho obsahem, který postupně dělil oběma rozměry kachličky (nejdříve dvaceti centimetry, pak deseti centimetry).

Slavomír: (Počítá) ... tak vedle sebe 400 ...

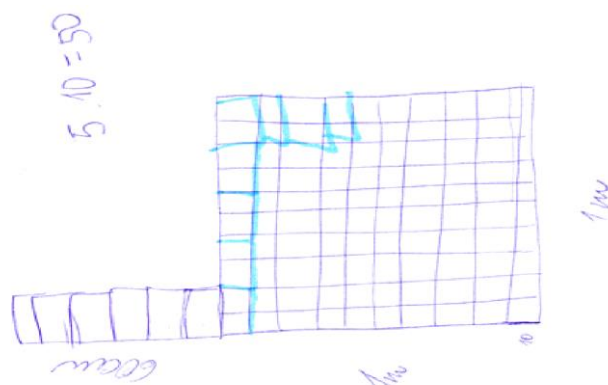
T: Na těch 50 metrů 400 ... to jsi zjistil, že si těch ...

Slavomír: Jo, tady těch 50 krát 160 děleno 20 (Počítá.) [...] Sem by se dalo 800 (ukazuje delší stranu) ... a na sebe 400 (ukazuje výšku stěny). [...]

Slavomír: (Vysvětluje, jak dostal číslo 800:) 50 krát 160 děleno 10.

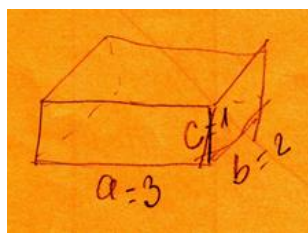
Tazatelka se pokusila Slavomírovi pomoci tím, že situaci zakreslila do čtverečkové sítě (obr. 5.24). V ní Slavomír nějaké obdélníky kachliček vyznačil (tučně obtažené obdélníky s rozměry 1×2 na obr. 5.24). S pomocí tazatelky dospěl k tomu, že v tom vyznačeném jednom metru čtverečným bude $5 \cdot 10 = 50$ kachliček (výpočet vlevo nahoře). Tazatelka dokreslila šest kachliček vlevo na obr. 5.24 s tím, že hloubka bazénu není 1 m, ale 160 cm.

Slavomír však nebyl schopen ve strukturaci jen v představě pokračovat (kachličky vlevo byly jen naznačeny), jím vytvořený výpočet vůbec neodpovídal nákresu a tazatelce se ho nepodařilo k správnému řešení přivést. Další příklady žákovských problémů se strukturací prostoru lze nalézt v *Knize*, oddíl 5.5.3, 5.5.7 (případ Tobiáš) a 5.5.8 (případ Glorie).



Obr. 5.24: Náčrtek kachliček u úlohy 5.3 pro Slavomíra

Příkladem žákyně, která neměla dobrou představu o strukturaci 3D prostoru, je Adriena z 9. ročníku (podobný případ Anny viz *Knih*a, oddíl 5.5.3). Adriena nevěděla, jak vypočítat objem kvádru. Tazatelka jí načrtla kvádr (obr. 5.25) a poskytla jí 6 krychliček, aby si situaci namodelovala. Adriena však nebyla schopna kvádr vymodelovat.



Obr. 5.25: Náčrt kvádru jako dopomoc Adrieně při výpočtu objemu kvádru



Obr. 5.26: Adrieniny pokusy vymodelovat kvádr

Po vymodelování svého prvního „kvádru“ (obr. 5.26 vlevo) Adriena nahlas spočítala, že na jednu i druhou stranu od krychle v rohu „jsou tři“ krychličky. Sama si zřejmě uvědomila, že to není dobře. Následně vytvořila těleso na prostředním obrázku. Tazatelka ji upozornila, že kvádr má mít podle náčrtku rozměry 3, 2 a 1, a Adriena odebrala jednu krychli a vytvořila těleso na obrázku vpravo. S tím už byla spokojená a popsala ho tak, že má požadovaný rozměr 3 (ukázala přitom na dvě žluté a jednu modrou krychli), 2 (ukázala na žlutou krychli v rohu a červenou krychli vlevo) a 1 (ukázala na žlutou krychli v rohu). Tazatelka se jí tedy zeptala, zda i z druhé (boční) strany má těleso rozměr 2. Nyní si už Adriena uvědomila chybu a nakonec kvádr vymodelovala. Je vidět, že Adriena neměla na základě náčrtku prostorovou představu o kvádru, jen formálně „vytvářela“ do tří směrů rozměry 3, 2 a 1. Také její „vysvětlení“ metru krychlového ukazuje na formálnost jejího chápání míry.

T: Kdybych byla třeba páťák a ty bys mi měla říct, jak vypadá, jak si můžu představit metr krychlový?
 Adriena: Hm. *Em* na třetí ... takovou tu trojku.
 T: *Em* na třetí, dobře, [...] víš co, *em* na třetí, já nerozumím jako páťák.
 Adriena: Haha. Já taky ne, já jsem ...
 T: Jak si to mám představit?
 Adriena: No, tady napíšete vysoko nad *em* ... (Tazatelka přitakává.) Takže to je ... jakoby krát 3? Jako třikrát větší než *em*?
 T: Hmm, tak dobře, a čtvereční metr?
 Adriena: To je na druhou (píše prstem do vzduchu dvojku).

Problémy s představou pokrývání roviny stejnými útvary a oddělenost výpočetní procedury obsahu obdélníku od pojmu obsah se samozřejmě projevuje nejen u českých žáků. Např. Zacharos (2006) popisuje, jak jedenáctiletí žáci řešili úlohu, v níž měli nejdříve vypočítat obsah obdélníku s rozměry 5 x 3 (obdélník byl nakreslen na papíře a u dvou jeho sousedních stran byly napsány rozměry 5 a 3). S tím neměli žáci vesměs problémy. Vedle byl nakreslen vybarvený čtverec s vyznačenými rozměry 1 x 1. Ve druhé části úlohy měli žáci říct, kolik takových čtverců se do daného obdélníku vejde. I když předtím obsah daného obdélníku vypočítali, téměř 61 % žáků na tuto otázku nedokázalo odpovědět, nebo odpověď znovu zjišťovali pomocí obrázku (např. tak, že si do obrázku kreslili čtverce a počítali je). Čtenář, učitel, může zkusit tuto jednoduchou úlohu dát svým žákům.

Doporučení: Již dříve jsme uvedli, že strukturace 2D a 3D prostoru je nezbytným (i když ne postačujícím) předpokladem pro pochopení pojmu obsah a objem. Žáci by měli řešit dostatek úloh, v nichž budou opakovaně propojovat rozdělení útvaru (tělesa) na pravidelné útvary, které tvoří jednotku obsahu (objemu), a výpočetní proceduru. Měli bychom se vyvarovat rychlého nástupu výpočtů, ať už ve formě násobení rozměrů bez představy, co oním násobením vlastně získám, nebo dokonce ve formě vzorců. Žáci totiž souvislost násobení rozměrů útvaru s obsahem zdánlivě chápou u obdélníku a teprve při probírání obsahu jiných útvarů se projeví, že výpočet mají uchopený jen formálně bez představy (viz příklady dále v textu). Modely jsou v tomto procesu důležité. Kromě předmětných modelů (2D modelů vystřižených z papír či 3D modelů) je v dnešní době možné použít různé applety, které zprostředkují zkušenost se strukturací prostoru.

B) ŽÁK MÁ TENDENCI K OKAMŽITÉMU POUŽITÍ VZORCE, JAKMILE ZJISTÍ, ŽE SE JEDNÁ O OBSAH, POVRCH NEBO OBJEM. NESNAŽÍ SE NEJDŘÍVE ZÍSKAT DO SITUACE VHLED.

Prakticky u všech úloh a u všech žáků jsme pozorovali obrovskou snahu o okamžité použití vzorce, aniž by se žáci snažili nejdříve o situaci uvažovat a udělat si představu. Jakmile žáci zjistili, že se má počítat obsah nebo objem, okamžitě začali nahlas uvažovat o podobě vzorce. V mnoha případech měli však vzorec špatně. Příkladem je Vilém (9. ročník), který zřejmě nesprávně zobecnil vzorec pro obsah obdélníku („násobí se různé rozměry útvaru“) na obsah lichoběžníku, když měl vypočítat obsah lichoběžníkového dna bazénu: „Teď bych asi si udělal obsah. [...] Dobře. *a* krát *b* krát *c* krát *d*.“ (Písmeny *a*, *b*, *c*, *d* si označil strany lichoběžníku.) Zarazil se teprve poté, když začal do svého vzorce dosazovat a vycházelo mu velké číslo. Dříve totiž našel obsah celého dna původního bazénu tvaru obdélníku, který byl mnohem menší než číslo, které mu vycházelo pro lichoběžník. Vzorec si sám nedokázal opravit. Další příklady této obtíže jsou uvedeny v *Níze*, oddíl 5.5.4 až 5.5.7.

Doporučení: Ve shodě s dalšími autory (např. Hejný, Kuřina, 2009) se domníváme, že je třeba oslabit takové způsoby výuky, v nichž se příliš brzy vyučují numerické procedury (výpočty míry v geometrii) na úkor získávání dostatečné zkušenosti s vyplňováním roviny a prostoru jednotkami (viz také obtíž 5.4a) a se zachováním obsahu. Je nutné, aby žáci získali představu o vlastnostech geometrických útvarů pomocí rozkládání útvarů na části a jejich opětovného skládání, zkoumání útvarů o stejném obsahu, skládání různých útvarů z obdélníků a trojúhelníků a hledání souvislostí mezi nimi, co se týče obsahu, apod. Bez dostatečně propracované představy struktury prostoru a zachování míry se žáci obtížně dostanou na vyšší úroveň výpočtů a tím méně na úroveň vzorců. Důležité také je, aby byli žáci (nejen) při výpočtu obsahů a objemů vedeni k tomu, aby si nejdříve udělali o situaci představu, aby ji např. zakreslili obrázkem a uvažovali o možných způsobech řešení. V tom mohou pomoci i úlohy, u nichž výpočet pomocí vzorců nevede k cíli nebo vede k cíli jen s obtížemi a u nichž mohou být žáci úspěšní i za

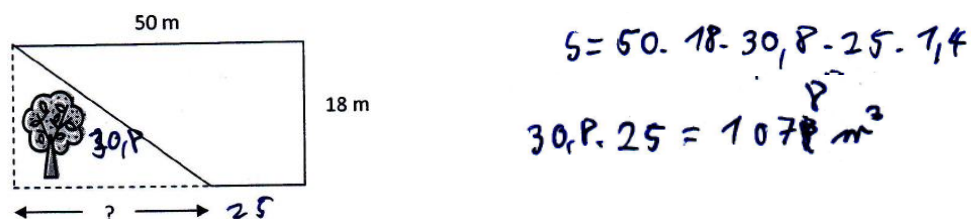
pomoci úvahy. Vhodné jsou také úlohy, kde není možné použít vzorec bez modifikace. Některé takové úlohy byly představeny v oddíle 5.2.

V neposlední řadě doporučujeme, aby učitelé ve výuce dávali (a to opakovaně) důraz na vzájemné vztahy mezi výpočtem obsahu základních útvarů či objemu u těles, přičemž důležitou roli hraje vizualizace tohoto vztahu (viz např. obr. 5.1). Je zřejmé, že přechod od konkrétní manipulace k abstraktnímu vzorci pro míru *není jednorázový*, tedy že k němu nedojde najednou a jednou provždy. Žáci by měli dostat takové úlohy, aby k tomuto přechodu docházelo opakovaně; musíme opustit představu, že stačí vzorec jednorázově „odvodit“ a dále se jeho podstatou nezabývat.

C) PŘI ZJIŠTĚNÍ, ŽE BYL POUŽIT NESPRÁVNÝ VZOREC, HLEDÁ ŽÁK NÁPRAVU POUZE KALKULATIVNĚ. NEVRACÍ SE K SITUACI POPSANÉ V ÚLOZE A NESNAŽÍ SE JÍ LÉPE POROZUMĚT.

Předpokládali jsme, že pokud žák použije špatný vzorec a vyjde mu nereálný výsledek (což si díky praktickému kontextu – stavbě bazénu – uvědomí), vrátí se k úloze a bude se snažit najít jiné řešení nebo se bude snažit vzorec opravit na základě znalosti vlastností geometrických útvarů. To se však ve většině případů nepotvrdilo. Naopak byli jsme svědky zcela jiného přístupu k opravě nesprávného řešení.

Žáci měli při zjištění, že zřejmě použili nesprávný vzorec, spíše tendence se návratu do fáze uchopování situace vyhnout a hledali nápravu čistě kalkulativním způsobem. Ilustrativním příkladem je Jiří (9. ročník), u něhož se tato tendence projevovala konsistentně v celém souboru úloh. Např. u úlohy 5.4, když hledal objem bazénu, nejdříve bez zaváhání použil správný vzorec pro objem kvádrů pro výpočet objemu původně plánovaného bazénu. Pak zjišťoval objem realizovaného bazénu s lichoběžníkovým dnem. Všechny rozměry dna i výšku vody v této chvíli už znal (viz obr. 5.27). Uvedeme záznam rozhovoru tazatele s žákem s komentářem, jak asi Jiří uvažoval a co bylo příčinou jeho chyb.



Obr. 5.27: Jiřího postupné výpočty objemu bazénu s lichoběžníkovým dnem (1,4 m je hloubka bazénu)

Jiří: Takže by to bylo ... hm ... 50 krát 18 krát 30,8 krát to 25 krát 1,4 ... tohlesco celý ???

T: Hmm.

Jiří: (Počítá a šeptá si.) ... hmm ... to je blbost. [Uvědomuje si, že zde mu vychází mnohem větší číslo než u původního bazénu tvaru kvádrů, který je však větší než realizovaný bazén.]

T: Vyšlo 970 000 ... jo?

Jiří: To je blbost. Můžu si to ...? Hm ... je to teda moc ... nebo něco takového ... že by se to ... násobilo jenom tímle tím ...ne, to je blbost ... druhéj pokus ... (počítá a šeptá si) ... [Zjevně hledá, co s čím má násobit, aby vyšlo realističtější číslo.]

T: Jo, teď násobíš jenom tu stranu 30,8 krát 25?

Jiří: Jo, to by bylo 1 076 ... což by bylo ... ono by to ... to by tak mohlo bejt, jo, jelikož to je menší, takže...

T: Je to ... je to ... řádově nám to vychází podobně, že jo ... (Jiří přitakává.) Tam nám to vycházelo 1 260 a tady 1 076 ...

Jiří: No, i když to je ... jenom o nějakých 200 ... nebo kolik to bylo metrů ... čtverečních menší ...

T: 225. (Obsah trojúhelníku se stromem.)

Jiří: 225, takže to celkem dává smysl ... těhle 200 ... zhruba menší.

Jiří dále správně vypočítal objem nerealizovaného bazénu (945 m^3), který měl tvar kvádrů a objem kvádrů Jiří počítal bezpečně. Neuvedl si však, že je divné, že u obou bazénů ušetřil jiné množství vody, když měly stejnou hloubku a stejnou plochu dna. Tazatelka se ho na to snažila navést otázkami.

T: Tak já se ptám, jestli jako ti to přijde realistický, když je ukrojená stejná část ...

Jiří: Je to právě že blbost taky ... [...] No právě, že by to mělo vycházet stejně ...

T: Hmm.

Jiří: Já ještě zkusím (počítá) ... $30,8 \text{ krát } 18 \dots 5\,000 \dots$ ne 500, aha 500 ... to je taky míň ... [Jiří setrvává na své strategii kalkulační opravy vzorce a navrhuje násobení jiných tří rozměrů. Stále mu však nevychází výsledek 945 m^3 .]

T: A ještě krát hloubka, že jo?

Jiří: Jo, jasný. Hm ... (počítá) ... $30,8 \text{ krát } 25 \text{ krát } 1,4 \dots$ to vychází stejně, já jsem teďka vypočítal ten s tím ... jasně ... hmm ... 4 ... ono to vyšlo míň než tohle ještě ...

Jiří byl zase bezradný, tazatelka se ho tedy snažila přimět, aby si představil těleso, které představuje bazén s lichoběžníkovým dnem.

T: Jak bych si mohla teda přestavit ten tvar o rozměrech $30,8 \text{ krát } 18 \text{ krát } 1,4$? (Rozměry viz obr. 5.27, $1,4 \text{ m}$ je hloubka dna.)

Jiří: To by byl ... to by bylo takhle (ukazuje jakoby U-čko) ... [...]

T: Kostka nebo kvádr?

Jiří: Kvádr (??? ale i když tady chybí 25 a ... 50 ... metrů ještě ... [Jiří se vrací ke své myšlence, že pro výpočet objemu tělesa je třeba využít všechny jeho rozměry.] [...]

T: Když se koukáme tady na ten obrázek (ukazuje), tak tady, jak sis to rozdělil, to bys to uměl... třeba ... eee ... spočít vodu v těch částech? Jako kdyby sis to takhle rozdělil. [Tazatelka se ho snaží navést na rozdělení bazénu na kvádr a hranol s trojúhelníkovou podstavou.]

Jiří: No to, to takže 25 (ukazuje) a 18. (Tazatelka přitakává.) To by vycházelo (počítá na kalkulačce) ... 630.

T: Hmm. Takže když bys to vzal po částech

Jiří: Tady to by bylo 630, myslím. Ta část. (Ukazuje na část bazénu, kde není zkosení.) .. a těch druhých $25 \text{ krát } 18 \text{ krát } 30,8$ a to by bylo zase moc. To by bylo moc velký číslo. [Jiří neumí vypočítat obsah trojúhelníku, opět využívá představu, že obsah se vypočítá vynásobením délek stran útvaru.]

Jiří si po chvíli vzpomněl, že u trojúhelníku se něco dělí dvěma, bohužel opět pracoval s nesprávnými rozměry.

Jiří: To bysme ještě museli vydělit těma dvěma. Vlastně, jo, jo jsem si vzpomněl vlastně, jak jsme to ... ještě předtím. Jo.

T: Hmm. Tak to zkus schválně, kolik nám to vyjde.

Jiří: (Počítá na kalkulačce.) 25 krát , kolik to ... $30,8 \text{ krát } 18$ rovná se ... děleno 2, 6 930.

Když ho tazatelka upozornila, že to asi nebude dobře, vynásobil Jiří jen čísla 25, 18 a 1,4 a pak vydělil dvěma. Souvislost výsledku s tvarem obou těles (hranol s lichoběžníkovou podstavou vznikne rozříznutím kvádrů) mu však unikala i přes snahu tazatelky. To potvrdil i odhadem, který provedl na konci řešení úlohy na popud tazatelky, a sice, že ušetřená část 315 m^3 je z celkového objemu $1\,260 \text{ m}^3$ jedna třetina.

Je zřejmé, že Jiří umí dobře používat vzorec pro obsah obdélníku a objem kvádrů, pokud zná jejich rozměry. Je také vidět, že ví, že objem hranolu bude záviset na obsahu podstavy a jeho výšce, ale bohužel neumí vypočítat obsah trojúhelníku. Pro trojúhelník stejně jako pro lichoběžník navrhuje násobit délky všech stran. Zdá se, že jde o nesprávné zobecnění multiplikativní struktury obsahu obdélníku na další útvary. Závěrem ještě upozorníme na fakt, že Jiří už u úlohy 5.1 neuměl najít obsah trojúhelníka a navrhoval násobit rozměry všech tří stran. Tazatelka ho po delší době dovedla ke správnému výpočtu, a to poměrně názorně pomocí doplnění na obdélník. Přesto, jak jsme právě viděli, to k nápravě Jiřího hluboce zakořeněné představy o „násobení rozměrů všech stran“ nestačilo, protože ho používal stále. Je zřejmé, že reedukace bude dlouhodobější záležitost a bude pro ni třeba

mnohem více izolovaných modelů pro obsah trojúhelníku a jeho vztahu k obsahu příslušného obdélníku či kosodélníku.

Další příklady kalkulativní nápravy vzorce jsou uvedeny v *Knize* v oddíle 5.5.5.

Doporučení: Jednou z příčin, proč žák sáhne spíše ke kalkulativní nápravě vzorce spíše než snaze získat do situace lepší vhled, může být i jeho nízká sebedůvěra v matematice. Pro takového žáka může být řešení dosazením do vzorce bezpečným řešením, protože se podle svého mínění nemůže na správnost své úvahy spolehnout (ví o sobě, že je v matematice spíše neúspěšný). Ovšem významné budou podle našeho názoru didaktické důvody. Způsob výuky, který dává velký důraz na použití vzorců, z něhož třeba žáci nabydou představ, že jen se vzorci je řešení dostatečně „matematické“, může tendenci k používání vzorců posilovat. Další doporučení viz obtíž 5.4b.

D) ŽÁK NECHÁPE PODSTATU VZORCE, MÁ HO UCHOPEN JEN PAMĚTÍ A NEDOVEDE S NÍM EFEKTIVNĚ PRACOVAT. ŽÁK NEVÍ, JAK VYPOČÍTAT OBSAH TROJÚHELNÍKU. NEUVĚDOMUJE SI VZTAH VÝPOČTU TROJÚHELNÍKU A PŘÍSLUŠNÉHO ČTYŘÚHELNÍKU (ČTVERCE, OBDÉLNÍKU, KOSODÉLNÍKU).

Příklady formálního uchopení vzorců pro míru jsme viděli už v předchozím textu. V rozhovorech jsme byli svědky mnoha situací, že ani žáci, kteří vzorec měli před sebou (vzpomněli si na něj, nebo si ho vyhledali v tabulkách), s ním neuměli pracovat. Žáci neuměli říct, který rozměr se do vzorce za co dosadí, běžně se ptali např. „který rozměr je c?“.

V souladu s výsledky u některých úloh z mezinárodních testování z oddílu 5.2.1 měli žáci všech ročníků 2. stupně problémy se vzorcem pro obsah trojúhelníka. Nevybavili si ho a ani si nedovedli pomoci tím, že pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah zjišťovali, si doplní na obdélník. Uvedeme příklad Glorie (8. ročník), která řešila úlohu A.

Glorie: (Čte zadání.). Ten vzorec, že jo? Haha. To bude tak, že se rovná ... počkat ...

T: A teď přemýšlíš o vzorci, pro který ... pro ten celý obdélník nebo ...?

Glorie: No, pro ten celý ... [...] Hmm ... to je snad 2 krát a plus b ... nebo jak to je ... haha.

T: A tak hele, koukni, kdyby si měla ten obdélník, tadydle máme 6, jo ... tak já nakreslím ... (Kreslí obr. 5.28). Raz, dva tři, čtyři, pět, šest ... si představ, že tohle je 6 cm ... a tady máme 16, jo? (Kreslí náčrtek). Tak tady máme 16 a takhle nějak ten obdélník vypadá. A obsah se měří v jakých jednotkách?

Glorie: Čtverečních.

T: Ve čtverečních ... takže když by tohle to mělo 1 cm, tak támdle ten kousek má ... to je? (Ukazuje na vybarvený centimetr čtverečný.)

Glorie: 1 cm čtvereční.

T: No, super. Tak teď snadno spočítáš ... vidíš, kolik jich je takhle ... a kolik jich je takhle ... (Ukazuje svislý a vodorovný směr.)

Glorie: 6 krát 16.

T: Hmm. Super.

Ž35: Hm ... 6 krát 16 cm a když mám tady těch 8 ... To je polovička od 16. [...]

Glorie: To bude ... hm ... třeba 6 tady to vy... odečteme tu osmičku? (Váhá.) [...]

T: To budeš mít takhle 6 a takhle 8, to bude jaká plocha ... 6 krát 8? Dokážeš mi to třeba tady na tom ukázat? 6 krát 8?

Glorie: (Váhá.) Aha ... to nebude přes to ... takhle jako ... (ukazuje na trojúhelník a na přeponu) ... haha ...

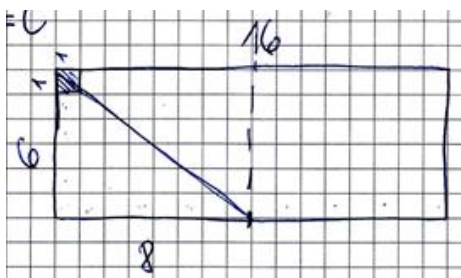
T: Protože tadydle máš, že jo ... 6 krát 16 ... to je celý obdélník. (Glorie přitakává.) Takže 6 krát 8? Je jakoby jaký tvar? (Glorie váhá.) Dohromady když si vezmeš jako 6 čtverečků na výšku třeba ...

Glorie: Jo, takhle ... taky obdélník. [...]

T: Super a odhadla bys, jak velká část je ten bílý trojúhelník vzhledem k tomu celku? (Bílým trojúhelníkem se myslí trojúhelník vyznačený na obrázku u úlohy A.)

Glorie: Jedna třetina třeba ... jako?

T: No, takhle myslím z těch 96 ... třetina, polovina.
 Glorie: Hm ... třetina asi ... no ... nebo ... nevím ...
 T: Hmm a tady ten ... dobře ... tady ten obdélník ... těch 6 krát 8 ...? (Glorie váhá.) By byla jaká část z toho celého?
 Glorie: Polovička.
 T: Polovina ... hmm ... a ten trojúhelník ... tady ten?
 Glorie: To je polovička tý polovičky.
 T: Hmm. Takže je to z celku? Když je to půlka půlky?
 Glorie: Haha ... půlka půlky, takže to je ta jedna čtvrtina teda.



Obr. 5.28: Nápopěda Glorii pro obsah obdélníku pomocí čtvercové sítě

Glorie nemá ani v 8. ročníku dobře upevněný vztah mezi strukturou jednotkových čtverců a multiplikativní operací ani reprezentaci zlomků nějakou část obdélníku, která sama není obdélníkem. Svou první odpověď „jedna třetina“ říká na základě povrchního vizuálního dojmu.

Glorie sice úlohu vyřešila, ale za pomoci velkého vedení tazatelky. K nápravě její představy o obsahu obdélníku nedošlo. To je vidět i ze situace, kdy měla v úloze 5.1, kterou řešila až po úloze A, zjišťovat obsah dna bazénu. Navrhla: „Hm ... to bude vzorec ... 50 krát 18 krát 160?“¹⁶ Následně u úlohy 5.2 při zjišťování obsahu stěny bazénu tápala ještě více. Kromě neznalosti výpočtu obsahu obdélníku u ní zřejmě scházela představa, jak vlastně stěny bazénu vypadají. Tazatelka se ji snažila pomoci modelem ve formě krabičky pomoci, ale ani pak nebyla úspěšná.

Slavomír, Jiří a Tobiáš (viz *Knihy*, oddíl 5.5.7) navrhovali pro výpočet obsahu trojúhelníku jen vynásobit délky odvěsen. Později, když měli vypočítat obsah lichoběžníku, navrhli sečíst délky jeho stran. Tobiáš a Jiří navrhovali pro obsah trojúhelníku, kde by znali všechny strany, i vzorec abc . Domníváme se, že mohlo dojít k interferenci výpočtu obvodu trojúhelníku, v němž jsou potřeba délky všech tří stran, a znalost, že u obsahu se jedná o násobení.

Příklady toho, jak žáci neumějí se vzorci pracovat a modifikovat je, jsou v *Knize* v oddíle 5.5.6, 5.5.7, 5.5.8 a 5.5.9 (a také zde v oddíle 5.4e).

Doporučení: Jak již bylo zmíněno, pro pochopení obsahu útvarů je nutné mít dobré pochopení obsahu obdélníku a souvislosti mezi obsahem obdélníku, trojúhelníku a rovnoběžníku. Toto pochopení se buduje již od 1. stupně základní školy (a na 2. stupni se dále prohlubuje). Žáci se setkávají s izolovanými modely obdélníku, v němž je zakreslena čtvercová síť, a pomocí nich si pak mají propojit násobení délek stran obdélníku se zjišťováním obsahu.

Souvislost obsahu pravoúhlého trojúhelníku a obsahu příslušného obdélníku by žákům 2. stupně měla být jasná. Předpokládali jsme, že právě tím způsobem se ve školách obsah trojúhelníku odvozuje a že s tím žáci mají bohaté zkušenosti. Ty je třeba žákům zprostředkovat. Budou-li dobře rozumět výpočtu pro obsah trojúhelníku, obsahy dalších útvarů si již dokáží odvodit.

¹⁶ Hodnoty 50 m a 18 m jsou rozměry dna původního bazénu a 160 cm je hloubka bazénu.

E) ŽÁK POUŽÍVÁ NESPRÁVNÉ VZORCE PRO VÝPOČET OBJEMU RŮZNÝCH TĚLES. JEHO PŘEDSTAVA O ZJIŠŤOVÁNÍ OBJEMU JE ZALOŽENA NA PŘEDSTAVĚ, ŽE SE „NĚJAK VYNÁSOBÍ ROZMĚRY TĚLESA“.

Objem mají někteří žáci uchopen pro kvádr jako součin tří délek, ne obecněji jako pro hranol, tedy součin obsahu podstavy a velikosti výšky tělesa. Objemu se v našich rozhovorech týkala úloha 5.4 a úloha B. Pro úlohu 5.4 převládala u žáků výpočtová strategie nad úvahou. Většina žáků vypočítala postupně objemy obou bazénů a odečetla je. Projevila se snaha okamžitě začít počítat podle vzorce, bez nějakých úvodních úvah (viz oddíl 5.4.b). Jen někteří žáci počítali čtvrtinu z objemu původního bazénu. U některých však nebylo jasné, zda si uvědomují, proč to musí platit – že tedy na hloubce nezáleží, protože je u obou variant stejná, a že jde jen o plochu dna. A ta se liší o čtvrtinu. Žáci mohli odpovídat pouze intuitivně, protože se v úloze čtvrtina vyskytovala.

Příklady nesprávného porozumění objemu jsme narazili u řady žáků. Uvedeme příklad Glorie, která nejdřív navrhla počítat objem původního bazénu tak, že se vynásobí hloubka (140 cm) obvodem dna, tedy $140 \cdot (50 + 18 + 50 + 18)$.

Glorie: Takže ... 140 krát 50 ... plus 18 ... plus 50.

T: Tak koukni, teďkon spočítáme objem, že jo?

Glorie: No.

T: Tady si připomeň, jak si počítala tu krabičku ... objem ...

Glorie: A krát b krát c .

T451: Hmmm. A krát b krát c . [...]

Glorie: No. Takže to je 50 krát 18 ...

T: Krát?

Glorie: 140.

T: A pozor na jednotky.

Glorie: Centimetrů ... takže 1,4 ... (Píše a počítá na kalkulačce.) ... 1 260 metrů (Glorie napsala správně napsala m^3).

T: Hmm. Super. Metrů krychlových. Bezvadný. Tak ... a co s tímhle tím bazénem? Když je to ukousnutý.

Glorie: 25 krát 18 mínus 120 ... 1 260? (1 260 je výsledek předchozího výpočtu.)

Vypadá to, jakoby první součin analogicky odpovídal výpočtu pro objem kvádrů jen s tím rozdílem, že místo čísla 50 vzala Glorie 25 (délku jedné základny lichoběžníku). Nevíme však, proč chtěla odečíst objem celého bazénu.

T: 25 krát 18 ... to bys spočetla obsah obdélníku ... jako obsah části dna.

Glorie: Hm ... tak $25 \cdot 30,8 \cdot 18$... (30,8 m je délka přepony trojúhelníku, tedy druhého ramene lichoběžníku.)

T: Tak ještě jednou se podíváme tady na ten vlastně model, že jo? Tady když jsme počítaly obsah ... vzoreček 'strana krát strana' ... to je vlastně obsah toho dna, jsme dostaly, a krát výška. (Ukazuje na krabičku a Glorie přitakává.) Jo? Ale teď nemáme to dno úplně celý. Teď nám tady kus chybí. Když si to představíš, jako kdyby byl ten bazén takhle ... (Ukazuje na krabičku, jak je bazén oříznutý.) [...]

Glorie: Takže ... to by bylo $30,8 \cdot 18 \cdot 50$? (Opět chce násobit jiné tři rozměry lichoběžníku.)

Glorie se vlastně snažila počítat objem hranolu s lichoběžníkovou podstavou tak, jak s dopomocí počítala objem u kvádrů, tedy násobením rozměrů. Zjevně neměla představu objemu jako součinu obsahu podstavy a výšky.

Objemem se zabývala také úloha B, v níž měli žáci ještě vyčíst ze sítě kvádrů rozměry. Teprve při analýze žakovských řešeních jsme si uvědomili, že úloha není dobře formulovaná. K jejímu úspěšnému řešení stačilo použít i strategii, kdy si žáci řeknou, že prostě najdou tři odlišné hodnoty (protože ty pro objem kvádrů potřebují) a ty mezi sebou vynásobí. Příkladem je již zmíněná Glorie. Může to vést i k formálnímu použití vzorce. Jiří v následující ukázce hledá čísla na obrázku a snaží se na řešení „logicky“ přijít, aniž by si musel vytvářet představu

prostorové situace. Na druhou stranu je zřejmé, že si uvědomuje souvislost krychlových jednotek a nutností násobit tři čísla.

Jiří: Hm, takže to bude... tam je teda (ukazuje si na obrázek u úlohy B) třikrát dvojka.

T: Hmm.

Jiří: Třikrát dva. To je blbost teda, že by to bylo 6. Tak to bude ... Objem, takže kry, krychlových. Jo, takže to bude 5 krát 3 krát 2.

Doporučení: Doporučení je obdobné jako nahoře, protože se stále jedná vesměs o problém přílišného spoléhání na dosazování do vzorce. Žáci by se měli setkávat s příklady strukturace prostoru. Měli by mít zkušenost se skládáním těles z jiných těles a rozkladem těles na další tělesa. Předmětné modely jsou nezbytným předpokladem pro vytvoření představy této strukturace. Pojem objem by se měl budovat obecněji jako míra, která pro hranatá tělesa závisí na obsahu podstavy a výšce, než jako číslo, které vyjde, máme-li k dispozici pro dané těleso vzorec. Vhodné také je, aby žáci zjišťovali objem i u těles, pro něž neexistuje jednoduchý vzorec, resp. nemají ho naučený a musejí svůj stávající vzorec nějak modifikovat. Např. hledání objemu kvádru, z něhož je část vyjmuta, nebo objemu krychlových těles (těles sestavených z krychlí). Flexibilnější představu o tom, co je objem, žák získá také, bude-li mít k dispozici tělesa, která může plnit pískem nebo vodou a různým přeléváním bude zjišťovat, jaké jsou vztahy mezi jejich objemy.

6. SLOVNÍ ÚLOHY

Jak bylo řečeno v kap. 2, učitelé obou stupňů škol uváděli jako problematické právě slovní úlohy. Slovní úlohou zde budeme myslet aritmetickou úlohu, která je formulována slovy (tedy nikoliv pomocí matematických symbolů) a vyžaduje od řešitele odpověď na položenou otázku či otázky¹⁷. Její kontext přitom nemusí být nutně vázán na realitu, může vybízet k řešení problému čistě matematického charakteru¹⁸. Slovní úlohy jsou jedním ze základních stavebních kamenů matematiky na 1. stupni základní školy. Ukazuje se však také, že jsou současně i kamenem úrazu.

6.1 RVP PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání se slovní spojení „slovní úlohy“ vyskytuje pouze v souvislosti s nestandardními aplikačními úlohami a problémy:

M-5-4-01 (Žák) řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.

Zaměříme-li se důkladněji na formulace cílů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, nalezneme opakovaně požadavek na „používání matematiky v reálných situacích“, „praktickém životě“ či dokonce schopnost „matematizovat reálnou situaci“. Není zde sice explicitně řečeno, že vhodným prostředkem k naplnění těchto cílů mohou být právě slovní úlohy, ovšem předpokládá se, že k tomu slovní úlohy v našem kurikulu slouží.

Z běžné školské praxe a např. i rozložení učiva v učebnicích a ve školních vzdělávacích programech vyplývá, že slovní úlohy jsou mnohými vnímány jako specifické „učivo“ matematiky základní školy. Učitelé se často vyjadřují v tom smyslu, že slovní úlohy slouží k procvičení nově probrané látky. Tomu odpovídá i běžná praxe v našich školách – slovní úlohy zařazuje učitel do výuky v okamžiku, kdy žáci proberou určitou oblast, např. sčítání desetinných čísel. Hlavním cílem řešení těchto úloh je procvičit a upevnit znalosti o desetinných číslech. Takové vnímání slovních úloh považujeme za zúžené, slovní úlohy mohou velice dobře posloužit například i k otevření určitého matematického učiva, konkrétního problému či jako motivační prvek nebo diagnostický nástroj.

6.2 ÚLOHY, KTERÉ PŮSOBÍ ČESKÝM ŽÁKŮM PROBLÉMY

Protože jsme obtíže českých žáků při řešení slovních úloh zkoumali pouze u žáků 1. stupně, omezíme se v tomto oddíle na úlohy určené pro tento stupeň školy.

V mezinárodních srovnávacích výzkumech se slovní úlohy objevují poměrně hojně, a jsou tedy pro nás vhodným zdrojem pro zjišťování obtíží českých žáků.

Mezi testovacími úlohami TIMSS 2011 pro žáky 4. ročníku byla zařazena slovní úloha, kterou neměli žáci řešit numericky, ale pouze vybrat, který z navrhovaných postupů by je dovedl ke správnému řešení.

Úloha M6 (TIMSS 2011): Šest set knih musí být zabaleno do krabic, do každé z nich se vejde 15 knih. Kterým výpočtem zjistíš počet krabic, které na zabalení knih potřebuješ?

A) Přičti 15 k 600. B) Odečti 15 od 600. C) Vynásob 600 číslem 15. D) Vyděl 600 číslem 15.

Jednalo se o úlohu, ve které měli žáci prokázat, jak umí matematizovat reálnou situaci a zda rozumí operaci dělení. Úspěšně si s úlohou poradilo 52,7 % českých žáků (jen asi o 2 % méně než mezinárodní průměr; stejný výsledek měli žáci i v roce 2007). Větší potíže měli naši i zahraniční žáci s úlohou M17 (TIMSS 2007).

Úloha M17 (TIMSS 2007): Otec vzal své tři děti na výstavu. Lístky pro dospělé stály dvakrát více než pro děti. Otec zaplatil za 4 lístky celkem 50 zedů. Kolik zedů stál jeden dětský lístek? Napiš postup výpočtu.

¹⁷ Zde jsme inspirováni vymezeními Vyšina a Kuřiny, viz *Kniha*, oddíl 2.1.1.

¹⁸ Takovou úlohou je například úloha: Myslím si číslo, když od jeho poloviny odečtu jeho třetinu, dostanu číslo 5. Jaké číslo si myslím? Ovšem těmito úlohami se v tomto textu nezabýváme.

Úlohu numericky správně a s dobře zapsaným postupem výpočtu vyřešilo jen 8,5 % českých žáků (mezinárodní průměr činil 11,7 %). Ovšem dalších 17,3 % českých žáků došlo ke správnému výsledku, ale nezaznamenalo správně postup. Za povšimnutí stojí také fakt, že 25,6 % žáků se o řešení úlohy vůbec nepokoušelo. V úloze se očekávalo řešení úvahou – stojí-li lístek pro dospělého dvakrát tolik, kolik stojí lístek pro dítě, pak je vstupné pro tři děti a jednu dospělou osobu stejné jako vstupné pro 5 dětí.

Největší potíže měli naši žáci s úlohami (i slovními), kde se objevovaly zlomky. V nich dosahovali někdy až třikrát horšího výsledku než mezinárodní průměr. Důvodem je nejspíše naše kurikulum, ve kterém na nějakou dobu zlomky z 1. stupně zcela vypadly.¹⁹

Zaměříme-li pozornost na podobné výzkumy u nás, můžeme využít výsledky testování provedené v rámci projektu Kalibro.

Úloha A z varianty A pro 3. ročník (2013/14): Kubíčkovi mají kočku Tlapku. Odhadují, že utratí za její žrádlo 10 Kč denně. Kolik stojí žrádlo pro Tlapku za osm týdnů?

Úspěšnost v této úloze byla překvapivě nízká (pouze 33 %), druhou nejčastější odpovědí (téměř 30 %) bylo 80 Kč, k čemuž žáci dospěli výpočtem $8 \cdot 10$, tedy pravděpodobně použili částku 10 Kč jako cenu žrádla na jeden týden. Buď si zadání nečetli pečlivě a zaměnili den za týden, nebo chybovali v řetězení početních operací v důsledku přítomnosti skrytého číselného údaje ve slově týden.

Další úloha ze stejného testu se týkala porovnání. Jednalo se o sadu úloh/otázek vztahujících se k tabulce (viz obr. 6.1). Úkolem žáků bylo například vyčíst z tabulky, kolik hochů je vysokých 135 cm a méně (ovál představuje hoch, obdélníkový tvar dívku), nebo o kolik více je ve třídě dětí, které měří 131 až 135 cm, než těch, které měří méně než 126 cm²⁰. Další otázky vyžadovaly také slovní odůvodnění, jaké údaje tabulka může poskytovat a jestli a jak by se změnila, kdyby žáci prováděli měření za rok. Úspěšnost celé série těchto úloh byla poměrně vysoká (47 %), ovšem správně na všechny položky odpovědělo pouze 19 % žáků.

J Děti z jedné třetí třídy se změřily. Potom si v učebně pověsily tabulku s tím, co zjistily: úspěšnost 47, reduk. 19

více než 135 cm									
131 cm až 135 cm									
126 cm až 130 cm									
méně než 126 cm									

Obr. 6.1: Tabulka k úloze z testování Kalibro 2013/14 pro 3. ročník

V letech 2006 a 2007 provedl CERMAT rozsáhlejší testování dovedností v matematice u žáků 5. ročníků. Z testování v roce 2006, kterého se zúčastnilo celkem 8 804 žáků, vyplynuly dva hlavní závěry – žáci mají značné potíže s chápáním slovních spojení „kolikrát více/méně“. Autoři testu sice připouštějí, že určité procento žáků chybovalo v důsledku nedbalého čtení (zaměnili za „o kolik více/méně“), ale propad byl tak velký, že je třeba hledat možné příčiny i jinde. Autoři rovněž poukazují na celkovou chabou dovednost žáků vyjadřovat se, formulovat závěry svými vlastními slovy a vnímat skutečný obsah čteného textu (žáci měli v testování odpovídat celou větou). Výsledky testování z roku 2007 ukazují, že většina žáků nemá problémy s početními algoritmy,

¹⁹ Do RVP pro základní vzdělávání se vrátili opět v září 2013.

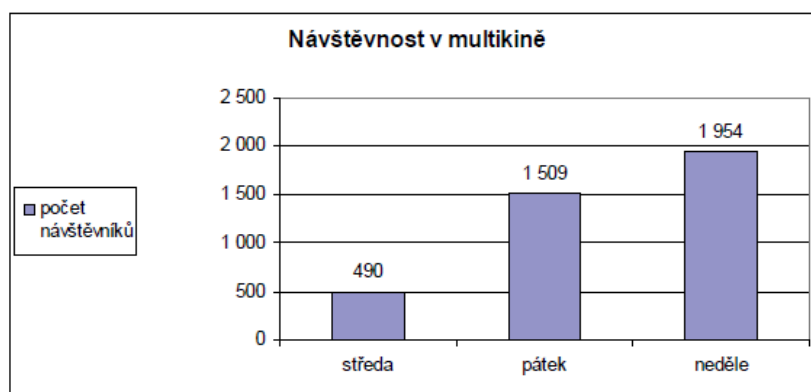
²⁰ Přesné znění úlohy: Děti, které měří 131 cm až 135 cm, je ve třídě víc než dětí, které měří méně než 126 cm. O kolik?

dokud nejsou úlohy formulovány slovně. Doslovně je uvedeno, že „žáci jsou zvyklí pracovat s čísly převážně jen podle naučených či uvedených vzorců. U slovních úloh se žáci nedokáží zorientovat a správně vybrat vhodnou početní operaci či posloupnost operací.“ (CERMAT, 2007a, s. 26)

Vynecháme-li geometrické úlohy, pak nejproblematičtější se ukázala být úloha 7 z testování CERMATu z roku 2006,²¹ kterou dobře vyřešilo pouze 21,9 % procent žáků ve variantě A (18,0 % ve variantě B). Žáci měli na základě informací z grafu zjistit „přibližně kolikrát méně bylo návštěvníků ve středu než v neděli“ (viz obr. 6.2). Problém se čtením grafu můžeme prakticky vyloučit, neboť téhož grafu se týkala i úloha 5 („o kolik méně bylo návštěvníků v pátek než v neděli“), ve které byli žáci naopak velmi úspěšní (77,7%). Problém tedy pravděpodobně spočíval v rozdílu mezi „kolikrát méně“ a „o kolik méně“.

TEXT K ÚLOHÁM 5 až 7

Graf znázorňuje počet diváků, kteří se během uvedených tří dnů přišli podívat do pražských kin na film Harry Potter a Ohnivý pohár.



Obr. 6.2: Úloha z testování 5. ročníků (CERMAT, 2006)

6.3 DIAGNOSTICKÉ ÚLOHY POUŽITÉ V NAŠICH ROZHOVORECH S KOMENTÁŘEM

V tab. 6.1 uvádíme všechny úlohy, s kterými jsme v našem výzkumu pracovali, spolu se stručným didakticko-matematickým komentářem a správným řešením.²² Pro naše účely jsme vytvářeli úlohy podobné klasickým, například těm z učebnic nakladatelství Alter, protože se jedná o nejčastěji používanou řadu učebnic matematiky pro 1. stupeň u nás (soudě na základě výsledků online dotazníku pro učitele zmíněného v úvodu této knihy). Doplnili jsme je o úlohy méně standardní, zejména o úlohy s antisignálem a operátorové úlohy (vysvětlení bude uvedeno níže v textu), se kterými se naši žáci běžně nesetkávají (jak vyplývá z analýzy M. Ptakové (2010) a rovněž z diplomové práce P. Weinzettel (2014)). Při tvorbě úloh jsme se snažili o rozmanitost situačního kontextu úloh a o různou náročnost v rámci jedné série úloh, dále jsme u úloh měnili použité aritmetické operace, počet kroků nutných k jejich řešení, roli, v jaké se čísla v úloze nacházejí, apod. Zařadili jsme také úlohu s nadbytečnými údaji (3/5) a úlohy nejednoznačné, jejichž řešení je závislé na žákově interpretaci zadání (2/5 a 3/4). Každá úloha je uvedena kódem: ročník (pokud je tam např. číslo 1, znamená to, že úloha je určena pro žáky s dokončeným 1. ročníkem), lomeno číslo úlohy.

	Charakteristika úlohy	Řešení
1/1	Na stole leželo 15 koláčů. Sedm jich bylo tvarohových, ostatní makové. Kolik koláčů bylo makových?	15 – 7 = 8 (koláčů)
	jednoduchá úloha na odčítání nebo dočítání, přechod přes desítku, žáci by mohli mít potíže s heterogenitou objektů – tvarohové x makové koláče, jedno z čísel zadáno slovem	

²¹ <http://www.cermat.cz/ukazky-testu-1404034151.html>

²² K úloze uvádíme vždy pouze jeden z možných řešitelských postupů. Žáci mohou provádět jednotlivé kroky v jiném pořadí, s větším počtem mezivýsledků apod. Výsledek úlohy je v tabulce vyznačen tučně.

1/2	Ivanka dostala k narozeninám 3 nové obrázkové knížky. Spočítala si, že teď už má 12 obrázkových knížek. Kolik knížek měla před narozeninami?	
	složitější úloha na odčítání, obsahuje antisignál „dostala“, přechod přes desítku, odehrává se ve dvou časech (minulost, přítomnost)	$12 - 3 = 9$ (knížek)
1/3	Na hřišti si hrálo několik dětí. Aleš pozoroval, že v jedné chvíli pět dětí přišlo a dvě děti odešly. Bylo pak na hřišti více, nebo méně dětí? O kolik?	
	složitá úloha na odčítání, operátorová úloha – neznáme počáteční stav, zadání obsahuje dvě otázky, neobsahuje žádnou číslici	více dětí $5 - 2 = 3$ (dětí)
1/4	Tomáš zjistil, že je o 5 cm větší než Mirek, ale o 2 cm menší než Lenka. Kdo je nejmenší a kdo je největší?	
	složitá operátorová úloha, ve které neznáme počáteční stav, náročná by mohla být také přítomností veličiny (cm)	nejmenší je Mirek, největší Lenka
1/5	Fotbalisté z Dolní Lhoty hráli letos 15 zápasů. Sedm zápasů vyhráli, čtyři prohráli a zbytek byl nerozhodně. Kolik zápasů hráli nerozhodně?	
	složená slovní úloha: je třeba více než jedné početní operace, pro některé řešitele může mít slovo „vyhráli“ antisignální povahu („je třeba sčítat $15 + 7$ “), bez znalosti kontextu možná obtížně řešitelná	$15 - 7 - 4 = 4$ (zápasy)
1/6	Na prázdné parkoviště před dům přijelo v sobotu 8 aut, v neděli o 4 auta více než v sobotu. Kolik aut stálo na parkovišti, když žádné auto neodjelo?	
	složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních úkonů, obsahuje operátor porovnání „o 4 auta více“	$8 + (8 + 4) = 20$ (aut)
2/1	Sportovní soutěže v atletice se zúčastnilo 24 chlapců a 13 děvčat. Kolik dětí se zúčastnilo soutěže v atletice?	
	tradiční úloha na sčítání, heterogenní skupina objektů (dívky, chlapci, děti), dětem dobře známá situace	$24 + 13 = 37$ (dětí)
2/2	Maruška měla v knihovničce 47 knížek. Jednu knížku půjčila Aničce, jednu Ivance a jednu Markétce. Sama má jednu rozečtenou knížku v aktovce. Kolik knížek má ve své knihovničce nyní?	
	mohla by se považovat za složenou úlohu, opakované odčítání jedné, čísla zadána slovy, slovní spojení „má rozečtenou“ by pro některé mohlo být signálem k přičítání (tedy antisignál) ²³	$47 - 1 - 1 - 1 - 1 = 43$ (knížek)
2/3	Turistického výletu se zúčastnilo 28 členů turistického oddílu a 23 dalších účastníků z řad rodičů a kamarádů. Kolik osob se zúčastnilo turistického výletu?	
	jednoduchá úloha na sčítání, heterogenní skupina objektů (členové, účastníci, osoby), přechod přes desítku	$28 + 23 = 51$ (osob)
2/4	Do světového poháru horských kol nastoupilo 42 závodníků, ale 7 z nich mělo na trati neopravitelný defekt. Kolik závodníků dokončilo závod?	
	jednoduchá úloha na odčítání, obsahuje cizí slovo „defekt“, pro žáky pravděpodobně neznámé	$42 - 7 = 35$ (závodníků)
2/5	Kouzelná rostlina Papoldea v červnu měřila o 9 cm víc než v lednu, ale o 7 cm méně než v prosinci. O kolik centimetrů povyroستla Papoldea během kalendářního roku? ²⁴	
	„operátorová úloha“, podobná úloze 1/4, numericky jednoduchá, ovšem náročná na porozumění, tři časové údaje (leden, červen,	$9 + 7 = 16$ (cm)

²³ Slovní vyjádření „půjčit knížku“ je významově v jiné hladině než „mít rozečtenou knížku“, které na rozdíl od prvního obratu nemusí v daném kontextu vyvolat představu o úbytku knih. Že je třeba i tuto knihu odečíst, se řešitel dozví až z otázky, která specifikuje, že je třeba zjistit počet knih v knihovně, nikoliv počet knih, které má Maruška.

²⁴ V úloze je zamlčený předpoklad, že se jedná o měsíce stejného roku. Vzhledem k tomu, že úloha nebyla zadávána v rámci testu, ale při rozhovoru, předpokládali jsme, že se kolem této okolnosti může rozvinout diskuse, při níž se význam vyjasní a z níž bude zřejmé, do jaké míry si žák snaží situaci představit.

	prosinec), všechna čísla v roli operátorů včetně hledaného výsledku, v úloze je antisignál „měřila víc“ a „méně než“, obsahuje neznámé slovo „Papoldea“, pro některé by mohlo být nesrozumitelné sloveso „povyrostla“	
2/6	Házenkářky TJ Sokol prohrály svůj zápas 29:31, přestože první poločas vyhrály 15:12. Jak dopadl druhý poločas? Kolik branek ve druhém poločase daly a kolik dostaly? náročná úloha vyžadující znalost kontextu, zejména způsob zápisu výsledku zápasů, složená úloha na odčítání, neklade nároky na řetězení, ale výběr správných dvojic čísel, možné neporozumění slovu „poločas“, přechod přes desítku	$29 - 15 = 14$ $31 - 12 = 19$ 14 : 19
2/7	Zuzanka v neděli večer počítala peníze. Zjistila, že má v pokladničce 67 korun. Odpoledne si koupila za 14 korun zmrzlinu a za 19 korun limonádu. Po obědě jí dědeček přidal ještě dvacetikorunu. Kolik měla Zuzanka našetřeno v pokladničce v neděli ráno? úloha s antisignálními slovy „koupila“ a „přidal“, přechod přes desítku, řetězení početních operací, odehrává se v několika časech (večer, odpoledne, ráno) jedno číslo zadáno slovy	$67 + 14 + 19 - 20 = \mathbf{80}$ (Kč)
2/8	Lyžařského zájezdu se zúčastnilo 19 lyžařů. Kabinka má sedačky pro čtyři lyžaře. Kolik plných kabinek obsadili? Kolik lyžařů jelo v kabině, která nebyla úplně obsazena? úloha na dělení či postupné odčítání (závisí na znalostech řešitele), číslo zadané slovem, dvě otázky – druhá z nich se ptá na zbytek při dělení	$19 : 4 = \mathbf{4}$ (plné kabinky) $19 - 16 = \mathbf{3}$ (lyžaři)
2/9	Děti v odpolední družině vyráběly společný plakát s pampeliškami a fialkami. Každé dítě nalepilo na plakát tři pampelišky a čtyři fialky. Kolik květin měly děti na plakátu, když jich dnes bylo v odpolední družině jen 12? úloha řešitelná násobením či opakovaným sčítáním, některá čísla zadána slovy, heterogenní skupina objektů (pampelišky, fialky, květiny)	$(3 + 4) \cdot 12 = \mathbf{84}$ (květin)
3/1	Anička koupila sýr za 17 Kč a pět housek po 3 Kč. Platila padesátikorunou. Kolik korun jí vrátila paní prodavačka? tradiční složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních operací, kromě dělení jsou nutné všechny základní početní operace, jedno z čísel zadáno slovně	$50 - (17 + 5 \cdot 3) = \mathbf{18}$ (Kč)
3/2	V automobilce Škoda vyrobili v pátek 87 automobilů. Ve středu o 18 více než v pátek a v pondělí o 16 méně než ve středu. Kolik vozů vyrobili v pondělí? složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních úkonů, obsahuje tři různé časové údaje (pátek, středa, pondělí)	$87 + 18 - 16 = \mathbf{89}$ (vozů)
3/3	Čtyři kamarádi dostali společně sáček s bonbony. Rozdělili si jej tak, že každý dostal 7 bonbonů a 3 jim v sáčku zůstaly. Kolik bonbonů bylo celkem v sáčku? složená úloha o dělení se zbytkem, ovšem pro vyřešení je nutno uvažovat obráceně, tedy násobit a následně sčítat, slovo „rozdělili“ může pro někoho být antisignálem (pokynem k dělení $7 : 3$), číslo 4 zadáno slovem	$7 \cdot 4 + 3 = \mathbf{31}$ (bonbonů)
3/4	V autě je nádrž, do které se vejde 40 litrů benzínu. Tatínek cestoval do práce a cestou spotřeboval 2 litry benzínu. Odpoledne natankoval 29 litrů a tím byla nádrž naprosto plná. Kolik litrů benzínu měl v nádrži před cestou do práce? ²⁵ náročná složená úloha s dvěma antisignály („spotřeboval“, „natankoval“), čísla vystupují jako veličiny (litry), odehrává se ve	$40 - 29 + 2 = \mathbf{13}$ (l)

²⁵ V této úloze je zamlčený předpoklad, že tatínek jel do práce ráno a zpět se vracel odpoledne.

	dvou různých časech, kontext pravděpodobně mimo zkušenost žáků, zadání připouští různé interpretace (natankoval odpoledne téhož nebo jiného dne?)	
3/5	Autobusová linka č. 193 přijela na zastávku Nuselská radnice, kde čekalo 5 cestujících. Nejprve několik cestujících vystoupilo a pak tři cestující nastoupili. Na zastávce Palouček vystoupilo 5 cestujících a nastoupil pouze jeden. V autobuse teď sedělo 13 cestujících. Kolik jich na zastávce Nuselská radnice vystoupilo, když tam přijelo 18 cestujících?	
	náročná složená úloha s antisignálem (opět jen pro některé řešitele), obsahuje dva nadbytečné údaje (193 a „5 cestujících“), některá čísla jsou zadána slovem, počáteční stav je neznámý	$18 - x + 3 - 5 + 1 = 13$ $x = 4$ cestujících
3/6	Studenti Zuzana a Petr pracují jako brigádníci v supermarketu Zlatý důl. Zuzana obdrží každý večer 800 Kč a Petr 900 Kč. Zuzana si koupila za čtvrtinu svého denního platu tričko, Petr za třetinu svého platu kopací míč. Komu zbyla větší suma na další útratu a o kolik?	
	složená úloha se zlomky, některá čísla zadána slovem (čtvrtina, třetina), porovnání	oběma zbylo stejně $3/4 \cdot 800 = 600$ $2/3 \cdot 900 = 600$
4/1	Tři kamarádi jeli na výlet, nejprve vlakem, pak autobusem. Za jízdenku na vlak zaplatil každý 18 Kč, za jízdenku na autobus 23 Kč. Kolik korun zaplatili celkem za jízdenky?	
	tradiční složená slovní úloha, kontext ve zkušenostech žáků, obsahuje veličiny (Kč), jedno z čísel zadáno slovem, vyžaduje správné řetězení početních operací (sčítání a násobení)	$3 \cdot 18 + 3 \cdot 23 = 123$ (Kč)
4/2	Na farmě sebrali za tři dny 945 vajec. První den sebrali 213 vajec, druhý den o 40 vajec méně než první den. Kolik vajec sebrali třetí den?	
	složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení výpočetních kroků, přítomna velká čísla, nelze je snadno modelovat ani simplifikovat, může pro někoho obsahovat antisignál „za tři dny“, který lze vnímat jako „dohromady“, tedy vést ke sčítání	$213 - 40 = 173$ $945 - (213 + 173) = 559$ (vajec)
4/3	Jitka přečetla o jarních prázdninách knihu, která měla 650 stránek. V pondělí přečetla 50 stran, ostatní dny (od úterý do neděle) četla každý den stejný počet stran. Kolik stran přečetla v pondělí a v úterý dohromady?	
	složená úloha, zahrnuje všechny základní početní operace kromě násobení, kontext známý ale méně reálný, otázka nemusí dávat žákům smysl, je umělá, násilná, což by mohlo vést k odpovědím na jinou otázku, kterou si žák v rámci řešení spontánně stanoví, jedno číslo dáno implicitně (6 dní v týdnu)	$(650 - 50) : 6 = 100$ $50 + 100 = 150$ (stran)
4/4	V továrně vyrobili dělníci na jedné směně 6 600 součástek, na druhé směně o šestinu součástek více. Všechny součástky pak zabalili do krabic po jedné stovce součástek. Kolik krabic bylo připraveno na prodej?	
	složená slovní úloha, obsahuje zlomek vyjádřený slovem „šestina“, další dvě čísla vyjádřena slovem „druhá“ a „stovka“, vyžaduje správné zřetězení výpočetních kroků, kontext mimo zkušenost dětí, soubor objektů je heterogenní (součástky, krabice, dny), neznámé slovo „směna“, otázka umožňuje více porozumění – není zcela jasné, že všechny naplněné krabice jdou do prodeje	$1/6 \cdot 6\,600 = 1\,100$ $6\,600 + 1\,100 = 7\,700$ $(6\,600 + 7\,700) : 100 = 143$ (krabic)
4/5	Roční příjem pana Šimka byl 280 000 Kč, což bylo o 48 000 Kč více, než si vydělala paní Šimková. Kolik korun si vydělala paní Šimková? Jaký byl roční příjem obou manželů?	

	tradiční úloha obohacená o antisignál („o 48 000 Kč více“), řeší se odčítáním, kontext úlohy znám pouze zprostředkovaně z rodiny, obsahuje velká čísla, které je možné simplifikovat (na 280, 232 apod.)	$280\,000 - 48\,000 = 232\,000$ (Kč) $280\,000 + 232\,000 = \mathbf{512\,000}$ (Kč)
4/6	Nejvyšší horou světa je hora Mount Everest, která měří 8 848 m, což je o 4 038 m více, než kolik měří nejvyšší hora Evropy Mont Blanc. Kolik metrů měří nejvyšší hora Evropy?	
	jednoduchá úloha obohacená o antisignál „o 4038 m více“, řeší se odčítáním, čísla ukotvena jako veličiny (m), kontext srozumitelný, velká čísla	$8\,848 - 4\,038 = \mathbf{4\,810}$ (m)
4/7	Filmová pohádka trvá 93 minut. Kdy bude končit, jestliže začátek je v 16 hodin 45 minut?	
	jednoduchá úloha, jejíž obtížnost spočívá pouze v práci v soustavě o základu 60, nutný je také převod jednotek, čísla jsou kotvena jako veličiny, soubor je heterogenní (h, min), kontext je reálný, dětem důvěrně známý	$93\text{ min} = 1\text{ h }33\text{ min}$ $16:45 + 1:33 = \mathbf{18\text{ h }18\text{ min}}$
4/8	Z cisterny, ve které bylo 120 hektolitrů ²⁶ vody pro kojence, odebrali dopoledne 580 litrů vody, což bylo o 230 litrů méně, než odebrali odpoledne. Kolik litrů vody v cisterně zbylo?	
	složená slovní úloha s antisignálem „o ... méně“, situaci komplikuje také slovo „odebrali“, výpočty je nutné správně zřetěžit, čísla jako veličiny, soubor heterogenní (l, hl) nutný převod jednotek, kontext neznámý, údaje obtížně představitelné	$120\text{ hl} = 12\,000\text{ l}$ $580 + 230 = 810$ $12\,000 - (580 + 810) = \mathbf{10\,610\text{ (l)}}$
5/1	Pan Veselý dostal za práci zaplacen 945 Kč, pan Smutný dostal třikrát méně než pan Veselý. Kolik korun si musela paní účetní připravit pro oba dva?	
	tradiční složená slovní úloha, příběh probíhající v čase a otázka jdoucí proti toku času, kontext je známý, i když spíše zprostředkovaně než z vlastní zkušenosti	$945 + (945 : 3) = \mathbf{1\,260}$ (Kč)
5/2	Podél cesty má být vysázeno 26 stromů, vzdálenost mezi dvěma sousedními stromy bude 12 metrů. Jaká bude vzdálenost mezi prvním a posledním stromem?	
	tradiční úloha, obtížně řešitelná bez představy situace, čísla ukotvena jako stavy i veličiny, soubor objektů je heterogenní (počet stromů, jejich vzdálenost), situace je statická, snadno ji lze vizualizovat, je ve zkušenostech žáků (případně její analogická obdoba)	$25 \cdot 12 = \mathbf{300}$ (m)
5/3	Z desetimetrové role látky se prodalo nejprve 2,6 metrů látky. Další zákaznice si koupila 180 centimetrů látky a třetí potřebovala 3 metry a 7 decimetrů. Kolik látky se již prodalo? Kolik látky ještě zbylo?	
	tradiční složená slovní úloha s desetinnými čísly, nutno převést jednotky, soubor objektů je heterogenní (m, dm, cm), některá čísla zadána slovně, příběh odehrávající se v čase, kontext pro většinu asi neznámý, pro pochopení je třeba představit si situaci analogickou	$2,6\text{ m} + 180\text{ cm} + 3\text{ m }7\text{ dm} \Rightarrow$ převod jednotek $2,6 + 1,8 + 3,7 = 8,1$ (m látky prodáno) $10 - 8,1 = 1,9$ (m zbylo)
5/4	V pekárně pečou tři druhy koláčů, tvarohové, makové a povidlové. Makových je dnes 465 ks, což je polovina ze všech upečených koláčů. Tvarohových je třetina ze všech upečených koláčů. Kolik koláčů je povidlových? Kolik koláčů upekli dnes celkem?	

²⁶ Část žáků dostala zadání této úlohy s chybou – místo 120 hl bylo uvedeno 12 hl, a úloha proto byla nesmyslná. Vzhledem k zajímavým situacím, ke kterým v důsledku této chyby došlo, jsme se rozhodli úlohu z analýzy nevyřazovat.

	složená úloha se zlomkem (vyjádřený slovem), číslo jako počet kusů i jako počet druhů, zlomek jako část celku, alespoň analogický kontext známý, pro velká čísla obtížně modelovatelný, obsahuje antisignál „což je polovina“, který vede k dělení, ale zapotřebí je násobit, zapotřebí je početní operace správně řetězit	$465 \cdot 2 = 930$ (všech koláčů) $930 : 3 = 310$ $465 - 310 = \mathbf{155}$ (povidlových)
5/5	V obchodě s horskými koly vyhlásili posezónní výprodej a poskytovali slevu ve výši jedné sedminy původní ceny. Novákovi koupili jedno kolo za 6 600 Kč a druhé za 5 400 Kč. Kolik korun ušetřili oproti běžné ceně?	složená úloha o slevě, obsahuje zlomek, číslo kotveno jako veličina (Kč), zlomek jako část celku, příběh není v čase, ale mohl by tak být vnímán, kontext je známý, pravděpodobně prožitý, sleva je zadána netypicky jako „sedmina“
5/6	Cyklista měl ráno na tachometru 328,5 km, v poledne 415,3 km a večer 531,1 km. Kolik kilometrů ujel dopoledne a kolik odpoledne? Kolik ujel za celý den?	$415,3 - 328,5 = 86,8$ (km dop.) $531,1 - 415,3 = 115,8$ (km odp.) $115,8 + 86,8 = \mathbf{202,6}$ (km celý den)
5/7	Každý žák pátého ročníku provozuje alespoň jeden druh sportu, 17 dětí jezdí na kole a 15 dětí hraje fotbal. Do páté třídy ale chodí jen 26 žáků. Je to možné?	úloha formulována jako možné – nemožné, součástí zadání je podmínka „každý žák provozuje...“, kontext dětem pravděpodobně známý, snadno představitelný, slovo „alespoň“ může některým řešitelům činit problémy
5/8	Podnik prodal v prvním čtvrtletí zboží za 18 470 000 Kč. Jeho náklady ale byly 14 697 000 Kč. Stačí získané peníze na nákup nových strojů za 3 800 000 Kč?	jednoduchá úloha s velkými čísly, formulována jako možné – nemožné, slovo „náklady“ pravděpodobně neznámé, těžko představitelné, není ve zkušenostech dítěte, čísla těžko představitelná

6.4 OBTÍŽE ŽÁKŮ A JAK JIM PŘEDCHÁZET NEBO ČELIT

Nejčastější problém, se kterým se učitelé setkávají v souvislosti se slovními úlohami, je, že žák slovní úloze „nerozumí“. Toto „nerozumění“ však může mít různé příčiny. V rámci našich rozhovorů s žáky jsme identifikovali tři hlavní příčiny neporozumění: (1) žák nerozumí textu slovní úlohy (nerozumí jednotlivým slovům, slovním spojením nebo syntaktické stránce textu), (2) žák nerozumí matematické podstatě slovní úlohy (nechápe vztahy mezi objekty úlohy, její matematickou strukturu), (3) žák nerozumí určitému konceptu, pojmu, který v úloze vystupuje (jinými slovy nerozumí matematické látce, např. nechápe, co je jedna sedmina, průměr, objem aj.). Všechny tři příčiny se navenek projevují podobným způsobem – žák není schopen úlohu správně uchopit, od jejího řešení buď odstupuje (ztrácí zájem), nebo žádá vysvětlení/pomoc, nebo nevědomky volí chybnou strategii a dostává se tak k chybnému řešení. Běžné jsou i případy, kdy se žák vědomě uchyluje k víceméně náhodné kombinaci početních operací a čísel ze zadání.²⁷

Pro účinnou pomoc je třeba nejprve rozlišit příčinu neporozumění. V rozhovorech se žáky se nám osvědčilo nejprve vyzvat žáka, aby se pokusil pojmenovat, co je na úloze nesrozumitelného. Když se ukázalo, že žák např.

²⁷ Greer, Verschaffel a da Corte (2002) tento jev do jisté míry vysvětlují pojmem „word problem game“, který zahrnuje přesvědčení žáků a učitelů týkající se účelu slovních úloh, jejich předpokládané struktury apod. a komplexní síť implicitních pravidel a očekávání (včetně očekávání, že pokud je úloha zadána v matematice, bude mít řešení).

nerozumí některému slovu (remíza, tachometr, defekt), stačilo toto slovo vysvětlit/nahradit synonymem a žák byl schopen úlohu vyřešit bez další pomoci. V ostatních případech, kdy žák nebyl schopen příčinu neporozumění určit nebo pojmenovat, jsme jej vyzvali, ať text úlohy znovu přečte, potichu nebo nahlas, či jej převypráví vlastními slovy. Při hlasitém čtení se v kritickém místě úlohy žák obvykle zadrhne, změní tempo řeči, použije nepřirozenou intonaci, zamění nebo zkomolí slova, čímž označí místo, kde by mohl být problém. Také podle převyprávění může učitel poznat, jak si žák úlohu interpretuje, které prvky úlohy vnímá jako dominantní, které naopak z nějakého důvodu nebere v potaz. Někdy takové výzvy k odhalení příčiny neporozumění stačí, jindy je třeba se dále dotazovat. Ne vždy je snadné a možné příčinu správně určit. Nejobtížnější je situace, kdy žák rozumí textu tzv. „po svém“, tedy si interpretuje některé výrazy v posunutém významu, a úloha tak dává smysl, ovšem nikoliv ten zamýšlený autorem úlohy. Na autentickém rozhovoru s Vítem, žákem 4. ročníku, ilustrujeme, jakým překvapivým způsobem může žák nad textem úlohy²⁸ uvažovat. V jeho výpovědích lze identifikovat všechny tři výše zmíněné problémy (s mateřským jazykem, matematickou strukturou úlohy a konceptem zlomku). Na obr. 6.3 vidíme jeho písemné řešení.

T: A čtvrtá slovní úloha, ta byla o čem?

Vít: No, tam bylo to, v továrně, tam dělali různé šroubky a tak dále, a pak kolik těch krabic jakoby vyslali za stovku.

T: Kolik vyslali za stovku? (...) A zjistit jsi měl co?

Vít: Pak kolik, pak se ještě musely dát do krabic, ty byly po stovkách, pak měli zjistit, kolik si vydělali, nebo kolik prodali těch krabic.

T: Co dál víš o té úloze?

Vít: Že pak těch 6 600 se musí koupit, 6 krát víc.

T: To znamená 6 krát více, je tam napsáno 6 krát více v té slovní úloze?

Vít: (Čte zadání.) Ne, šestinu.

T: O jednu šestinu více. Dokázal bys vypočítat, jednu šestinu z těch součástek? Nebo z kolika součástek to bylo, to „o jednu šestinu více“?

Vít: No, těch 6 600.

T: Jo, z těch 6 600, máme vypočítat jednu šestinu. Jak bys to vypočítal?

Vít: No, krát 6, tak jak to mám.

T: Tak jak to máš, 6 600 krát 6. Hmm, a pak jsi počítal, vidím, že tady máš krát 100. To znamená co?

Vít: To je pak, jak to prodávali, takhle si vydělali.

$$\begin{array}{r}
 6600 \\
 .6 \\
 \hline
 09.600 \\
 .100 \\
 \hline
 000000 \\
 000000 \\
 \hline
 3960000
 \end{array}$$

Obr. 6.3: Vítovo řešení úlohy 4/4

²⁸ V továrně vyrobili dělníci na jedné směně 6 600 součástek, na druhé směně o šestinu součástek více. Všechny součástky pak zabalili do krabic po jedné stovce součástek. Kolik krabic bylo připraveno na prodej?

Pokračování rozhovoru s Vítem společně s dalšími příklady je v oddíle 2.4.2 a 2.5.2 *Knihy*. Zde jsme jím chtěli ilustrovat obtížnost identifikace podstaty obtíží žáků při řešení slovních úloh.

Nyní, podobně jako v jiných kapitolách, uvedeme výčet několika konkrétních problémů žáků s porozuměním úloze společně s doporučením, jak jim čelit či předcházet. Neuvádíme, v kterém ročníku ten který žák je, protože tato informace se dá vyčíst z toho, jakou úlohu řeší. Např. úloha 4/3 je úloha pro 4. ročník, tedy řeší ji žák s ukončeným 4. ročníkem (na začátku 5. ročníku).

A) ŽÁK NEROZUMÍ ÚLOZE KVŮLI NEDOSTATKŮM V JAZYCE ČI VE ČTENÍ

Jazyk matematiky se od mateřského (přirozeného) jazyka někdy značně liší. Snaží se být přesný, úsporný, objektivní, neobrazivý. Mnohdy se pak stává až nepřirozeným, používá slova, která nejsou v mateřském jazyce běžná nebo je používá v jiném např. širším nebo posunutém významu (např. obsah knihy versus obsah čtverce). Jazyk slovních úloh leží někde na hranici obou jazyků, často žákům způsobuje problémy. Zde uvádíme část rozhovoru s žákem Oliverem, který si úlohu 4/3²⁹ vysvětlil po svém.

T: Úloha číslo tři, jak jsi dospěl k tomu číslu, výsledku 100 stran?

Oliver: Že Jitka přečetla 650 stran, v pondělí přečetla 50 a od úterý do neděle čte furt stejný počet stran.

T: Takže jak jsi dospěl k těm 100 stranám?

Oliver: Že $50 + 50 = 100$.

Další příklady obtíží v této oblasti naleznete v *Knize* v oddílech 2.4.2 a 2.5.2.

Doporučení: Úlohou školy by mělo být žáky postupně seznamovat se specifiky jazyka slovních úloh, pěstovat vnímavost vůči drobným nuancím a cit pro jeho používání. Učitelé by měli nabízet žákům dostatek příležitostí se s matematickým jazykem setkávat, a to nejen v podobě slovních úloh, ale i v rámci běžného mluveného slova (například, bude-li se učitel ptát „jaký je součet sedmi a čtyř“ namísto „kolik je sedm plus čtyři?“, přejde zanedlouho slovo „součet“ i do slovníku žáků, a to současně s porozuměním jeho významu).

Ke zlepšení porozumění jazyka slovních úloh může výrazně napomoci také vytvoření dobrých podmínek pro výměnu názorů (prostor pro žákovské diskuse). Jako dobrý materiál pro takové diskuse poslouží například úlohy, které připouštějí více správných interpretací (např. úloha: „Pavlinka s Tondou a Věrkou byli v létě s rodiči u moře. Jeli autobusem, ve kterém bylo 20 dospělých a 10 dětí. Kolik jelo celkem v autobuse lidí?“)³⁰, dále úlohy s nadbytečnými či chybějícími údaji a tzv. kapitánské úlohy (tedy úlohy, které obsahují údaje, z nichž se nedá otázka zodpovědět).³¹ Zařazovány mohou být v přiměřeném množství již od 1. ročníku. Důležité je udržovat v žácích vědomí, že text úlohy je třeba vždy pečlivě číst. Učiteli hojně používaná strategie tzv. signálních slov³² ve spojení s nácvikem řešení typových úloh může způsobit přesný opak – žáci přestanou být vůči textu vnímaví a zaměří se pouze na vyhledávání signálních slov, která jim prozradí, jaká početní operace se má ve výpočtu použít. Do určité míry tomuto jevu nahrává fakt, že žáci poznávají početní operace postupně, tedy variabilita slovních úloh se zdá na počátku školní docházky velmi zúžena, navíc se do učebnic zařazují častěji takové úlohy, na nichž mohou učitelé předvést, jak se tvoří zápis slovní úlohy, který je také předmětem výuky. Domníváme se však, že i úlohy tzv. „na sčítání“ mohou být různého typu a udržet žákovu bdělost i jeho upřímný zájem. Takovými úlohami mohou být například úlohy s antisignálem (Hejný, 2014), které jsme předkládali i žákům v rámci našeho výzkumu. Jejich odlišnost spočívá ve slovní formulaci, která zdánlivě neodpovídá početní operaci, kterou je třeba při řešení úlohy použít. Např. Tomášův bratr vstřelil na tréninku 8 branek, což bylo o 6 branek méně než Tomáš.

²⁹ Jitka přečetla o jarních prázdninách knihu, která měla 650 stránek. V pondělí přečetla 50 stran, ostatní dny (od úterý do neděle) četla každý den stejný počet stran. Kolik stran přečetla v pondělí a v úterý dohromady?

³⁰ Úlohu jsme vybrali z pracovního sešitu *Matematika pro 3. ročník ZŠ*, díl 1, SPN, 2014, str. 6. Úlohu lze chápat tak, že v deseti dětech jsou započítáni i Pavlínka, Tonda a Věrka, tedy řešením je $20 + 10 = 30$. Nic ovšem nebrání opačné interpretaci, tedy, že je nutné k cestujícím v autobuse připočíst i tyto tři děti.

³¹ Například úloha: V pekárně mají otevřeno od 6:00 do 18:30. Kolik korun stojí půlka chleba?

³² Učitelé tímto způsobem chtějí pomoci žákům zorientovat se ve slovní úloze výběrem „podstatných informací“, které by měly ukázat na to, jakou operaci použít. Např. vyskytne-li se v úloze slovo více, pak se přičítá.

Kolik branek vstřelil Tomáš?³³ Na úlohách tohoto typu lze dobře sledovat, do jaké míry se žák řídí signálními slovy a do jaké míry čte text s porozuměním (o úlohách s antisignálem více v oddílech 2.4.3 a 2.5.5 *Knihy*).

Kromě potíží s chápáním matematického jazyka mívají žáci problémy i s porozuměním mateřskému jazyku, neznají např. významy některých běžných slov či slovních spojení. Stejně jako problémy s matematickým jazykem lze řešit tyto situace přeformulováním úlohy, a to buď učitelem, nebo jiným žákem. V zástupném textu se učitel/žák může volbou vhodného synonyma vyhnout problematickému výrazu, případně dotvořit kontext úlohy tak, aby byl žákovi lépe srozumitelný (aby úloha působila např. jako drobná „historka ze života“ s hádankou na konci). Také může informace v textu uspořádat pro žáky přirozenějším způsobem (např. chronologicky). Text úlohy lze s pomocí ostatních žáků také zdramatizovat v podobě krátké scénky, či vymodelovat pomocí zástupných předmětů, což napomáhá rovněž pochopení matematické struktury úlohy. Dále může dobře posloužit také variace na tichou poštu – žáci si tichou poštou předávají text slovní úlohy, poslední z žáků (ve skupině) úlohu řekne nahlas či vyřeší. Další způsoby, jak zlepšit jazykovou kompetenci žáků, můžeme nalézt v literatuře orientované na rozvoj čtenářské gramotnosti.

Další problémy spadající do této kategorie jsou problémy s technikou čtení, pomalé, povrchní nebo nepozorné čtení může také negativně ovlivňovat porozumění textu slovní úlohy. Nechte-li žák plynule nebo dostatečně rychle, mohou mu unikat kromě významů slov a vět např. vztahy mezi jednotlivými objekty úlohy. Nemá-li žák čtení plně zautomatizované, vyčerpává mnoho energie na přečtení textu úlohy a nezbývá mu jí pak na samotné řešení. Kromě snahy obecně zlepšit úroveň žákových čtenářských dovedností, je řešením slovní úlohu žákovi přečíst nebo říct, případně tím pověřit jiného žáka. Důležité je v žákovi neživit pocit, že neumí řešit slovní úlohy (přeneseně pak, že je nedostatečný v matematice), když problém, který má, je jazykového původu.

B) ŽÁK NEROZUMÍ ÚLOHÁM TYPU „O NĚKOLIK VÍCE/MÉNĚ“ NEBO „NĚKOLIKRÁT VÍCE/MÉNĚ“

Přestože se také jedná o problém do určité míry jazykový, rozhodli jsme se mu věnovat zvláštní oddíl, neboť se s ním často setkáváme i při rozhovorech s učiteli a vyplývá i z testování uvedeného v oddíle 6.2. Žáci obvykle „přehlíží“ předložku „o“ a pracují s operátorem jako se stavem, což je patrné například v tomto rozhovoru s Cyrilem:

Cyril: To mám jako sečíst?

T: Tak, jak myslíš, na co se nás ptají? Kolik aut stálo na parkovišti celkem.

Cyril: Tak 12, 8 + 4, je to 12.

T: No jasně, tak si to ještě rozhodíme na ty dny. Kolik tam přijelo v sobotu?

Cyril: V sobotu jich tam přijelo 8.

T: Hmm, a kolik jich tam přijelo v neděli?

Cyril: 4.

T: Tak si to přečti pořádně. O 4 auta víc než v sobotu. Tam nepíšou, že by přijela čtyři auta, tam píšou, že o 4 auta víc než v sobotu, jo?

Cyril: Ale údaj je takovej, že tam celkem bylo 12 aut.

T: To tam nepíšou, ono seš blízko, ale v sobotu jich tam přijelo 8 a kolik jich tam přijelo v neděli?

Cyril: O čtyři auta více.

T: O čtyři auta více než kdy?

Cyril: Než v sobotu.

T: Než v sobotu, v sobotu jich tam přijelo 8, tak kolik jich tam přijelo v neděli?

Cyril: V neděli jich tam přijelo 12.

Doporučení: Problémy s těmito tzv. operátorovými úlohami³⁴ mohou být také důsledkem jednostranně zaměřené pozornosti na určité typy úloh v období, kdy se formuje žákův názor na to, co jsou slovní úlohy.

³³ Antisignálním slovem je zde „méně“, které navádí k operaci odčítání ($8 - 6 = 2$ branky).

³⁴ Jedná se o typ tzv. sémantického ukotvení čísla, které rozpracoval M. Hejný (např. 2014).

V mnohých současně používaných učebnicích zejména pro nejnižší ročníky převládají úlohy, ve kterých figurují čísla jako tzv. stavy (např. mám 3 míče, sklenice má objem 3 dl). Kromě této role však mohou čísla v úloze vystupovat také jako operátory (např. svetr byl zlevněn o 150 Kč, Veronika má o jednoho bratra více než Tereza) nebo ukazatele frekvence (např. každý druhý den chodím do práce pěšky, autobus má interval 10 minut). Tyto role čísla ve slovní úloze mají podstatný vliv na její charakter i obtížnost. Např. úloha, kde jsou všechna čísla stavy, je pro žáky jednodušší než ta, ve které jsou čísla pouze v roli operátorů. Porovnejme následující tři úlohy, všechny úlohy se týkají porovnávání.

1. Lukáš měří 120 cm. Jirka je o 4 cm vyšší než Lukáš ale o 2 cm menší než Tomáš. Kolik centimetrů měří Tomáš?
2. Lukáš měří 120 cm. Jirka je o 4 cm vyšší než Lukáš ale o 2 cm menší než Tomáš. O kolik centimetrů je Tomáš vyšší než Lukáš?
3. Jirka je o 4 cm vyšší než Lukáš ale o 2 cm menší než Tomáš. O kolik centimetrů je Tomáš vyšší než Lukáš?

V první úloze je zadán jeden stav (120 cm) a dva operátory (o 4 cm, o 2 cm), otázka je směřována na zjištění stavu (kolik cm měří Tomáš). Zatímco v druhé úloze, náročnější, je v odpovědi požadován operátor (o kolik?). Třetí úloha se jeví jako nejnáročnější (a pro žáky skutečně je), přestože je vlastně shodná s úlohou druhou. Rozdíl mezi nimi spočívá v přítomnosti alespoň jednoho stavu (Lukáš měří 120 cm), přitom tato informace je nadbytečná a úloha se dá řešit i bez ní.

Příčinou obtížnosti úloh, kde se vyskytují operátory, je skutečnost, že k sobě váží další „virtuální neznámé“, jinými slovy, číslo jako stav je soběstačné (Ema má 6 kuliček), zatímco operátor je vyjádřením vztahu mezi dvěma kvantitami (Ema má o 6 kuliček více než Lenka – tedy číslo 6 je spojeno s dvěma dalšími čísly – počtem kuliček Emy a počtem kuliček Lenky). Pro dítě je náročné pracovat s operátory, i když již dobře počítá se stavy.

S těmito různými rolemi čísla by se žáci měli seznamovat již od 1. ročníku, ovšem na přijatelné úrovni (pomocí dramatizace nebo modelování zkoumané situace, viz níže). Učitel by měl věnovat velkou péči výběru úloh tak, aby zajistil jejich pestrost nejen z hlediska kontextů a použitých početních operací, ale právě i z pohledu sémantického ukotvení čísla. Operátorové úlohy bývají také náročnější na vytvoření zápisu, neboť k vyjádření jejich struktury obvykle potřebujeme šipku nebo jiný symbol vyjadřující změnu nebo porovnání.

Žáci by měli poznávat idiom „o několik více/méně“ nejdříve v akcích, například v rámci dramatizace slovní úlohy nebo nejlépe komentováním běžné situace. Například při řazení dětí na tělocviku do dvojic dívka – chlapec může učitel konstatovat: „Máme o dvě dívky více než chlapců.“ Děti vidí situaci, chápou, co učitel míní svým konstatováním, situaci prožívají na vlastní kůži, není třeba nic víc vysvětlovat. Takové situace může učitel navozovat i záměrně. Podobně lze žáky připravovat pomocí modelování situace: postavte z krychlí věž tak, aby měla o dvě kostky více než má moje věž, přesuňte knihu o dvě police níže apod.

C) ŽÁK NEUMÍ MATEMATIZOVAT SLOVNÍ ÚLOHU – VYJÁDŘIT SLOVNĚ POPSANOU SITUACI MATEMATICKÝMI PROSTŘEDKY

I když nebylo vždy možné přesně určit povahu problému, často jsme během rozhovorů s žáky nabývali dojmu, že přestože v jazykové rovině úloze dobře rozumí, mají problém postihnout její matematické jádro a zapsat ji jazykem matematiky. Na ukázce rozhovoru se Ctiborem je patrné, že izolovaným informacím v textu dobře rozumí (s výjimkou slovního spojení „třikrát méně“), ale nemá dobrou představu o struktuře úlohy,³⁵ což se pak projevuje v jeho pokusech o matematizaci situace.

Ctibor: (Nejprve dělí beze zbytku $945 : 3 = 315$, pak píše odpověď, ale záhy škrtá a dále počítá $945 : 2 = 472$ zb.1, píše odpověď.)

T: Tak se na to podíváme.

³⁵ Pan Veselý dostal za práci zaplacen 945 Kč, pan Smutný dostal třikrát méně než pan Veselý. Kolik korun si musela paní účetní připravit pro oba dva?

Ctibor: Já jsem si to tady spletl.

T: Co si spletl?

Ctibor: Oni jsou dva, já jsem počítal třikrát méně než pan Veselý, tak mi to přišlo divný, že jsou dva.

T: A co třikrát méně než pan Veselý?

Ctibor: Těch 945, dostal míň peněz.

T: A o kolik?

Ctibor: Nejdřív mi to vyšlo 315, pak mi přišlo divný, že jsou dva, tak jsem si to udělal znova a vyšlo mi 472 a zbytek 1.

T: To jako, že by si paní účetní připravila 472 a deset halířů? Přečti si ještě jednou to zadání.

Ctibor: (Čte zadání a píše „pan Veselý 945 Kč“, pod to „pan Smutný 3x méně“. Po delší pauze písemně násobí $945 \cdot 3$)

T: Já tě ještě zastavím. Teďka počítáš co, kolik dostal pan Smutný?

Ctibor: No, a pak to ještě vydělím dvěma.

T: Proč dvěma?

Ctibor: Protože jsou dva.

Další příklady problémů žáků s matematizací jsou v oddíle 2.5.2 *Knihy*.

Doporučení: Matematizace je náročný myšlenkový proces, kterému se musí žáci postupně učit. Obvykle mu ve škole napomáháme zápisem slovní úlohy nebo znázorněním (obrázkem). Tyto nejběžnější prostředky k uchopení úlohy (které bývají považovány někdy za nedílnou součást jejího řešení) mají ovšem svá úskalí – jejich problematiku komentujeme ve zvláštních oddílech níže. Stejně jako v případech výše i zde platí, že je v první řadě nutné dovést žáka k porozumění textu, tedy zjistit, jak žák zadání úlohy interpretuje, ve kterém místě má potíže, a tyto obtíže pokud možno odstranit (vysvětlením problematického slova, významu, vztahu, přirovnáním, synonymem, rozšířením kontextu nebo rozložením složeného problému na více jednodušších). Žák by měl dostat příležitost se na procesu matematizace aktivně podílet a neměl by být penalizován za jiný postup nebo jinou formu řešení, v případě, že jsou správné. Často tuto roli na sebe přebírá učitel, nebo ji přenechává žákovi, který s matematizací nemá problémy. Ostatní žáci jsou pak často pouhými zapisovateli cizích myšlenek, které pak jen aplikují na úlohy stejného typu, aniž by svému počínání rozuměli. Kromě toho, že tento přístup může v žácích podpořit falešnou představu, že existují jediné platné postupy řešení slovních úloh, degraduje texty úloh na pouhého nositele čísel. Výsledek je pak stejný jako v případě strategie signálních slov (zmíněna výše) – žáci přestanou text úloh považovat za důležitý.

Účinnou aktivitou pomáhající žákům odhalovat v textu matematickou strukturu může být činnost opačná, tedy tvorba úlohy na základě daného číselného vztahu. Žákům je např. předložen číselný výraz $(7 + 8) \cdot 2$ a jejich úkolem je vymyslet takovou situaci, kterou tento číselný výraz vystihuje. Případně je žákům zadáno jedno nebo více čísel a slovo či slova (podstatné jméno, sloveso, příslovce), která mají v textu úlohy figurovat, např. vymyslete slovní úlohu, kde vystupují čísla 0,8 a 1000 a sloveso *nakrájet* v libovolném tvaru.

D) ŽÁK NEUMÍ ŘÁDNĚ ZAPSAT ZÁPIS SLOVNÍ ÚLOHY, NEUMÍ VYBRAT DŮLEŽITÉ INFORMACE

Vytvoření zápisu vyžaduje jednak vyhledání číselných údajů v textu úlohy a přiřazení k jejich nositelům a jednak zachycení struktury vztahů těchto údajů. Na jeho základě by pak mělo být možné vyvodit potřebné početní operace a sestavit příslušnou rovnici. Zápis můžeme také chápat jako určitý druh redukce textu se zachováním jeho významu, ke které používáme specificky nejen slova ale také symboly a jiné grafické prvky (šipky, tečky, znaménko rovnosti apod.). Obvykle slouží pro lepší orientaci v popisované situaci, jako podpora paměti v případě dlouhých textů/zadání, a mnohdy také jako prostředek k uchopování úlohy (při tvorbě zápisu si teprve vytváříme představu o matematické struktuře úlohy).

Na následujících obrázcích vidíme dva polaritní druhy zápisů dvou různých úloh. Na obr. 6.4 jde o minimalistické vyjádření, na obr. 6.5 se jedná o opak – text zápisu je téměř totožný s textem úlohy.

2. Na farmě sebrali za tři dny 945 vajec. První den sebrali 213 vajec, druhý den o 40 vajec méně než první den. Kolik vajec sebrali třetí den?

$$\begin{array}{r} 3 = 945 \\ 1 = 213 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 213 \quad 27 \\ 40 \\ \hline 173 \\ 213 \\ \hline 386 \end{array} \quad \begin{array}{r} 945 \\ - 386 \\ \hline 559 \end{array}$$

Obr. 6.4: Stručný zápis slovní úlohy

• má být Vysazeno 26 stromů
Vzdálenost mezi sousedními stromy 12 metrů
Jaká bude vzdálenost mezi posledními stromy X

Obr. 6.5: Maximalistický zápis slovní úlohy³⁶

Doporučení: I z naší ukázky je patrné, že tvorba zápisu slovní úlohy není samozřejmá a vyžaduje pokročilé dovednosti spadající také pod čtenářskou gramotnost. Je třeba si také uvědomit, že žáci nemohou dospět k vhodné formě zápisu hned, ale musí se k ní postupně dopracovat. Hotová forma, kterou jim často nabízíme my učitelé nebo učebnice a která nám připadá jasná a jednoduchá, je ve skutečnosti výsledkem dlouhodobého a složitého procesu hledání. Tím, že žákům upíráme možnost projít si tímto procesem nalézání vhodné formy, je připravujeme o to nejcennější, co jim při řešení úloh nabízíme (postupné budování matematických poznatků prostřednictvím aktivního řešení úloh).

V souvislosti s tvorbou zápisů narážíme často na nechuť žáků.³⁷ Ta může být způsobena buď tím, že se jedná o myšlenkově náročnou činnost, nebo naopak o činnost rutinní. Není pak výjimkou, že žák nejdříve úlohu vyřeší a teprve zpětně vytvoří její zápis. Chápeme-li zápis jako nástroj k uchopení slovní úlohy, pak jeho práce postrádala smysl. Chceme-li žáka vybavit zkušenostmi s tvorbou zápisu jednoduchých úloh a připravit ho tak na řešení úloh složitější, je náš požadavek oprávněný. Můžeme žáka posunout dál tím, že mu předložíme úlohu, která jej k zápisu přirozeně přiměje (např. úlohu s dlouhým textem, složenou slovní úlohu, nestandardní úlohu). V našich rozhovorech se stávalo, že složitější úlohy si žáci měli tendenci zpracovávat zápisem (byť bez velkého efektu). Často se také snažili zaznamenat složitým zápisem úlohu, kterou bylo velmi snadné vystihnout obrázkem (viz níže). Ukázalo se, že žáci mají problémy tvořit funkční zápisy k úlohám pro ně obtížnějším a rozpoznat, kdy je lepší použít tu kterou formu záznamu (slovní, grafickou, smíšenou). Učíme-li tedy žáky na typových úlohách vytvářet jednoduché zápisy, je třeba posunout se také dál a učit je aplikovat nabyté zkušenosti v jiných kontextech. Důležité je si také uvědomovat, že zápis úlohy nemusí být hned v počátku definitivní, že se může v průběhu čtení zadání nebo dokonce řešení úlohy měnit, může být doplňován, upravován dle potřeb řešitele.

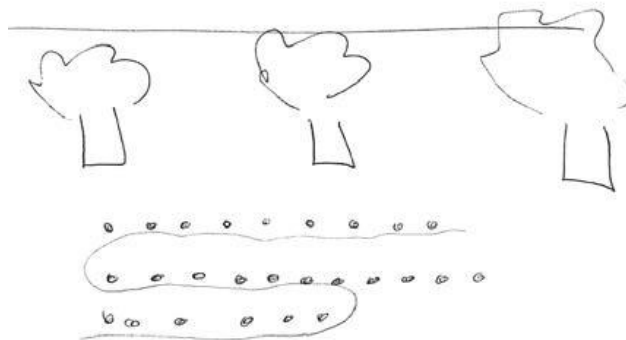
Osvědčilo se nám také text úlohy předávat žákům pouze ústně, učitel úlohu jednou či vícekrát přečte nahlas a úkolem žáků je bez opory o text najít řešení. Opakuje-li se aktivita častěji (případně zadává-li učitel složitější úlohy), žáci se snaží zvýšit svou úspěšnost tím, že si začnou zapisovat informace, které považují za důležité, a to obvykle stručně, protože na vypisování nemají čas. S těmito záznamy může učitel dále pracovat. Aktivita je též vhodná pro skupinovou práci – učitel bez předchozího varování jednou přečte úlohu, rozdělí žáky do skupin a vyzve je, aby text úlohy zrekonstruovali.

³⁶ Podél cesty má být vysazeno 26 stromů, vzdálenost mezi dvěma sousedními stromy bude 12 metrů. Jaká bude vzdálenost mezi prvním a posledním stromem?

³⁷ Mnozí žáci v našem výzkumu projevovali radost z toho, že nemusí psát zápisy úloh.

E) ŽÁK NEDOKÁŽE VYTVOŘIT FUNKČNÍ OBRÁZEK, NÁČRT, ZNÁZORNĚNÍ

Na obr. 6.6 vidíme snahu Radky vyřešit úlohu 5/2³⁸ s pomocí obrázku poté, co ji k tomu tazatel vyzval. Snažil se ji nejprve navést na analogii – mezi třemi stromy jsou dvě mezery, mezi 26 stromy bude 25 mezer. Tento pokus však selhal (viz horní polovina obrázku), proto jí tazatel doporučil, aby si namalovala stromy všechny (spodní polovina obrázku). Uspořádání stromů ve třech řadách však způsobilo, že při mechanickém počítání mezer (jak to dělali prakticky všichni žáci v našem výzkumu, viz oddíl 2.5.3 *Knihy*) vypadla mezera mezi posledním a prvním stromem mezi dvěma řádky. Radka tuto slabinu svého náčrtku neodhalila.



Obr. 6.6: Obrázek Radky k úloze 5/2

Doporučení: V našem výzkumu se ukázalo, že žáci grafickou formu záznamu upozaďují ve prospěch písemného záznamu, a to i v případech, kdy by grafické uchopení úlohy bylo jednodušší a funkčnější. V mnoha případech se ukázalo, že žáci vizualizace nejsou vůbec schopni, nevidí v její tvorbě význam nebo ji neumí při řešení využít. Zdá se tedy, že této dovednosti není ve škole věnovaná větší (systematická) pozornost. Stejně jako jiným dovednostem se žáci i tvorbě a funkčnímu využívání vizuálních prostředků musí učit. Přitom by se s nimi měli setkávat opakovaně, aby v jejich použití došlo k určité rutinizaci a nedocházelo tak ke kognitivnímu přetížení, kdy je žák natolik zaměstnán tvorbou grafické reprezentace, že mu už nezbyvá energie na vlastní řešení úlohy. Podobně jako je tomu se zápisem úlohy, i na tvorbě náčrtku nebo jiného grafického záznamu úlohy (např. tabulky, diagramu) by se měli žáci aktivně podílet, aby rozuměli jeho smyslu. Učitel by měl žáky k vizualizaci různých situací vyzývat a rovněž jim různé formy vizualizace představovat a nabízet, neměl by spoléhat příliš na příklady v učebnicích, které bývají často jednotvárné. Posloužit k tomu mohou i úlohy, které se nesnadno zachycují zápisem, jako například právě naše úloha 5/2, kterou ke grafickému zachycení přiměla převážnou většinu žáků v rozhovorech.

Účinná může být také diskuse s žáky nad jednotlivými typy grafického znázornění – které je pro úlohu vhodné/nevhodné a proč. Pozornost by se měla věnovat také počáteční fázi spočívající v rozlišení situace, kterou je snazší popsat slovy a kterou lze jednodušeji zaznamenat obrázkem, případně jakým. Kromě tvorby grafických záznamů by se měli žáci z grafických záznamů učit číst, tedy např. zjišťovat, jaké informace můžeme z konkrétního obrázku získat, které jsou zřejmé, které pravděpodobné.

³⁸ Podél cesty má být vysázeno 26 stromů, vzdálenost mezi dvěma sousedními stromy je 12 metrů. Jaká bude vzdálenost mezi prvním a posledním stromem?

7. ZLOMKY U ŽÁKŮ 2. STUPNĚ

Problematika zlomků patří dlouhodobě k problematickým místům matematiky na základní škole. V tomto smyslu se vyjádřili i učitelé z našich rozhovorů (podrobněji in Vondrová, Žalská, 2013, s. 73-79). Zlomky byly jako problematická oblast učiva 2. stupně zmiňovány jednoznačně nejčastěji. Kromě toho, že podle učitelů působí zlomky žákům problémy při samotném probírání látky, stávají se také překážkou v dalších tématech. Učitelé zmiňovali rovnice, úpravu aritmetických nebo algebraických výrazů a také použití zlomkových částí jednotek v geometrii, např. $\frac{1}{3}$ metru.

Podle učitelů působí žákům obtíže zejména osvojení si základních početních operací, ale také operací spojených s ekvivalencí zlomků (krácení zlomků, převod mezi zlomkem a smíšeným číslem).

Učitelé se shodují v tom, že žáci si osvojí operace každou zvlášť, ale jejich kombinace (například násobení a sčítání v jedné úloze nebo v jednom souboru úloh) jim dělá problémy. V této souvislosti také mluví o problémech s pořadím operací, tj. použití distributivního zákona. Také často zmiňují krátkodobost tohoto osvojení, která se projevuje u pozdějších témat a úloh. (Vondrová, Žalská, 2013, s. 74.)

S tím souvisí také skutečnost, že ekvivalence různých vyjádření téže velikosti zlomku se pro žáky nestává samozřejmostí ani po probrání učiva.

Jako indikátor problémů s porozuměním zlomku jako pojmu je možné chápat žakovské nepochopení jiných významů zlomku, než je vztah části a celku. Učitelé ho zmiňovali jednak u zlomku jako podílu (resp. ekvivalentu operace dělení), jednak u zlomku jako čísla. V tomto ohledu tedy jsou vyjádření učitelů velmi podobná tomu, co uvádí zahraniční odborná literatura. S konceptuálním porozuměním zlomku dále souvisí absence představy o vztahu mezi zlomky a desetinnými čísly, když někteří žáci řeší převod zlomku na desetinné číslo spíše jako jakousi „skládanku“ číslic – např. $\frac{8}{100} = 8,100$.

Některé další problémy související se zlomky, které učitelé uváděli, jsou podobné jako u jiných oblastí učiva. Podle učitelů žáci zlomky pochopí, ale zapomenou; chyby dělají především tehdy, když se učivo nahromadí a „plete se jim“ (např. algoritmy při sčítání a při násobení) nebo když jsou zlomky součástí komplexnějších úloh (rovnice, výrazy, slovní úlohy). V rovnicích, výrazech a slovních úlohách se podle učitelů projevuje u žáků tendence se zlomkům vyhýbat a nahrazovat je desetinnými čísly.

O názorech našich učitelů na výuku zlomků vypovídá také několik položek dotazníku, který je celý uveden v kap. 3. Zde okomentujeme jen část týkající se zlomků a určenou pro učitele matematiky 2. stupně (viz oddíl 3.2).

Většina respondentů se domnívá, že žáci se zlomků obávají. Tento názor ovšem nepřevažuje nijak výrazně, na základě rozhovorů jsme očekávali větší souhlas s tvrzením. Další dvě položky ukazují naprosto převažující názor, že pro úspěšné řešení úloh se zlomky musí žáci chápat podstatu algoritmů pro operace s nimi. Přitom v rozhovorech učitelé často poukazovali na potíže žáků, které neporozumění algoritmům signalizují, především na časté záměny úprav při různých operacích. Lze tedy usoudit, že učitelé považují porozumění algoritmům za důležité, ale to se u žáků často nedostavuje. Stejně velké procento učitelů se hlásí k tomu, že při sčítání/odčítání zlomků používají názorné modely. Položka zmiňuje jako příklady koláčový a čokoládový model. Nelze tedy zcela spolehlivě říci, zda to znamená, že se převážně používají 2D modely (tak se vyjádřili učitelé při rozhovorech). Je to však pravděpodobné. V poslední položce jsme si ověřovali, nakolik učitelé sdílejí náš předpoklad, že žáci nejsou zvyklí zacházet se zlomky většími než jedna a že s nimi budou mít větší problémy. S tímto předpokladem souhlasila jen necelá polovina respondentů (46 %).

Některé pojmy nutné pro pochopení povahy obtíží žáků se zlomky (jako např. různé role zlomků) budou vysvětleny přímo tam, kde je obtíž popsána. Zde uvedeme jen tři typy elementárních úloh, v nichž je zlomek v roli operátoru, protože je budeme potřebovat na více místech:

1. Jsou dány základ a zlomkový operátor a má se zjistit zlomková část.

2. Jsou dány zlomková část a zlomkový operátor a má se zjistit základ.
3. Jsou dány základ a zlomková část a má se zjistit zlomkový operátor.³⁹

Termíny základ, zlomková část, operátor jsou částečnou analogií termínů používaných běžně u úloh na procenta. V souvislosti se zlomky se objevují např. v knize (Hejný a kol., 1990, s. 69).

Poznámka: Na rozdíl od ostatních kapitol budeme úlohy z testování, které působí našim žákům potíže, uvádět přímo v textu věnovaném obtížím žáků, tedy v oddíle 7.4.

7.2 RVP PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

První období 1. stupně: Žák

M-3-1-03 užívá lineární uspořádání; zobrazí [přirozené] číslo na číselné ose.

Druhé období 1. stupně: Žák

M-5-1-05 modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku,

M-5-1-06 porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel,

M-5-1-07 přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty.

2. stupeň: Žák

M-9-1-01 provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu,

M-9-1-04 užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem),

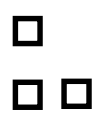
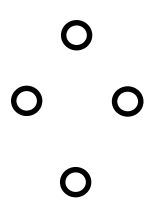
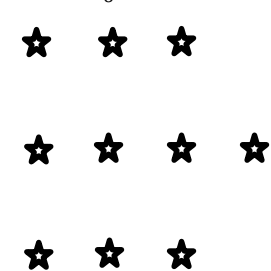
M-9-1-05 řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů,

M-9-1-06 řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek).

7.3 DIAGNOSTICKÉ ÚLOHY POUŽITÉ V NAŠICH ROZHOVORECH

Úlohy zde uvádíme bez didaktického komentáře. Ten je uveden v oddílech 7.1, kde se k úlohám vracíme.

7.3.1 ÚLOHY S OBRÁZKY

Když tohle je $\frac{1}{5}$, jak vypadá celek?  [Výsledek: 15 čtverečků]	Když tohle jsou $\frac{2}{7}$, jak vypadá celek?  [Výsledek: 14 kroužků]	Když tohle je $\frac{5}{6}$, jak vypadá celek?  [Výsledek: 12 hvězdiček]
--	--	--

Instrukce pro tazatele: Nechte žáka, aby se sám rozhodl, zda bude celek kreslit nebo jen počítat. Pokud by počítal, požádejte ho následně o nakreslení. (Není nutné ho vést k uspořádaným tvarům, jde nám o to, jaké grafické vyjádření zvolí a jak ho vysvětlí.) Pokud bude nejprve kreslit, zeptejte se následně, jak (by) to vypočítal.

³⁹ Termíny základ – část – operátor jsou částečnou analogií termínů používaných běžně v oblasti úloh na procenta. V souvislosti se zlomky se objevují např. v (Hejný a kol., 1990, s. 69).

7.3.2 ÚLOHY O CENÁCH

1. Po slevě o jednu třetinu stála mikina 756 Kč. Kolik stála původně? [Výsledek: 1 134 Kč]
2. Kuchyňský robot stojí v základní verzi 2860 Kč. To je $\frac{5}{8}$ toho, co bychom zaplatili za verzi s úplným příslušenstvím. Kolik stojí úplná verze? [Výsledek: 4 576 Kč]

7.3.3 ÚLOHY S KOLÁČI

Úloha A: Matka Šetřílková peče často na víkend koláč. Dělá ho tak, aby se snědl čerstvý a nic nezbylo.

Recept koláče obsahuje: $\frac{3}{8}$ kg mouky, $\frac{1}{2}$ čtvrtkilogramového balení másla, $\frac{1}{4}$ kilogramového balení cukru, 3 vejce. Kromě toho samozřejmě trochu mléka ke smísení těsta a ovoce podle potřeby.

Rodina má 5 členů: matka, otec, jejich dvě děti (syn a dcera) a babička. Aby koláč vystačil pro celou rodinu, musí ho matka upéct z dvojnásobného množství surovin, než obsahuje recept. Když se koláč nakrájí, snědí otec a matka po třech dílech, děti o $\frac{1}{3}$ více než rodiče, babička naopak o $\frac{1}{3}$ méně (než každý z rodičů).

A1: Kolik surovin (mouky, másla, cukru a vajec) je na koláč potřeba? [Výsledek: $\frac{3}{4}$ kg mouky, $\frac{1}{4}$ kg másla, $\frac{1}{2}$ kg cukru, 6 vajec.]

A2: Na kolik dílů se koláč krájí? [Výsledek: Na $3 + 3 + 4 + 4 + 2 = 16$ dílů.]

Úloha B: Minulý víkend se u Šetřílků zastavili na nečekanou návštěvu Nešetřilovi: teta, strýc, bratranec a malá sestřenice. Matka chce narychlo upéct ještě jeden koláč. Ví, že dospělí (teta a strýc) snědí stejně jako ona a otec, bratranec sní určitě stejně jako každé z jejích dětí (jsou zhruba stejně staří). Naopak malá sestřenice sní jen tolik jako babička.

B1: Problém je v tom, že matka má už jen 5 vajec. Kolik bude matka potřebovat ostatních surovin? [Výsledek: 5 vajec – to vyžaduje $\frac{5}{8}$ kg mouky, $\frac{5}{24}$ kg másla, $\frac{5}{12}$ kg cukru.]

B2: A bude to stačit, aby bylo pro Nešetřilovy koláče dost?

[Pokyny pro tazatele: „Ústně dovysvětlete, že jde o to, zda budou Nešetřilovi mít z koláče každý alespoň stejnou hmotnost (váhu), jako měli Šetřílkovi.“]

[Odpověď: Stačit to bude. Z koláče, který matka peče pro vlastní rodinu, by Nešetřilovi snědli 12 dílů – to jsou $\frac{3}{4}$ koláče. Z počtu vajec, ze kterého dělá koláč pro Nešetřilovy, je patrné, že druhý koláč je pěti šestinami prvního. Je-li tedy surovin na $\frac{5}{6}$ původního koláče, je to více než potřebné $\frac{3}{4}$ – přesně o $\frac{1}{12}$ prvního koláče, tzn. o $\frac{1}{10}$ druhého koláče.]

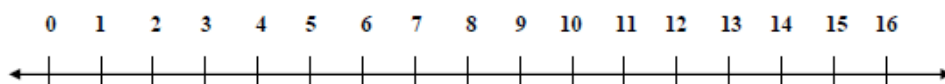
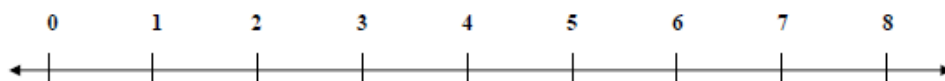
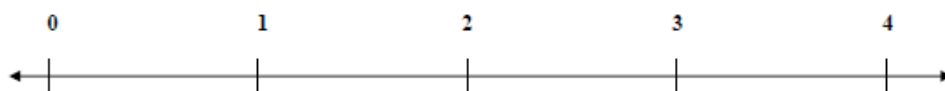
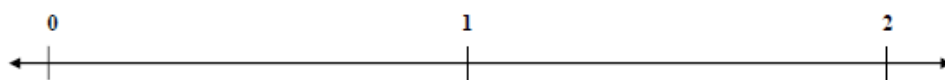
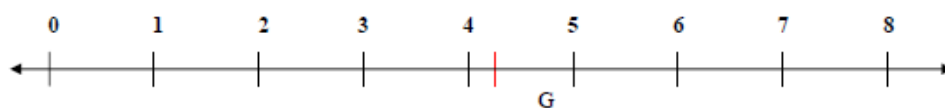
7.3.4 ÚLOHY NA ČÍSELNÉ OSE

Pokyn tazatele žákovi u úlohy 1: „Čísla G a Q jsou zlomky. Číslo G vidíš znázorněné na číselné ose, číslo Q ti řeknu. Máme rovnici $G + Q = N$. Kde přibližně na číselné ose bude ležet N (tedy výsledek) a jakou bude mít hodnotu?“

- a) ($G=\frac{17}{4}$), ($Q=\frac{19}{6}$)⁴⁰ [Výsledek: $\frac{89}{12} = 7\frac{5}{12}$]

⁴⁰ U úlohy 1 uvádíme obrázek se všemi nabídnutými osami, u dalších úloh už jen osu se zadáním.

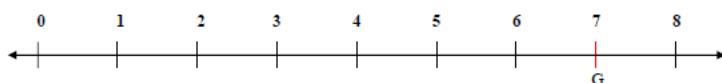
Zlomky na číselné ose – úloha 1



Pokyn tazatele žákovi u úloh 2-4: „Čísla G a Q jsou zlomky. Číslo G vidíš znázorněné na číselné ose, číslo Q ti řeknu. Máme rovnici $G \cdot Q = N$. Kde přibližně na číselné ose bude ležet N (tedy výsledek) a jakou bude mít hodnotu?“

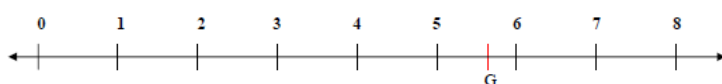
2. ($G=7$), $Q=7/11$ (jeden činitel celé číslo, druhý zlomek menší než 1) [Výsledek: $49/11 = 4\frac{5}{11}$]

Zlomky na číselné ose – úloha 2



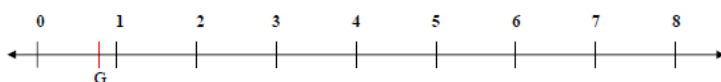
3. ($G=17/3$), $Q=8/11$ (oba zlomky, jeden větší než 1, druhý menší než 1) [Výsledek: $136/33 = 4\frac{4}{33}$]

Zlomky na číselné ose – úloha 3



4. ($G = 7/9$), $Q = 6/12$ (oba zlomky, oba menší než 1) [Výsledek: $7/18$]

Zlomky na číselné ose – úloha 4

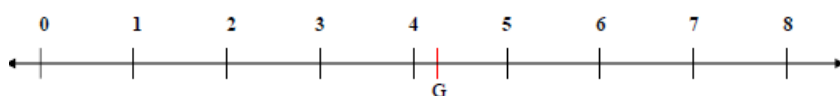


Poznámka: Nadstavbové úlohy zařadíme v případě, že předchozí úlohy netrvaly žákovi příliš dlouho.

Pokyn tazatele žákovi u úlohy 5: „Číslo G a Q jsou zlomky. Číslo G vidíš znázorněné na číselné ose, číslo Q ti řeknu. Máme rovnici $G - Q = N$. Kde přibližně na číselné ose bude ležet N (tedy výsledek) a jakou bude mít hodnotu?“

5. ($G = 51/12$), $Q = 15/9$ [Výsledek: $31/12 = 2\frac{7}{12}$]

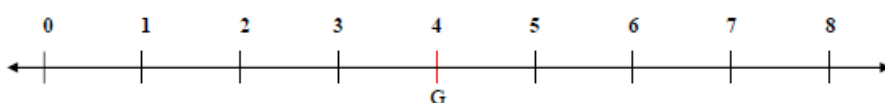
Zlomky na číselné ose – úloha 5



Pokyn tazatele žákovi u úloh 6-7: „Číslo G a Q jsou zlomky. Číslo G vidíš znázorněné na číselné ose, číslo Q ti řeknu. Máme rovnici $G \cdot Q = N$. Kde přibližně na číselné ose bude ležet N (tedy výsledek) a jakou bude mít hodnotu?“

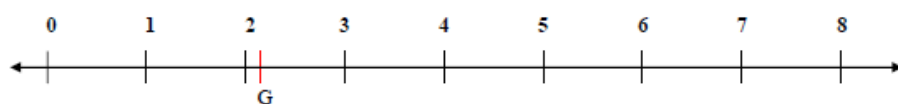
6. ($G = 4$), $Q = 25/9$ (jeden činitel celé číslo, druhý zlomek větší než 1) [Výsledek: $100/9 = 11\frac{1}{9}$]

Zlomky na číselné ose – úloha 6



7. ($G = 28/13$), $Q = 45/7$ (oba zlomky větší než 1) [Výsledek: $1260/91 = 180/13 = 13\frac{11}{13}$]

Zlomky na číselné ose – úloha 7



POKYNY PRO TAZATELE

Všechna zadání se prezentují na číselné ose o rozsahu 0 – 8.

- Nechte žáka vyjádřit (odhadnout) číselnou hodnotu G, následně ji říci přesně a nechte ji žáka zapsat (přímo do formuláře, využijte místo mezi číselnými osami).

- Řekněte žákovi hodnotu Q a nechte ho, aby si ho zapsal a zobrazil Q na číselné ose.

- Ptejte se, na které ose (ze čtyř nabídnutých měřítek) se jim daný výpočet bude nejlépe dělat. Volba jiné než původní osy znamená nutnost znovu znázornit zadané hodnoty G a Q a N.

- Kdyby měli žáci tendenci dosadit hodnoty G a Q do rovnice a výsledek počítat, je třeba nechat je nejprve odhadnout, kde na číselné ose bude N ležet. (A po výpočtu porovnat odhad s výsledkem.)

- Pokud budou mít žáci potíže s numerickým počítáním, nechte je bez pomoci a bez kalkulačky řešit jen první výpočet. V dalších si nechte vysvětlit, co chtějí počítat, a dovoďte jim kalkulačku, případně dělejte numerické výpočty za ně.

- Pokud by měl žák potíže s korespondencí zobrazení na číselné ose a číselné hodnoty zlomku už od počátku, je možné se s ním vrátit k jednodušším zlomkům až např. po $\frac{1}{2}$.
- Pro případ, že by žák několikrát opravoval svá znázornění, odhady a výpočty, je třeba mít několik papírů s číselnými osami v zásobě.

7.4 CHÁPÁNÍ ZLOMKU A JEHO RŮZNÝCH VÝZNAMŮ U NAŠICH ŽÁKŮ

Naši žáci se setkávají se zlomky převážně ve třech významech:

- **Vztah část-celek:** Tento význam je výchozím bodem konstrukce konceptu zlomku na 1. stupni.
- **Zlomek jako číslo:** Zlomek je účastník symbolických operací s čísly.
- **Zlomek jako operátor:** V tomto významu vystupuje zlomek především v klasických slovních úlohách se zlomky s (pseudo)reálným kontextem. Elementárními úlohami s operátorem jsou však i úlohy typu „kolik je m n -tin z x “ (např. $\frac{1}{3}$ z 27, $\frac{5}{8}$ z 24, $\frac{12}{7}$ ze 49).

Dalším významem je **zlomek jako míra**, tedy jako velikost daná vzdáleností od nuly na číselné ose. V zahraniční literatuře je tento význam často považován za klíčový pro konceptuální porozumění zlomkům. Často se však konstatuje, že je využíván nedostatečně. I u nás se s ním žáci setkávají mnohem méně než s předchozími třemi.

V odborné literatuře se vyčleňují ještě další dva významy. Prvním z nich je **zlomek jako podíl**. Předpokládáme, že zlomek jako podíl představuje pro naše žáky spíše jen jiný zápis pro dělení. Pak jim konstatování, že výsledkem dělení $10 : 3$ je $\frac{10}{3}$, nedává smysl. Význam podílu v tom smyslu, jak ho uvádí odborná literatura, by mohl být patrný při operaci na číselné ose. Tam $10 : 3$ znamená rozdělit úsek 0 až 10 na tři stejné části. Jak velké tyto části budou?

Posledním významem zlomku je **zlomek jako poměr**. V něm se vlastně kontext „část-celek“ mění na „část-část-celek“, což základní vztah celek-část komplikuje. Otázkou pak je, zda by se zlomek jako poměr měl probírat souběžně s jinými významy, nebo raději zvlášť, aby nekomplikoval základní porozumění zlomkům.

7.4.1 OBTÍŽE ŽÁKŮ PŘI CHÁPÁNÍ ZLOMKU JAKO ČÍSLA

V tomto významu je zlomek především číslem, s nímž se počítá (je účastníkem aritmetických výpočtů), a žáci se s ním tedy setkávají často. Podle našich zkušeností se zlomky v početních operacích jeví žákům jako zvláštní druh čísel, s nimiž se počítá podle jiných pravidel než s „běžnými“ čísly. Přičemž se žáci často nesnaží do logiky těchto pravidel proniknout. Pravidla tak u nich zůstávají nepojena, bez vzájemných souvislostí, nedají se odvodit. Při výpočtu jde především o přiřazení správného pravidla.

Vondrová a Žalská (2013) shrnují poznatky z rozhovorů s učiteli takto:

U zlomků působí problém zejména osvojení si základních početních operací..., ale také jiné operace využívající podstaty ekvivalence dvou zlomků, jako je krácení zlomků nebo převod mezi zlomkem a smíšeným číslem. Učitelé se shodují v tom, že žáci si osvojí operace každou zvlášť, ale jejich kombinace (například násobení a sčítání v jedné úloze nebo v jednom souboru úloh) jim dělá problémy. (s. 74)

Také v našich rozhovorech se žáci dopouštěli záměn početních operací se zlomky i v elementárních krocích. Nebyli si např. jistí, zda jednu třetinu z něčeho vypočítají tak, že budou násobit jednou třetinou, dělit jednou třetinou, dělit třemi či někdy i násobit třemi. To je zřejmý projev nedostatečného konceptuálního porozumění. Ovšem odpověď na otázku, jak by vlastně takové konceptuální porozumění mělo vypadat a jakým způsobem ho dosáhnout, není vůbec jednoduchá, a to ani u základní úlohy typu „kolik je jedna n -tina z x ?“. Problémem je korespondence předložky „z“ s číselnou operací, jinými slovy otázka, zda zadání „jedna n -tina z x “ odpovídá operaci „ $\frac{1}{n} \cdot x$ “ nebo „ $x : n$ “ nebo „ $x : \frac{1}{n}$ “.

Doporučení: Položme si otázku, jak vůbec žákům vysvětlit, že „čtyři pětiny z pěti“ je $\frac{4}{5} \cdot 5$, zatímco „čtyři z pěti“ je běžně chápáno jako $4 : 5$. Je to vlastně „sémantická past“: Jazykový výraz „4 z 5“ bude většinou chápán tak, že 5 je celek, z něhož bereme 4, tedy zlomkovou část, což jsou vlastně $\frac{4}{5}$ tohoto celku. To odpovídá úloze, v níž

známe základ, zlomkovou část a zjišťujeme operátor. Pokud ovšem vyjádříme 4 jako zlomek, např. jako $12/3$, pak tento zlomek bereme naopak jako operátor a při základu 5 je výsledná zlomková část 20. To vlastně odpovídá úloze, v níž známe základ a operátor a zjišťujeme zlomkovou část. Jednou onomu „z“ odpovídá dělení, podruhé násobení.

Možná ještě důležitější je následující skutečnost. To, že jedna n -tina z něčeho je část vzniklá rozdělením na n stejných částí, je v kontextu celek-část způsob definování zlomku. V základu definice (kmenového) zlomku je tak dělení. Toto dělení se demonstruje na reálných předmětech (koláč, pizza, čokoláda, tyč, kuličky), případně na (většinou) obdélnících předem rozdělených na části. Takovému „dělení“ možná navíc v dětském vnímání odpovídá spíše „krájení“ než matematická operace dělení. Tak či onak, stane-li se prototypem (typickým představitelem) zlomku kmenový zlomek, je operace násobení vyřazena ze hry (násobení čitatelem 1 postrádá smysl). Navíc větší počet „nakrájených“ n -tin se i v případě složitějších úloh získává spíše postupným spočítáním (napočítáním po jedné) než násobením. Odvodit z toho, že $x : n = 1/n \cdot x$ možná není pro dítě zdaleka tak samozřejmé, jak to připadá dospělým.

Aby k vytvoření takového prototypu (zlomek je kmenový zlomek, tedy část, která se získá rozdělením celku na n stejných částí) nedošlo, bylo by podle našeho názoru třeba

1. bez větší časové prodlevy začít pracovat i s nekmenovými zlomky,
2. zavést jako celky (základy) počty větší než jedna.

Např. v úloze „odvézt ze skladu $3/8$ ze 48 automobilů“ znamená výpočet zlomkové části nutně zahrnutí operace násobení. Zároveň je taková úloha už vlastně úlohou se zlomkovým operátorem. Při těchto úlohách může ovšem zlomek být dětmi chápán jen jako posloupnost operací dělení jmenovatelem a násobení čitatelem a tento algoritmus tedy ze zlomku činí dvě oddělená čísla. Je tedy třeba tento výpočet, resp. strukturu obsaženou v úloze souběžně ukazovat v kontextu celek-část, aby byl zlomek chápán jako jedno číslo. Např. ukázat členění 48 teček na osminy a vyznačit v něm strukturu odvezených a zbylých automobilů.

Potíže s těmito elementárními úlohami ukazují, že je třeba zároveň ukazovat a procvičovat ekvivalenci zlomkových výrazů nejen ve formě matematických výrazů, ale také výrazů jazykových: „ m n -tin z něčeho (z x)“ je vlastně „ m krát $1/n$ z něčeho“, a to je „ m krát něco/ n “ a to mohu zapsat také jako „ $m \cdot \text{něco} / n$ “. Je třeba vycházet z vyjádření, která dětem dávají smysl, a teprve pak postupně ukazovat, že ekvivalentními úpravami se tento smysl nemění. Kromě toho je třeba rozšiřovat rejstřík jejich chápání jazykových výrazů spojených se zlomky. Žáci mají např. problémy chápat výraz „každý pátý účastník“ jako „jedna pětina účastníků“, chápat rozdíl mezi „o třetinu více“ a „třikrát více“ apod. (viz také kap. 6).

7.4.2 PROBLÉMY ŽÁKŮ V ZÁKLADNÍ ZLOMKOVÉ STRUKTURACI A V ÚLOHÁCH S OPERÁTOREM

Zajímavé poznatky o základní orientaci našich žáků ve zlomkové strukturaci celku přinášejí některá testování. Ukazuje se, že mnoho žáků má problém vypočítat celek, je-li příslušný zlomkový operátor vyjádřen nepřímo jako doplněk součtu několika zlomků do 1.

TIMSS 2007, 8. ročník: Lístky na koncert stojí 10 zedů, 15 zedů a 30 zedů.

Z 900 prodaných lístků byla $1/5$ po 30 zedech a $2/3$ po 15 zedech.

Vyjádři ZLOMKEM, jaká část prodaných lístků byla po 10 zedech.

Úlohu z TIMSS vyřešilo úspěšně jen 22 % našich žáků (32 % úlohu vynechalo).

CERMAT ve svém projektu Kvalita I zadal v roce 2007 v 9. ročnících úlohu, která spočívala v úkolu určit cenu zboží, když splátky v prvních dvou letech byly vyjádřeny dvěma různými kmenovými zlomky a ve třetím roce konkrétní částkou. Úspěšnost byla pouze 30 % ($n = 58\,604$).

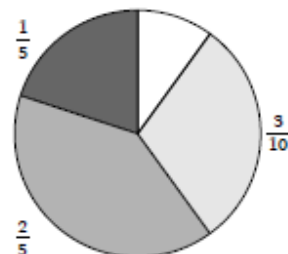
Podobná úloha byla zadána v rámci projektu Kalibro ve školním roce 2010/2011 v sedmých ročnících. Úspěšnost byla 37 % ($n = 2\,798$).

Kalibro, 2010/2011, 7. ročník ($n = 2\,798$)

D úspěšnost 37

Kruhový diagram znázorňuje, jaký díl z celkového počtu mobilních telefonů prodaných v roce 2010 se prodal v jednotlivých čtvrtletích. V prvním čtvrtletí, u něhož údaj chybí, se prodalo 25 000 kusů mobilních telefonů. Kolik kusů mobilních telefonů se prodalo v roce 2010 celkem?

Počet kusů: 250 000



Ve školním roce 2012/13 zadalo Kalibro v 7. ročnících poměrně složitou slovní úlohu ($n = 1925$):

F úspěšnost 59, reduk. 4

1	3	5	7						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

Babička upekla vnučatům pekáč buchet. Anička snědla 8 buchet. Bert snědl jednu čtvrtinu všech buchet a Cilka snědla jednu šestinu všech buchet. Buchet na pekáči nebylo více než 50, jedly se celé a mohly i zbýt. Vyber všechna pravdivá tvrzení.

- | | | | |
|--|----|--|----|
| 1. Babička určitě upekla více než 20 buchet. | 78 | 5. Na pekáči mohlo zbýt 13 buchet. | 27 |
| 2. Anička určitě snědla nejvíce buchet. | 22 | 6. Bert s Cilkou mohli dohromady sníst více než polovinu buchet. | 44 |
| 3. Pekáč mohl mít „rozměry“ 6×8 buchet. | 46 | 7. Bert určitě snědl více buchet než Cilka. | 61 |
| 4. Na pekáči mohlo zbýt 7 buchet. | 28 | | |

Správné tvrzení, že Bert určitě snědl více buchet než Cilka, považovalo za pravdivé 61 % žáků, chybné tvrzení, že Bert s Cilkou mohli dohromady sníst více než polovinu buchet, považovalo za pravdivé 44 % žáků. Vyšší úspěšnost zde ovšem s velkou pravděpodobností můžeme přičíst tomu, že tu jde o volbu odpovědi ano – ne, zatímco v ostatních úlohách jde o vlastní odpověď.

Uvedené úlohy potvrzují problémy českých žáků se základní zlomkovou strukturací celku, jde-li o zlomky s různým jmenovatelem. K horším výsledkům v úloze TIMSS oproti úloze CERMATu může přispívat to, že jeden ze zadaných zlomků je nekmenový (čitatel je větší než 1).

V graficky zadaných úlohách s operátorem jsme se v našich rozhovorech setkali s obtížemi jen u několika žáků. Týkaly se jednak členění na n -tiny, jednak interference výpočtů v různých typech úloh s operátorem.

V našem výzkumu jsme zadali úlohy uvedené v oddíle 7.3.1. U všech tří úloh jde o zjištění základu, přičemž zlomková část je zadána jako různě graficky členěný počet kusů. Zvyšující se obtížnost úloh měla být dána hlavně zvyšující se hodnotou čitatele, tedy jakýmsi vzdalováním se od kmenového zlomku. S tím souvisí složitost grafického uspořádání a náročnost grafického členění na n -tiny.

V první úloze je nízká obtížnost daná tím, že operátorem je kmenový zlomek, jedna n -tina je to, co je nakresleno. I v druhé úloze je členění dosti patrné, i když uspořádání do čtverce s vodorovnou základnou by bylo ještě snazší. Ve třetí úloze je grafické členění na n -tiny nejméně patrné.

Pro většinu dětí nebyly úlohy obtížné. Jen několikrát se objevily problémy s tím, že za jednu n -tinu považovaly jeden prvek (čtvereček, kolečko, hvězdička), nebo v případě úlohy 3 trojice hvězdiček. Vladimír (9. ročník) se chyby tohoto typu dopustil pouze u úlohy 3.

Vladimír: Protože $5/6$ je těch 9,10, moment, no, těch 10 hvězdiček...

T: Je $5/6$.

Vladimír: Tak 11 hvězdiček bude těch $6/6$.

Zajímavé srovnání nabízí výzkum Sedlákové (2006). Sedláková v jedné z úloh ukázala jedenácti dětem ze 7. ročníku a šesti dětem z 8. ročníku 18 teček uspořádaných do šesti řádků a tří sloupců. Následně po nich chtěla vyznačit postupně $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{12}$ a $\frac{4}{18}$. Zatímco tedy v našem výzkumu představovaly úlohy s obrázky z oddílu 7.3.1 z hlediska členění úloh s operátorem 2. typ úloh, u Sedlákové šlo o 1. typ.

Sedláková podobně jako my zjistila, že některé děti vyčleňují n -tiny v grafickém obrazci jako tvar. V úlohách s třetinami a šestinami byla častější strukturace náraz, jako by děti třetiny a šestiny rovnou viděly. U zbylých zlomků postupovali spíše tak, že si tiply velikost n -tiny jako útvaru a následně ověřovaly, zda dostávají opravdu n částí, případně zkoušeli různé varianty členění celého útvaru. Ukázalo se, že čím byl jmenovatel větší, tím méně se děti snažily postihnout n -tiny jako tvary a více úlohy řešily pomocí tzv. početní strukturace, která vychází ze zjištění n -tiny výpočtem. Z výsledků lze usuzovat, že u dětí na 2. stupni v úlohách, v nichž jim není zřejmá strukturace náraz, výrazně převažuje strukturace prostřednictvím výpočtů nad snahou zkoušet grafická řešení.

Další potíže žáků se týkají toho, jak vypočítat celek, což souvisí s problematikou úloh se **zlomkem jako operátorem**.

V projektu CERMATu (2006; $n = 8\,814$; šlo o testování ve třech krajích) úspěšně řešilo přes 50 % žáků už v 5. ročníku úlohy, kde operátorem byly familiární kmenové zlomky (za familiární kmenové zlomky považujeme zlomky se jmenovatelem menším nebo rovným 5). Zde šlo o úlohu 2. typu: Je zadána cena zboží po zlevnění, která představuje $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{1}{5}$ původní ceny, zjišťuje se původní cena.

V testech Kalibro pro 5. ročník (2010/11) řešilo 49 % žáků správně i úlohu 3. typu ($n = 6\,373$):

Alena doma zvážila některé předměty a výsledky vážení zapsala do tabulky. Tabulku si prohlédni a potom vyřeš úlohy uvedené pod ní.

Předmět	Hmotnost (gramy)	Předmět	Hmotnost (gramy)
skleněná kulička	12	krabička se 40 zápalkami	9
dřevěná tužka	3	prázdná krabička od zápalek	5
prázdná sklenička	227	kousek modelíny	30
kostka cukru	4	korková zátka	6
3 připínáčky celkem	1		

N úspěšnost 49	2
-----------------------	---

Alena nakonec obalila modelínou korkovou zátka. Spotřebovala všechnu modelínu a vznikl pěkný váleček. Jaký díl hmotnosti válečku představuje hmotnost samotné korkové zátky?

*(pracuj s tabulkou; zapiš do rámečku číslo **jediné** odpovědi, která vyjadřuje podíl zátky na hmotnosti válečku)*

1. Je to $\frac{1}{5}$. 15 2. Je to $\frac{1}{6}$. 49 3. Jsou to $\frac{3}{4}$. 18 4. Je to $\frac{1}{4}$. 7

Kromě 49 % úspěšných řešitelů v této úloze dalších 15 % žáků dělalo chybu spíše v tom, že k sobě vztáhli hmotnosti zátky a modelíny ($\frac{1}{5}$).

TIMSS 2007, 8. ročník: Dělník uřízl $\frac{1}{5}$ trubky. Kus, který odřízl, byl 3 metry dlouhý. Kolik metrů měřila původní trubka? A. 8 m [11 %] B. 12 m [9 %] C. 15 m [76 %] D. 18 m [4 %]
--

Právě uvedená úloha je 2. typu. Odpověď „12 m“ zřejmě poukazuje na to, že žáci počítali délku zbylé trubky, a jejich problém tedy nespočíval ve strukturaci celku. Zajímavé by ovšem bylo znát úvahy více než 11 % žáků, kteří volili odpověď „8 m“.

TIMSS 2007, 8. ročník: Anna a Jana si mezi sebou rozdělují 560 zedů. Když Jana dostane $\frac{3}{8}$ peněz, kolik zedů dostane Anna?

Tuto úlohu úspěšně řešilo jen 37 % našich žáků a dalších 15 % úlohu vynechalo. I kdybychom přičetli 14 % nesprávných odpovědí „210“, které počítají část pro Janu na místo pro Annu, ale prokazují schopnost takového výpočtu, šlo by o úspěšnost výrazně nižší než v předchozí úloze. Můžeme si klást otázku, nakolik sehrává roli to, že se v úloze pracuje s operátorem ve tvaru nekmenového zlomku ($\frac{3}{8}$). Ve hře je ovšem také to, že jde o úlohu bez nabídky odpovědi a výpočty se dělají s většími čísly.

7.4.3 OBTÍŽE ŽÁKŮ PŘI IDENTIFIKACI ZÁKLADU

Operátor má sémanticky smysl jen ve vazbě na základ (resp. kvantitu, na níž provádí operaci), ale dětem se možná někdy jeví jako číslo, které odkazuje na pravidlo. Např. pro operátor $\frac{3}{4}$ to znamená „vyděl čtyřmi a vynásob třemi“. Dochází zde tedy k interferenci mezi významem zlomku jako čísla na jedné straně a významem zlomku jako vztahu celek-část nebo zlomku jako operátoru, které oba nutně zahrnují vztah k předmětné kvantitě, na straně druhé.

Příkladem nesprávného chápání operátoru je Aneta, která se snažila vypočítat množství mouky v úloze z oddílu 7.3.3 snížené o $\frac{1}{6}$ oproti původnímu množství $\frac{6}{8}$ kg mouky tak, že odčítala $\frac{6}{8} - \frac{1}{6}$. Nevztáhla tedy operátor $\frac{1}{6}$ k žádnému základu a operovala s ním přímo jako s číslem, tedy účastníkem operace odčítání.

Na rozdíl od aditivního operátoru v úlohách s multiplikativním operátorem absence vnímání tohoto vztahu a zacházení se zlomkem jako s číslem většinou nezpůsobuje problém, protože posloupnost násobení a dělení (nebo obráceně) je tu adekvátním algoritmem. Špatné porozumění zlomku jako operátoru tak není viditelné, mohlo by se projevit až při dotazu na jednu n -tinu a na strukturaci celku (základu) a části jejím prostřednictvím.

Např. je-li základem 12 jablek, pak zjistit $\frac{3}{4}$ z 12 jablek znamená výpočet $(12 : 4) \cdot 3$ nebo $(12 \cdot 3) : 4$. Žák přitom nemusí ani u prvního výpočtu vědět, že „jedna čtvrtina jsou tři jablka a tři čtvrtiny je třikrát tolik“ (tím méně u druhého výpočtu), a přesto mu vyjde správný výsledek a neporozumění zůstává skryto. Naproti tomu při zjišťování, kolik je „o $\frac{3}{4}$ méně než 12 jablek (= ze základu 12 jablek)“ signalizuje výpočet $12 - \frac{3}{4}$ zřetelně neporozumění, ať už momentální nebo trvalejšího rázu.⁴¹

Zdá se, že v obou kontextech (zlomek jako vztah celek-část i zlomek jako operátor) nemusí být skutečnost, že žák nevnímá vazbu zlomku na jednotku kvantity, pro pozorovatele vůbec zřejmá. V kontextu celek-část je většinou jednotkou kvantity stále jeden celek-kus, a opakované uvádění, že jde o jednu čtvrtinu *koláče*, o dvě pětiny *koláče*, tři osminy *koláče*, se nezdá potřebné a z jazykového hlediska je nepřirozené. Často tedy nejde jednoznačně vysvětlit příčinu jednotlivé chyby žáka a nelze rozhodnout, zda problém vzniká na úrovni matematických vztahů nebo na úrovni interpretace jazykových výrazů.

V našem online dotazníku (viz kap. 3) odpovídali učitelé také na otázku, jaké typické chyby předpokládají u úlohy Obrázky 3 z oddílu 7.3.1. Při srovnání s našimi výsledky se zdá, že část učitelů obtížnost úlohy spíše přeceňuje, většinou však učitelé popsali typy chyb, s nimiž jsme se setkali. (Podrobněji viz *Kniha*, oddíl 4.5.2.)

Dalším problémem při identifikaci základu může být chybný předpoklad, že pokud se v úloze objevuje více zlomků, vztahují se všechny k témuž základu, nebo naopak že stejný zlomek znamená stejnou velikost zlomkové části. Typickým příkladem tohoto předpokladu jsou chyby žáků v úlohách, kde zboží bylo zlevněno o určitý zlomek své ceny, a pak bylo znovu zlevněno o jiný (případně i tentýž) zlomek (stávající) ceny. Žáci často vztahují obě slevy

⁴¹ Nemusí jít nutně o neporozumění zlomkům. Žák může zadání chápat jako „o $\frac{3}{4}$ jablka méně“. Jde pak o neporozumění na úrovni jazykové konvence.

k původní ceně. Projekt Kalibro zadal žákům 7. ročníků tento typ úlohy ve školním roce 2011/12 ($n = 2\,476$). Jednalo se o úlohu, v níž byla cena šamponu nejprve o $1/5$ zvýšena a po třech měsících o $1/5$ snížena. Žáci se vyjadřovali k sérii tvrzení, přičemž 45 % z nich souhlasilo s tvrzením, že šampon stál po červnové slevě stejně jako před zdražením v březnu.

Tichá a Macháčková (2006, s. 27) zmiňují další tendence žáků při identifikaci základu: Pokud jsou v textu úlohy dvě čísla, pak jako základ budeme brát větší z nich; pokud je v textu číslo a zlomek, pak číslo představuje celek.

7.4.4 OBTÍŽE ŽÁKŮ U ÚLOH S OPERÁTORY ZPŮSOBENÉ INTERFERENCÍ TYPŮ ÚLOH A VÝPOČTŮ V TĚCHTO ÚLOHÁCH

Chyby tohoto typu se mohou týkat jednak všech možných záměn pozic číselných členů úlohy – především základu a zlomkové části, případně i zlomkového operátoru, pokud by byly základ nebo zlomková část vyjádřeny zlomkem. V našich rozhovorech jsme na záměny výpočtů pro úlohy 1. typu (kde hledáme zlomkovou část) a 2. typu (kde hledáme základ) narazili ve všech slovních úlohách uvedených v oddíle 7.3.2 a 7.3.3.

Chybný výpočet může mít minimálně dvě příčiny, které většinou není možno rozlišit bez cíleného dotazování:

- Žák správně identifikuje strukturu úlohy (mám několik n -tin, najdu jednu n -tinu a pak základ), ale neví, jaký výpočet (posloupnost operací) tomu odpovídá.
- Interference se projevuje už na úrovni porozumění struktuře úlohy, resp. vztahů jejích členů.

Také Sedláková (2006) zaznamenala u žáků postupy, kdy při zjišťování počtu teček v n -tině žáci zaměňovali správné dělení jmenovatelem za dělení čitatelem (díky interferenci dvou základních typů úloh s operátorem). Zjistila také, že některé děti, které správně určí zlomkovou část prostřednictvím operátorového výpočtu (např. $2/9 \cdot 18 = 4$) a vyznačí 4 tečky v celkovém útvaru, přesto následně nedokáží útvar rozčlenit na (jednotlivé) devítiny.

Z toho na jedné straně plyne, že samo zvládnutí výpočtu s operátorem neznamená porozumění zlomkové strukturaci celku. Na druhé straně jsme zjistili, že ani chápání vztahu neznamenalo automaticky znalost výpočtu či schopnost ho vyvodit.

Uvedeme příklad úlohy uvedené v oddíle 7.3.2: „Po slevě o jednu třetinu stála mikina 756 Kč. Kolik stála původně?“

Většina žáků začínala výpočet tím, že dělila $756 : 3$. Ovšem během rozhovorů se ukázalo, že význam tohoto kroku nebyl u všech žáků stejný. Někteří pomocí něj hledali třetinu, kterou je třeba ke zlevněné ceně přičíst, aby získali cenu původní.

Jitka (9. ročník): Mikina stála 756 po slevě a dřív stála o $1/3$ víc. Takže $1/3$ z 756 je 252, takže $756 + 252$ je 1 009 korun.

Jiní věděli, že 756 Kč představuje dvě třetiny původní ceny, ale původní cenu – základ – zjišťovali chybným výpočtem.

Isabella (sekunda gymnázia): Takže... (píše $756 = 2/3$ a něco polohlasně říká.)

T: Výborně.

Isabella: A jedna třetina. Jo už to chápu. 756 děleno třemi... (zapisuje to, co říká.) Jsou dva...

T: Ano... Proč?

Isabella: Když to vydělím a pak to vynásobím dvěma...

Tazatelka: Tak dostaneš co?

Isabella (hodně potichu): Tak dostanu ten výsledek...

Doporučení: Ve vztahu k úlohám se zlomkovým operátorem by podle našeho názoru bylo dobré uvažovat nad tím, jak žákům více otevřít vhléd do struktury úlohy – tedy jejích členů, vztahů mezi nimi a také výpočtů, které s těmito vztahy korespondují. Domníváme se, že přispět by k tomu mohly explicitní a jednoznačné termíny

k označení jednotlivých členů úlohy obdobně, jako je tomu běžně u procent. Námi užívané termíny **základ** a **zlomková část** by zřejmě bylo možno ponechat právě pro jejich zřetelnou analogii s úlohami s procenty. Bylo by asi nutné se zamyslet nad takovým označením operátoru, které by žákům dávalo smysl podobně jako u úloh s procenty termín „počet procent“.

Dalším doporučením by bylo podobně jako u procent jasně odlišit tři základní typy úloh. Žáci by se mohli explicitně učit typy úloh rozlišovat, být u každé úlohy vedeni k uvědomění, který údaj v zadání odpovídá kterému členu úlohy (základ, zlomková část, operátor), o který typ úlohy tedy jde, a také k uvědomění korespondující logiky výpočtu. Lze si pak představit, že část procvičování by byla zaměřena pouze na rozpoznávání typů úloh s případným naznačením výpočtu, aniž by je přitom žáci řešili. Podobná didaktická praktika se využívá při výuce přímé a nepřímé úměrnosti. Podobně jako u úměrností je však třeba podotknout, že výuka zaměřená na odlišení základních typů úloh nesmí být zaměřena na mechanické zvládnutí tří typů algoritmů pro jejich řešení.

Orientace výuky úloh s operátorem na tyto aspekty by s sebou automaticky nesla propojení s kontextem celek-část, včetně jeho znázorňování. Výše zmíněnou úlohu TIMSS, v níž se Jana a Anna dělí o 560 zedů, je např. možno znázornit výsečovým grafem, v němž kruh (=560 zedů) bude rozčleněn na osminy, z nichž každá představuje 70 zedů. Tři díly-osminy kruhu (celku, základu) patří Janě a odpovídají částce 210 zedů, zbytek, tedy 5/8, patří Anně a činí 350 zedů.

7.4.5 OBTÍŽE ŽÁKŮ SE ZLOMKEM JAKO MÍROU

S tímto významem zlomku se naši žáci podle našich zkušeností setkávají jen zřídka, což odpovídá i výsledkům našich rozhovorů s žáky. Žáci měli velké problémy s umisťováním zlomků na číselnou osu.

V rámci rozhovorů jsme žákům zadali úlohy z oddílu 7.3.4. Pokyny pro tazatele směřovaly k tomu, aby žák byl nucen dávat do souvislosti číselné vyjádření zlomků a jejich pozici na číselné ose a aby také odhad výsledku operace nejprve umístil na ose a teprve potom prováděl výpočet. Žákovi byly také nabídnuty další osy v jiném měřítku a měl možnost volit, která je pro řešení dané úlohy vhodná.

O nedokonalé představě zlomkového členění číselného kontinua reprezentovaného číselnou osou či její úplné absenci svědčí fakt, že v řadě případů se děti v našich rozhovorech pokoušely vyjádřit zlomkem číselnou hodnotu bodu na ose tak, že za jmenovatele nebo čitatele braly sousední celá čísla. Podle této logiky by např. byly v intervalu mezi 4 a 5 čtvrtiny nebo pětiny, blízkost čísla 2 by ukazovala na čísel 2 apod.

Např. Vladimír se v následující ukázce pokouší umístit číslo 19/6.

Vladimír: Bude to v rozmezí tý pětky šestky.

T: Proč myslíš?

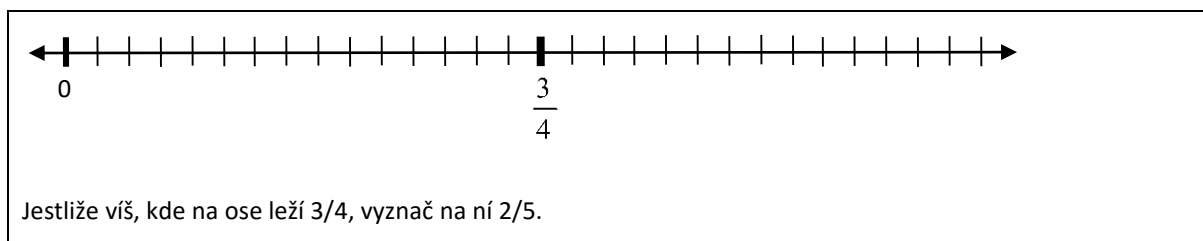
Vladimír: Nebo ne, šestky sedmičky. Protože to je těch šestin a tady jsme, když jsme počítali s tou čtyřkou, tak to bylo za tou čtyřkou.

T: Je to zavádějící, když počítáme se čtyřkou, tak se tam kupodivu objevily čtvrtiny, tudíž když jsou tam šestiny, myslíš, že budeme počítat za šestkou. Tvrděj to skoro všichni.

Vladimír: Chyba?

Tazatelka: No, zkus se zamyslet, co je to 19/6.

Podobné jevy zaznamenala i Sedláková (2006). Zadala dětem osu s popsány body 0 a 3/4, mezi nimiž bylo vyznačeno 15 dílků, vpravo od 3/4 pak dalších 14 dílků (obr. 7.1).

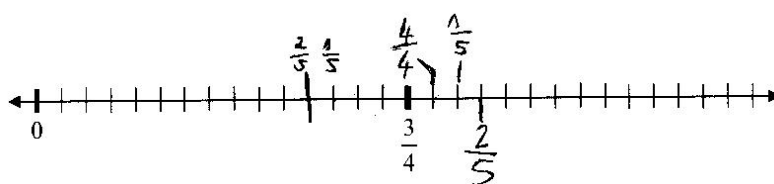


Obr. 7.1: Sedláková (2006), Úloha 6

Některé děti uvažovaly podle jejich zjištění takto:

$\frac{3}{4}$ jsou na patnácté čáře, proto $\frac{4}{4}$ budou za nimi na šestnácté čáře, $\frac{2}{4}$ na čtrnácté a $\frac{1}{4}$ na třinácté čáře před $\frac{3}{4}$. Takto se děti vyrovnají se čtvrtinami. Některé děti pak umísťují pětiny za $\frac{4}{4}$ ($\frac{1}{5}$ pak leží na sedmnácté, $\frac{2}{5}$ na osmnácté, $\frac{3}{5}$ na devatenácté čáře atd.). Jiné pracují s faktem, že $\frac{2}{5}$ jsou menší než $\frac{3}{4}$, a proto umísťují pětiny před čtvrtiny. $\frac{1}{5}$ pak leží na dvanácté a $\frac{2}{5}$ na jedenácté čáře nebo jsou $\frac{2}{5}$ umístěny někde před třináctou čárkou, na které leží $\frac{1}{4}$. Dítě, jehož řešení znázorňuje obrázek, nejprve umísťovalo pětiny za čtvrtiny a po mém upozornění na velikostní nesrovnalost pětiny přemístilo před čtvrtiny.

Popsaná strategie je jeden ze způsobů vřazování zlomků do číselného kontinua. Děti při této strategii řadí zlomky na číselnou osu kontinuálně za sebou po jedné čáře. Přitom umísťují zlomky se stejným jmenovatelem vedle sebe. Vytvářejí tak na číselné ose skupinky stejných n -tin. (Sedláková, 2006, s. 105)



Obr. 7.2: Příklad miskoncepce pozice zlomku na číselné ose (Sedláková, 2006, s. 105)

Sedláková popisuje ve zmíněné úloze i další způsoby, jak žáci pracovali. Ovšem v žádném dítě nebylo $\frac{2}{5}$ prostřednictvím celku, který by se odvodil z počtu dílů mezi číslem 0 a $\frac{3}{4}$. Když se autorka na celek zeptala, braly ho jako 15 čárek mezi čísly 0 a $\frac{3}{4}$, jako všechny čárky vyznačené na ose, jako $\frac{3}{4}$ zvětšené o 4 čárky (s vysvětlením, že čtvrtina jsou čtyři čárky). Jen čtyři děti byly úspěšné samy bez dopomoci a ty použily převod na společného jmenovatele. Zdá se však, že u některých to byl spíše pokus-omyl umožněný tím, že společný jmenovatel 20 odpovídal tomu, jak byla osa členěna na dílky. I výsledky Sedlákové tedy ukazují, že práce se zlomky na číselné ose je pro naše žáky obtížná.

V našich rozhovorech někteří žáci nezvládali ani odhad umístění zlomků menších než 1 a jejich vzájemné pozice, zejména pokud šlo o zlomky se jmenovatelem větším než 5. Potvrzuje se tak skutečnost, že porozumění familiárním zlomkům zdaleka neznamená porozumění zlomkům obecně. Dále se ukázalo, že se zlomkem na ose žáci intuitivně pracují tak, jako by číselník bez ohledu na zadaného jmenovatele ukazoval počet desetin, jinými slovy jako by každý zlomek brali jako desetiny.

T: Sedm čtyřiceti devítin je kolik, když to vykrátíš?

Sofie (9. ročník): Nula celá sedm.

Často se také projevovala neznalost nebo chyby při převodu zlomků na desetinná čísla a naopak, např. v poměrně časté chybě typu „ m celých n desetin rovná se m n -tin“.

T: 4,3, tak a umíš 4,3 napsat jako zlomek?

Bohumil (9. ročník): To jsou čtyři třetiny, ne?

Potíže českých žáků při používání smíšených čísel a při převodu zlomků na desetinná čísla může ilustrovat také úloha testu TIMSS 2007 pro 8. ročníky, kde měli žáci převést na desetinné číslo smíšené číslo $3\frac{5}{6}$. Úlohu byla otevřená, nešlo tedy o výběr z nabídnutých odpovědí. Správně ji řešilo jen 27,5 % našich žáků a 15 % ji vynechalo. Celých 9 % žáků uvedlo odpověď 3,56.

Součástí úloh na číselné ose (viz oddíl 7.3.4) v našich rozhovorech byl odhad, kde na ose bude ležet výsledek operace. Žáci při odhadech volili většinou aritmetický postup, v němž pracovali s celočíselnými hodnotami smíšených čísel, na něž předtím zlomky převedli. Grafický postup, odpovídající vlastně sčítání, odčítání a násobení úseček, využívali v mnohem menší míře.

Faktorem, který dětem výrazně komplikoval odhady, bylo násobení zlomkem menším než 1. Vyplývá to ze skutečnosti, že zatímco úspěšnost řešení úloh (tedy správné umístění zlomků na číselné ose, výpočet zadané operace a umístění výsledku na číselné ose) se postupně zvyšovala tak, jak žáci řešili jednotlivé úlohy, úspěšnost odhadů postupně klesala, protože úlohy byly obtížnější: sčítání ($17/4 + 19/6$) – násobení celého čísla a zlomku menšího než 1 ($7 \cdot 7/11$) – násobení zlomku většího než 1 a zlomku menšího než 1 ($17/3 \cdot 8/11$) – násobení dvou zlomků menších než 1 ($7/9 \cdot 6/12$).

Řešení úlohy s násobením zlomků menších než 1 jsme mohli porovnat s výsledky českých žáků 8. ročníků ve srovnatelné úloze TIMSS 2007. V obou případech použili žáci zhruba tytéž postupy. Můžeme je seřadit tak, že představují postupné fáze přechodu od a) představy, že při násobení se čísla nutně zvětšují, takže jsou vždy alespoň dvojnásobkem jednoho z činitelů,⁴² b) k postupné korekci tohoto zvětšování. V první korekci je výsledek stále větší než oba činitele, ale už je menší než 1. Ve druhé korekci je výsledek umístěn mezi oba činitele. To poukazuje na představu, že první z činitelů se po vynásobení číslem menším než 1 zmenší. Tento druhý případ byl v našich rozhovorech mnohem častější než ve zmíněné úloze TIMSS. To však je možné přisoudit vlivu předchozích úloh a rozhovoru s tazatelkami.

Doporučení: Jako klíčová se pro pochopení pozice zlomků na ose a zlomkové struktury číselného kontinua ukázala obeznámenost s tím, co to je **smíšené číslo**. Někteří žáci nevěděli, o co se jedná, ale po prvním použití na radu tazatelky si ho byli schopni osvojit a v dalším řešení ho úspěšně používali. V rozhovorech bylo patrné, že přechody mezi zlomky a smíšenými čísly jsou snazší pro ty žáky, kteří automaticky používají znalost násobilky a násobení/dělení z paměti.

Smíšená čísla mohou být významným nástrojem orientace ve zlomkovém členění číselného kontinua, a mohla by tedy být ve výuce takto využívána. Podle našich zkušeností jsou však často brána jen jakýsi téměř zbytečný přívěšek výuky zlomků, který umožňuje případně zjednodušit konečný zápis výsledku operací se zlomky. Jakoby pro něj ve výuce nebylo místo. V našem online dotazníku (viz kap. 3) se učitelé měli vyjádřit k úloze, v níž mají žáci zobrazit zlomek $65/9$ na číselné ose, a měli uvést, jaké chyby předpokládají u žáků 8. ročníku. Na základě srovnání jejich odpovědí s naším výzkumem lze říci, že učitelé dokázali odhadnout možné obtíže. Otázkou je, proč při vědomí obtíží, které by žáci s touto úlohou měli, nevěnují učitelé podobným úlohám ve výuce větší pozornost. Logickou se zdá domněnka, že jim – ve shodě s učebnicemi – nepřikládají velký význam podobně jako práci s číselnou osou.

V našich rozhovorech se potvrdila naše zkušenost, že při určování pozice čísla na ose preferují žáci desetinná čísla, protože jsou jim mnohem bližší než zlomky. Při umístění desetiny na číselnou osu byli také daleko úspěšnější, než když měli použít zlomky. Při výuce totiž číselnou osu automaticky využíváme, jedná-li se o desetinná čísla, zatímco u zlomků používáme spíše jiné modely. To odpovídá i RVP pro základní vzdělávání, kde je číselná osa zmíněna pouze v souvislosti s desetinnými čísly a u zlomků se o ní nemluví. Problematiku číselné osy jako důležitého modelu pro zlomky považujeme za natolik důležitou, že se jí budeme věnovat ve zvláštním oddíle.

⁴² Jde o naši neověřenou domněnku. Jiná možnost je, že do hry vstupuje násobek určený hodnotou čitatele a zejména jmenovatele jako celého čísla.

7.5 DIDAKTICKÁ DOPORUČENÍ: 2D MODEL VS. ČÍSELNÁ OSA

Z našich rozhovorů s učiteli v předchozím výzkumu lze usoudit, že pokud učitelé při výuce vysvětlují podstatu operace odpovídající zadání „ m n -tin z něčeho“, pak tak činí prostřednictvím dvourozměrných názorných modelů, a to již na 1. stupni. Že $1/n$ z x odpovídá operaci násobení zlomkem, se považuje přinejmenším při zacházení s kmenovými zlomky jako samozřejmé a nezdůvodňuje se.

Z učebnic pro 1. stupeň, do kterých jsme nahlédli, pouze autorky Blažková, Matoušková a Vaňurová (Alter, 4. ročník, 3. díl, s. 33) vysvětlují, jak vypočítat $3/4$ z daného čísla: „Tři čtvrtiny z daného čísla vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme jednu čtvrtinu tohoto čísla a výsledek vynásobíme třemi.“ V předchozím příkladu je na zadání „ $3/4$ z 8 rohíků“ ukázáno, že jednu čtvrtinu získáme dělením. Předtím při zavádění zlomků se kmenové zlomky demonstrují rozdělením dvoudimenzionálních obrazců. Ovšem bez nějakého přechodu objevuje cvičení 9 (s. 16), v němž má žák vypočítat jednu osminu, čtvrtinu a polovinu čísel 8, 32, 24, 16, 48, 40, 80. Apeluje se přitom: „Připomeň si: Jednu polovinu z daného čísla vypočítáme tak, že _____“, stejně tak pro čtvrtinu a osminu. Za přispění učitele je zřejmě vyvození korespondence mezi členěním modelu na n -tiny a číselným dělením dělitelem n triviální záležitostí. Pokud by však učitel považoval tuto korespondenci za tak zjevnou a samozřejmou, že by ji explicitně nezminil, máme jistotu, že k ní každý žák dospěje?

Zdá se, že další učebnice pro 1. stupeň (přinejmenším nakladatelství Fraus⁴³ a Prodos – vydání z roku 1997) problém, jak vypočítat daný zlomek z daného čísla, explicitně neformulují. Setrvávají především u vyjádření různých zlomků jako členění 2D modelů, na nichž pak z operací demonstrují jen sčítání zlomků se společným jmenovatelem (v souladu s RVP pro ZV).

V řadě učebnic pro 2. stupeň (nakladatelství Prometheus, autorů O. Odvárka a J. Kadlečka), která se v našem online dotazníku ukázala jako nejrozšířenější, je otázka výpočtu daného zlomku z daného čísla zahrnuta do kapitoly o násobení zlomků (7. ročník, díl 1., s. 29). Úloha „vypočítej $2/5$ ze 3“ se vysvětluje na obrázku tří čtverců členěných do pěti horizontálních pruhů, přičemž v každém čtverci jsou dva pruhy vybarveny. Pokyn k řešení zní: „Vezmi $2/5$ z 1. celku, $2/5$ z 2. celku a $2/5$ z 3. celku. Kolik pětín je to dohromady?“ V rámečku se pak uzavírá: „ $2/5$ ze 3 jsou $2/5 \cdot 3 = 2 \cdot 3 / 5 = 6/5$.“ Obdobně se na čtverci členěném na tři řádky a pět sloupců vysvětluje, kolik je $2/3$ ze $2/5$.

Podobně tento problém obchází autorský kolektiv vedený M. Komanem, když vysvětluje jen násobení zlomků celými čísly, nikoli násobení zlomkem. Je použit tento úvodní příklad: „Kolik kg rybízu je v 5 láhvích, když v každé je $3/4$ kg?“ (Koman a kol., 2003, s. 19) Výsledek $15/4$ je však pro žáka pětinasobkem tří čtvrtin a ne třemi čtvrtinami z pěti. Nakonec přichází obecné shrnutí: „Zlomek vynásobíme zlomkem tak, že vynásobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem.“

Učebnice tedy používají prestrukturované *ad hoc* (přinejmenším z hlediska žáka) 2D modely, které snad umožní žákovi, aby řešení dané úlohy pochopil, které ale zřejmě nedokáže použít jako oporu vlastních řešení, protože je neumí vytvořit. Dětem jsou předkládány obrázky, které reprezentují členění celků na n -tiny, a vysvětluje se jim, že když si nakreslíme *takový* obrázek, můžeme vidět, jak ta či ona operace funguje. V našich rozhovorech jsme ovšem viděli, že problémem dětí je, jak si nakreslit právě *takový* obrázek, který by potřebnou operaci vyjadřoval. Znázorňování pro ně není nástroj *běžně* užívaný k řešení úloh a později k vybavení odpovídajícího algoritmu. Jedno z příčin je zřejmě přežívající představa, že jednorázové pochopení či objev logiky zlomků při jednorázové či několikrát opakované manipulaci s modely vede k trvalému porozumění a interiorizaci konceptu. Logika modelu se však žákům ozřejmí až jeho mnohonásobným používáním jako nástroje při řešení úloh, které se neomezuje na období, kdy se zlomky probírají. To je zřejmě možno považovat za nejdůležitější doporučení týkající se výuky (nejen) zlomků: je nutné se ve výuce opakovaně vracet k podstatě algoritmů a dát žákům nějaký prostředek (model), který jim ji opakovaně ozřejmí (srov. s doporučeními v kap. 5 týkajícími se vzorců).

⁴³ Jde o řadu učebnic Hejného a kol.

Možnou překážkou výše uvedeného použití 2D modelů je zřejmě také těžkopádná a pomalá práce s nimi. Navíc technika jejich používání se mění, nemá pevná pravidla, protože pro každou operaci je model jiný a pro každou situaci je nutno vždy znovu vytvářet *ad hoc* znázornění.⁴⁴ Jak lze hodnotit snahu o pestrost a různorodost modelů při výuce zlomků? Podle našeho názoru mohou situaci i zhoršit. Nedochází totiž k rutinizaci techniky jejich používání, která žákům umožní v budoucnu model používat a příslušný algoritmus – pokud byl zapomenut – znovu vyvodit. I kdyby však bylo možné reprezentovat číselné operace na stále stejném 2D modelu, domníváme se, že povaha „velikosti oblastí“ zůstává natolik odlišná od povahy číselného kontinua, že to může vytvářet propast mezi znázorňováním operací se zlomky a jejich chápáním jako operací s čísly v číselném kontinuu.

V této souvislosti ocitujeme Tichou a Hošpesovou (2011, s. 46), které kladou důraz na tzv. překlad mezi reprezentacemi, který je založen na

přesvědčení o významné roli využívání různých modů reprezentace při rozvíjení a prohlubování porozumění pojmu zlomek. [...] Náš přístup koresponduje s názorem, že úroveň a kvalita porozumění závisí na soustavném obohacování „zásoby“ různých modů reprezentace a pěstování schopnosti „překládat“ mezi nimi, například mezi zápisem aritmetické operace a slovní úlohou.

Význam přechodů mezi různými reprezentacemi je podle našeho názoru velký. Ovšem opět si dovolíme upozornit, že kvantitativní obohacování zásoby reprezentací nepovede automaticky k hlubšímu porozumění problematice. Je třeba hledat propracované reprezentace, které by zobrazovaly co nejvíce souvislostí daného konceptu a co nejvíce otevíraly možnosti přechodu k dalším konceptům. V souladu s odbornou literaturou se domníváme, že takovým modelem by mohla být číselná osa. Toto naše doporučení neznámá, že bychom měli opustit tradiční způsob zavádění zlomků prostřednictvím předmětných či obrázkových modelů. Chceme tím říci, že je třeba brzy ukázat vztahy celek-část i na číselné ose a nadále ji držet jako základní reprezentaci, která propojuje různé významy zlomku a umožňuje žákům přecházet mezi nimi.

Např. uvedenou úlohu TIMSS (Jana a Anna se dělí o 560 zedů) je možno znázornit na číselné ose následujícím způsobem. Můžeme začít diskusí o počtu dílků, které potřebujeme na ose mít (potřebujeme jich 560 nebo jich stačí 56 nebo jen 8?) a o vhodném měřítku (aby byly dílky dobře patrné a zároveň se osa vešla na stránku).

Zvolíme-li 56 dílků, pak každý představuje 10 zedů (a zároveň 10 jednotek číselné osy, tedy číslo 10). $\frac{1}{8}$ z těchto 56 dílků bude 7 dílků, $\frac{3}{8}$ náležící Janě bude 21 dílků = 210 zedů (jednotek číselné osy). Zvolíme-li 8 dílků, pak každý dílek představuje $\frac{1}{8}$ z celku 560 zedů, tedy 70 zedů (70 jednotek číselné osy, tedy číslo 70). Janě náleží $\frac{3}{8}$, tedy 3 dílky základu, tedy 210 zedů (= jednotek číselné osy).

V našich rozhovorech jsme přirozeně nemohli najít potvrzení všech našich úvah. Nicméně minimálně jsme ukázali, že číselná osa dobře odhaluje některé aspekty nedostatečného porozumění zlomkům. Za zřejmou ovšem považujeme také skutečnost, že číselná osa může pomoci žákům vřadit zlomky do již pochopené řady celých čísel, případně číselného kontinua tvořeného desetinnými čísly. Tím se žákům ozřejmí i velikost zlomků, a to jak absolutní jako vzdálenost od nuly, tak relativní ve vztahu k dalším číslům (celým číslům i zlomkům). Stejně tak je patrné, že právě aktivity na číselné ose umožní žákům, aby si vytvořili koncept číselného kontinua, mentální číselné osy, které je v odborné literatuře přisuzován velký význam.

Uvědomujeme si, že je obtížné výše uvedené doporučení uvést do praxe. Je ještě třeba propracovat postupy provádění operací se zlomky na číselné ose tak, aby byly pro žáky pochopitelné a zvládnutelné, a dát je do vztahu s algoritmy operací se zlomky jako čísly, a to takovým způsobem, aby žáci pochopili jejich princip. Je pravděpodobné, že by bylo možno se inspirovat pokusy v některých zahraničních učebnicích a výukových programech.

⁴⁴ K tomuto závěru jsme dospěli při prohlížení učebnic nakladatelství Alter, Fraus, Prometheus (Odvárko, Kadlecěk). Pouze v učebnici nakladatelství Prometheus pro nižší stupeň gymnázia (Hermann a kol., 2010) je patrná určitá (ne zcela důsledná) snaha používat při zavádění zlomků, jejich krácení i operací s nimi stále stejné modely kruhu a obdélníku, navíc paralelně. I zde ovšem platí, že slouží k vyvození algoritmu a dále jako by se s nimi nepočítalo.

8. ALGEBRAIZACE A PRÁCE S ALGEBRAICKÝMI VÝRAZY

Oblast algebry byla široce zmiňována učiteli matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání jako velmi obtížná pro české žáky. Zmiňovali zejména problémy s úpravami algebraických výrazů. V této kapitole se však kromě těchto úprav budeme zabývat i algebraizací. Tou rozumíme vyjádření (reprezentaci) situace (konceptu, vztahu, procesu atd.) algebraicky, tzn. pomocí proměnných, algebraických výrazů či (ne)rovníc. V prostředí školní matematiky má smysl sledovat algebraizaci situací vyjádřených geometricky, slovně (tj. těch, které najdeme ve většině tzv. slovních úloh) a jazykově (tj. těch, které v běžném jazyce popisují matematickou situaci - např. „pět krát více“). Práce s algebraickými výrazy se týká zejména jejich úprav, tj. nacházení algebraických výrazů, které jsou rovny původnímu, včetně substituce za proměnnou a operací s algebraickými výrazy.

8.1 RVP PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ A PRO GYMNÁZIA

Žák 2. stupně

M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním,

M-9-1-09 analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel,

M-9-2-04 vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem,

M-9-2-05 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů,

M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku,

M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu,

M-9-4-02 řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

Žák gymnázia

- upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu (číslo a proměnná),
- rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic (číslo a proměnná),
- geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy (číslo a proměnná),
- v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými (geometrie).

8.2 ÚLOHY, KTERÉ PŮSOBÍ ČESKÝM ŽÁKŮM PROBLÉMY

Uvádíme některé úlohy, ve kterých byli čeští žáci vzhledem ke svému průměru méně úspěšní v rámci mezinárodních srovnávacích testů TIMSS 1999, TIMSS 2007 (pro 8. ročník) a PISA 2003. Úspěšnost žáků je uvedena v závorce.

Úloha 8.1 (TIMSS 2007⁴⁵)

Co znamená výraz $xy + 1$?

A) Přičti 1 k y , potom vynásob x .

B) Vynásob x a y jedničkou.

C) Přičti x k y , potom přičti 1. [20,8 %]

D) Vynásob x a y , potom přičti 1. [64,7 %]

⁴⁵ Úloha byla uvolněna v rámci testování TIMSS 2011, uvedené výsledky jsou z roku 2007.

V úloze jde o přiřazení jazykového vyjádření algebraickému výrazu. Žáci nejčastěji nesprávně interpretovali součin proměnných jako součet, přičemž nejde pouze o záměnu pojmu součin a součet (vzhledem k formulaci odpovědi).

Úloha 8.2 (TIMMS 2007; 24,6 %)

Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

Zde je uvedena slovní úloha, v níž mohou žáci prokázat schopnost algebraizace reálné situace pomocí rovnice s jednou neznámou, případně pomocí soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými, a použít je k vyřešení úlohy. Řešení úlohy algebraicky probíhá ve dvou krocích – vyjádření a určení ceny pera, resp. pera a tužky a výpočet ceny za 1 pero a 2 tužky. Úlohu lze samozřejmě řešit zkusmo, popřípadě částečně zkusmo, pokud žák sestaví například rovnici $2x + 3y = 17$ a najde její řešení, které odpovídá podmínce $x = y + 1$. Dostupné výsledky však neposkytují vzhled do postupu žáků. Víme však, že tři čtvrtiny úspěšných žáků úlohu řešilo bez sestavení tradičních rovnic. Je také možné, že žáci ukončili řešení určením ceny pera, resp. tužky, a nevyřešili tak zadání úlohy, což ovšem také nelze ověřit.

Úloha 8.3 (TIMSS 1999)

Cena C za vytištění svatebních oznámení se skládá ze stálého poplatku 100 Kč a z poplatku 6 Kč za každé vytištěné oznámení. Pomocí kterého z uvedených výpočtů můžeme určit cenu, kterou zaplatíme za vytištění n svatebních oznámení?

A) $C = (100 + 6n)$ [50 %]

B) $C = (106 + n)$ [14 %]

C) $C = (6 + 100n)$

D) $C = 106n$ [19,1 %]

E) $C = 600n$

V této úloze opět sledujeme, jak žák interpretuje slovně popsanou reálnou situaci a/nebo naopak, jak interpretuje rovnici a vztahy vyjádřené pomocí algebraických prostředků. Žák samozřejmě musí chápat slovní zadání situace, například to, že stálý poplatek se platí jen jednou, nezávisle na počtu oznámení. Nejčastěji vybraná nesprávná odpověď d) by odpovídala buď nejasnosti tohoto slovního vyjádření, nebo neporozumění algebraickému mechanismu. Naopak odpověď b) může poukazovat především na toto druhé neporozumění, žák pouze sčítá údaje v zadání, aniž vyjádří vztahy mezi nimi.

Úloha 8.4 (TIMSS 2007⁴⁶)

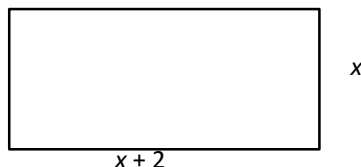
Který výraz vyjadřuje obsah tohoto obdélníka?

A) $x^2 + 2$

B) $x^2 + 2x$ [35,5 %]

C) $2x + 2$

D) $4x + 4$



Kromě uplatnění vztahu mezi obsahem obdélníka a délkou jeho stran zde žáci museli daný součin upravit. Nejčastěji vybírali odpověď $x^2 + 2$, z čehož lze usuzovat, že jim součin proměnné a dvojčlenu působil problémy.

⁴⁶ Úloha byla uvolněna v rámci TIMSS 2011.

Ovšem v našich rozhovorech se ukázalo, že k tomuto výsledku dospěli žáci i jiným způsobem, a to tak, že při sestavování výrazu pro obsah zapomněli zapsat závorky mezi oběma činiteli. V jejich případě tedy nelze usoudit na problémy v oblasti roznásobení závorek.

Úloha 8.5 (TIMSS 2007)

Který výraz se rovná výrazu $2(x + y) - (2x - y)$?

A) $3y$ [24,7 %]

B) y

C) $4x + 3y$

D) $4x + 2y$

Výraz v zadání musí žáci upravit, přičemž mají aplikovat distributivní zákon při násobení a odčítání dvojčlenu (tj. při odstranění závorek). Nejčastější nesprávné odpovědi byly výrazy $4x + 2y$ a y (možnost B a D), což poukazuje na to, že alespoň v jednom z těchto úkonů žáci chybovali.

Úloha 8.6 (TIMSS 2007)

Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

A) 15 [33,8 %]

B) 14 [5,8 %]

c) 13 [10,4 %]

d) 9 [44,6 %]

Žáci mají dosadit za proměnné ve výrazu konkrétní číselné hodnoty, jedna z nich je záporná. Z výsledků se zdá, že žákům nejčastěji dělalo potíže právě dosazení (nebo odečtení záporné hodnoty), tj. dosadili do výrazu $2 - b$ hodnotu $b = -1$ a vyhodnotili jej jako -1 místo 1.

8.3 DIAGNOSTICKÉ ÚLOHY POUŽITÉ V NAŠICH ROZHOVORECH S KOMENTÁŘEM

Jak bylo zmíněno v úvodu kapitoly, sada úloh pro algebraizaci měla za úkol odhalit některé potíže s reprezentací pomocí algebraického jazyka. Úlohy jsou formulovány tak, aby nešlo o vyřešení úlohy ve smyslu dobrání se nějakého konkrétního výsledku či hodnoty, které lze často získat metodou nealgebraickou (například pokusu a omylu). Žáci propojovali algebraický jazyk s jazykovým vyjádřením, slovně popsanou (pseudo)reálnou situací a geometrickým vyjádřením vztahů. U zadání úloh⁴⁷ uvádíme jak správné odpovědi, tak možné nápovědy, které používali tazatelé během rozhovorů s žáky.

Úlohy 8.7 až 8.9 se týkají převážně propojení běžného jazyka a algebraické (nebo aritmetické) symboliky.

Úloha 8.7

Zapiš pomocí čísel tyto věty:

- a) osm zmenšeno o tři pětiny
- b) tři krát více než sto dvacet pět
- c) dvojnásobek čísla 27 zmenšený čtyřikrát
- d) pětinásobek součtu čísel 87,5 a 65
- e) čtvrtina z podílu čísel 125 a 5

[Odpovědi:

- a) $8 - 3/5$
- b) $3 \cdot 125$;
- c) $2 \cdot 27 : 4$ nebo ekvivalentní výraz;
- d) $5 \cdot (87,5 + 65)$;
- e) $125 : 5 : 4$ nebo ekvivalentní výraz.]

⁴⁷ Jedná se o výběr z úloh, které jsme zadávali v rozhovorech s žáky. Jejich kompletní seznam s komentářem je v oddílech 6.3.2 a 6.5.2 *Knihy*.

Úloha 8.8

x je kladné číslo. Co znamená výraz $\frac{x}{3}$? Vyber všechny [Odpověď: a), b) a d)]
správné odpovědi.

- a) číslo x vynásobené jednou třetinou
- b) jedna třetina z čísla x
- c) číslo x děleno jednou třetinou
- d) číslo x zmenšené třikrát
- e) číslo x zmenšené o jednu třetinu

Úloha 8.9

n označuje jakékoli číslo. Zapiš matematicky [Výsledek: $3(n+5)$, popřípadě $(n+5) \cdot 3$]
(výrazem) větu „Přičti n k pěti a vynásob třemi.“

Jako nápovědu mohli tazatelé použít následující výběr odpovědí:

- a) $n+5 \cdot 3$
- b) $15n+3$
- c) $5n \cdot 3$
- d) $3(n+5)$
- e) $(5+n)^3$

Úloha 8.7 byla zadávána žákům 6. ročníku, od kterých jsme očekávali aritmetické vyjádření popsaných hodnot. Tato schopnost je předpokladem pro analogickou práci s proměnnými, jako například v úloze 8.8. V neposlední řadě nás zajímalo, jak žáci vnímají část celku a zda ji poznají či zapíší ve formě zlomku. Zajímala nás také schopnost interpretovat změnu stavu („zvětšeno/zmenšeno“, „o/krát“) pomocí operace s ní spojené a (zejména v případě úlohy 8.9) schopnost použít konvenci závorek. Tato schopnost samozřejmě spadá již do oblasti úloh aritmetických.

Následují úlohy zaměřené na algebraizaci situací v kontextu tzv. slovních úloh. První tři jsou záměrně gradovány.

Úloha 8.10

V bedýnce je j kilogramů jahod. Co znamená výraz $5j$?

[Odpověď: Počet kilogramů jahod v pěti bedýnkách.]

Úloha 8.11

Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš. Zuzana váží z kilogramů. Tomáš váží t kilogramů. Jak bys zapsal(a) matematicky, kolik váží Tomáš?

[Výsledek: $t = z + 1$]

Tazatelé mohli poskytnout žákům jako nápovědu výběr z následujících možností:

- a) $z = t - 1$
- b) $t = z - 1$
- c) $t = z + 1$
- d) $z + t = 1$
- e) $z - t = 1$

Úloha 8.12

Čokoláda Margot stojí o 5 korun více než krabička Mega Lentilek. x je cena čokolády Margot, p vyjadřuje počet krabiček lentilek a m počet čokolád Margot, které si kupuješ. Vyjádři celkovou útratu.

Celková útrata =

[Odpověď: $mx + p(x - 5)$ nebo ekvivalentní výraz.]

Tazatelé měli za úkol v případě potřeby, navádět k zápisu krok po kroku. Příklady návodných otázek jsou: Kdybys kupoval dvě Margotky, kolik zaplatíš? Jak jsi na to přišel, jak to zapíšeš?

Úloha 8.13

Vyber všechny odpovědi, které odpovídají situaci vyjádřené touto rovností: [Správná odpověď: c)]

$$6x - 3y = 18$$

- a) Každé dítě snědlo šest koláčů a každý dospělý tři koláče, dohromady snědli 18 koláčů.
- b) Petr je nešika. Z každého balení po šesti vejcích jich na cestě polovinu rozbije. Nakonec donesl domů jen 18 vajec.
- c) Každé z děvčat nazdobilo 6 vajíček a každý z chlapců, kteří přišli na koledu, od nich dostal tři nazdobená vajíčka. Pro další koledníky ještě zbylo osmnáct nazdobených vajíček.

V úloze 8.10 sledujeme, zda se žáci uchýlí k tzv. „mnemotechickému klamu“, na který upozorňuje odborná literatura. Budou interpretovat písmeno j jako jahody (popř. počet jahod)? Spokojí se s odpovědí „pět bedýnek“ nebo projeví potřebu být exaktnější?

Úloha 8.11 je typickou úlohou s antisignálem: výraz „o jeden kilogram méně“ lze sám o sobě vyjádřit operací odčítání, tedy „- 1“. Pokud žák pouze „přepíše“ větu v zadání matematicky, získá tak „ $z - 1 = t$ “, což danou situaci nepopisuje. Na rozdíl od předchozích úloh navíc úloha 8.12 obsahuje požadavek na sestavení rovnosti, tj. vztahu mezi dvěma proměnnými.

Nejkomplexnější úloha z celé sady, co se týče počtu úvodních dat a kroků k vyřešení, je úloha 8.12. Očekávali jsme potíže jak se složitostí textu, tak s počtem proměnných a s parametrem. Samozřejmě žáci musí „dát dohromady“ celkovou strukturu úlohy, tj. lineární závislost obou cen (rozdíl mezi nimi, který je opět formulován antisignálním vyjádřením), představu o vztahu celkové ceny za určité zboží a určitý počet kusů (multiplikativní vztah) a celkové ceny za všechno nakoupené zboží (aditivní vztah). Zajímá nás, jak žáci přistoupí k rozboru situace, zda budou mít potřebu uspořádat zadané informace, než přistoupí k sestavení algebraického výrazu, jak toto uspořádání provedou a jak jej využijí při řešení úlohy. Pro uvědomění příslušných vztahů je možno jako nápoředu použít konkrétní hodnoty, například sadu návodných otázek: Kdybys kupoval dvě Margotky, kolik zaplatíš? Jak jsi na to přišel? Jak to zapíšeš?

V úloze 8.13 opět pozorujeme žákovu schopnost propojit slovně zadanou reálnou situaci s algebraickou. Úloha je však mnohem náročnější v tom, že si žák musí sám uvědomit (kromě množstevních vztahů jako v předchozích úlohách), co v úloze zůstává proměnné a co je dáno pevně. V případě a) opět figuruje antisignální slovo „snědli“, které může žáka svést k přijetí této odpovědi (jelikož v rovnici je znaménko mínus), ačkoli jde o aditivní strukturu („dohromady snědli tolik koláčů“) jako u úlohy 8.12. Možnost b) je náročná na uvědomění si závislosti počtu zbylých vajec na ostatních údajích. Koeficienty 6 a 3 odpovídají „polovině“ v zadání, „z nich rozbil“ odpovídá operaci odčítání. Jedinou proměnnou je zde počet balení vajec. Je také zajímavé sledovat, zda budou žáci mít potřebu rovnice sestavit ke každé nebo některým ze situací. To by však nemělo být součástí zadání, sestavení bychom volili spíše jako kontrolu. Tazatelé se měli vyptat žáků, co označují jednotlivé proměnné v těchto

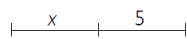
příběžích (a přesvědčit se, že je chápou jako hodnoty, např. „počet dětí“, ne pouze „dětí“). Úloha navíc jistě poslouží jako diagnostická i aktivizační bez nabídky možností. V našich rozhovorech ji často žáci označovali jako jednu z nejtěžších, ale zároveň přiznávali, že je také jedna z nejzajímavějších. Pro ilustraci citujeme jednu z žákyň:

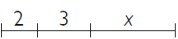
Jako mně přišla docela zajímavá ta poslední [úloha 8.13], no, jako že, to je takový, že, to jsem snad ještě nikdy v životě nepočítala, takhle. Tak ta byla taková, právě že, změna. A no, tohle bylo taky jiný, ta sedmička [úloha 8.14].

Úloha 8.14

Která z možností je znázorněna výrazem $2x + 3x$?

[Odpověď: Možnost C.]

A. délka této úsečky: 

B. délka této úsečky: 

C. obsah tohoto obrazce: 

D. obsah tohoto obrazce: 

Tazatelé měli za úkol vyžadovat u odpovědi, kterou žák vybere, zdůvodnění a diskutovat se žáky, jak by vypadaly výrazy pro ty další možnosti.

Při řešení úlohy 8.14 (úloha je převzata z mezinárodního šetření TIMSS) sledujeme, jak spojují žáci algebraické výrazy s geometrickými útvary a jejich charakteristikami. Dokáží pracovat s proměnnou, pokud je zadána jako délka části útvaru, a dokáží s ní pracovat ve vyjádření délky úsečky a obsahu obdélníka? Zatímco v geometrických úlohách mají většinou žáci vypočítat konkrétní hodnotu, zde tuto možnost nemají, musí použít znalosti vztahů (součet částí úsečky pro délku úsečky a multiplikativní vztah pro obsah obdélníka) a vyjádřit jej algebraicky. Pro některé žáky to může být první setkání s algebraickou reprezentací geometrické situace (mimo standardní „vzorečky“ používané pro výpočty v geometrii). Žáky vedeme k tomu, aby odpovědi zdůvodnili. Mimo jiné nás zajímá, do jaké míry je ovlivňuje konkrétnost náčrtku v jejich představě o délce x ; přiřazují mu nějakou konkrétní hodnotu na základě odhadu? Vnímají protilehlé strany v obdélnících možností C a D jako stejně dlouhé a dokáží tuto informaci aplikovat pro výpočet? Mimochodem, obě tyto situace názorně ukazují princip distributivního zákona, tj. zachování obsahu mezi součtem obsahů malých obdélníků a obsahem obdélníku velkého vede k rovnosti $5x + 5x = 5(x + x)$.

Poslední úloha kombinuje propojení mezi algebraickou, slovní, jazykovou i geometrickou reprezentací.

Úloha 8.15

Rozhodni, zda každá z následujících možností je pravdivá (zakroužkuj správnou odpověď). Výraz $cd + 1$ znamená:

a) součin hodnot c a d zvýšený o jednu. ANO – NE [Odpověď: ANO]

b) v každé z c zavařovacích sklenic je d okurek. Jedna okurka se do sklenic nevešla. ANO – NE [Odpověď: ANO]

c) c zvýšené o $d + 1$. ANO – NE [Odpověď: NE]

d) obsah obdélníka o stranách c a $(d + 1)$. ANO – NE [Odpověď: NE]

e) součet c a d zvýšený o jednu. ANO – NE [Odpověď: NE]

Všimněme si, že některé úlohy mají charakter výzvy „interpretuj algebraický objekt“ (úlohy 8.8, 8.10, 8.13, 8.14 a 8.15). Jsme přesvědčeni, že jak pro diagnostiku, tak pro algebraickou „gramotnost“ je tento typ úloh důležitý, stejně jako úlohy typu „vyjádři algebraicky“. A přesto jsou tyto „interpretační“ úlohy ve výuce (podle našich

zkušeností) používány mnohem méně (podobně jako tvorba slovních úloh cílená k interpretaci „mechanismu“ úlohy, jako například dané lineární rovnice).

Na interpretaci vztahu více proměnných vyjádřeného algebraicky je zaměřena následující úloha „Soutěž o nejlepší kuchyň“. Úloha byla vytvořena na motivy podobné úlohy z mezinárodního šetření PISA 2003. Verze A byla určena žákům 6. ročníku, verze B starším žákům.

Úloha 8.16

1. Soutěž o nejlepší kuchyň

Časopis *Dům a design* užívá bodový systém pro hodnocení nových kuchyní. Kuchyň s nejvyšším počtem bodů získává cenu „Kuchyň roku“. Pět porotců uděluje body podle následujícího systému:

3 body: nadstandardní

2 body: standard

1 bod: pod standardem

Průměrná hodnocení pěti kuchyní od různých výrobců, podle kritérií Praktičnost a Vzhled, lze vyčíst z tabulky. Hodnota Energetická náročnost uvádí index energetické spotřeby, přičemž hodnota 3,0 určuje nejvyšší energetickou spotřebu.

VERZE A			
Kuchyň	Praktičnost (P)	Vzhled (V)	Energetická náročnost (U)
K1	2,8	2,0	1,0
K2	2,6	1,8	0,4
K3	2,0	2,2	1,8
K4	2,0	3	2,8
K5	2,6	?	0,2

VERZE B				
Kuchyň	Funkčnost (F)	Vzhled (V)	Bezpečnost (B)	Energetická náročnost (U)
K1	2,8	2,0	2,2	1,0
K2	2,6	1,8	2,6	0,4
K3	2,0	2,2	2,8	1,8
K4	2,2	3	1,8	2,8
K5	2,8	?	2,0	1,2

a) VERZE A: Na výpočet celkového hodnocení časopis používá následující vzorec. Vysvětli, proč je před písmenkem U ve vzorci mínus.

$$\text{celkové hodnocení} = (5 \cdot P) - U + V$$

a) VERZE B: Na výpočet celkového hodnocení kuchyní časopis používá vzorec, jak je vidět níže. Doplň do prázdných políček znaménka $+$ a $-$. Vysvětli svou volbu.

$$\text{Celkové hodnocení} = \square (5 \cdot F) \square (0,8 \cdot B) \square (2,5 \cdot U) \square V$$

b) Vypočti celkové hodnocení kuchyně K1.

c) Jaké ohodnocení by musela získat v kategorii Vzhled kuchyň K5, aby byla celkově lepší než K1?

d) Výrobce kuchyně K4 nesouhlasí se způsobem, jak se určuje celkové hodnocení. Jaký jiný vzorec může navrhnout, aby se jeho kuchyň stala Kuchyní roku?

Odpovědi verze A:

a) Jakákoli odpověď, která vystihuje, že energetická náročnost má negativní dopad na celkové hodnocení kuchyně.

b) 15 bodů

c) 2,3 a více bodů (Pozn.: V daném systému udělování bodů však může získat pouze hodnoty z uzavřeného intervalu $[1;3]$, které jsou zároveň násobkem jedné pětiny., tj. hodnoty 2,4; 2,6; 2,8 nebo 3,0. Tuto odpověď jsme však od žáků nevyžadovali.)

d) Jakýkoli vzorec, který vyhovuje podmínkám zadání a zároveň zachová logický význam znamének a operací.

Odpovědi verze B:

a) Doplnit znaménko plus do všech políček, kromě třetího zleva, kde má být znaménko mínus. Zdůvodnění by mělo obsahovat myšlenku negativního dopadu energetické náročnosti na celkové hodnocení kuchyně.

b) 15,26 bodů

c) Více než 2,66 bodů. (Pozn.: V daném systému udělování bodů však může získat pouze hodnoty z uzavřeného intervalu $[1;3]$, které jsou zároveň násobkem jedné pětiny, tj. k výhře nad kuchyní K1 může získat hodnoty 2,8 nebo 3,0. Tuto odpověď však od žáků nevyžadujeme.)

d) Jakýkoli vzorec, který vyhovuje podmínkám zadání a zároveň zachová logický význam znamének a operací.

Již v zadání musí žák pracovat s velkým počtem informací: délka úvodního textu, uspořádání dat v tabulce, označení proměnných a samotný vzorec pro výpočet výsledného ohodnocení. Hodnoty v tabulce jsou jednomístná desetinná čísla. Verze pro starší žáky (8. a 9. ročníku) je ztížena tím, že vzorec obsahuje koeficienty z oboru desetinných čísel. V prvotní fázi řešení je tedy možno žáky vést například tím, že je necháme tabulku popsat a vysvětlit. Pokud je pro žáka situace nadále nejasná, doporučujeme s ním sestavit podobnou tabulku s menším počtem parametrů a pouze dvěma účastníky. Například tabulka hodnocení dvou aut a jejich žáky navržených vlastností, včetně jedné negativní (například spotřeba nebo náklady na servis).

Jádrem úlohy je algebraicky zadaný vztah lineární závislosti veličiny na několika proměnných, jde o vážené hodnocení, které se používá i ve školním prostředí, například při hodnocení žáků.

V podotázce a) jde o to, aby žáci prokázali pochopení významu hodnotící formule a zejména, aby dokázali propojit negativní dopad energetické náročnosti na celkové hodnocení se záporným znaménkem (koeficientem) ve vzorci.

V úloze b) pak sledujeme, jak žák dokáže použít data z tabulky a „dosadit“ je do dané formule. Samozřejmě sledujeme dovednost provádět operace s kladnými a zápornými desetinnými čísly (u varianty pro mladší žáky sčítání a odčítání).

V úloze c) má žák najít hodnotu chybějící v tabulce tak, aby celkové ohodnocení splnilo určitou vlastnost. V podstatě žák řeší nerovnici s jednou neznámou. Úlohu lze řešit dopočítáváním, žáci mohou pracovat přímo s již vypočtenými danými hodnotami (rozdíl mezi dosavadním celkovým počtem K1 a K5) nebo dosazením rozdílů hodnot jednotlivých známých kategorií do vzorce. Sledujeme také, zda a jak žáci uchopí problematiku množiny možných řešení: zda žák zůstane u prvního kroku řešení (určení hodnoty pro situaci, kdy dojde k vyrovnanému výsledku) nebo uplatní svůj výpočet v odpovědi na otázku úlohy, tj. zda určí za množinu řešení všechna čísla větší než 2,2⁴⁸. Pokud žák uvede 2,3 body (popř. 2,66 bodů pro verzi B), je dobré zjistit, zda to považuje za jediné řešení, nebo zda si uvědomuje, že je to minimální hodnota.

⁴⁸ Zde navíc jde o další dva aspekty: a) propojení řešení s kontextem soutěže a pravidel hodnocení (hodnota udělená jedním rozhodčím jednomu kritériu může být maximálně 3, stejně jako maximální průměrné ohodnocení jednoho kritéria) a b) pokud je za daných pravidel rozhodčích pět, hodnoty v tabulce mohou nabývat pouze hodnot, které jsou násobky jedné pětiny, z uzavřeného intervalu $[1, 3]$. Vždy tedy jde o množinu konečného počtu řešení.

Sérii dílčích úloh týkající se Soutěže o nejlepší kuchyň pak završuje úkol, který lze označit jako otevřený. V podstatě úloha zkoumá, zda žák chápe funkci koeficientu v hodnotící formuli. Zároveň nás také zajímá, jak se žáci postaví k úloze, která není „jasně zadána“, tj. žák může navrhnout jakékoli koeficienty (zřejmě z oboru kladných reálných čísel), které by zaručily splnění podmínky úlohy a zároveň logiku kladného a záporného hodnocení kuchyní.

Spolu s úlohou 8.13 byla tato úloha žáky označována za jednoznačně nejtěžší, ale zároveň proto zajímavá.

Následují úlohy zaměřené na úpravy algebraických výrazů. Úlohy 8.17 a 8.18 jsou podobné standardním učebnicovým úlohám⁴⁹. V první z nich očekáváme, že žáci prokážou dovednosti týkající se distributivního zákona, zde operací násobení a odčítání dvojčlenu v závorce. Mohou ovšem zvolit i jinou úpravu, konkrétně vytknutí dvojčlenu $(x + 1)$. V našich rozhovorech žáci toto řešení nezvolili ani jednou. Dvojí způsob řešení však může být didakticky přínosný, neboť ukazuje na rovnost výrazů $x^2 - 1$ a $(x - 1)(x + 1)$, tj. tradičního „vzorce“ pro rozklad na součin. Zároveň žák objevuje výhodnost tzv. strategické manipulace (Hejný, 1991), nadhled či vhléd do úlohy, který mu poslouží při výběru z více možných úprav, s nímž by měl žák postupně získávat větší a větší zkušenosti.

Úloha 8.17

Zjednodušte: $x(x + 1) - (x + 1) =$

[Výsledek: $x^2 - 1$, nebo $(x - 1)(x + 1)$ či $(x - 1)(x + 1)$]

Úloha 8.18 mapuje schopnost žáka najít ekvivalentní výraz ve formě součinu. V zadání záměrně neuvádíme slovo „vytknutí“. Chceme zjistit, zda žáci proces/úkon vytknutí spojují s úpravou výrazu na součin. V gradované sadě pěti úloh sledujeme, jak žáci postupně a) vytýkají číslo, b) vytýkají proměnnou, c) vytýkají postupně dvě proměnné nebo proměnnou a číslo a následně vytknou dvojčlen, d) rozkládají dvojčlen typu $a^2 - b^2$, kde a je celé kladné číslo a b je výraz np , kde $n \in \mathbb{N}$ a p proměnná, a konečně e) rozloží dvojčlen typu $a^2 - b^2$, kde a i b jsou výrazy typu np , kde $n \in \mathbb{N}$ a p proměnná. U žáků 9. ročníku, kteří by měli mít zkušenost s rozkladem podle vzorce, bychom mohli všechny čtyři části úlohy chápat jako ukázky standardní manipulace s výrazy. U úlohy c) můžeme sledovat, do jaké míry provádějí žáci prvotní krok strategicky, tedy se záměrem, nebo spíše "zkusmo", tj. zkusí „vytknout cokoli“ (např. číslo 3 v prvních dvou členech a proměnnou x v druhých dvou členech), což je povede k mezivýsledku, který jim nemusí být před jeho provedením zřejmý jako strategicky výhodný. Diskuze nad strategicky výhodným krokem by měla opět rozšířit zkušenosti žáka se strategickou manipulací algebraických objektů.

Úloha 8.18

Rozložte na součin:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $2x + 4 =$ | Výsledek: $2(x + 2)$ |
| b) $x^2 - 5x =$ | Výsledek: $x(x - 5)$ |
| c) $3a + 3b + ax + bx =$ | Výsledek: $(3 + x)(a + b)$ |
| d) $16 - 9p^2 =$ | Výsledek: $(4 - 3p)(4 + 3p)$ |
| e) $4a^2 - 25b^2 =$ | Výsledek: $(2a - 5b)(2a + 5b)$ |

Za netypickou považujeme úlohu 8.19, žák zde má doplnit ve dvou případech symboly operací a závorek tak, aby získali rovnosti. Úloha silně posiluje koncept rovnosti upravených výrazů. Žák zde výrazy "neupravuje", ale hledá dva takové, které jsou ekvivalentní. V obou částech žák musí využít také aritmetických o rozkladu celých čísel na součin či součet dvou čísel. Samozřejmě nás zajímá, jak žák naloží s použitím závorek. U druhé z úloh navíc

⁴⁹ Úloha 8.19c přímo pochází ze Sbírky ???

přistupuje druhá mocnina a násobení dvojčlenu jednočlenem se stejnou proměnnou, jak tomu bylo i v úloze 8.17. Úloha je opravdu bohatá pro diagnostiku toho, jak žák zvládá konvence algebraického jazyka.

Úloha 8.19

Doplňte místo teček znaménko operace. Můžete použít závorky.

a) $6p \dots 7 \dots 2p = 8p + 7$ Výsledek: $6p + 7 + 2p = 8p + 7$

b) $6p \dots 7 \dots 2p = 12p^2 - 14p$ Výsledek: $(6p - 7) \cdot 2p = 12p^2 - 14p$

Úlohy 8.20 až 8.22 se týkají tzv. substituce, neboli dosazení. Sledujeme, jak žák dokáže pracovat s proměnnou či výrazem jako zástupcem jiných objektů. První úlohu jsme již diskutovali v oddíle 8.2, v této verzi je však otevřená, poskytne nám lepší vhled do problému. Je potíží dosazení nebo odečtení záporné hodnoty? V našich rozhovorech žáci ukázali ještě na jiný problém, a sice problém s uplatněním konvenčním pořadí operací, jak podrobněji diskutujeme v oddíle 8.4. V úloze 8.21 žáci dosazují za proměnné dvojčlen, což nemusí být samozřejmostí a zadání může způsobit potíže, doporučujeme žáka navést k provedení dosazení a zejména sledovat, jak použije závorky. Úlohu 8.22 lze řešit i tím, že žák vyřeší rovnici v zadání a dosazuje dále konkrétní hodnotu za proměnnou x . Pokud žák přistoupí k tomuto řešení, necháme jej řešit první dvě úlohy tímto způsobem, poté jej však vhodně navedeme na substituci, například dotazy typu: Mají zadání a úlohy něco společného? Šlo by toho využít k méně pracnému řešení? V prvních dvou úkolech je společný dvojčlen $2x + 5$ objekt vidět na první pohled, ale v dalších je nutné použít nějaké úvahy navíc (např. „ $2x + 6$ je o jedna více než $2x + 5$ “). V každém případě je nutno pracovat s dosazením záporného čísla a provádět operace se zápornými čísly, což nám také poslouží k diagnostice.

Úloha 8.20

Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

Výsledek: 15

Úloha 8.21

$m = 1 + x$, $n = 2 - x$. Kolik je

a) $2m + n$?

b) $2m - n$?

Výsledky: a) $4 - x$, b) $3x$

Úloha 8.22

Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

a) $3(2x + 5) =$

b) $-1 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (2x + 5) =$

c) $2x + 6 =$

d) $2x + 4 =$

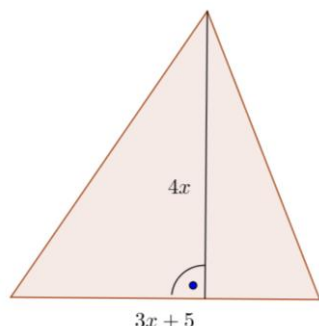
e) $-0,5 \cdot (2x + 4) =$

Výsledky: a) -6 ; b) 4 ; c) -1 ; d) -3 ; e) $1,5$

Všechny následující úlohy (8.23 až 8.25) jsou z prostředí geometrické reprezentace. Samozřejmě nás zajímá i schopnost vyjádřit situaci algebraicky, úlohy jsou však bohaté na úkony v oblasti úpravy výrazů, doporučujeme tedy žákům s daným metrickým vztahem pomoci. V úloze 8.23 jde zvláště o správné zapsání vztahu, pak roznásobení závorky, popřípadě určení poloviny součinu daných rozměrů. U výpočtu povrchu tělesa v úloze 8.24 musí žák nejdříve najít strategii pro řešení úlohy (najít počet stěn, které tvoří povrch tělesa, určení povrchu jedné stěny), pak povrch správně vyjádřit a upravit, přičemž sledujeme zejména jeho dovednosti a poznatky pro umocňování mocnin, popř. také sčítání mnohočlenů.

Úloha 8.23

Zapište a upravte výraz pro obsah trojúhelníka na obrázku.



Výsledek: $S = \frac{1}{2} (3x + 5)4x = 6x^2 + 10x$ (nebo ekvivalentní vyjádření).

Úloha 8.24

Hrana každé z krychlí tvořících těleso na obrázku má délku $2x^3$. Zapište a upravte vzorec pro povrch tělesa.



Výsledek: $S = 18(2x^3)^2 = 72x^6$ (nebo ekvivalentní vyjádření).

Konečně, úloha 8.25 je vhodná ke zkoumání toho, jak mají žáci spojen koncept druhé mocniny s konceptem obsahu čtverce, dále musejí prokázat dovednost rozkladu mnohočlenu se dvěma neznámými na součin. Pokud má žák zkušenost s druhou mocninou výrazu $a - b$, kde a i $b \in \mathbb{R}^+$, v řešení jde o standardní úpravu.

Úloha 8.25

Obsah čtverce je vyjádřen výrazem $25x^2 - 10xy + y^2$. Jaká je délka strany tohoto čtverce?

Výsledek: $5x + y$

8.4 OBTÍŽE ŽÁKŮ A JAK JIM PŘEDCHÁZET NEBO ČELIT

A) ŽÁK MÁ TENDENCI ALGEBRAICKÝ VÝRAZ „VYPOČÍTAT, UZAVŘÍT“, DOSTAT SE K JEDNOMU VÝSLEDKU.

Tato obtíž se může projevit například tím, že se žák v úloze 8.9 dožaduje hodnoty n , aby mohl výraz vypočítat nebo tím, že se v úloze 8.14 snaží určit hodnotu x , jako například Andrea (7. ročník) v této ukázce:

Andrea: $2x + 3x$.

T: Víš, co to je to x , dokázala bys mi to říct?

Andrea: To je nějaký číslo, který tam musíme, se k tomu dopracovat?

Pro další konkrétní ukázky odkazujeme čtenáře na *Knihu*, oddíl 6.4.3.

Doporučení: Domníváme se, že obtíž plyne především z dosavadních žakových zkušeností s úlohami obecně, a s úlohami obsahující proměnnou zvlášť. Připomeňme, že písmeno-proměnná má v matematice několik rolí: první z nich je proměnná jako zobecněné číslo; druhou funkcí proměnné je funkce zástupce množiny hodnot, kterých může nabýt daný referent (veličina, množství, míra atd.) při modelování vztahů, například ve fyzice nebo geometrii; třetí rolí je písmeno jako neznámá (tj. hledaná odpověď na otázku, v podobě konkrétních hodnot,

nejčastěji v rovnicích) a konečně poslední, nejabstraktnější, je proměnná jako prvek systému, který podléhá pravidlům úprav a ekvivalence např. při provádění rozkladu mnohočlenu na součin, a je zároveň zástupcem jiných algebraických objektů (například mnohočlenů, logických výroků atd.).

V prvních letech školní docházky se žáci v rámci aritmetických úloh setkávají opravdu většinou s úlohami, jejichž cílem (popř. důležitým mezikrokem), je získat řešení v podobě číselné hodnoty. Písmeno x (nebo jiný symbol pro proměnnou) dále začíná vystupovat nejdříve v roli neznámé, jako hodnota, kterou lze nebo je třeba určit. Proměnnou jako zástupce hodnot z daného definičního oboru pak znají z úloh typu „dosad' do výrazu“. Algebraický aparát je skutečně ve školské matematice prostředkem k řešení konkrétních úloh, chceme-li však u žáků budovat algebraické myšlení, a tím úroveň jejich abstrakce, je třeba jim ukazovat, že i algebraický výraz je objekt, který má sám o sobě význam, aniž potřebujeme znát jeho aritmetickou hodnotu. Žáci by se tedy měli setkávat s úlohami, ve kterých, podobně jako v našich diagnostických úlohách 8.7 až 8.15, 8.16a a 8.16d, nejde o konkrétní výsledek, ale o získání modelu situace. V této fázi je žákům třeba ukázat, že v matematice je vyjádření situace matematicky alespoň stejně tak důležité jako provádění výpočtu a získávání konkrétních řešení. V neposlední řadě si myslíme, že k tomuto odlišení dvou úrovní matematické činnosti může dopomoci i správná terminologie, která důsledně odliší neznámou a proměnnou.

B) ŽÁK MÁ PROBLÉMY PŘI ALGEBRAIZACI REÁLNÉ SITUACE POPSANÉ SLOVY.

K tomuto jevu patří problémy s vyjádřením vztahu, který je popsán antisignálem, problémy s rozeznáním a vyjádřením multiplikačního vztahu (například celkového počtu předmětů v závislosti na počtu balení a počtu věcí, které obsahuje jedno balení), popřípadě aditivní struktury (například výpočtu celkové útraty). Například Miriam (9. ročník) se pozastavuje nad úlohou 8.15b:

Miriam: Sakra. Počet okurek celkem, když v každé z c zavařovacích sklenic je d okurek.

T: To znamená, že těch zavařovacích sklenic je c , nějaký neznámý počet c .

Miriam: A počet okurek je d .

T: ... A v každé té sklenici je d okurek.

Miriam: Hm, těch sklenic je, ne. (Je špatně rozumět.)

T: Tak si to klidně nakresli. [...]

Miriam: To je docela blbý s těma neznámejma.

Pro další konkrétní případy z rozhovorů se žáky odkazujeme čtenáře na *Knihu*, oddíl 6.4.5.

Doporučení: Žák si postupně buduje představu jednotlivých modelů, přičemž mnohé z nich již ovládá a chápe na úrovni aritmetiky. Použití algebraické symboliky by mělo vycházet z toho, že všechny určité, konkrétní situace (izolované modely) mají stejný "mechanismus" a rolí učitele je pomoci žákovi tento mechanismus objevit a popsat novým jazykem, jazykem proměnných. Tato pomoc by měla vycházet k poukazování na souvislost s číselnými pravidelnostmi, které se nacházejí v repertoáru izolovaných modelů žáka. Od počátku (a je těžko říci, jak dlouho) je třeba slovní zadání konkretizovat na několik případů na úrovni aritmetiky a objevovat obecný mechanismus, a ten se učit zapsat algebraicky. Práce s číselnými pravidelnostmi není v českých vzdělávacích plánech ani učebnicích příliš rozšířena. Učitelé v dotazníku velkou většinou souhlasili s tím, že je důležitá, nevíme však, na kolik je ve výuce rozšířena. Jediný její přesah s výstupy uvedenými v RVP je u učiva funkce (například sestavení funkční tabulky). Domníváme se, že to je z hlediska poznávacího procesu pro žáka dost pozdě.

C) ŽÁK NECHÁPE ROLI KOEFICIENTŮ V ALGEBRAICKÉM VÝRAZU ČI VE VZORCI.

Žák má problémy s uchopením formule na výpočet celkového hodnocení v úloze 8.16a, toto neporozumění se nejlépe ukazuje u úlohy 8.16d, ve které se většina žáků nejdříve uchýlila ke změně znamének ve formuli, a i přes návodné snahy tazatelů jim role koeficientu ve váženém ohodnocení zůstala nejasná (více podrobností najde čtenář v oddílu 6.4.1 a 6.4.5 v *Knize*). Zde uvádíme na ukázkou Nelinu (žákyně 9. ročníku) nejistotu u úlohy 8.16a:

T: Hm, paráda. Super! Tak tam doplň ty znamínka. Řeklas to dobře.

Nela: Jo, ale já furt nevím, jako, proč je tady to. Ukazuje na koeficienty ve vzorci.

T: Jo, ty koeficienty, ty tam dodali ty výrobci, nebo ty, jak se to tady píše, časopis Dům a design, jo, kterej to odprezentoval, tak říkal, že si jako třeba myslel...

Nela: Jo takhle, to jsou ty body! Ukazuje do zadání.

T: No, tady to jsou ty body, ale to se těch koeficientů netýká.

Nela: Jo aha.

Doporučení: Koncept koeficientu jako váhy kritéria je o stupeň abstraktnější než multiplikativní vztahy dvou veličin (například v geometrii nebo ve výpočtu celkové ceny, jak vidíme v předchozích odstavcích), kde jsou obě nezávislé proměnné pojmenovatelné, a relativně reálné. Na rozdíl od toho je však koeficient pouhá hodnota, která nenese informaci o žádné jiné reálné "veličině". Objevování a zobecňování číselných pravidelností však může pomoci žákům tuto překážku překonat právě tím, že hledáním obecného mechanismu (oproštěného od reálného kontextu, tedy pouze v oboru číselných hodnot) sami koeficienty začnou používat. V našich rozhovorech se například žákům dařilo částečně nezvyklost úlohy překonávat pomocí nápověd tazatelů, které obsahovaly konkrétní hodnoty. U podúlohy B1a tazatelé s žáky rozebrali paralelní jednodušší model situace hodnocení (například tří aut se třemi kritérii hodnocení, obr. 8.1), u úlohy B1d žáky navedli na konkrétní změnu koeficientu. Všichni žáci se shodli na tom, že podobné úlohy ještě nikdy neřešili.

A1	A2	A3	
3	2	1	modaz
1	3	2	vzhled
1	2	3	rychlost
5	7	6	

Obr. 8.1: Návodné schéma k úloze o váženém hodnocení v soutěži o nejlepší kuchyň. Tabulka zobrazuje údaje pro alternativní situaci – soutěž o nejlepší auto

D) ŽÁK MÁ PROBLÉMY S GEOMETRICKOU REPREZENTACÍ ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU.

Tento problém se objevil nejčastěji u úloh 8.14 a 8.15. Žáci měli nejčastěji problém s první úlohou v úloze 8.14, ve které šlo o porovnání délky úsečky sestávající ze segmentů délky 2, 3 a x s výrazem $2x + 3x$. Příkladem je Michael (9. ročník).

T: Když tenhle úsek je dlouhý 2, tenhle je dlouhý 3 a tenhle je dlouhý nějakou neznámou hodnotu x .

Michael: No, tak by se to rovnalo $x \dots 5x$.

T: Jako 5 krát x .

Michael: No.

Další konkrétní ukázky uvádíme v *Knize* v oddíle 6.4.7.

Doporučení: Kromě výše uvedené potíže s potřebou konkrétního výsledku a potřeba spojovat modely geometrických útvarů s konkrétními mírami (viz oddíl 4.4a), zde hraje roli malá nebo žádná zkušenost žáků s tímto propojením. Geometrická reprezentace algebraických výrazů je jedna z "opomenutých příležitostí" ve výuce matematiky. Historicky se algebraická symbolika rodila z prostředků a pojmů geometrických. Je tedy zvláštní, že operace součet a součin nejsou v naší školní algebře častěji spojovány s modelem délek, obsahů a objemů geometrických útvarů a těles. Pouze přibližně polovina učitelů v dotazníkovém šetření souhlasila s tím, že při výuce algebraických výrazů využívá jejich geometrická znázornění. V osobních rozhovorech s učiteli jsme také

zaznamenali nedůvěru v účinnost nebo jasnost těchto prostředků. Domníváme se však, že účinnost záleží opět z velké míry na tom, kolik a jakých zkušeností žákovi poskytneme. Pokud se nám například podaří z izolovaných modelů délky úseček rozdělených na dva a více segmentů vybudovat obecný aditivní model, tedy jestliže pro žáka součet dvou a více hodnot či proměnných představuje úsečku a , analogicky, součin hodnot, výrazů či proměnných reprezentuje obsah obdélníka se stranami příslušných délek, otvíráme žákovi nový repertoár pro řešení úloh. Objevování vztahů mezi geometrickými a algebraickými reprezentacemi je ostatně oblíbená činnost i pro učitele. Čtenáře vyzýváme k vyřešení úlohy 8.17 pomocí geometrického znázornění rozdílu obsahů dvou obdélníků.

E) ŽÁK NEPOUŽÍJE ZÁVORKY PŘI DOSAZOVÁNÍ DO VÝRAZU NEBO VZTAHU.

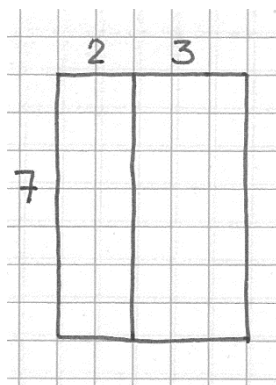
Typickým příkladem je řešení úlohy 8.23, kde žák vyjádří vztah pro obsah, aniž délku strany $3x + 5$ opatří závorkami. Součin obou daných délek pak upravuje nesprávně jako $4x \cdot 3x + 5$ nebo $3x + 5 \cdot 4x$. Podobně postupuje i u substituce dvojčlenem v úloze 8.21 nebo u dosazení záporného čísla za dvojčlen v úloze 8.22.

Doporučení: Žáci se se závorkami setkávají již u číselných výrazů. V našich vzdělávacích plánech ani učebnicích neexistuje celek, který se explicitně závorkami zabývá, žáci sbírají zkušenosti postupně. Potřeba použít závorky by měla plynout z žakovy potřeby vymezit-ohraničit matematicky složitější objekt (číselný výraz, záporné číslo, mnohočlen atd.), na němž je konána určitá operace (tato potřeba však na druhou stranu plyne z žakova porozumění přednosti operací). Tuto potřebu můžeme vyvolat například tím, že daný objekt reprezentuje určitou jednu entitu (například právě v substitučních úlohách by propojení mělo být nastoleno). Přikláníme se k tomu, aby žák používal závorky dle své potřeby, vůči třeba všem operacím a i objektům, u kterých to není z hlediska obecné matematické konvence nutné. Pokud žák závorky naopak nepoužívá, je mu zřejmě důležitost vymezení nedostatečně jasná. Objevení rozdílných výsledků s použitím závorek a bez nich je snadné a didakticky vhodné u číselných výrazů, ale ani u algebraických výrazů by nemělo chybět. Zdá se, že očekávání, že žáci pochytí význam závorek „za chodu“, je zřejmě nerealistické, věnování se této problematice explicitně v učebním celku stojí za zvážení.

G) ŽÁK ŠPATNĚ ROZNÁSOBUJE ZÁVORKU.

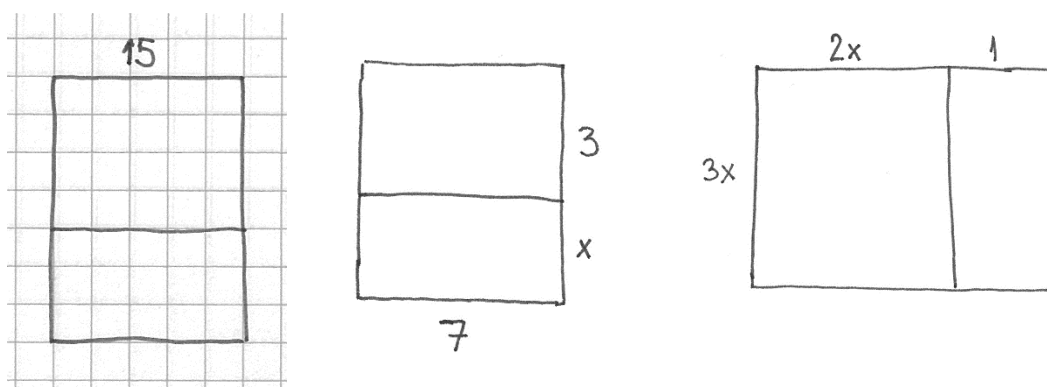
Žák neaplikuje distributivní zákon. U našich úloh jde zejména o násobení dvojčlenu číslem nebo jednočlenem. Žák vynásobí pouze jeden člen v závorce, například upravuje $2(1 + x)$ na $2 + x$.

Doporučení: Jde vlastně o problém inverzní k předchozímu. Žák nedokáže závorku interpretovat jako pokyn k provedení operace na každém z členů ohraničeného objektu. Toto je typicky algebraický problém, neboť u číselných výrazů žák upravuje číselný výraz přirozeně tak, že vyčíslí hodnotu v závorce a s hodnotou, kterou získá, provede operaci. Tato zkušenost zřejmě působí jako překážka v případě algebraických výrazů, kde výraz v závorce zpravidla upravit na určitou hodnotu či jednočlen nelze. Distributivní zákon je tedy typicky algebraickou, a tudíž pro žáky novou, záležitostí, která si vyžaduje pozornost. To ovšem neznamená, že bychom se měli vyhýbat distributivnímu zákonu u číselných výrazů. Naopak, ukázání rovnosti číselných výrazů „upravených“ pomocí distributivního zákona a vyhodnocení obvyklým způsobem (vyčíslení hodnoty v závorce) je vhodnou přípravou k zobecnění tohoto procesu v případě, že závorku nelze vyčíslit. Další reprezentací distributivního zákona je například již zmiňovaná rovnost obsahu obdélníka a jeho částí. Je vhodné opět začít s několika modely s konkrétními hodnotami, postupně přidat proměnné, diskutovat o obecnosti. Model funguje i pro násobení dvojčlenů. Z učebnic jej znají učitelé zejména jako reprezentaci vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu. Vzhledem k tomu, že se s tímto modelem žáci setkávají až v tak pozdním stadiu, je možné, že je vnímán spíše jako zpeřtení jak ze strany žáků, tak ze strany učitelů.



Obr. 8.2: Součet obsahů menších obdélníků je roven obsahu velkého: $7(2 + 3) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3$.

Žáci mohou distributivní zákon sami objevit. Můžeme jim například předkládat sérii obrázků rozdělených obdélníků, podobných těm zobrazeným na obr. 8.2, uspořádat jednotlivé výpočty obsahů (jako v předchozí ukázce) do tabulky. Žáky pak vyzveme, aby pozorovali rovnosti výrazů a vytvořili si k ní vlastní pravidlo (distributivní zákon, popř. také asociativní zákon). Důležité je, aby žáci vnímali vztah jako rovnost (jde vždy o týž obsah téhož útvaru). Samozřejmě, že případů je možno uvést více, zákon bude fungovat pro jakýkoli konečný počet rozdělení, objeví se zde znovu asociativita násobení i sčítání, role závorek atd.



Obr. 8.3: Další ukázky případů pro geometrické odhalení principu rovnosti v distributivním zákonu.

H) ŽÁK MÁ PROBLÉM S NÁSOBENÍM NEBO SČÍTÁNÍM JEDNOČLENŮ S JEDNOU PROMĚNNOU.

Žák například provede úpravu (v úloze 8.23) takto: $3x \cdot 4x = 12x$. Jinou situaci vystihuje například případ žáka, který při úpravě následujícího typu chce násobit koeficientem i mocnitel (v našich rozhovorech šlo o úpravu v úloze 8.25): $S = 18 (2x^3)^2 = 18 \cdot 4x^6 = 72x^{6-18}$. Žák sčítá či odčítá mocniny různého řádu například v úloze 8.24: $12x^2 + 20x = 32x^3$.

Doporučení: Zkušenosti i odborná literatura ukazují na nestálost a nevyzpytatelnost chyb, kterých se žáci dopouštějí při úpravách výrazů. Podle všeho si žák často tvoří svá vlastní pravidla, nebo systém pravidel, podle kterých manipuluje s objekty. Tato pravidla mohou fungovat na několika místech, ale matematicky selhat na dalších. Navíc mohou být žákem vytvořena a udržena pouze v krátkém časovém úseku a někdy k jejich tvorbě nechtě přispíváme jako učitelé (viz například případ Daga v *Knize*, oddíl 6.6.3, úloha o povrchu tělesa). Proč jsou tato interní pravidla odlišná od těch, která vychází z obecných matematických vztahů? Na tuto otázku těžko najdeme jednoznačnou odpověď. Jedním z důvodů je samotná úroveň abstrakce, která je charakteristická pro algebraické výrazy. Postrádají-li výrazy vnitřní význam, žák se nemá o co opřít a v horším případě se učí hrát hru podle pravidel, jejichž původ mu uniká. Jiným důvodem může být kvantum pravidel, které žák s úpravami výrazů musí ovládnout (podobná situace nastává i například u operací s celými čísly). Každopádně zběhllost v úpravách výrazů je záležitost dlouhodobého získávání zkušeností. Víme, že učitelé pravidla (například násobení

mnohočlenů) s žáky odvozují na základě již upevněných poznatků. Jedním z prostředků, který má učitel k dispozici, je diagnostika toho, jak žáci uvažují. Případná reedukace by se měla opírat opět o konceptuální podstatu, ze které vychází a kterou by měl žák mít k dispozici vždy, když „zapomene“. Jak aritmetické izolované modely (číselné vztahy, dosazování), tak geometrické reprezentace vztahů by zde měly hrát důležitou roli. Učitelé se v dotazníku i rozhovorech vyjadřovali často o použití metafor, například „nemůžeme sčítat jablka a hrušky“ (v případě různých mocnin jedné proměnné). (Ale násobit a dělit je můžeme. Nebo to bylo naopak?) Dáváme čtenáři k zamyšlení, zda zavedená reprezentace různých mocnin jako délky, obsahu a objemu a třeba zjednodušená představa „nesčítáme čtverec a krychli“ neposkytnou žákovi názornější oporu, až si nebude jist, jak výraz upravit.

K didaktickému rozboru obtíží žáků týkajících se úprav algebraických výrazů se musíme zmínit o podstatě úprav, na kterou se často zapomíná, a totiž, že jádrem úprav je rovnost, tedy rovnost mezi původním a upraveným výrazem (rovnost znamená, že pro každou z hodnot definičního oboru nabývají oba rovné výrazy stejnou hodnotu). I samotné vyjádření „úpravy výrazů“ naznačuje, že jde o úkon, ale podstata rovnosti z něj není zřejmá (na rozdíl například od ekvivalentních úprav rovnic, kde je ekvivalence alespoň součástí terminologie), zejména jelikož tento úkon je prováděn jako „výpočet“, typicky zleva doprava. Domníváme se, spolu s odbornou literaturou, že tato konceptuální podstata je důležitá. Úlohy podobné úloze 8.19, by mohly podpořit tento koncept. Stejně tak porovnávání dvou výrazů, či úlohy typu „jaký byl původní výraz?“, které apelují na „obousměrnost“ úprav.

8.5 DALŠÍ ÚLOHY

Úloha 8.26 (PISA 2013, upraveno)

Dveře se za minutu otočí čtyřikrát kolem dokola. V každé ze tří částí dveří je místo nejvýše pro dvě osoby. Vyjádři matematicky, kolik maximálně lidí (m) projde dveřmi za t hodin.

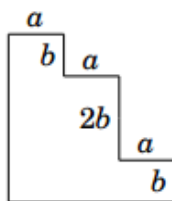
Komentář: Úloha nabízí další zkušenost s multiplikativními modely, tentokrát v závislosti na čase, počtu rotací dveří a počtu osob v ohraničeném prostoru. Doporučujeme žáky vést k náčrtku situace a k tabulkovému zápisu konkrétních hodnot ($t=1, 2, \dots$) před odvozením obecného vztahu.

Řešení: $m = 60 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot t = 1440t$

Úloha 8.27 (Matematický Klokán 2011)

Obvod obrazce se rovná

- a) $3a + 4b$
- b) $3a + 8b$
- c) $6a + 4b$
- d) $6a + 6b$
- e) $6a + 8b$



Odpověď: e)

Komentář: Zeptejte se žáků, zda by uměli načrtnout jiný útvar/útvary se stejným obvodem ($6a + 8b$).

Úlohu může následovat úloha inverzní:

Jaké obrazce může mít obvod o délce a) $12x + 2y + 4$? b) $11s + 8r$?

Nechte žáky vyjádřit obsah obrazce na obrázku. (Odpověď $4b \cdot a + 3b \cdot a + a \cdot b = 8ab$.)

Jaký jiný obrazec se stejným obsahem mohou sestavit? (Odpověď např. obdélník se stranami délky $2a$ a $4b$)

Úloha 8.28 (TIMSS 1999)

představuje počet časopisů, které přečte Linda každý týden. Který z výrazů vyjadřuje celkový počet časopisů, které Linda přečte za 6 týdnů?

a) $6 + \text{$ (6,5 %)

b) $6 * \text{$

c) $\text{} + 6$ (4,3 %)

d) $(\text{} + \text{)}$ * 6 (6,7 %)

Řešení: b)

Komentář: Úloha poskytuje žákům další zkušenost s modelem multiplikativního vztahu.

Úloha 8.29 (Klokan 2010)

$a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = e - 5$. Které z čísel a, b, c, d, e je největší?

Řešení: e)

Úloha 8.30

Úpravou výrazu jsme získali výraz $x^2(x + 2)$. Jak mohl vypadat původní výraz?

Komentář: Podpořte různá řešení.

9. DOPORUČENÉ ČTENÍ

- Bachratá, K., Bachratý, H. (2013). Budovanie matematických predstáv pomocou manipulácií. *Učitel matematiky*, 21(2), 65–75.
- Durdíková, I. (2007). *Mnohočleny v učebnicích v České republice a ve Finsku*. Diplomová práce. Vedoucí N. Stehlíková. Dostupné z <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/22423/>.
- Hejný, M. (1995). Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika*, 4, 386-399
- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta.
- Hejný, M., Jirotková, D. (2010). *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.
- Hejný, M. a kol. (1990). *Teoria vyučovania matematiky 2*. (Žlutá kniha). Bratislava: SPN.
- Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice*. Praha: Portál.
- Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Kuřina, F. (2001). *Geometrie a svět dětí, o vyučování geometrii na 1. stupni*. Hradec Králové: Pedagogické centrum.
- Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.
- Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v ČB.
- Najvarová, V. (2014). Čtenářská gramotnost žáků 1. stupně základní školy. *Pedagogická orientace*, 18(1), 7–21. Retrieved from <https://journals.muni.cz/pedor/article/view/851/732>
- Tichá, M., Macháčková, J. (2006). Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.
- Ptaková, M. (2010). *Slovní úlohy v první a druhé třídě*. Postupová práce. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. Katedra psychologie. Vedoucí M. Rendl.
- Rendl, M. (2001). *Poznámky ke struktuře a sémantice slovních úloh: od 4. do 6. třídy*. In *Pražská skupina školní etnografie: 6. třída*. Příloha dílčí zprávy o řešení grantového projektu GA ČR 406/94/1417 „Žák v měnících se podmínkách současné školy“. Praha: Katedra pedagogické a školní psychologie, UK v Praze - Pedagogická fakulta. 52 stran.
- Strnadová, M. (2006). Slovní úlohy s antisignálem. *Učitel matematiky*, 14(3), 180-184.
- Tichá, M., Hošpesová, A. (2011). Gramotnost učitele matematiky a tvoření úloh. In Hošpesová a kol., *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (s. 39-56). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Vaniček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Weinzettel, P. (2014). *Slovní úlohy v prvním a druhém ročníku základní školy*. Diplomová práce. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce M. Kaslová.

10. POUŽITÁ LITERATURA

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte NC: Information Age Publishing.
- Botlík, O., Souček, D. (2011a). *Komentované výsledky projektu KALIBRO. Školní rok 2010/11 – žáci 5. ročníku.* (Dostupné na <http://www.kalibro.cz/Broz525.pdf>)
- Botlík, O., Souček, D. (2011b). *Komentované výsledky projektu KALIBRO. Školní rok 2010/11 – žáci 7. ročníku.* (Dostupné na <http://www.kalibro.cz/Broz527.pdf>)
- Botlík, O., Souček, D. (2012). *Komentované výsledky projektu KALIBRO. Školní rok 2011/12 – žáci 7. ročníku.* (Dostupné na <http://www.kalibro.cz/Broz537.pdf>)
- Botlík, O., Souček, D. (2013). *Komentované výsledky projektu KALIBRO. Školní rok 2012/13 – žáci 7. ročníku.* (Dostupné na <http://www.kalibro.cz/Broz547.pdf>)
- CERMAT (2006). *Závěrečná zpráva z projektu Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 5. tříd základních škol 2006.* (Autoři neuvedeni.) (Dostupné na <http://www.cermat.cz/2006-1404034178.html>)
- Čížková, M. (2014). *MATEMATIKA pro 3. ročník základní školy, Pracovní sešit 1. 2. vyd.* Praha: SPN.
- ČŠI: Výsledky mezinárodních šetření PIRLS 2011 a TIMSS 2011. Česká škola [online]. 11. prosince 2012 [cit. 2013-04-17]. Dostupné z: <http://www.ceskaskola.cz/2012/12/csi-vysledkymezinarodnich-setreni.html>
- Greer, B., Verschaffel, L., Corte, E. (2002). „The answer is really 4.5”: Beliefs about word problems. In G.C. Leder, E. Pehkomen, G. Töner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 271–292). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta.
- Hejný, M. a kol. (1990). *Teoria vyučovania matematiky 2.* (Žlutá kniha). Bratislava: SPN.
- Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.
- Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Lesáková, E., Řídká, E. (2006). Některá zjištění vyplývající z projektu „Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd“. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.
- Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Odvárko, O., Calda, E., Šedivý, J., Židek, S. (1990). *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN.
- Palečková J. a kol. (2001). *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.
- Ptaková, M. (2010). *Slovní úlohy v první a druhé třídě. Postupová práce.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. Katedra psychologie. Vedoucí M. Rendl.
- Rendl, M., Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, 24(1), 22–57. DOI: 10.5817/PedOr2014-1-22
- Rendl, M., Vondrová, N. a kol. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta.
- Sedláková, J. (2006). *Chápání zlomků u dětí ze 7. a 8. třídy.* Diplomová práce. PedF UK v Praze, vedoucí M. Rendl.

Tichá, M., Hošpesová, A. (2011). Gramotnost učitele matematiky a tvoření úloh. In Hošpesová a kol., *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (s. 39–56). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Tomášek V., Frýzek M. (2013). *Matematická gramotnost úlohy z šetření PISA 2012*. Praha: Česká školní inspekce.

Tomášek, V. a kol. (2009). *Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Vondrová, N., Rendl, M. a kol. (2015). *Kritická místa matematiky na základní škole v řešeních žáků*. Praha: Karolinum.

Vondrová, N., Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrová a kol., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Weinzettel, P. (2014). *Slovní úlohy v prvním a druhém ročníku základní školy*. Diplomová práce. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce M. Kaslová.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224–239.